

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ В КОЛЛЕКТИВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЯДЕРНОЙ И АДРОННОЙ ФИЗИКЕ

В. Н. Первушин, Х. Райнхардт, Д. Эберт

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С помощью континуального интеграла в коллективных переменных переформулируются различные модели теории поля (нерелятивистская ядерная многочастичная модель, абелева калибровочная теория безмассовых кварков и глюонов, двумерная квантовая хромодинамика). В качестве коллективных переменных выбираются наблюдаемые связанные состояния. Первая и вторая вариации коллективных действий дают уравнения для фермионного и бозонного спектра теорий. Получаются новые диаграммные правила теории возмущений.

Path-integral techniques in collective fields are used in order to reformulate various field-theoretic models (a nonrelativistic nuclear many-body system, an Abelian gauge theory of massless quarks and gluons, two-dimensional quantum chromodynamics) in terms of physical bound-state fields. The first and second variations of the respective collective actions yield equations for the fermion and boson spectrum of the models. Finally, modified perturbation theories in terms of the bound-state fields are obtained.

ВВЕДЕНИЕ

Функциональные интегралы [1—3] широко используются в нерелятивистской физике многих тел и в релятивистской квантовой теории поля, в том числе для квантования неабелевой калибровочной теории [4]. В частности, эти интегралы дают естественное обобщение на теорию поля квазиклассических методов квантовой механики [5].

Функциональная техника становится особенно эффективной при исследовании таких коллективных явлений, где обычные методы теории возмущений неприменимы и нуждаются в модификации. Это касается, например, описаний коллективных осцилляций в сверхпроводнике [6], плазменных колебаний электронов, взаимодействующих с кулоновскими силами [7], или коллективных движений в ядерной многонуклонной системе [8].

В релятивистской теории поля функциональные интегралы можно использовать для перехода от локальной кварк-глюонной теории в полностью эквивалентную полевую теорию, формулируемую в терминах наблюдаемых адронов [9, 10], которые интерпретируются как коллективные степени свободы. Существенной чертой рассматриваемого здесь метода континуального интеграла в коллективных переменных является переход к новым динамическим степеням свободы, которые, как правило, характеризуются другими квантовыми числами. Введение коллективных степеней свободы в большинстве случаев значительно упрощает рассмотрение многочастичных систем. Это происходит из-за того, что большую часть взаимодействия между фундаментальными полями теории можно включить в коллективные моды, так что остаточное взаимодействие может рассматриваться по теории возмущений.

Функциональная техника является весьма удобной для вывода правил Фейнмана модифицированной теории возмущений, которая включает коллективные возбуждения систем как основные поля теории (например, плазмоны в электронном газе, поверхностные и парные фононы в ядре, мезоны и дикварки в кварк-глюонной теории).

Цель настоящего обзора показать эффективность применения функциональных методов для описания коллективных степеней свободы в различных областях современной физики. Демонстрируются эти методы для ясности на упрощенных моделях (см. разд. 1 и 3). Для лучшего понимания кратко перечислим главные моменты метода функционального интегрирования в коллективных переменных. Мы исходим из лагранжиана фермионов с двухчастичным взаимодействием. Такое взаимодействие может возникать, например, при обмене фундаментальными частицами (глюонами). Это двухчастичное взаимодействие (четвертого порядка по фермионным полям) затем линеаризуется введением коллективных (бозонных) переменных. Для возбуждений частица — дырка (кварк — антикварк) используются реальные поля, которые бילוкальны в релятивистской теории. Возбуждения частица — частица (дикварки) описываются комплексными полями. Интеграция по фермионным переменным дает окончательно новое «эффективное» действие в терминах коллективных полей, которое (в высокой степени) нелинейно и нелокально. Из принципа минимального действия затем находим «классические» уравнения движения коллективных полей.

Эти уравнения совпадают с уравнениями Швингера — Дайсона [11, 12] для фермионных функций Грина в низшем нетривиальном приближении теории возмущения. Затем коллективное действие разлагается вокруг классических решений. Член второго порядка дает уравнение Бете — Солпитера в лестничном приближении, которое определяет свободные коллективные (бозонные) возбуж-

дения. Окончательно выводится модифицированная теория возмущений в терминах коллективных полей (разложение по петлям).

В разд. 1 описываемый метод применяется к схематической модели ядерной многочастичной системы с парными и частица-дырочными силами. Как будет показано ниже, функциональный метод дает строгое обоснование (без использования теории возмущений) так называемой теории ядерного поля (ТЯП) [13—16], которая до сих пор выводилась эвристически. При этом, естественно, возникают соответствующие графические правила ТЯП. В рамках этой модели легко можно изучить различные многочастичные эффекты, например фазовые переходы и сопровождающие их явления. Кроме того, этот метод позволяет обнаружить некоторые интересные связи между коллективными модами возбуждений при фазовых переходах.

В разд. 2 описана абелева калибровочная теория взаимодействующих безмассовых кварков и векторных глюонов. В этой модели радиационные поправки обуславливают динамическое спонтанное нарушение киральной γ_5 -инвариантности.

Окончательно в разд. 3 будет исследована двумерная неабелева калибровочная теория цветных кварков и глюонов, называемая квантовой хромодинамикой (КХД). В этой модели демонстрируется, что локальную кварк-глюонную теорию можно преобразовать в бесконечно компонентную неполиномиальную теорию поля в терминах бесцветных связанных состояний — мезонов. Модифицированная теория возмущения возникает в форме $1/N_c$ -разложения (N_c — число цветов), которое формально очень близко к $1/\Omega$ -разложению (Ω -вырождения одночастичных уровней) в ТЯП.

1. СХЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЯДЕРНОЙ МНОГЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Применим вначале функциональную технику к нерелятивистской проблеме многих тел. На простой схематической модели ядра можно довольно ясно продемонстрировать эффективность функционального метода [8]. В рассматриваемой сравнительно простой модели отражены характерные черты ядерной многочастичной системы [17]. Кроме того, в ней проявляются интересные отношения между различными фазовыми переходами в ядрах (сверхтекучие фазы, деформация ядра).

Эта модель позволяет объяснить простым способом основные черты нового типа теории поля — теории поля для составных полей — так называемой *теории ядерного поля* [13—16, 19, 21]. В этой теории корректно описывается взаимодействие между элементарными и составными (коллективными) полями. При этом преодолеваются все проблемы, которые связаны с тождественностью фермионов, входящих одновременно в одночастичные и кол-

лективные возбуждения (принцип Паули). В последние годы ТЯП успешно применяется для изучения физики структуры ядра [19, 22, 23].

Модель и метод. Рассмотрим модель, состоящую из N фермионов, распределенных по двум одночастичным уровням, каждый из которых имеет вырождение $2\Omega = N$. Одночастичные уровни разделены энергией ε . Состояние частиц характеризуется квантовыми числами (σ, m) , где индекс σ примет два значения $\sigma = -1$ и 1 для нижнего и верхнего уровня соответственно, а m обозначает вырожденные состояния на каждом уровне. Фермионы взаимодействуют попарно посредством монополярных сил [частица — дырка (cd) и частица — частица (cc)]:

$$\left. \begin{aligned} H &= H_{\text{Sp}} + H_{\text{tb}}; & H_{\text{Sp}} &= \varepsilon \sum_{m, \sigma} \sigma a_{m\sigma}^+ a_{m\sigma} / 2; \\ H_{\text{tb}} &= -k(P^+P + PP^+) / 2 - \rho(A + A^+)^2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$P^+ = \sum_{m\sigma} a_{m\sigma}^+ a_{m\sigma}^+; \quad A^+ = \sum_m a_{m, 1}^+ a_{m, -1}. \quad (2)$$

Оператор $a_{m\sigma}^+$ ($a_{m\sigma}$) рождает (уничтожает) частицу в (σ, m) -состоянии. Состояния $|\sigma, \bar{m}\rangle = T |\sigma, m\rangle$, где T — операция обращения времени. В невозмущенном основном состоянии $|0\rangle$ нижний уровень заполнен (N фермионов занимают 2Ω подсостояния нижнего уровня), а верхний — пуст, и имеем

$$a_{m, 1}^+ |0\rangle = a_{m, -1} |0\rangle = 0. \quad (3)$$

Так как наша система может совершить фазовый переход к сверхтекучему основному состоянию, можно было бы включить в гамильтониан (1) член $-\lambda \hat{N}$, для того чтобы гарантировать сохранение числа частиц N в среднем. Однако в рассматриваемой модели химический потенциал λ можно положить равным нулю [8]. Если включить хартри-фоковские собственно энергетические вклады, возникающие от H_{tb} , в перенормировку одночастичной энергии $\varepsilon = (\bar{\varepsilon} + 2\rho + k)/2$, то можно переписать гамильтониан в следующем виде:

$$H = \varepsilon \sum_{m\sigma} \sigma a_{m\sigma}^+ a_{m\sigma} - k : P^+ P : - \rho : (A + A^+)^2 :, \quad (4)$$

где нормальное произведение (обозначенное $:$) определяется по отношению к хартри-фоковскому основному состоянию (3).

Производящий функционал для фермионных функций Грина системы дается следующим функциональным интегралом:

$$Z[\eta, \eta^+] = N \int DaDa^+ \exp \left[i \int dt \{ \mathcal{L}_f(t) + \eta^+ a + a^+ \eta \} \right], \quad (5)$$

где

$$\mathcal{L}_f(t) = \sum_{m\sigma} a_{m\sigma}^+(t) (i\partial_t - \sigma\varepsilon) a_{m\sigma}(t) + k : P^+ P : + \rho : (A + A^+)^2 : \quad (6)$$

есть лагранжиан, соответствующий гамильтониану (4); N — несущественный нормировочный фактор, который фиксируется требованием $Z[0, 0] = 1$. Фермионные операторы $a_{m\sigma}(t)$, $a_{m\sigma}^+(t)$ и внешние источники $\eta_{m\sigma}(t)$ рассматриваются как антикоммутирующие переменные (переменные Грассмана), приведенные в приложении. Интегрирование по фермионным переменным в (5) легко выполняется линеаризацией взаимодействия с помощью новых динамических переменных (коллективных полей).

Используя функциональные тождества (см. приложение 3):

$$\begin{aligned} & \exp \left[i \int dt \rho (A + A^+)^2 \right] = \\ & = c_1 \int D\Phi \exp \left[i \int dt \left\{ -\frac{1}{4\rho} \Phi^2(t) + \Phi(t) (A + A^+) \right\} \right]; \quad (7) \\ & \quad \left[\exp \left[i \int dt k P^+ P \right] = \right. \\ & = c_2 \int D\Psi D\Psi^+ \exp \left[i \int dt \left\{ -(1/k) \Psi^+(t) \Psi(t) + P^+ \Psi(t) + \Psi^+(t) P \right\} \right], \quad (8) \end{aligned}$$

где $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ — коммутирующие (Бозе) переменные, представим производящий функционал $Z[\eta, \eta^+]$ в форме:

$$\begin{aligned} Z[\eta, \eta^+] &= N_1 \int Dh Dh^+ \int [D\Phi \int D\Psi D\Psi^+ \times \\ & \times \exp \left[i \int dt \{ h^+(t) G^{-1} h(t) + Q^+ h(t) + \right. \\ & \left. + h^+(t) Q - (1/k) \Psi^+(t) \Psi(t) - (1/4\rho) \Phi^2(t) \} \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь для удобства введены матричные обозначения:

$$\begin{aligned} h_{m\sigma}^+ &= (a_{m\sigma}^+; a_{m\sigma}^-); \quad Q_{m\sigma}^+ = (\eta_{m\sigma}^+; -\eta_{m\sigma}^-); \\ G_{\sigma\sigma'}^{-1}(m; t, t') &= G_{\sigma\sigma'}^{-1}(m; t) \delta(t - t'); \\ G_{\sigma\sigma'}^{-1}(m; t) &= \begin{pmatrix} (i\partial_t - \sigma\varepsilon) \delta_{\sigma\sigma'} + (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) \Phi(t); & \Psi(t) \delta_{\sigma\sigma'} \\ \Psi^+(t) \delta_{\sigma\sigma'}; & (i\partial_t + \sigma\varepsilon) \delta_{\sigma\sigma'} - (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) \Phi(t) \end{pmatrix}. \quad (10) \end{aligned}$$

Интегрируя в (9) по фермионным полям, получаем

$$Z[Q, Q^+] = N_2 \int D\Phi \int D\Psi D\Psi^+ \exp [i \{ S[\Phi, \Psi, \Psi^+] - Q^+ G Q \}], \quad (11)$$

где новое эффективное действие S зависит только от коллективных переменных Φ , Ψ :

$$S[\Phi, \Psi, \Psi^+] = \int dt \left\{ -\frac{1}{k} \Psi^+(t) \Psi(t) - \frac{1}{4\rho} \Phi^2(t) - i\Omega \text{tr} (\lg G^{-1})(t, t) \right\}. \quad (12)$$

Величина G представляет функцию Грина фермиона, движущегося в коллективных полях $\Phi(t)$, $\Psi(t)$. Явное выражение для G найдено в приложении 1. Уравнения движения коллективных полей следуют из вариации действия:

$$\Phi_0(t) = -i2\Omega\rho \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{pmatrix} G(t, t') \right\}_{t'=t+0}; \quad (13)$$

$$\Psi_0(t) = -i\Omega k \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} G(t, t') \right\}_{t'=t+0}, \quad (14)$$

где

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одночастичные возбуждения. Решим уравнения (13) и (14). Для простоты ограничимся статическим решением Φ_0 , Ψ_0 . В этом случае уравнения (13) и (14) сводятся к так называемым *уравнениям Хартри — Фока — Боголюбова* [25]. Используя явное выражение для функции Грина $G(t, t')$, данное в приложении 1, представим уравнения (13) и (14) в виде:

$$\Phi_0 = \Phi_0 \tilde{\rho} / E; \quad \Psi_0 = \Psi_0 \tilde{k} / E; \quad (\tilde{\rho} = 4\Omega\rho, \quad \tilde{k} = \Omega k), \quad (15)$$

где квази-частичная энергия

$$E = \sqrt{\varepsilon^2 + \Phi_0^2 + |\Psi_0|^2}. \quad (16)$$

Из выражения (16) следует, что Φ_0 и Ψ_0 — энергетические щели, возникающие вследствие фазовых переходов в cd и (или) ch -каналах. В зависимости от значений констант связи $\tilde{\rho}$ и \tilde{k} можно различить случаи:

(i) $\tilde{\rho} < \varepsilon$, $\tilde{k} < \varepsilon$, $\Phi_0 = \Psi_0 = 0$; статическая конфигурация полей $\Phi_0 = \Psi_0 = 0$ стабильна;

(ii) $\tilde{\rho} = E > \varepsilon$, $\tilde{k} < E$, $\Phi_0 \neq 0$, $\Psi_0 = 0$; существует фазовый переход в cd -канале, полевая конфигурация $\Phi_0 = \Psi_0 = 0$ становится нестабильной;

(iii) $\tilde{k} = E > \varepsilon$, $\tilde{\rho} < E$, $\Phi_0 = 0$, $\Psi_0 \neq 0$; существует фазовый переход сверхпроводящего типа в ch -канале;

(iv) $\tilde{k} = \tilde{\rho} = E > \epsilon$, $\Phi_0^2 + |\Psi_0|^2 > 0$; система испытывает одновременный фазовый переход в обоих каналах.

Можно точно показать, что эти решения реализуют минимум коллективного действия $S[\Phi, \Psi, \Psi^+]$ (см., например [8])*. Решая (13) и (14), можно формулировать модифицированную теорию возмущений, которая использует функцию Грина $G_0 = G(\Phi_0, \Psi_0, \Psi_0^+)$ как «невозмущенный» пропагатор. Для этого разложим подынтегральное выражение функционала (11) вокруг статического решения Φ_0 :

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \Phi'(t); \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi(t) \\ \Psi(t) \\ \Psi^+(t) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Третий член в (12) тогда и принимает форму (в дальнейшем $\Phi' \equiv \Phi$) **:

$$-i\Omega \int dt \operatorname{tr} (\lg G^{-1}(t, t)) = -i\Omega \int dt \operatorname{tr} (\lg G_0^{-1}(t, t)) + \sum_n L_n[\Phi], \quad (18)$$

где член

$$L_n[\Phi] = -i\Omega \operatorname{tr} \int dt \left\{ \frac{(-)^{n+1}}{n} \left[G_0 \begin{pmatrix} \Phi \hat{T} & \Psi \\ \Psi^+ & -\Phi \hat{T} \end{pmatrix} \right]^n \right\} (t, t) \quad (19)$$

представляет замкнутые фермионные петли с испусканием или поглощением коллективных линий Φ, Ψ . Петлевые процессы, описываемые членом $L_2[\Phi]$, обычно включаются в свободное действие

$$S_{\text{free}}[\Phi] = \int dt \left\{ -\frac{1}{k} \Psi^+(t)\Psi(t) - \frac{1}{4\rho} \Phi^2(t) \right\} + L_2[\Phi]. \quad (20)$$

Таким образом, имеем

$$S[\Phi] = S_{\text{free}}[\Phi] + S_{\text{int}}[\Phi]; \quad S_{\text{int}}[\Phi] = \sum_{n=3}^{\infty} L_n[\Phi]. \quad (21)$$

Свободное действие можно переписать в форме

$$S_{\text{free}}[\Phi] = \frac{1}{2} \int dt dt' \Phi(t) \hat{T}^{-1}(tt') \Phi(t'), \quad (22)$$

здесь пропагатор коллективных полей

$$\hat{T}(t, t') = \langle \Phi(t) \Phi(t') \rangle_{S_{\text{free}}};$$

* В функциональной трактовке сверхпроводимости [6] вариация соответствующего коллективного действия дает уравнение для щели, аналогичное (14). В этом случае теория Боголюбова — БКШ [26, 27] есть не что иное, как классический предел квантовой теории в коллективных переменных.

** Матричное умножение здесь включает интегрирование по промежуточным временам.

$[\langle \dots \rangle_{S_{\text{free}}}]$ означает функциональное усреднение с весовым фактором $\exp(iS_{\text{free}})$ определяется следующей матрицей:

$$\hat{T} = -[1 + \hat{V}\hat{B}]^{-1}\hat{V}/2, \quad (23)$$

где

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 4\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k \\ 0 & 2k & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

есть матрица констант связи; \hat{B} — матрица, элементы которой даны петлевыми графами, составленными из нормальных или аномальных функций Грина (см. приложение 2). Коллективный пропагатор \hat{T} совпадает с двухканальной амплитудой для $\chi\chi$ - и $\chi\delta$ -рассеяния в лестничном приближении. Это легко обнаружить, переписывая (23) как неоднородное уравнение Бете — Солпитера:

$$\hat{T} = -\hat{V}/2 - \hat{V}\hat{B}\hat{T}. \quad (25)$$

Уравнение движения Эйлера — Лагранжа для свободных коллективных полей $\Phi(t)$ следует из вариации свободного действия

$$\Phi(t) = -\hat{V} \int dt' \hat{B}(t, t') \Phi(t') \quad (26)$$

и совпадает с однородным уравнением Бете — Солпитера.

Моды коллективных возбуждений. Обсудим спектр коллективных (бозонных) возбуждений. Собственные частоты коллективных мод ω_n получаются решением однородного уравнения Бете — Солпитера (26). Фурье-преобразование (26) дает следующее уравнение на собственные значения:

$$\det [1 + \hat{V}\hat{B}(\omega)] = 0, \quad (27)$$

где

$$\hat{B}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 4E^2} \hat{b} \quad (28)$$

и матрица \hat{b} определяется как (см. приложение 2)

$$\hat{b} = \frac{\Omega}{2E} \begin{pmatrix} 8(\varepsilon^2 + |\Psi_0|^2) & -4\Psi_0^+\Phi_0 & -4\Psi_0\Phi_0 \\ -4\Psi_0^+\Phi_0 & -2\Psi_0^2 & 2(E^2 + \varepsilon^2 + \Phi_0^2) \\ -4\Psi_0\Phi_0 & 2(E^2 + \varepsilon^2 + \Phi_0^2) & -2\Psi_0^2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Уравнение (27) имеет следующие корни:

$$\omega_1 = 2\sqrt{E^2 + x_1/4E}; \quad \omega_2 = 2\sqrt{E(E - \tilde{k})}; \quad \omega_3 = 2\sqrt{E^2 + x_3/4E},$$

где

$$x_{3,1} = -2[\tilde{\rho}(\varepsilon^2 + |\Psi_0|^2) + \tilde{k}(\varepsilon^2 + \Phi_0^2)] \pm 2\sqrt{[\tilde{\rho}(\varepsilon^2 + |\Psi_0|^2) + \tilde{k}(\varepsilon^2 + \Phi_0^2)]^2 - 4\tilde{\rho}\tilde{k}\varepsilon^2 E^2} \quad (x_{3,1} < 0).$$

В зависимости от различных возможностей фазовых переходов, обсуждаемых выше, получим следующие собственные частоты:

$$(i) \omega_1 = 2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon - \tilde{\rho})} \text{ — поверхностная вибрация;}$$

$$\omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon - \tilde{k})} \text{ — парная вибрация;}$$

$$(ii) \omega_1 = 2|\Phi_0|, \omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{E(E - \tilde{k})};$$

$$(iii) \omega_1 = 2\sqrt{E(E - \tilde{\rho})}, \omega_2 = 0, \omega_3 = 2|\Psi_0|;$$

$$(iv) \omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = 2\sqrt{\Phi_0^2 + |\Psi_0|^2}.$$

Случай (i) дает хорошо известные в приближении хаотических фаз (Random Phase Approximation RPA) моды (фононы), которые описывают поверхностные и парные вибрации системы с нормальным основным состоянием. Если $\tilde{\rho} > \varepsilon$ и (или) $\tilde{k} > \varepsilon$, то частоты ω_n становятся мнимыми, что ведет к экспоненциальному росту волновой функции ($\exp(-i\omega_n t) \rightarrow \infty$). Вероятность для фазового перехода системы в новое основное состояние, содержащее куперовские пары и (или) пары частица — дырка, бесконечно увеличивается, и нормальное основное состояние становится нестабильным. Эта картина согласуется с одновременным появлением щели в одночастичной энергии, если $\tilde{\rho} > \varepsilon$ и (или) $\tilde{k} > \varepsilon$. Случай (ii) соответствует фазовому переходу в канале частица — дырка. Частота поверхностных фононов равна удвоенному значению щели $|\Phi_0|$. Заметим, что фазовый переход в канале частица — дырка уменьшает отношение \tilde{k}/E , ($\tilde{k}/E < \tilde{k}/\varepsilon$), которое характеризует коллективность парных фононов. Таким образом, фазовый переход в канале частица — дырка снимает коллективность из канала частица — частица. Подобные результаты справедливы также для фазовых переходов в чч-канале (случай (iii)). Однако в этом случае возникает решение с нулевой частотой $\omega = 0$ (голдстоун-бозон), соответствующее азимутальному движению с нулевой энергией в комплексной плоскости Ψ_0 : $|\Psi_0|^2 = R^2$. Как хорошо известно, такое решение указывает на спонтанное нарушение симметрии в новом основном состоянии (в настоящем случае — нарушение сохранения числа частиц). В случае (iv) наблюдаем одновременный фазовый переход в обоих каналах, что ведет к азимутальному движению с нулевой энергией на сфере $\Phi_0^2 + |\Psi_0|^2 = R^2$.

Петлевое разложение. Сформулируем модифицированную теорию возмущений, использующую коллективный пропагатор \hat{T} (23) и квазичастичный пропагатор G_0 как «свободные» пропагаторы теории. Для этой цели удобно ввести слагаемое $i\hat{j}\Phi$ (j — источник поля Φ) в экспоненту уравнения (11) и написать производящий

функционал в виде

$$Z[Q, Q^+] = N_3 \exp \left\{ i \left[S_{\text{int}} \left[\frac{\delta}{i\delta \mathbf{j}^t} \right] - Q^+ G \left(\Phi_0 + \frac{\delta}{i\delta \mathbf{j}^t} \right) Q \right] \right\} \times \\ \times \int D\Phi \exp \{ i [S_{\text{free}}[\Phi] + \mathbf{j}^t \Phi] \}_{j=0}.$$

Тогда интеграл по Φ — гауссова типа и его можно вычислить, что дает

$$Z[Q, Q^+] = N_4 \exp \left\{ i \left[S_{\text{int}} \left[\frac{\delta}{i\delta \mathbf{j}^t} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - Q^+ G \left(\Phi_0 + \frac{\delta}{i\delta \mathbf{j}^t} \right) Q \right] \right\} \exp [-i \mathbf{j}^t \hat{T} \mathbf{j} / 2]_{j=0}. \quad (30)$$

Используя тождество

$$F \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) G(x) = \left[G \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) F(y) \exp(ixy) \right]_{y=0},$$

где F и G — две произвольные функции, запишем производящий функционал в следующем виде:

$$Z[Q, Q^+] = N_4 \exp \left[\frac{1}{2} i \frac{\delta}{\delta \mathbf{M}^t} \hat{T} \frac{\delta}{\delta \mathbf{M}} \right] \times \\ \times \exp \left[-i \frac{\delta}{\delta N} G(\Phi_0 + \mathbf{M}) \frac{\delta}{\delta N^+} \right] \exp [i \{ S_{\text{int}}(\mathbf{M}) + Q^+ N + N^+ Q \}_{\substack{\mathbf{M}=0 \\ N=N^+=0}}]. \quad (31)$$

Уравнение (31) выражает в компактной форме правила Фейнмана, обсужденного выше петлевого разложения. В этом разложении $G(\Phi_0 + \mathbf{M})$ и $S_{\text{int}}(\mathbf{M})$ даются открытыми и замкнутыми фермионными линиями, которые испускают и поглощают коллективные линии, описываемые пропагатором \hat{T} (рис. 1). Заметим, что в такой картине все фермионные петли типа собственно энергетических поправок отсутствуют. Остаются только фермионные петли от S_{int} , которые представляют эффективное взаимодействие Φ^n коллективных полей.

Такие члены взаимодействия ведут к ангармоническим эффектам в спектре коллективных возбуждений. Следует отметить, что частоты фононов и размер щели содержат только масштабно-инвариантные константы связи $\tilde{k} = \Omega k$ и $\tilde{\rho} = 4\Omega \rho$, которые предполагаются фиксированными. Если учтем тот факт, что вычет коллективного пропагатора в полюсе $\omega = \omega_n$ содержит фактор Ω [см. (29)], то найдем эффективную константу связи в вершине частица — фотон порядка $\Omega^{-1/2}$. Далее, для каждой замкнутой фермионной петли имеется дополнительный фактор Ω , возникающий от суммирования по индексу m . Таким образом, получаем разложение в ряд теории возмущения по $1/\Omega$, которое для достаточно

больших значений степени вырождения Ω (или, эквивалентно, фермионного числа $N = 2\Omega$) сходится значительно лучше, чем обычная теория возмущений по константе k и ρ .

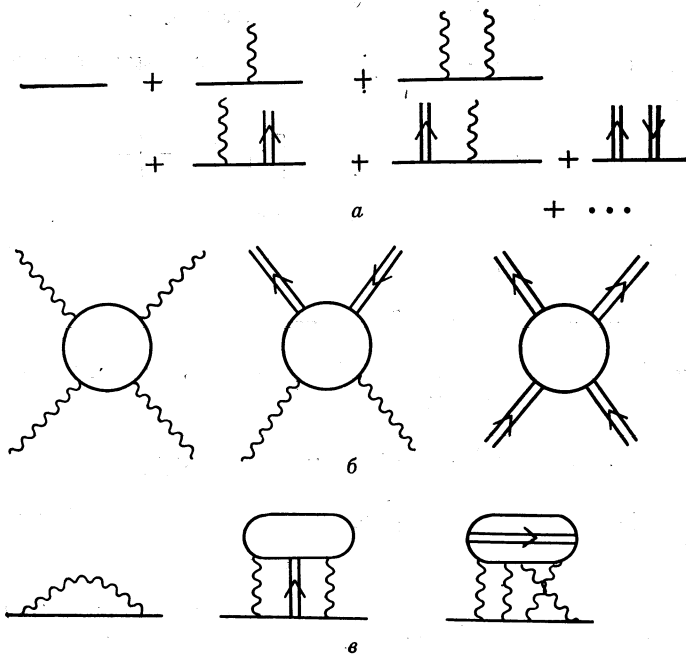


Рис. 1. Диаграммное представление одночастичной функции Грина в терминах коллективных полей $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ (а); некоторые типичные петлевые графы порядка $1/\Omega$, возникающие при разложении $\exp(iS_{\text{int}})$ (б), и диаграммы, дающие вклад в полную одночастичную функцию Грина (в):

сплошная линия обозначает «свободную» функцию Грина $G_0 = G(\Phi_0, \Psi_0, \Psi_0^+)$; $\Phi(t)$ — волнистая линия; $\Psi(t)$ — сплошная

Теория ядерного поля. В модифицированной теории возмущений, основанной на производящем функционале (31) («петлевое разложение»), фермионные переменные полностью устранены. Память о них содержится лишь во внешних источниках. С другой стороны, известно, что в спектре ядерных возбуждений наблюдаются одночастичные и коллективные возбуждения (фононы). Взаимосвязь между одночастичными и коллективными степенями свободы существенна для низкоэнергетического поведения ядра. Поэтому желательно иметь теорию, которая включает явно элементарное фермионное поле и составное фононное поле вместе с их связью. Фонон-частичную константу связи можно также определить непосредственно из эксперимента (см. [19, 23]). Поэтому

в дальнейшем переформулируем теорию таким образом, что невозмущенный базис дается произведением пространств квазичастиц (пространство Фока) и коллективных связанных состояний (пространство фононов). Безусловно, этот базис переполнен и также нарушен принцип Паули. Оба эти недостатка устраняются в так называемой *теории ядерного поля* (см. [13, 14, 19, 21]). В дальнейшем на рассматриваемой модели получим лагранжиан теории ядерного поля вместе с соответствующими правилами Фейнмана. (Вывод теории ядерного поля для общего случая дается, например, в [21, 28].)

Начнем с замечания, что коллективное поле Φ , применяемое в петлевом разложении, не есть собственно само фононное поле, так как пропагатор \hat{T} содержит контактный член \hat{V} . Вычтем поэтому из \hat{T} -матрицы указанный контактный член. Это дает

$$\hat{T} = -\hat{V}/2 + \hat{T}_c, \quad (32)$$

где *

$$\hat{T}_c = K^t \hat{D} K; \quad K = V \sqrt{1/2} u^t V \hat{b} \hat{V}; \quad (33)$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2 - \omega_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega^2 - \omega_3^2} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Здесь u — ортогональная матрица, построенная из собственных решений однородного уравнения Бете — Солпитера, Φ_n (26). Запишем это уравнение в более симметричной форме

$$[\omega_n^2 - 4E^2 + V \hat{b} \hat{V} V \hat{b}] \Phi_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3),$$

$$u = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3). \quad (35)$$

Затем введем снова фермионные степени свободы, выражая $\exp(i S_{\text{int}})$ в уравнении (11) и (21) с помощью интеграла по фермионным полям. Это дает

$$Z[Q, Q^+] = N_5 \exp \left\{ -i \sum_{i=1}^2 L_i \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j_i} \right] \right\} \int D\Phi \int Da Da^+ \times$$

$$\times \exp \left[i \int dt \{ h^+ G_0^{-1} h + Q^+ h + h^+ Q + \Phi^t \hat{T}^{-1} \Phi / 2 + (j + P)^t \Phi \} \right]_{j=0}, \quad (36)$$

* Квадратный корень матрицы \hat{b} определяется, как обычно, равенством $V \hat{b} = W^t V \hat{b}_{\text{diag}} W$, где W — матрица, диагонализующая \hat{b} . Индекс t означает транспонирование.

где

$$P = \begin{pmatrix} A + A^+ \\ P^+ \\ P \end{pmatrix}.$$

Используем здесь первоначальные фермионные переменные, соответствующие свободным одночастичным состояниям [см. уравнение (1)]. Однако для практического применения более удобно сделать унитарное преобразование по фермионным переменным (подобное преобразованию Боголюбова к квазичастицам [27, 25]), так чтобы функция Грина квазичастиц (II.5), (II.9), (II.11) стала диагональной матрицей.

После интегрирования по Φ получим

$$Z [Q, Q^+] = N_6 \exp \left\{ -i \sum_{i=1}^2 L_i \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j^i} \right] \right\} \int Da Da^+ \times \\ \times \exp \left[i \int dt \left\{ \mathcal{L}_f + \frac{1}{4} j^t \hat{V} j + \frac{1}{2} j^t \hat{V} P + \right. \right. \\ \left. \left. + Q^+ h + h^+ Q - \frac{1}{2} [(j + P)^t K^t] \hat{D} [K (j + P)] \right\} \right]_{j=0}, \quad (37)$$

где

$$\mathcal{L}_f = h^+ G_0^{-1} h + P^t \hat{V} P / 4 \quad (38)$$

есть лагранжиан для фермионов. Для того чтобы линейаризовать последний член в экспоненте (37), можно по аналогии с (7) ввести новые коллективные поля $\varphi(t)$, пропагатором которых является функция Грина \hat{D} [см. (34)]. Это дает

$$Z [Q, Q^+] = N_7 \exp \left\{ -i L_2 \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j^i} \right] \right\} \int D\varphi \int Da Da^+ \times \\ \times \exp \left[i \int dt \left\{ \mathcal{L}_{NFT} + \frac{1}{4} j^t \hat{V} j + j^t \left(\frac{1}{2} \hat{V} P + K^t \varphi \right) + Q^+ h + h^+ Q \right\} \right]_{j=0}$$

или эквивалентно

$$Z [Q, Q^+] = \bar{N} \exp \left\{ -i \sum_{i=1}^2 L_i \left[\frac{1}{2} \hat{V} \bar{P} + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j^i} \right] \right\} \int D\varphi \int Da Da^+ \times \\ \times \exp \left[i \int dt \left\{ \mathcal{L}_{NFT} + Q^+ h + h^+ Q + j^t K^t \varphi \right\} \right]_{j=0}, \quad (39)$$

где лагранжиан

$$\mathcal{L}_{NFT} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_{pv} \quad (40)$$

и есть эффективный лагранжиан теории ядерного поля. Он включает в себя полный фермионный лагранжиан \mathcal{L}_f , определенный (38)

или в отсутствие фазовых переходов (6), свободный бозонный лагранжиан \mathcal{L}_b и часть с взаимодействием \mathcal{L}_{pv} :

$$\mathcal{L}_b = \frac{1}{2} \varphi^t \hat{D}^{-1} \varphi; \tag{41}$$

$$\mathcal{L}_{pv} = \mathbf{P}^t K^t \varphi. \tag{42}$$

Выражения \bar{P} , появляющиеся в аргументе L_2 [. . .], получаются из \mathbf{P} заменой переменных a и a^+ функциональными производными $\delta/i\delta\eta^+$, $\delta/i\delta\eta$; K — вершина, описывающая взаимодействие вибраций и частиц. Квантование коллективных полей проводится

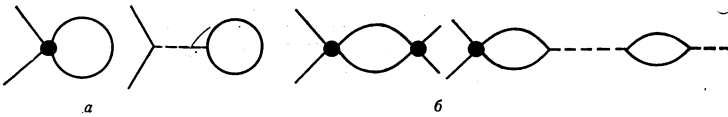


Рис. 2. Диаграммы, которые необходимо исключить из диаграмм ядерного петлевого подхода:
a — вставка Хартри — Фока — Боголюбова; *b* — петлевые диаграммы; точка обозначает двухчастичное взаимодействие; штриховая линия — фонон

так же, как в работе [30]. Функциональный вывод лагранжиана ТЯП, приведенный выше, дает одновременно графические правила для диаграммной теории возмущений, основанной на этом лагранжиане. Множитель перед интегралом в (39) устраняет собственно энергетические вставки Хартри — Фока — Боголюбова ($i = 1$) и петлевые диаграммы ($i = 2$) (рис. 2, *a*, *b*). Эти графы уже включены в определение частицы (квазичастицы) и коллективных (фононных) возбуждений.

Таким образом, из теории устраняется двойной учет (перечует) тех поправок, которые уже включены в эффективный лагранжиан (40). Из-за условия $j = 0$ производящий функционал (40) описывает бозоны, появляющиеся только в промежуточном состоянии. Естественное обобщение (40), которое включает также внешние бозонные состояния, получается, если отказаться от условия $j = 0$. Тогда надо ограничить использование внешних фермионных источников таким образом, чтобы во внешних состояниях не появилось бы фермионных конфигураций, которые можно заменить фононными состояниями. Это ограничение необходимо, чтобы устранить сверхполноту базиса, включающего фермионные и фононные поля (для более детального обсуждения проблемы, связанной с внешними состояниями в ядерной теории поля [24, 29]).

2. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАРУШЕНИЕ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В АБЕЛЕВОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ БЕЗМАССОВЫХ КВАРКОВ И ГЛУОНОВ

Согласно современным представлениям, наблюдаемые адроны — частицы, участвующие в сильных взаимодействиях, — являются связанными состояниями ненаблюдаемых кварков и глюонов. По аналогии с нерелятивистским случаем можно строить кварковые полевые модели, в которых адроны выступают в роли коллективных переменных. В настоящем разделе рассмотрим одну из таких моделей — *абелеву калибровочную теорию безмассовых кварков и глюонов*. Как было показано выше, введение коллективных переменных может сопровождаться спонтанным нарушением симметрии теории, введенной на уровне элементарных полей. Такое нарушение симметрии происходит динамически без введения элементарных полей Хиггса [31], роль которых исполняют коллективные возмущения.

Аналогичная точка зрения сформулирована уже много лет назад Намбу и Иона-Лазиню [32] (для модели с четырехфермионным взаимодействием) при описании спонтанного нарушения киральной симметрии динамически по аналогии с теорией сверхпроводимости. Их работы [32] стимулировали большое число работ в этом направлении [33].

В этом разделе также изучим проблему динамического нарушения киральной γ_5 -симметрии в абелевой калибровочной модели взаимодействующих кварков и векторных глюонов. Массово-подобный член кварков, который может возникнуть за счет радиационных поправок и нарушить исходную киральную симметрию, является скалярной величиной, и основная идея заключается в том, чтобы перейти к новым бислокальным динамическим переменным, содержащим скалярные компоненты. Для этого опять используются функциональные интегралы.

Вычисление функциональных интегралов по бислокальным переменным методом стационарной фазы приводит к «классическим» уравнениям, совпадающим с уравнением Швингера — Дайсона в дифференциальной форме. Обсудим решение этого уравнения, которое было предложено несколько лет назад как исходная точка для построения «конечной» квантовой электродинамики [34]. Затем сформулируем модифицированную теорию возмущения по бислокальным переменным, имеющую в качестве нулевого приближения нетривиальное классическое решение.

Новые динамические переменные. Рассмотрим безмассовые фермионы («кварки») q , взаимодействующие с векторным полем A_μ . Исходным выражением является производящий функционал для

функций Грина *:

$$Z[j, \bar{\eta}, \eta] = N \int DA_\mu Dq D\bar{q} \delta[\partial_\mu A_\mu] \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{q}i\partial q - F_{\mu\nu}^2/4 + g\bar{q}Aq + j_\mu A_\mu + \bar{q}\eta + \bar{\eta}q] \right\}; \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; A = \gamma_\mu A_\mu \text{ и т. д.}; \quad (43)$$

где $j_\mu, \eta, \bar{\eta}$ — внешние источники.

Нормировка N выбрана так, что $Z[0, 0, 0] = 1$. Лагранжиан в (43) инвариантен относительно 1) киральных и 2) масштабных преобразований; 1) $q \rightarrow \exp(i\gamma_5\lambda)q$; 2) $q(x) \rightarrow \lambda^{3/2}q(\lambda x)$; $A_\mu(x) \rightarrow \lambda A_\mu(\lambda x)$. Динамическими переменными здесь являются спинорное и векторное поля, в то время как масса спинорного поля есть скалярная величина. Поэтому для исследования проблемы динамического возникновения массы фермиона предлагается перейти к новым динамическим переменным, содержащим скалярные компоненты.

После интегрирования по векторному полю A_μ получим

$$Z[j, \bar{\eta}, \eta] = N' \int Dq D\bar{q} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{q}(x) (i\partial - \right. \right. \\ \left. \left. - g\gamma_\mu \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) \right) q(x) + \bar{\eta}q + \bar{q}\eta \right] - \\ - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y [j_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) + \\ + g^2 \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x) D_{\mu\nu}(x-y) \bar{q}(y) \gamma_\nu q(y)], \quad (44)$$

где $D_{\mu\nu}(x)$ — пропагатор глюона в калибровке Ландау;

$$D_{\mu\nu}(x) = (g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu / \partial^2) D^c(x); \\ D^c(x) = - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-iqx)}{q^2 + i\epsilon}. \quad (45)$$

(Будем использовать обозначения книги [11].) Введем сокращение

$$K_{(\alpha_1\beta_1; \alpha_2\beta_2)}(x_1y_1; x_2y_2) = \\ = (\gamma_\mu)_{\alpha_1\beta_2} D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) (\gamma_\nu)_{\alpha_2\beta_1} \delta^{(4)}(x_1 - y_2) \delta^{(4)}(y_1 - x_2) \quad (46)$$

и перепишем четырехфермионный член под знаком экспоненты (44) в форме

$$\int d^4x d^4y \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x) D_{\mu\nu}(x-y) \bar{q}(y) \gamma_\nu q(y) = \\ = - \int d^4x_1 d^4y_1 d^4x_2 d^4y_2 [q_{\beta_1}(y_1) \bar{q}_{\alpha_1}(x_1)] \times \\ \times K_{(\alpha_1\beta_1; \alpha_2\beta_2)}(x_1y_1; x_2y_2) [q_{\beta_2}(y_2) \bar{q}_{\alpha_2}(x_2)]$$

* Не будем рассматривать здесь вопросы перенормировки. Для простоты не учитываются внутренние степени свободы кварков (см. разд. 3, где внутренние степени свободы включены).

или

$$-q_{b_1}\bar{q}_{a_1}K_{(a_1b_1; a_2b_2)}q_{b_2}\bar{q}_{a_2} = -(q\bar{q}, Kq\bar{q}). \quad (47)$$

Знак минус в (47) возникает из-за перестановки полей q, \bar{q} . Далее пару дискретной и непрерывной переменных (α_i, x_i) обозначим латинским индексом a_i . Суммирование по латинским индексам означает одновременно интегрирование по непрерывным переменным.

Можно линеаризовать (47), используя интеграл по бислокальным переменным (см. приложение 3):

$$\exp \frac{i}{2} g^2 (q\bar{q}, Kq\bar{q}) = C \int D\chi \exp \left\{ -\frac{i}{2g^2} (\chi, K^{-1}\chi) + iq_b\bar{q}_a\chi_{ab} \right\};$$

$$K_{(ab; cd)}K_{dc, ef} = \delta_{(ab, ef)} \equiv \delta_{af}\delta_{be}, \quad (48)$$

где бислокальное поле $\chi_{ab} = \chi_{\alpha\beta}(x, y)$ трактуется как бозонное поле. Его можно разложить на скалярную, псевдоскалярную, векторную, аксиальную и тензорную компоненты:

$$\chi(x, y) = S(x, y) + \gamma_5 P(x, y) + \gamma_\mu V_\mu(x, y) +$$

$$+ i\gamma_\mu\gamma_5 A_\mu(x, y) + \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] T_{\mu\nu}(x, y). \quad (49)$$

Согласно (49) $D\chi = DSDPDV_\mu DA_\mu DT_{\mu\nu}$. Подставляя (48) в (44) и выполняя интегрирование по фермионным полям (см. уравнение (П.14)), получаем следующее выражение для производящего функционала (43):

$$Z[j, \bar{\eta}, \eta] = \bar{N} \int D\chi \exp(iS[\chi]) Z[j, \bar{\eta}, \eta|\chi]. \quad (50)$$

Здесь

$$S[\chi] = -\frac{1}{2g^2} (\chi, K^{-1}\chi) - i \text{tr} \ln(1 + G_0\chi); \quad (51)$$

$$Z[j, \bar{\eta}, \eta|\chi] = \exp \left[-\frac{i}{2} j_\mu D_{\mu\nu} j_\nu + i\bar{\eta}G(\chi - gA_{\text{ext}})\eta + \right.$$

$$\left. + \text{tr} \ln(1 - gG(\chi)A_{\text{ext}}) \right]. \quad (52)$$

Гриновские функции G_0 и $G(\chi - gA_{\text{ext}})$ определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} i\partial_x G_0(x, y) &= -\delta^{(4)}(x-y); \\ (i\partial_x + gA_{\text{ext}})G(x, y|\chi - gA_{\text{ext}}) - \\ - \int d^4z \chi(x, z)G(z, y|\chi - gA_{\text{ext}}) &= -\delta^{(4)}(x-y), \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где

$$A_{\text{ext}}(x) = -\gamma_\mu \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y).$$

Используем сокращение

$$j_\mu D_{\mu\nu} j_\nu = \int d^4x d^4y j_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) \text{ и т. д. При выводе (52)}$$

использовались тождества * $\{\text{Det } A = \exp \text{tr} \ln A \text{ и } \text{tr} \ln [G_0^{-1} + \chi - gA_{\text{ext}}] = \text{tr} \ln G_0^{-1} [1 + G_0\chi] + \text{tr} \ln [1 - gG(\chi) A_{\text{ext}}]\}$.

Выражение $Z[0, \bar{\eta}, \eta | \chi]$ можно трактовать как производящий функционал фермионных полей во внешнем билокальном поле $\chi(x, y)$ с распределением вероятности $\exp i S[\chi]$.

«Классическое» уравнение движения билокального поля и обосуждение решений. Функционал $S[\chi]$ под знаком континуального интеграла (50) естественно трактовать как функцию действия для билокальных полей. Тогда классическое уравнение движения, которое следует из вариации действия, имеет вид

$$\delta S[\chi]/\delta\chi = -(g^2K)^{-1}\chi - i G(\chi) = 0. \quad (54)$$

Пусть $M = \chi$ означает решение (54). Тогда, умножая (54) на оператор g^2K , получаем **

$$M_{\alpha\beta}(x, y) = -ig^2 D_{\mu\nu}(x-y) [\gamma_\mu G_\nu(x, y|M) \gamma_\nu]_{\alpha\beta}, \quad (55)$$

где функция Грина $G(x, y|M)$ удовлетворяет уравнению

$$i\partial_x G(x, y|M) - \int d^4z M(x, z) G(z, y|M) = -\delta^{(4)}(x-y). \quad (56)$$

Поскольку уравнения (54), (55) получены без учета внешних токов, естественно предположить трансляционную инвариантность

$$M(x, y) = M(x-y), \quad G(x, y|M) = G(x-y|M).$$

Тогда в импульсном представлении вместо (55) имеем:

$$\left. \begin{aligned} M(p) &= -ig^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(p-q) \gamma_\mu \frac{1}{M(q)-q} \gamma_\nu \right\} \\ G(p|M) &= 1/[M(p)-p]. \end{aligned} \quad (57)$$

Из PT - и T -инвариантности следует, что $M(p)$ имеет только скалярную и векторную часть, причем нетрудно показать, что в поперечной калибровке Ландау векторная часть M равна нулю. Таким образом, окончательно получим

$$M(p) = -i \frac{\lambda}{\pi^2} \int \frac{[d^4q]}{(p-q)^2} \frac{M(q)}{q^2 - M^2(q)}; \quad \lambda = \frac{3g^2}{(4\pi)^2}. \quad (58)$$

Уравнения (57), (58) совпадают с уравнением Швингера — Дайсона для массового оператора в низшем нетривиальном порядке

* Операция tr означает шпур оператора в функциональном смысле и обычный шпур по матричным индексам; $G(\chi) \equiv G(\chi - gA_{\text{ext}})_{A_{\text{ext}}=0}$.

** Отметим, что при таком умножении можно изменить класс решений.

теории возмущения [11]. Исходное уравнение (54) является дифференциальной формой уравнения Швингера — Дайсона :

$$(\partial/\partial p_\mu)^2 M(p) = -4\lambda M(p)/[p^2 - M^2(p)]. \quad (59)$$

Это уравнение эквивалентно (58) при граничных условиях ($M(p) = M(p^2)$):

$$\left. \begin{aligned} \left[p^2 \frac{dM(p)}{dp^2} + M(p) \right]_{p^2 \rightarrow \infty} &= 0; \\ \left[p^4 \frac{dM(p)}{dp^2} \right]_{p^2 \rightarrow 0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

которые следуют из (58) после выполнения интегрирования по угловым переменным.

Уравнению (58) удовлетворяет, в частности, тривиальное симметричное решение $M(p) \equiv 0$. Нетривиальное решение линеаризованного уравнения (58) изучалось в «конечной» квантовой электродинамике [34, 35] для больших значений импульса в пространственно-подобной области. Недавно было изучено также решение нелинейного уравнения (59) в пространственно-подобной и во времени-подобной областях [36]. Подставляя асимптотическое выражение $M(p) \sim (-p^2)^c$ (или $\sqrt{p^2}$) для $p^2 \rightarrow -\infty$ ($+\infty$) в (59), (60) легко получаются нетривиальные асимптотические решения

$$M(p) \sim \begin{cases} M_0 (-p^2)^{-(1-\sqrt{1-4\lambda})/2}, & -p^2 \rightarrow \infty; \\ \sqrt{p^2 (1 + (4/3)\lambda)}, & p^2 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (61)$$

Как было указано в [32], уравнение типа (58) является релятивистским аналогом уравнения для щели в теории сверхпроводимости [26, 27]. И подобно тому, как квазичастица в сверхпроводнике есть смесь голых электронов с противоположными знаками заряда, массивная дираковская частица должна быть смесью голых фермионов с противоположной киральностью. (Сравним также (58) с уравнением «щели» (15) в нерелятивистском случае.)

Раскладывая функцию Грина $G(M)$ на нормальную и аномальную части

$$G(M) = [G_{RR}(M) + G_{LL}(M)] + [G_{RL}(M) + G_{LR}(M)], \quad (62)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_{RR}^{(+)}(M) &= \frac{1}{2} \frac{(+)\gamma_5}{2} G(M) \frac{1}{2} \frac{(-)\gamma_5}{2}; \\ G_{RL}^{(+)}(M) &= \frac{1}{2} \frac{(+)\gamma_5}{2} G(M) \frac{1}{2} \frac{(+)\gamma_5}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} G_{RR}^{(LL)}(M) &= \frac{1}{2} \frac{(-)^+ \gamma_5}{2} \not{p} \frac{1}{p^2 - M^2(p)}; \\ G_{RL}^{(LR)}(M) &= \frac{1}{2} \frac{(-)^+ \gamma_5}{2} M(p). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Таким образом, аномальная функция Грина тождественно исчезает в симметричном случае $M(p) \equiv 0$ аналогично тому, как исчезает аномальная функция Грина нерелятивистской модели в отсутствие сверхтекучести [см. уравнение (П.14)]. Из инвариантности вакуума относительно киральных преобразований следует

$$\exp(i\gamma_5\lambda) G \exp(i\gamma_5\lambda) = G, \quad (65)$$

как это легко увидеть, выражая G в виде вакуумного ожидания от T произведения полевых операторов. Нетривиальное решение $M(p) \neq 0$ нарушает (65) и ассоциируется с неинвариантным вакуумом.

В заключение напомним, что (58), переписанное в терминах функции $M(p)/[p^2 - M^2(p)]$, эквивалентно псевдоскалярному сектору однородного фермион-антифермионного уравнения Бете — Солпитера при $P^2 = 0$. Таким образом, для $M(p) \neq 0$ существует также нетривиальное решение однородного уравнения Бете — Солпитера $\Gamma(p, P=0) \sim \gamma_5 M(p)/[p^2 - M^2(p)]$. Это решение (см. ниже), отождествляемое обычно с голдстоуновским бозоном, тем не менее принадлежит к непрерывному спектру и ненормируемо [38].

Разложение по петлям. Классическое решение уравнения (54) соответствует суммированию определенного класса диаграмм обычной теории возмущения. Для вычисления поправок к функциям Грина удобно рассмотреть такую теорию возмущения по билакальным динамическим переменным, которая в качестве нулевого приближения использует нетривиальное классическое решение. По аналогии с нерелятивистским случаем (см. разд. 1) сделаем для этого в интеграле (50) замену переменных

$$\chi(x, y) = M(x - y) + \Phi(x, y), \quad (66)$$

где M — решение уравнения (54), и разложим подынтегральное выражение (50) по билакальной переменной $\Phi(x, y)$. Тогда производящий функционал (50) можно представить в виде

$$\begin{aligned} Z[j, \bar{\eta}, \eta] &= \bar{N}' \int D\Phi \exp[iS_{\text{free}}[\Phi]] \times \\ &\times (\exp[iS_{\text{int}}[\Phi]] Z[j, \bar{\eta}, \eta | M + \Phi]), \end{aligned} \quad (67)$$

где $S_{\text{free}}[\Phi] = -(\Phi, S^{(2)}(M)\Phi)/2$;

$$S_{(a_1 b_1; a_2 b_2)}^{(2)}(M) = \frac{1}{g^2} K_{(a_1 b_1; a_3 b_3)}^{-1} \times \\ \times [\delta_{(b_3 a_3; a_2 b_2)} - i g^2 G_{a_2 h}(M) K_{(b_3 a_3; h l)} G_{l b_2}(M)] \quad (68)$$

и

$$S_{\text{int}}[\Phi] = i \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-)^n}{n} \text{tr} [G(M)\Phi]^n. \quad (69)$$

Линейный член по Φ в разложении $S[M + \Phi]$, который может приводить к спонтанной перестройке вакуума, в (67) отсутствует в силу уравнения (54). Билокальный функциональный интеграл (67) опять дает модифицированную теорию возмущений со свободным действием для билокальных полей $S_{\text{free}}[\Phi]$. Высшие степени разложения по Φ действия $S[M + \Phi]$ определяют взаимодействия $S_{\text{int}}[\Phi]$ и вершины. В дальнейшем функциональное усреднение с весовым фактором $\exp[-\frac{1}{2}(\Phi, S^{(2)}(M)\Phi)]$ будет обозначено кратко как $\langle \dots \rangle_{S_{\text{free}}}$. (Определение усреднения $\langle \dots \rangle_{S_{\text{free}}}$ уже включает фактор нормировки $\langle 1 \rangle_{S_{\text{free}}}^{-1}$, который мы опускаем для краткости.) Определим пропагатор $T_{\alpha\beta; \gamma\delta}(xy; x'y')$ билокального поля $\Phi_{\alpha\beta}(x, y)$ *:

$$T_{(\alpha\beta; \gamma\delta)}(xy; x'y') = i \langle \Phi_{\alpha\beta}(x, y) \Phi_{\gamma\delta}(x', y') \rangle_{S_{\text{free}}} = \\ = [S^{(2)}(M)^{-1}]_{\alpha\beta; \gamma\delta}(xy; x'y'). \quad (70)$$

Заметим, что T является релятивистским аналогом (23) и удовлетворяет следующему неоднородному интегральному уравнению типа Бете — Солпитера:

$$T_{(ab; gd)} = g^2 K_{(ab; gd)} + i g^2 G_{jh}(M) K_{(ab; hl)} G_{li}(M) T_{(ij; gd)}. \quad (71)$$

Графическое представление (70) и разложение в ряд теории возмущения пропагатора T дается на рис. 3, где пунктирная линия означает пропагатор билокального поля Φ , для которого можно ввести обозначение $\overline{\Phi\Phi}$. Во второй строке рис. 3 дается выражение для пропагатора билокального поля в терминах обычных графов Фейнмана, где сплошная линия означает функцию Грина кварка $G(x, y | M)$. Этот класс графов будет обозначаться ломаной линией, символизирующей обмен большим числом глюонов.

Для полноты приведем также полевое уравнение движения, возникающее от вариации свободной (квадратичной) части билокального действия $S_{\text{free}}[\Phi]$:

$$\frac{\delta S_{\text{free}}[\Phi]}{\delta \Phi} = 0 \rightarrow S^{(2)}(M)\Phi = 0 \quad (72)$$

* Здесь включаем фактор i в определении пропагатора.

или, используя уравнения (68):

$$\Phi(x, y) = ig^2 D_{\mu\nu}(x-y) \int d^4x' d^4y' \gamma_\mu G(x, x'|M) \times \\ \times \Phi(x', y') G(y', y|M) \gamma_\nu. \quad (73)$$

Перейдем в импульсное пространство

$$\Phi(p_2, p_1) = \Phi(q|P) = \int dx_2 dx_1 \exp[i(x_2 p_2 - x_1 p_1)] \Phi(x_2, x_1),$$

где q, P — относительный и полный импульс пары кварк — антикварк $q = (p_2 + p_1)/2, P = p_2 - p_1$.

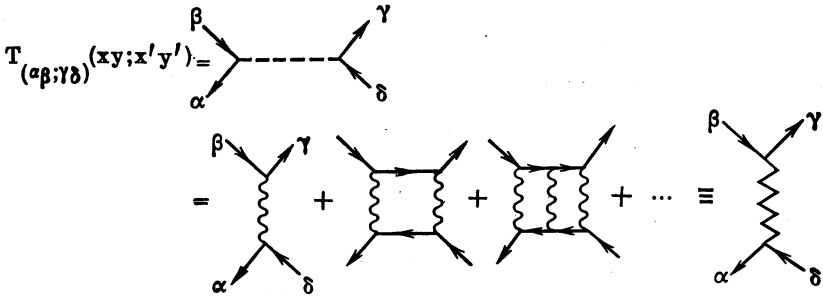


Рис. 3. Графическое представление бислокального пропагатора T

Уравнение (73) принимает вид

$$\Phi(q|P) = ig^2 \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(q-q') \gamma_\mu G\left(q' + \frac{P}{2} \middle| M\right) \Phi(q'|P) \times \\ \times G\left(q' - \frac{P}{2} \middle| M\right) \gamma_\nu. \quad (74)$$

В этом уравнении легко узнать однородное уравнение Бете — Солпитера в лестничном приближении для вершинной функции $\Gamma_m(q|P)$ связанного состояния кварка и антикварка

$$\Gamma_m(q|P) = N_m G\left(q + \frac{P}{2} \middle| M\right) \int d^4z \exp(izq) \times \\ \times \langle 0 | T q(z/2) \bar{q}(-z/2) | B_m \rangle G\left(q - \frac{P}{2} \middle| M\right), \quad (75)$$

где N_m — фактор нормировки. Решение (74) можно нормировать в соответствии с условием:

$$-i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[G\left(q + \frac{P}{2} \middle| M\right) \Gamma_m(q|P) \times \right. \\ \left. \times G\left(q - \frac{P}{2} \middle| M\right) \bar{\Gamma}_m(q|P) \right] = \varepsilon_m \delta_{mm'}, \quad (76)$$

где ε_m — фактор, принимающий значения $+1, -1, 0$; $\bar{\Gamma}_m$ — сопряженная вершинная функция. Заметим, что полный набор состояний (75) можно в принципе использовать для разложения коллективной переменной $\Phi(x, y)$ по этому базису. Эти состояния представляют собой голые кванты гильбертова пространства в представлении взаимодействия.

Ожидаемое значение произведения блококальных полей легко вычислить по теореме Вика; для примера

$$i^2 \langle \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \rangle_{S_{\text{free}}} = \overline{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4} + \overline{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3} \Phi_4 + \overline{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3} \Phi_4; \\ \langle \Phi_1 \Phi_2, \dots, \Phi_{2n+1} \rangle_{S_{\text{free}}} = 0 \text{ и т. д.} \quad (77)$$

Для теоремы Вика можно использовать компактную форму записи:

$$\langle f(\Phi) \rangle_{S_{\text{free}}} = \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\frac{\delta}{\delta B}, T \frac{\delta}{\delta B} \right) \right] f(B) \Big|_{B=0}. \quad (78)$$

Поправки к функциям Грина. Рассмотрим для иллюстрации некоторые примеры поправок к пропагатору кварка*:

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{1}{iZ} \frac{\delta}{\delta \eta_\beta(y)} \frac{\delta Z}{\delta \eta_\alpha(x)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \\ = R^{-1} \langle R[\Phi] G_{\alpha\beta}(x, y) | (M + \Phi - gA_{\text{ext}}) \rangle_{S_{\text{free}}}; \\ R[\Phi] = \exp(iS_{\text{int}}[\Phi]) Z[J, 0, 0 | M + \Phi]; \quad R = \langle R[\Phi] \rangle_{S_{\text{free}}} \quad (79)$$

или, используя (78), получаем

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = R^{-1} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\frac{\delta}{\delta B}, T \frac{\delta}{\delta B} \right) \right] \times \\ \times \{ R[B] G_{\alpha\beta}(x, y) | M + B - gA_{\text{ext}} \}_{B=0}. \quad (80)$$

Для простоты рассмотрим в дальнейшем только случай $J_\mu = 0$.

Соответствующие члены разложения в модифицированной теории возмущений функции Грина можно получить разложением $\exp(iS_{\text{int}}[\Phi])$, $G(M + \Phi)$ в ряд Тейлора по блококальной переменной $\Phi(x, y)$ и выполнением функционального усреднения.

* Можно также получить другое модифицированное разложение функции Грина кварка вокруг стационарной точки всего подынтегрального выражения (79). Тогда вместо (55) имеем

$$\delta/\delta M \{ \exp(iS(M)G(M)) \} = 0.$$

Легко показать, что в результате уравнение Швингера — Дайсона включают усредненное электромагнитное поле

$$\mathcal{A}_\mu(x) = - \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) [J_\nu(y) + ig \text{tr} \gamma_\nu G(y, y | M + \Phi - gA_{\text{ext}})].$$

Подобный результат получен для системы взаимодействующих ферми- и бозе-полей в работе [39].

Подставляя

$$\exp(iS_{\text{int}}[\Phi]) = \left\{ 1 + \frac{1}{3} \text{tr} [G(M)\Phi]^3 + O(\Phi^4) \right\}$$

в (79) и используя (70), (77), (78), получаем

$$G = G(M) + R^{-1} \langle \exp(iS_{\text{int}}[\Phi]) [-G(M)\Phi G(M) + G(M)\Phi G(M)\Phi G(M) - G(M)\Phi G(M)\Phi G(M)\Phi G(M) + \dots] \rangle_{S_{\text{free}}}$$

и

$$G = G(M) - iG_3(M) \overbrace{\Phi G_2(M)\Phi G_1(M)} + \\ + \frac{1}{3} \{ \text{tr} \overbrace{\Phi G_5(M)\Phi G_4(M)\Phi G_3(M)} \} G_2(M)\Phi G_1(M) - \\ - \frac{i}{3} \{ \text{tr} G_7(M) \overbrace{\Phi G_6(M)\Phi G_5(M)\Phi} \overbrace{G_4(M)\Phi G_3(M)\Phi G_2(M)\Phi G_1(M)} + \dots \} \quad (81)$$

Здесь и в дальнейшем опущен вакуумный вклад, возникающий от фактора нормировки

$$R^{-1} = \langle \exp(iS_{\text{int}}[\Phi]) \rangle_{S_{\text{free}}}^{-1}$$

Второй, третий и четвертый члены в (81) графически представлены на рис. 4. Графы в левой части рис. 4 представляют выражения, полученные разложением под знаком функционального интеграла по билोकальным переменным $\Phi(xy)$ (штриховая линия). (Замкнутые кварковые петли с внешними штриховыми линиями возникают от $S_{\text{int}}[\Phi]$.) Если подставить для штриховых линий билोकального пропагатора $\overline{\Phi\Phi}$ их соответствующие зигзагообразные линии, символизирующие многочастичный обмен (см. рис. 3), то получим класс диаграмм Фейнмана в правой части рис. 4. В уравнении (81) пронумерованы функции Грина, чтобы указать их положение на диаграммах. Таким образом, петлевое разложение дает в принципе новую теорию возмущения, где фундаментальные частицы (одетые кварки) первоначальной теории взаимодействуют с их связанными состояниями*. Динамическое спонтанное

* Сходимость такой модифицированной теории возмущений может значительно улучшиться при включении внутренней степени свободы кварков и глюонов. Для $SU(N)$ -группы получается эффективное разложение по $1/N$ (см. разд. 3).

нарушение симметрии функциональными методами также исследовалось в работе [40].

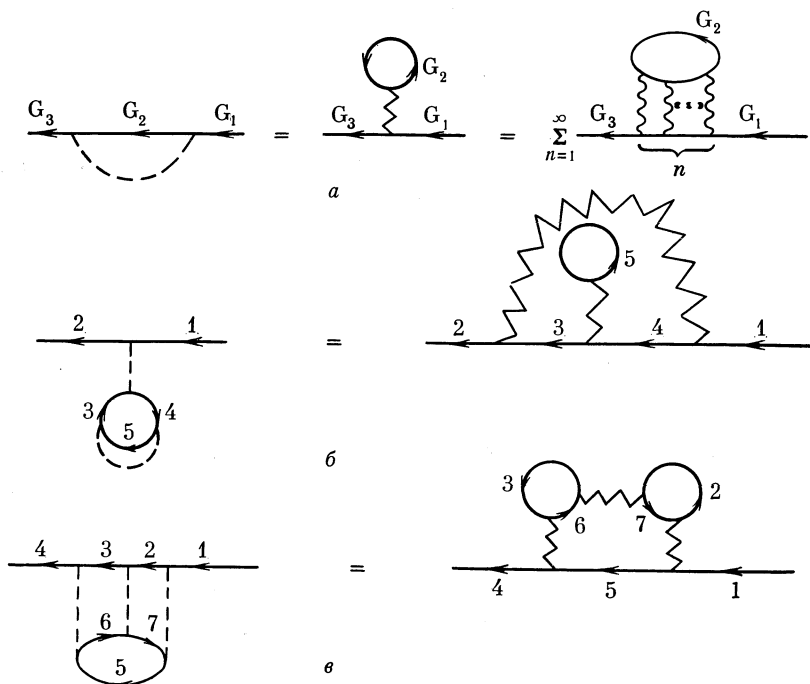


Рис. 4. Примеры поправок к пропагатору кварка G

3. ДВУМЕРНАЯ КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА

Опишем здесь применение функционального интеграла по коллективным переменным к модели с внутренними степенями свободы (такими, как «цвет» и «аромат» кварков), а именно к двумерной модели квантовой хромодинамики.

В настоящее время существуют надежды, что квантовая хромодинамика (КХД) — *калибровочная теория цветных кварков и глюонов* — является хорошим кандидатом для реалистической теории адронов [41]. Ожидается, что инфракрасные сингулярности заключают кварки внутри наблюдаемых адронов, которые сами по себе бесцветны. Важным шагом для понимания этих идей было исследование двумерной КХД [42]. В рамках этой модели изучено большое число вопросов, таких, как редже-поведение амплитуд связанных состояний [43], асимптотика форм-факторов, глубоко-неупругое рассеяние и e^+e^- -аннигиляция [44, 45]. Наша цель —

сформулировать двухмерную КХД прямо в терминах полей связанных состояний. Как показано выше, этого можно достигнуть введением бислокальных полей как новых динамических переменных. В терминах этих переменных квазиклассическое приближение совпадает с приближением планарных диаграмм. В результате возникает бесконечно компонентная неполиномиальная теория для связанных состояний [46]. Петлевое разложение в рассматриваемой здесь теории можно переписать в форме, полностью аналогичной теории ядерного поля (см. разд. 1). Эффективным параметром разложения является $1/N_c$ (N_c — число цветов) вместо $1/\Omega$ в ТЯП.

Модель и метод. Лагранжиан для двухмерной хромодинамики имеет вид

$$L = G_{\mu\nu, \alpha\beta} G_{\beta\alpha}^{\mu\nu}/4 + \bar{q}_{a\alpha} (i\gamma^\mu D_\mu - m_a) q_{a\alpha}, \quad (82)$$

где тензор напряженности $G_{\mu\nu, \alpha\beta}$ и ковариантная производная определены уравнениями:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu, \alpha\beta} &= \partial_\mu A_{\nu, \alpha\beta} - \partial_\nu A_{\mu, \alpha\beta} + g [A_\mu, A_\nu]_{\alpha\beta}; \\ D_\mu q_{a\alpha} &= [\partial_\mu \delta_{\alpha\beta} + g A_{\mu, \alpha\beta}] q_{a\beta}; \\ A_{\mu, \alpha\beta} &= \sum_{n=1}^{N_c^2-1} A_\mu^{(n)} \lambda_{\alpha\beta}^{(n)}. \end{aligned} \quad (83)$$

Здесь q , A_μ — поля кварков и глюонов. Индексы $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, \dots, N_c$ обозначают цвет (color), а индексы $a = 1, 2, \dots, N_f$ — аромат (flavour). Локальная калибровочная $SU(N_c)$ -группа точно сохраняется, в то время как глобальная $SU(N_f)$ -симметрия нарушена массами кварков $\bar{q}_{a\alpha} m_a q_{a\alpha}$, если нет $m_a = m$; $\lambda^{(n)}$ — $SU(N_c)$ -представление генераторов с условием нормировки $\text{tr} \lambda^{(n)} \lambda^{(m)} = T\delta^{nm}$; $q_{a\alpha} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}_{a\alpha}$ — двухкомпонентный дираковский спинор. Двухмерная хромодинамика наиболее проста в калибровке светового конуса:

$$A_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_0 - A_1) = A^+ = 0$$

$$(x^\pm = x_\mp = (x^0 \pm x^1)/\sqrt{2}; ab = a^+b^+ + a_-b^- = a^+b_- + a_-b^+). \quad (84)$$

В такой калибровке независимой динамической переменной является лишь $\hat{q}_2 = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ [42, 47, 48], самодействие глюонных полей исчезает и гости Фаддеева — Попова [4] отсутствуют.

После устранения зависимых динамических переменных A_+ , $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ производящий функционал для функций Грина принимает

форму, аналогичную (44) ($\hat{q}_2 \rightarrow q$):

$$\begin{aligned}
 & Z[J, \eta^+, \eta] = \\
 & = N' \int Dq Dq^+ \exp \left\{ i \int d^2x d^2y \left[q^+(x) iG^{-1}(x, y) | A_{\text{ext}} q(y) + \right. \right. \\
 & \quad + (\eta^+(x) q(y) + q^+(x) \eta(y)) \delta^2(x-y) + \\
 & \quad + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{N_c^2-1} T J^{(n)}(x) D(x-y) J^{(n)}(y) + \\
 & \quad \left. \left. + i \frac{(2gi)^2}{2} \sum_{n=1}^{N_c^2-1} q^+(x) \lambda^{(n)} q(x) T^{-1} D(x-y) q^+(y) \lambda^{(n)} q(y) \right] \right\}. \quad (85)
 \end{aligned}$$

Функции Грина кварка и глюона определяются из уравнения

$$\left. \begin{aligned}
 & \int d^2y (G_0^{-1}(x, y) + 2ig A_{\text{ext}}(x) \delta^2(x-y)) G(y, z | A_{\text{ext}}) = \\
 & \quad = \delta^2(x-z); \\
 & A_{\text{ext}}(x) = \int d^2y D(x-y) J(y);
 \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

$$\begin{aligned}
 & G_0(x, y) = \frac{-\partial_-}{-2\partial_+ \partial_- - m_q^2 + i\epsilon} \delta^2(x-y) = \\
 & = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{ik_-}{2k_+ k_- - m_q^2 + i\epsilon} \right] \exp[-ik(x-y)]; \quad (87)
 \end{aligned}$$

$$D(x) = \frac{i}{\partial_-^2} \delta^2(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[-\frac{i}{k_-^2} \right] \exp(-ikx). \quad (88)$$

Производящий функционал (85) вместе с пропагаторами (86) — (88) воспроизводит правила Фейнмана двухмерной КХД, сформулированные в работе [42] (мы выбираем нормировку $Z[0, 0, 0] = 1$).

Введение билокальных переменных. Нашей задачей является интегрирование по кварковым полям в выражении (85). Для этой цели удобно переписать четырехкварковый член в (85) (фактор $(2gi)^2/2$ опускается) в кратких обозначениях [ср. с (47)]:

$$F = -q_B q_A^+ K_{AB};_{GD} q_D q_G^+, \quad (89)$$

где

$$K(xy; y'x') = \sum_{n=1}^{N_c^2-1} \lambda_{\alpha\delta}^{(n)} \lambda_{\gamma\beta}^{(n)} \delta_{ad} \delta_{gb} T^{-1} D(x-y) \delta(x-x') \delta(y'-y). \quad (90)$$

Здесь индекс A означает триплет двух дискретных и одного непрерывного индекса (a, α, x) (суммирование по A означает также интегрирование по непрерывному индексу).

Учитывая разложение $\{N_c\} \times \{N_c^*\} = \{1\} + \{N_c^2 - 1\}$ и обозначая проекционные операторы на синглет и $(N_c^2 - 1)$ -плет кварк-антикварк-канала через P_1 и $P_{N_c^2-1}$, можно записать:

$$k_{\alpha\beta, \gamma\delta} \equiv \sum_{n=1}^{N_c^2-1} \lambda_{\alpha\delta}^{(n)} \lambda_{\gamma\beta}^{(n)} = T \left\{ \frac{N_c^2-1}{N_c} P_1 - \frac{1}{N_c} P_{N_c^2-1} \right\}_{\alpha\beta, \gamma\delta}. \quad (91)$$

Из (91) видно, что в синглетном канале существуют силы притяжения. Рассмотрим только этот канал, так как интересуемся лишь связанными состояниями. Перепишем (89) в виде

$$F = -q_B q_A^+ (P_1 K P_1)_{AB, GD} q_D q_G^+ + W(q, q^+). \quad (92)$$

Здесь W содержит проекцию взаимодействия на нерезонансный канал $(N_c^2 - 1)$. Выпишем $W(q, q^+)$ в виде

$$W \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\eta^+}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\eta} \right)$$

и вынесем эту часть взаимодействия за знак функционального интеграла.

Для того чтобы выполнить интегрирование по полям кварков, снова линеаризуем четырехкварковое взаимодействие введением дополнительного гауссова функционального интегрирования по бислокальным полям [46], подобно уравнению (48). Интегрируя по q, q^+ , получим следующее выражение [46] для $Z(J = 0)$:

$$Z[\eta, \eta^+, R] = N^n \int D\chi \exp(iS[\chi]) Z[\eta, \eta^+, R | \chi], \quad (93)$$

где

$$S[\chi] = -\frac{i}{2(2gi)^2} (\chi, K^{-1}\chi) - i \operatorname{tr} \ln [iG_0^{-1} - \chi_1]; \quad (94)$$

$$Z[\eta, \eta^+, R | \chi] =$$

$$= \exp \left\{ -\eta^+ G(\chi_1) \eta + \frac{1}{2(2gi)^2} (P_1 R, K^{-1} P_1 R) - \frac{1}{(2gi)^2} (P_1 R, K^{-1} \chi) \right\};$$

$$iG^{-1}(\chi_1) = iG_0^{-1} - \chi_1; \quad \chi_1 = P_1 \chi;$$

$G(\chi)$ — функция Грина кварка во внешнем бислокальном поле $\chi(x, y)$ *. Для удобства включен также бислокальный источник $(qq^+ P_1)_{AB} R_{BA}$ в интеграл (85), чтобы иметь возможность варьирования по R .

Спектр кварков. Для того чтобы получить спектр кварков, рассмотрим стационарную точку фазы подынтегрального выражения в (93) при отсутствии внешних источников. Уравнение для ста-

* Определение пропагатора G здесь отличается фактором $-i$ от определения в разд. 2.

ционарной точки действия $S[\chi]$ имеет вид

$$M = (2gi)^2 KP_1 \frac{G(\dot{M})}{i} \quad (95)$$

и совпадает с уравнением Швингера — Дайсона в первом нетривиальном порядке теории возмущения. В импульсном представлении имеем

$$M(p_-) = (2g)^2 \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \Theta(|k_-| - \lambda) \frac{1}{k_-^2} G(p + k | M), \quad (96)$$

где $\Theta(|k_-| - \lambda)$ ($\lambda \rightarrow 0$) — инфракрасное обрезание.

Это уравнение соответствует учету только планарных диаграмм и изучено т'Хуфтом [42], который показал, что приближение планарных диаграмм справедливо в пределе $N_c \rightarrow \infty$ и $g^2 N_c$ фиксировано.

Уравнение (96) имеет решение *:

$$M(p_-) = \frac{g^2}{\pi} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \left(\frac{\text{sgn } p_-}{\lambda} - \frac{1}{p_-} \right); \quad (97)$$

$$G(p | M) = \frac{ip_-}{2p_+ p_- - m^2 + i\epsilon - p_- M(p_-)}. \quad (98)$$

Как видно из (97), (98), полюса кваркового пропагатора обращаются в бесконечность, если $\lambda \rightarrow 0$ ($M(p_-) \rightarrow \infty$):

$$G(p | M) \sim -\lambda i \left[\frac{g^2}{\pi} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \text{sgn } p_- \right]^{-1}. \quad (99)$$

Спектр мезонов. Приведем здесь вывод уравнения, описывающего спектр мезонов теории. Так как этот вывод полностью аналогичен выводу уравнения для спектра бозонов в разд. 2, дадим только основные результаты.

Сдвиг бислокального поля $\chi = M + \Phi$ и разложение функционального интеграла вокруг стационарной точки $M(x - y)$ действия приводит к пропагатору бислокального поля $\Phi(x, y)$:

$$T = \left\{ \frac{\delta^2 S[\chi]}{\delta \chi^2} \Big|_{\chi=M} \right\}^{-1},$$

который удовлетворяет неоднородному уравнению Бете — Солпитера для qq -рассеяния.

* Это исчезновение полюса пропагатора кварка можно интерпретировать как инфракрасное заключение кварков. Инфракрасная регуляризация интеграла (96) с помощью ступенчатой Θ -функции или главного значения [43] была подвергнута сомнению в работе [49]. Для пропагатора кварков можно тогда получить другой результат, если выполнить поворот Вика и использовать симметричное обрезание [49]. Полученный пропагатор содержит разрез в комплексной плоскости. Однако роль этого разреза для поворота Вика не ясна. Используем здесь решение т'Хуфта.

Уравнения для свободного поля

$$\left. \frac{\delta S_{\text{free}}}{\delta \Phi} \right|_{\Phi=\Gamma} = 0$$

соответствуют однородному уравнению Бете — Солпитера для связанных состояний кварка и антикварка. Используя импульсное представление, получаем

$$\Gamma(p, r) = -i (2g)^2 \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \times \\ \times \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2} G(p+k | M) \Gamma(p+k, r) G(p+k-r | M). \quad (100)$$

Аргументы p и r в вершинной функции означают импульс входящего кварка и полный импульс пары кварк — антикварк (рис. 5).

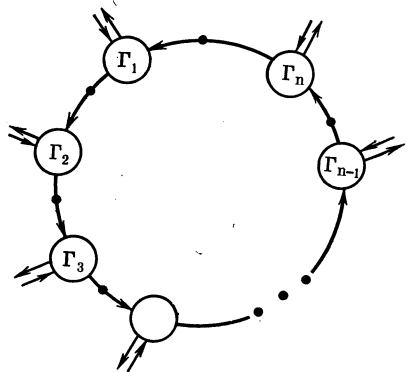


Рис. 5. Графическое представление вершинной части $V_{k_n \dots k_1}$

Уравнение (100) можно решить введением волновой функции

$$h(p_-, r) = \int dp_+ G(p | M) \Gamma(p, r) G(p-r | M). \quad (101)$$

Уравнение для h принимает вид

$$\mu_h^2 h_h(x) = H h_h(x) \equiv \left(\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{1-x} \right) h_h(x) - P \int_0^1 dy \frac{h_h(y)}{(y-x)^2}, \quad (102)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x = p_-/r_-; \quad \alpha_{1,2} = m_{1,2}^2 / \left[\frac{g^2}{\pi} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} - 1 \right]; \\ M_h^2 = (2r_+ r_-)_h = \frac{g^2}{\pi} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \mu_h^2, \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

P — символ главного значения.

Получены следующие результаты [42, 43]:

i) H — положительно определенный и самосопряженный оператор на пространстве функций, которые исчезают при $x = 0$ [$x = 1$] подобно $x^{\beta\alpha} [(1-x)^{\beta b}]$, где $\text{пр}\beta_\alpha \text{cot пр}\beta_\alpha = -\alpha_a$. Величина H имеет только дискретный спектр. Собственные функции являются полными и ортогональными:

$$\sum_k h_k(x) h_k(x') = \delta(x-x'); \quad \int_0^1 dx h_m(x) h_n(x) = \delta_{mn}. \quad (104)$$

ii) Для больших k собственные функции и собственные значения можно приближенно записать в виде

$$\overline{h_k(x)} \approx \sqrt{2} \sin \pi k x \quad (k \gg 1); \quad \mu_k^2 \approx \pi^2 k. \quad (105)$$

Из неоднородного и однородного уравнений Бете — Солпитера для T и Γ стандартным путем можно получать соотношения ортогональности и нормировки * [46]:

$$i \text{tr} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \overline{\Gamma}_l(q, -r) \left[\frac{1}{2r_-} \frac{\partial}{\partial r_+} \frac{G(q+r/2|M)}{i} P_1 \frac{1}{i} \times \right. \\ \left. \times G\left(q - \frac{r}{2} \middle| M\right) P_1 \right]_{r^2=M_l^2} \Gamma_l(q, r) = 1; \quad (106)$$

$$i \text{tr} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \overline{\Gamma}_l(q, -r) \left[\frac{1}{i} G\left(q + \frac{r_l}{2} \middle| M\right) P_1 \frac{1}{i} G\left(q - \frac{r_l}{2} \middle| M\right) P_1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{i} G\left(q + \frac{r_k}{2} \middle| M\right) P_1 \frac{1}{i} G\left(q - \frac{r_k}{2} \middle| M\right) P_1 \right] \Gamma_k(q, r) = 0, \quad l \neq k. \quad (107)$$

Используя явное выражение нормированных вершинных функций, можно переписать бислокальный пропагатор T в окончательной форме

$$T(x, x'; r) = \\ = (2g)^2 k_{\alpha\beta} \gamma_\delta \frac{i}{r_-^2 (x'-x)^2} - \sum_k \frac{i}{r_-^2 - M_k^2} \left[\frac{1}{r_-} \Gamma_k(x) \right] \left[\frac{1}{r_-} \overline{\Gamma}_k(x') \right]. \quad (108)$$

Бислокальный пропагатор описывает распространение связанных состояний. При вычислении амплитуд рассеяния связанных состояний фактор $\Theta(x(1-x))/\lambda$ в вершине компенсирует множитель λ в пропагаторе кварка, что дает конечный нетривиальный результат в пределе $\lambda \rightarrow 0$.

* При выводе (106), (107) было использовано, что здесь аргумент q функции Γ является относительным импульсом пары кварка и антикварка. Для реальных $h_k(x)$ имеем также $\overline{\Gamma}_k(q, -r)/i = \Gamma_k(q, -r)/i$.

Бесконечно компонентная теория поля для связанных состояний. Покажем, что квантовую теорию поля в билोकальных переменных можно интерпретировать как бесконечно компонентную теорию поля для связанных состояний.

Для этого разложим билोकальные поля по полному набору решений однородного уравнения Бете — Солпитера. Последние можно интерпретировать аналогично решению плоских волн свободных уравнений поля $(\Phi_1 P_1 \Phi)$

$$\begin{aligned} & \Phi_1(x, y) = \\ & = \sum_k \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \exp \left\{ -i \left[r \left(\frac{x+y}{2} \right) + q(x-y) \right] \right\} \Gamma_k(q, r) \varphi_k(r), \end{aligned} \tag{109}$$

где мезоны описываются эрмитовыми полями $\varphi_k(X)$ ($X = (x+y)/2$). Подставляя разложение (109) в свободную функцию действия и используя (106), (107), получаем

$$S_{\text{free}} \sim \frac{1}{2} \sum_k \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} \varphi_k(-r) [r^2 - M_k^2] \varphi_k(r). \tag{110}$$

Уравнение (110) можно интерпретировать как свободное эффективное действие бесконечно компонентной теории поля. Спектр масс определяется оператором Клейна — Гордона: $(-\square_X - M_k^2)$ (см. (103)).

Лагранжиан взаимодействия мезонов существенно неполиномиален и нелокален:

$$\begin{aligned} S_{\text{int}}[\Phi] &= i \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[\frac{G(M)}{i} \Phi_1 \right]^n = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_n} \frac{(i)^{1-n}}{n} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^2r_i}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^{(2)} \left(\sum_1^n r_i \right) \times \\ & \quad \times V_{k_n, \dots, k_1}(r_n \dots r_1) \prod_{i=1}^n \varphi_{k_i}(r_i), \end{aligned} \tag{111}$$

где

$$\begin{aligned} V_{k_n, \dots, k_1}(r_n, \dots, r_1) &= \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \text{tr} \Gamma_{k_n}(\xi_n, r_n) G \left(\xi_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{2} \middle| M \right) \times \\ & \quad \times \Gamma_{k_{n-1}}(\xi_{n-1}, r_{n-1}), \dots, G \left(\xi_1 + \frac{r_1}{2} \middle| M \right) \Gamma_{k_1}(\xi_1, r_1) G(q | M); \\ \xi_k &= q + \sum_{i=1}^{k-1} r_i + \frac{r_k}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, исходя из локальной теории поля кварков и глюонов, получим окончательно неполиномиальную, нелокальную бесконечно компонентную теорию поля для связанных состояний. Нетрудно показать, что можно переписать это петлевое разложение в эквивалентной форме теории, описывающей непосредственное взаимодействие одетых кварков с их связанными состояниями — мезонами. Используя ту же технику, что и для нерелятивистской теории ядерного поля, получаем эквивалентное представление *:

$$\begin{aligned}
 Z[\eta^+, \eta] = & \bar{N} \exp \left[2g^2 W \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta^+}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] \times \\
 & \times \exp \left\{ -i \sum_{i=1}^2 L_i \left[(2g)^2 k_{\alpha\beta} \gamma \delta \frac{1}{r_-^2 (x' - x)^2} \frac{\delta}{i \delta \eta} P_1 \frac{\delta}{i \delta \eta^+} + \frac{1}{r_-} \Gamma_k \frac{\delta}{\delta j k} \right] \right\} \times \\
 & \times \int \prod_k D\varphi_k \int Dq Dq^+ \exp \int \left\{ \frac{i}{2} \sum_k \varphi_k (r^2 - M_k^2) \varphi_k + i \sum_k j_k \varphi_k + \right. \\
 & \left. + i q^+ i G^{-1}(M) q + i (\eta^+ q + q^+ \eta) - i \sum_k (q^+ P_1 q) \left(\frac{1}{r_-} \Gamma_k \right) \varphi_k + \right. \\
 & \left. + \frac{i}{2} (q^+ P_1 q) (2g)^2 k_{\alpha\beta} \gamma \delta \frac{1}{r_-^2 (x' - x)^2} (q^+ P_1 q) \right\}_{j_k=0}, \quad (112)
 \end{aligned}$$

где импульсное интегрирование записано только символически. Здесь $\exp \left\{ -i \sum_{r=1}^2 L_i \right\}$ — проекционный оператор, который вычитает лестничные диаграммы, уже учтенные в формировании мезонного спектра. Таким образом, исключается двойной переучет. Из (112) видно, что кварки взаимодействуют с мезонами нелокально в форме взаимодействия Юкавы $(q^+ P_1 q) \left(\frac{1}{r_-} \Gamma_k \right) \varphi_k$. С учетом явного выражения нормированной вершинной функции:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r_-} \Gamma_k(x) = & -2i \left(\frac{N_c^2 - 1}{N_c} \right)^{1/2} \left(g^2 \frac{N_c^2 - 1}{N_c \pi} \right)^{1/2} \frac{2g}{\lambda} \times \\
 & \times \left[\Theta(x(1-x)) + \frac{\lambda}{2|r_-|} \left(\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{1-x} - \mu_k^2 \right) h_k(x) \sim O \left(\frac{1}{\sqrt{N_c}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

можно видеть, что представление (112) обеспечивает модифицированную теорию возмущений с эффективным параметром разложения $1/N_c$. Нетрудно включить также в наше рассмотрение диквар-

* Представление (112) для инфракрасного обрезания с Θ -функцией еще раз наглядно демонстрирует заключение кварков. Действительно, вводя новые переменные $q = \lambda q'$ для $\lambda \rightarrow 0$, члены с внешними источниками исчезают и кварки дают только вклад в петлевых диаграммах.

ковый сектор [46]. В этом случае стационарная точка коллективного действия определяет уравнения для нормальной и аномальных функций Грина в полной аналогии с уравнениями сверхпроводимости [12, 26, 27]. Более того, как было показано в [46], существует связанное состояние в канале $q\bar{q}$ (дикварк). Масса этого состояния стремится к бесконечности при снятии инфракрасного обрезания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изложили применение функциональных интегралов для описания коллективных явлений в нерелятивистской физике многих тел и в релятивистской квантовой теории поля. Главным моментом такой функциональной техники является переход к динамическим переменным с другими квантовыми числами, отсутствующим в исходной формулировке теории в терминах элементарных полей.

Основной результат метода континуальных интегралов в коллективных переменных — это вывод правил Фейнмана для квантовой теории поля, описывающий взаимодействия элементарных и составных полей. В частности, таким путем можно строго обосновать теорию ядерного поля [13—16, 19—21].

Функциональные методы могли бы также адекватно описать низкоэнергетический предел квантовой хромодинамики — неабелевой калибровочной теории, с которой связывают надежды построения теории сильных взаимодействий. Одно из основных положений КХД — асимптотическая свобода, — т. е. малая константа связи на малых расстояниях, согласуется с представлением о том, что адроны на малых расстояниях состоят из не взаимодействующих точечных кварков-партонов. Кварк-партоновая модель Фейнмана, основанная на этом представлении, успешно описывает данные по глубоконеупругим процессам [50] и тем самым свидетельствует о структуре адронов как составных частиц. Таким образом, адроны могли бы рассматриваться как коллективные возбуждения элементарных полей кварков и глюонов. Ненаблюдаемость кварков и глюонов (quark confinement) означает отсутствие их в полном спектре элементарных возбуждений.

Важным аргументом, который свидетельствует о правильности такой интерпретации адронов является киральная симметрия сильных взаимодействий, точная при больших энергиях (на малых расстояниях для кварков и глюонов) и спонтанно нарушенная при низких энергиях. В этой связи следует отметить, что физика адронов низких энергий удовлетворительно описывается теоремами алгебры токов и PCAC [51]. Результаты этих теорем воспроизводят киральные феноменологические лагранжианы [52] со спонтанным нарушением киральной симметрии и голдстоуновскими пионами. С точки зрения «коллективных переменных» КХД должна

являться как бы «микроскопической теорией», объясняющей динамическим образом (без эффекта Хиггса) спонтанное нарушение киральной симметрии, подобно тому, как микроскопическая теория сверхтекучести Боголюбова — БКШ объясняет феноменологию сверхпроводимости и спонтанное нарушение калибровочной симметрии (другой аналогичный пример разобран выше). С этой точки зрения следует ожидать, что низкоэнергетическим пределом КХД являются киральные феноменологические лагранжианы, написанные непосредственно в терминах *коллективных возбуждений* — адронов. Описание адронов, как коллективных переменных в рамках КХД для размерности пространства — времени $D = 4$, сталкивается с существенными трудностями. В отличие от абелевой теории или КХД₂ мы из-за существования членов самодействия глюонов $\sim A_\mu^3$, $\sim A_\mu^4$ не можем точно выполнить функциональные интегралы по полям Янга — Миллса A_μ .

В течение последних лет было несколько новых открытий в квантовой теории неабелевых калибровочных полей. Наиболее важное из них: обнаружение периодической структуры классического вакуума в теории Янга — Миллса [53]. Именно с периодическим вакуумом связано решение проблемы о числе голдстоуновских мезонов [54]. Обсудим в заключение этот вопрос.

Исторически периодическая структура вакуума в теории Янга — Миллса была открыта из требования конечности действия [53] (мы здесь рассматриваем $SU(2)$ -группу):

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu, a}; \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

Это требование следует из квазиклассического рассмотрения функционального интеграла в пространстве Евклида $\int DA \exp(-S)$. Все поля с конечным действием должны быть чисто продольны на бесконечности:

$$A_\mu = v^{-1} \partial_\mu v / g; \quad A_\mu = i \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a.$$

Каждой матрице $v(x)$ соответствует отображение S^3 (границы 4-пространства) в $SU(2)$ -группу. Это отображение характеризуется целым числом (индексом Понтрягина), которое указывает, сколько раз при отображении граница S^3 обернулась вокруг сферы $SU(2)$. Поэтому все поля с конечным действием разбиваются на различные топологически неэквивалентные классы с индексом ν , вычисленным по формуле

$$\nu = -\frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{tr} \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -\frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \tilde{G}_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu, a} = -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4s_\mu X^\mu;$$

$$X^\mu = 2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{tr} \left(A^\nu \partial^\alpha A^\beta + \frac{2}{3} A^\nu A^\alpha A^\beta \right); \quad \tilde{G}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} G^{\mu\nu} / 2,$$

Минимум действия в каждом классе достигается для полей, которые названы псевдочастицами или инстантонами, удовлетворяющих (евклидовому) уравнению дуальности $G_{\mu\nu} = \pm \tilde{G}_{\mu\nu}$. Инстантоны имеют нулевую энергию и трактуются, как классические решения, интерполирующие из одного классического вакуума в другой. В теории поля взаимодействующих безмассовых кварков с полями Янга — Миллса дивергенция аксиального тока, которая соответствует $U(1)$ -киральной симметрии, не равна нулю. Этот факт является следствием аномалий Адлера [55] и существования топологически нетривиальных конфигураций полей Янга — Миллса с неравным нулю индексом Понтрягина $\nu \neq 0$:

$$\partial_\mu J_\mu^A \sim G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu, a} \sim \nu \neq 0.$$

Из несохранения кирального $U(1)$ -тока можно сделать вывод об отсутствии девятого псевдоскалярного мезона [54]. Квази-классическое разложение [56] вокруг инстантонов привело к интересным результатам. Однако изложение этих результатов значительно выходит за рамки нашего обзора.

П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

ОДНОЧАСТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА

В этом приложении приведены некоторые формулы для функций Грина, используемые в обзоре.

Введем «свободную» функцию Грина фермиона:

$$\left. \begin{aligned} G_{\pm}^{-1}(t, t') &= (i\partial_t \mp \varepsilon) \delta(t-t'); \\ iG_{\pm}(t, t') &= \pm \Theta(\pm(t-t')) \exp[\mp i\varepsilon(t-t)]; \\ \bar{G}_{\pm}^{-1}(t, t') &= (i\partial_t \pm \varepsilon) \delta(t-t'); \\ i\bar{G}_{\pm}(t, t') &= -iG_{\pm}(t', t), \end{aligned} \right\} \quad (П.1)$$

где $\Theta(t)$ — ступенчатая функция. По определению, имеем

$$\int dx G_{(\dots)}^{-1}(t, x) G_{(\dots)}(x, t') = \delta(t-t').$$

Удобно переписать обратную функцию Грина, определенную уравнением (10), в форме

$$G^{-1}(m; t, t') = \begin{pmatrix} G_a^{-1}(t, t') & \Psi(t) \delta(t-t') \\ \Psi^+(t) \delta(t-t') & G_b^{-1}(t, t') \end{pmatrix}, \quad ()$$

где

$$G_a^{-1}(t, t') = \begin{pmatrix} G_+(t, t') & \Phi(t) \delta(t-t') \\ \Phi(t) \delta(t-t') & G_-^{-1}(t, t') \end{pmatrix}; \quad (П.3)$$

$$G_b^{-1}(t, t') = \begin{pmatrix} \bar{G}_+^{-1}(t, t') & -\Phi(t) \delta(t-t') \\ -\Phi(t) \delta(t-t') & \bar{G}_-^{-1}(t, t') \end{pmatrix}. \quad (П.4)$$

Матричный оператор обратной (П.2) имеет вид

$$G(m; t, t') = \begin{pmatrix} G_N(t, t') & \bar{G}_A(t, t') \\ G_A(t, t') & \bar{G}_N(t, t') \end{pmatrix}, \quad (\text{П.5})$$

где нормальные и аномальные функции Грина определены уравнениями *:

$$\left. \begin{aligned} G_N &= G_a(1 - \Psi G_b \Psi^+ G_a)^{-1}; \\ \bar{G}_N &= G_b(1 - \Psi^+ G_a \Psi G_b)^{-1}; \\ G_A &= -G_b \Psi^+ G_a(1 - \Psi G_b \Psi^+ G_a)^{-1}; \\ \bar{G}_A &= -G_a \Psi G_b(1 - \Psi^+ G_a \Psi G_b)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.6})$$

где

$$G_a = \begin{pmatrix} G_+(1 - \Phi G_- \Phi G_+)^{-1} & -G_+ \Phi G_- (1 - \Phi G_+ \Phi G_-)^{-1} \\ -G_- \Phi G_+ (1 - \Phi G_- \Phi G_+)^{-1} & G_- (1 - \Phi G_+ \Phi G_-)^{-1} \end{pmatrix}; \quad (\text{П.7})$$

$$G_b = \begin{pmatrix} \bar{G}_+(1 - \Phi \bar{G}_- \Phi \bar{G}_+)^{-1} & \bar{G}_+ \Phi \bar{G}_- (1 - \Phi \bar{G}_+ \Phi \bar{G}_-)^{-1} \\ \bar{G}_- \Phi \bar{G}_+ (1 - \Phi \bar{G}_- \Phi \bar{G}_+)^{-1} & \bar{G}_- (1 - \Phi \bar{G}_+ \Phi \bar{G}_-)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{П.8})$$

Функции Грина для конфигураций статических полей Φ_0, Ψ_0 , можно легко вычислить из (П.6) — (П.8). Полагая $\tau = t - t'$, для нормальной функции Грина получаем выражение

$$G_N(\tau) = -i \{ \Theta(\tau) \hat{a}(E) \exp(-iE\tau) - \Theta(-\tau) \hat{a}(-E) \exp(iE\tau) \}, \quad (\text{П.9})$$

где

$$\hat{a}(\pm E) = \pm \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \pm E + \varepsilon & -\Phi_0 \\ -\Phi_0 & \pm E - \varepsilon \end{pmatrix} \quad (\text{П.10})$$

и

$$E = \sqrt{\varepsilon^2 + \Phi_0^2 + |\Psi_0|^2}$$

являются энергиями квазичастиц, определенными в (16). Аналогично найдем для аномальных функций Грина выражение

$$\bar{G}_A(\tau) = i\Psi_0 \{ \Theta(\tau) \hat{b}(E) \exp(-iE\tau) - \Theta(-\tau) \hat{b}(-E) \exp(iE\tau) \}, \quad (\text{П.11})$$

где

$$\hat{b}(\pm E) = \pm \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функции Грина удовлетворяют следующим соотношениям симметрии:

$$\bar{G}_N(\tau) = -G_N(-\tau); \quad \bar{G}_A(\tau)/\Psi_0 = G_A(\tau)/\Psi_0^\dagger. \quad (\text{П.12})$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е 2

ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦЫ В

Элементы «петлевой» матрицы \hat{B} определены как $\hat{B} = -i\Omega\hat{A}/2$, где

$$A_{11}(t, t') = \text{tr} \{ \hat{G}_N(t, t') \hat{G}_N(t', t) + \hat{G}_N(t, t') \hat{G}_N(t', t) - \\ - [\hat{G}_A(t, t') \hat{G}_A(t', t) + \hat{G}_A(t, t') \hat{G}_A(t', t)] \};$$

* Матричное умножение здесь включает интегрирование по промежуточным временам.

$$\begin{aligned}
 A_{12}(t, t') &= \text{tr} \{G_N(t, t') \widehat{G}_A(t', t) - G_A(t, t') \widehat{G}_N(t', t)\}; \\
 A_{13}(t, t') &= \text{tr} \{\overline{G}_A(t, t') \widehat{G}_N(t', t) - \overline{G}_N(t, t') \widehat{G}_A(t', t)\}; \\
 A_{21}(t, t') &= \text{tr} \{\widehat{G}_A(t, t') G_N(t', t) - \widehat{G}(t, t') G_A(t', t)\}; \\
 A_{22}(t, t') &= \text{tr} \{G_A(t, t') G_A(t', t)\}; \\
 A_{23}(t, t') &= \text{tr} \{\overline{G}_N(t, t') G_N(t', t)\}; \\
 A_{31}(t, t') &= \text{tr} \{\widehat{G}_N(t, t') \overline{G}_A(t', t) - \widehat{G}_A(t, t') \overline{G}_N(t', t)\}; \\
 A_{32}(t, t') &= \text{tr} \{G_N(t, t') \overline{G}_N(t', t)\}; \\
 A_{33}(t, t') &= \text{tr} \{\overline{G}_A(t, t') \overline{G}_A(t', t)\}.
 \end{aligned}
 \tag{II.13}$$

Мы использовали здесь краткие обозначения

$$\widehat{G}_A(t, t') = G_A(t, t') \hat{I}, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е 3

В этом приложении выпишем некоторые полезные уравнения, которые часто используются [1-4].

Рассмотрим действительный и комплексный гауссовы интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi i}} \exp \left[i \left(\frac{1}{2} \varphi A \varphi + j \varphi \right) \right] = A^{-1/2} \exp \left(-\frac{i}{2} j A^{-1} j \right); \tag{II.14}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi i}} \frac{d\varphi^*}{\sqrt{2\pi i}} \exp [i (\varphi^* A \varphi + j^* \varphi + \varphi^* j)] = A^{-1} \exp (-ij^* A^{-1} j), \tag{II.15}$$

где $\int d\varphi d\varphi^*$ — символическое обозначение $2 \int d(\text{Re } \varphi) d(\text{Im } \varphi)$; A имеет положительную мнимую часть, не равную нулю. (В случае действительного A определяем интеграл, полагая $A \rightarrow A + i\varepsilon$, ($\varepsilon > 0$), $\varepsilon \rightarrow 0$.) Пусть φ — n -компонентный вектор $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, A — несингулярная симметричная или эрмитова матрица. Тогда обобщением (II.14), (II.15) является

$$\int D\varphi \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} (\varphi, A\varphi) + (j, \varphi) \right] \right\} = (\det A)^{-1/2} \exp \left[-\frac{i}{2} (j, A^{-1}j) \right]; \tag{II.16}$$

$$\int D\varphi D\varphi^+ \exp \{ i [(\varphi^+, A\varphi) + (j^+, \varphi) + (\varphi^+, j)] \} = (\det A)^{-1} \exp [-i (j^+, A^{-1}j)], \tag{II.17}$$

где (j, φ) обозначает скалярное произведение $\sum_{i=1}^n j_n \varphi_n$ и т. п. и используется

сокращение $D\varphi = \prod_{k=1}^n \frac{d\varphi_k}{\sqrt{2\pi i}}$. В случае, когда A диагонально, $\det A = A_1 A_2 \dots A_n$ и уравнения (II.16), (II.17) тривиально следуют из (II.14) и (II.15)

Для недиагональной матрицы (П.16) и (П.17) можно доказать диагонализацией с помощью ортогональной или унитарной матрицы с использованием инвариантности скалярного произведения и меры интегрирования. Заметим, что (П.17) есть частичный случай более общего интеграла

$$\int D\varphi D\varphi^+ \exp \{i [(\varphi^+, A\varphi) + (b^+, \varphi) + (\varphi^+, a)]\} = (\det A)^{-1} \exp[-i(b^+, A^{-1}a)]. \quad (\text{П.18})$$

Приведем также полезное матричное обобщение уравнений (П.16) и (П.17) [3]:

$$\int D\Phi \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} (\Phi\Phi^+) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^+ \end{pmatrix} + (j_1 j_2) \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^+ \end{pmatrix} \right] \right\} = \\ = \left[\det \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \right]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} (j_1 j_2) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad (\text{П.19})$$

где

$$D\Phi = D\varphi D\varphi^+.$$

Используя данные выше обыкновенные гауссовы интегралы, определим функциональные интегралы, которые применяются в обзоре.

i) случай бозе-статистики

$$\int D\varphi \exp \left\{ i \int d^4x d^4y [\varphi(x) A(x, y) \varphi(y) + j(x) \varphi(y) \delta^4(x-y)] \right\} = \\ = [\det A(x, y)]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y j(x) A^{-1}(x, y) j(y) \right\}; \quad (\text{П.20})$$

$$\int D\varphi D\varphi^+ \exp \left\{ i \int d^4x d^4y [\varphi^+(x) A(x, y) \varphi(y) + \right. \\ \left. + (j^+(x) \varphi(y) + \varphi^+(x) j(y)) \delta^4(x-y)] \right\} = \\ = [\det A(x, y)]^{-1} \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y j^+(x) A^{-1}(x, y) j(y) \right\}, \quad (\text{П.21})$$

где $\det A(x, y)$ — функциональный определитель оператора $A(x, y)$; обратный оператор удовлетворяет уравнению

$$\int d^4y A(x, y) A^{-1}(y, z) = \delta^{(4)}(x-z). \quad (\text{П.22})$$

Уравнения (П.20) и (П.21) понимаются, как предел $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ обыкновенных интегралов. Здесь ε — объем ячеек решеточного пространства с точками $x_j = j\varepsilon$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и заменяют $\varphi(x) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ со значениями поля $\varphi_j = \sqrt{\varepsilon} \varphi(x_j)$ (n — число ячеек).

ii) случай ферми-статистики

Классические ферми-поля трактуются, как антикоммутирующие элементы алгебры Грассмана с инволюцией, т. е.

$$\{\psi(x), \psi(y)\}_+ = \{\psi(x), \psi^+(y)\}_+ = \{\psi^+(x), \psi^+(y)\}_+ = 0. \quad (\text{П.23})$$

Функциональный интеграл можно определить как предельную процедуру $n \rightarrow \infty$ для интеграла по n -размерным векторам в пространстве переменных Грассмана $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$; $\psi^+ = (\psi_1^+, \psi_2^+, \dots, \psi_n^+)$. Используя следую-

щие определения для интегралов по переменным Грассманна:

$$\int d\psi_i = \int d\psi_i^\dagger = 0; \quad \int \psi_i d\psi_i = \int \psi_i^\dagger d\psi_i^\dagger = 1, \quad (\text{П.24})$$

можно получить формулу, которая аналогична (П.17):

$$\begin{aligned} \int D\psi D\psi^\dagger \exp \{i[(\psi^\dagger, A\psi) + (\eta^\dagger, \psi) + (\psi^\dagger, \eta)]\} = \\ = [\det A] \exp [i(\eta^\dagger, A^{-1}\eta)]. \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

Заметим, что $[\det A]$ стоит здесь в положительной степени в отличие от бозе-статистики. Легко также получить обобщение

$$\begin{aligned} \int D\psi D\psi^\dagger \exp \left\{ i \left[(\psi_1^\dagger \psi_2) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2^\dagger \end{pmatrix} + (\eta_1^\dagger \eta_2) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2^\dagger \end{pmatrix} + (\psi_1^\dagger \psi_2) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2^\dagger \end{pmatrix} \right] \right\} = \\ = \left[\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \right] \exp \left\{ -i \left[(\eta_1^\dagger \eta_2) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2^\dagger \end{pmatrix} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

где $\psi^\dagger = (\psi_1^\dagger, \psi_2)$.

Окончательно выпишем функциональный интеграл, полученный предельным переходом из (П.25):

$$\begin{aligned} \int D\psi D\psi^\dagger \exp \left\{ i \int d^4x d^4y [\psi^\dagger(x) A(x, y) \psi(y) + (\eta^\dagger(x) \psi(y) + \right. \\ \left. + \psi^\dagger(x) \eta(y)) \delta^4(x-y)] \right\} = \\ = [\det A(x, y)] \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \eta^\dagger(x) A^{-1}(x, y) \eta(y) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.27})$$

iii) *белокальный функциональный интеграл*

Рассмотрим функциональный интеграл по белокальным матричным функциям $\Phi_{\alpha\beta}(x, y)$, где (α, β) -пара пробегает по индексам Дирака и (или) внутренней симметрии: Φ — бозе-переменная. Соответствующий белокальный гауссовый интеграл имеет вид ($d^4x d^4y \equiv d^4(x, y)$):

$$\begin{aligned} \int D\Phi(x, y) \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} \int d^4(x, y) d^4(x', y') \Phi_{\alpha\beta}(x, y) A_{(\beta\alpha; \gamma\delta)}(yx; x'y') \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi_{\delta\gamma}(y', x') + \int d^4(x, y) \Phi_{\alpha\beta}(x, y) J_{\beta\alpha}(y, x) \right] \right\} = \\ = [\text{Det } A_{(mn, m'n')}]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4(x, y) d^4(x', y') J_{\alpha\beta}(x, y) \times \right. \\ \left. \times A_{(\beta\alpha; \gamma\delta)}^{-1}(yx; x'y') J_{\delta\gamma}(y', x') \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.28})$$

Для того чтобы убедиться в этом, введем ортогональную систему матричных функций $[H_{mn}(x, y)]_{\alpha\beta} \equiv (\Gamma_m)_{\alpha\beta} h_n(x, y)$; здесь $h_n(x, y)$ — эрмитова $h_n(x, y) = h_n^*(y, x)$; Γ_m — полный набор матриц Дирака и внутренней симметрии. Функции H удовлетворяют соотношениям полноты и ортогональности:

$$\text{tr} \int d^4x d^4y H_{mn}(x, y) H_{kl}(y, x) = \delta_{mk} \delta_{nl}; \quad (\text{П.29})$$

$$\sum_{m, n} [H_{mn}(x, y)]_{\alpha\beta} [H_{mn}(x', y')]_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta^4(x-y) \delta^4(y-x'). \quad (\text{П.30})$$

Используя фурье-разложение

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sum_{m, n} \Phi_{mn} H_{mn}(x, y); \\ A(yx; x'y') &= \sum_{(m, n), (m'n')} H_{mn}(y, x) A_{mn, m'n'} H_{m'n'}(x', y'); \\ J(x, y) &= \sum_{m, n} J_{mn} H_{mn}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.31})$$

и подставляя уравнения (П.31) в левую часть (П.28), получаем $(D\Phi(x, y) \equiv \prod_{(m, n)} D\Phi_{mn})$:

$$\int \prod_{(m, n)} D\Phi_{mn} \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} \sum_{(mn), (m'n')} \Phi_{mn} A_{mn, m'n'} \Phi_{m'n'} + \Phi_{mn} J_{mn} \right] \right\} = \\ = [\text{Det } A_{mn, m'n'}]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{(mn), (m'n')} J_{mn} A_{mn, m'n'}^{-1} J_{m'n'} \right\}. \quad (\text{П.32})$$

Правая часть уравнения (П.28) следует из (П.32) с помощью подстановки

$$A_{mn, m'n'}^{-1} = \int d^4(xy) d^4(x'y') H_{mn}(x, y) A^{-1}(yx; x'y') H_{m'n'}(y'x').$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feynman R. P., Hibbs A. R. Quantum Mechanics and Path. Integrals. — N. Y.; Mc Graw Hill Book Company, 1965.
2. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. — М.: Атомиздат, 1976.
3. Березин Ф. А. Методы вторичного квантования. — М.: Наука, 1965.
4. Feynman R. P. — Acta phys. polon.; 1963, v. 26, p. 697; Faddeev L. D., Popov V. N. — Phys. Lett. B, 1967, v. 25, p. 29; Fradkin E. S., Tsyntin I. V. — Phys. Lett. B, 1969, v. 30, p. 562; 't Hooft G. — Nucl. Phys. B, 1971, v. 33, p. 173 (см. также: Квантовая теория калибровочных полей: Сб. статей. — М.: «Мир», 1977).
5. Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A. — Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 4114; Ibid., p. 4130; Ibid., 1975, v. 11, p. 3424; Ibid., 1975, v. 12, p. 2443; Gross D. J., Neveu A. — Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 3225.
6. Braun M. A. Prepr. FIAN SSSR Moscow, N 140, 1971; Baldo M. e.a. — Phys. Lett. A, 1977, v. 62, p. 509.
7. See ref. [2].
8. Ebert D., Reinhardt H. — Nucl. Phys. A, 1978, v. 298, p. 60.
9. Kleinert H. — In: Proc. Intern. Conf. on High Energy Phys., 1976. Tbilisi, p. C 241; Erice-Lectures, 1976.
10. Ebert D., Pervushin V. N. — In: Proc. Intern. Conf. on High Energy Phys., 1976. Tbilisi, p. C125; Prepr. JINR, E2-10020, 1976.
11. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1974.
12. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: Физматгиз, 1962.
13. Bes D. R. e.a. — Phys. Lett. B, 1974, v. 52, p. 253.
14. Reinhardt H. — Nucl. Phys. A, 1975, v. 251, p. 317.
15. Bes D. R. e.a. — Nucl. Phys., 1976, v. A260, p. 77.

16. Reinhardt H. Doctoral thesis Akademie d. Wissenschaften der DDR, 1975.
17. Bohr A., Mottelson B. Nuclear Structure. Vol. II.— N. Y., Benjamin, 1975.
18. Мигдал А. Б. Теория конечных фермионных систем.— М.: Наука, 1977.
19. Bortignon P. F. e.a.— Phys. Reports C., 1977, v. 30, p. 305.
20. Reinhardt H.— JINR, E4-10450, 1977.
21. Reinhardt H.— Nucl. Phys. A, 1978, v. 298, p. 77.
22. Reinhardt H.— Nucl. Phys. A, 1976, v. 262, p. 231.
23. Broglia R. A. e.a.— Phys. Lett. B, 1972, v. 38, p. 480.
24. Evans J. A., Krans N.— Phys. Lett. B, 1971, v. 37, p. 455.
25. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер.— М.: Наука, 1971.
26. Bardeen J. e.a.— Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 1175.
27. Bogolubov N. N.— Nuovo cimento, 1958, v. 7, p. 794.
28. Reinhardt H.— Nucl. Phys., in press.
29. Reinhardt H.— JINR, E4-10746, 1977; Submitted to Phys. Lett.
30. Ebert D., Reinhardt H.— JINR, E4-10961, 1977.
31. Higgs P.— Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 1156; Kibble T.— Phys. Rev., 1967, v. 155, p. 1554.
32. Nambu Y., Jona-Lasinio G.— Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 345; Ibid. 1961, v. 124, p. 246 (См. также: Вакс В. Г., Ларкин А. И.— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 282; Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н.— Докл. АН СССР 1961, т. 139, с. 345.)
33. Jackiw R., Johnson K.— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 2386; Cornwall J., Norton R. E.— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 3338.
34. Johnson K., Baker M., Willey R.— Phys. Rev., 1964, v. 136, p. B1111; Baker M., Johnson K.— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 1110.
35. Haag R., Maris A. J.— Phys. Rev., 1963, v. 132, p. 2325; Langacker P., Pagels H.— Phys. Rev. D, 1974, v. 9, p. 3413.
36. Fukuda R., Kugo T.— Preprint HUNS 350, 1976, Kyoto; Dragovic B. G., Filippov A. T., Mavlo D. P.— Preprint JINR, R2-10344, 1977.
37. Nakanishi N.— Progr. in Theor. Phys., Suppl., 1969, v. 43, p. 1.
38. Goldstein J. S.— Phys. Rev., 1953, v. 91, p. 1516.
39. Fradkin E. S., Kalashnikov O. K. Preprint FIAN SSSR, N. 140, 1971.
40. Shrauner E.— Phys. Rev., 1977, v. 16, p. 1887.
41. Gross D. J., Wilczek F.— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 3633; Ibid., 1974, v. 9, p. 980; Politzer H. D.— Phys. Reports., 1974, v. 14, p. 129.
42. 't Hooft G.— Nucl. Phys. B, 1974, v. 72, p. 461.
43. Callan C. G. Jr., Coote N., Gross D. J.— Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 1649; Brower R. C. e.a.— Phys. Lett., 1976, v. 65, p. 249; Prepr. CERN, TH 2283, 2295, 1977.
44. Einhorn M. B.— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 3451.
45. Dorn H., Ebert D., Pervushin V. N.— Preprint JINR, E2-11222, 1978.
46. Ebert D., Pervushin V. N.— Preprint JINR E2-10730, E2-10731, 1977; — ТМФ, 1978, т. 36, с. 313.
47. Маринов М. С., Переломов А. М., Терентьев М. В.— Письма ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 225.
48. Pak N. K., Tze H. C.— Phys. Rev. D., 1976, v. 14, p. 3472.
49. Wu T. T.— Phys. Lett. B., 1977, v. 71, p. 142.
50. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами: Пер. с англ.— М.: Мир, 1975.
51. Де Альфаро В. и др. Токи в физике адронов: Пер. с англ.— М.: Мир, 1976.
52. Волков М. К., Первушин В. Н.— УФН, 1976, т. 120, с. 363.
53. Belavin A. e.a.— Phys. Lett. B, 1975, v. 59, p. 85.
54. 't Hooft G.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 8.
55. Adler S. L.— Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 2926.
56. Callan C. e.a.— Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 2717.