«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1980, ТОМ 11, ВЫП. 1

УДК 539.171.017

ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЕ ОПИСАНИЕ ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

Б. Гайер, Д. Робашик
Лейпцигский университет им. Карла Маркса, Лейпциг
Э. Вицорек
Институт физики высоких энергий АН ГДР, Цойтен

Дается обзор наиболее важных теоретических представлений о глубоконеупругом рассеянии. Обсуждаются модельно-независимый подход, основанный на общих принципах квантовой теории поля, применение квантовой хромодинамики (КХД) к глубоконеупругому рассеянию, подходы, основанные на кварк-партонной модели, на алгебре светового конуса и конформной инвариантности, а также исследование в рамках теории возмущений.

In the important theoretical approaches to the theory of deep inelastic scattering are reviewed. The model independent treatment on the basis of general quantum field theory principles, the application of quantum chromodynamic (QCD) to the deep inelastic scattering, approaches based on the quark-parton model, the light-cone algebra, the conform invariance and the investigation in the framework of the perturbation theory are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния при высоких энергиях — один из методов изучения структуры адронов и динамики их взаимодействия.

Рассеяние лептонов на адронах из-за малости электромагнитной или слабой константы связи можно рассмотреть в первом порядке теории возмущений. В этом приближении амплитуда рассеяния T_{fi} расчленяется на просто вычисляемую лептонную часть $l_\mu(k, k')$ и исследуемую адронную часть

$$h_\mu(p, p_x) = \langle X | j_\mu(0) | p, s\rangle.$$

Здесь k, k' — импульсы начальных и конечных лептонов, а p, p_x — импульсы входящих и выходящих адронов. Адронная часть $h_\mu(p, p_z)$ соответствует рассеянию виртуальной частицы (например, виртуального фотона) на адроне. Между электронным и нейтринным рассеянием на адронах нет существенной разницы. В обоих случаях в амплитуду T_{fi} входят матричные элементы токов адронов: в первом — электромагнитного тока $j^{\mathrm{em}}_{\mu}(x)$, во втором — слабых токов $j^{\pm}_{\mu}(x)$.

Под глубоконеупругим рассеянием понимают неупругое рассеяние частиц при высоких энергиях с большим значением квадрата массы q^2 [1] виртуальной промежуточной частицы.

Наряду с q^2 здесь используется в дальнейшем независимая переменная $\nu = 2(pq)$; в л. с. имеем

$$q^2 = -4EE' \sin^2(\theta/2); \qquad \nu = 2M(E-E'),$$

где M — масса нуклона; $\theta = \theta_{\text{л. с.}}$ — угол рассеяния в л. с.; E, E' — энергия начальных и конечных лептонов.

Основные величины для описания глубоконеупругого рассеяния — *инвариантные* амплитуды T_i, которые следуют из кинематического разложения виртуальных амплитуд $T_{\mu\nu}$, и *структурные* функции W_i, возникающие из кинематического разложения абсорбтивных частей $W_{\mu\nu}$ виртуальных амплитуд. Связи между T_i и $T_{\mu\nu}$, а также между W_i и $W_{\mu\nu}$ даются выражениями $T_{\mu\nu} = \sum_i K^i_{\mu\nu} T_i$; $W_{\mu\nu} = \sum_i K^i_{\mu\nu} W_i$.

В отдельности имеем [2] для *eN-рассеяния*:

$$T = (e^2/q^2)\,\bar{u}(k')\,\gamma^{\mu} u(k)\,\langle X | j^{\mathrm{em}}_{\mu}(0) | p, s\rangle; \tag{1}$$

$$d^2\sigma/d|q^2|d\nu = (e^4/8\pi M^2 q^4)(E'/E)\{\cos^2(\theta/2)\, M^2 W_2 + 2\sin^2(\theta/2)\, W_1\}; \tag{2}$$

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \sum_{s=1,\,2} \int d^4x \exp(iqx)\,\langle p, s | [j^{\mathrm{em}}_{\mu}(x),\ j^{\mathrm{em}}_{\nu}(0)] | p, s\rangle =$$
$$= (-g_{\mu\nu} + q_{\mu} q_{\nu}/q^2)\, W_1 + (p_{\mu} - pq q_{\mu}/q^2)(p_{\nu} - pq q_{\nu}/q^2)\, W_2; \tag{3}$$

для νN $(\bar{\nu}N)$-рассеяния:

$$\left.\begin{aligned} &T^{\nu(\bar{\nu})} = \left(G/\sqrt{2}\right) l^{\mp}_{\mu}(k, k')\,\langle X | j^{\pm}_{\mu}(0) | p, s\rangle;\\ &l^{-}_{\mu} = \bar{u}(k')\,\gamma_{\mu}(1+\gamma_5)\, u(k);\\ &l^{+}_{\mu} = \bar{v}(k)\,\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\, v(k'); \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$d^2\sigma^{\nu(\bar{\nu})}/d|q^2|d\nu = (G^2/4\pi M^2)(E'/E)\{\cos^2(\theta/2)\, M^2 W^{\nu(\bar{\nu})} +$$
$$+ 2\sin^2(\theta/2)\, W_1^{\nu(\bar{\nu})} \mp M(E+E')\, W_3^{\nu(\bar{\nu})} \sin^2(\theta/2)\} + O(m^2_{\mu})\, W^{\nu(\bar{\nu})}_{4,\,5}; \tag{5}$$

$$W^{\nu(\bar{\nu})}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \sum_{s=1,\,2} \int d^4x \exp(iqx)\,\langle p, s | [j^{\mp}_{\mu}(x),\ j^{\pm}_{\nu}(0)] | p, s\rangle =$$
$$= (-g_{\mu\nu} + q_{\mu} q_{\nu}/q^2)\, W_1^{\nu(\bar{\nu})} + (p_{\mu} - pq q_{\mu}/q^2)(p_{\nu} - pq q_{\nu}/q^2)\, W_2^{\nu(\bar{\nu})} -$$
$$- (i/2)\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_{\rho} q_{\sigma} W_3^{\nu(\bar{\nu})} + q_{\mu} q_{\nu} W_4^{\nu(\bar{\nu})} + (p_{\mu} q_{\nu} + p_{\nu} q_{\mu})\, W_5^{\nu(\bar{\nu})}. \tag{6}$$

Оценки влияния более высоких порядков на эти величины, поскольку они не относятся к радиационным поправкам лептонных частей, в основном, модельно-независимы [3] и поэтому в дальнейшем не рассматриваются.

Принцип масштабной инвариантности позволяет сделать ряд утверждений относительно асимптотического поведения структурных функций [1, 2]. Этот принцип требует, чтобы появляющиеся функции зависели лишь от безразмерных комбинаций независимых переменных.

Из соображений удобства все размерности далее будем выражать через размерность ν. Так как размерность W_1 равна 0, а размерности W_2, W_3, σ равны 2, то W_1 должна зависеть только от одной безразмерной переменной, для которой целесообразно выбрать

$$\xi = -q^2/\nu, \tag{7}$$

а W_2, W_3 должны вести себя как ν^{-1}. Таким образом, структурные функции W_i асимптотически ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} W_1(p, q) &= F_1(\xi); \\ W_2(p, q) &= \nu^{-1}F_2(\xi); \\ W_3(p, q) &= \nu^{-1}F_3(\xi). \end{aligned} \tag{8}$$

Функции $F_i(\xi)$ называются скейлинговыми функциями.

Для экспериментальной проверки асимптотического поведения (8) целесообразно исследовать глубоконеупругое рассеяние в *бьеркеновской области*:

$$\nu \to \infty; \quad q^2 \to -\infty; \quad \xi = -q^2/\nu_{\text{фиксир}}. \tag{9}$$

Данные эксперимента [4] практически находятся в согласии с теоретически предсказываемым поведением (8).

1. МОДЕЛЬНО-НЕЗАВИСИМОЕ ОПИСАНИЕ ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО ЛЕПТОН-АДРОННОГО РАССЕЯНИЯ

ДЙЛ-представление структурных функций и инвариантных амплитуд. Как говорилось во введении, описание глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния в первом порядке по электромагнитной (соответственно слабой) константе связи ведет к исследованию виртуальных амплитуд и их абсорбтивных частей:

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{4\pi} \sum_{s=1,\,2} \int d^4x \exp(iqx) \langle p,\ s | T j_\mu(x) j_\nu(0) | p,\ s\rangle; \tag{10}$$

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \sum_{s=1,\,2} \int d^4x \exp(iqx) \langle p,\ s | [j_\mu(x),\ j_\nu(0)] | p,\ s\rangle. \tag{11}$$

В настоящем разделе мы ограничимся глубоконеупругим электрон-нуклонным рассеянием. Рассмотрим виртуальную комптоновскую амплитуду и ее абсорбтивную часть. Кинематическое разложение $W_{\mu\nu}$ дает в этом случае

$$W_{\mu\nu} = (-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu/q^2)\, W_1 + (p_\mu - pq q_\mu/q^2)(p_\nu - pq q_\nu/q^2)\, W_2 \quad (12)$$

или также

$$W_{\mu\nu} = (-g_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu)\, V_1 + \\ + [p_\mu p_\nu q^2 - (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu)\, pq + g_{\mu\nu}(pq)^2]\, V_2. \quad (13)$$

Появляющиеся здесь инвариантные функции W_i (или V_i), $i = 1,2$, можно определить прямо из эффективного сечения (2). Заметим, что все результаты по смыслу переносятся также на нейтринно-нуклонное рассеяние.

Модельно-независимые исследования могут, очевидно, основываться лишь на тех свойствах $T_{\mu\nu}$ и $W_{\mu\nu}$, которые следуют из общих принципов квантовой теории поля, таких, как лоренц-инвариантность, причинность и спектральность [5]. Предмет настоящего исследования — инвариантные структурные функции W_i и соответствующие инвариантные амплитуды T_i. Они в дальнейшем понадобятся в различной функциональной зависимости, причем мы будем всегда их обозначать такими символами, как, например, $W_i(p, q) = W_i(\nu, q^2) = W_i(\nu, \xi) = W_i(\xi, q^2)$ и $\widetilde{W}_i(p, x) = \widetilde{W}(px, x^2)$. На W_i наложим следующие условия:

ковариантность

$$W_i(p, q) = W_i(\nu, q^2); \quad (14)$$

симметрию

$$W_i(\nu, q^2) = -W_i(-\nu, q^2); \quad (15)$$

эрмитовость

$$W_i^*(\nu, q^2) = W_i(\nu, q^2); \quad (16)$$

спектральность

$$W_i(\nu, q^2) = 0, \quad -q^2/|\nu| > 1; \quad (17)$$

причинность

$$\widetilde{W}(px, x^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \exp(-iqx)\, W_i(p, q) = 0, \quad x^2 < 0 \quad (18)$$

(и аналогично для T_i).

В силу нелокального характера кинематических тензоров, входящих в разложение (12), свойство причинности структурных функций $\widetilde{W}_i(p, x)$, конечно, требует особого доказательства [6].

Функции, которые удовлетворяют условиям (14) — (18), можно представить в форме, определенной Дайсоном, Йостом и Леманом [7]. Это ДЙЛ-представление в системе покоя нуклона можно записать в виде

$$W_i(\nu,\ q^2)=\varepsilon(q_0)\int d^3\mathbf{u}\int d\lambda^2\delta(q_0^2-(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2-\lambda^2)\,\psi_i(\mathbf{u},\ \lambda^2), \qquad (19)$$

причем носитель спектральной функции $\psi_i(\mathbf{u},\lambda^2)$ лежит в области

$$|\mathbf{u}|\leqslant M;\quad \lambda^2\geqslant\left(M-\sqrt{M^2-u^2}\right)^2. \qquad (20)$$

Соответствующее представление для фурье-преобразования запишется в виде

$$\widetilde{W}_i(x,\ p)=-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda^2\Delta(x,\ \lambda^2)\,\widetilde{\psi}_i(\mathbf{x},\ \lambda^2) \qquad (21)$$

с

$$\Delta(x,\ \lambda^2)=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int d^3q\exp(-\mathrm{i}qx)\,\varepsilon(q_0)\,\delta(q^2-\lambda^2)=$$
$$=(\varepsilon(x_0)/2\pi)\,(\partial/\partial x^2)\left\{\theta(x^2)\,J_0\left(\lambda\sqrt{x^2}\right)\right\} \qquad (22)$$

и

$$\widetilde{\psi}_i(\mathbf{x},\lambda^2)=\int d^3\mathbf{u}\exp(\mathrm{i}ux)\,\psi_i(\mathbf{u},\ \lambda^2). \qquad (23)$$

Соотношения между асимптотическими величинами. Интуитивные соображения, основанные на распространении принципа масштабной инвариантности на глубоконеупругое рассеяние, подсказывают, что необходимо обратить особое внимание на поведение структурных функций [1] в бьеркеновской области (9). В работах [6, 9] с помощью ДЙЛ-представления показано, что бьеркеновской области (9) соответствует окрестность светового конуса [8] в X-пространстве.

Квазипредел обобщенных функций; теоретическая формулировка бьеркеновского предела и асимптотики на световом конусе. Амплитуды (10) и их фурье-преобразования — обобщенные функции. Введем понятие квазипредела [9] (символ q — lim), который определяет асимптотическое поведение этих функций.

Определение. Обобщенная функция $f(x)\in M_+$ ведет себя в смысле квазипредела при $x\to+\infty$ как x^k или, точнее,

$$q-\lim_{x\to+\infty}f(x)=cx_+^k/\Gamma(k+1), \qquad (24)$$

если

$$\lim_{t\to\infty}t^{-k}(f(tx),\ \Phi(x))=\left(c\frac{x_+^k}{\Gamma(k+1)},\ \Phi(x)\right)\ \forall\Phi\in\varphi(R'). \qquad (25)$$

Обобщенная функция $f(x)\in\widetilde{M}_+$ ведет себя в смысле квазипредела при $x\to+0$ как x^k или, точнее,

$$q-\lim_{x\to+0}f(x)=cx_+^k/\Gamma(k+1), \qquad (26)$$

если

$$\lim_{t\to\infty}(t^k(f(x/t),\ \Phi(x))=$$
$$=(cx_+^k/\Gamma(k+1),\ \Phi(x))\ \forall\Phi\in\varphi(R^1). \tag{27}$$

При этом $M_+\in\varphi'(R^1)$ — множество распределений из $\varphi'(R^1)$, которые при $x\to-\infty$ ведут себя как тестовые функции, и $\widetilde{M}_+$ — множество временных распределений, чьи фурье-преобразования принадлежат M_+. В дальнейшем используем пространство φ' временных распределений с носителем на положительной оси, для которого достаточно использовать тестовые функции с носителем на R_+^1. Для выяснения роли светового конуса в глубоко-неупругом рассеянии существенно представление (19) для структурных функций, а также представление (21) для их фурье-преобразований, которые содержат существенную информацию, следующую из общих принципов квантовой теории поля. Спектральные функции ψ_i выступают при этом как усредненные величины.

Квазипредел спектральной функции $\psi_i(\mathbf{u},\ \lambda^2)$ согласно (24) запишется в виде

$$q-\lim_{\lambda^2\to\infty}\psi(\mathbf{u},\ \lambda^2)=\psi_0(\mathbf{u})(\lambda^2)_+^k/\Gamma(k+1), \tag{28}$$

т. е.

$$\lim_{t\to\infty}t^{-k}(\psi(\mathbf{u},\ t\lambda^2),\ \Phi(\mathbf{u},\ \lambda^2))=$$
$$=\left(\psi_0(\mathbf{u})\frac{(\lambda^2)_+^k}{\Gamma(k+1)},\ \Phi(\mathbf{u},\ \lambda^2)\right)\forall\Phi\in\varphi_3\times\varphi_+. \tag{29}$$

Для размазки граничного значения $\widetilde{W}_i(x,\ p)$ перейдем к продолженному относительно x_0 симметричному коммутатору $\widetilde{W}(x,\ p)$, который определяется соотношением

$$(\widetilde{W}(x,\ p),\ \Phi(x_0\mathbf{x}))=(\overline{W}(x^2,\ \mathbf{x}),\ (1/2)(x^2+\mathbf{x}^2)^{-1/2})\times$$
$$\times[\Phi(\sqrt{x^2+\mathbf{x}^2},\ \mathbf{x})-\Phi(-\sqrt{x^2+\mathbf{x}^2},\ \mathbf{x})], \tag{30}$$

при этом $\Phi(x_0,\ \mathbf{x})$ — тестовая функция из $\varphi(R^4)$, и, таким образом,

$$(x^2+\mathbf{x}^2)^{-1/2}[\Phi\sqrt{x^2+\mathbf{x}^2},\ \mathbf{x})-\Phi(-\sqrt{x^2+\mathbf{x}^2},\ \mathbf{x})]$$

— тестовая функция из $\varphi(R^3)\times\varphi_+$. Поэтому $\overline{W}$ — обобщенная функция от x^2 и $\mathbf{x}$.

Асимптотику на световом конусе затем находим следующим образом. Используя определение (26), можно заключить, что на световом конусе, т. е. при $x^2\to 0$, $\overline{W}(x^2,\ \mathbf{x})$ ведет себя как

$(x^2)^k$. Так что при действительном k имеем

$$\lim t^k (\overline{W}(x^2/t, \mathbf{x}), \Phi(x^2)) = \\ = (G(x)(x^2)_+^k/\Gamma(k+1), \Phi(x^2)) \; \forall \Phi \in \varphi_+. \tag{31}$$

Как будет показано позднее (см. выражение (51)), $\overline{W}(x^2, \mathbf{x})$ — целая аналитическая функция относительно $\mathbf{x}$, так что использование тестовой функции относительно этих переменных вполне законно. В противоположность этому в (29) интегрирование с тестовой функцией по переменной $\mathbf{u}$ невозможно.

Структурные функции $W_i(\nu, q^2)$ есть, собственно говоря, обобщенные функции относительно q_0 и q. Свойство положительности, конечно, сильно ограничивает допустимый класс функций. Из ДЙЛ-представления (19) следует, что функционал

$$\mathcal{F}_W(\nu) = \int d\xi W(\nu, \xi)\Phi(\xi), \quad \Phi \in D, \tag{32}$$

— гладкая функция относительно ν [это получается из значения интеграла (40), см. далее]. Поэтому можно определить бьеркеновский предел структурных функций через классическое асимптотическое поведение функционала (32) следующим образом:

$$B_j - \lim_{\nu \to \infty} \nu^{-k} W(\nu, q^2) = W_0(\xi), \tag{33}$$

если

$$\lim_{\nu \to \infty} \nu^{-k} \int d\xi W(\nu, \xi)\Phi(\xi) = \int d\xi W_0(\xi)\Phi(\xi) \; \forall \Phi \in D. \tag{34}$$

Это определение довольно общее, граничное значение получается в результате интегрирования с δ-функцией.

Эквивалентность бьеркеновского предела и асимптотики на световом конусе. Существование граничных значений $W(\nu, q^2)$, $\overline{W}(x^2, \mathbf{x})$ или $\psi(\mathbf{u}, \lambda^2)$ невозможно доказать, не прибегая к конкретной модели теории поля. Задача состоит, скорее, в том, чтобы показать эквивалентность этих граничных значений. Для того чтобы получить количественные соотношения между граничными значениями, целесообразно предположить существование квазипредела ψ вперед [6,9] и бьеркеновского предела (33), а также доказать следующее из справедливости равенства (28) существование асимптотики на световом конусе (31). Остановимся на этом вопросе подробнее.

Начнем с доказательства существования асимптотики на световом конусе $\overline{W}(x^2, \mathbf{x})$, для чего исследуем функционал

$$(\overline{W}(x^2, \mathbf{x}), \Phi(x^2)) \; \forall \Phi \in \varphi_+.$$

Для $\overline{W}$ используем ДЙЛ-представление

$$(\overline{W}(x^2, \mathbf{x}), \Phi(x^2)) = -\frac{i}{2\pi}\int dx^2\,\Phi(x^2)\,\frac{1}{2\pi}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\theta(x^2)\int_0^\infty d\lambda^2 J_0(\lambda\sqrt{x^2})\,\tilde{\psi}(\mathbf{x}, \lambda^2)\right\} =$$
$$= \frac{i}{4\pi^2}\int d\lambda^2\tilde{\psi}(\mathbf{x}, \lambda^2)\int dx^2\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}J_0(\lambda\sqrt{x^2})\,\theta(x^2) =$$
$$= -\frac{i}{4\pi^2}(\tilde{\psi}(\mathbf{x}, \lambda^2), \Phi_B(\lambda^2)). \tag{35}$$

Функцию $\Phi_B(\lambda^2)$ получаем с помощью преобразования

$$B:\ \Phi(x^2)\to\Phi_B(\lambda^2) = -\int dx^2\,\theta(x^2)\,J_0(\lambda\sqrt{x^2})\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, \tag{36}$$

φ_+ отображается на φ_+ [9]. Если также исходить из

$$(\overline{W}(x^2/t, \mathbf{x}),\ \Phi(x^2)) = -(i/4\pi^2)\,t^2(\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t\lambda^2),\ \Phi_B(\lambda^2)),$$

то из равенства (28) и определения квазипредела следует

$$\lim_{t\to\infty} t^{-k-2}(\overline{W}(x^2/t, \mathbf{x}),\ \Phi(x^2)) =$$
$$= -(i/4\pi^2)\lim_{t\to\infty} t^{-k}(\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t\lambda^2),\ \Phi_B(\lambda^2)) =$$
$$= -(i/4\pi^2)(\psi_0(\mathbf{x})(\lambda^2)_+^k/\Gamma(k+1),\ \Phi_B(\lambda^2)) =$$
$$= -\frac{i}{4\pi^2}\tilde{\psi}_0(\mathbf{x})\int dx^2\,\Phi(x^2)\,\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\theta(x^2)\int d\lambda^2 J_0(\lambda\sqrt{x^2})\frac{(\lambda^2)_+^k}{\Gamma(k+1)}\right\}.$$

Поэтому существование квазипредела $\overline{W}(x^2, \mathbf{x})$ объясняется существованием квазипредела $\psi(\mathbf{u}, \lambda^2)$. Если, кроме того, еще использовать соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\theta(x^2)\int d\lambda^2 J_0(\lambda\sqrt{x^2})\frac{(\lambda^2)_+^k}{\Gamma(k+1)}\right\} =$$
$$= -4^{k+1}(x^2)_+^{-k-2}/\Gamma(-k-1), \tag{37}$$

то получим

$$q-\lim_{x^2\to 0}\overline{W}(x^2, \mathbf{x}) = (i/4\pi^2)\,\tilde{\psi}_0(\mathbf{x})\,[4^{k+1}/\Gamma(-k-1)]\,(x^2)_+^{-k-2}. \tag{38}$$

Иногда формально записывают

$$\overline{W}(x^2, \mathbf{x}) = G(x_0)\,(x^2)_+^{-k-2}/\Gamma(-k-1), \tag{39}$$

причем, принимая во внимание, что $\widetilde{\psi}_0(x)=\widetilde{\psi}_0(\mathbf{x}^2)$ и $x_0^2=\mathbf{x}^2$, получают

$$G(x_0)=(\mathrm{i}4^k/\pi^2)\,\psi_0(\mathbf{x}).$$

Аналогичным образом заключаем, что из существования квазипредела (38) на световом конусе следует существование квазипредела (28) спектральной функции. Доказательство весьма громоздко, и поэтому его опускаем.

Докажем теперь, что существование бьеркеновского предела структурной функции $W(\nu,\ q^2)$ следует из существования квазипредела (28) спектральной функции $\psi(\mathbf{u},\ \lambda^2)$.

Исследуем поведение функционала

$$(W(\nu,\ \xi),\ \Phi(\xi))=\varepsilon(q_0)\int d\xi\int d^3\mathbf{u}\int d\lambda^2\times$$
$$\times\,\psi(\mathbf{u},\ \lambda^2)\,\delta(q_0^2-(\mathbf{q}-\mathbf{k})^2-\lambda^2)\,\Phi(\xi),\quad \Phi\in D. \tag{40}$$

Это выражение преобразуем таким образом, чтобы Φ перешла в тестовую функцию относительно $\mathbf{u}$ и λ^2:

$$(W(\xi,\ \nu),\ \Phi(\xi))=\frac{\varepsilon(q_0)}{\nu}\int d^3\mathbf{u}\int d\lambda^2\psi(\mathbf{u},\ \lambda^2)\times$$
$$\times\int d\xi\delta\left(\xi+\frac{\mathbf{u}^2+\lambda^2}{\nu}-\frac{\mathbf{ue}}{M}\sqrt{M^2+\frac{4\xi M}{\nu}}\right)\Phi(\xi)=$$
$$=\frac{\varepsilon(q_0)}{\nu}\int d^3\mathbf{u}\int d\lambda^2\,\psi(\mathbf{u},\ \lambda^2)\,\Phi(-\lambda^2/\nu+\mathbf{ue}/M+\chi_1/\nu)\,(1+\chi_2/\nu) \tag{41}$$

с $\mathbf{e}=\mathbf{q}/|\mathbf{q}|$. При этом функции $\chi_i(\mathbf{u},\ \nu,\ \lambda^2/\nu)$, $i=1,2$, вместе со всеми своими производными в области интегрирования ограничены, если ν достаточно велико. Следовательно, функции

$$\Phi_\nu(\mathbf{u},\ \tau^2)=\Phi(-\tau^2+\mathbf{ue}/M+\chi_1(\mathbf{u},\ \nu,\ \tau^2)/\nu)\,(1+\chi_2(\mathbf{u},\ \nu,\ \tau^2)/\nu)$$

при $\nu\to\infty$ сходятся в области $\tau^2=\lambda^2/\nu\geqslant 0$, $|\mathbf{u}|\leqslant M$. Так как $\lim\limits_{\nu\to\infty}\Phi_\nu=\Phi(-\tau^2+\mathbf{ue}/M)$ — тестовая функция, то можно применить определение (28). В результате получаем

$$\lim_{\nu\to\infty}\nu^{-k}\int d\xi W(\xi,\ \nu)\,\Phi(\xi)=$$
$$=\lim_{\nu\to\infty}\nu^{-k}\int d^3\mathbf{u}\int d\tau^2\psi(\mathbf{u},\ \nu\tau^2)\,\Phi_\nu(\mathbf{u},\ \tau^2)=$$
$$=\int d^3\mathbf{u}\psi_0(\mathbf{u})\int d\tau^2\,\frac{(\tau^2)_+^k}{\Gamma(k+1)}\,\Phi(-\tau^2+\mathbf{ue}/M)=$$
$$=\int d\xi\Phi(\xi)\int d^3\mathbf{u}\psi_0(\mathbf{u})\,\frac{(\mathbf{ue}/M-\xi)_+^k}{\Gamma(k+1)}.$$

Отсюда вытекает существование бьеркеновского предела (33) как следствие существования квазипредела (28) спектральной функции, т. е.

$$B_j - \lim_{\nu\to\infty} \nu^{-k} W(\nu, q^2) = \int d^3\mathbf{u}\psi_0(\mathbf{u}) \frac{(\mathbf{ue}/M-\xi)_+^k}{\Gamma(k+1)} \equiv W_0(\xi). \tag{42}$$

Из равенства (42) для скейлинговой функции $W_0(\xi)$ вытекают следующие свойства.

1. $W_0(\xi)$ — обобщенная функция и поэтому не должна быть определена в каждой точке.

2. Носитель $W_0(\xi)$ лежит в интервале $(-\infty, +1]$; так как k не есть целое, то носитель распространяется до $-\infty$.

3. Для $k = -1, -2, \ldots$ носитель ограничивается интервалом $[-1, +1]$, и выполняется равенство

$$W_0(\xi) = (-1)^{k+1} W_0(-\xi); \tag{43}$$

для нейтринно-нуклонного рассеяния получаем

$$W_0^{\nu}(\xi) \equiv (-1)^{k+1} W_0^{\bar\nu}(-\xi). \tag{44}$$

4. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ $W_0(\xi)$ в области $\xi < -1$ — полином степени $k+1$.

5. Между коэффициентными функциями соотношений (42) и (39) устанавливается следующая связь:

$$G(x_0) = (4^k/\mathrm{i}\pi^2)\exp[\mathrm{i}\pi(k+1)/2](x_0 - \mathrm{i}\varepsilon)^{k+1} \times \\ \times \int_{-\infty}^{1} d\xi \exp(\mathrm{i}x_0\xi) W_0(\xi). \tag{45}$$

Доказательство существования квазипредела (28) спектральной функции из соотношения (42) довольно громоздко, поэтому ограничимся ссылкой на литературу [9]. Таким образом, асимптотическое поведение структурных функций и, следовательно, абсорбтивной части виртуальной комптоновской амплитуды в бьеркеновской области однозначно связано с поведением коммутатора токов на световом конусе:

$$B_j - \lim_{\nu\to\infty} W_i(\nu, q^2) \Leftrightarrow q - \lim_{\lambda^2\to+\infty} \psi_i(\mathbf{u}, \lambda^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow q - \lim_{x^2\to 0} \overline{\overline{W}}_i(x^2, \mathbf{x}).$$

Скейлинговая функция $W_0(\xi)$ должна быть известна как обобщенная функция над своим носителем. Заметим, что из асимптотического поведения этой функции в физически доступной области $0 < \xi < 1$ нельзя сделать вывод о доминирующей сингулярности на световом конусе, когда $W_0(\xi)$, определенная равенством (11), исчезает [10, 11].

Характеристика редже-предела. Начнем с различия между бьеркеновским пределом (33) и редже-пределом, т. е. пределом на массовой поверхности. Редже-предел отражает асимптотическое поведение амплитуды рассеяния при $\nu \to \infty$ для фиксированного значения q^2, что формально соответствует бьеркеновскому пределу в точке $\xi = 0$. Как известно, эксперимент во многих случаях указывает на различное поведение этой амплитуды в бьеркеновской и редже-областях. Возьмем, например, структурную функцию $V_2(\nu, q^2)$, которая связана с полным эффективным сечением реальных фотонов следующим образом:

$$V_2(\nu,\ q^2=0) = -(2/\pi e^2)\,\nu^{-1}\sigma_{\text{п}}(\nu).$$

Если полное сечение $\sigma_{\text{п}}^{(\nu)}$ асимптотически, т. е. при $\nu \to \infty$, стремится к константе, то имеем

$$V_2(\nu,\ q^2=0) \sim \nu^{-1},$$

в то время как в бьеркеновской области ожидается асимптотическое поведение

$$V_2(\nu,\ q^2) \sim \nu^{-2}.$$

Следует указать, что такое поведение функции V_2 определяется разными механизмами и разными свойствами структурных функций. Общее определение редже-предела в рамках ДЙЛ-представления дают с помощью квазипредела функционала $\int dq_0 \times W(q_0,\ q^2)\,\Phi(q_0)$:

$$\int dq_0 W(q_0,\ q^2)\,\Phi(q_0) = 2y \int d\pi\chi(y)\,H(y), \tag{46}$$

где

$$H(y) = \int dq_0^2\, \frac{\Phi(q_0)-\Phi(-q_0)}{rq_0}\, \frac{\theta(q_0^2-q^2-y)}{\sqrt{q_0^2-q^2}} \tag{47}$$

— тестовая функция относительно y; $\chi(y)$ можно выразить через спектральную функцию

$$\chi(y) = \int d\rho\rho^2\psi(\rho,\ 2py-\rho^2+q^2). \tag{48}$$

Равенство

$$(W(tq_0,\ q^2),\ \ \Phi(q_0)) = 2\pi(\chi(ty),\ H(y))$$

можно понимать также как квазипредел $\chi(y)$, который определяет редже́вский предел от $W(q_0,\ q^2)$.

В отличие от редже́вского предела бьеркеновский предел структурной функции определяют с помощью квазипредела спектральной функции при $\lambda^2 \to \infty$. Поэтому между реджевским пределом и сингулярностями на световом конусе коммутатора токов нет корреляций.

Заметим, что поведение $V_2(\nu, q^2) \sim \nu^{-2}$ при $q^2 = 0$ весьма дискуссионно [10]. С одной стороны, появляющаяся в функции $W_0(\xi)$ сингулярность при $\xi = 0$ ведет к различному поведению структурных функций в бьеркеновском и реджевском пределах. С другой стороны, регулярное поведение $W_0(\xi)$ при $\xi = 0$ не исключает того, что в структурных функциях могут быть члены, пренебрежимые в бьеркеновском и важные в реджевском пределах.

Моменты структурных функций и сингулярности на световом конусе. Из всех многочисленных исследований глубоко-неупругого рассеяния наибольшего успеха достигли динамические теории, основанные на неабелевых калибровочных теориях поля [12], которые рассмотрим в разд. 2. Они существенно используют разложение на световом конусе [13] для коммутатора токов

$$[j(x),\ j(0)]_{x^2=0} \approx \sum_{n=0} c_n(x^2)\, x^{\mu_1} \ldots x^{\mu_n} O^n_{\mu_1 \ldots \mu_n}(0). \qquad (49)$$

При этом показывается, что операторы $O^n_{\mu \ldots \mu_n}(x)$ с сингулярностями на световом конусе могут быть операторами различной степени.

В этом разделе исследуется связь разложения на световом конусе (49) с наблюдаемыми величинами, моментами структурных функций. Рассмотрим снова матричный элемент

$$\sum_s \langle p,\ s \,|\, [j_\mu(x),\ j_\nu(0)] \,|\, p,\ s\rangle,$$

чьи структурные функции записываются с помощью ДЙЛ-представления, и применим для инвариантной функции $\overline{W}(x^2, x)$ всюду сходящееся разложение Тейлора, которое в случае существования совпадает с разложением (49). Затем определим моменты $\mu_n(q^2)$ структурных функций $W(\nu, q^2)$ и исследуем их асимптотическую связь с коэффициентами $f_n(x^2)$ этого разложения Тейлора. При этом удается изложенные в предыдущей главе соотношения между бьеркеновским пределом и асимптотикой на световом конусе при известных ограничениях распространить на асимптотические соотношения между $\mu_n(q^2)$ и $f_n(x^2)$.

Разложение Тейлора асимптотического коммутатора. Вначале рассмотрим разложение Тейлора для симметричного коммутатора $\overline{W}(x^2, \mathrm{x})$ [14]. Для этого запишем равенство (35) следующим образом:

$$(\overline{W}(x^2,\ x),\ \Phi(x^2)) = \frac{1}{4i\pi^2} \int d^3\mathbf{u} \exp(i\mathbf{u}\mathbf{x})\, (\psi(\mathbf{u},\ \lambda^2),\ \Phi_B(\lambda^2)). \qquad (50)$$

Скобка, стоящая с правой стороны,— обобщенная функция с компактным носителем относительно $\mathbf{u}$, так что ее фурье-преобразование есть целая аналитическая функция относительно x^2 с разложением Тейлора:

$$(\overline{W}(x^2, \mathbf{x}), \Phi) = \frac{1}{4i\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} (\mathbf{x}^2)^n \frac{1}{2n+1} \times$$
$$\times \int d^3\mathbf{u}\, (u^2)^n (\psi(\mathbf{u}, \lambda^2), \ \Phi_B(\lambda^2)) =$$
$$= \frac{1}{4i\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}(x^2)^n}{(2n)!\,(2n+1)} \int d^3\mathbf{u}\, (\mathbf{u}^2)^n \int dx^2\, \Phi(x^2) \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \theta(x^2) \int d\lambda^2 J_0(\lambda \sqrt{x^2})\, \psi(\mathbf{u}, \lambda^2) \right\}.$$

При этом использовали (36). Таким образом, для $W(x^2, \mathbf{x})$ получаем следующее представление

$$W(x^2, \mathbf{x}) = \frac{1}{4i\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} (\mathbf{x}^2)^n f_{2n}(x^2), \tag{51}$$

где

$$f_{2n}(x^2) = \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \theta(x^2) \int d\lambda^2 J_0(\lambda \sqrt{x^2})\, h_{2n}(\lambda^2) \right\}; \tag{52}$$

и

$$h_{2n}(\lambda^2) = \frac{1}{2n+1} \int d^3\mathbf{u}\, (\mathbf{u}^2)^n \psi(\mathbf{u}, \lambda^2). \tag{53}$$

Ряд (51), как это видно из его вывода,— глобальное представление, чья сходимость не ограничивается лишь областью светового конуса.

С одной стороны, подобное далеко идущее утверждение, конечно, не может быть сделано для разложения на световом конусе (49) в операторной форме; с другой стороны, если оно существует в каком-либо смысле, то его одночастичный матричный элемент вблизи светового конуса совпадает с разложением (51).

Сделаем еще несколько замечаний относительно сингулярностей на световом конусе, появляющихся в равенстве (51).

Необходимо различать два случая.

Случай 1. Все коэффициенты $f_{2n}(x^2)$ имеют один и тот же квазипредел на световом конусе. Тогда полиномиальные коэффициенты в квазипределе суммируются к целой функции $G(x_0)$, появляющейся в равенстве (39).

Случай 2. Большинство коэффициентов $f_{2n}(x^2)$ имеют на световом конусе один и тот же квазипредел. Тогда $G(x_0)$ редуцируется к полиному. Далее легко показать, что вклад, который дает каждый отдельный член выражения (51) в структурную функцию, в импульсном пространстве имеет носитель, который не является пространственно-подобным, т. е. экспериментально доступная область расширяется. Это следует из того, что каждый член структуры $(x_i)^l f_{2n}(x^2)$ представляется через спектральную функцию $(i\partial/\partial u_i)^l \delta(\mathbf{u}) h_{2n}(\lambda^2)$, сходящуюся при $\mathbf{u}=0$, которую затем подставляют в ДЙЛ-представление (19). В общем же случае $W(\nu, q^2)$ может иметь пространственно-подобный носитель. Позднее мы рассмотрим пример, когда такое поведение совместимо с причинностью и спектральностью.

Связь между коэффициентами разложения Тейлора и моментами структурных функций. Рассмотрим величины, которые доступны экспериментальному изучению и соответствуют членам разложения (51) на световом конусе. Моменты *Корнвала — Нортона* определяют следующим образом [15, 16]:

$$\mu_{2n}(q^2)=\int_0^1 d\xi\xi^{2n-1}W(\xi, q^2). \tag{54}$$

Для дальнейшего исследования, которое базируется на трехмерном ДЙЛ-представлении, целесообразнее ввести другие *модифицированные моменты*:

$$\hat{\mu}_{2n}(q^2)=\int_0^1 d\eta\eta^{2n-1}W(\eta, q^2). \tag{55}$$

Здесь в $W(\eta, q^2)$ переменная η выступает как функция от q^2 и ν;

$$\eta=-q^2/2M\,|q|=-(q^2/\nu)(1-4q^2M^2/\nu^2)^{-1/2}\equiv$$
$$\equiv\xi(1-4\xi^2M^2/q^2)^{-1/2}. \tag{56}$$

Как следует из (56), моменты (54) и (55) совпадают при $q^2\to-\infty$.

Опираясь на ДЙЛ-представление для структурной функции $W(\nu, q^2)$ и используя переменные η и $Q^2=-q^2$ вместо ν и q^2, необходимо получить лишь интегральные представления для момента $\hat{\mu}_{2n}(q^2)$ [14]. Для того чтобы показать, что $W(\eta, Q^2)$ для $Q^2>0$ обобщенная функция относительно η, исследуем с помощью тестовой функции $\Phi(\eta)$ функционал

$$(W(\eta, Q^2),\ \Phi(\eta))=2\pi Q^2\int_0^M d\rho\rho^2\int_{-1}^1 dz\times$$
$$\times\int d\lambda^2\frac{\rho z\Psi(\rho, \lambda^2)}{(Q^2+\rho^2+z^2)^2}\Phi\left(\frac{\rho zQ^2}{M(Q^2+\rho^2+\lambda^2)}\right), \tag{57}$$

который определен, если интегрирование по $d\lambda^2$ сходится. Дифференцируемость Φ относительно η переносится, естественно, на переменные ρ и λ^2. Заметим, что сходимость при $\lambda^2 \to \infty$ уже не выполняется. Причина этого лежит в нереальном выборе переменных, например, функционал $\mathscr{F}_W(\nu) = \int d\xi W(\nu, \xi)\, \Phi(\xi)$ всегда определен, тогда как у функционала

$$\mathscr{F}(q^2) = \int d\xi W(\nu = -q^2/\xi,\ q^2)\, \Phi(\xi)$$

возникают такие же трудности со сходимостью, как и в выражении (57). Если вспомнить, что моменты $\mu_{2n}(Q^2)$ и $\hat{\mu}_{2n}(Q^2)$ (обобщенно) можно определить как частные производные амплитуды

$$\mu_{2n}(Q^2) = \frac{\pi}{2} \frac{(Q^2)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{2n} T(\nu, Q^2)\big|_{Q^2_{\text{фикс}},\ \nu=0} \tag{58}$$

и соответственно

$$\hat{\mu}_{2n}(Q^2) = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(Q^2)^{2n}}{(2n)!} \Delta_{\mathbf{q}}^{n} T(\nu, Q^2)\big|_{Q^2_{\text{фикс}},\ \mathbf{q}=0};$$

тогда очевидна связь вышеназванных трудностей со сходимостью интеграла (57) с вычитательной проблемой ДЙЛ-представления для $T(\nu, Q^2)$.

Обратимся опять к выражению (57) и заменим $\Phi(\eta)$ на η^{2n-1}, тогда получим входящие в (55) моменты в форме

$$\hat{\mu}_{2n}(Q^2) = (Q^2)^{2n} \int_0^\infty d\lambda^2 \frac{\hat{h}_{2n}(\lambda^2)}{(Q^2+\lambda^2)^{2n+1}}, \tag{59}$$

где

$$\hat{h}_{2n}(\lambda^2) = \frac{1}{2n+1} \int d^3\mathbf{u}\, (\mathbf{u}^2)^n\, \psi(\mathbf{u}, \lambda^2 - \mathbf{u}^2). \tag{60}$$

В зависимости от характера поведения $\psi(\mathbf{u}, \lambda^2)$, растущего относительно λ^2, остаются неопределенными несколько моментов. Из выражений (52), (53), (59) и (60) следует ряд соотношений, которые связывают интересующие нас функции $f_{2n}(x^2)$ и $\hat{\mu}_{2n}(Q^2)$ с помощью спектральной функции:

$$f_{2n}(x^2) = \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \theta(x^2) \int_0^\infty d\lambda^2 J_0\left(\lambda \sqrt{x^2}\right) h_{2n}(\lambda^2) \right\}; \tag{61}$$

$$h_{2n}(\lambda^2) = \frac{1}{2n+1} \int d^3\mathbf{u}\, (\mathbf{u}^2)^n\, \psi(\mathbf{u}, \lambda^2); \tag{62}$$

$$\hat{h}_{2n}(\lambda^2) = \frac{1}{2n+1} \int d^3\mathbf{u}\, (\mathbf{u}^2)^n\, \psi(\mathbf{u}, \lambda^2 - \mathbf{u}^2); \tag{63}$$

$$\hat{\mu}_{2n}(Q^2) = (Q^2)^{2n} \int d\lambda^2 (Q^2 + \lambda^2)^{-2n-1}\, \hat{h}_{2n}(\lambda^2). \tag{64}$$

Из этих соотношений возникает связь между $f_{2n}(x^2)$ и $\hat{\mu}_{2n}(Q^2)$.

Принимая во внимание результаты динамической теории [12] и данные эксперимента, можно объяснить логарифмическое отклонение от скейлингового поведения благодаря введению понятия модифицированного квазипредела. Дадим *определение*: обобщенная функция $f(x)$ имеет модифицированный квазипредел порядка k при $x \to \infty$, если выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^k L(t)} (f(tx), \quad \Phi(x)) = (f_\infty(x), \ \Phi(x)), \tag{65}$$

где $L(t)$ — удобно выбранная слаборастущая функция со свойством

$$\lim [L(at)/L(t)] = 1. \tag{66}$$

В качестве $L(t)$ можно, например, взять функцию $\ln t$ или $\ln \ln t$. Условие (66) характеризует в общем случае асимптотическое степенное поведение, которое несколько модифицируется в зависимости от выбора слаборастущей функции $L(t)$.

Благодаря этому обобщению можно определить асимптотическое поведение функций $f_{2n}(x^2)$, $h_{2n}(\lambda^2)$ и $\hat{h}_{2n}(\lambda^2)$, используя введенное выше понятие модифицированного квазипредела.

Существование квазипредела для $\hat{h}_{2n}(\lambda^2)$ влечет за собой существование классического предела для $\hat{\mu}_{2n}(Q^2)$ как аналитической функции в Q^2-плоскости, разрезанной вдоль отрицательной оси. Поэтому величину предела модифицированного момента $\mu_{2n}(Q^2)$ можно экспериментально измерить.

Для того чтобы можно было установить соотношения между сингулярностями на световом конусе коэффициентов $f_{2n}(x^2)$ и асимптотическим поведением моментов $\hat{\mu}_{2n}(Q^2)$, необходимо установить соответствие граничных значений величин $q - \lim\limits_{x^2\to 0} f_{2n}(x^2)$, $q - \lim\limits_{\lambda^2\to\infty} h_{2n}(\lambda^2)$, $q - \lim\limits_{\lambda^2\to\infty} \hat{h}_{2n}(\lambda^2)$ и $\lim\limits_{Q^2\to\infty} \hat{\mu}_{2n}(Q^2)$ друг с другом. Не вдаваясь в подробности, приведем результаты, полученные в работе [14]. Из соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{-2-kn}}{L_n(t)} (f_{2n}(x^2/t), \quad \Phi(x^2)) = (f^0_{2n}(x^2), \quad \Phi(x^2)) \tag{67}$$

следует

$$\lim_{Q^2\to\infty} \frac{(Q^2)^{kn}}{L_n(Q^2)} \hat{\mu}_{2n}(Q^2) = \text{const}. \tag{68}$$

Обратное, вообще говоря, не верно; лишь при известных ограничениях, накладываемых на спектральные функции, справедливость (67) следует из выполнения равенства (68). Мы не будем на этом подробно останавливаться, а лишь отметим, что эти ограничения в действительности эквивалентны тому, что функции $\hat{\mu}_{2n}(Q^2)$ имеют на всех направлениях $\arg Q^2 \neq \pm\pi$ такое же асимптотическое поведение, как левая часть (68).

В этой связи интересно сравнение с работой [18]. В [18] из общих принципов квантовой теории поля выводятся ограничения на асимптотическое поведение в бьеркеновском пределе, которые известным образом связаны с условиями, накладывающимися здесь на отдельные спектральные функции.

Эти условия выполняются, когда спектральные функции $\hat{h}_{2n}$ от $\hat{\mu}_{2n}$ имеют положительную классическую первообразную функцию порядка N, так что возможно обращение к равенству (67). При необходимом здесь доказательстве эквивалентности

$$q - \lim_{\lambda^2 \to \infty} h_{2n}(\lambda^2) \quad \text{и} \quad q - \lim_{\lambda^2 \to \infty} \hat{h}_{2n}(\lambda^2)$$

используют положительность $W(\nu, q^2)$; прежде всего нужно предположить, что разница порядков квазипредела от f_{2n} и f_{2n+1} меньше единицы. Эти ограничения выполняются в неабелевых калибровочных теориях поля, которые согласуются с экспериментом (ср. с разд. 2).

В заключение продемонстрируем пример того, что различное поведение сингулярностей на световом конусе совместимо с причинностью и спектральностью.

Пусть спектральная функция дается через

$$\psi(\mathbf{u}, \lambda^2) = \theta(\lambda^2 - 1)(\lambda^2)_+^{k(\rho)}$$

с

$$k(\rho) = k_0 - c\rho^r; \quad c > 0; \quad k_0 > 0,$$

причем $\rho = |\mathbf{u}|$. Тогда следует соотношение

$$\lim_{t \to \infty} t^{-2-k_0}(l_n t)^{(n+1)/r}(f_{2n}(x^2/t),\ \Phi(x^2)) = \text{const},$$

в то время как бьеркеновский предел структурных функций

$$B_j - \lim_{\nu \to \infty} \nu^{-k_0}(\ln \nu)^{1/r} W(\nu, q^2) = \text{const}(-\xi)_+^{k_0}.$$

Хотя скейлинговая функция в пространственно-подобной области исчезает, все моменты $\hat{\mu}_{2n}$ отличны от нуля, потому что носитель от $W(\nu, q^2)$ простирается в пространственно-подобную область.

Наши результаты можно применить и к вакуумному ожиданию коммутатора токов $\langle 0 | [j_\mu(x), j_\nu(0)] | 0 \rangle$. Связь между инвариантным коммутатором $C(x)$ и спектральной функцией $\rho(s)$ представления Челлена — Лемана

$$C(x) = \int_{s_0}^{\infty} ds \rho(s) \Delta(x, s)$$

соответствует (61), в то время как связь между вакуумным поляризационным оператором $\Pi(q^2)$ и $\rho(s)$

$$Q^2\Pi(Q^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{s_0}^{\infty} ds\rho(s)\,[s(s+Q^2)]^{-1}$$

соответствует (64).

Точно так же, как устанавливалась связь между функциями $f_{2n}(x^2)$ и $\hat{\mu}_{2n}(Q^2)$, устанавливается асимптотическая связь между $c(x)$, $\Pi(Q^2)$ и $\rho(s)$, которую следует понимать в смысле квазипредела [17, 19].

Виртуальная комптоновская амплитуда, сингулярности на световом конусе и электромагнитная разница масс нуклонов. Чтобы использовать проведенные до сих пор исследования для описания полной амплитуды (10) виртуального комптон-эффекта, необходимо исходить из следующего. Во-первых, как было показано, для определения сингулярностей на световом конусе недостаточно знания одних структурных функций, т. е. абсорбтивной части амплитуды рассеяния. Во-вторых, при исследовании полной виртуальной комптоновской амплитуды необходимо учитывать связь между глубоконеупругим рассеянием и электромагнитными массовыми поправками нуклонов.

Определение асимптотики на световом конусе из полной амплитуды. Мы рассмотрим в дальнейшем виртуальную комптоновскую амплитуду, не ограничиваясь направлением вперед:

$$T_{\mu\nu}(p, Q, \Delta)=\frac{i}{4\pi}\int d^4x\,\mathrm{exp}\,(\mathrm{i}Qx)\times$$
$$\times\sum_{s_1,s_2}\langle p_1, s_1\mid Tj_\mu(x/2)\,j_\nu(-x/2)\mid p_2, s_2\rangle. \qquad (69)$$

Переменные определяются следующим образом:

$$p=(p_1+p_2)/2;\quad Q=(q_1+q_2)/2;$$
$$\Delta=p_1-p_2.$$

Бьеркеновская область этого процесса характеризуется переменными:

$$\nu=2pQ\underset{Q^2\to\infty}{\longrightarrow}+\infty;\ \{\xi=-Q^2/\nu,\ \mathbf{u}=\mathbf{Q}/\mid\mathbf{Q}\mid,\ \Delta\}_{\text{фиксир}}.$$

Заметим, что для реального фотона кинематические условия $q_1^2=0$, $q_2^2>0$ ограничивают переменную ξ в интервале $[-1, 0]$.

Амплитуду $T_{\mu\nu}(p, Q, \Delta)$, аналогично (12), можно разложить на инвариантные амплитуды T_i, $i=1, \ldots, 5$, которые удовлетворяют условию причинности [20]. Для T_i запишем, аналогично

(19), вычитательное ДЙЛ-представление в системе Брейта:

$$T(Q, \mathbf{p}) = \mathcal{P}_{N-1}(Q^2, pQ, Q\Delta) - \\ -\frac{1}{\pi}\int [d^3\mathbf{u}\,[Q_0^2-(\mathbf{Q}-\mathbf{u})^2+M^2]^N \times \\ \times \int \frac{d\lambda^2}{(\lambda^2+M^2)^N}\,\frac{\psi(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \lambda^2)}{[Q_0^2-(\mathbf{Q}-\mathbf{u})^2-\lambda^2+i\varepsilon]}, \quad (70)$$

где $\mathcal{P}_{N-1}$ — полином вычитания степени $N-1$ в переменных $p=(E_p, 0)$; $\Delta=(0, 2p)$; $\nu = 2E_pQ_0$; $E_p=\sqrt{p^2+M^2}$; носитель $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \lambda^2)$ лежит в области

$$|\mathbf{u}|\leqslant E_p,\ \lambda\geqslant\max\{0, E_p-\sqrt{E_p^2-\mathbf{u}^2}\}. \quad (71)$$

Представление (70) записано в вычитательной форме для того, чтобы обеспечить сходимость интегрирования по $d\lambda^2$. Возникает вопрос, когда подобные вычитания необходимы. Как было показано выше, растущее поведение $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \lambda^2)$ относительно λ^2 обусловлено определением квазипредела [см. (28)]. Можно показать [21], что определенное число N вычитаний достаточно, если ψ имеет квазипредел порядка k при условии $-1\leqslant k-N<0$. Из этого неравенства следует, что для $k<0$ не нужно вычитаний. Из ранних результатов (см. с. 136—140) следует, что число вычитаний обусловлено степенью сингулярности на световом конусе.

Исследуем бьеркеновский предел T_i. Предположим, что ψ имеет квазипредел порядка k. Согласно (33) определим

$$B_j - \lim_{\nu\to\infty}\nu^{-k}T(Q, \mathbf{p}) = T_0(\xi, \mathbf{p}, \mathbf{e}) \quad (72)$$

при условии

$$\lim_{\nu\to\infty}\nu^{-k}\int d\xi T(\xi, \mathbf{p}, \mathbf{e}, \nu)\,\Phi(\xi) = \int d\xi T_0(\xi, \mathbf{p}, \mathbf{e})\,\Phi(\xi);\ \ \Phi\in D. \quad (73)$$

Тогда получают следующие результаты [22]:

$$B_j - \lim_{\nu\to\infty}\nu^{-k}T(Q, \mathbf{p}) = \Gamma(-k)/\pi\int d^3\mathbf{u}\psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{p})\left(\xi-\frac{\mathbf{ue}}{E_p}-i\xi\right)^k \quad (74)$$

для $k\neq 0, 1, 2, \ldots$ и

$$B_j - \lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu^{-k}}{\ln\nu}T(Q, \mathbf{p}) = \frac{-1}{\pi\Gamma(k+1)}\int\limits_{|\mathbf{u}|\leqslant E_p} d^3\mathbf{u}\psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{p})\left(\frac{\mathbf{ue}}{E_p}-\xi\right)^k \quad (75)$$

для $k=0, 1, 2, \ldots$

При выводе последних соотношений проводились повторные интегрирования по переменной λ^2. Спектральную функцию затем переводили в непрерывную относительно λ^2 функцию, которая на основе предполагаемого существования квазипредела имеет степенное поведение. Далее вычисляли классический интеграл.

Обратимся теперь к обсуждению формул (74) и (75). Заметим, что неопределенный вычитательный полином представления (70) не дает вклада в бьеркеновский предел. Для положительного целого значения k амплитуда ведет себя как $\nu^k \ln \nu$, в то время как ее абсорбтивная часть — как ν^k. Такое поведение согласуется с тем, что скейлинговая функция T_0 (ξ, $\mathbf{p}$, $\mathbf{e}$) не имеет абсорбтивной части. Она есть полином относительно ξ [ср. (75)]; T_0 (ξ, $\mathbf{p}$, $\mathbf{e}$)— аналитическая в ξ-плоскости функция с продолжением

$$disc_{\xi} T_0(\xi, \mathbf{p}, \mathbf{e}) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int\limits_{|\mathbf{u}| \leqslant E_p} d^3\mathbf{u}\psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{p}) (\mathbf{ue}/E_p) - \xi)^k_+. \qquad (76)$$

Скейлинговая функция T_0, в противоположность W_0, как аналитическая функция отлична от нуля вплоть до дискретных положений нулей. Благодаря этому можно измерить виртуальную комптоновскую амплитуду в области малых ξ. Экспериментальные данные указывают на ее асимптотическое поведение как ν^k, что позволяет определить сингулярность на световом конусе коммутатора токов $\overline{W}$ $(x^2, \mathbf{x})$.

Сингулярность на световом конусе инвариантного T-произведения токов [см. (69)] возникает из представления, соответствующего выражению (21), в которое вместо Δ-функции входит причинная функция Δ^c (x, λ^2); для рассеяния вперед имеем

$$\widetilde{T}(x, p) \underset{x^2 \to 0}{\approx} \begin{cases} G(x_0)(x^2)^{-k-2} \ln(-x^2 + \mathrm{i}0), & k = -1, -2, \ldots \\ G(x_0)(x^2 - \mathrm{i}0)^{-k-2}, & k \text{ — нецелое;} \\ G(x_0)(x^2 - \mathrm{i}0)^{-k-2}_{\mathrm{FP}}, & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Здесь FP означает конечную часть обобщенной функции $(x^2 - \mathrm{i}0)^{\alpha}$ для $\alpha \to -k - 2$ [23]. Напомним, что абсорбтивная часть коммутатора токов $\overline{W}$ $(x^2, \mathbf{x})$ при $x^2 \to 0$ однозначно характеризуется формой $G(x_0)(x^2)_{+}^{-k-2}/\Gamma(-k-1)$ [см. (39)].

Условия сходимости для электромагнитной разницы масс нуклонов. Перейдем теперь к связи глубоконеупругого рассеяния с электромагнитными массовыми поправками. В однофотонном приближении для электромагнитного сдвига масс (или собственной энергии) адронов согласно формуле Котингема [24] имеем

$$\delta_m = -\frac{e^2}{4\mathrm{i}} \int d^4q \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 + \mathrm{i}0} T_{\mu\nu}(q, p). \qquad (77)$$

Хотя сама величина δ_m может расходиться, но разность сдвигов масс протона и нейтрона $\delta_m^p - \delta_m^n$ — конечная и наблюдаемая величина. Сходимость $\delta_m^p - \delta_m^n$ есть критерий электромагнитного происхождения протон-нейтронной разницы масс. Из равенства (77) видно, что при этом существенно поведение $T_{\mu\nu}$ (q, p) при больших q_{μ}. Исследование амплитуды $T_{\mu\nu}$ (q, p) с помощью ДЙЛ-представления показывает, что бьеркеновский предел или асимптотика на световом конусе обеспечивают сходимость $\delta_m^p - \delta_m^n$.

Для дальнейшего предположим существование канонических сингулярностей на световом конусе. Под каноническими сингулярностями нужно понимать такое поведение коммутатора $[j_\mu(x), j_\nu(0)]$ на световом конусе, какое получается в рамках алгебры на световом конусе с помощью построения токов из свободных полей со спином 0 и 1/2. Согласно [25], получаем:

$$V_1(\nu, q^2) \underset{\nu\to\infty}{\approx} \nu^{-1}h_0(\xi) + \nu^{-2}h_1(\xi);$$

$$V_2(\nu, q^2) \underset{\nu\to\infty}{\approx} \nu^{-2}h_2(\xi),$$

где V_1, V_2 — структурные функции из разложения (13). Моменты структурных функций W_i ведут себя при $Q^2 \to \infty$ следующим образом:

$$\mu_n^1(Q^2) = \int d\xi\xi^{n-1}W_1(\xi, Q^2) \leqslant \text{const}; \tag{78}$$

$$\mu_n^2(Q^2) = \int d\xi\xi^{n-1}W_2(\xi, Q^2) \leqslant Q^{-2}\,\text{const}. \tag{79}$$

В качестве условия конечности величины $\delta_m^p - \delta_m^n$ с помощью ДЙЛ-представления получают следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 d\xi\,[h_0(\xi)]^{p-n} = 0; \\ &\int_0^1 d\xi \left[\xi^2 h_0(\xi) + \frac{1}{2}\xi h_2(\xi) - \xi h_1(\xi)\right]^{p-n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Эти, вообще верные, правила сумм по некоторым обстоятельствам все же нельзя использовать, так как они содержат обобщенные функции, которые не могут быть полностью определены из экспериментов по глубоконеупругому рассеянию (здесь опять играет особую роль поведение при $\xi = 0$). Для моментов (78) и (79) можно вывести следующее условие сходимости [14]:

$$\delta_m^p - \delta_m^n \sim \int_0^\infty dQ^2\,[\mu_0^2(Q^2) + 4Q^{-2}\mu_2^1(Q^2) - 2\pi T_0(Q^2)]^{p-n} < \infty, \tag{81}$$

где $T_0(Q^2)$ — вычитательная константа, которую невозможно определить и экспериментально с помощью глубоконеупругого рассеяния. Некоторым образом $T_0(Q^2)$ возмещает несуществующий нулевой момент от W_1. Кроме того, существует тесная связь с так называемым фиксированным полюсом от T_1, т. е. асимптотически постоянным вкладом в реальную часть от $T_1(\nu, Q^2)$. Общее свойство условий (80) и (81) состоит, очевидно, в том, что они содержат величины, которые не могут быть определены из данных по глубоконеупругому рассеянию [26].

2. ПРИМЕНЕНИЕ КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ К ГЛУБОКОНЕУПРУГОМУ ЛЕПТОН-АДРОННОМУ РАССЕЯНИЮ

Неабелевая калибровочная теория поля сильного ваимодействия. Динамическое описание глубоконеупругого рассеяния, принимая во внимание успех кварк-партонной модели и алгебры токов на световом конусе, должно основываться, по-видимому, на квантовой теории кварковых полей. Взаимодействие кварков можно описать, вводя дополнительное глюонное поле. Так как теория должна давать скейлинговое поведение структурных функций, то она может быть *неабелевой калибровочной теорией поля* [31] *кварков и глюонов*, которые обладают свойством асимптотической свободы [12].

Квантовая хромодинамика (КХД) включает в себя кварк-партонную модель и алгебру кварковых токов на световом конусе [28]. В квантовой хромодинамике вводят $3N$ фундаментальных *кварковых полей* $\Psi_{Aa}(x)$, которые преобразуются относительно группы Пуанкаре как дираковские спиноры, а относительно группы «аромата» $SU(N)$, так же как и группы «цвета» $SU(3)$, как фундаментальные представления этих групп [32]. Квантовая хромодинамика сохраняет характер калибровочной теории поля вследствие того, что цветовые преобразования понимаются как локальные, т. е. зависящие от пространственно-временного преобразования симметрии (группа аромата играет в этой связи второстепенную роль). Появляющиеся безмассовые векторные поля $B^a_\mu(x)$ (янг-миллсовские поля), которые преобразуются по присоединенному, т. е. октетному, представлению группы цвета, интерпретируют как *глюонные поля*. Для того чтобы не модифицировать существенным образом достигнутое в кварк-партонной модели описание, глюоны не должны участвовать в электромагнитном или слабом взаимодействии, они относительно группы аромата ведут себя как синглет.

Глюонные поля можно понимать так же, как разложение

$$(B_\mu)_{bc} = B^a_\mu (t_a)_{bc}$$

лоренц-векторного поля (в смысле преобразований из группы Пуанкаре) B_μ, являющегося тензором относительно цветовой группы по генераторам t^a фундаментального представления группы $SU(3)$. Эти генераторы подчиняются соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}&[t^a, t^b] = \mathrm{i} f^{abc} t^c;\\&\{t^a, t^b\} = d^{abc} t^c;\\&\mathrm{Sp}\,(t^a t^b) = \delta_{ab}/2.\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Обозначим $\hat{X} = \partial^\mu X_\mu$, тогда классическая лагранжева плотность в квантовой хромодинамике

$$L_{\text{клас}} = \bar{\Psi}(\mathrm{i}\hat{D} - M)\,\Psi - \mathrm{Sp}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})/2, \tag{83}$$

где шпур берется в пространстве цвета и

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i} g B_\mu; \tag{84}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + \mathrm{i} g\,[B_\mu, B_\nu]. \tag{85}$$

Массовую матрицу M относительно цветовой группы предполагают кратной единичной матрице.

В этой теории квантование на основе калибровочной симметрии сложно и требует фиксирования калибровки и введения (комплексного) духового поля $\Phi(x) = \Phi^a(x)\, t_a$. Исходный пункт традиционной теории возмущения — это эффективный лагранжиан [31, 33]:

$$L_{\text{эф}} = L_{\text{клас}} - (1/\alpha)\,\mathrm{Sp}\,(B^\mu_{,\mu})^2 + 2\mathrm{Sp}\,(\Phi^*_{,\mu}\Phi'^\mu + \mathrm{i} g \Phi^*_{,\mu}[B_\mu, \Phi]). \tag{86}$$

Применение квантовой хромодинамики к глубоконеупругому рассеянию наталкивается на ряд трудностей. Для строгого описания виртуальной комптоновской амплитуды (соответственно слабой ток-токовой амплитуды) необходимо решение проблемы связанных состояний и появляющихся в калибровочных теориях инфракрасных сингулярностей [34]. Если исключить указанные трудности, то использование разложения на световом конусе произведений операторов токов и метода ренормгруппы позволяет установить асимптотические свойства моментов структурных функций.

Разложение на световом конусе произведений операторов токов [13] есть прямое обобщение формулировки алгебры токов на световом конусе. Все попытки доказательства ограничиваются теорией возмущения [35 (первая ссылка)]. В рамках аксиоматической квантовой теории поля получают разложение на световом конусе лишь там, где сделаны дополнительные предложения [35 (вторая ссылка)]. Оно представляет собой разложение рассматриваемого произведения операторов по локальным несингулярным операторам $O^n_{\mu_1 \ldots \mu_n}(\dot{x})$ и сингулярным, относящимся к световому конусу C-численным факторам $C_n(x^2)$. Разложение, которое влечет за собой обширное вычисление кинематического разложения (3), соответственно (6), можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
j_\mu(x)\,j_\nu(0) \underset{x^2\to 0}{\approx} & \left[(g_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)\frac{1}{x^2}\right]\times \\
& \times \sum_{n,\,i} C^1_{n,i}(x^2, g)\,x^{\mu_1}\cdots\ldots x^{\mu_n}O^{n,\,i}_{[\mu]}(0)+ \\
& +\frac{1}{x^2}\sum_{n,\,i} C^2_{n+2,\,i}(x^2, g)\,x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}O^{n+2,\,i}_{\mu\nu[\mu]}(0)+ \\
& +\sum_{n,\,i}\left\{\partial_\mu\frac{1}{x^2}x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}\,O^{n+1,\,i}_{\nu[\mu]}(0)+(\mu\Longleftrightarrow\nu)\right\}C^3_{n+1,\,i}(x^2, g)+ \\
& +\partial_\mu\partial_\nu\frac{1}{x^2}\sum_{n,\,i} C^4_{n,\,i}(x^2, g)\,x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}O^{n,\,i}_{[\mu]}(0)+ \\
& +\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho\frac{1}{x^2}\sum C^5_{n+1,\,i}(x^2, g)\,x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}g^{\sigma\tau}O^{n+1,\,i}_{\tau[\mu]}(0). \qquad (87)
\end{aligned}
$$

Канонические сингулярности на световом конусе следуют из данных сумм, так что частично принимается во внимание сохранение тока; функции на световом конусе имеют исключительно *аномальные размерности*, происходящие из ренормировки базисных операторов $O^n_{[\mu]}(x)$. Предполагают далее, что операторы имеют следующие свойства.

1. Они полностью симметричны по индексам $\mu_1 \ldots \mu_n$ и имеют нулевой шпур, т. е.

$$g^{\mu_i\mu_j}O^n_{\mu_1\ldots\mu_i\ldots\mu_j\ldots\mu_n}=0.$$

2. *Твист* этих операторов, т. е. $\dim O^n - n$ — минимальный, так что сингулярности относящихся к ним функций максимальны.

Базисными операторами с минимальным твистом могут быть следующие [12]:

(A) $SU(N)$-синглетные операторы

$$O^{\mathrm{v}}_{\mu_1\ldots\mu_n}=2\mathrm{i}^{n-2}\varphi\,\mathrm{Sp}\,(F_{\mu_1\alpha}D_{\mu_2}\ldots D_{\mu_{n-1}}F^{\alpha}_{\mu_n}) - \text{шпуры}; \qquad (88)$$

$$O^{F,\,0}_{\mu_1\ldots\mu_n}=\mathrm{i}^{n-1}\varphi\,(\overline{\Psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\ldots D_{\mu_n}\Psi) - \text{шпуры}; \qquad (89)$$

(B) $SU(N)$-октетные операторы

$$O^{F,\,a}_{\mu_1\ldots\mu_n}=\mathrm{i}^{n-1}\varphi\left[\overline{\Psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\ldots D_{\mu_n}\frac{1}{2}\lambda^a\Psi\right] - \text{шпуры}$$

(φ обозначает полную симметризацию лоренцевских индексов). В разложении на световом конусе не исключено появление таких операторов, которые построены из духовых полей или не имеют калибровочно-инвариантной структуры [36]. Вычисление аномальных размерностей этих операторов происходит в однопетлевом приближении, что достаточно для вывода асимптотического поведения. Даже в этом приближении при ренормировке синглетных операторов они не появляются сами по себе как контурные члены, а все синглетные операторы с равной симметрией и тензорной структурой выступают как калибровочно-неинвариантные и духовые операторы (операторы смешивания). Детальные исследования показывают, что такие калибровочно-неинвариантные и духовые операторы при вычислении аномальных размерностей в разложении на световом конусе не принимаются во внимание, так как матричные элементы строятся исключительно между физическими состояниями [36].

Если принять во внимание лишь указанные в (88) — (90) калибровочно-инвариантные операторы, то при учете операторного смешивания возникает следующая схема ренормировки:

$$(O^{nF}, O^{nV})_{\text{рен}} = (O^{nF}, O^{nV})_{\text{нерен}} \begin{pmatrix} z_{FF} z_{FV} \\ z_{VF} z_{VV} \end{pmatrix}, \tag{91}$$

и подобным образом для октетных операторов

$$O^{nF}_{\text{рен}} = z^{-1}_{FF} O^{nF}_{\text{нерен}}. \tag{92}$$

Имеющиеся аномальные размерности

$$^{n}\gamma^{i}_{jj} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} z_{ji}$$

даются выражениями [12]:

$$\left.\begin{aligned} {}^{n}\gamma^{F}_{FF} &= \frac{g^2}{8\pi^2} C_N \Big[1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4 \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \Big]; \\ {}^{n}\gamma^{V}_{VV} &= \frac{g^2}{8\pi^2} \Big[C_A \Big(\frac{1}{3} - \frac{4}{n(n-1)} - \frac{4}{(n-1)(n-2)} + \\ &+ \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \Big) + \frac{4}{3} NT; \\ {}^{n}\gamma^{F}_{VV} &= -(g^2/8\pi^2)\,(4(n^2+n+2)/n(n+1)(n+2))\,NT; \\ {}^{n}\gamma^{V}_{FF} &= -(g^2/8\pi^2)\,(2(n^2+n+2)/n(n^2-1))\,C_N. \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

При этом массы кварков равны нулю, поскольку детальное рассмотрение показывает, что в квантовой хромодинамике массового кварка асимптотические свойства моментов и сингулярности на световом конусе такие же, как и в безмассовой теории. Поэтому аномальные размерности (93) справедливы и для киральных операторов $O^{nF,\pm}$, которые получаются из операторов O^{nF} включением $(1\pm\gamma_5)/2$. Константы C_A, C_N и T имеют теоретико-групповое происхождение. В случае цвета $SU(n)$:

$$C_A=n;\quad C_N=(n^2-1)/2n;\quad T=1/2.$$

Вычисление аномальных сингулярностей коэффициентов на световом конусе достигается с помощью ренормгруппы. Применяя уравнение ренормгруппы [7, 37] к матричному элементу разложения на световом конусе, приходим к соответствующему уравнению для коэффициентов на световом конусе [38]:

$$\{\mu\partial/\partial\mu+\beta\partial/\partial g-{}^{n}\gamma\}\,C_n(x^2,g,\mu)=0. \tag{94}$$

При этом μ^2 — точка ренормировки (в импульсном пространстве); $\beta(g,\mu)$ определяется соотношением

$$\mu\partial g/\partial\mu=\beta(g,\mu); \tag{95}$$

$C_n(x^2)$ находят как решение уравнения (3.10):

$$C_n^{(i)}\left(\frac{x^2}{\lambda^2},g,m,\mu\right)=\left[\mathcal{T}\exp\int\limits_{\mu}^{\mu/\lambda}\frac{d\mu'}{\mu'}\,{}^{n}\gamma\right]\times$$

$$\times C_n^{(i)}(x^2,\bar g(\lambda),m/\lambda,\mu) \tag{96}$$

($\mathcal{T}$ обозначает порядок написания относительно μ', если аномальные размерности ${}^{n}\gamma$ базисных операторов O^n для операторного смешивания даются матрицами). Когда $C_n^i(x^2)$ имеют канонические размерности [в противоположность разложению (87)], то в правой части этого уравнения появляется дополнительный фактор $\lambda^{2d_j-(d_{0n}-n)}$. *Эффективную константу связи* $\bar g(\lambda,g)$ определяют как решение дифференциального уравнения

$$\lambda\partial\bar g/\partial\lambda=\beta(\bar g) \tag{97}$$

с начальным значением

$$\bar g(1,g)=g. \tag{98}$$

В однопетлевом приближении

$$\beta=-bg^3;\quad b=(M-2N/3)/16\pi^2, \tag{99}$$

так что получаем *

$$\bar g(\lambda,g)=g^2/(1+g^2b\ln\lambda^2). \tag{100}$$

---

* Из уравнения (100) следует, что $\bar g$ при $\lambda\to\infty$ стремится к нулю. Это означает, что при $\bar g=0$ находится *uv*-стабильная фиксированная точка. Такое наглядное поведение означает асимптотическую свободу.

С учетом (100) поведение на световом конусе коэффициентной функции (${}^{n}\gamma = C_n g^2 + \ldots$) дается формулой

$$C^{(i)}_{n,\,\text{гл}}(x^2/\lambda^2, g) \approx (b \ln \lambda^2)^{-c_n/2b}\, C^{(i)}_{n,\,\text{гл}}(x^2, \bar{g}). \tag{101}$$

Для операторного смешивания производят оценку уравнения (96) таким образом, что определяются собственные значения матрицы ${}^{n}\gamma$; в асимптотической области доминирует член с наименьшим собственным значением аномальной размерности, так что C_n определяют из выражения

$${}^{n}\lambda^{\text{собств}} = C_n g^2 + \ldots$$

Знание этих сингулярностей на световом конусе так же необходимо, как и знание асимптотического поведения моментов структурных функций. Укажем на то, что без решения проблемы связанных состояний теоретические предсказания квантовой хромодинамики ограничиваются лишь асимптотическими свойствами моментов. Остаются неопределенными численные коэффициенты тех асимптотических выражений, которые возникают от однонуклонных матричных элементов операторов $O^{n}_{[\mu]}(0)$. Этот бесконечный набор неопределенных коэффициентов отражает в известной мере наше неудовлетворительное знание точной волновой функции нуклона.

Асимптотическое поведение моментов. Ранее было показано, что сингулярности на световом конусе определяют асимптотическое поведение моментов следующим образом. Обобщая связь коэффициентных функций $f_n(x^2)$ с разложением Тейлора (51) симметричного коммутатора на случай $x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 = 0$, получаем

$$\overline{W}(x_0, x^2) = \frac{1}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x_0^n f_n(x^2). \tag{102}$$

Если при этом коэффициентные функции $f_n(x^2)$ имеют сингулярность на световом конусе:

$$f_n(x^2/\lambda^2) \underset{\lambda\to\infty}{\approx} (\lambda^2)^{\alpha_n} (\ln \lambda^2)^{\beta_n}, \tag{103}$$

то для асимптотического поведения моментов структурных функций имеем

$$\mu_n(Q^2) \underset{Q^2\to\infty}{\approx} (Q^2)^{\alpha_n - 2} \ln (Q^2/\mu^2)^{\beta_n}. \tag{104}$$

(Чтобы под знаком логарифма стояла безразмерная величина, был выбран параметр ренормировки μ.)

С помощью разложения $\overline{W}(x_0, x^2)$ на световом конусе (102) определяют либо четно-целые, либо нечетно-целые моменты. Для

eN-рассеяния соотношение $W_i(\nu, q^2) = -W_i(-\nu, q^2)$ приводит к тому, что индекс в уравнении (87) должен быть только четно-целым. А для νN-рассеяния из соотношения $W_i^{\nu p}(\nu, q^2) = -W_i^{\nu n}(-\nu, q^2)$ определяют либо четно-целые моменты для комбинации $W_i^{\nu p} + W_i^{\nu n}$, либо нечетно-целые моменты для комбинации $W_i^{\nu p} - W_i^{\nu n}$. Сингулярности коэффициентных функций $f_n(x^2)$ определяют из (103) с помощью (87) путем образования однонуклонных матричных элементов из соответствующих аномальных сингулярных функций $C_n(x^2)$ и принадлежащих к ним канонических сингулярностей. Далее рассмотрим лишь асимптотические соотношения. Из-за асимптотического равенства различных скейлинговых параметров моменты $\mu_n(Q^2)$ в (104) можно понимать или как корнвал-нортоновские моменты (54), или как модифицированные моменты (55), или как моменты Нахтмана [16].

Обычно образованные посредством структурных функций W_i моменты выражают через те, которые образованы со скейлинговыми функциями:

$$F_1 = W_1; \tag{105}$$

$$F_2 = pqW_2 = \nu W_2/2; \tag{106}$$

$$F_3 = pqW_3 = \nu W_3/2. \tag{107}$$

Такие функции для скейлинга постоянны, а отклонения от скейлингового поведения имеют логарифмический характер.

Для несинглетных (NS) вкладов получаются следующие соотношения:

$$\int_0^1 d\xi\xi^{n-1}F_1^{NS}(\xi, Q^2) \sim \ln(Q^2/\mu^2)^{-A_n^{NS}}; \tag{108}$$

$$\int_0^1 d\xi\xi^{n}F_2^{NS}(\xi, Q^2) \sim \ln(Q^2/\mu^2)^{-A_{n+2}^{NS}}; \tag{109}$$

$$\int_0^1 d\xi\xi^{n}F_3^{NS}(\xi, Q^2) \sim \ln(Q^2/\mu^2)^{-A_{n+1}^{NS}}. \tag{110}$$

Причем n для eN-рассеяния и симметричной комбинации $\sigma^{\nu p} + \sigma^{\nu n}$ четное, а для асимметричной комбинации $\sigma^{\nu p} - \sigma^{\nu n}$ нечетное. При выводе этих уравнений было использовано то, что n-й момент структурных функций W_i соответствует коэффициентам разложения по $(x_0)^n$ в уравнении (102). Для моментов от F_2 вполне достаточно первых трех, входящих в разложение (87) членов.

Из уравнений (102) — (104), так же как и из (93), (99) и (101), для группы аромата $SU\,(N)$ находим

$$A_n^{NS}=\frac{C_N}{11-2N/3}\left\{1-\frac{2}{n\,(n+1)}+4\sum_{j=2}^{n}1/j\right\}; \qquad (111)$$

в качестве приближения для любого n можно использовать с хорошей точностью следующее выражение [12]:

$$A_n^{NS}\approx[18/(11-2N/3)]\,(0{,}296\ln n-0{,}051). \qquad (112)$$

При описании синглетных (S) вкладов принимают во внимание проблему смешивания и в соответствии с (101) определяют наименьшее собственное значение ${}^n\gamma$-матрицы

$${}^n\gamma=\begin{pmatrix}{}^n\gamma_{FF}^F & {}^n\gamma_{FF}^V\\ {}^n\gamma_{VV}^F & {}^n\gamma_{VV}^V\end{pmatrix}; \qquad (113)$$

оно дается выражением

$${}^n\gamma_{\mp}=(1/2)\left\{{}^n\gamma_{VV}^V+{}^n\gamma_{FF}^F\mp\sqrt{({}^n\gamma_{VV}^V-{}^n\gamma_{FF}^F)^2+4\,{}^n\gamma_{VV}^F\,{}^n\gamma_{FF}^V}\right\}. \qquad (114)$$

Отсюда получают аналогичные (108)—(110) соотношения, а показатель

$$A_n^S=[8\pi^2/(11-2N/3)]\,({}^n\gamma_-/g^2) \qquad (115)$$

или

$$A_n^S\approx A_n^{NS}-O\,(1/n^2\ln n). \qquad (116)$$

Заметим, что квантовая хромодинамика дает положительные аномальные размерности для NS-операторов, а также для собственных значений матрицы ${}^n\gamma$. Это находится в согласии с общими положениями квантовой теории поля, причем полные двухточечные функции $\langle\,0\mid O^n\,(x)\,O^n\,(0)\mid 0\,\rangle$ должны иметь усиленные сингулярности на световом конусе как соответствующие свободные двухточечные функции.

Следствие положительности структурных функций — соотношение порядков для моментов, которое непосредственно следует из их определения (54):

$$\mu_{n+2}\leqslant\mu_n.$$

Кроме того, получают соотношения (хотя и несколько сложные) между различными парами моментов [16]. Результаты квантовой хромодинамики согласуются с этими соотношениями; они также означают, что моменты имеют различное асимптотическое поведение при $Q^2\to\infty$. Это ведет к тому, что структурные функции $W\,(\xi,\,Q^2)$ концентрируются с ростом Q^2 возле $\xi=0$ [4] (см. разд. 1).

Отсюда в соответствии с канонической размерностью токов может следовать каноническое скейлинговое поведение в математическом смысле, когда скейлинговая функция концентрируется при $\xi = 0$.

Как было уже упомянуто выше, имеется также один момент, который можно экспериментально измерить, но для которого нет соотношения, аналогичного (108) — (110). Это есть

$$-\int_0^1 d\xi\xi\,(F_3^{\nu p}(\xi, Q^2)+F_3^{\nu n}(\xi, Q^2)) = 3\pi\,(\sigma^\nu-\sigma^{\bar\nu})/2G^2ME.$$

Указанная величина интересна с точки зрения кварк-партонной модели. Отношение

$$-\frac{\int d\xi\xi\,(F_3^{\nu p}+F_3^{\nu n})}{\int d\xi\,(F_2^{\nu p}+F_2^{\nu n})}=\frac{\int d\xi\xi\,[q(\xi)-\bar q(\xi)]}{\int d\xi\xi\,[q(\xi)+\bar q(\xi)]}$$

показывает относительный вклад кварков и антикварков [28]; здесь $q = U_p + D_p$. Квантовая хромодинамика в асимптотике предсказывает для знаменателя левой части константу, а для числителя пока отсутствует какое-либо утверждение.

Заметим, что подобные теоретические исследования глубоконеупругого рассеяния были также проведены для поляризованной мишени [53]; при этом необходимо принять во внимание дополнительные операторы в разложении на световом конусе и должны быть определены их аномальные размерности.

Обоснование теории возмущения по эффективной константе связи и ее физические следствия. Дальнейшие излагаемые здесь заключения из кварковой хромодинамики основаны на том, что в силу асимптотически свободного характера поведения в ряде известных случаев, как например, при определении функций на световом конусе $C_n(x^2, g)$, можно пользоваться методами теории возмущений. Это возможно, когда разложение на световом конусе (87) при замене $x \to x/\lambda$ (только для скалярных токов) записывается в виде

$$j\left(\frac{x}{\lambda}\right)j(0)\underset{\lambda\to\infty}{\approx}\sum C_n\left(\frac{x^2}{\lambda^2},\, g\right)\frac{1}{\lambda^n}\,x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}O^n_{[\mu]}(0, g).$$

Если используем асимптотическое выражение для $C_n(x^2)$, заданное уравнением (101), то получим

$$j\left(\frac{x}{\lambda}\right)j(0)\underset{\lambda\to\infty}{\approx}\sum C_n\left(\frac{x^2}{\lambda^2},\, \bar g(\lambda)\right)\lambda^{-n}(\ln\lambda)^{-A_n}x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}O^n_{[\mu]}(0, g). \tag{117}$$

Таким образом, разложение на световом конусе произведения операторов токов будет теперь определяться коэффициентами $C_n(x^2, g)$, в которых произведена замена $g \to \bar{g}$. В силу асимптотического убывания эффективной константы связи $\bar{g}(\lambda) \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} 0$ коэффициенты $C_n(x^2, \bar{g}(\lambda))$ для главных и неглавных членов разложения можно найти методом теории возмущений.

Алгебра токов. Покажем теперь, каким образом из квантовой хромодинамики следует справедливость алгебры токов.

Коммутатор токов определяют для равных времен, т. е. вычисляют коммутатор $[j_\mu^a(x), j_\nu^b(0)]$ при $x_0 = 0$ или в вершине светового конуса. Для коммутатора $[j_0^a(x) j_0^b(0)]$ в разложении (87), дополненном индексами аромата, при $x_0 = 0$ появляются следующие типы сингулярностей:

$$\Delta\varepsilon(x_0)\,\delta(x^2)|_{x_0=0} = 0;$$

$$\partial_0\varepsilon(x_0)\,\delta(x^2)|_{x_0=0} = 2\pi\delta(x);$$

$$\partial_0^2\varepsilon(x_0)\,\delta(x^2)|_{x_0=0} = 0,$$

которые благодаря отрицательным степеням от $\ln x^2$ исчезают [39].

Таким образом, в разложении (3.6) остаются только члены

$$[j_0^a(x) j_0^b(0)]|_{x_0=0} = 4\pi\delta(x) \sum C_{1,ic}^{3ab}(x^2, \hat{g})\, O_0^{1,ic}(0). \qquad (118)$$

Здесь использовано то, что $O_0^{1,i}(x)$, как оператор (тока), с законом сохранения не имеет аномальной размерности, т. е. что соответствующий коэффициент $C_{1,ic}^{3ab}$ не содержит логарифмической сингулярности. Если учесть, что $C_{1,ic}^{3ab}(x^2, g)$ можно вычислить по теории возмущений, то в первом порядке получаются результаты свободной теории поля: функции на световом конусе — константы и глюонные операторы исключаются, потому что соответствующие коэффициенты стремятся к нулю. На этом основании в первом порядке следует справедливость алгебры токов. Аналогичным образом получают результаты алгебры токов для других коммутаторов.

Следовательно, надо принять во внимание то, что справедливость алгебры токов предполагает существование *uv*-стабильной фиксированной точки, которая в силу требования применимости теории возмущений должна существовать при $\bar{g} = 0$.

Канонические сингулярности на световом конусе. Квантовая хромодинамика существенно отличается от свободной квантовой теории поля тем, что различные функции на световом конусе имеют различные сингулярности. Главная сингулярность на световом конусе — каноническая, что можно изучить, используя разложение (87).

Коэффициенты C_n^i содержат отрицательные степени от $\ln x^2$ в возрастающем порядке, которые ведут к постоянному ослаблению сингулярности. Поэтому лишь первые члены ряда разложения (87), которые принадлежат к операторам с законом сохранения, а также к токам или тензору энергии — импульса, имеют каноническую сингулярность на световом конусе:

$$j_\mu(x)\, j_\nu(0) \underset{x^2=0}{\approx} [(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)(1/x^2)]\, C_2^1(x^2, g) \times$$
$$\times\, x^\alpha x^\beta \theta_{\alpha\beta}(0) + (1/x^2)\, C_2^2(x^2, g)\, \theta_{\mu\nu}(0) + [[\partial_\mu(1/x^2)]\, j_\nu(0) +$$
$$+ [\partial_\nu(1/x^2)]\, j_\mu(0)]\, C_1^3(x^2, g) + [\partial_\mu\partial_\nu(1/x^2)]\, C_2^4(x^2, g)\, x^\alpha x^\beta \theta_{\alpha\beta}(0) +$$
$$+ (i/2)\, \varepsilon_{\mu\nu k\lambda}\, [\partial^\lambda(1/x^2)]\, C_1^5(x^2, g)\, g^{k\alpha} j_\alpha(0). \qquad (119)$$

Соответствующие этому выражению скейлинговые функции концентрируются при $\xi = 0$, так как появляются сингулярные члены только типа $1/x^2$. Это видно из сравнения разложения (119) с соотношениями (39) и (45).

Высшие порядки теории возмущений. До сих пор мы рассматривали лишь первый неисчезающий порядок теории возмущений, однако возникает вопрос учета более высокого порядка. Так, например, важно знать, как ведет себя функция $\beta(g)$ при более высоких приближениях, для того чтобы оценить появление (конечных) инфракрасных стабильных фиксированных точек; имеют значение также поправки к правилам сумм кварк-партонной модели. Для того чтобы определить поправки более высокого порядка по константе связи к асимптотическому поведению моментов, необходимо вернуться к рассмотрению коэффициентов на световом конусе.

Применение ренормгруппы к $C_{n,i}$ дало [ср. с (96)]:

$$C_n\left(\frac{x^2}{\lambda^2},\, g\right) = C_n(x^2, \bar{g}(\lambda)) \exp\left\{\int\limits_\mu^{\mu/\lambda} \frac{d\mu'}{\mu'}\, {}^n\gamma_-(g)\right\}.$$

Поправки относятся как к $C_n(x^2, \bar{g})$, так и к ${}^n\gamma_-$ и $\bar{g}$. Двухпетлевые поправки [40, 41] даются выражениями:

$$\beta(g) = -\beta_0 g^3/16\pi^2 - \beta_1 g^5/(16\pi^2)^2 + \ldots;$$
$${}^n\gamma(g) = {}^n\gamma_0 g^2/16\pi^2 + {}^n\gamma_1 g^4/(16\pi^2)^2 + \ldots;\ \beta_1 = 17N/3 - 102;$$

поправки к C_n следующие:

$$C_n(g) = 1 + H^n g^2/12\pi^2 + \ldots;$$

затем благодаря приближенному интегрированию для эффективной константы связи получаем [41]

$$\bar{g}^2(Q^2) \underset{Q^2\to\infty}{\approx} \bar{g}_0^2(Q^2) - (\beta_1/\beta_0)(\bar{g}_0^4/16\pi^2) \ln\ln(Q^2/\mu^2)$$

и соответствующий момент

$$\mu_n(Q^2) \approx A_n\{1+(\bar{g}_0^2/12\pi^2)[H^n+P^n+L^n(Q^2)][\ln(Q^2/\mu^2)^{-{}^n\gamma_0/(2\beta_0)}]\},$$

где

$$P^n=(3/8)({}^n\gamma_1/\beta_0-{}^n\gamma_0\beta_1/\beta_0^2);$$

$$L^n(Q^2)=-(3/8)(\beta_1/\beta_0^2)^n\gamma_0\ln\ln(Q^2/\mu^2).$$

Заметим, что сумма H^n+P^n не зависит от выбранных условий ренормировки [41]. Последовательно проведенное вычисление по теории возмущений ведет к тому, что все поправочные члены, в особенности β_1 и ${}^n\gamma_1$, заметны лишь в форм-факторе двухпетлевого приближения. Главное же асимптотическое поведение, как и прежде, определяется первым порядком.

Правила сумм. Для проверки квантовой хромодинамики в рамках алгебры на световом конусе, а также кварк-партонной модели, приводимые ниже правила сумм имеют решающее значение, так как их можно экспериментально проверить. Это — правила сумм:

Каллана — Гросса

$$F_2=2\xi F_1; \tag{120}$$

Ллевеллина-Смита

$$6(F_2^{ep}-F_2^{en})=\xi(F_3^{\nu p}-F_3^{\nu n}); \tag{121}$$

Адлера

$$\int_0^1 d\xi\xi^{-1}(F_2^{\nu n}-F_2^{\nu p})=2; \tag{122}$$

Гросса — Ллевеллина-Смита

$$\int_0^1 d\xi[F_3^{\nu p}+F_3^{\nu n}]=6; \tag{123}$$

баланса импульсов

$$\int_0^1 d\xi\left[\frac{q}{2}(F_2^{ep}+F_2^{en})+\frac{3}{4}(F_2^{\nu p}+F_2^{\nu n})\right]=1. \tag{124}$$

Вывод этих правил сумм в квантовой хромодинамике отличается от рассмотрения моментов тем, что, с одной стороны, константы в правых частях соотношений (108) — (110) можно определить, используя теорию возмущений по $\bar{g}$, и, с другой стороны, тем, что такое рассмотрение можно провести для удобно выбранной линейной комбинации структурных функций.

Вообще, можно различить два типа правил сумм: локальные (120) и (121) и глобальные (122) — (124). Глобальные правила сумм в квантовой хромодинамике вплоть до поправок, вычисляемых по теории возмущений, можно принимать неизменными. Локальные правила сумм появляются в форме, зависящей от условий, которые накладывают на их моменты.

Рассмотрим сначала глобальные правила сумм и остановимся на выводе правила Гросса—Ллевеллина-Смита. В квантовой хромодинамике его вывод прост. Исходный пункт — соотношение (110) при $n=0$ для симметричной комбинации матричных элементов протона и нейтрона, которое выполняется для синглетного и несинглетного вкладов. Определяющие операторы — векторные операторы, для которых нет проблемы смешивания и для которых аномальная размерность исчезает: $A_1^{NS} = A_1^S = 0$. Однонуклонные матричные элементы вычисляем в системе покоя, так что принимаем во внимание лишь нулевые компоненты векторных операторов. Аксиально-векторной частью в одночастичном матричном элементе в силу его трансформационного поведения при пространственном отражении можно пренебречь. Остающиеся операторы кваркового числа $\overline{\Psi}\gamma_0\Psi$ и гиперзаряда $\overline{\Psi}\gamma_0 (1/\sqrt{3})\, \lambda^8\Psi$ имеют хорошо определенные матричные элементы, которые дают численное значение правила сумм. Функции на световом конусе $C_1^3(x^2, g)$ и появляющиеся согласно теории возмущений члены в (110) совпадают со значениями величин, вытекающими из алгебры на световом конусе, так что правило сумм дается в его первоначальной форме (123). Поправки во втором порядке по $\bar{g}$ пропорциональны обратной степени логарифма:

$$\bar{g}^2 \sim 1/\ln(Q^2/\mu^2).$$

Тогда во втором порядке по $\bar{g}$ [42]

$$\int_0^1 d\xi \left[F_3^{\nu p} + F_3^{\nu n}\right] = -6 + \frac{15}{16\pi^2}\,\bar{g}^2 C_N. \tag{125}$$

Совершенно аналогично получаем *правило сумм Адлера*. Исходный пункт — соотношение (109) для $F_2^{\nu p} - F_2^{\nu n}$ при $n = 1$. Снова существенны лишь векторные операторы. Поправки к правилу сумм Адлера довольно трудно вычислить; неявно они содержатся в результатах Калво [42].

Обсудим теперь правило сумм (124), соответствующее *импульсному балансу*. При выводе этого правила исходят из (110) при $n = 0$ для симметричной комбинации матричных элементов протона и нейтрона, которая ведет себя как синглет относительно группы аромата. В противоположность рассмотренным до сих пор глобальным правилам сумм проблема смешивания здесь играет существенную роль. Доминирующие операторы выражаются через фермионные и глюонные части тензора энергии — импульса.

Вывод (124) в квантовой хромодинамике из-за появления глюонного поля несколько меняется по сравнению с выводом предыдущих правил сумм. Отличие состоит в появлении алгебраического фактора, который возникает из диагонализации матрицы ${}^{n}\gamma$. Структура разложения произведения операторов токов (87) на световом конусе асимптотически дается выражением

$$C_F(x^2, g)\,\theta^F_{\mu\nu} + C_V(x^2, g)\,\theta^V_{\mu\nu}.$$

При этом принято во внимание, что $C_V(x^2, g)$ не дает вклада в нулевом приближении по теории возмущений. Фермионную часть $\theta^F_{\mu\nu}$ необходимо выразить через диагональные комбинации операторов, принадлежащие к собственным значениям γ. Матрица аномальной размерности для $n = 2$ записывается в виде [ср. (93)]

$${}^{2}\gamma = \frac{g^2}{8\pi^2}\begin{pmatrix} (8/3)\,C_N & (-8/3)\,C_N \\ (-4/3)\,NT & (4/3)\,NT \end{pmatrix}.$$

Оператор, собственное значение которого нуль, есть полный тензор энергии — импульса $\theta^F_{\mu\nu} + \theta^V_{\mu\nu}$, так как вектор $\binom{1}{1}$ исчезает благодаря ${}^{2}\gamma$. Фермионную часть $\theta^F_{\mu\nu}$ можно отсюда выразить через $\theta_{\mu\nu}$ и другой оператор $\theta'_{\mu\nu}$, принадлежащий собственному значению $\gamma > 0$:

$$\theta^F_{\mu\nu} = NT\,(NT + 2C_N)^{-1}\,\theta_{\mu\nu} + (NT + 2C_N)^{-1}\,\theta'_{\mu\nu}.$$

Собственно, интересно лишь первое слагаемое, асимптотическое поведение доминирующего оператора, так что левую часть правила сумм заменяют фактором [12]

$$r = \frac{NT}{NT + 2C_N} = \begin{cases} g/25 & \text{для } SU\,(3)\text{-аромата;} \\ 3/7 & \text{для } SU\,(4)\text{-аромата.} \end{cases}$$

Отсюда получаем, что с ростом числа степеней свободы по аромату экспериментальное значение приближается к 0,5.

Вернемся теперь к локальным правилам сумм. Для вывода *правила Каллана — Гросса* целесообразно исходить из структурной функции W_L и ее скейлингового поведения:

$$\nu W_L = \nu W_2 + (\nu/2\xi)\,(F_2 - 2\xi F_1), \tag{126}$$

причем W_L можно определить из коммутатора токов:

$$W_L = \frac{1}{8\pi\,(1 + \nu/4\xi)} \int d^4x\, \exp(\mathrm{i}\,qx) \sum \langle p \mid [j_\mu(x), j_\nu(0)] \mid p\rangle\, p^\mu p^\nu. \tag{127}$$

Если в это выражение подставить разложение на световом конусе (87), то можно получить соотношения, полученные ранее, между функциями на световом конусе $C_{n,i}(x^2, g)$ и моментами $\nu W_L/4\xi$:

$$\frac{\nu W_L}{4\xi} = \frac{1}{8\pi}\int d^4x \exp(\mathrm{i}\, qx)\left\{\left[p^2\Box - (p\partial)^2\frac{1}{x^2}\right]\times\right.$$

$$\times\sum C^1_{n,i}\langle p\mid x^{[\mu]}O^{n,i}_{[\mu]}(0)\mid p\rangle + \frac{1}{x^2}\sum C^2_{n+2,i}\times$$

$$\times p^\mu p^\nu\langle p\mid x^{[\mu]}A^{n+2,i}_{\mu\nu[\mu]}(0)\mid p\rangle +$$

$$+2\left(p\partial\frac{1}{x^2}\right)\sum C^3_{n+1,i}\,p^\lambda\langle p\mid x^{[\mu]}O^{n+1,i}_{\lambda[\mu]}(0)\mid p\rangle +$$

$$\left.+\left[(p\partial)^2\frac{1}{x^2}\right]\sum C^4_{n,i}\langle p\mid x^{[\mu]}O^{n,i}_{[\mu]}(0)\mid p\rangle\right\}$$

($x^{[\mu]}$ при этом означает произведение $x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}$). Главная сингулярность на световом конусе возникает из первого и последнего членов этой суммы и появляется в виде $\left[(p\partial)^2\frac{1}{x^2}\right]C^L_{n,i}$, причем

$$C^L_{n,i}(x^2, g) = -C^1_{n,i}(x^2, g) + C^4_{n,i}(x^2, g).$$

Применение ренормгруппы для этих функций дает

$$C^L_{n,i}(x^2/\lambda^2, g)\underset{\lambda\to\infty}{\approx}(\ln\lambda^2)^{-A_n}C^L_{n,i}(x^2, \bar{g}(\lambda)).$$

Вычисление по теории возмущений в соответствии с алгеброй на световом конусе свободных кварковых полей ведет к исчезновению $C^L_{n,i}(x^2, \bar{g})$ в нулевом порядке. Разложение по теории возмущений начинается с члена второго порядка, так что получаем

$$C^L_{n,i}(x^2/\lambda^2, g)\underset{\lambda\to\infty}{\approx}\bar{g}^2(\lambda)(\ln\lambda^2)^{-A_n}.$$

Поэтому для моментов $\nu W_L/4\xi$ справедливо соотношение

$$\int d\xi\,\xi^{n-1}\frac{\nu W_L}{4\xi}\sim\bar{g}^2Q^2[\ln Q^2]^{-A_{n-2}},$$

где принято во внимание то, что факторы x_0^2, возникающие от дифференцирования, сдвигают соотношение моментов на -2. Отсюда для комбинации

$$F_L = F_2 - 2\xi F_1 = 2\xi(W_L - W_2) \tag{128}$$

получаем

$$\int_0^1 d\xi\,\xi^n F_L(\xi, Q)\sim\bar{g}^2(\ln Q^2)^{-A_{n+2}} \tag{129}$$

(при этом вкладом от W_2 можно пренебречь, так как он слабее, чем вклад от νW_L, на целую степень). Поведение этого момента также определяется аномальной размерностью оператора твиста 2 $O^{n+2,i}_{[\mu]}$.

Для того чтобы освободиться от аномальных размерностей в (129), разделим его на соответствующее соотношение для F_2 [см. (104) — (106) и (115) — (116)]. При этом получаем

$$\int d\xi\xi^n F_L \Big/ \int d\xi\xi^n F_2 \approx a_n \bar{g}^2 (Q^2/\mu^2). \tag{130}$$

В отличие от канонического случая кварк-партонной модели или алгебры на световом конусе F_L спадает существенно слабее, а именно

$$\bar{g}^2 (Q^2/\mu^2) = g^2 [1 + bg^2 \ln (Q^2/\mu^2)]^{-1}.$$

[ср. (3.14)]. Коэффициент a_n определяют путем вычисления $C^L_{ni}(x^2, g)$ по теории возмущений; он дается выражением [43]:

$$a_n = (1/16\pi^2) C_N 4/(n+3). \tag{131}$$

Правило Ллевеллина-Смита аналогично трансформируется в соотношение между соответствующими моментами. С точностью до второго порядка оно представляется равенством [48]

$$\frac{\int d\xi\xi^n (F_2^{ep} - F_2^{en})}{\int d\xi\xi^{n+1} (F_3^{\nu p} - F_3^{\nu n})} = -\left[1 + \frac{\bar{g}^2}{4\pi^2} C_N \ln^2 (n+2)\right]. \tag{132}$$

Мы закончим рассмотрение правил сумм последним замечанием. Как показал только что проведенный анализ, квантовая хромодинамика ведет к известным правилам сумм, правда, в первом порядке по теории возмущений. Высшие порядки дают поправки, которые зависят от теоретико-групповой структуры; отсюда можно ожидать, что экспериментальные исследования правил сумм позволят сделать вывод о числе кварковой степени свободы (аромата).

Теоретико-групповая структура разложения на световом конусе. Здесь мы рассмотрим теоретико-групповой аспект разложения произведения операторов. Уже отмечалось, что результирующие структуры не зависят от операторной формы разложения на световом конусе, а лишь отражают лоренц-ковариантность появляющихся операторов $O^n_{[\mu]}(x)$.

Исходный пункт следующих выкладок состоит в том, что операторы $O^n_{[\mu]}(x)$ в разложении

$$j(x)\, j(0) \underset{x^2=0}{\approx} \sum C_n (x^2, g)\, x^{\mu_1} \ldots x^{\mu_n} O^n_{\mu_1 \ldots \mu_n}(0)$$

есть тензоры с определенным лоренц-спином, и поэтому в теоретико-групповом смысле — неприводимые тензоры. Кроме того, вводится, и прежде всего в евклидовом пространстве, $(n+1)^2$ линейно-независимых ортонормированных гомогенных полинома [44]

$H_{nm}(x)$ степени n с $m = 1, 2, \ldots, (n+1)^2$, которые связываются с полиномами Гегенбауера $C_n^1(\eta)$:

$$\frac{2\pi^2}{n+1} \sum_m H_{nm}(\mathbf{x}) H_{nm}(\mathbf{x}') = |\mathbf{x}|^n |\mathbf{x}'|^n C_n^1\left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}||\mathbf{x}'|}\right)$$

($|\mathbf{x}|$ — модуль евклидова 4-вектора $\mathbf{x}$). Если с помощью аналитического продолжения перейти к пространству Минковского ($H_{nm}(\mathbf{x}) \to H_{nm}(x)$), ввести сферические компоненты $O_{nm}(0)$ операторов $O^n_{[\mu]}(0)$:

$$\sum_m \frac{2\pi^2}{n+1} H_{nm}(x) O_{nm}(0) = (-2)^n x^{\mu_1} \ldots\ldots x^{\mu_n} O^n_{\mu_1 \ldots\ldots \mu_n}(0)$$

и принять во внимание, что матричный элемент $\langle p | O_{nm}(0) | p \rangle$ должен быть пропорционален $H_{nm}(p)$, то получим [16]

$$\langle p | x^{\mu_1} \ldots x^{\mu_n} O^n_{\mu_1 \ldots \mu_n}(0) | p \rangle = \frac{2\pi^2}{2^n (n+1)} M_n \sum H_{nm}(x) H_{nm}(p).$$

Здесь $M_n = \langle p \| O^n \| p \rangle$ обозначает редуцированный матричный элемент. В соответствии с этим разложение на световом конусе матричного элемента токов $j(x) j(0)$ появляется как разложение по полиномам Гегенбауера:

$$\langle p | j(x) j(0) | p \rangle \underset{x^2=0}{\approx} \sum_n C_n(x^2, g) \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{x^2}}{2}\right) M_n C_n^1 (\mathrm{i}px/\sqrt{x^2}). \tag{133}$$

Это разложение можно рассмотреть со следующей точки зрения. Как известно, разложение Тейлора амплитуды рассеяния согласно (58) соответствует корнвалл-нортоновским моментам:

$$T(p, q) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2pq}{Q^2}\right)^n \mu_n(Q^2). \tag{134}$$

При этом теоретико-групповая структура $T(p, q)$ остается скрытой. Она может проявиться благодаря почленному применению фурье-преобразования к разложению на световом конусе матричного элемента $\langle p | Tj(x) j(0) | p \rangle$. Используя соотношение

$$H_{nm}(-\mathrm{i}\partial/\partial q) f(Q^2) = H_{nm}(q) (2\mathrm{i}\partial/\partial Q^2)^n f(Q^2),$$

амплитуду $T(p, q)$ можно разложить по полиномам Гегенбауера следующим образом:

$$T(p, q) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^1\left(\frac{\mathrm{i}pq}{\sqrt{Q^2}}\right) (\sqrt{Q^2})^{-n} M_n(Q^2) \left(\frac{\partial}{\partial Q^2}\right)^n \widetilde{C}_n(Q^2); \tag{135}$$

ряд (135) сходится вне спектральной области, т. е. для $|2pq| < Q^2 = -q^2$. Это разложение представляет собой перегруппировку разложения Тейлора (134).

Структура равенств (134) и (135) позволяет ввести общее разложение амплитуды рассеяния по полиномам Гегенбауэра:

$$T(p, q) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4i}{\sqrt{Q^2}}\right)^n \mu_n^\zeta (Q^2)\, C_n^1 \left(\frac{ipq}{\sqrt{Q^2}}\right). \tag{136}$$

Используя соотношения ортогонализации полиномов Гегенбауэра, коэффициенты разложения $\mu_n^\zeta (Q^2)$ можно представить как проекции $T(p, q)$. Применяя дисперсионные соотношения, можно получить специальные моменты

$$\mu_n^\zeta (Q^2) = \int d\zeta \zeta^{n-1} (1 + \zeta^2/Q^2)\, W(p, q), \tag{137}$$

где

$$\zeta = Q^2 [pq + \sqrt{(pq)^2 + p^2 Q^2}]^{-1} \tag{138}$$

— так называемые нахтмановские моменты. Очевидно, что $\mu_n^\zeta (Q^2)$ при больших Q^2 совпадают с введенными с помощью (54) и (55) моментами. Сравнивая соотношения (135), (136), получаем

$$\mu_n^\zeta (Q^2) = \frac{2i^{n+1}}{4^{2(n+1)}} (Q^2)^n \left(\frac{\partial}{\partial Q^2}\right)^n \tilde{C}_n (Q^2)\, M_n. \tag{139}$$

Подобный анализ справедлив для векторных токов [45]. При этом целесообразно исходить из разложения, модифицированного по сравнению с (87), которое для электромагнитных токов ведет к следующему выражению для однонуклонного матричного элемента:

$$T_{\mu\nu}(p, x) = \sum_n \{C_n^1 (x^2, g)\, g_{\mu\nu} P^{[\mu]}(x) \times$$

$$\times \langle p \mid O_{[\mu]}^n (0) \mid p\rangle + C_n^2 (x^2, g)\, g_{\mu k} g_{\nu\lambda} P^{k\lambda\,[\mu]}(x) \times$$

$$\times \langle p \mid O_{[\mu]}^n (0) \mid p\rangle + C_n^3 (x^2, g)\, P^{[\mu]}(x) \times$$

$$\times \langle p \mid O_{\nu\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}^n (0) \mid p\rangle + g_{\nu k} P^{k\,[\mu]}(x) \times$$

$$\times \langle p \mid O_{\mu\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}^n (0) \mid p\rangle\}. \tag{140}$$

Здесь $P^{\mu_1 \ldots \mu_n}(x)$ — построенный из x^μ полностью симметричный и бесшпуровый тензор. Используя соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\langle p \mid O^n_{\mu_1 \ldots \mu_n}(0) \mid p\rangle = M_n P_{\mu_1 \ldots \mu_n}(p) \\ &G^j_n(q^2) = M_n\left(-2\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^n \int d^4x \exp(\mathrm{i}\, qx)\, C^i_n(x^2), \\ &i = 1,\ 3,\ 4; \\ &G^2_n(q^2) = M_n\left(-2\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^{n+2} \int d^4x \exp(\mathrm{i}\, qx)\, C^2_n(x^2), \end{aligned}\right\} \qquad (141)$$

получаем результат, подобный тому, который для скалярных токов привел к (139), т. е. получаем следующие соотношения:

$$\frac{1}{2(n+2)^2}\int\limits_{Q^2}^{\infty}\frac{d\nu}{Q^2}\zeta^{n+1}\left\{\left[(n+4)+\frac{3n+2}{2}\frac{\zeta}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{n+2}{2}\frac{2}{\zeta}\right]M^2W_2 - 2(2n+3)(n+2)W_1\right\} = \frac{\pi}{2^n}(Q^2)^n G^1_n(-Q^2);$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q^2}^{\infty}\frac{d\nu}{Q^2}\zeta^{n+1}\left\{\left[\frac{2n}{n+2}+\frac{n^2+n+2}{(n+2)(n+3)}\frac{\zeta}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{z}{\zeta}\right]M^2W_2 - 4W_1\right\} = \frac{\pi}{2^n}(Q^2)^{n+1}G^2_n(-Q^2);$$

$$\frac{n-1}{2(n+1)}\int\limits_{Q^2}^{\infty}\frac{d\nu}{Q^2}\zeta^{n+1}\left\{\left[\frac{n+2}{2n}+\frac{1}{4}\frac{\zeta}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n^2+3n+4}{4n(n-1)}\frac{2}{\zeta}\right]M^2W_2 - W_1\right\} = \frac{\pi}{2^n}(Q^2)^{n-1}G^3_n(-Q^2);$$

$$\frac{1}{2(n+2)^2}\int\limits_{Q^2}^{\infty}\frac{d\nu}{Q^2}\zeta^{n+1}\left\{\left[2(n^2+2n-4)+n(n-2)\frac{\zeta}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(n^2+6n+8)\frac{2}{\zeta}\right]M^2W_2 + 4n(n+2)W_1\right\} =$$

$$= (\pi/2^n)(Q^2)^n G^4_n(-Q^2),$$

где M — масса мишени; ζ — выражение (137), а

$$z = Q^2[-pq + \sqrt{(pq)^2 + p^2Q^2}]^{-1}.$$

При таком подходе не учтено сохранение токов, поэтому возникают дополнительные соотношения между моментами одного и того же порядка.

Заметим, что соотношения вида (139) отнюдь не связаны со справедливостью разложения произведения операторов [46]. Исходя из представления Йоста — Лемана (19), можно показать, что симметричный коммутатор $\overline{W}(p, x)$ причинной лоренц-инвариантной структурной функции $W(p, q)$ имеет глобально сходящееся разложение в ряд по полиномам Гегенбауера:

$$\overline{W}(x, p) = \frac{1}{4\mathrm{i}\,\pi^2} \sum_n \frac{(2\mathrm{i})^n}{n!} f_n^\zeta(x^2)\, C_n^1\left(\frac{xp}{\sqrt{x^2}}\right)(\sqrt{x^2})^n, \tag{142}$$

которое отличается от разложения (51). Тогда можно установить аналогичную цепочку связей между (61) — (64), откуда получаем соотношение

$$\mu_n^\zeta(Q^2) = (Q^2)^n (\partial/\partial Q^2)^n \tilde{f}_n^\zeta(Q^2)/32\pi^2 n!, \tag{143}$$

справедливое для всех $Q^2 > 0$. Это справедливое для любого целого n равенство не основано, таким образом, именно на разложении произведения операторов, а, в общем случае,— на лоренц-инвариантности. Таким образом, формула (139), лишь асимптотически верная для моментов $\mu_n(Q^2)$, есть точное соотношение для моментов $\mu_n^\zeta(Q^2)$.

Заметим, что при обсуждении экспериментальных результатов переменная ζ более удобна, чем ξ.

Реконструкция структурных функций; теоретико-полевое обоснование кварк-партонной модели. Изложенный до сих пор подход к глубоконеупругому рассеянию дает асимптотически верные утверждения относительно моментов структурных функций. Наибольший интерес все же представляют сами структурные функции. Хотя, как показано в разд. 1, невозможно из асимптотического поведения моментов однозначно сделать вывод об асимптотическом поведении сингулярностей на световом конусе и, наконец, о структурных функциях, тем не менее оказывается, что для больших значений Q^2 такой вывод возможен.

Целесообразно исходить из вышерассмотренных моментов $\mu_n^\zeta(Q^2)$ и использовать (137) как исходный пункт для реконструкции структурных функций. Удобно определить моменты с помощью преобразования Меллина. Но при таком определении проблематично существование первого момента. Трудности при этом могут возникнуть как от редже-предела ($\zeta = 0$), так и от вычитаний ДЙЛ-представления. Причем использование разложения произведения операторов токов на световом конусе может не дать результата. Если определенный момент не существует, то из разложения на световом конусе следует информация о вычитательном члене (ср. относящееся к этому обсуждение в разд. 1). В дальнейшем мы предположим, что все моменты существуют.

Формально обращение равенства (137) дается выражением

$$W(q, p) = (1 + \zeta^2/Q^2)^{-1} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{n_0 - \mathrm{i}\infty}^{n_0 + \mathrm{i}\infty} dn\, \zeta^{-n-1} \mu_n^\zeta(Q^2), \tag{144}$$

причем необходимые аналитические свойства $\mu_n^\zeta(Q^2)$ следуют из представления (137). Правда, это обращение еще не имеет физической интерпретации. Если учесть равенство (139) и использовать преобразования Меллина:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{C}_n(Q^2, g) = \frac{2i^{n+1}}{4^{2(n+1)}}(Q^2)^n\left(\frac{\partial}{\partial Q^2}\right)^n \tilde{C}_n(Q^2, g) = \\ &= \int_0^1 x^{n-1}E(x, Q^2)\,dx; \\ &M_n = \int_0^1 dx x^{n-1}G(x), \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

то (144) принимает следующий вид [47]:

$$W(q, p) = (1+\zeta^2/Q^2)^{-1}\int_0^1 \frac{dx}{x}E\left(\frac{\zeta}{x}, Q^2\right)G(x). \tag{146}$$

В этой формуле $G(x)$ меллиновский образ матричного элемента M_n интерпретируется как функция распределения партонов в соответствующей мишени, остальная часть формулы отражает взаимодействие партонов.

Специфика формулы (146) состоит в том, что такое представление для структурной функции остается в силе независимо от конкретных предположений о динамике взаимодействия. Предполагаются лишь аналитические свойства относительно n, необходимые для равенства (145), которые, вероятно, выполняются в рамках квантовой хромодинамики.

Из-за аналитичности $\mu_n^\zeta(Q^2)$, вытекающей из (137), достаточно доказать аналитичность функции $\bar{C}_n$, которая вследствие соотношения

$$\bar{C}_n(Q^2) = \frac{2i^{n+1}}{4^{2(n+1)}}(Q^2)^n\int dt\,\frac{(t+Q^2)^{-n-1}}{\Gamma(-n)}\tilde{C}_n(t)$$

связывается с аналитичностью $\tilde{C}_n(Q^2)$. Аналитичность $\tilde{C}_n(Q^2)$ получаем из решения уравнения ренормгруппы (101):

$$\tilde{C}_n(Q^2, g) \approx [\ln(Q^2/\mu^2)]^{-c_n/2b}\,\tilde{C}_n(Q^2, \bar{g}^2(Q^2/\mu^2)).$$

Аномальные размерности C_n аналитичны в правой полуплоскости [см. равенство (93)] и выражения для $\tilde{C}_n(Q^2, \bar{g}^2)$ независимы от n, так как их определяют по теории возмущений при $Q^2 \to \infty$.

Соотношение (146) — предмет многих интересных дискуссии. В работе [48] учтена полная кинематическая структура без пренебрежения членов порядка M^2/Q^2. При этом за основу взято разложение произведения операторов токов, которое содержит фермионные операторы и операторы, следующие из свободной теории поля; наложено ограничение на операторы твиста 2. Получено представление структурных функций через функции f_i, слабо зависящие от Q^2. Это представление записывается в виде:

$$\left.\begin{aligned}
W_1(q, p) &= \frac{\xi}{2(1+4\xi^2M^2/Q^2)^{1/2}} f_1(\zeta, Q^2) + \\
&+ \frac{M^2}{Q^2}\frac{\xi^2}{(1+4\xi^2M^2/Q^2)}\int_\zeta^1 d\zeta' f_1(\zeta', Q^2) + \\
&+ \frac{2M^4}{Q^4}\frac{\xi^3}{(1+4\xi^2M^2/Q^2)^{3/2}}\int_\zeta^1 d\zeta'\int_{\zeta'}^1 d\zeta'' f_1(\zeta'', Q^2); \\
(pq)W_2(p, q) &= \frac{\xi^2}{(1+4\xi^2M^2/Q^2)^2}\int_\zeta^1 d\zeta' f_2(\zeta', Q^2) + \\
&+ \frac{12M^4}{Q^4}\frac{\xi^4}{(1+4\xi^2M^2/Q^2)^{5/2}}\int_\zeta^1 d\zeta'\int_{\zeta'}^1 d\zeta'' f_2(\zeta'', Q^2).
\end{aligned}\right\} \quad (147)$$

В таком представлении структурных функций автоматически появляется переменная ζ, как и в (138), которая обеспечивает свойства симметрии разложения на световом конусе. Функции $f_i(\zeta, Q^2)$ определяют с помощью асимптотически верных соотношений для их моментов: при учете поправок по теории возмущения для коэффициентов на световом конусе получают

$$\int_0^1 d\zeta\zeta^n f_i(\zeta, Q^2) = \left[\frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}\right]^{-A_n^{NS}} \left\{1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{12\pi^2} f_{i,n}\right\}, \quad (148)$$

где

$$f_{i,n} = 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 2 - 8\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + (2+4i)/(n+1) + 4/n^2 - 4/(n+1)^2. \quad (149)$$

Решение относительно $f_i(\zeta, Q^2)$, т. е. обращение посредством преобразования Меллина, можно дать в форме интегродифференциального уравнения [49]. Такое уравнение позволяет в принципе провести вычисление структурных функций $W_i(\xi, Q^2)$ из $W_i(\xi, Q_0^2)$.

Соотношение (146) можно оценить, используя разложение произведения операторов токов и их структуру относительно группы аромата. В разложении имеются три вклада в уравнение (146) [50], соответствующие фермионным NS, фермионным S

и глюонным операторам

$$W(p, q) \approx \int_0^1 \frac{dx}{x} \left\{ E^{NS}(\zeta/x, Q^2) \sum_{p=q,\, \bar{q}} (Q_p^2 - \langle Q^2 \rangle) G^{Np}(x) + \right.$$
$$\left. + E^S(\zeta/x, Q^2) \langle Q^2 \rangle \sum_{p=q,\, \bar{q}} G^{Np}(x) + E^G(\zeta/x, Q^2) \langle Q^2 \rangle G^{NG}(x) \right\}, \quad (150)$$

где G^{Np}, G^{NG} — функции распределения кварков, глюонов в нуклоне N и суммирование происходит по соответствующим кваркам и антикваркам; Q_p — кварковые заряды. При выводе этого соотношения фермионные операторы аппроксимируют операторами свободных полей, т. е.

$$\langle N \mid OF^a \mid N \rangle = \sum_{p=q,\, \bar{q}} (Q_p^2 - \langle Q^2 \rangle) M_n^{Np};$$
$$\langle N \mid O^n F^0 \mid N \rangle = \langle Q^2 \rangle \sum_{p=q,\, \bar{q}} M_n^{Np}$$

[ср. (145)].

Представление (150) напоминает формулы кварк-партонной модели, причем здесь приняты во внимание глюоны. Заметим, что все функции распределения слабо зависят от Q^2.

Этим представлениям можно дать еще количественную оценку, в которой функции распределения при различных значениях взаимосвязаны друг с другом [51]. При этом исходят из следующих соображений.

1. Моменты структурных функций, например от F_2, составляют из NS-вкладов μ_n^a [$a = 3, 8, 15$ для $SU(4)$] и двух S-вкладов $\mu_n^{\pm}$, которые следуют из собственных значений матрицы смешивания (113). Для этих моментов получают Q^2-зависимость, следующую из квантовой хромодинамики:

$$\mu_n^\alpha(Q^2) = \mu_n^\alpha(Q_0^2) \left[\ln(Q^2/\Lambda^2) / \ln(Q_0^2/\Lambda^2) \right]^{-A_n^\alpha}, \quad (151)$$

причем $\alpha = (a, +, -)$ и $A_n^a = A_n^{NS}$ [ср. (108) — (110)].

2. Следуя партонной модели [27], структурные функции для каждого значения Q^2 выражают через функции распределения кварков. Их удобно выразить через линейные комбинации вкладов:

$$\left. \begin{aligned} &F^3 = U_V - D_V; \quad F^8 = U_V + D_V; \\ &F^{15} = U_V + D_V + 6(s - s') \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

и фермионные синглетные вклады

$$F^0 = U_V + D_V + 6s + 2s'.$$

При этом использованы следующие соотношения:

$$U = U_V + s; \quad \bar{U} = \bar{D} = S = \bar{S} = s;$$

$$D = D_V + s; \quad C = \bar{C} = s',$$

где s и s' — функции распределения морских кварков, а индекс V относится к валентным кваркам. Кроме того, для каждого значения Q^2 определяют глюонную функцию распределения, так что выполняется баланс импульсов; относящиеся к этому моменты определяют как обычно.

3. Входящие в (151) моменты $\mu_n^\pm$ соответствуют собственным векторам матрицы смешивания с собственными значениями $\gamma_\pm$:

$$\mu_n^+ = \frac{1}{\gamma_- - \gamma_+}\{(\gamma_- - \gamma_{FF}^F)\,\mu_n^0 - \gamma_{VV}^F\mu_n^G\};$$

$$\mu_n^- = \frac{1}{\gamma_- - \gamma_+}\{(\gamma_{FF}^F - \gamma_+)\,\mu_n^0 + \gamma_{VV}^F\mu_n^G\}$$

[ср. (114)].

Если определить из эксперимента функции распределения при Q_0^2, то благодаря этим соотношениям можно определить соответствующие функции распределения при другом значении Q^2. Используя такой метод, можно заключить, что с ростом Q^2 дают вклад валентные кварки, в то время как вклад морских кварков и глюонов увеличивается при $\xi = 0$. По сравнению с формулой (150), следующей из квантовой хромодинамики, здесь также привлекаются результаты наивной кварковой модели, в особенности уравнения (152).

В связи с этим упомянем интересный подход [54], в котором исходят из функций распределения кварков и глюонов, и для чьих моментов постулируют поведение (108) — (110), следующее из квантовой хромодинамики. Возникающее из преобразования Меллина уравнение интерпретируют как уравнение Мастера. Применение статистических методов к кварк- и глюонным процессам рассеяния дает простой способ для вычисления экспоненты в (108) — (110). Этот способ основан на простых процессах в рамках квантовой хромодинамики и требует в силу разложения на световом конусе проведение дополнительной процедуры ренормировки.

Влияние массовых параметров. Как уже видно из проведенного в предыдущем разделе обсуждения, необходимо в предасимптотической энергетической области учитывать влияние массовых параметров. Прежде всего обсудим влияние массового параметра на эффективную константу связи. Из уравнений (99) и (100) получаем

$$\bar{g}^2(Q^2) = g^2\,[1 + (g^2/16\pi^2)(11 - 2N/3)\ln(Q^2/Q_0^2)]^{-1},$$

где λ^2 заменяем на Q^2/Q_0^2; Q_0 — любой относительный импульс.

Эту формулу можно переписать следующим образом:

$$\bar{g}^2(Q^2) = 16\pi^2/(11-2N/3)\ln(Q^2/\Lambda^2)$$

(с удобно выбранным параметром Λ). Таким образом, эффективная константа связи зависит лишь от единственного параметра размерности массы.

Имеются физические соображения [49], которые делают возможным оценку этого параметра. Так как при $Q^2 \approx 1$ ГэВ^2 появляется скейлинговое поведение структурных функций, то эффективная константа связи $\bar{g}(Q^2)$ должна быть мала, но для импульсов, которые соответствуют обратному протонному радиусу $(r_p^2)^{-1} \approx$ $\approx 0{,}243$ ГэВ^2, эта константа связи должна быть велика, поэтому принимают $0{,}2$ ГэВ $\leqslant \Lambda \leqslant 0{,}5$ ГэВ.

Кроме того, при квантовом теоретико-полевом описании в теорию входят массы кварков, содержащиеся в лагранжевом формализме, и массы мишени, входящие в матричные элементы разложения произведения операторов. Эта зависимость до сих пор не была исследована, так как она неизвестна для асимптотического поведения структурных функций.

Массы мишени в принципе входят в редуцированные матричные элементы $M_n = \langle p \parallel O^n \parallel p\rangle$ в неявной форме. Эти массы содержатся также в различных определениях скейлинговых переменных и, таким образом, просто в выражениях для моментов от структурных функций. Они появляются прежде всего при пересчете выражения для моментов в других переменных. Так, например, из уравнений (137) и (54) получаем следующую связь:

$$\mu_n^{\zeta}(Q^2) = \int_0^1 d\xi \xi^{n-1} W(\xi, Q^2)[1-(n+1)\xi^2 M^2/Q^2] +$$
$$+ O(M^4/Q^4)\mu_n^{\xi} = \mu_n^{\xi} - (n+1)(M^2/Q^2)\mu_{n+2}^{\xi} + O(M^4/Q^4)\mu_n^{\xi}.$$

Так как роль физических масс кварков еще не известна, то их рассматривают как константы связи, которые ренормируются мультипликативно. Коэффициенты подобного обобщенного уравнения ренормгруппы

$$(\mu\partial/\partial\mu + \beta\partial/\partial g + \delta\partial/\partial\alpha + \eta m\partial/m - n_F\gamma_F - n_V\gamma_V)\,\Gamma^{(n_F;\, n_V)} = 0$$

при учете массовой зависимости выражаются в виде [48]:

$$\beta = \frac{-g^3}{16\pi^2}\left\{11 - \frac{2}{3}\sum_{\text{аромат}}\left[1 - \frac{6m_i^2}{\mu^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{12m_i^4/\mu^4}{(1+4m_i^2/\mu^2)^{1/2}}\ln\frac{(1+4m_i^2/\mu^2)^{1/2}+1}{(1+4m_i^2/\mu^2)^{1/2}-1}\right]\right\}; \tag{153}$$

$$\eta_i = (-8g^2/16\pi^2)\{1-(m_i^2/\mu^2)\ln(1+\mu^2/m_i^2)\}. \tag{154}$$

Дифференциальные уравнения для определения эффективной константы связи $\bar{g}^2(Q^2)$ и эффективных масс $\overline{m}_i(Q^2)$ решали при этом численно. Само собой разумеется, что в решения входят начальные значения $g(\mu)$ и $m_i(\mu)$, которые либо находят из эксперимента, либо определяют из кварковой модели.

Наконец, имеется еще один источник для появления параметров, которые имеют размерность массы. Их связывают с неучтенными до сих пор операторами более высокого твиста, функциями на световом конусе, чьи канонические сингулярности уменьшаются на целый порядок от x^2 по сравнению с сингулярностями операторов минимального твиста. В теории поля свободных кварков такие степени появлялись в форме $m_q^2 x^2$ [48]. Вместо них вводят массовый параметр (неопределенный) M_0, который входит в асимптотическое поведение моментов следующим образом:

$$\mu_n^\xi = A_n(Q^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{nM_0^2}{Q^2}\right\}^k B_{nk}(Q^2),$$

где $A_n(Q^2)$ — правая часть уравнения (139).

Отсюда можно резюмировать, что неасимптотическое поведение моментов можно описать лишь тогда, когда учтены влияние масс кварков, операторов с более высоким твистом (и поэтому M_0) и приведенных ранее более высоких приближений по эффективной константе связи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы подходим к окончанию теоретического описания глубоконеупругого рассеяния и поэтому в известной мере также квантовой хромодинамики.

Общий вывод мог бы состоять в том, что глубоконеупругое лептон-адронное рассеяние — превосходный метод исследования структуры адронов, который позволяет дать новые физические представления о сильных взаимодействиях, т. е. дать конкретную теорию.

Чтобы установить связь между эффективными сечениями рассеяния, т. е. связанными с ними структурными функциями, которые можно измерить экспериментально, и теоретико-полевыми понятиями (сингулярностями на световом конусе), необходимо провести модельно-независимый анализ, опирающийся на общие принципы квантовой теории поля. Подобный анализ, основанный на ДЙЛ-представлении, довольно полно изложен во втором разделе.

По нашему мнению, самой привлекательной теорией, описывающей как глубоконеупругое лептон-адронное рассеяние и другие процессы с большой передачей импульса, так и низкоэнергетические адрон-адронные процессы, является кварк-партонная модель. Потребовав асимптотическую свободу, от этой модели приходим к квантовой хромодинамике. Однако в квантовой хромодинамике необходимо учитывать проблему инфракрасных расходимостей, если не вводить суперсимметричные калибровочные поля [52]. Заметим, что требование асимптотической свободы весьма дискуссионно. Ограниченная точность экспериментальных данных к настоящему времени не позволяет сделать различие между асимптотической свободой (логарифмически-модифицированной асимптотикой структурных функций) и существованием фиксированной точки с малыми аномальными, отличными от нуля, размерностями (слабостепенная асимптотика структурных функций). Следствием асимптотической свободы являются различия между правилами сумм Каллана — Гросса и Ллевеллина-Смита.

Результаты квантовой хромодинамики, относящиеся к глубоконеупругому лептон-адронному рассеянию, к сожалению, на сегодня ограничены: существуют утверждения, которые, собственно говоря, имеют специальный характер, например, логарифмический характер убывания моментов, концентрация структурных функций вблизи $\xi = 0$ или условные утверждения, как например, соотношения между моментами при двух различных значениях Q^2 и Q_0^2. Только правила сумм можно рассматривать как численные результаты.

Все результаты квантовой хромодинамики, полученные для глубоконеупругого рассеяния лептонов на адронах, основаны на разложении произведения операторов токов. Отметим, что описание глубоконеупругого рассеяния в теории поля возможно также на основе модифицированного метода канонического квантования и фейнмановских диаграмм. Однако в отличие от глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния другие актуальные проблемы, такие, как рассеяние на большие углы, вычисление электромагнитных форм-факторов, невозможно описать методом разложения произведения операторов токов. Что касается других теоретических подходов (например, квазиклассические приближения и инстантонные решения) [55], то естественно возникает вопрос об их справедливости.

Обратим внимание на то, что квантовая хромодинамика до сегодняшнего дня давала определенные утверждения лишь для глубоконеупругого рассеяния. Поэтому представляют несомненный интерес новые эксперименты в этой области, включая электрон-позитронную аннигиляцию, которые могли бы подтвердить справедливость квантовой хромодинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bjorken J. D.**— Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1547; **Tavkhelidze A. N.** In: Proc. of Coral Gables Conf., Gordon and Breach, 1970, p. 178—186; **Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н.**—ЭЧАЯ, 1970, т. 2, вып. 1, с. 7.

2. **Matveev V. A.** In: Proc. of the 1973 CERN-JINR School of Physics, CERN 73—12, 1973; **Биленький С. М.** Лекции для молодых ученых. Вып. 6. Препринт Р2-9026. Дубна, 1975.
3. **Akhunov A. A., Bardin D. Yu., Shumeiko N. M.** Preprints JINR E2-10147, E2-10205, Dubna, 1976; Preprint JINR E2-10471. Dubna, 1977; **Бардин Д. Ю., Шумейко Н. М.** Препринты ОИЯИ Р2-9940, Р2-10872, Р2-10873. Дубна, 1977.
4. **Nachtmann O.** In: Proc. of the Hamburg Symposium on Lepton and Photon Interactions. Hamburg, 1977.
5. **Стриттер Р. С., Вайтман А. С.** РСТ, спин и статистика и все такое. М., 1966; **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., 1969.
6. **Боголюбов Н. Н., Тавхелидзе А. Н., Владимиров В. С.**— Теор. и мат.физ., 1972, т. 12, с. 305.
7. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., 1973.
8. **Jackiw R., Van Royen R., West G. B.**— Phys. Rev. D, 1971, v. 2, p. 2473; **Brandt R. A., Preparata G.**— Fortschr. Phys., 1971, Bd 18, S. 249.
9. **Завялов Б. И.**— Теор. и мат. физ., 1973, т. 16, с. 61; т. 17, с. 178; 1974, т. 19, с. 163; **Brüning E., Stichel P.**— Commun. Math. Phys., 1974, v. 36, p. 137.
10. **Вицорек Э. и др.**— Теор. и мат. физ., 1973, т. 16, с. 315.
11. **Rühl W.** Kaiserslautern Preprint TP-2, 1971; **Завьялов Б. И., Максимов С. И.** Препринт ИТФ, 75-77Р. Киев, 1975.
12. **Gross D. J., Wilczek F.**— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 3633; 1974, v. 9, p. 980; **Georgi H., Politzer H. D.**— Phys. Rev. D, 1974, v. 9, p. 416; **Politzer H. D.**— Phys. Repts. C, 1974, v. 14, p. 129.
13. **Joffe B. L.**— Phys. Lett. B, 1969, v. 30, p. 123; **Brandt R. A., Preparata G.**— Nucl. Phys. B, 1971, v. 27, p. 541; **Frishman Y.**— Ann. Phys., 1971, v. 66, p. 373.
14. **Görnitz Th. e.a.**— Repts on Math. Phys., 1977, v. 1, p. 389; **Motz G., Wieczorek E.** Preprint JINR E2-8894, Dubna, 1975.
15. **Cornwall J. M., Norton R. E.**— Phys. Rev., 1969, v. 117, p. 2585; **Mack G.**— Nucl. Phys. B, 1971, v. 35, p. 592.
16. **Nachtmann O.**— Nucl. Phys. B, 1973, v. 63, p. 237.
17. **Красников Н. В., Четыркин К. Г.** Препринт ОИЯИ Р2-8749. Дубна, 1971.
18. **Завьялов Б. И.**— Теор. и мат. физ., 1977, т. 33, с. 310.
19. **Cornille H., Martin A.** Preprint CERN TH-1991. Geneva, 1975.
20. **Bogolubov N. N. e.a.**— Repts on Math. Phys., 1976, v. 10, p. 195; **Geyer B., Petrov G., Robashik D.**— Wiss. Z. Karl-Marx-Univ., 1977, v. 26, p. 101.
21. **Красников Н. В., Мотц Г., Четыркин К. Г.** Препринт ОИЯИ Р2-9813. Дубна, 1976.
22. **Вицорек Э., Матвеев В. А., Робашик Д.**— Теор. и мат. физ., 1974, т. 19, с. 14.
23. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., 1971; **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции. Т. 1. М., 1959.
24. **Zee A.**— Phys. Repts. C, 1972, v. 3, p. 127.
25. **Motz G., Wieczorek E.**— Nucl. Phys. B, 1974, v. 83, p. 525.
26. **Kainz W., Kummer W., Schweda M.**— Nucl. Phys. B, 1974, v. 79, p. 484.
27. **Фейнман Р.** Взаимодействие фотонов с адронами. М., 1975; **Llewellyn Smith C. H.** Springer Tracts of Modern Physics. V. 62. Berlin—Heidelberg — N.Y., 1972.
28. **Де Алфаро В., Фубини С., Фурлан Р.** Токи в физике адронов. М., 1976.
29. **Ferrara S., Gatto R., Grillo A. F.** Springer Tracts in Modern Physics. V. 67. Berlin — N.Y.— Wien, 1973; **Вицорек Э. и др.**— Теор. и мат. физ., 1975, т. 22, с. 3.

30. **Drell S. D., Levy D. J., Yan T. M.**— Phys. Rev., 1968, v. 187, p. 2159; Phys. Rev. D, 1970, v. 1, p. 2402; **Fishban P. M., Sullivan J. D.**— Phys. Rev. D, 1971, v. 4, p. 2516; 1972, v. 6, p. 645; **Gribov V. N., Lipatov T. N.** — Phys. Lett. B, 1971, v. 37, p. 78.
31. **Коноплева Н. П., Попов В. Н.** Калибровочные поля. М., 1972. **Попов В. Н.** Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., 1976.
32. **De Rújula A.** In: Proc. of the Internat. Conf. on High Energy Physics XVIII, Tbilisi, 1976. Dubna, JINR, 1977.
33. **Popov V. N., Fadeev L. D.**— Phys. Lett. B, 1967, v. 25, p. 29; **G. t'Hooft.**— Nucl. Phys. B, 1971, v. 33, p. 173; **Zinn-Justin J.** Springer Lectures in Physics. V. 37.
34. **Poggio E.**— Phys. Lett. B, 1977, v. 68, p. 347; **Carrazone J., Poggio E., Quinn H.**— Phys. Rev. D, 1975, v. 11, p. 2286; **Cornwall J. M., Tikropoulos G.**— Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 3370; 1977, v. 15, p. 2937.
35. **Zimmermann W.**— Ann. Phys., 1973, v. 77, p. 536, 570; **Anikin S. A., Polivanov M. C., Zavialov O. I.**— Fortschr. Phys., 1977, Bd 25, S. 459; **Bordag M.** (unpublished). **Kühn J., Seiler E.**— Commun, Math. Phys., 1973, v. 33, p. 253; **Baumann K.**— Commun. Math, Phys., 1975, v. 43, p. 73;
36. **Lee C.**— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 1078; **Joglekar S., Lee B. W.**— Ann. Phys., 1976, v. 97, p. 160; **Joglekar S.**— Ann. Phys., 1977, v. 108, p. 233.
37. **Gell-Mann M., Low F.**— Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 1300; **Овсянников Л. В.**— Докл. АН СССР, 1956, т. 109, с. 1121; **Callan C. G.**— Phys. Rev. D, 1970, v. 2, p. 1541; **Symanzik K.**— Commun. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 227.
38. **Christ N., Hasslacher B., Mueller A. H.**— Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 3543.
39. **Кашлун Ф., Вицорек Э., Цэллнер Ф.** Проблемы теоретической физики. М., 1969.
40. **Jones D. R. T.**— Nucl. Phys. B, 1974, v. 75, p. 530.
41. **Floratos E. G., Ross D. A., Sachrajda C. T.** Preprint CERN TH-2326. Geneva, 1977.
42. **Calvo M.**— Phys. Rev. D, 1977, v. 15, p. 730.
43. **Treiman S. B., Wilczek F., Zee A.**— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 2881; **Nanopoulos D. V., Ross G. G.**— Phys. Lett. B, 1975, v. 58, p. 105.
44. **Виленкин Н. Я.** Специальные функции и теория представлений групп. М., 1965.
45. **Baluni V., Eichten E.**— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 3045.
46. **Robaschik D., Tröger G., Wieczorek E.** (unpublished).
47. **Parisi G.**— Phys. Lett. B, 1973, v. 43, p. 207.
48. **Georgi H., Politzer D.**— Phys. Rev. D, 1829, 1976, v. 14, p. 1829.
49. **De Rújula A., Georgi H., Politzer H. D.**— Phys. Lett. B, 1976, v. 64, p. 428; Ann. Phys., 1977, v. 103, p. 315.
50. **Parisi G., Petronzio R.** Univ. Roma preprint 617, 1975; **Efremov A. V., Radyushkin A. V.**— Phys. Lett. B, 1976, v. 63, p. 449; Preprint JINR E2-10307. Dubna, 1976.
51. **Glück M., Reya E.**— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 3034; **Altarelli G., Petronzio R., Parisi G.**— Phys. Lett. B, 1976, v. 63, p. 183; **Buras A. J.** Preprint CERN TH-2285. Geneva, 1977.
52. **Славнов А. А.**— Теор. и мат. физ., 1976, т. 27, с. 139.
53. **Ahmend M. A., Ross G. G.**— Nucl. Phys. B, 1976, v. 111, p. 441.
54. **Altarelli G., Parisi G.**— Nucl. Phys. B, 1977, v. 126, p. 298.
55. **Callan C. G., Duschen R., Gross D. J.**— Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 2717.
56. **Bilenky S. M., Petcov S. T.** Preprint JINR E2-10809. Dubna, 1977.