

## МЕТОД ИСКАЖЕННЫХ ВОЛН В РЕАКЦИЯХ СО СЛОЖНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

*Н. С. Зеленская, И. В. Теплов*

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

Рассматривается применение метода искаженных волн с конечным радиусом взаимодействия (МИВОКОР) к количественному анализу характеристик прямых ядерных реакций со сложными частицами (в том числе и тяжелыми ионами) с учетом механизмов реакций, отличных от механизма кластерного срыва, в частности обменных процессов. Приводятся точные уравнения метода искаженных волн в рамках задачи трех тел и общие формулы для расчета с помощью МИВОКОР дифференциальных сечений произвольных бинарных реакций. Обсуждаются способы точного и приближенного учета конечного радиуса взаимодействия. Проводится анализ конкретных программ МИВОКОР и рассматриваются области их применимости.

The work deals with the method of distorted waves with a finite radius of interaction (DWBAFR) as applied to quantitative analysis of direct nuclear reactions with composite particles (including heavy ions) considering the reaction mechanisms other than the cluster stripping mechanism, in particular the exchange processes. The accurate equations of the distorted-wave method in three-body problem and the general formulas for calculating differential cross-sections of arbitrary binary reactions by DWBAFR are presented. The methods of accurate an approximate inclusion of finite interaction radius are discussed. Specific DWBAFR program have been analyzed and their applicability scopes are discussed.

### ВВЕДЕНИЕ

За последние годы интерес к изучению ядерных реакций со сложными частицами (тяжелыми ионами, ионами  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^9\text{Be}$ ,  $\alpha$ -частицами) значительно возрос, и уже накоплена экспериментальная информация об особенностях угловых распределений конечных частиц из этих реакций, в некоторых случаях в достаточно широкой области углов.

Теоретический анализ подобных результатов связан с обобщением обычного метода искаженных волн (МИВ) на случай реакций со сложными частицами. Это обобщение должно идти по двум направлениям: во-первых, для анализа угловых распределений реакций со сложными частицами необходимо использовать метод искаженных волн с учетом конечных размеров области взаимодействия

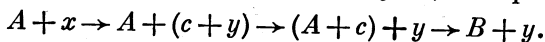
частиц; во-вторых, следует принимать во внимание различные механизмы реакции, а не только механизм кластерного срыва, как это делается в обычном методе искаженных волн. Последовательное рассмотрение таких проблем требует решения задачи многих тел. Однако в некоторых практически важных случаях задачу вычисления сечения ядерной реакции  $A(x, y)B$  (в дальнейшем для определенности всюду будем полагать, что  $x \geq y$ ) можно упростить и свести к проблеме трех тел. Это можно сделать, если 1) падающая частица  $x$  в поле ядра  $A$  диссоциирует на два кластера  $x \rightarrow y + c$ , а ядро  $A$  остается неизменным; 2) частица  $x$  неизменна, а ядро  $A$  распадается на две части  $A \rightarrow y + C$ , одной из которых является конечная частица. Процессы, относящиеся к первому случаю и связанные с развалом падающей частицы, можно условно назвать *прямыми*, а процессы, относящиеся ко второму случаю и связанные с развалом ядра-мишени, — *обменными*. В приближении задачи трех тел прямые и обменные процессы не связаны друг с другом и интерференция между ними не возникает. Нетрудно видеть, что амплитуды прямых и обменных процессов совпадают друг с другом с точностью до замены  $A$  на  $x$  ( $x$  на  $A$ ) и угла  $\theta$  вылета образующихся частиц  $y$  в системе центра масс — на угол  $\pi - \theta$ . Поэтому в дальнейшем все формулы будем в основном приводить для прямых процессов, а выражения для обменных процессов получать заменой  $A \rightleftharpoons x$  и  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ .

Цель настоящего обзора — анализ современного состояния метода искаженных волн применительно к ядерным реакциям со сложными частицами. В разд. 1 дается вывод точных уравнений метода искаженных волн в рамках задачи трех тел. Анализ этих уравнений показывает, что при таком подходе существует четыре механизма реакций (срыв и тяжелое замещение — прямые процессы, обычное замещение и тяжелый срыв — обменные процессы). В разд. 2 приводятся общие формулы для расчета дифференциальных сечений ядерных реакций методом искаженных волн с конечным радиусом взаимодействия, рассматриваются возможные упрощения этих формул для конкретных типов реакций, а также обсуждаются методы разделения переменных в радиальном интеграле. Способам приближенного учета эффектов отдачи и конечного радиуса взаимодействия посвящен разд. 3. В разд. 4 обсуждаются два основных варианта точного учета эффектов отдачи в методе искаженных волн, а именно: разделение переменных в волновых функциях относительного движения частиц и потенциалах взаимодействия и разделение переменных в искаженных волнах. В разд. 5 приводится анализ известных из литературы расчетных программ, основанных на «точных» и на приближенных вариантах метода искаженных волн, сопоставляются результаты расчетов, выполненных по различным программам, и обсуждаются области применимости отдельных программ.

Совокупность этих вопросов до сих пор в мировой литературе систематически не рассматривалась, и предлагаемый обзор должен, хотя бы частично, восполнить этот пробел.

## 1. ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ИСКАЖЕННЫХ ВОЛН В РАМКАХ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

**Обычная трактовка метода искаженных волн.** Рассмотрим реакцию  $A(x, y)B$ , протекающую следующим образом:



Матричный элемент этой реакции можно записать в виде

$$M_{if} = \langle \Phi_f \Phi_B \Phi_y | V_f | \Phi_x \Phi_A \Psi_i^{(+)} \rangle \equiv \langle \Psi_f^{(-)} \Phi_B \Phi_y | V_i | \Phi_x \Phi_A \Phi_i \rangle, \quad (1)$$

где  $\Psi_i^{(+)}$  ( $\Psi_f^{(-)}$ ) — точное решение уравнения Шредингера для сходящейся (расходящейся) волны:

$$\Psi_i^{(+)} = \Phi_i + \frac{1}{E - H_i + i\eta} V_i \Psi_i^{(+)}, \quad H_i = H_0 + V_{yc}; \quad (2)$$

$$\Psi_f^{(-)} = \Phi_f + \frac{1}{E - H_f - i\eta} V_f \Psi_f^{(-)}, \quad H_f = H_0 + V_{Ac}; \quad (2a)$$

$V_f = V_{yc} + V_{yA}$  ( $V_i = V_{Ac} + V_{yA}$ ) — взаимодействие в конечном (начальном) состоянии;  $\Phi_i$  ( $\Phi_f$ ) — плоская волна относительного движения падающей (вылетающей) частицы в поле ядра;  $\Phi_A, \Phi_B, \Phi_x, \Phi_y$  — внутренние волновые функции соответствующих частиц;  $H_0$  — гамильтониан свободного движения невзаимодействующих частиц  $A, c, y$  с полной энергией  $E$ .

Будем вычислять матричный элемент (1), используя МИВ [1]. Под «точным» методом искаженных волн (МИВОКОР) [2], учитывая конечный радиус взаимодействия между частицами, будем в дальнейшем понимать такой способ вычисления матричного элемента (1), когда взаимодействия, ответственные за перестройку системы из начального в конечное состояние, берутся такими же, как и в задаче трех тел, а взаимодействия начальной и конечной частиц с соответствующими ядрами описываются в приближении оптической модели, т. е. в приближении задачи двух тел, причем учитывается только упругое рассеяние на комплексном потенциале. Справедливость такого рассмотрения до сих пор остается неясной: более того, известно, что учет многотельных, в частности трехтельных поправок к оптическому потенциалу [3], должен влиять на его характеристики. Тем не менее оптическая модель является пока наиболее разработанным способом описания упругого рассеяния частиц на ядрах.

Рассмотрим вывод точных уравнений МИВОКОР [1, 4]. Введем волновую функцию  $\chi_f^{(-)}$  ( $\chi_i^{(+)}$ ) (искаженную волну), являющуюся

решением уравнения Шредингера в оптическом потенциале  $U_f(U_i)$ :

$$\chi_f^{(-)} = \Phi_f + \frac{1}{E - H_f - i\eta} U_f \chi_f^{(-)}. \quad (3)$$

Аналогично

$$\chi_i^{(+)} = \Phi_i + \frac{1}{E - H_i + i\eta} U_i \chi_i^{(+)}. \quad (3a)$$

Определим из (3) функцию  $\Phi_f$  и подставим ее в (1). Тогда для матричного элемента реакции нетрудно получить выражение

$$\begin{aligned} M_{if} = & \langle \chi_f^{(-)} \varphi_B \varphi_y | V_f - U_f | \varphi_x \varphi_A \Psi_i^{(+)} \rangle + \\ & + \langle \chi_f^{(-)} \varphi_B \varphi_y | U_f | \varphi_x \varphi_A \Psi_i^{(+)} \rangle - \\ & - \langle \chi_f^{(-)} \varphi_B \varphi_y | U_f \frac{1}{E - H_f + i\eta} V_f | \varphi_x \varphi_A \Psi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив во второе слагаемое уравнения (4) выражение (2) для  $\Psi_i^{(+)}$ , получим

$$\begin{aligned} M_{if} = & \langle \chi_f^{(-)} \varphi_B \varphi_y | V_f - U_f | \varphi_x \varphi_A \Psi_i^{(+)} \rangle + \\ & + \langle \chi_f^{(-)} \varphi_B \varphi_y | U_f | \varphi_x \varphi_A \Phi_i \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя тождество

$$\langle \chi_f^{(-)} | U_f | \Phi_i \rangle \equiv \langle \Phi_f | U_i | \chi_i^{(+)} \rangle,$$

матричный элемент реакции можно переписать в более наглядной форме

$$\begin{aligned} M_{if} = & \langle \chi_f^{(-)} \varphi_B \varphi_y | V_f - U_f | \varphi_x \varphi_A \Psi_i^{(+)} \rangle + \\ & + \langle \Phi_f \varphi_B \varphi_y | U_i | \varphi_x \varphi_A \chi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) для матричного элемента реакции не содержат дополнительных приближений, кроме тех, которые заключаются в самом определении метода искаженных волн и формально являются точными.

Согласно [5] можно преобразовать первое слагаемое в (6), если использовать искаженную волну (3a) в начальном канале реакции. Тогда  $\Psi_i^{(+)}$  можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i^{(+)} &= \chi_i^{(+)} + \frac{1}{E - H_i + i\eta} (V_i - U_i) \Psi_i^{(+)} = \\ &= \chi_i^{(+)} + \frac{1}{E - \tilde{H} + i\eta} (V_i - U_i) \chi_i^{(+)}; \\ \tilde{H} &= H_0 + V_i - U_i. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в первое слагаемое матричного элемента (5), получаем [5]

$$\begin{aligned} M_{if} = & \langle \chi_f^{(-)} \Phi_B \Phi_y | (V_f - U_f) + \\ & + (V_f - U_f) \frac{1}{E - \hat{H} + i\eta} (V_i - U_i) | \Phi_x \Phi_A \chi_i^{(+)} \rangle + \\ & + \langle \Phi_f \Phi_B \Phi_y | U_i | \Phi_x \Phi_A \chi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Такая запись матричного элемента соответствует введению  $T$ -матрицы, формально не связанной с искажениями начальной и конечной частиц.

Итак, мы получили выражения (6) и (8) для матричного элемента в МИВОКОР. Хотя эти уравнения можно решить, например, с помощью аппарата интегральных уравнений Фаддеева [6], однако возможностей современных ЭВМ для этого совершенно недостаточно. Поэтому для практических расчетов в уравнения (6) и (8) необходимо вводить различные приближения. Одно из них связано с тем, что точное решение в выражении (6) заменяется искаженной волной, или, что равноценно по смыслу, в первом слагаемом уравнения (8) отбрасываются члены с функцией Грина (обычный метод искаженных волн [1]). Физически такое приближение означает, что вместо точных  $T$ -матриц, описывающих процесс перестройки, используются локальные операторы — потенциалы взаимодействия в каждой вершине, т. е. не учитываются возможные многоступенчатые механизмы реакции. Нетрудно видеть, что это приближение не носит принципиального характера, и эффекты запаздывания можно учесть, по крайней мере, в первом порядке. В настоящее время развиты, в частности, методы расчета двухступенчатых механизмов в реакциях со сложными частицами [7], которые позволяют оценить влияние эффектов запаздывания на форму угловых распределений. В дальнейшем ограничимся только рассмотрением одноступенчатых механизмов реакции.

Однако в обычных расчетах по МИВОКОР часто вводятся еще два существенных приближения, обосновать которые значительно сложнее: во-первых, в точных выражениях (6) и (8) опускается второе слагаемое; во-вторых, считается, что взаимодействие  $V_{yA}$  из полного взаимодействия в конечном состоянии  $V_f = V_{yc} + V_{yA}$  компенсируется потенциалом  $U_f$  оптической модели, так что матричный элемент МИВОКОР определяется только взаимодействием  $V_{yc}$ .

Очевидно, что в реакциях со сложными частицами подобные приближения не выполняются. Физически это связано с тем, что механизм таких реакций, как правило, не сводится только к механизму кластерного срыва и должен включать в себя более сложные, в частности обменные, механизмы. Эти приближения не могут быть обоснованы прежде всего потому, что в рассмотренном выше

способе вычисления матричного элемента оптический потенциал вводится в задачу искусственно, поэтому пренебрежение одним из слагаемых полной амплитуды ниоткуда не следует. Кроме того, невозможность полной компенсации оптического потенциала  $U_f$  и взаимодействия  $V_{yA}$  с формальной точки зрения непосредственно вытекает из того факта, что  $U_f$  и  $V_{yA}$  зависят от разных радиальных переменных [8]. Поэтому компенсация будет иметь место только в тех случаях, когда массу ядра-мишени можно считать бесконечно большой — условие, которое в реакциях со сложными частицами практически не выполняется.

Для того чтобы понять, какие механизмы нужно учитывать в МИВОКОР, оставаясь в рамках одноступенчатых процессов, необходимо более последовательно учесть многотельный (и как первый этап, трехтельный) характер задачи. Поэтому в следующем разделе рассмотрим вывод уравнений МИВОКОР в рамках задачи трех тел и покажем, что указанные выше два приближения в общем случае нельзя использовать для анализа реакций со сложными частицами.

**Вывод уравнений метода искаженных волн в рамках задачи трех тел.** Рассмотрим вычисление матричного элемента реакции  $A(x, y)B$  в рамках задачи трех тел. В этом приближении полный потенциал содержит три слагаемых, два из которых попарно определяют взаимодействия в начальном и конечном состояниях. Для прямых процессов

$$H = H_0 + V; \quad V = V_{yc} + V_{yA} + V_{cA}, \quad (9)$$

и, как мы указывали выше:

$$V_i = V_{yA} + V_{cA}; \quad V_f = V_{yc} + V_{yA}. \quad (10)$$

Введем укороченный гамильтониан

$$H' = H_0 + V_{cA} + V_{yc} \quad (11)$$

и будем вычислять матричный элемент (1) через собственные функции укороченного гамильтониана (11), которые удовлетворяют уравнению Шредингера

$$(H_0 + V_{cA} + V_{yc} - E)\xi = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде интегрального уравнения Лишмана — Швингера в двух эквивалентных формах, по-разному выбирая граничные условия на бесконечности по оси времени. Если  $t \rightarrow -\infty$ , т. е. асимптотика волновой функции выражается через собственные функции гамильтониана  $H_i$ , то

$$\xi_i^{(+)} = \Phi_i + \frac{1}{E - H_i + i\eta} V_{cA} \xi_i^{(+)}. \quad (12)$$

С другой стороны, это же решение можно выразить через собственные функции гамильтониана  $H_f$ , используя граничные условия

для  $t \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\xi_j^{(-)} = \Phi_j + \frac{1}{E - \mathbf{H}_f - i\eta} \mathbf{V}_{yc} \xi_j^{(-)}. \quad (13)$$

Согласно (1) точный матричный элемент реакции  $A(x, y)B$  содержит сумму двух слагаемых:

$$\mathbf{M}_{ij} = \langle \Phi_f \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yA} | \Phi_x \Phi_A \Psi_i^{(+)} \rangle + \langle \Phi_f \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yc} | \Phi_x \Phi_A \Psi_i^{(+)} \rangle. \quad (14)$$

Преобразуем первое слагаемое в (14). Для этого из уравнения (13) выразим плоскую волну  $\Phi_f$  относительного движения конечных частиц:

$$\Phi_f = \xi_j^{(-)} - \frac{1}{E - \mathbf{H}_f - i\eta} \mathbf{V}_{yc} \xi_j^{(-)} = \xi_j^{(-)} - \frac{1}{E - \mathbf{H}' - i\eta} \mathbf{V}_{yc} \Phi_f. \quad (15)$$

Тогда первый член в (14) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \langle \xi_j^{(-)} \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yA} | \Phi_x \Phi_A \Psi_i^{(+)} \rangle - \\ & - \langle \Phi_f \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yc} \frac{1}{E - \mathbf{H}' + i\eta} \mathbf{V}_{yA} | \Phi_x \Phi_A \Psi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Выразим точное решение полного гамильтониана (9) через функцию  $\xi_i^{(+)}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Psi_i^{(+)} &= \Phi_i + \frac{1}{E - \mathbf{H}_i + i\eta} \mathbf{V}_i \Psi_i^{(+)} = \xi_i^{(+)} + \frac{1}{E - \mathbf{H}' + i\eta} \mathbf{V}_{yA} \Psi_i^{(+)} = \\ &= \xi_i^{(+)} + \frac{1}{E - \mathbf{H} + i\eta} \mathbf{V}_{yA} \xi_i^{(+)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда следует, что действие оператора  $(E - \mathbf{H}' + i\eta)^{-1} \mathbf{V}_{yA}$  на функцию  $\Psi_i^{(+)}$  сводится к разности  $\Psi_i^{(+)} - \xi_i^{(+)}$ . Поэтому выражение (16) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \langle \xi_j^{(-)} \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yA} | \Phi_x \Phi_A \Psi_i^{(+)} \rangle - \langle \Phi_f \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yc} | \Phi_x \Phi_A \Psi_i^{(+)} \rangle + \\ & + \langle \Phi_f \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yc} | \Phi_x \Phi_A \xi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в выражение (14) для матричного элемента (1), получаем

$$\mathbf{M}_{ij} = \langle \Phi_f \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yc} | \Phi_x \Phi_A \xi_i^{(+)} \rangle + \langle \xi_j^{(-)} \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yA} | \Phi_x \Phi_A \Psi_i^{(+)} \rangle. \quad (19)$$

Выражение (19) фактически является обобщением теоремы Гелл-Мана — Гольдбергера [9] на случай ядерных реакций, рассматриваемых в приближении задачи трех тел. Для выяснения физического смысла обоих слагаемых в (19) выразим точное решение  $\Psi_i^{(+)}$  и плоскую волну  $\Phi_f$  через функции  $\xi$ , используя соотношения (15) и (17). Тогда выражение (19) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij} &= \langle \xi_j^{(-)} \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yc} - \mathbf{V}_{yc} \frac{1}{E - \mathbf{H}_j + i\eta} \mathbf{V}_{yc} | \Phi_x \Phi_A \xi_i^{(+)} \rangle + \\ & + \langle \xi_j^{(-)} \Phi_B \Phi_y | \mathbf{V}_{yA} + \mathbf{V}_{yA} \frac{1}{E - \mathbf{H} + i\eta} \mathbf{V}_{yA} | \Phi_x \Phi_A \xi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение (20) представляет собой точную запись матричного элемента реакции для задачи трех тел. Первый член в этом уравнении соответствует прямому захвату частицы  $c$ , т. е. его можно сопоставить с механизмом кластерного срыва с полным учетом взаимодействий в конечном состоянии. Второй член описывает рассеяние частицы  $y$ , связанной в начальном снаряде  $x$ , на ядре-мишени  $A$ . Этот механизм обычно называют тяжелым замещением.

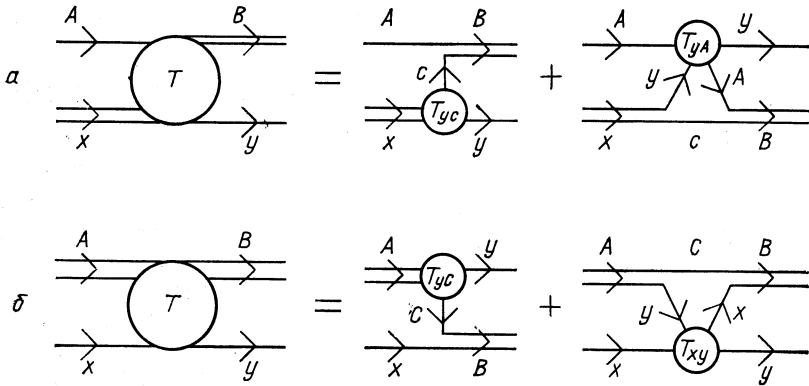


Рис. 1. Графическое изображение прямых (а) и обменных (б) процессов в реакции  $A(x, y)B$  в приближении задачи трех тел

Графически матричный элемент (20) изображен на рис. 1, а, причем полюсной график соответствует механизму кластерного срыва, а треугольный — механизму тяжелого замещения.

Аналогичное выражение можно написать и для матричного элемента обменных процессов:

$$M_{if} = \langle \xi_f^{(-)} \varphi_B \varphi_y | V_{yc} - V_{yc} \frac{1}{E - H_f + i\eta} V_{yc} | \varphi_x \varphi_A \xi_i^{(+)} \rangle + \langle \xi_f^{(-)} \varphi_B \varphi_y | V_{xy} + V_{xy} \frac{1}{E - H + i\eta} V_{xy} | \varphi_x \varphi_A \xi_i^{(+)} \rangle. \quad (21)$$

Первый член в выражении (21) отвечает взаимодействию конечной частицы  $y$  и промежуточного ядра  $C$  в начальном ядре  $A$ , т. е. соответствует механизму срыва тяжелой частицы (полюсной график, см. рис. 1, б). Второй член, описывающий рассеяние частицы  $x$  и  $y$  в поле промежуточного ядра  $C$ , соответствует механизму обычного замещения кластеров (треугольный график, см. рис. 1, б).

Из выражений (20) и (21) следует, что в каждой группе процессов отдельные механизмы должны складываться когерентно и необходимо учитывать их интерференцию. Прямые и обменные процессы в рамках задачи трех тел вносят некогерентный вклад в полное сечение реакции (подробнее см. в [10]).



Наконец, введем оптические потенциалы в точные матричные элементы (20) и (21). Для этого выразим решения  $\zeta_i^{(+)}$  и  $\zeta_j^{(-)}$  через оптические волновые функции  $\chi_i^{(+)}$  и  $\chi_j^{(-)}$ :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_j^{(-)} &= \left( 1 + \frac{1}{E - H' + i\eta} (V_{yc} - U_j) \right) \chi_i^{(-)}; \\ \zeta_i^{(+)} &= \left( 1 + \frac{1}{E - H' + i\eta} (V_{yA} - U_i) \right) \chi_i^{(+)}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Подставляя выражения (22) в (20), получаем выражение для матричного элемента (1) в точной формулировке МИВОКОР:

$$M_{if} = \langle \chi_j^{(-)} \Phi_B \Phi_Y | T_{yc} | \Phi_x \Phi_A \chi_i^{(+)} \rangle + \langle \chi_j^{(-)} \Phi_B \Phi_Y | T_{yA} | \Phi_x \Phi_A \chi_i^{(+)} \rangle + \\ + \text{члены, учитывающие многократные пересечения.} \quad (23)$$

Уравнение (23) полностью идентично уравнениям (5) и (8), однако в отличие от них в выражении (23) в явном виде выделены такие члены, которые допускают наглядную физическую интерпретацию. Матричный элемент реакции в МИВОКОР (23) содержит два слагаемых одного порядка малости, причем ни одно из них не компенсируется оптическим потенциалом (соответствующие члены, содержащие  $V - U$ , включают в себя, как минимум, двукратные перерассеяния). Это означает, что рассмотренные выше приближения, часто вводимые в МИВОКОР, в общем случае действительно не выполняются.

T-матрицы, входящие в выражение (23), определяются уравнениями:

$$T_{yc} = V_{yc} - V_{yc} \frac{1}{E - H_0 + i\eta} V_{yc} - \dots; \quad (24)$$

$$T_{yA} = V_{yA} + V_{yA} \frac{1}{E - H_0 - V_{yA} + i\eta} V_{yA} + \dots, \quad (25)$$

которые изображены на рис. 2 в виде бесконечного ряда графиков, имеющих все более сложную топологическую структуру. Замена T-матриц потенциалами взаимодействия означает, что учитываются только первые члены соответствующих разложений, т. е. одноступенчатые механизмы реакций. Как следует из (23) и аналогичного выражения для обменных процессов, в реакциях со сложными частицами имеется четыре таких механизма: срыв и тяжелое замещение — прямые процессы, обычное замещение и тяжелый срыв — обменные процессы — и ни одним из этих механизмов заранее нельзя пренебречь.

**Оптическая модель для рассеяния сложных частиц.** Как было уже указано, в методе искаженных волн взаимодействие начальных и конечных частиц с ядрами описывается в рамках оптической модели, учитывающей упругое рассеяние на комплексном потенциале. Поскольку оптической модели посвящен ряд достаточно

детальных обзоров (см., например, работы [11, 12]), не будем здесь подробно останавливаться на обсуждении всех ее проблем. Рассмотрим лишь те аспекты оптической модели, которые связаны с рассеянием именно сложных частиц, в частности, вопросы выбора формы и параметров оптических потенциалов (ОП).

Общее число параметров ОП, включающих центральное, спин-орбитальное ядерное и кулоновское взаимодействия (подробное:

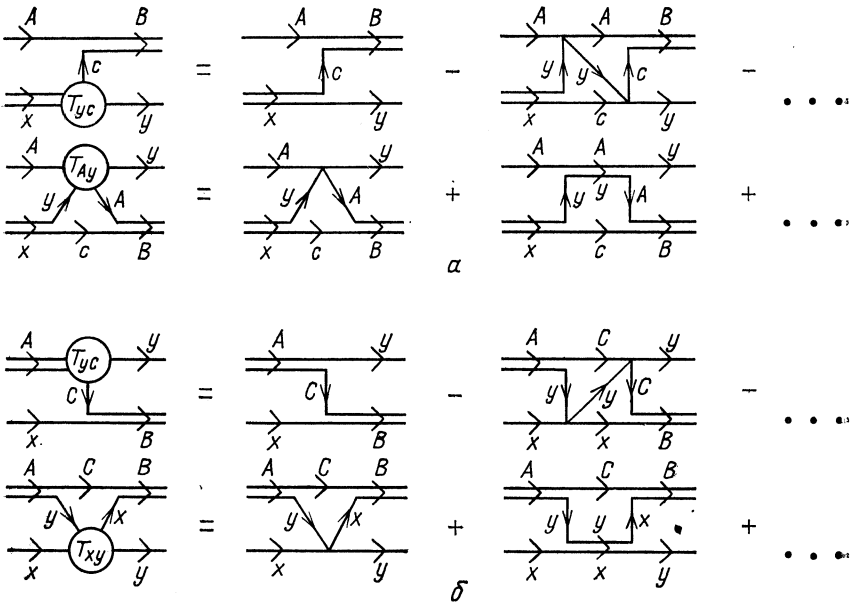


Рис. 2. Графическое изображение интегральных уравнений для  $T$ -матриц прямых (а) и обменных (б) процессов

обсуждение компонент оптических потенциалов и их радиальной зависимости см., например, в [11]) достаточно велико (с учетом кулоновского радиуса оно равно шестнадцати). Если пренебречь спин-орбитальным взаимодействием, то число параметров уменьшается до десяти. Обычно используют оптическую модель, содержащую только центральный потенциал без поверхностного поглощения, хотя имеются программы для расчетов по многопараметрической оптической модели [13].

В настоящее время можно считать установленным, что рассеяние нуклонов на ядрах достаточно хорошо описывается оптической моделью с потенциалами, действительная часть которых имеет глубину  $U_{00} \approx 30-50$  МэВ [11]. В то же время при описании рассеяния сложных частиц имеются дискретно неоднозначные наборы

ОП. Подробная сводка параметров ОП для рассеяния нейтронов, протонов, дейтронов, тритонов,  $^3\text{He}$ ,  $\alpha$ -частиц и тяжелых ионов приведена в обзоре [14]. Среди всех наборов ОП для сложных частиц можно выделить две группы потенциалов. Одна из них — так называемые *мелкие потенциалы* — с глубиной порядка глубины однонуклонных потенциалов, т. е.  $U_0 \approx U_{00}$ . Другую группу составляют *глубокие потенциалы* с  $U_0 \approx nU_{00}$ , где  $n$  — число нуклонов в рассеиваемой частице. Согласно работе [15], мелкие потенциалы более размыты, чем глубокие.

Если рассматривать угловое распределение сложных частиц только в передней полусфере ( $20^\circ \leq \theta \leq 100^\circ$ ), то оно, как правило, одинаково хорошо описывается различными наборами ОП как глубокими, так и мелкими. Такая ситуация связана с тем, что рассеяние в переднюю полусферу мало чувствительно к поведению потенциала внутри ядра, т. е. хорошо объясняется в предположении концепции сильного поглощения [16]. Поэтому потенциалы различной глубины, но имеющие подобный «хвост», описывают угловое распределение на малые углы одинаковым образом и с этой точки зрения неразличимы. Подобное обстоятельство приводит к появлению наборов дискретно неоднозначных оптических потенциалов. Угловые распределения задней полусферы, где в рассеянии сложных частиц на легких ядрах имеются аномально большие максимумы сечения (подробно об аномальном рассеянии назад см. обзор [17]), значительно лучше описываются глубокими потенциалами\*. Тем не менее задача однозначного определения параметров потенциалов оптической модели только из анализа угловых распределений упругого рассеяния, по-видимому, в принципе неосуществима, так как упругое рассеяние сложных частиц определяется не только потенциальным рассеянием. Заметный вклад в угловое распределение, особенно в области больших углов, могут вносить другие механизмы реакции, в частности обменные процессы.

В связи с этим особенно важной становится интерпретация оптической модели на основе микроскопических подходов. Один из них состоит в последовательном применении задачи многих тел для определения взаимодействия в начальном и конечном состоянии. В точных уравнениях (20), (21) задачи трех тел можно в явном виде выделить [3] интегральные операторы, играющие роль операторов взаимодействия (нелокальных и комплексных) во входном и в выходном каналах реакции. Эти операторы естественно назвать обобщенными оптическими потенциалами (ООП) для упругого рассеяния сложных частиц. В работе [20] предложен приближенный метод вычисления действительных частей ООП

\* Можно отметить, что угловое распределение  $\alpha$ -частиц [18] и ионов  $^6\text{Li}$  [19] не описывается мелкими потенциалами даже в передней полусфере.

в задаче трех тел, непосредственно учитывающий принцип Паули, роль которого в рассеянии сложных частиц достаточно велика [21]. Как показано в работе [20], формулы для вычисления действительных частей ООП формально совпадают с теми, которые используются в модели свертки (folding-model). Однако в отличие от обычной модели свертки [22, 23] усреднение затравочных парных потенциалов производится не по средней плотности распределения нуклонов в ядре, а по плотности распределения нуклонных ассоциаций (такая модель свертки использовалась, в частности, в работах [24]).

Что же дает применение задачи трех тел для определения формы и параметров ОП? Проведенные расчеты [20, 24, 25] показали, что действительные части многотельных ООП, ответственные за потенциальное рассеяние, являются достаточно глубокими (например, для рассеяния  $\alpha$ -частиц глубина действительной части потенциала составляет примерно 150 МэВ), а их форма хорошо аппроксимируется обычным потенциалом Вудса — Саксона. Можно, например, отметить, что в обзоре [14] приведено восемь наборов параметров оптических потенциалов для рассеяния  $\alpha$ -частиц с энергией от 16 до 27 МэВ на  $^{12}\text{C}$  и только один из этих наборов соответствует трехтелным ООП [25]. Следовательно, микроскопический подход позволяет резко уменьшить неоднозначность параметров ОП и выделить физические ОП из наборов, полученных в результате подгонки.

Действительные части ООП для рассеяния  $\alpha$ -частиц на  $^7\text{Li}$  и  $^{12}\text{C}$ , вычисленные в приближении задачи трех тел [20, 25], и угловые распределения упругорассеянных  $\alpha$ -частиц с  $E_\alpha = 18$  МэВ на  $^7\text{Li}$  и с  $E_\alpha = 26,6$  МэВ на ядре  $^{12}\text{C}$  (экспериментальные данные взяты из работ [26, 27]), рассчитанные по оптической модели с этими потенциалами, приведены на рис. 3 и 4. Видно, что общее согласие с экспериментом вполне удовлетворительное, хотя достигнуть детального описания не удается, поскольку в расчете учитывается только потенциальное рассеяние.

Отметим еще два микроскопических подхода для описания рассеяния сложных частиц. Один из них [28] связан с введением в оптические потенциалы отталкивающей сердцевины, имитирующей нелинейные члены в уравнении движения частиц в поле ядра (возникновение нелинейных членов в гамильтониане связано со сжимаемостью ядра в процессе взаимодействия с падающей частицей). Другой подход использует двухцентровые оптические потенциалы [29]. И тот, и другой подходы позволяют получить неплохое согласие угловых распределений упругого рассеяния  $\alpha$ -частиц на легких ядрах во всей области углов, но соответствующие оптические потенциалы нельзя прямо использовать в МИВОКОР, поскольку они эффективно учитывают не только потенциальное рассеяние, но и влияние других механизмов.

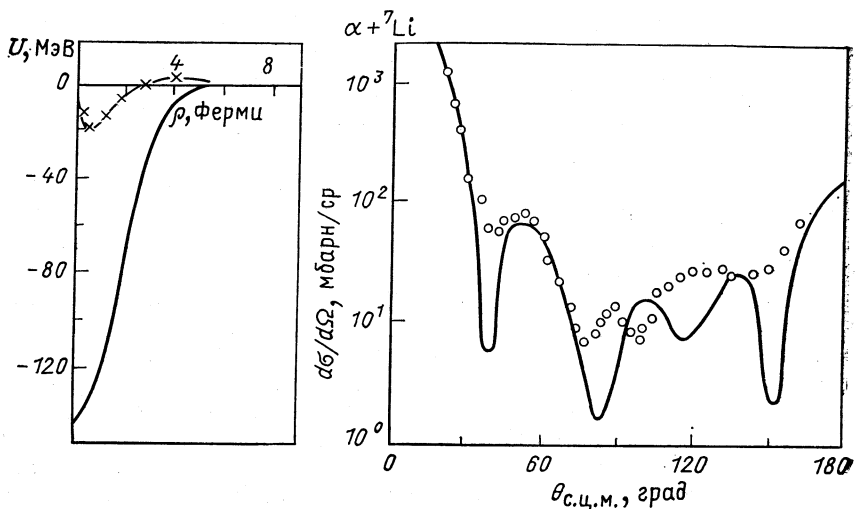


Рис. 3. Действительная часть ООП в задаче трех тел для системы  $\alpha + {}^7\text{Li}$  [21] и угловое распределение  $\alpha$ -частиц, упругорассеянных на  ${}^7\text{Li}$  при  $E_\alpha = 18$  МэВ, вычисленное с этим потенциалом. Экспериментальные данные взяты из [27].

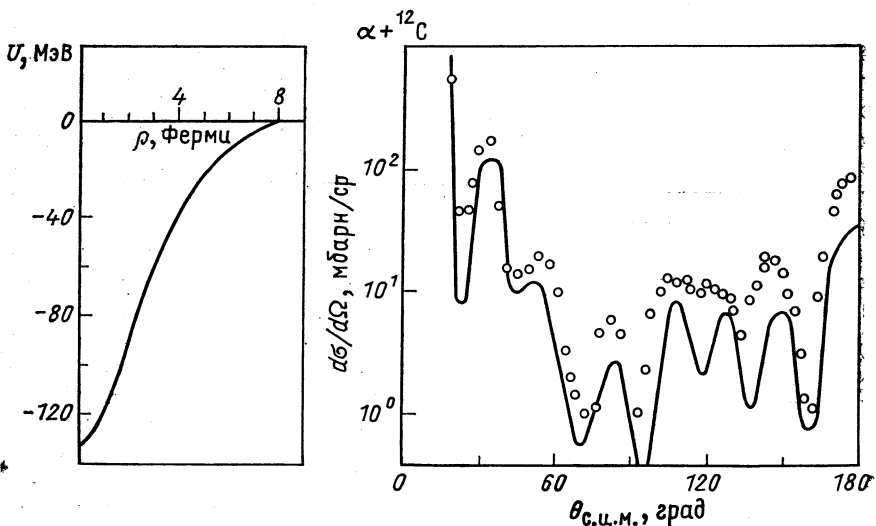


Рис. 4. То же, что на рис. 3, для системы  $\alpha + {}^{12}\text{C}$  и рассеяния  $\alpha$ -частиц на  ${}^{12}\text{C}$  при  $E_\alpha = 26,6$  МэВ [26]. Экспериментальные данные взяты из [28].

Описать угловое распределение упругого рассеяния сложных частиц в согласии с экспериментом можно только при учете многотельного характера рассеяния и вклада более сложных механизмов. Этот учет можно осуществить в рамках модели квазимолекулярных резонансов [30], которые могут образовываться и в входном, и в выходном каналах реакции. Как показано в [31], такие резонансы эквивалентны феноменологическим моделям типа полюсов Редже [32, 33], т. е. должны приводить к усилению обратных максимумов в рассеянии. С другой стороны, возникновение квазимолекулярных резонансов в ряде работ [34] интерпретируется, как результат обмена нуклонами между падающей частицей и ядром, и феноменологически описывается  $L$ -расщепляющимся потенциалом [35], т. е. потенциалом с добавкой, знак которой зависит от четности парциальной волны. Наконец, в работе [36] отмечено, что влияние квазимолекулярных резонансов на упругое рассеяние частиц учитывается непосредственно в оптических потенциалах, мнимая часть которых содержит или  $L$ -зависимость [37], или имеет форму Вудса — Саксона с произвольным показателем степени [38]. Как показано в [39], все эти феноменологические добавки к потенциальному рассеянию можно связать с обменными механизмами (см. рис. 1, б) в самом процессе упругого рассеяния сложных частиц.

Наконец, следует сказать о многотельных поправках к оптическим потенциалам. Как показано в [25], ООП, вычисленные в задаче трех тел, правильно передают основные черты четырехтельных оптических потенциалов. Следовательно, оптические потенциалы Вудса — Саксона при соответствующем выборе параметров (эквивалентных параметрам ООП в задаче трех тел), по-видимому, могут использоваться в МИВОКОР для расчета угловых распределений реакций со сложными частицами.

## 2. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ МЕТОДОМ ИСКАЖЕННЫХ ВОЛН С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**Структура формул МИВОКОР для сечения реакции.** Как следует из изложенного выше, МИВОКОР основан на следующих приближениях:

- 1) матричный элемент ядерной реакции  $A(x, y)B$  вычисляется в рамках задачи трех тел;
- 2) вместо точных  $T$ -матриц, являющихся решением уравнений (24) и (25), используются локальные операторы — потенциалы взаимодействия, т. е. рассматриваются только одноступенчатые механизмы реакции;
- 3) взаимодействие частиц с ядрами в начальном и конечном состояниях описывается оптической моделью;

4) наконец, в МИВОКОР вводят еще одно приближение не-принципиального характера — пренебрегают спин-орбитальным взаимодействием. При этом зависимость сечений от спинов частиц определяется только весовым множителем.

Оставаясь в рамках этих приближений, перейдем к вычислению дифференциального сечения реакции  $A(x, y)B$ . По-прежнему будем рассматривать только прямые процессы, помня, что все соотношения для обменных процессов можно получить заменой  $A \rightleftharpoons x$  и  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ .

Согласно [2], дифференциальное сечение  $d\sigma/d\Omega$  в МИВОКОР определяется через инвариантные форм-факторы, зависящие от

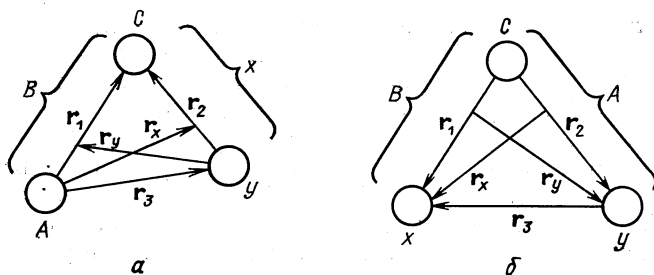


Рис. 5. Координатная система в приближении задачи трех тел для реакции  $A(x, y)B$ :  
а — прямые; б — обменные процессы

волновых функций участвующих в реакции ядер и соответствующих потенциалов взаимодействия. Задача нахождения инвариантных форм-факторов сводится к вычислению интеграла перекрытия

$$J = \langle \varphi_B \varphi_y | V | \varphi_x \varphi_A \rangle$$

для каждого из четырех механизмов, причем интегрирование производится только по внутренним переменным, а потенциал взаимодействия  $V$  задается конкретным выбором механизма. На рис. 5 изображена координатная система для прямых и обменных процессов в реакции  $A(x, y)B$ . Согласно рис. 5, а потенциал  $V(r_2)$  соответствует механизму срыва, а потенциал  $V(r_3)$  — механизму тяжелого замещения. Матричный элемент реакции находится усреднением интеграла перекрытия по искаженным волнам начальной и конечной частиц. В дальнейшем будем использовать парциальные волны  $\chi_{Lx}(k_x r_x)$ ,  $\chi_{Ly}(k_y r_y)$ , которые определяются выражением [40]:

$$\chi(kr) = \frac{4\pi}{kr} \sum_L \chi_L(kr) i^L Y_{LM}(\mathbf{r}) Y_{LM}^*(\mathbf{k}). \quad (26)$$

Существенным моментом в вычислении интеграла перекрытия является разбиение волновой функции ядра на волновые функции сложных подсистем, которые могут обладать собственными возбужденными состояниями, и волновую функцию  $\Psi_{\Lambda\mu}$  (яг) их относительного движения с заданным числом узлов и орбитальным моментом  $\Lambda$ . Чтобы решить эту задачу, необходимо вводить приведенные ширины (амплитуды спектроскопических факторов) для распада ядра на сложные подсистемы. Приведенные ширины можно ввести в задачу различными способами. Во-первых, их можно рассматривать как параметры, однако реализация такого варианта не только трудоемка, но часто просто бессмысленна, поскольку число свободных параметров при такой постановке задачи может быть очень большим. Во-вторых, приведенные ширины (по крайней мере, с точностью до знака) можно в принципе извлекать из экспериментальных спектроскопических факторов. Однако последовательно осуществить эту программу практически невозможно, так как экспериментальные спектроскопические факторы известны только для распада на основные (или низшие возбужденные) состояния конечного ядра. Наконец, можно использовать теоретические значения приведенных ширин, например, вычисленные на основе современной модели оболочек с промежуточной связью [41], так как известно, что эта модель позволяет получать спектроскопические факторы нуклонов, дейтонов, тритонов  ${}^3\text{He}$  в неплохом согласии с экспериментом. Поскольку модель оболочек с промежуточной связью разработана в основном для ядер  $1p$ -оболочки, этот метод наиболее оправдан именно для легких ядер вплоть до  ${}^{16}\text{O}$ .

Формулы для вычисления приведенных ширин в модели оболочек приведены в [42, 43]. Согласно [43], соответствующие приведенные ширины зависят от квантовых чисел состояний ядер, а также от орбитального момента  $\Lambda$  и полного момента  $J$ . В дальнейшем для стандартизации формул введем индекс 1 для обозначения моментов  $\Lambda_1$  и  $J_1$ , связанных с распадом ядра  $B$  на  $A$  и  $c$ . Аналогично индексы 2 используем для обозначения моментов  $\Lambda_2$  и  $J_2$ , связанных с распадом частицы  $x$  на  $y$  и  $c$ . Соответствующие приведенные ширины обозначим  $\Theta_{\Lambda_1, J_1, J_2, c}^{B \rightarrow A+c}$ .

Следуя [2], введем инвариантный форм-фактор с помощью соотношения:

$$\begin{aligned}
 & F_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}^{J_c E_c}(r_x, r_y) = \\
 & = \sum_{M_x, M_y, \mu_1, \mu_2} \langle L_x M_x L_y L_y | l m_l \rangle \langle \Lambda_1 \mu_1 \Lambda_2 - \mu_2 | l m_l \rangle \times \\
 & \quad \times \int d\Omega_x d\Omega_y Y_{L_x M_x}(\Omega_x) Y_{L_y M_y}(\Omega_y) \times \\
 & \quad \times \Psi_{\Lambda_1 \mu_1}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) (V(r_2) + V(r_3)) \Psi_{\Lambda_2 \mu_2}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2). \quad (27)
 \end{aligned}$$



Тогда первые два члена матричного элемента (23), соответствующие одноступенчатым механизмам, можно записать в следующем виде:

$$M_{if} = \sum_{\substack{lJ_1J_2\Lambda_1\Lambda_2 \\ J_c E_c m_l M_1 M_1}} \langle J_A M_A J_1 M_1 | J_B M_B \rangle \times \\ \times \langle J_y M_y J_2 M_2 | J_x M_x \rangle (-1)^{l+M_2} \sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)} \times \\ \times \langle J_2 - M_2 J_1 M_1 | l m_l \rangle (-1)^{\Lambda_1+\Lambda_2} \Theta_{J_1 J_2 J_c E_c}^{\Lambda_1 \Lambda_2 l} \beta_{\Lambda_1 \Lambda_2 l m_l}^{J_c E_c}(\theta, \kappa_{c_1}, \kappa_{c_2}), \quad (28)$$

где структурные множители  $\Theta_{J_1 J_2 J_c E_c}^{\Lambda_1 \Lambda_2 l}$  определены выражением

$$\Theta_{J_1 J_2 J_c E_c}^{\Lambda_1 \Lambda_2 l} = \\ = \Theta_{\Lambda_1 J_1, J_c E_c}^{B \rightarrow A+c} \Theta_{\Lambda_2 J_2, J_c E_c}^{x \rightarrow y+c} \frac{(-1)^{J_c}}{\sqrt{(2J_c+1)}} u(J_1 \Lambda_1 J_2 \Lambda_2; J_c l), \quad (29)$$

а кинематические множители  $\beta_{\Lambda_1 \Lambda_2 l m_l}^{J_c E_c}(\theta, \kappa_{c_1}, \kappa_{c_2})$  связаны с нормированными присоединенными полиномами Лежандра и радиальными интегралами  $I_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}^{J_c E_c}$  соотношением

$$\beta_{\Lambda_1 \Lambda_2 l m_l}^{J_c E_c}(\theta, \kappa_{c_1}, \kappa_{c_2}) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{k_x k_y} \sum_{L_x L_y} i^{L_x+L_y-l} (-1)^{m_l} \bar{P}_{L_y}^{m_l}(\theta) \times \\ \times \langle L_y m_l l - m_l | L_x 0 \rangle I_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}^{J_c E_c}(\kappa_{c_1}, \kappa_{c_2}). \quad (30)$$

Наконец, радиальные интегралы  $I_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}^{J_c E_c}(\kappa_{c_1}, \kappa_{c_2})$  выражаются через инвариантный форм-фактор следующим образом:

$$I_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}^{J_c E_c}(\kappa_{c_1}, \kappa_{c_2}) = \int \chi_{L_y}^*(k_y r_y) F_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}^{J_c E_c} \times \\ \times (r_x, r_y) \chi_{L_x}(k_x r_x) r_x dr_x r_y dr_y. \quad (31)$$

Подставляя матричный элемент (28) в обычное выражение дифференциального сечения и производя суммирование по магнитным квантовым числам, нетрудно получить окончательное выражение для дифференциального сечения реакции:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu_{xA}\mu_{yB}}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_y}{k_x} \frac{2J_B+1}{2J_A+1} \times \\ \times \sum_{\substack{J_1 J_2 \\ l m_l}} \left| \sum_{\substack{\Lambda_1 \Lambda_2 \\ J_c E_c}} \beta_{\Lambda_1 \Lambda_2 l m_l}^{J_c E_c}(\theta, \kappa_{c_1}, \kappa_{c_2}) \Theta_{J_1 J_2 J_c E_c}^{\Lambda_1 \Lambda_2 l} \right|^2. \quad (32)$$

Из структуры этого выражения видно, что сечение реакции много-нуклонной передачи со сложными частицами в МИВОКОР содержит когерентное суммирование по орбитальным моментам  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  движения частицы  $s$  в ядре  $B$  и частице  $x$ . Кроме того, здесь

учитывается когерентное суммирование по состояниям с полным моментом  $J_c$  и с энергией  $E_c$  промежуточной частицы  $c$ . Наличие этих сумм, с одной стороны, не позволяет факторизовать сечение на кинематический и структурный множители (понятие факторизации в данном случае означает, что дифференциальное сечение можно представить в виде некогерентных расщепляющихся сумм произведений структурных и кинематических факторов). С другой стороны, выражение (32) показывает, что сечение реакции определяется не только величинами, но и знаками приведенных ширин, т. е. весьма чувствительно к структурным множителям.

**Возможные упрощения общих формул для конкретных типов реакций.** Из полученных выражений следует, что в общем случае матричный элемент реакции в МИВОКОР содержит четырехмерный интеграл (зависимость от азимутальных углов отсутствует) и двенадцатикратную нерасщепляющуюся сумму. Выражение (32) содержит десять сумм, причем только часть из них оказывается некогерентными. Кинематические множители  $\beta_{A_1 A_2 l m_1}^{J_c E_c}(\theta, \kappa_{c_1}, \kappa_{c_2})$  так же как и структурные факторы  $\Theta_{J_1 J_2 J_c E_c}^{A_1 A_2 l}$ , являются многомерными матрицами, так что вычисление сумм, входящих в (32), представляет собой довольно сложную математическую задачу. Поэтому целесообразно рассмотреть ряд упрощений формулы (32), связанных с уменьшением числа сумм и кратности интегралов. В этом разделе рассмотрим первый аспект проблемы, т. е. возможность уменьшения числа сумм как когерентных, так и некогерентных.

Прежде всего в общей формуле (32) число суммирований можно уменьшить, если предположить, что волновые функции  $\Psi_{\Lambda \mu}(\kappa_c r)$  не зависят от энергии возбуждения промежуточного ядра, т. е. форм-факторы (27) не зависят от  $E_c$ . (Ясно, что такое приближение справедливо, если  $E_c^* \ll E - E_c^*$ .) Тогда можно вычислить суммы по  $E_c$  в (32), используя ортогональность коэффициентов промежуточной связи [44], а также аналитически вычислить суммы по  $J_c$  (зависимость от состояний промежуточной частицы  $c$  сохраняется через орбитальный момент  $L_c$  и спин  $S_c$  [43]). Эти преобразования позволяют уменьшить число когерентных сумм в (32) на две. Укажем, что сечения не содержат сумм по  $E_c$  и  $J_c$ , если в реакции возможно возбуждение только одного уровня частицы  $c$ . Это имеет место, например, в реакциях с легкими частицами (не тяжелее  ${}^4\text{He}$ ) для прямых процессов.

Уменьшение числа сумм в (27), (29) и (32) возможно для многих конкретных типов реакций со сложными частицами. Рассмотрим подробнее наиболее часто встречающиеся случаи.

1. Передаваемая частица  $c$  не тяжелее  ${}^4\text{He}$ , т. е.  $L_c = 0$  (для обменных процессов подобные упрощения будут иметь место, если промежуточное ядро  $C$  будет не тяжелее  ${}^4\text{He}$ ). При этом упро-

щается формула для приведенной ширины [43], а в (32) число сумм остается неизменным. Однако, если  $c$  является  $\alpha$ -частицей или нуклоном, возникают более существенные упрощения формул:

а)  $c$  является  $\alpha$ -частицей ( $J_c = S_c = T_c = 0$ ). В (32) остаются когерентные суммы только по  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , а все остальные суммирование исчезают. Тем не менее видно, что и в этом случае нельзя факторизовать сечение на кинематический и структурный множитель, поскольку  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  могут иметь несколько значений;

б) передаваемая частица является нуклоном ( $J_c = S_c = T_c = 1/2$ ). Зависимость матричного элемента от  $E_c$ , как мы уже указывали выше, в этом случае отсутствует. Если, кроме того, моменты  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  имеют единственное значение (что, например, всегда выполняется для ядер  $1p$ -оболочки), то в (32) суммы по  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  отсутствуют, так что дифференциальное сечение можно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu_{xA}\mu_{yB}}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_y}{k_x} \frac{2J_B+1}{2J_A+1} \sum_{lml} S_l^{\Lambda_1\Lambda_2} |\beta_{\Lambda_1\Lambda_2 lml}(\theta)|^2, \quad (33)$$

где

$$S_l^{\Lambda_1\Lambda_2} = \sum_{J_1 J_2} S_{\Lambda_1 J_1}^{B \rightarrow A+N} S_{\Lambda_2 J_2}^{N \rightarrow A+N} S_N^{X \rightarrow N+y} (2l+1) W^2 (J_1 \Lambda_1 J_2 \Lambda_2 : S_N l). \quad (34)$$

Видно, что даже для парциального дифференциального сечения, т. е. дифференциального сечения с заданным переданным моментом  $l$ , нельзя выделить спектроскопические факторы каждого нуклона в качестве отдельных множителей.

2. Конечная частица  $y$  не тяжелее  ${}^4\text{He}$ . В этом случае несколько упрощается формула для приведенной ширины распада  $x \rightarrow c + y$  [43]. В выражении (32) число сумм не меняется. Если  $y$  —  $\alpha$ -частица, то в сечении (32) пропадает суммирование по  $J_2$ .

3. Конечная частица  $y$  и промежуточная частиц  $c$  не тяжелее  ${}^4\text{He}$ . Согласно пп. 1, 2, в этом случае число сумм в приведенных ширинах [43] уменьшается на четыре, а выражение (32) остается неизменным.

4. Падающая частица  $x$  не тяжелее  ${}^4\text{He}$ . Поскольку  $x \geq y$ , в этом случае  $y, c \leq {}^4\text{He}$ . Здесь имеет место существенное упрощение расчетных формул: во-первых, упрощаются формулы структурных множителей (29); во-вторых, для прямых процессов исчезают все когерентные суммы, так как  $\Lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda_1 = l$ , т. е. сечение строго факторизуется на кинематический и структурный множители. Для прямых процессов, кроме того, упрощается вид форм-фактора (27). Соответствующие формулы приводятся в разд. 4. Для обменных процессов, если пренебречь зависимостью волновых функций от  $E_c$ , остаются когерентные суммы по  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , а сам форм-фактор (27) не меняется.

5.  $J_A = 0$  ( $J_B = 0$ ). Реакция происходит или на четно-четном ядре, или с образованием четно-четного ядра. В каждом из этих случаев пропадает одна сумма: или по  $J_1$ , или по  $J_2$ .

Поскольку для упрощения общего выражения (32) важен не сам тип реакции, а ограничения на значения соответствующих моментов, по упрощенной формуле (33) можно вычислять сечения любых реакций многонуклонной передачи, в которых моменты  $J_c$ ,  $S_c$ ,  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  имеют единственное значение.

Теперь можно ответить на вопрос, когда сечение в МИВОКОР факторизуется на кинематический и структурный множители. Такая факторизация строго выполняется для прямых процессов в реакциях с легкими частицами ( $x = d, t, {}^3\text{He}, \alpha$ ), а для обменных процессов даже в реакциях с легкими частицами факторизация сечения, вообще говоря, отсутствует, поскольку в (32) остаются когерентные суммы по  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ . В реакциях с тяжелыми ионами факторизация сечения имеет место в процессах однонуклонной передачи в тех случаях, когда в каждой из вершин распада нуклон имеет единственное значение переданного орбитального момента. Это требование, в частности, выполняется, если передаваемым нуклоном является  $1p$ -нуклон. В более тяжелых ядрах волновая функция нуклона содержит когерентную сумму по орбитальным моментам, и  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  не могут иметь единственного значения. Если же требование единственности переданных моментов в вершине выполняется и, кроме того, моменты  $J_1$  и  $J_2$  имеют единственное значение, то спектроскопические факторы каждого нуклона выделяются в сечении в качестве отдельных множителей. Примером такой реакции является реакция  ${}^{16}\text{O}({}^{12}\text{C}, {}^{11}\text{B}){}^{17}\text{O}$ .

В отдельных случаях правила отбора разрешают только одно значение  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $J_1$  и  $J_2$ , и в реакциях многонуклонной передачи, для которых возможность факторизации сечения заранее неочевидна. Это означает, что круг реакций, в которых спектроскопические факторы в отдельных вершинах выделяются в качестве множителей в сечении, можно несколько расширить.

**Проблема разделения переменных в радиальном интеграле.** Основной особенностью интегралов, возникающих в МИВОКОР, является то, что потенциалы взаимодействия и волновые функции относительного движения, а также искаженные волны зависят от разных комбинаций относительных переменных, используемых в задаче, например, координат Якоби. Проблема разделения переменных в МИВОКОР является весьма важной, поскольку от ее решения зависит возможность аналитического вычисления интегралов по угловым переменным, а также по тем переменным, которые не связаны с взаимодействием частиц. Отметим, что задача разделения переменных может решаться по-разному, в зависимости от выбора базисных координат, которых в задаче трех тел должно быть две (например,  $r_2$ ,  $r_3$ ;  $r_x$ ,  $r_y$ ;  $r_1$ ,  $r_2$ , см. рис. 5).

Рассмотрим общие методы решения задачи разделения переменных в волновой функции, зависящей от линейной комбинации двух векторов. Наиболее распространенным способом разделения переменных в функциях, зависящих от линейной комбинации двух векторов, является преобразование Гальми — Мошинского — Смирнова [45], коэффициенты которого составляют ортонормированную матрицу для перехода от одного набора координат Якоби к другому. Однако, поскольку это преобразование справедливо только для волновых функций гармонического осциллятора, его нельзя использовать для разделения переменных в реальных волновых функциях МИВОКОР.

Рассмотрим способ разделения переменных, не требующий определенной симметрии волновой функции [46]. Пусть имеется такая функция  $\varphi_{lm}(\mathbf{R})$ , что

$$\varphi_{lm}(\mathbf{R}) = \varphi_l(R) Y_{lm}(\mathbf{R}); \quad \mathbf{R} = \alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2. \quad (35)$$

Необходимо представить ее в виде суммы произведений функций от каждого из векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Для решения этой задачи воспользуемся свойствами  $\delta$ -функций Дирака и представим  $\varphi_{lm}(\mathbf{R})$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{lm}(\mathbf{R}) &= \int \varphi_{lm}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi_{lm}(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{R})] d\mathbf{k} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (36)$$

Разложим плоские волны в ряд по функциям Бесселя и проведем интегрирование по угловым переменным векторов  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}$ . Тогда для функции  $\varphi_{lm}(\mathbf{R})$  можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_{lm}(\mathbf{R}) &= \frac{4}{\pi} \sum_{l_1 l_2 m_1 m_2} \langle l_1 0 l_2 0 | l 0 \rangle \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l m \rangle i^{l_1 + l_2 + l} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{(2l + 1)}} A_{l_1 l_2}^l(\alpha r_1, \beta r_2) Y_{l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) Y_{l_2 m_2}(\mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$A_{l_1 l_2}^l(\alpha r_1, \beta r_2) = \int r^2 dr \varphi_l(r) \Delta_{l_1 l_2 l}(\alpha r_1, \beta r_2, r); \quad (37a)$$

$$\Delta_{l_1 l_2 l}(\alpha r_1, \beta r_2, r) = \int k^2 dk j_{l_1}(\alpha k r_1) j_{l_2}(\beta k r_2) j_l(kr). \quad (37b)$$

Выражения (37) формально решают поставленную задачу разделения переменных. Действительно, угловая зависимость правой части в (37) представляется как сумма произведений сферических функций от  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Но для фактического разделения радиальных

переменных необходимо вычислить двумерный интеграл (37а), что само по себе является сложной задачей. Аналитически этот интеграл вычисляется только тогда, когда  $\varphi_l(R)$  — сферическая функция Ханкеля или Бесселя. Соответствующие выражения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_l(R) &= j_l(kr); \\ A_{l_1 l_2}^l &= \frac{\pi}{2} i^{l_1+l_2-l} j_{l_1}(\alpha kr_1) j_{l_2}(\beta kr_2); \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_l(R) &= h_l^{(1)}(i\kappa r); \\ A_{l_1 l_2}^l &= \frac{\pi}{2} i^{l_1+l_2-l} h_{l_1}^{(1)}(\alpha i\kappa r_1) j_{l_2}(\beta i\kappa r_2) \text{ при условии } \alpha r_1 \geq \beta r_2. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Во всех остальных случаях интеграл (37а) необходимо находить с помощью численных расчетов. Расчеты можно упростить, если аналитически вычислить интеграл (37б) от произведений трех функций Бесселя. В работах [47—50] приводятся аналитические выражения для  $\Delta_{l_1 l_2 l}$  в виде рядов от различных функций: полиномов Лежандра, модифицированных функций гармонического осциллятора, присоединенных полиномов Лежандра, степенных функций и Г-функций, однако сходимость таких рядов не всегда бывает быстрой.

В работе [2] предложен другой способ разделения переменных в функции  $\varphi_{lm}(R)$ , использующий ее угловую симметрию; т. е. тот факт, что угловая зависимость  $\varphi_{lm}(R)$  определяется сферическими функциями  $Y_{lm}(R)$ . Для обобщенных сферических функций от суммы двух векторов имеет место известное соотношение Мошинского [51]:

$$R^l Y_{lm}(R) \sum_{\lambda=0,1,\dots,l} \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} (\alpha r_1)^{l-\lambda} (\beta r_2)^\lambda \binom{2l+1}{\lambda_2}^{1/2} \times \\ \times \langle l-\lambda m-\mu \lambda \mu | lm \rangle Y_{l-\lambda m-\mu}(r_1) Y_{\lambda \mu}(r_2). \quad (40)$$

Выражение (40) позволяет разделить переменные в угловой части функции  $\varphi_{lm}(R)$ . Чтобы разделить переменные в оставшейся скалярной части  $\varphi_l(R)/R^l$ , ее необходимо разложить в ряд по полиномам Лежандра от косинуса угла между векторами  $r_1$  и  $r_2$ :

$$\frac{1}{R^l} \varphi_l(R) = 2\pi \sum_{KQ} g_K(r_1, r_2) Y_{KQ}^*(r_1) Y_{KQ}(r_2), \quad (41)$$

где

$$g_K(r_1, r_2) = \int_{-1}^1 P_K(\mu) \frac{1}{R^l} \varphi_l(R) d\mu; \quad \mu = \cos(\widehat{r_1 r_2}). \quad (42)$$

В результате для функции  $\varphi_m^l(R)$  можно получить окончательно

$$\begin{aligned} \varphi_{lm}(\mathbf{R}) = & \sqrt{2l+1} \sum_{\lambda=0,1,\dots,l} \sum_{Kl_1l_2} \sqrt{\pi} (\alpha r_1)^{l-\lambda} (\beta r_2)^\lambda \times \\ & \times \left(\frac{2l}{2\lambda}\right)^{1/2} (-1)^K (2K+1) g_K(r_1, r_2) \times \\ & \times \langle l-\lambda 0 K 0 | l_1 0 \rangle \langle \lambda 0 K 0 | l_2 0 \rangle \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | lm \rangle W(l-\lambda l_1 \lambda l_2; Kl) \times \\ & \times Y_{l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) Y_{l_2 m_2}(\mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (43)$$

Сопоставление выражений (37) и (43) показывает, что использование угловой симметрии волновых функций позволяет существенно упростить выражение для функции  $\varphi_{lm}(\mathbf{R})$  при разделении ее переменных. В частности, в то время как (37) содержит сумму двукратных интегралов, выражение (43) определяется только однократными интегралами, что значительно облегчает конкретные расчеты. Поэтому во многих программах МИВОКОР используется именно второй способ разделения переменных, связанный с вычислением инвариантного форм-фактора через величины  $g_K(r_x, r_y)$ , определенные выражением (42).

### 3. ПРИБЛИЖЕННЫЙ УЧЕТ ЭФФЕКТОВ ОТДАЧИ И КОНЕЧНОГО РАДИУСА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Как следует из предыдущего раздела, конкретная реализация общего формализма МИВОКОР является весьма трудоемкой вычислительной задачей, в первую очередь, за счет наличия многократных интегралов в выражении (32). Были предложены различные приближенные методы, позволяющие уменьшить кратность интегрирования при вычислении угловых распределений. Следует отметить, что большинство этих методов относится к прямым процессам, причем учитывается один механизм — механизм срыва. Качественные оценки [10] показывают, что влияние тяжелого замещения, по-видимому, существенно только для легчайших ядер, так что пренебрежение этим механизмом в большинстве случаев оправдано.

Для механизма срыва можно заранее ожидать наличия некоторых ограничений на возможные значения координат  $r_x$  и  $r_y$ , от которых зависят искаженные волны. Действительно, согласно рис. 5, эти координаты выражаются через координаты Якоби  $r_2$  и  $r_3$  следующим образом (для простоты записи будем обозначать массы символами соответствующих частиц):

$$r_x = r_3 + \frac{c}{x} r_2; \quad r_y = \frac{A}{B} r_3 - \frac{c}{B} r_2; \quad r_1 = r_2 + r_3. \quad (44)$$

Значения модуля координаты  $r_2$  ограничены размерами области взаимодействия частиц  $y$  и  $c$ . Поэтому на координатной плоскости  $(r_2, r_3)$  значения переменной  $r_x (r_y)$  группируются на дорожке вдоль направления  $r_3 (Ar_3/B)$ . Ширина этой дорожки зависит от размеров области взаимодействия и от отношения масс  $c/x, c/B$  и, как правило, не превышает 1—2 ферми. Это обстоятельство позволяет считать вторые члены в (44) поправками к «основной» координате  $r_3$ , что является важным для различных приближенных способов разделения переменных в искаженных волнах.

**Учет эффектов конечного радиуса и отдачи в нулевом приближении.** Рассмотрим приближенные варианты МИВОКОР, связанные с отбрасыванием вторых членов в выражениях для  $r_x$  и  $r_y$  в (44). При этом искаженные волны зависят только от одной координаты, и переменные разделяются наиболее просто. Такое приближение справедливо, если или отношение координат  $r_2/r_3$ , или отношения масс  $c/x, c/B$  могут считаться малыми. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

*Приближение нулевого радиуса (ПНР)* [40] сводится к тому, что размеры области взаимодействия частиц  $y$  и  $c$  считаются малыми по сравнению с характерными размерами системы, т. е. полагается, что

$$r_2/r_3 \ll 1.$$

Это условие означает, что частица  $y$  испускается в той же точке, в которой захватывается частица  $c$ . В этом случае дорожка интегрирования на плоскости  $(r_2, r_3)$  вырождается в прямую, совпадающую с осью ординат (на плоскости  $r_x, r_y$  дорожка интегрирования ПНР превращается в прямую, тангенс угла наклона которой равен  $A/B$ ). Математически ПНР сводится к замене потенциала  $V(r_2)$  псевдопотенциалом Ферми [52]:

$$V(r_2) \Psi_{\Lambda_2 \mu_2}(r_2) = N^{\text{ПНР}} \delta(r_2) \delta_{\Lambda_2 0} \delta_{\mu_2 0} / r_2^2.$$

Это приводит к существенному упрощению форм-фактора (27):

$$F_{L_x L_y l}^{\text{ПНР}}(r_3) = N^{\text{ПНР}} \sqrt{(2l+1)(2L_x+1)(2L_y+1)} \times \\ \times \langle L_x 0 L_y 0 | l 0 \rangle \Psi_l(r_3) \frac{1}{r_2^2} \delta(r_2). \quad (45)$$

В результате интеграл (31) становится одномерным:

$$I_{L_x L_y l}^{\text{ПНР}} = N^{\text{ПНР}} \sqrt{(2l+1)(2L_x+1)(2L_y+1)} \times \\ \times \langle L_x 0 L_y 0 | l 0 \rangle \int \chi_{L_y}^* \left( k_y \frac{A}{B} r \right) \Psi_l(r) \chi_{L_x}(k_x r) dr. \quad (46)$$

Таким образом, в ПНР сечение (32) определяется одномерным интегралом, к тому же в (32) уменьшается число сумм, поскольку инвариантный форм-фактор зависит только от моментов соответ-



ствующих парциальных волн и переданного момента  $l$ . Поэтому расчеты угловых распределений в ПНР наиболее просты. Однако ПНР обоснованно можно использовать только в реакциях с дейтонами. Для расчета характеристик реакций с тяжелыми ионами ПНР принципиально неприменимо, поскольку не выполняется условие  $r_2/r_3 \gg 1$ .

*Приближение распределенной плотности (ПРП)* [53]. В реакциях с ионами  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^9\text{Be}$  с передачей ядру сложного кластера (например,  $\alpha$ -частицы) при относительно небольших энергиях важно учесть не только конечность радиуса, но и поверхностный характер взаимодействия. Для этой цели было предложено [53] ввести модельный инвариантный форм-фактор, который описывается достаточно острой функцией  $\rho(x)$  с максимумом, расположенным на границе ядра, т. е. при  $x = r - R$ . В этом приближении радиальный интеграл принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} I_{L_x L_y l}^{\text{ПРП}} &= \sqrt{(2l+1)(2L_x+1)(2L_y+1)} \langle L_x 0 L_y 0 | l 0 \rangle \times \\ &\times \int dr_x \Psi_l(r_x) \int dr'_y \chi_{L_y}^* \left( k_y \frac{A}{B} r'_y \right) \rho(r - R) \chi_{L_x}(k_x r'_y); \\ \mathbf{r} &= \frac{cM}{xB} \mathbf{r}_x - \frac{A}{B} \mathbf{r}_y; \quad \mathbf{r}'_y = \frac{y}{x} \mathbf{r}_y + \frac{cM}{xB} \mathbf{r}_x; \\ M &\equiv x + A \equiv y + B. \end{aligned} \right\} (47)$$

Для весовой функции  $\rho(r - R)$  в [53] предлагается гауссово распределение:

$$\rho(r - R) = (\sqrt{\pi\xi})^{-1/2} D_0 \exp\{-[(r - R)/\xi]^2\}.$$

Таким образом, в ПРП частицы  $y$ ,  $c$  и  $A$  расположены на одной прямой, но не в одной точке, как в ПНР, а взаимодействие между ними осуществляется в области с центром в точке  $R$  и шириной порядка  $\xi$ . Из формулы (47) следует, что в ПРП радиальный интеграл сводится к произведению двух одномерных интегралов, но при этом вводится несколько дополнительных параметров ( $R$ ,  $\xi$  и  $D_0$ ).

*Приближение «без отдачи» («no-recoil»)* основано на предположении, что масса передаваемой частицы  $c$  много меньше, чем масса частицы  $x$  и ядра  $A$ , т. е. пренебрегается отдачей ядра-мишени, вызванной передаваемой частицей, и учитывается только полная отдача системы, поскольку масса ядра  $A$  не считается бесконечной. В этом приближении частица  $c$  движется по прямой, соединяющей частицы  $y$  и  $A$ , хотя само направление этой прямой в отличие от ПРП не остается неизменным, так как оно зависит от направления вылета частицы  $y$ . Дорожка интегрирования в этом случае, так же как и в ПНР, вырождается в прямую, но такое вырождение связано не с малостью  $r_2/r_3$ , а с малостью массовых отношений.

Ясно, что это приближение наиболее оправдано, если происходит передача одного нуклона в реакциях с тяжелыми ионами.

Приближение «без отдачи» также значительно упрощает выражение для инвариантного форм-фактора (27), поскольку в нем сразу разделяются переменные во всех подынтегральных функциях кроме волновой функции  $\Psi_{\Lambda_1\mu_1}(\kappa_{c_1}, r_1)$ . Если использовать разложение (37), то для инвариантного форм-фактора в приближении «без отдачи» можно получить

$$F_{\Lambda_1\Lambda_2L_xL_y l}^{6.0}(r_2, r_3) = \frac{2}{\pi} \sqrt{(2\Lambda_1 + 1)(2\Lambda_2 + 1)(2L_x + 1)(2L_y + 1)} i^{\Lambda_2} \times \\ \times \langle \Lambda_1 0 \Lambda_2 0 | l 0 \rangle \langle L_x 0 L_y 0 | l 0 \rangle A_{\Lambda_2 l}^{*\Lambda_1}(r_2, r_3) V(r_2) \Psi_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, r_2). \quad (48)$$

В результате интеграл (31) принимает вид

$$I_{\Lambda_1\Lambda_2L_xL_y l}^{6.0} = \int \chi_{L_y}^* \left( k_y \frac{A}{B} r_3 \right) F_{\Lambda_1\Lambda_2L_xL_y l}^{6.0} \times \\ \times (r_2, r_3) \chi_{L_x}(k_x r_3) dr_3. \quad (49)$$

Таким образом, приближение «без отдачи» позволяет аналитически вычислить интеграл по угловым переменным в форм-факторе (27) без введения дополнительных суммирований. Однако радиальные интегралы (49) остаются трехмерными и их можно вычислить только численно. Если использовать разложение интегралов (37б) по собственным функциям обобщенного гармонического осциллятора [48], то интеграл [49] представляется в виде бесконечной суммы произведений одномерных интегралов [54]. Интеграл (49) можно свести к произведению одномерных интегралов в том случае [55], если искаженные волны рассматриваются в методе генераторных координат [56] с гауссовыми волновыми пакетами, а функции  $\Psi_{\Lambda_1\mu_1}(\kappa_{c_1}, r_1)$  и  $\Psi_{\Lambda_2\mu_2}(\kappa_{c_2}, r_2)$  заменяются собственными функциями гармонического осциллятора. Тогда разделение переменных в интеграле (49) можно провести с помощью преобразования Тальми — Мошинского — Смирнова [45].

Для аналитического разделения переменных в интеграле (49) необходимо использовать дополнительные предположения о виде волновых функций  $\Psi_{\Lambda\mu}(\kappa_c, r)$ . Для этой цели обычно используют приближение Баттля — Гольдфарба (ПБГ) [57], которое состоит в том, что в этом приближении радиальная функция  $\Psi_{\Lambda_1}(\kappa_{c_1}, r_1)$  заменяется функцией Ханкеля. Это приближение должно наиболее хорошо выполняться в реакциях с тяжелыми ионами ниже кулоновского барьера. Браун-Мюнцингер и Харней [58] показали, что благодаря наличию сильного поглощения, ПБГ справедливо и в том случае, если энергия ионов превышает кулоновский барьер (хотя этот вывод нельзя считать строгим, так как все оценки в [58] носят численный характер).

При использовании ПБГ радиальные интегралы (49) необходимо обрезать снизу, поскольку скорость расходимости функций Ханкеля при малых  $r$  больше, чем скорость убывания искаженных волн. Особенно важно вводить обрезание интегралов для парциальных волн с малыми моментами, когда центробежный барьер практически отсутствует. Отметим, что ПБГ по своему физическому смыслу эквивалентно периферийной модели ядерных реакций [59], в которой вершинные функции считаются константами.

В ПБГ волновая функция захватываемого нуклона в конечном ядре имеет вид

$$\Psi_{\Lambda_1}(\kappa_{c_1}, r_1) \equiv \Psi_{\Lambda_1}(\kappa_{c_1}, |\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3|) \rightarrow N^{\text{ПБГ}} h_{\Lambda_1}(\kappa_{c_1}, |\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3|). \quad (50)$$

Тогда матрица  $A_{\Lambda_2 l}^{*\Lambda_1}$  вычисляется аналитически по (39), и интеграл (49) можно представить в виде произведения двух одномерных интегралов:

$$\begin{aligned} I_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}^{6.0 \text{ ПБГ}} &= i^{\Lambda_1 + \Lambda_2 - l} N^{\text{ПБГ}} \sqrt{(2\Lambda_1 + 1)(2\Lambda_2 + 1)} \times \\ &\times \sqrt{(2L_x + 1)(2L_y + 1)} \langle \Lambda_1 0 \Lambda_2 0 | l 0 \rangle \langle L_x 0 L_y 0 | l 0 \rangle \times \\ &\times \int r_2^2 j_{\Lambda_2}^*(i\kappa_{c_1}, r_2) V(r_2) \Psi_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, r_2) dr_2 \times \\ &\times \int \chi_{L_y}^*(k_y \frac{A}{B} r_3) h_l^{(0)}(i\kappa_{c_1}, r_3) \chi_{L_x}(k_x r_3) dr_3. \end{aligned} \quad (51)$$

Вычисление интегралов (51) не представляет особого труда. Если же в качестве  $V(r_2)$  использовать прямоугольную яму [60], то интеграл по  $dr_2$  в (51) вычисляется аналитически. Таким образом, в приближении «без отдачи» с использованием ПБГ кинематический интеграл, так же как и в ПРП, заменяется произведением двух одномерных интегралов.

Отметим, что ПБГ связано с поверхностным характером реакции, а не с пренебрежением эффектами отдачи. Поэтому ПБГ можно использовать и в тех вариантах МИВОКОР, в которых эффекты отдачи приняты во внимание (см. ниже).

Итак, учет эффектов конечного радиуса и отдачи в нулевом порядке позволяет существенно упростить вычисления кинематического множителя (30). Однако реальная ценность этих приближений сильно снижается тем обстоятельством, что правила отбора для них ограничивают возможные значения переданных моментов условием нормальной четности. Физически это ограничение связано с тем, что в нулевом порядке четко фиксируется положение всех частиц в пространстве. Математически правила отбора по четности следуют из условий четности сумм  $\Lambda_1 + \Lambda_2 + l$  и  $L_x + L_y + l$ , которые, в свою очередь, вытекают из наличия коэффициентов Клебша — Гордана с нулевыми проекциями в выражениях (45), (47), (48). Поэтому корректный учет эффектов конеч-

ного радиуса и отдачи необходим, прежде всего, для того чтобы правильно учесть все возможные переданные моменты  $l$  в сечении (32).

**Приближенный учет эффектов отдачи — модуляция плоской волны.** Рассмотрим способы разделения переменных в искаженных волнах, связанные с приближенной факторизацией самих искаженных волн. Эту факторизацию можно провести несколькими путями. Здесь остановимся на простейшем из них: представлении искаженной волны в виде произведения плоской волн и модулирующего множителя.

Формально искаженные волны  $\chi^{(\pm)}(\mathbf{kr})$  можно записать в виде бесконечного ряда, аналогичного (26), каждый член которого содержит произведение амплитудной функции  $\mathbf{V}^{(\pm)}(\mathbf{kr})$  и плоской волны  $\exp(i\mathbf{kr})$  (разложение искаженной волны по плоским волнам). Наиболее удобно такое представление, когда фаза множителя  $\mathbf{V}^{(\pm)}(\mathbf{kr})$  меняется в зависимости от  $\mathbf{k}$  медленнее, чем фаза плоской волны. В этом случае в ряду выделяется один главный член, в котором фаза плоской волны не зависит от  $\mathbf{r}$ , а  $\mathbf{V}^{(\pm)}(\mathbf{kr})$  можно рассматривать как множитель, модулирующий плоскую волну и по амплитуде, и по фазе.

Если модулирующий множитель носит синусоидальный характер, то такая приближенная трактовка искаженных волн называется *эйкональным приближением* [61]:

$$\chi^{(\pm)}(\mathbf{kr}) = \exp(-\gamma k R) \exp[\pm(1 + \beta \pm i\gamma) \mathbf{kr}]. \quad (52)$$

Параметры в выражении (52) имеют следующий физический смысл [61]. Величина  $(1 + \beta)k$  является модифицированным волновым числом (оно может быть определено через квазиклассический импульс в точке поворота); параметр  $\gamma$  обеспечивает затухание искаженной волны, т. е. он связан с наличием поглощения в оптическом потенциале; параметр  $R$  нормирует волновую функцию (52), и его значение обычно выбирают равным радиусу ядра.

Поскольку в эйкональном приближении влияние искажений учитывается только в фазе плоской волны, это приближение по своему смыслу очень близко к квазиклассическому приближению (несколько улучшенному за счет введения параметра  $\gamma$ ). Поэтому условие применимости эйконального приближения совпадает с обычным квазиклассическим условием

$$1/k = \lambda \ll R. \quad (53)$$

Укажем для примера, что для  $\alpha$ -частиц с энергией 25 МэВ длина волны  $\lambda \approx 0,6$  ферми, и при взаимодействии их с ядрами, имеющими радиус  $R \approx 4-6$  ферми, условие (53) выполняется достаточно хорошо.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Поскольку в эйкональном приближении не накладывается никаких ограничений на

массы и координаты частиц, в этом приближении и конечный радиус, и отдача считаются точно. Поэтому эйкональное приближение можно использовать для вычисления угловых распределений как для прямых, так и для обменных процессов [62]. В этом смысле обсуждение эйконального приближения в данном разделе в значительной степени условно. Соответствующая расчетная программа будет рассматриваться в разделе, посвященном точным программам МИВОКОР. Простая форма искаженной волны в эйкональном приближении позволяет полностью разделить переменные в интеграле (31), а при использовании ПБГ [57] получить аналитические выражения для сечения (32).

Если рассматривать только механизм срыва в реакциях одно-нуклонной передачи, т. е. считать отношения  $c/x$ ,  $c/B$  малыми, то можно ввести другой способ разделения переменных в искаженных волнах, несколько улучшив квазиклассическое приближение. В этом случае в модулирующих множителях члены, содержащие отношения  $c/x$ ,  $c/B$ , опускаются, а в плоских волнах координаты  $r_x$  и  $r_y$  учитываются точно (*приближение Додда и Грайдера (ПДГ)* [63]). В ПДГ искаженные волны принимают вид:

$$\begin{aligned}\chi_x^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x) &\approx \mathbf{B}_x^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_3) \exp(i\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x); \\ \chi_y^{(-)}(\mathbf{k}_y \mathbf{r}_y) &\approx \mathbf{B}_y^{(-)}\left(\mathbf{k}_y \frac{A}{B} \mathbf{r}_3\right) \exp(i\mathbf{k}_y \mathbf{r}_y).\end{aligned}\quad (54)$$

Для того чтобы оценить область применимости такого приближения, разложим  $\mathbf{B}_x^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $r_x = r_3$  и учтем члены первого порядка по  $c/x$ :

$$\mathbf{B}_x^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x) = \mathbf{B}_x^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_3) + (c/x) \mathbf{r}_2 \nabla \mathbf{B}_x^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x) |_{r_x=r_3} + \dots$$

Вторым членом в этом разложении можно пренебречь, если выполняется неравенство

$$c/x \mathbf{r}_2 \nabla \mathbf{B}_x^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x) |_{r_x=r_3} / \mathbf{B}_x^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_3) \ll 1,$$

которое можно преобразовать к виду

$$R |\nabla \mathbf{B}| / B_x^{(+)}(k_x r_3) \ll x/c. \quad (55)$$

Если вместо  $\mathbf{B}_x^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_3)$  использовать функции эйконального приближения, то условие (55) принимает вид

$$c/x \ll \lambda/R \ll 1. \quad (55a)$$

Квазиклассическое неравенство (53), как и следовало ожидать, в таком приближении дополняется еще одним неравенством, т. е. условия, накладываемые на отношение  $\lambda/R$ , делаются более жесткими.

Выражения (54) позволяют упростить вычисление кинематического множителя (30). Если использовать ПБГ [57], то кинемати-

ческий множитель в ПДГ принимает следующий вид:

$$\beta_{\Lambda_1 \Lambda_2 l m_l}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \kappa_{c_1}, \kappa_{c_2}) = N^{\text{побр}} \sum_{l_1 m_1 L M} i^{l_1 + \Lambda_1 + \Lambda_2 + L} \times \\ \times (-1)^{L+M} \sqrt{(2\Lambda_1 + 1)(2l_1 + 1)} \langle l_1 m_1 l m_l | L - M \rangle \times \\ \times \Gamma_{\Lambda_1 \Lambda_2 l}(l_1, L) Y_{LM}(\mathbf{Q}) G_{l_1}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y), \quad (56)$$

где

$$G_{l_1}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y) = \int d\mathbf{r}_3 \mathbf{B}_y^{(\leftarrow)}\left(\mathbf{k}_y \frac{A}{B} \mathbf{r}_3\right) \exp[i(i\mathbf{q}\mathbf{r}_3) h_{l_1}^{(1)*}(i\kappa_{c_1} r_3) Y_{l_1 m_1} \times \\ \times (\mathbf{r}_3) \mathbf{B}_x^{(\rightarrow)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_3)]; \quad (57)$$

$$\Gamma_{\Lambda_1 \Lambda_2 l}(l_1, L) = \sum_{l_2} \sqrt{(2l_2 + 1)} \langle l_1 0 \Lambda_1 0 | l_2 0 \rangle \times \\ \times \langle l_2 0 L 0 | \Lambda_2 0 \rangle W(l_1 \Lambda_1 L \Lambda_2 : l_2 l) A_L(l_2, \Lambda_2); \quad (58)$$

$$A_L(l_2, \Lambda_2) = i^{l_2} \int r_2^2 j_{l_2}^*(i\kappa_{c_1} r_2) j_L(Qr_2) V(r_2) \Psi_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2} r_2) dr_2. \quad (59)$$

Импульс отдачи  $\mathbf{Q}$  и переданный импульс  $\mathbf{q}$  определяются обычным образом:

$$\mathbf{Q} = (c/x) \mathbf{k}_x + (c/B) \mathbf{k}_y; \quad (60)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_x - (A/B) \mathbf{k}_y. \quad (60a)$$

Поправки на отдачу включены в интегралы (59), поскольку угловой момент  $L$  появляется за счет наличия членов, содержащих  $c/x$  и  $c/B$  в искаженных волнах (54). Так как подынтегральные функции в (59) локализованы в области действия ядерных сил ( $r_2 \ll R$ ), интегралы  $A_L(l_2, \Lambda_2)$  будут быстро спадать при  $L > QR$  за счет наличия функции Бесселя  $j_L(QR)$  и сумма по  $L$  реально оказывается конечной (для заданного  $L$  суммирование по  $l_1$  и  $l_2$  ограничено правилами отбора). Следовательно, при учете эффектов отдачи в первом порядке кинематический множитель (30), так же как и в приближении без отдачи (при использовании ПБГ), содержит произведения двух интегралов, но число сумм в (56)–(59) увеличивается на три по сравнению с (30), если радиальный интеграл определяется выражением (51).

В работе [63] модулирующие функции  $B^{(\pm)}(\mathbf{kr})$  рассматриваются в модели сильного поглощения [16], т. е. они обращаются в нуль внутри области взаимодействия и в области тени. В этом случае интегралы (57) имеют наиболее простую форму и вычисляются аналитически. Такая трактовка часто называется дифракционным приближением.

**Приближенный учет эффектов отдачи—модуляция искаженной волны.** Рассмотрим другой способ приближенной факторизации искаженных волн, заключающийся в модуляции самой искаженной волны. Этот способ основан на предположении, что отно-

шения  $c/x$ ,  $c/B$  малы, т. е. он применим только для расчета угловых распределений механизма срыва в реакциях однонуклонной передачи.

Искаженную волну  $\chi^{(\pm)}(\mathbf{k}\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}$ ) в окрестности точки  $\mathbf{R}$  можно записать в следующем виде:

$$\chi^{(\pm)}(\mathbf{k}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho})) = \exp(\boldsymbol{\rho} \nabla) \chi(\mathbf{k}\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}}. \quad (61)$$

Это точное выражение можно аппроксимировать различными способами. Рассмотрим некоторые из них.

*Использование теории возмущений.* Экспоненциальный множитель в выражении (61) раскладывается в ряд вокруг точки  $\mathbf{r}_x = \mathbf{r}_z$ ,  $\mathbf{r}_y = (A/B) \mathbf{r}_z$ , в котором учитываются только члены первого порядка по  $c/x$ ,  $c/B$ , а оператор трансляции рассматривается в квазиклассическом приближении [64]. Тогда для искаженных волн имеем следующие выражения:

$$\chi^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x) = (1 + i(c/x) \mathbf{r}_2 k_x) \chi^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_z); \quad (62)$$

$$\chi^{(-)}(\mathbf{k}_y \mathbf{r}_y) = (1 - i(c/B) \mathbf{r}_2 k_y) \chi^{(-)}(\mathbf{k}_y (A/B) \mathbf{r}_z). \quad (62a)$$

В результате кинематический множитель (30) содержит четыре члена, один из которых полностью совпадает с полученным ранее в приближении «без отдачи», два других соответствуют учету эффектов отдачи в первом порядке и, наконец, последний член определяет учет эффектов отдачи во втором порядке (он пропорционален  $c^2/xB$ ). Как показывают численные оценки [65], вклад поправочных членов первого порядка в реакциях однонуклонной передачи с тяжелыми ионами довольно значителен (он составляет 20—30% вклада нулевого члена в приближении без отдачи). В то же время вклад членов второго порядка незначителен (~1%) и им можно пренебречь. Эти же оценки подтверждают справедливость разложений (62) и (62a) для искаженных волн, поскольку все последующие члены этих разложений будут, по крайней мере, второго порядка малости.

Используя ПБГ [57], можно вычислить поправки первого порядка к кинематическому множителю [в нулевом порядке он определяется выражениями (30) и (51)]. Соответствующие поправки имеют вид

$$\begin{aligned} & \Delta \beta_{\Lambda_1 \Lambda_2 l m_l}(\theta, \kappa_{c_1} \kappa_{c_2}) = \\ & = -\frac{4\pi}{k_x k_y} N^{\text{пбг}} \sum_{l_1 l_2 L_x L_y M_x M_y} \frac{i^{L_x - L_y}}{\sqrt{2l+1}} \times \\ & \quad \times \langle L_y M_y l_2 m_l | L_x M_x \rangle \langle 10 l m_l | l_2 m_l \rangle \times \\ & \quad \times \langle l_1 0 l_2 0 | \Lambda_1 0 \rangle \langle 10 \Lambda_2 0 | l_1 0 \rangle \langle L_y 0 l_2 0 | L_x 0 \rangle \times \\ & \quad \times A(l_2, \Lambda_2) Y_{L_x M_x}(\mathbf{k}_x) Y_{L_y M_y}(\mathbf{k}_y) \times \\ & \quad \times \int \chi_{L_y}^*(k_y \frac{A}{B} r) h_{l_1}^{(1)*}(i\kappa_{c_1} r) \chi_{L_x}(k_x r) dr, \end{aligned} \quad (63)$$

причем интеграл  $A(l_2, \Lambda_2)$  можно получить из интеграла (59) заменой функции Бесселя  $j_L(Qr_2)$  величиной  $Qr_2$ .

Бальтц и Кахана [66] предложили другой способ использования теории возмущений, когда в ряд Тейлора разлагается только искаженная волна конечной частицы вокруг точки  $\mathbf{r}_y = \mathbf{r}_x$ . Тогда

$$\mathbf{r}_y = \frac{A}{B} \mathbf{r}_x - \frac{cM}{xB} \mathbf{r}_2,$$

и искаженная волна, если оператор трансляции вновь рассматривается в квазиклассическом приближении, принимает вид

$$\chi^{(-)}(\mathbf{k}_y \mathbf{r}_y) = \left(1 - i \frac{cM}{xB} \mathbf{r}_2 \mathbf{k}_y\right) \chi^{(-)}\left(\mathbf{k}_y \frac{A}{B} \mathbf{r}_x\right). \quad (64)$$

Первый член этого разложения дает такой же кинематический множитель, как и в приближении без отдачи, второй — поправки первого порядка, аналогичные рассмотренным выше. Однако влияние членов второго порядка в разложении (64) может оказаться более существенным, чем в разложениях (62) и (62а), поскольку массовый коэффициент  $cM/(xB)$  значительно больше, чем коэффициенты  $c/x$ ,  $c/B$ .

*Приближение локального импульса (ПЛИ).* Рассмотрим еще одно приближение, в котором не используется теория возмущений для модулирующего множителя искаженной волны, но предполагается, что взаимодействие частиц происходит на поверхности ядра. В этом случае можно считать, что для каждого  $\mathbf{r}$  в небольшой окрестности  $\mathbf{r}_3$  функцию  $\chi(\mathbf{kr})$  можно представить в приближенной форме:

$$\chi(\mathbf{kr}) \approx A(\mathbf{r}) \exp\{i\mathbf{q}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}\},$$

причем в отличие от эйконального приближения фаза искаженной волны может меняться в зависимости от  $\mathbf{r}$ . Тогда выражение (61) принимает вид:

$$\chi^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x) = \exp\left[i \frac{c}{x} \mathbf{r}_2 \mathbf{q}_x(\mathbf{r}_3)\right] \chi^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_3); \quad (65)$$

$$\chi^{(-)}(\mathbf{k}_y \mathbf{r}_y) = \exp\left[-i \frac{c}{B} \mathbf{r}_2 \mathbf{q}_y(\mathbf{r}_3)\right] \chi^{(-)}\left(\mathbf{k}_y \frac{A}{B} \mathbf{r}_3\right). \quad (65а)$$

Величины  $\mathbf{q}_x(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{q}_y(\mathbf{r})$  носят название *локальных импульсов*. Такая приближенная факторизация искаженных волн составляет сущность приближения локального импульса (ПЛИ) [58]. Когда такое приближение оказывается справедливым? Для качественных оценок разложим в ряд потенциал оптической модели в окрестности точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_3$ :

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_3) + \mathbf{x} \nabla U(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_3} + \dots$$

Для того чтобы функции (65) и (65а) являлись решениями уравнения Шредингера с потенциалом, содержащим только первый член



этого разложения, необходимо выполнение следующих условий:

$$|q(\mathbf{r})| \approx (2m/\hbar^2) \sqrt{E - U(\mathbf{r}_3)}; \quad (66)$$

$$|x| \ll [E - U(\mathbf{r}_3)] / |\nabla U|. \quad (66a)$$

Другими словами, для использования ПЛИ необходимо, чтобы локальные импульсы имели порядок квазиклассических волновых чисел в точке поворота и, кроме того, область локализации взаимодействия частиц должны быть много меньше обратного относительного градиента потенциала. Если реакция осуществляется на поверхности ядра, как в реакциях с сильно поглощающимися частицами, то относительные градиенты оптических потенциалов невелики, и, как показано в [58], их обратные значения достигают значений  $\sim 40$  ферми. При этом локальные импульсы можно положить равными  $q(R)$ , где  $R$  — радиус ядра. Условие (66) определяет абсолютное значение  $q$ , а не его направление, поэтому в ПЛИ сечение не должно зависеть от направления локальных импульсов. Согласно [67], ПЛИ наиболее хорошо выполняется для квазиклассических частиц с определенной траекторией движения.

Используя выражения (65) и (65а), нетрудно показать, что в ПЛИ кинематический множитель, так же как и в ПДГ, определяется выражением (56). Отличие от ПДГ заключается, во-первых, в том, что интеграл (57) в ПЛИ имеет несколько другой вид

$$\begin{aligned} G_{l_1}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y) = & \int \chi^{(-)*} \left( \mathbf{k}_y \frac{A}{B} \mathbf{r}_3 \right) h_{l_1}^{(1)*} (i\kappa_{c_1} r_3) \times \\ & \times Y_{l_1 m_1}^*(\mathbf{r}_3) \chi^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_3, \end{aligned} \quad (67)$$

где искаженные волны являются решениями уравнения Шредингера, а не модельными функциями, как в ПДГ. Во-вторых, в ПЛИ импульс отдачи  $Q$  определяется выражением

$$Q = (c/x) \mathbf{q}_x + (c/B) \mathbf{q}_y, \quad (68)$$

и в отличие от ПДГ не имеет определенного направления.

*Приближение больших переданных импульсов (ПБПИ)* [109]. Наконец, рассмотрим еще один вариант приближенной факторизации искаженных волн, так же как и ПЛИ, не связанный с использованием теории возмущений. В этом варианте предполагается, что импульс, переданный в процессе соударения налетающей частицы с ядром-мишенью, значительно превышает импульс относительного движения в соударяющихся ядрах. Это предположение позволяет при действии оператора трансляции в (61) пренебречь градиентом искаженной волны по координате  $\mathbf{r}_2$ , в результате чего искаженные волны в ПБПИ можно представить в виде

(ср. с выражениями (54) и (65)):

$$\chi^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x) = \exp \{i(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_x - \mathbf{k}_{0x} \mathbf{r}_3)\} \chi^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_3); \quad (69)$$

$$\chi^{(-)}(\mathbf{k}_y \mathbf{r}_y) = \exp \left\{ i \left( \mathbf{k}_y \mathbf{r}_y - \mathbf{k}_{0y} \frac{A}{B} \mathbf{r}_3 \right) \right\} \chi^{(-)} \left( \mathbf{k}_y \frac{A}{B} \mathbf{r}_3 \right). \quad (69a)$$

В этих выражениях импульсы  $\mathbf{k}_{0x}$  и  $\mathbf{k}_{0y}$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{k}_{0x} = \frac{yM}{x(A+y)} \mathbf{k}_x; \quad \mathbf{k}_{0y} = \frac{AM}{(A+y)B} \mathbf{k}_y.$$

Формально факторизация (69) для искаженной волны не требует предположения о малости массы передаваемой частицы по сравнению с массой тяжелого иона. Тем не менее, это предположение фактически используется в ПБПИ, поскольку для малых отношений  $(c/x)$ ,  $(c/A)$  наилучшим образом выполняется само приближение передачи больших импульсов, т. е. можно пренебречь градиентом искаженной волны по координате  $\mathbf{r}_2$ .

Ясно, что ПБПИ, так же как и ПЛИ, наиболее оправдано при больших энергиях падающих частиц. Однако в ПБПИ ограничения на энергию являются более жесткими. Действительно, если мы рассматриваем реакции однонуклонной передачи с тяжелыми ионами, то импульс  $\mathbf{k}_{0x}$  ( $\mathbf{k}_{0y}$ ) близок к  $\mathbf{k}_x$  ( $\mathbf{k}_y$ ), и факторизация (69) искаженной волны в ПБПИ сводится к факторизации (65) в ПЛИ, если квазиклассический импульс на границе ядра совпадает с импульсом  $\mathbf{k}_x$  ( $\mathbf{k}_y$ ). Чтобы обеспечить такое совпадение, энергия падающих частиц, согласно (66), должна удовлетворять условию:

$$E \gg |U_i(\mathbf{r}_3)|,$$

или, как показано в [109],

$$E/A \gg 10 \text{ МэВ/нуклон.}$$

При заданной энергии иона это условие, очевидно, накладывает ограничение сверху на массу иона. Таким образом, ПБПИ наиболее оправдано в реакциях однонуклонной передачи с относительно легкими ионами ( $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ) больших энергий (несколько сотен МэВ).

Довольно жесткие ограничения на энергию и массу ионов в ПБПИ ставят под сомнение законность использования приближения Баттля — Гольдфарба. Поэтому кинематический множитель в ПБПИ определяется не формулой (56), а более общим выражением:

$$\begin{aligned} \beta_{lm_l}^{\text{пбпи}} = \sum_{\mu_1, \mu_2} (-1)^{\Lambda_1 + \Lambda_2 - \mu_2} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \langle \Lambda_1 - \mu_1 \Lambda_2 \mu_2 | lm_l \rangle \times \quad (70) \\ \times \int \mathbf{G}_{\Lambda_1 \mu_1}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \mathbf{r}_2) \exp(i\mathbf{Q}\mathbf{r}_2) \mathbf{V}(\mathbf{r}_2) \Psi_{\Lambda_2 \mu_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_{\Lambda_1 \mu_1}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \mathbf{r}_2) = & \int \chi^{(-)*} \left( \mathbf{k}_y \frac{A}{B} \mathbf{r}_3 \right) \times \\ & \times \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_3) \Psi_{\Lambda_1 \mu_1}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \chi^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (70a)$$

В (70), (70a) переданный импульс  $Q$  (импульс отдачи) определяется также, как и в ПДГ (см. формулу (60)), а импульс  $\mathbf{q}$  в ПБПИ не совпадает с соответствующим импульсом в ПДГ и ПЛИ и задается выражением:

$$\mathbf{q} = \frac{cA}{x(A+y)} \left( \mathbf{k}_x - \frac{xy}{B^2} \mathbf{k}_y \right).$$

Как непосредственно следует из (70), (70a), кинематический множитель в ПБПИ определяется четырехкратным интегралом. Для уменьшения кратности интегрирования в ПБПИ используется квазиклассический подход, позволяющий оценить интеграл (70a) аналитически. Рассмотрим этот подход несколько подробнее.

Кинематический множитель (70) можно записать в импульсном представлении в виде:

$$\begin{aligned} \beta_{lm_l}^{\text{ПБПИ}} = & \sum_{\mu_1 \mu_2} (-1)^{\Lambda_1 + \Lambda_2 - \mu_2} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \langle \Lambda_1 - \mu_1 \Lambda_2 - \mu_2 | lm_l \rangle \times \\ & \times \int \Psi_{\Lambda_1 \mu_1}^*(\tilde{\mathbf{q}}) S(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) \xi_{\Lambda_2 \mu_2}(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) d\tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (71)$$

где

$$\xi_{\Lambda_2 \mu_2}(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) = 1/(2\pi)^{3/2} \int \mathbf{V}(\mathbf{r}_2) \Psi_{\Lambda_2 \mu_2}(\mathbf{r}_2) \exp[i(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{Q})\mathbf{r}_2] d\mathbf{r}_2,$$

а множитель  $S(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q})$ , зависящий только от динамики сталкивающихся частиц, определяется следующим выражением:

$$S(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) = \int \exp[i(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q})\mathbf{r}] |\chi^{(-)*} \left( \mathbf{k}_y \frac{A}{B} \mathbf{r} \right) \chi^{(+)}(\mathbf{k}_x \mathbf{r})| d\mathbf{r}. \quad (72)$$

В квазиклассическом приближении он может быть выражен через фазы упругого рассеяния во входном и в выходном каналах [110]:

$$\begin{aligned} S(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) = & \frac{2\pi^2}{k_0 Q} \delta\{(\tilde{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}})\mathbf{k}\} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) \times \\ & \times \exp(2i\delta_L) P_L(1 - |\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2/2k_0^2), \end{aligned} \quad (72a)$$

где

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_x + \mathbf{k}_y); \quad \mathbf{k}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_{0x} + \mathbf{k}_{0y});$$

$$\delta_L = \frac{1}{2}(\delta_{Lx} + \delta_{Ly}).$$

$\delta$  — функция, стоящая в выражении (72а), определяет направление импульса  $\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}$  (он должен быть параллелен полусумме импульсов падающего и вылетающего ионов). Такая аппроксимация множителя (72) справедлива, только если [109]:

$$|(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q})/Q| \left| 1 - \frac{k_0}{Q} \cos \frac{\theta}{2} \right| \ll \frac{\pi}{L_0},$$

где  $kL_0 \sim R$  соответствует границе ядра. Это условие ограничивает область применимости ПБПИ не только высокими энергиями (большие значения  $k_0$  и  $Q$ ), но и малыми углами вылета конечных частиц.

Из выражения (59) легко видеть, что переход к приближению без отдачи в ПДГ, в ПЛИ и в ПБПИ соответствует импульсу отдачи  $Q$ , равному нулю. При этом  $L = 0$ ,  $l_1 = l$ , и кинематический множитель (56) можно преобразовать к виду (30), причем соответствующие интегралы определяются выражением (51).

Даже приближенный учет эффектов отдачи приводит к сглаживанию угловых распределений в реакциях со сложными частицами по сравнению с теми, которые вычислены в приближении «без отдачи». Это обстоятельство, прежде всего, связано с тем, что эффекты отдачи позволяют получить правила отбора по переданному моменту, не ограниченные условием нормальной четности (частицы  $s$ ,  $y$ ,  $A$  могут находиться не на одной прямой). Кроме того, сглаживание углового распределения связано с наличием фактора отдачи (59) в кинематическом множителе (56). Если импульс отдачи (60), (68) таков, что имеет порядок области локализации функции  $\Psi_{\Lambda_2}(x_{c_2}, r_2)$ , интерференция различных членов в сумме (58) может существенно сгладить множители  $\Gamma_{\Lambda_1 \Lambda_1}(l_1, L)$ , это и приводит к общему сглаживанию углового распределения [63].

Следует подчеркнуть, что учет эффектов отдачи с необходимостью требует использования потенциала  $V(r_2)$  только с конечным радиусом взаимодействия. Действительно, если ввести потенциал нулевого радиуса взаимодействия, то интеграл (59) обращается в единицу и эффекты сглаживания углового распределения (в том числе и за счет переходов с «ненормальной» четностью) будут потеряны.

#### 4. ТОЧНЫЙ УЧЕТ ЭФФЕКТОВ ОТДАЧИ

В последовательных вариантах МИВОКОР, точно учитывающих отдачу, необходимо решать задачу разделения переменных или в искаженных волнах, если в качестве базисных координат выбраны координаты Якоби  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , или в волновых функциях относительного движения и потенциалах взаимодействия, если базисными считаются координаты  $\mathbf{r}_x$  и  $\mathbf{r}_y$ . И в том, и в другом слу-

чае нельзя аналитически разделить переменные не только в искаженных волнах, но и волновых функциях  $\Psi_{\Lambda_1\mu_1}(\kappa_{c_1}r_1)$  и  $\Psi_{\Lambda_2\mu_2}(\kappa_{c_2}r_2)$ . Последнее обстоятельство связано с тем, что при корректном учете эффектов отдачи нельзя полностью пренебрегать внутренней областью ядра, т. е. нельзя использовать приближение Баттля — Гольдфарба [57] для аппроксимации волновых функций относительного движения частиц. Во многих вариантах МИВОКОР эти функции находят численным решением уравнения Шредингера с полной энергией, равной энергии связи частиц (для решения уравнения, кроме энергии связи, необходимо задать параметры оптического потенциала взаимодействия соответствующих частиц и число узлов искомой волновой функции). Если рассматриваются реакции с легкими частицами ( $d, t, \alpha, {}^3\text{He}, {}^6\text{Li}$ ), то волновую функцию относительного движения частиц можно записать в аналитическом виде, аналогичном функции Хюльгена. Наконец, для волновых функций относительного движения можно использовать функции гармонического осциллятора, спитые с функциями Ханкеля. Любой из этих способов определения радиальной волновой функции относительного движения не позволяет аналитически разделить ее переменные. Поэтому в точных вариантах МИВОКОР уменьшение кратности кинематического интеграла можно достигнуть только за счет интегрирования по угловым переменным. При этом увеличивается число сумм в сечении (32) и появляются дополнительные однократные интегралы (37a) и (42).

После этих предварительных замечаний перейдем к анализу конкретных методов точного учета эффектов отдачи в МИВОКОР. Рассмотрим два из них: разделение переменных в волновых функциях относительного движения частиц и потенциалах взаимодействия и разделение переменных в искаженных волнах.

**Разделение переменных в волновых функциях относительного движения частиц.** В этом варианте МИВОКОР в качестве базисных координат задачи трех тел (см. рис. 5) выбираются координаты  $r_x$  и  $r_y$ . Поскольку при вычислении интегралов перекрытия в задаче трех тел инвариантный форм-фактор (27) зависит от координат Якоби  $r_1$  и  $r_2$ , при переходе к координатам  $r_x$  и  $r_y$  необходимо ввести якобиан  $J_0$ , связывающий элементы объема для этих наборов координат. Координаты  $r_1, r_2$  определяются через  $r_x, r_y$  следующими соотношениями (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} r_1 &= (\alpha(r_x - \gamma r_y)); & \alpha &= xB/cM; \\ r_2 &= \alpha(\delta r_x - r_y); & \gamma &= y/x; \\ r_3 &= \frac{1}{M}(x r_x + B r_y); & \delta &= A/B; \quad M \equiv A + x \equiv B + y \end{aligned}$$

(еще раз укажем, что для обменных процессов аналогичные соотношения между координатами можно получить, заменяя  $A \rightleftharpoons x$  и угол  $\theta$  на  $\pi - \theta$ ). В результате якобиан  $J_0$  для перехода к координатам  $r_x, r_y$  имеет вид

$$J_0^{\text{пр. пр}} = \alpha^3 \equiv \left( \frac{xB}{cM} \right)^3; \quad J_0^{06. \text{ пр}} = \left( \frac{AB}{cM} \right)^3.$$

Для разделения переменных в волновых функциях  $\Psi_{\Lambda_1 \mu_1}(\kappa_{c_1}, r_1)$  и  $\Psi_{\Lambda_2 \mu_2}(\kappa_{c_2}, r_2)$  и потенциалах взаимодействия  $V(r_2) \{V(r_3)\}$  введем величины  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$  с помощью следующих соотношений [см. формулу (42)]:

$$g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}^{\text{cp}}(r_x, r_y) = \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{r_1^{\Lambda_1} r_2^{\Lambda_2}} \Psi_{\Lambda_1}^*(\kappa_{c_1}, r_1) V(r_2) \Psi_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, r_2) P_K(\mu); \quad (73)$$

$$g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}^{\text{т. зам}}(r_x, r_y) = \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu^1}{r_1^{\Lambda_1} r_2^{\Lambda_2}} \Psi_{\Lambda_1}^*(\kappa_{c_1}, r_1) V(r_3) \Psi_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, r_2) P_K(\mu). \quad (74)$$

Тогда, используя разложение (43), для инвариантного форм-фактора (27) можно получить [2, 43, 69, 70]:

$$\begin{aligned} & F_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}^{J_c E_c}(r_x, r_y) = \\ & = \frac{1}{2} \alpha^{\Lambda_1 + \Lambda_2} r_x^{\Lambda_1} (-r_y)^{\Lambda_2} (2\Lambda_1 + 1)(2\Lambda_2 + 1) \times \\ & \times \sum_K (-1)^K (2K + 1) \{g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}^{\text{cp}}(r_x, r_y) + g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}^{\text{т. зам}}(r_x, r_y)\} \times \\ & \times \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (r_x)^{-\lambda_1} (\delta r_x)^{\lambda_2} (-r_y)^{-\lambda_2} (-\gamma r_y)^{\lambda_1} \times \\ & \times \left( \frac{2\Lambda_1}{2\lambda_1} \right)^{1/2} \left( \frac{2\Lambda_2}{2\lambda_2} \right)^{1/2} \times \\ & \times \sum_{l_1 l_2} \sqrt{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)} \langle \Lambda_1 - \lambda_1 0 \lambda_2 0 | l_1 0 \rangle \times \\ & \times \langle l_1 0 K 0 | L_x 0 \rangle \langle \lambda_1 0 \Lambda_2 - \lambda_2 0 | l_2 0 \rangle \times \\ & \times \langle l_2 0 K 0 | L_y 0 \rangle W(l_2 L_y l_1 L_x : K l) \times \\ & \times \begin{Bmatrix} \Lambda_1 - \lambda_1 & \lambda_1 & \Lambda_1 \\ \lambda_2 & \Lambda_2 - \lambda_2 & \Lambda_2 \\ l_1 & l_2 & l \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (75)$$

Выражение (75) вместе с (31) полностью решает задачу вычисления кинематического множителя (30) при точном учете эффектов отдачи. Видно, что в этом случае кинематический множитель содержит суммы интегралов (31), дополнительные однократные интегралы (73), (74) и пять дополнительных сумм (по  $K$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ). Правила отбора в (75) требуют четности суммы  $\Lambda_1 + \Lambda_2 + L_x + L_y$ , но значения переданного момента  $l$  не ограничиваются по четности.

Число членов в суммах по  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в форм-факторе (75) ограничено сверху значениями моментов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ . Что касается числа существенных членов в сумме по  $K$ , то оно зависит от того, насколько быстро убывают с ростом  $K$  величины  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$ , определяемые интегралами (73) и (74). Поскольку для механизма срыва  $r_2$  не очень велико, а для механизма тяжелого замещения  $r_3$  имеет порядок радиуса ядра, интегралы (73), (74) имеют заметную величину только внутри сравнительно узкой дорожки вдоль прямой  $r_y = (A/B) r_x$ , которая соответствует ПНР. При малых  $r_x$  и  $r_y$  (меньших характерного радиуса взаимодействия  $r_0$ ) зависимость величин  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$  от  $K$  достаточно сильная: они являются осциллирующими функциями  $K$  (причем период осцилляций увеличивается с ростом  $r_x, r_y$ ) и быстро спадают с увеличением  $K$ . При больших значениях  $r_x, r_y$  ( $\geq r_0$ ) интегралы  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$  резко уменьшаются, а их зависимость от  $K$  практически исчезает. На рис. 6 изображены действительные части  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$  при  $r_x = r_y$ , т. е. вблизи прямой  $r_y = (A/B) r_x$  для реакции  $^{11}\text{B}(\alpha, t)^{12}\text{C}$  при  $E_\alpha = 25$  МэВ. Видно, что уже при  $r_x = r_y = 5$  ферми для всех  $K$  от нуля до тридцати интегралы  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$  практически являются константами и меньше соответствующих значений при малых радиусах более чем на четыре порядка. Таким образом, в сумме (75) можно ограничиться максимальным значением  $K_{\text{макс}}$ , при котором  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$  достаточно малы и практически не зависят от  $K$ . При выбранном  $K_{\text{макс}}$  правила отбора ограничивают число членов в суммах по  $L_x$  и  $L_y$ .

При больших значениях  $r_x$  и  $r_y$  подынтегральные функции в выражениях (73), (74) имеют вид острых функций с максимумом в точке  $\mu = 1$ . Это, с одной стороны, объясняет, почему в этой области значений  $r_x$  и  $r_y$  интегралы  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$  не зависят от  $K$ , а, с другой стороны, позволяет выбрать нижний предел интегрирования  $\mu_{\text{мин}}$ , близкий к единице, что существенно сокращает необходимое для счета время. Степень этой близости зависит от узости дорожки, т. е. от малости величины  $[cM/(xB)] r_2$ . На рис. 7 показана зависимость  $\mu_{\text{мин}}$  для интегралов (73) для реакции  $^{11}\text{B}(\alpha, t)^{12}\text{C}$  при  $E_\alpha = 25$  МэВ от  $r_x = r_y$ . Уже при  $r_x = r_y > 3,5$  ферми область интегрирования  $1 - \mu_{\text{мин}}$  можно выбрать меньше 0,1. В реакциях однонуклонной передачи с тяжелыми ионами эта зависимость еще более резкая, и  $1 - \mu_{\text{мин}} < 0,01$  [70] в большой области  $r_x$  и  $r_y$ .

Как уже указывалось в разд. 2, форм-фактор (27), а следовательно, и (75), значительно упрощается, если падающая частица  $x$  не тяжелее  $\alpha$ -частицы. В этом случае  $\Lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda_1 = l$ , и в (75)

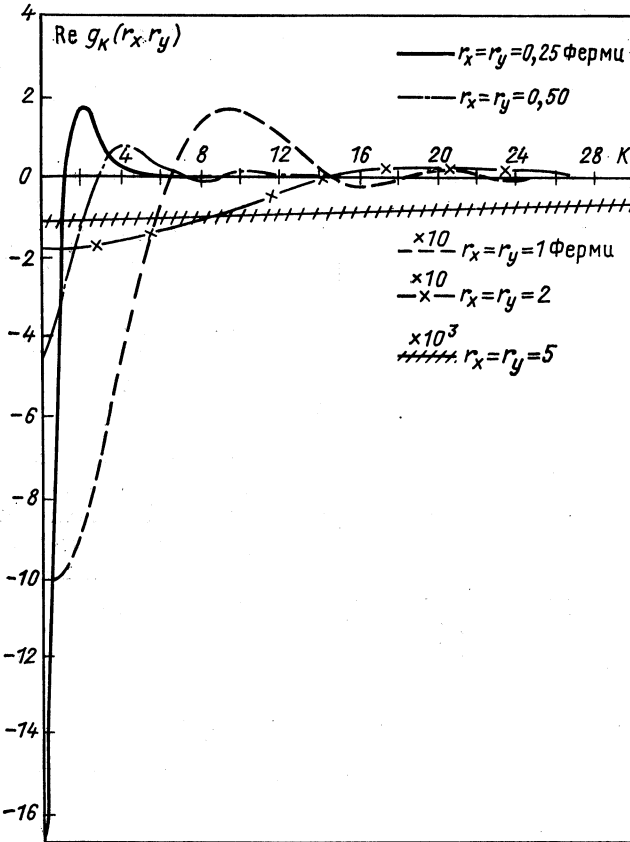


Рис. 6. Зависимость действительной части  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$  для реакции  $^{14}\text{B}(\alpha, t)^{12}\text{C}$  при  $E_\alpha = 25$  МэВ ( $r_x = r_y$ ,  $\Lambda_1 = 1$ ,  $\Lambda_2 = 0$ ) от  $K$

пропадает суммирование по  $\Lambda_2$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ . В результате инвариантный форм-фактор (27) для прямых процессов в реакциях с  $\alpha$ -частицами имеет вид

$$F_{L_x L_y l}(r_x, r_y) = \frac{1}{2} \sqrt{2l+1} \sum_K \alpha^l r_x^l (-1)^K (2K+1) \times \\ \times \{g_K^{\text{сп}}(r_x, r_y) + g_K^{\text{Т. аам}}(r_x, r_y)\} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \sum_{\lambda} \left( \frac{2l}{2\lambda} \right)^{1/2} \left( -\frac{\gamma r_y}{r_x} \right)^{\lambda} \langle \lambda 0 K | L_x 0 \rangle \times \\ & \times \langle l - \lambda 0 K | L_y 0 \rangle W(L_x \lambda L_y l - \lambda : K l). \end{aligned} \quad (76)$$

Из этого выражения следует, что для реакций с  $\alpha$ -частицами правила отбора ограничивают переданные моменты  $l$  условием нормальной четности, даже если используется конечный радиус взаимодействия.

Наконец, рассмотрим переход от форм-факторов (75), (76) к форм-фактору (45) в ПНР. В этом случае  $\mu = 1$  и  $P_K(\mu) = 1$  независимо от значения  $K$ . В результате интеграл (73) также не зависит от  $K$  и принимает вид

$$\begin{aligned} g_K^{\text{ПНР}}(r_x, r_y) &= (1/r_3^l) \Psi_l(\chi_{c1}, r_3) \\ N^{\text{ПНР}} &(\delta(r_2)/r_2^2) \delta_{\Lambda_2 0}. \end{aligned} \quad (77)$$

Тогда суммы по  $K$  и  $\lambda$  в выражении (76) можно легко вычислить аналитически с помощью известных соотношений [72]. В результате форм-фактор (76) преобразуется к виду (45).

Таким образом, разделение переменных в волновых функциях относительного движения и в потенциале взаимодействия

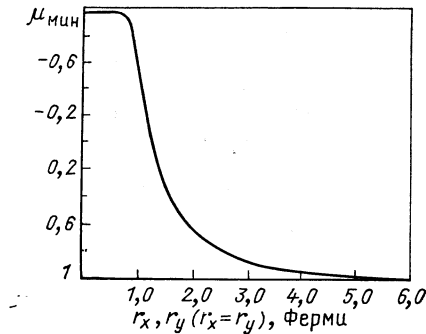


Рис. 7. Зависимость нижнего предела интегрирования ( $\mu_{\text{мин}}$ ) по  $\mu$  от  $r_x = r_y$  в реакции  $^{11}\text{B}(\alpha, t)^{12}\text{C}$  при  $E_{\alpha} = 25 \text{ МэВ}$

позволяет аналитически вычислить интегралы по угловым переменным через известные алгебраические множители и одномерные интегралы  $g_K(r_x, r_y)$ . Хотя число дополнительных суммирований при таком способе вычисления кинематического множителя оказывается значительным, фактически число членов в суммах является разумным (оно ограничено правилами отбора и областью локализации взаимодействия частиц). В этом варианте МИВОКОР и прямые, и обменные процессы рассматриваются симметрично, поскольку не вводятся дополнительных ограничений на массы частиц.

**Разделение переменных в искаженных волнах.** В методе точного учета эффектов отдачи, рассмотренном выше, радиальный интеграл (31) остается двумерным. Разделение переменных в искаженных волнах может привести к уменьшению кратности интегрирования.

Если в парциальных волнах начальной и конечной частиц выразить  $r_x$  и  $r_y$  через  $r_1$  и  $r_2$  по формулам (44), а затем провести раз-

деление переменных  $r_1, r_2$  с помощью матриц (37а), то радиальный интеграл (31) для механизма срыва принимает вид

$$\begin{aligned}
 & I_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l} = \\
 & = \frac{4}{\pi^3} \sum_{l_1 l_2 l'_1 l'_2} i^{l_1+l_2-(l'_1+l'_2)+L_x-L_y} \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & L_x \\ l'_1 & l'_2 & L_y \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & l \end{matrix} \right\} \times \\
 & \quad \times (2l_1+1)(2l_2+1)(2l'_1+1)(2l'_2+1) \times \\
 & \quad \times \langle l_1 0 l_2 0 | L_x 0 \rangle \langle l'_1 0 l'_2 0 | L_y 0 \rangle \times \\
 & \quad \times \int A_{l'_1 l'_2}^{*L_y} \left( \frac{A}{B} r_1, -r_2 \right) \Psi_{\Lambda_1}^*(\kappa_{c_1}, r_1) V(r_2) \times \\
 & \quad \times \Psi_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, r_2) A_{l_1 l_2}^{L_x} \left( r_1, -\frac{y}{x} r_1 \right) r_1 dr_1 r_2 dr_2. \tag{78}
 \end{aligned}$$

Для вычисления этого интеграла Мак-Махан и Тобокман [73] использовали разложение интегралов (37б) по собственным функциям обобщенного гармонического осциллятора [48] и получили, что интеграл (78) можно привести к виду, содержащему бесконечные суммы произведений четырех одномерных интегралов. Однако число дополнительных сумм при таком разделении переменных оказывается равным пятнадцати. Но самым существенным недостатком этого метода является то, что число членов в суммах не может быть обрезано сверху из каких-либо физических соображений, и сходимость соответствующих рядов проверяется только численно. Для улучшения сходимости в [73] используется метод [74], в котором функции  $\Psi_{\Lambda_1}(\kappa_{c_1}, r_1)$  и  $\Psi_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, r_2)$  разлагаются в ряды по собственным функциям гармонического осциллятора. При этом может произойти некоторое уменьшение сумм за счет ортогональности коэффициентов различных разложений (если эта ортогональность будет иметь место). Но фактически использование такого способа разделения переменных в искаженных волнах, несмотря на уменьшение кратности интегрирования, связано с большими вычислительными трудностями.

Менее трудоемкий способ разделения переменных в искаженных волнах предложен Чарлтоном [75]. В этом методе парциальные искаженные волны разлагаются в ряд по функциям Бесселя (разложение искаженной волны по плоским волнам), но в отличие от приближенных методов, рассмотренных в разд. 3, в разложении учитывается значительное количество членов:

$$\chi_L^{(\pm)}(kr) = \frac{kr}{4\pi} \sum_{n=1}^{N(L)} \mathcal{D}_{nL}^{(\pm)} j_L(k_n r). \tag{79}$$

Коэффициенты  $\mathcal{A}_{nL}^{(\pm)}$  выражаются обычным образом

$$\mathcal{A}_{nL}^{(\pm)} = \sum_{n'=1}^{N(L)} N_{nn'}^L b_{n'L}^{(\pm)} \quad (80)$$

через интегралы перекрытия  $b_{n'L}^{(\pm)}$ , определяемые выражением

$$b_{nL}^{(\pm)} = \frac{4\pi}{k} \int_0^{R_{\text{макс}}} r dr \chi_L^{(\pm)}(kr) j_L(k_n r), \quad (80a)$$

и нормирующую матрицу

$$(N_{nn'}^L)^{-1} = \int_0^{R_{\text{макс}}} r^2 dr j_L(k_n r) j_L(k_{n'} r). \quad (80b)$$

Величины  $k_n$  должны выбираться так, чтобы функции  $j_L(k_n r)$  образовывали ортонормированную систему. Корректность этого метода разложения обсуждается в работе [76], где, в частности, рассматриваются ограничения, накладываемые на величины  $k_n$ .

При использовании (79) и (38) интеграл (31) принимает вид:

$$\begin{aligned} I_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l} &= \frac{k_x k_y}{(4\pi)^2} \times \\ &\times \frac{1}{2} \sum_{n_x n_x' n_y n_y'}^{N_x(L_x) N_y(L_y)} N_{n_x n_x'}^{L_x} N_{n_y n_y'}^{L_y} \times \\ &\times b_{n_y L_y}^{(-)} b_{n_x L_x}^{(+)} (k_{n_y})^{\Lambda_1} (k_{n_x})^{\Lambda_2} (2\Lambda_1 + 1) (2\Lambda_2 + 1) \times \\ &\times \sum_K (-1)^K (2K + 1) g_{K\Lambda_1 \Lambda_2}(k_{n_x}, k_{n_y}) \times \\ &\times \sum_{\lambda_1, \lambda_2} (2\Lambda_1)^{1/2} (2\Lambda_2)^{1/2} \left(-\frac{A}{B} \frac{k_{n_y}}{k_{n_x}}\right)^{\lambda_1} \left(-\frac{y}{x} \frac{k_{n_x}}{k_{n_y}}\right)^{\lambda_2} \times \\ &\times \sum_{l_1, l_2} \sqrt{(2l_1 + 1)(2l + 1)} W(L_x l_1 L_y l_2 : Kl) \times \\ &\times \langle \Lambda_1 - \lambda_1 0 \lambda_2 0 | l_1 0 \rangle \langle l_1 0 K 0 | L_x 0 \rangle \left\{ \begin{array}{ccc} \Lambda_1 - \lambda_1 & \lambda_1 & \Lambda_1 \\ \lambda_2 & \Lambda_2 - \lambda_2 & \Lambda_2 \\ l_1 & l_2 & l \end{array} \right\}, \quad (81) \\ &\times \langle \lambda_1 0 \Lambda_2 - \lambda_2 0 | l_2 0 \rangle \langle l_2 0 K 0 | L_y 0 \rangle \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 g_{K\Lambda_1\Lambda_2}(k_{nx}, k_{ny}) &= \\
 &= \int_{-1}^{+1} F_{\Lambda_1}^*(\kappa_{c_1}, q_1) F_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, q_2) P_K(\mu) d\mu; \\
 \mathbf{q}_1 &= -\frac{A}{B} \mathbf{k}_{ny} + \mathbf{k}_{nx}; \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_{ny} - \frac{y}{x} \mathbf{k}_{nx};
 \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

$$F_{\Lambda_1}^*(\kappa_{c_1}, q_1) = q_1^{-\Lambda_1} \int \Psi_{\Lambda_1}^*(\kappa_{c_1}, r_1) j_{\Lambda_1}(q_1 r_1) r_1^2 dr_1; \quad (83)$$

$$F_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, q_2) = q_2^{-\Lambda_2} \int \Psi_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, r_2) j_{\Lambda_2}(q_2 r_2) r_2^2 dr_2. \quad (84)$$

Таким образом, если искаженные волны разлагаются в ряд по плоским волнам, интегрирование по угловым переменным проводится достаточно просто — интеграл (31) содержит произведение трех одномерных интегралов, а число дополнительных сумм равно девяти, т. е. на четыре больше, чем в методах, связанных с разделением переменных в волновых функциях и потенциалах взаимодействия. Этот метод более экономичен, чем другие способы вычисления интегралов в МИВОКОР, если ряд (79) включает в себя относительно небольшое число членов ( $N (L) \leq 15-20$ ). Разложение (79) наиболее оправдано в реакциях с легкими частицами при не очень больших энергиях. В реакциях с сильно поглощающимися частицами в разложении (79) нужно учитывать большое число членов, и весь выигрыш данного подхода пропадает.

Наконец, отметим, что в [49] предлагается способ вычисления кинематического множителя (30) с помощью разделения переменных в искаженной волне конечной частицы и в волновой функции  $\Psi_{\Lambda_1}^*(\kappa_{c_1}, r_1)$ , когда в качестве базисных координат используются координаты  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_x$ . В этом случае интеграл (31) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 &I_{\Lambda_1\Lambda_2L_xL_y} = \\
 &= \frac{4}{\pi^3} \sum_{l_1 l_2 l'_1 l'_2 \mathcal{L}} i^{l_1+l_2+l'_1+l'_2-\Lambda_1-L_y} \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & \Lambda_1 \\ l'_1 & l'_2 & L_y \\ L_x & \Lambda_2 & \mathcal{L} \end{matrix} \right\} \times \\
 &\quad \times u(\Lambda_1\Lambda_2L_yL_x : l\mathcal{L}) \frac{1}{\sqrt{2L_y+1}} \times \\
 &\quad \times \int r_2^2 dr_2 r_x dr_x A_{l'_1 l'_2}^{*L_y} \left( \frac{1}{\alpha} r_2, \frac{A}{B} r_x \right) \times \\
 &\quad \times A_{l_1 l_2}^{*\Lambda_1} \left( \frac{y}{x} r_2, r_x \right) V(r_2) \Psi_{\Lambda_2}(\kappa_{c_2}, r_2) \chi_{L_x}(k_x r_x).
 \end{aligned}$$

Однако не ясно, дает ли этот способ разделения переменных выигрыш по сравнению с предыдущим, так как матрицы  $A$  здесь получаются численно, поскольку интегралы (376) определяются через  $\Gamma$ -функции.

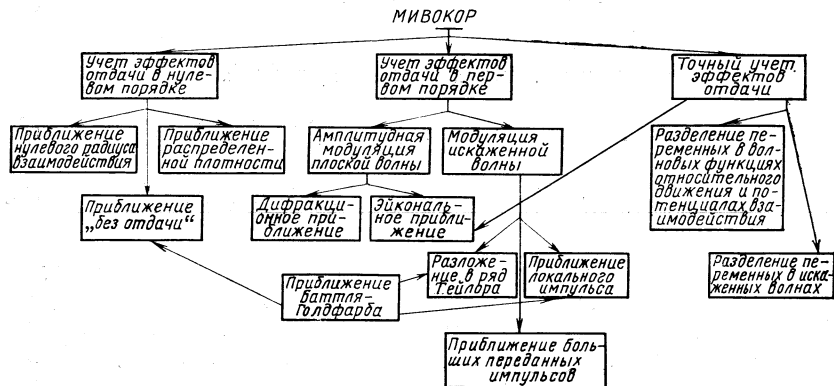


Рис. 8. Структурная схема основных вариантов (приближенных и точных) учета эффектов отдачи в МИВОКОР

В заключение этого раздела на рис. 8 изображена структурная схема различных вариантов МИВОКОР от самых грубых до наиболее последовательных, рассмотренных в разд. 3 и 4.

## 5. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОНКРЕТНЫХ ПРОГРАММ МИВОКОР И АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Рассмотрим здесь наиболее известные конкретные программы МИВОКОР, начиная с самых простых, использующих приближение нулевого радиуса взаимодействия. Не будем подробно разбирать схему построения каждой программы и ее математические алгоритмы, отсылая интересующихся к соответствующим описаниям. Отметим только те особенности той или иной программы, которые связаны с физическими аспектами соответствующей задачи. Все рассматриваемые ниже программы написаны на языке ФОРТРАН и в этом смысле универсальны.

**Программы, приближенно учитывающие эффекты отдачи для механизма срыва.** Программы для приближения нулевого радиуса. Наиболее распространенной является программа DWUCK, написанная Кунцем [77]. В СССР также используется программа Гриднева с сотр. [78]. Общая структура этих программ практически одинакова: парциальные искаженные волны находятся реше-

нием уравнения Шредингера методом Фокса — Гудвина [79], волновая функция  $\Psi_l(\kappa_c, r)$  захватываемой частицы определяется решением уравнения Шредингера с заданной полной энергией, равной энергии связи частицы  $c$  в ядре  $B$ , и с нужным числом узлов. Поэтому угловые распределения, получаемые с помощью этих программ, практически одинаковые. Время счета одного углового распределения по этим программам на ЭВМ типа БЭСМ-6 составляет 20—30 с.

Программы для приближения «без отдачи». Имеются две такие программы, в которых не используется приближение Баттля — Гольдфарба [57]. В одной из них — RDRC [54] — кинематический

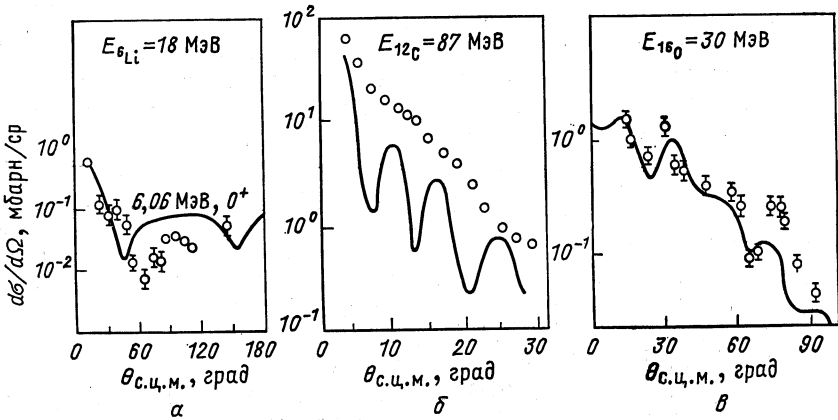


Рис. 9. Угловые распределения:

а — дейтронов из реакции  $^{12}\text{C} (^6\text{Li}, d) ^{16}\text{O}^*$  (6,06 МэВ) [81]; б — ионов  $^{13}\text{C}$  из реакций  $^{13}\text{C} (^{12}\text{C}, ^{13}\text{C}) ^{12}\text{C}$  [82]; в — ионов  $^{13}\text{N}$  из реакции  $^{13}\text{N} (^{16}\text{O}, ^{13}\text{N}) ^{12}\text{C}$  [83]. Кривые — расчет по программе RDRC [54]

интеграл вычисляется разложением интегралов (376) по собственным функциям обобщенного гармонического осциллятора. Другая программа — SETILL [80] — использует представление искаженных волн с помощью метода генераторных координат в виде модифицированных волновых пакетов гауссова типа [55]. Благодаря использованию осцилляторного базиса, время счета углового распределения по обеим программам достаточно мало (1—2 мин). На рис. 9 для трех реакций вместе с экспериментальными данными [81—83] изображены угловые распределения, вычисленные по программе RDRC. Видно, что теоретическое угловое распределение дейтронов из реакции  $^{12}\text{C} (^6\text{Li}, d) ^{16}\text{O}^*$  (см. рис. 9, а) описывает лишь общий характер экспериментальной кривой. Это, по-видимому, связано с тем, что условия использования приближения «без отдачи» ( $c/x, c/B \ll 1$ ) в данной реакции не выполняются. Угловое распределение ионов  $^{13}\text{C}$  из реакций

$^{13}\text{C}$  ( $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ) $^{12}\text{C}$  (см. рис. 9, б) также не согласуется с экспериментальным, хотя в данном случае отношения масс  $c/x$  и  $c/B$  достаточно малы. Но для этой реакции возможны два значения переданных моментов  $l$  (0 и 1), а в приближении «без отдачи» правила отбора (см. разд. 3) ограничивают возможные  $l$  условием нормальной четности, т. е.  $l=0$ . В результате в этом приближении теоретическое угловое распределение оказывается сильно осциллирующим, что не соответствует экспериментальным результатам [82]. Наконец, теоретическое угловое распределение ионов  $^{15}\text{N}$  из реакции  $^{11}\text{B}$  ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{15}\text{N}$ )  $^{12}\text{C}$  качественно согласуется с экспериментом, поскольку в этой реакции отношения масс  $c/x$ ,  $c/B$  малы и правила отбора разрешают только одно значение  $l$ . Отметим, что ни одну из этих кривых не удается согласовать с экспериментом по абсолютным значениям (спектроскопические факторы, которые определены из нормировки теоретических кривых в первом максимуме, как правило, в несколько раз превышают значения, даваемые оболочечными расчетами [44]).

Таким образом, использование приближения «без отдачи» не позволяет получить абсолютное значение сечения даже в реакциях с тяжелыми ионами. Теоретическая форма угловых распределений согласуется с экспериментом только в тех случаях, когда правила отбора разрешают одно значение переданного момента  $l$  и выполняются условия  $c/x$ ,  $c/B \ll 1$ .

*Программа BRUNHILD* [84] для приближения локального импульса [58]. В этой программе кинематический фактор вычисляется по (56), (58), (59) и (67), т. е. с использованием ПБГ, а угловое распределение — по (33). Парциальные искаженные волны рассчитываются так же, как и в программе, изложенной в работе [77].

Для численной проверки справедливости приближения локального импульса (ПЛИ) необходимо установить, во-первых, отсутствие зависимости углового распределения от направления импульса отдачи (68) и, во-вторых, сходимость ряда по  $L$  в (56) за счет быстрого уменьшения интеграла (59) при  $L > QR$ . Угловое распределение ионов  $^{13}\text{N}$  из реакции  $^{12}\text{C}$  ( $^{14}\text{N}$ ,  $^{13}\text{N}$ )  $^{13}\text{C}$  ( $E_{^{13}\text{N}} = 78$  МэВ) [85], вычисленное по программе BRUNHILD [86] при разных значениях угла  $\theta_Q$ , приведено на рис. 10, а. Видно, что при  $\theta \leq 40^\circ$  угловое распределение действительно нечувствительно к направлению импульса отдачи. На рис. 10, б приведено угловое распределение ионов из реакции  $^{144}\text{Sm}$  ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{14}\text{C}$ )  $^{146}\text{Gd}$  ( $E_{^{16}\text{O}} = 104$  МэВ), вычисленное [86] для разного числа членов в сумме по  $L$  в выражении (56). Результаты расчета показывают, что если нулевой порядок (приближение без отдачи) сильно расходится с первым, а первый также существенно отличается от второго, то последующие члены ряда по  $L$  почти не дают заметного вклада в кинематический множитель (56). Наконец, для дополни-

тельной проверки справедливости ПЛИ угловое распределение для реакции  $^{12}\text{C} (^{14}\text{N}, ^{13}\text{N}) ^{13}\text{C}$ , рассчитанное по программе BRUNHILD сравнивалось с экспериментальным [85, 87] и с угловым распределением, вычисленным по программе LOLA [88] (см. ниже), в которой отдача учитывается точно. Соответствующие угловые распределения даны на рис. 11. Видно, что рассчитанные угловые распределения совпадают друг с другом (и с экспериментом)

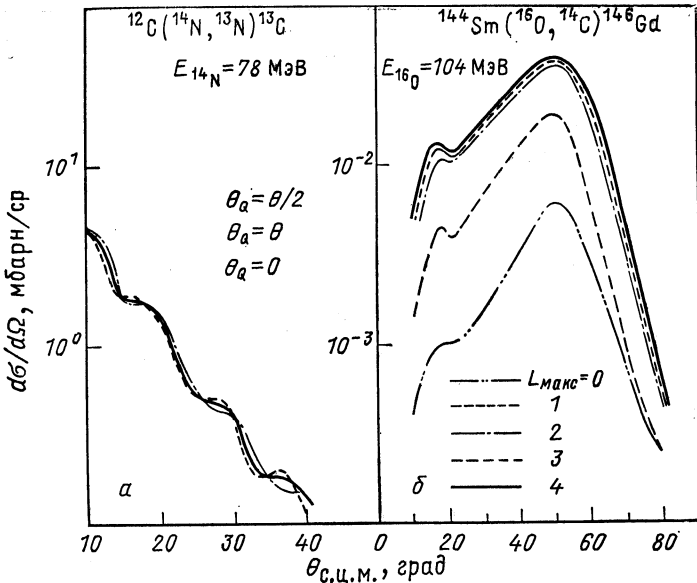


Рис. 10. Проверка ПЛИ в реакциях с тяжелыми ионами:

расчетные кривые, вычисленные [86] по программе BRUNHILD [84] показывают (а) малую чувствительность  $d\sigma/d\Omega$  к направлению импульса отдачи (68); (б) зависимость  $d\sigma/d\Omega$  от числа членов  $L_{\text{max}}$  в сумме по  $L$  в кинематическом множителе (56)

в области углов  $\theta \leq 30^\circ$ . Совпадают также и абсолютные значения сечений — структурный множитель (34) в этой реакции определяется, как 0,53 по программе LOLA и 0,47 по программе BRUNHILD.

Объем программы BRUNHILD составляет примерно 30 000, слов. Типичное угловое распределение с одним значением переданного момента и с максимальным числом парциальных волн ( $L_{x,y}^{\text{max}} \approx 100$ ) считается на ЭВМ CDC-3300 около 6 мин, если в сумме по  $L$  в (56) учитываются члены нулевого, первого и второго порядков.

Отметим еще одно обстоятельство. Поскольку программа [84] использует не только ПЛИ, но и ПБГ [57], необходимо проверить



чувствительность угловых распределений к выбору функций захватываемой частицы  $\Psi_{\Delta_i}(\kappa_i, r_i)$ . Как показано в [89], ПБГ, по-видимому, не выполняется в реакциях с легкими частицами. Наиболее целесообразно использовать программу BRUNHILD для расчета угловых распределений и определения структурных множителей в реакциях однонуклонной передачи с тяжелыми ионами в узком интервале передних углов (до  $40^\circ$ ).

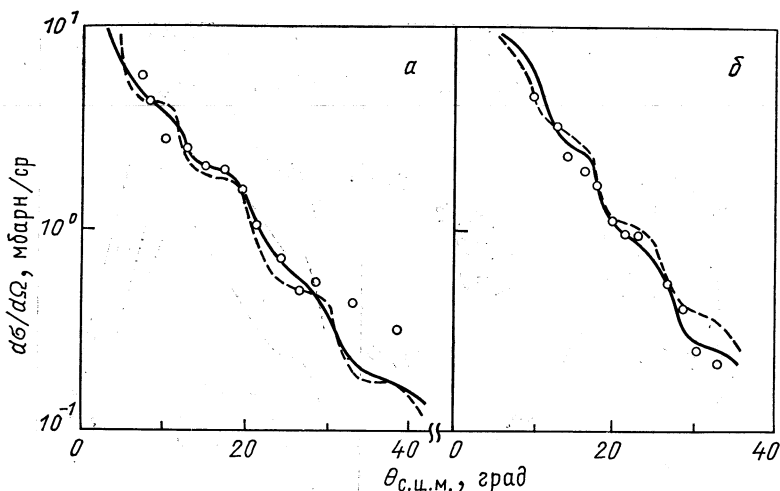


Рис. 11. Угловые распределения ионов  $^{13}\text{N}$  из реакции  $^{12}\text{C}(^{14}\text{N}, ^{13}\text{N})^{13}\text{C}$  [85, 87]:

$a - E_{^{14}\text{N}} = 78$  МэВ;  $b - E_{^{14}\text{N}} = 100$  МэВ; сплошная кривая — расчет по программе LOLA [88]; пунктирная — по программе BRUNHILD [84] (параметры оптических потенциалов одинаковые)

*Программа WOMBLE для приближения больших переданных импульсов* [III]. В этой программе кинематический множитель вычисляется по формуле (71) с использованием квазиклассической оценки (72а) для множителя  $S(\tilde{q} - q)$ .

Численная проверка справедливости приближения больших переданных импульсов проводилась путем сравнения результатов расчета  $d\sigma/d\Omega$  по программе WOMBLE с расчетами по программе LOLA [88]. На рис. 12, а показано угловое распределение гипотетической реакции  $^{17}\text{O}^*(^{16}\text{O}, ^{17}\text{O}^*)^{16}\text{O}$ , вычисленное [109], [112] по этим программам. В области малых углов (там, где справедлива оценка (72а)) обе расчетные кривые практически совпадают. На рис. 12, б представлено угловое распределение ионов  $^{10}\text{Be}$  из реакции  $^{26}\text{Mg}(^{11}\text{B}, ^{10}\text{Be})^{27}\text{Al}$ , вычисленное по программе WOMBLE, вместе с экспериментальными данными [112] при углах, меньших  $25^\circ$ . Видно, что теоретическая кривая неплохо описывает

эксперимент. Важно подчеркнуть, что расчет по программе WOMBLE позволяет согласовать с экспериментом и абсолютную величину сечения (спектроскопический фактор нейтрона в  $^{27}\text{Al}$ , извлеченный из нормировки теоретической кривой, оказывается довольно близким к результатам других авторов).

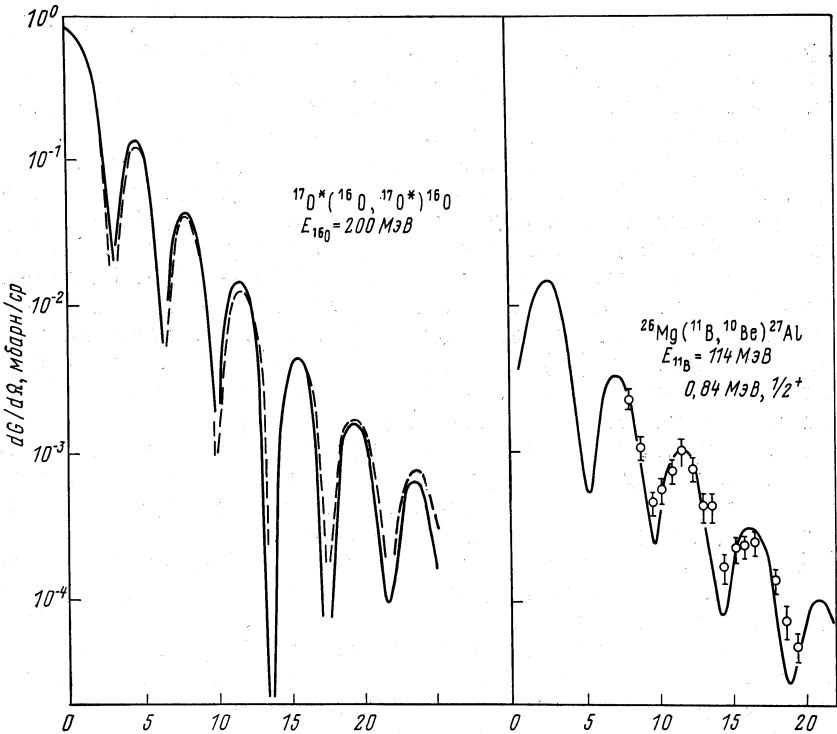


Рис. 12. Угловые распределения ионов  $^{17}\text{O}^*$  и  $^{10}\text{Be}$  из реакций: а —  $^{17}\text{O}^*(^{16}\text{O}, ^{17}\text{O}^*)^{16}\text{O}$  ( $E_{^{16}\text{O}} = 200 \text{ МэВ}$ ); б —  $^{26}\text{Mg} (^{11}\text{B}, ^{10}\text{Be}) ^{27}\text{Al}^*$  ( $E_{^{11}\text{B}} = 114 \text{ МэВ}$ ), вычисленные по программе WOMBLE [109] (сплошные кривые). Экспериментальные результаты взяты из работы [112]. Пунктирной кривой показано угловое распределение, вычисленное по программе LOLA [112]

Укажем, что вычислительные преимущества программы WOMBLE, по-видимому, наиболее полно реализуются при расчете угловых распределений продуктов реакций однонуклонной передачи с относительно легкими ионами высоких энергий на сравнительно легких ядрах-мишенях (до  $^{40}\text{Ca}$ ).

Программы, точно учитывающие эффекты отдачи для механизма срыва в реакциях с тяжелыми ионами. Рассмотрим здесь две наиболее распространенные программы МИВОКОР: LOLA [88]

и MARS — SATURN [90], в которых дифференциальное сечение вычисляется по формуле (33) со структурным множителем (34). Эти программы можно использовать для расчета угловых распределений реакций со сложными частицами, если каждый из орбитальных моментов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  имеет одно возможное значение. Инвариантный форм-фактор вычисляется по формуле (75), т. е. отдача учитывается точно через величины  $g_{K \Lambda_1 \Lambda_2}(r_x, r_y)$ , определяемые выражениями (73). Вычисление искаженных волн и волновых функций относительного движения проводится так же, как и в программе DWUCK [77]. Это означает, в частности, что потенциал взаимодействия, ответственный за перестройку системы, определяется собственным значением уравнения Шредингера, решением которого является волновая функция относительного движения частиц. Задание потенциала взаимодействия другим способом в данных программах не предусмотрено. Именно поэтому с помощью программ LOLA и MARS — SATURN нельзя вычислять угловые распределения для механизмов тяжелого замещения и обычного замещения (см. рис. 1), поскольку их матричные элементы (23) определяются потенциалами, зависящими от таких координат Якоби, от которых не зависят волновые функции относительного движения. Однако по программам [89, 90] можно вычислить угловое распределение механизма тяжелого срыва, поскольку для этого механизма потенциал взаимодействия и волновая функция относительного движения частиц  $u$  и  $C$  в ядре  $A$  зависят от одной и той же координаты.

Рассмотрим некоторые вычислительные особенности программ [88] и [90]. В качестве входного параметра в обеих программах задается ширина  $\Delta$  дорожки интегрирования, т. е. максимально возможное отклонение координаты  $r_y$  от  $(A/B)r_x$ . Задание  $\Delta$  существенно уменьшает размеры сетки интегрирования в двойном интеграле (31). В программе LOLA значение параметра  $\Delta$  может меняться в очень широких пределах. В программе MARS — SATURN величина  $\Delta$  ограничена значением 2 ферми, и, следовательно, этой программой можно пользоваться, если  $[cM/(xB)]r_2 < < 2$  ферми. В программе [90] используется сетка интегрирования с шагом  $h_0$  внутри дорожки по переменной  $\delta_{xy} = r_y - (A/B)r_x$  и с большим шагом  $h = nh_0$  ( $n > 1$ ) по переменной  $r_y$  (в промежуточных  $n - 1$  точках значения  $F_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}(r_x, r_y)$  получаются интерполированием). Благодаря слабой зависимости форм-фактора от  $r_y$  точность вычисления при этом практически не теряется, а скорость счета увеличивается в  $n$  раз. Поэтому сейчас программа MARS — SATURN, по-видимому, самая быстрая программа МИВОКОР, хотя все ее вычислительные преимущества проявляются только в расчетах угловых распределений реакций однонуклонной передачи с тяжелыми ионами на достаточно тяжелых ядрах, когда  $\Delta$  очень мало, а  $n$  может достигать 20.

Объемы этих программ практически одинаковы и составляют 300 000<sub>8</sub> слов. Максимальный порядок  $L_x^{\max}$ ,  $L_y^{\max}$  парциальной волны в этих программах равен 100, а фактическое число учитываемых парциальных волн, т. е.  $L_{x,y}^{\max} - L_{x,y}^{\min}$  равно примерно 50. Если  $L_{x,y}^{\min} > 0$ , то автоматически вводится обрезание интегралов (31) снизу, при этом значение радиуса обрезания определяется

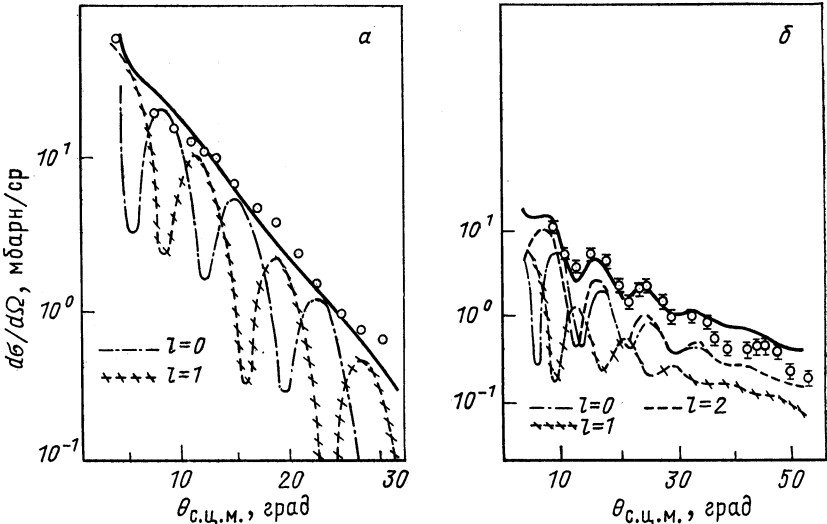


Рис. 13. Угловые распределения ионов  $^{13}\text{C}$  и  $^{11}\text{B}$  из реакций  $^{13}\text{C} (^{12}\text{C}, ^{13}\text{C})^{12}\text{C}$  (а) и  $^{11}\text{B} (^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{12}\text{C}$  (б) [82]:

кривые рассчитаны [69] по программе LOLA; тонкие кривые показывают вклад отдельных переданных моментов; жирные кривые — полное сечение

соотношением:  $kR_{\min} = L_{x,y}^{\min}$ . В программе MARS — SATURN предусмотрена возможность ввода трех значений переданного момента, программа LOLA считает угловое распределение для каждого переданного момента  $l$  независимо. Во время счета эти программы используют магнитные ленты для записи промежуточных результатов. Время счета одного углового распределения составляет около 15 мин.

Перейдем к анализу физических результатов, получаемых с помощью этих программ.

Начнем с программы LOLA. Угловые распределения для реакций  $^{13}\text{C} (^{12}\text{C}, ^{13}\text{C})^{12}\text{C}$  (а) и  $^{11}\text{B} (^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{12}\text{C}$  (б) при энергии падающих ионов  $^{12}\text{C}$  87 МэВ [82] приведены на рис. 13. Первое из этих угловых распределений не имеет четко выраженной дифракционной структуры, в то время как второе обнаруживает заметные максимумы и минимумы. Расчет угловых распределений

этих реакций для механизма срыва по программе LOLA (сплошные кривые) показывает, что качественное различие в поведении угловых распределений этих реакций связано не с различием их механизмов, а с различием правил отбора по переданному моменту  $l$ . В сечении реакции (см. рис. 13, а) дают вклад два момента  $l = 0$  и 1, что приводит, в отличие от приближения «без отдачи» (см. рис. 9, б), к резкому сглаживанию углового распределения. В сечении реакции (см. рис. 13, б) дают вклад три момента  $l = 0, 1$  и 2, причем угловые распределения компонент с  $l = 0$  и 2 подобны, поэтому суммарное угловое распределение имеет заметную дифракционную структуру. Можно отметить, что расчет дает правильное значение абсолютной величины сечения: структурный множитель (34), извлеченный из нормировки теоретического сечения, для первой реакции (см. рис. 13, а) оказывается равным 0,43, в то время как расчет по модели оболочек дает значение 0,61 [44]. Для второй реакции (см. рис. 13, б) соответствующие значения структурных множителей определяются как 3,1 и 2,85 [44].

Перейдем к обсуждению численных результатов, получаемых с помощью программы MARS — SATURN [90]. В работе [70] исследована чувствительность угловых распределений к выбору параметров  $n$  и  $\Delta$  на примере реакции  $^{88}\text{Sr} (^{16}\text{O}, ^{15}\text{N}) ^{89}\text{Y}$  при  $E_{^{16}\text{O}} = 59$  МэВ, угловое распределение для которой было также рассчитано [91] по программе LOLA. Было показано [70], что вплоть до углов  $120^\circ$  угловые распределения практически нечувствительны к  $n$ , если  $n$  меняется от 3 до 15, а ширина дорожки  $\Delta$  составляет 0,05 и 0,1 ферми. При этом абсолютное значение теоретического углового распределения в максимуме ( $\theta \approx 70^\circ$ ) ( $d\sigma/d\Omega = 0,353$  мбарн/ср при  $\Delta = 0,05$  Ферми,  $n \approx 15$ ) очень хорошо согласуется с этим же значением, вычисленным по программе LOLA ( $d\sigma/d\Omega = 0,358$  мбарн/ср).

На рис. 14, а изображены экспериментальные [92] и рассчитанные по программе MARS — SATURN (сплошные кривые) [70] угловые распределения ионов  $^{10}\text{Be}$  из реакции  $^{208}\text{Pb} (^{11}\text{B}, ^{10}\text{Be}) ^{209}\text{Bi}$  с возбуждением нескольких низколежащих состояний  $^{209}\text{Bi}$ . На рис. 14, б приведены одночастичные спектроскопические факторы для этих состояний, полученные в этом расчете, найденные ранее из анализа ( $^3\text{He}, d$ )-реакции [93], а также результаты теоретических расчетов [94]. Видно, что протонные спектроскопические факторы в ядре  $^{209}\text{Bi}$ , определенные всеми способами, хорошо согласуются между собой.

Таким образом, программы [88, 90] дают возможность вычислять угловые распределения для реакций одноуклонной передачи с тяжелыми ионами в количественном согласии с экспериментом. Это, с одной стороны, подтверждает, что приближения, положенные в основу данных программ, для реакций указанного типа являются справедливыми, а с другой стороны, показывает, что

определяющим механизмом таких реакций является срыв нуклона, по крайней мере, в передней полусфере. Отметим еще раз, что по программам LOLA и MARS — SATURN можно вычислять угловые распределения реакций с передачей не только нуклона, но и более сложных частиц, если моменты  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  имеют единственное значение. Данные программы можно использовать и для расчета тяжелого срыва, если это условие окажется выполненным.

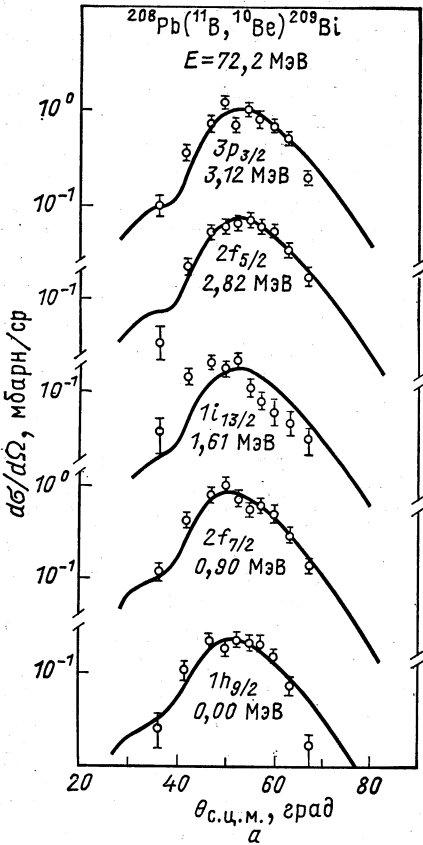
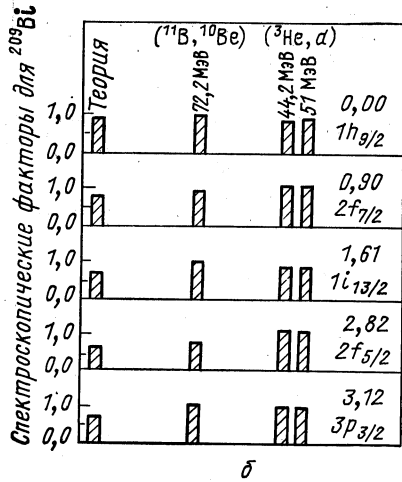


Рис. 14. Угловые распределения ионов  $^{10}\text{Be}$  из реакции  $^{208}\text{Pb}(^{11}\text{B}, ^{10}\text{Be})^{209}\text{Bi}$  [92] (а) и спектроскопические факторы протона в ядре  $^{209}\text{Bi}$  для различных одночастичных конфигураций, соответствующих нижним состояниям этого ядра (б):

кривые — расчет [70] по программе MARS — SATURN. Спектроскопические факторы для ( $^6\text{He}$ ,  $d$ )-реакции взяты из работы [93], теоретические спектроскопические факторы — из работы [94]



Укажем только, что для расчета угловых распределений реакций с легкими ионами ( $^6\text{Li}$ ,  $^7\text{Li}$ ) на легких ядрах лучше использовать программу LOLA, поскольку вычислительные преимущества программы MARS — SATURN при расчете таких реакций практически не реализуются.

Программы, точно учитывающие эффекты отдачи для механизма срыва в реакциях с легкими ионами. Программа III — DRC

[73] основана на точном учете эффектов отдачи при разделении переменных в искаженных волнах разложением их в ряд по собственным функциям обобщенного гармонического осциллятора. Как мы уже указывали выше, такой способ разделения переменных в задаче трех тел приводит к большому количеству (пятнадцати) дополнительных сумм, и поэтому он реально осуществим только для расчета угловых распределений механизма срыва в реакциях с легкими ионами небольших энергий на относительно

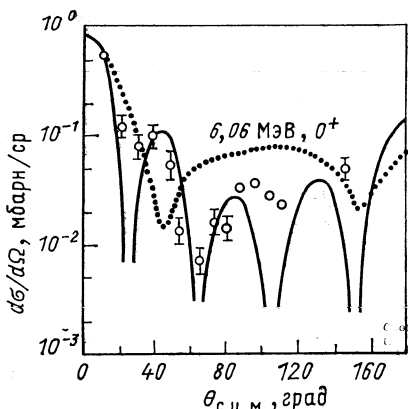


Рис. 15. Угловое распределение дейтронов из реакции  $^{12}\text{C}(^6\text{Li}, d)^{16}\text{O}^*$  (6,06 МэВ) [81]:

сплошная кривая — расчет по программе HI — DRG [73]; точечная кривая — по программе RDRC [54]

DRG [73] (сплошная кривая) и в приближении без отдачи по программе RDRC [54] (точечная кривая) (см. также рис. 9, а). Необходимое число парциальных волн для расчета этой реакции  $L_{\text{макс}} = 9$ , число членов ряда в разложении каждой искаженной волны по собственным функциям обобщенного гармонического осциллятора около 20, число промежуточных сумм равно 12. Время счета углового распределения по программе HI — DRG составляет примерно 10 мин. Как показывают полученные результаты, учет эффектов отдачи позволяет получить угловое распределение дейтронов в качественном согласии с экспериментом. Пренебрежение эффектами отдачи не позволяет получить согласие с экспериментом даже в области передних углов ( $\theta \leq 60^\circ$ ).

**Программа MERCURY [95].** В этой программе радиальный интеграл  $I_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}$  вычисляется по формуле (81), т. е. имеет относительно простой вид. Поскольку число членов в разложении (79) для парциальных волн в реакциях с легкими ионами сравнительно невелико, дополнительные суммы содержат не слиш-

легких ядрах. Это связано с тем, что волновые функции низших состояний ядер  $1p$ -оболочки сильно перекрываются с волновыми функциями гармонического осциллятора, и число искаженных волн, которые необходимо учитывать, не слишком велико. В результате ряды по собственным функциям обобщенного гармонического осциллятора сходятся довольно быстро, и дополнительные суммы содержат небольшое число членов.

На рис. 15 приведены экспериментальное угловое распределение дейтронов из реакции  $^{12}\text{C}(^6\text{Li}, d)^{16}\text{O}^*$  ( $E^* = 6,06$  МэВ) при  $E^6\text{Li} = 18$  МэВ [81], а также вычисленные по программе HI —

ком большое число членов. В программе MERCURY предусмотрено  $L_{x,y}^{\max} = 50$ ,  $N_{\max} = 20$ . Время счета одного углового распределения составляет на СДС-6500 около 5' мин.

Проверка программы проводилась расчетом углового распределения протонов из реакции  $^{40}\text{Ca}(d, p)^{41}\text{Ca}$ . Соответствующие угловые распределения (экспериментальные данные взяты из работы [96]), вычисленные по программе MERCURY для разного числа членов  $N(L)$  в разложении (79) во входном и в выходном

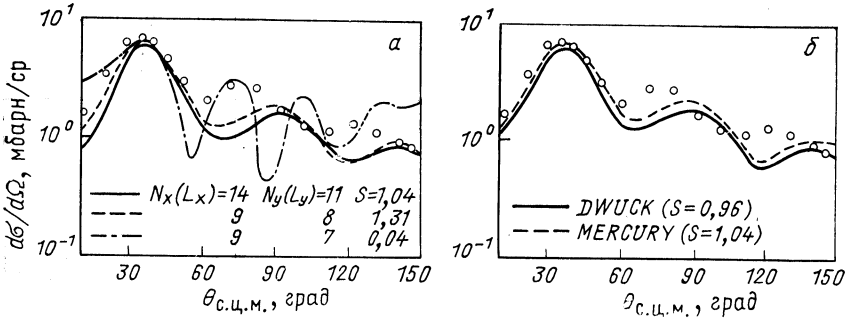


Рис. 16. Угловое распределение протонов из реакции  $^{40}\text{Ca}(d, p)^{41}\text{Ca}$  при  $E_d = 11$  МэВ [96]:

*a* — кривые, вычисленные [75] по программе MERCURY [95] для разного числа членов  $N(L)$  в разложении искаженных волн по плоским волнам; *б* — сравнение результатов расчета по программе MERCURY (сплошная кривая) при  $N_x(L_x) = 14$ ,  $N_y(L_y) = 11$  и по программе DWUCK [77] (пунктирная кривая)

каналах реакции, приведены на рис. 16, *a*. Результаты расчетов по программе MERCURY сравнивались с программой DWUCK [77] (см. рис. 16, *б*), поскольку для этой реакции можно ожидать, что приближение нулевого радиуса выполняется хорошо. Видно, что зависимость углового распределения от  $N(L)$  довольно сильная (хотя она влияет в основном не на общий характер спада углового распределения к большим углам, а на степень осцилляций), и только при  $N(L) > 10$  угловое распределение неплохо согласуется с рассчитанным по программе DWUCK как по форме, так и по абсолютной величине.

Угловые распределения  $\alpha$ -частиц из реакции  $^{12}\text{C}(^6\text{Li}, \alpha)^{14}\text{N}$  при  $E_{^6\text{Li}} = 33$  МэВ [97], дейтронов из реакции  $^{12}\text{C}(^6\text{Li}, d)^{16}\text{O}^*$  при  $E_{^6\text{Li}} = 18$  МэВ [81] и ионов  $^8\text{Be}$  из реакции  $^{40}\text{Ca}(^{12}\text{C}, ^8\text{Be})^{44}\text{Ti}$  при  $E_{^{12}\text{C}} = 45$  МэВ [98] показаны на рис. 17. Приведенные кривые получены в этих работах для механизма кластерного срыва по программе MERCURY. Пунктирная кривая на рис. 17, *б* соответствует расчету по программе HI — DRC (см. рис. 15). Вычисленные по этим программам дифференциальные сечения хорошо описывают экспериментальные данные во всей области



углов вылета конечных частиц, в том числе и по абсолютному значению. Основным механизмом этих конкретных реакций является, по-видимому, механизм срыва. Однако так бывает не всегда. В некоторых реакциях, для которых проведены расчеты для механизма срыва с точным учетом эффектов отдачи, вычисленные угловые распределения не удается согласовать с экспериментальными в широком интервале углов. Как пример, на рис. 18 показано угловое распределение  $\alpha$ -частиц из реакции  $^{16}\text{O} (^6\text{Li}, \alpha)^{18}\text{F}$  [99] и теоретическая кривая, рассчитанная по программе MERCURY. Видно, что кривая даже качественно не описывает экспериментальные результаты. Авторы объясняют это тем что,

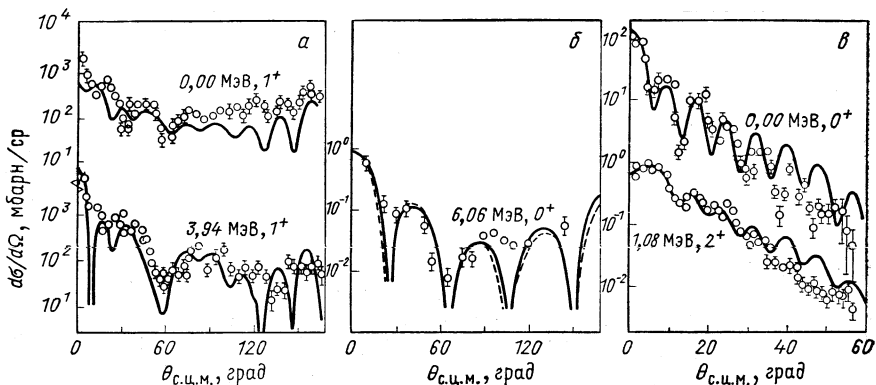


Рис. 17. Угловые распределения  $\alpha$ -частиц из реакции  $^{12}\text{C} (^6\text{Li}, \alpha)^{14}\text{N}$  [97] (а), дейтронов из реакции  $^{12}\text{C} (^6\text{Li}, d)^{16}\text{O}$  [81] (б), ионов  $^8\text{Be}$  из реакции  $^{40}\text{Ca} (^{12}\text{C}, ^8\text{Be})^{44}\text{Ti}$  [98] (в):

расчет выполнен для механизма кластерного срыва по программам MERCURY (сплошные кривые) и HI — DRC (пунктирная кривая)

механизм данной реакции не сводится к механизму срыва, и для количественного описания эксперимента необходимо учитывать обменные процессы, связанные с развалом ядра-мишени.

**Программы, точно учитывающие эффекты отдачи для прямых и обменных процессов в реакциях с легкими частицами.** Как следует из предыдущих разделов, механизм реакций однонуклонной передачи с тяжелыми ионами определяется механизмом срыва. Если же ядро передается сложный кластер, то необходимо учитывать обменные механизмы, связанные с развалом ядра-мишени. Расчет угловых распределений обменных процессов для произвольной реакции  $A(x, y)B$  весьма сложен (см. разд. 2). Однако для реакций с  $\alpha$ -частицами (и более легкими), когда все нуклоны в частице  $x$  находятся в  $s$ -состоянии относительного движения, расчет сечений (32) значительно упрощается, поскольку в этом

случае можно ввести произведения амплитуд приведенных ширин  $\Theta_{J_1\Lambda_1, J_c}^{B \rightarrow C+x}$  и  $\Theta_{J_2\Lambda_2, J_c}^{A \rightarrow C+y}$ , просуммированные по  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_c$ , согласно соотношению

$$\Theta_{\Lambda_1\Lambda_2lsj} = \sum_{J_1J_2J_c} \Theta_{J_1\Lambda_1, J_c}^{B \rightarrow C+x} \Theta_{J_2\Lambda_2, J_c}^{A \rightarrow C+y} \times$$

$$\times (-1)^{J_c} \sqrt{\frac{2J_A+1}{2J_c+1}} u(J_1G_xJ_2s_y : J_cS) \times$$

$$\times u(\Lambda_2J_AJ_1s : J_2j) u(j\Lambda_2J_B\Lambda_1 : J_1l). \quad (85)$$

В результате, если пренебречь зависимостью волновых функций от  $E_c$ , в сечении (32) остаются когерентные суммы только по  $\Lambda_1$

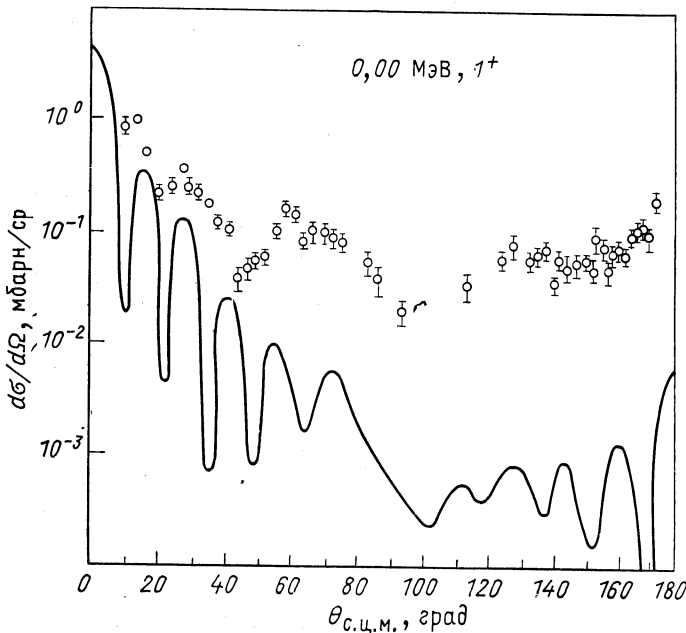


Рис. 18. Угловое распределение  $\alpha$ -частиц из реакции  $^{16}\text{O}(^6\text{Li}, \alpha)^{18}\text{F}$  [99] при  $E_{^6\text{Li}} = 34$  МэВ:  
кривая — расчет по программе MERCURY

и  $\Lambda_2$ . При этом осуществляется разделение переменных в волновых функциях относительного движения и потенциалах взаимодействия, так что инвариантный форм-фактор должен вычисляться по формуле (75). Для прямых процессов структурный множитель в (32) для реакции с  $\alpha$ -частицами (и более легкими) определяется только шириной  $\Theta_{j_1s_1}^{B \rightarrow A+C}$  (где  $j$  — спин канала) [42], так что

сечение (32) всегда факторизуется на спектроскопический фактор и кинематическую часть. Инвариантный форм-фактор в этом случае вычисляется по формуле (76).

Если необходимость введения конечного радиуса взаимодействия для расчета обменных процессов более или менее очевидна, то для расчета прямых процессов в реакциях с легкими частицами, казалось бы, можно ограничиться нулевым радиусом взаимодействия. Тем не менее это не так, поскольку даже в реакциях однонуклонной передачи с легкими частицами на легких ядрах отдача всей системы не является малой. Если же рассматривать реакции передачи нескольких нуклонов, то эффекты, связанные с отдачей, приобретают еще большее значение. С этой точки зрения использование нулевого радиуса взаимодействия наиболее оправдано в  $(d, p)$ -,  $(d, n)$ -реакциях, поскольку здесь отдача наименее существенна.

После этих предварительных замечаний перейдем к анализу конкретных программ.

Программа AICINT [100] предназначена для расчета сечений обменных процессов, если искаженные волны начальной и конечной частицы рассматриваются в эйкональном приближении [61, 62], которое требует для своего использования только выполнения условия (53). Угловые распределения вычисляются по формуле (32), структурные множители — по (85), причем амплитуды приведенных ширин рассчитываются в модели оболочки с промежуточной связью. Размерности структурных матриц соответствуют трем возможным значениям как для  $\Lambda_1$ , так и для  $\Lambda_2$ . Длина программы AICINT составляет 20 600<sub>8</sub> слов, и для счета одного углового распределения на БЭСМ-6 требуется время около 1 мин.

Экспериментальные угловые распределения тритонов из  $(\alpha, t)$ -реакций на ядрах  ${}^7\text{Li}$  и  ${}^{11}\text{B}$  [101], и дейтонов из  $(\alpha, d)$ -реакций на ядре  ${}^{13}\text{C}$  [102] при  $E_\alpha = 25$  МэВ, и распределения, вычисленные в работе [62] по программе AICINT для механизма срыва тяжелой частицы в области больших углов, приведены на рис. 19. Видно, что теоретические кривые неплохо согласуются с экспериментальными не только по форме, но и по абсолютным значениям (нормировочная константа  $N$  для всех реакций близка к единице). Важно отметить, что параметры эйконального приближения  $\beta$  и  $\gamma$  слабо зависят от ядра и от типа реакции. Это, по-видимому, означает, что и механизм реакции, и метод учета искажений выбраны правильно.

Программы FUNLY-2 [103] и OLYMP [104] предназначены для расчета угловых распределений прямых и обменных процессов в реакциях с легкими частицами (не тяжелее  $\alpha$ -частиц), прежде всего на ядрах  $1p$ -оболочки. Обе эти программы имеют в своей структуре много общего. Волновые функции относительного движения частиц в этих программах либо находятся решением урав-

нения Шредингера, либо задаются аналитически (или численно), потенциалы взаимодействия частиц могут вводиться в программу независимо от способа определения волновых функций. Эти программы можно использовать для расчета угловых распределений всех четырех механизмов. Искаженные волны считаются в программе FUNLY-2 так же, как и в DWUCK [77], а в программе OLYMP — так же, как в программе, описанной в [78]. Максимальное число парциальных волн  $L_{x,y}^{\max}$  для FUNLY-2 равно 50,

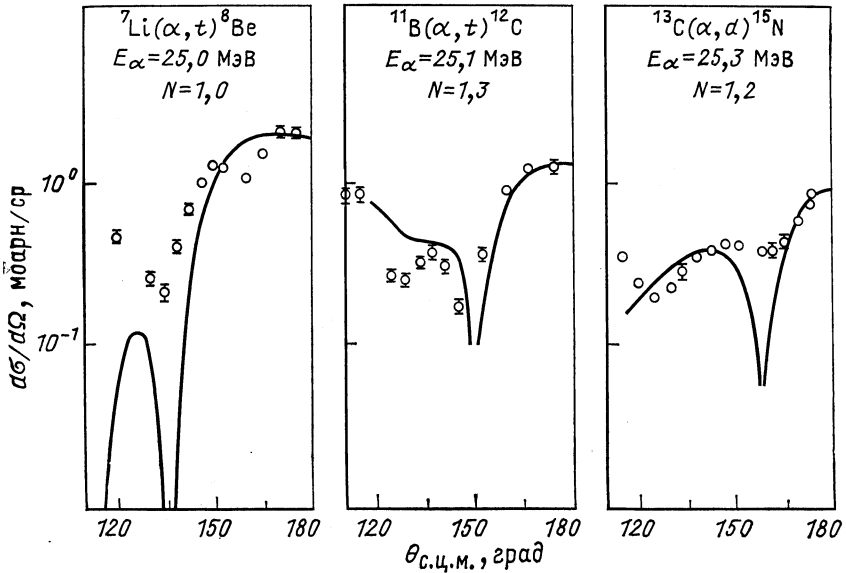


Рис. 19. Угловые распределения тритонов из  $(\alpha, t)$ -реакций на ядрах  ${}^7\text{Li}$  и  ${}^{11}\text{B}$  [101] и дейтронов из  $(\alpha, d)$ -реакции на ядре  ${}^{13}\text{C}$  [102] при  $E_\alpha = 25$  МэВ в области задних углов:

кривые — расчет по программе AICINT [62]

для OLYMP — 30. Максимальное число точек сетки интегрирования при вычислении интеграла (31) в программе FUNLY-2 равно  $4 \cdot 10^4$ , в программе OLYMP —  $10^4$ . Однако в программе FUNLY-2 интеграл (31) вычисляется на всей координатной плоскости, а в программу OLYMP вводится ширина дорожки  $\Delta$ , которая задается как входной параметр, что позволяет увеличивать значение  $R_{\max}$  при том же числе точек сетки.

С другой стороны, программы FUNLY-2 и MARS — SATURN различаются как по способу вычисления инвариантного форм-фактора, так и по способу организации работы самой программы. В программе FUNLY-2 инвариантный форм-фактор и для прямых, и для обменных процессов вычисляется по формуле (76)

[68], что возможно только для таких реакций, в которых и для прямых, и для обменных процессов один из двух моментов  $\Lambda$  обращается в нуль. Фактически это условие (оно выполняется в тех реакциях, в которых промежуточное ядро  $S$  для обменных процессов является  $\alpha$ -частицей) резко ограничивает круг реакций с легкими частицами, которые можно проанализировать с помощью программы FUNLY-2. В программе OLYMP по формуле (76) вычисляется только форм-фактор прямых процессов, а расчет форм-фактора для обменных процессов проводится по общей формуле (75), упрощенной за счет свертки  $\mathcal{Q}$ -символа с двумя треугольниками векторного сложения, вырожденными в прямую [108]:

$$\begin{aligned}
 F_{\Lambda_1 \Lambda_2 L_x L_y l}^{J_c E_c} (r_x, r_y) = & \frac{1}{2} \alpha'_{l+\Lambda_2} r_x^{\Lambda_1} (-r_y)^{\Lambda_2} \sqrt{(2\Lambda_1+1)} \times \\
 & \times \sqrt{(2\Lambda_2+1)} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sqrt{(\Lambda_1+\Lambda_2+l+1)! (\Lambda_1+\Lambda_2-l)!} \times \\
 & \times \sum_K (-1)^K (2K+1) \{g_{K\Lambda_1\Lambda_2}^{cp} (r_x, r_y) + g_{K\Lambda_1\Lambda_2}^{T.зам} (r_x, r_y)\} \times \\
 & \times \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (r_x)^{-\lambda_1} (\delta r_x)^{\lambda_2} (-r_y)^{-\lambda_2} (-r_y)^{\lambda_1} \times \\
 & \times \sum_{l_1 l_2} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)} \langle l_1 \Lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2 l_2 \lambda_1 + \lambda_2 - \Lambda_2 | l \Lambda_1 - \Lambda_2 \rangle \times \\
 & \times [(\Lambda_1 - \lambda_1 + \lambda_2 + l_1 + 1)! (\lambda_1 + \Lambda_2 - \lambda_2 + l_2 + 1)! \times \\
 & \times (\Lambda_1 - \lambda_1 + \lambda_2 - l_1)! (\lambda_1 + \Lambda_2 - \lambda_2 - l_1)!]^{-1/2} \times \\
 & \times \langle \Lambda_1 - \lambda_1 0 \lambda_2 0 | l_1 0 \rangle \times \\
 & \times \langle l_1 0 K 0 | L_x 0 \rangle \langle \lambda_1 0 \Lambda_2 - \lambda_2 0 | l_2 0 \rangle \times \\
 & \times \langle l_2 0 K 0 | L_y 0 \rangle W(l_1 L_y l_1 L_x : K l). \quad (86)
 \end{aligned}$$

Структурные множители (85) вводятся в программу как входные данные. Если для их расчета использовать модель оболочек с промежуточной связью, это также ограничит выбор возможных реакций ( $A, B \leq 16O$ ), но не столь сильно, как в программе FUNLY-2.

Далее, программа FUNLY-2 (так же как и программы LOLA и MARS — SATURN, рассмотренные выше) использует во время работы три магнитные ленты для записи промежуточных результатов, поскольку вычисление искаженных волн, волновых функций и величин  $g_{K\Lambda_1\Lambda_2} (r_x, r_y)$  производится независимо. В программе OLYMP предусмотрен иной способ вычислений за счет смещения знаков сумм так, чтобы справа от знака соответствующей суммы не было выражений, не зависящих от индекса сумми-

рования. При такой организации счета необходимо вводить в память машины только искаженные волны и алгебраические коэффициенты. Это позволяет проводить расчеты угловых распределений без использования магнитных лент и с меньшим числом повторных вычислений, что значительно уменьшает время счета и требования к памяти ЭВМ.

Объем программы FUNLY-2—300 000<sub>8</sub> слов, объем программы OLYMP—100 000<sub>8</sub> слов. Время счета одного углового распределения по программе FUNLY-2 на СДС-6500 ~ 5 мин, по программе OLYMP на БЭСМ-6 для прямых процессов — около 10 мин, для обменных процессов ~10—15 мин.

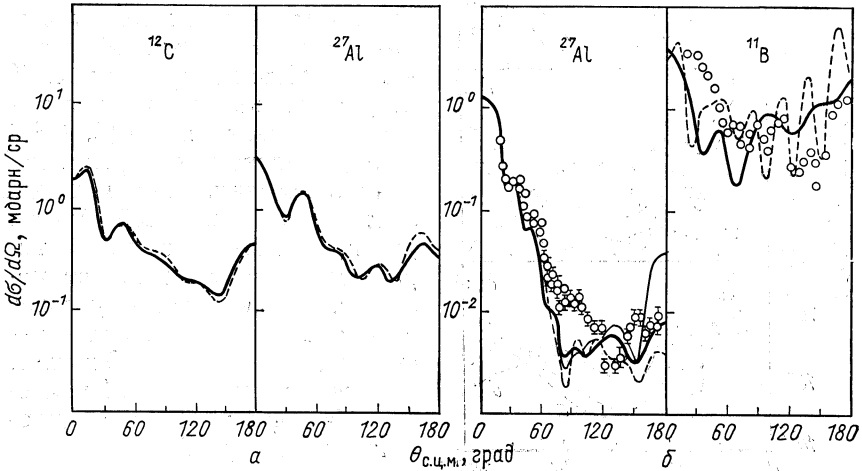


Рис. 20. Угловые распределения частиц из  $(d, p)$ -реакций на ядрах  $^{12}\text{C}$  и  $^{27}\text{Al}$  (а) и  $(\alpha, t)$ -реакций на ядрах  $^{11}\text{B}$  и  $^{27}\text{Al}$  (б) [101, 105]: кривые — расчет по программам OLYMP (жирные кривые); LOLA (тонкая кривая) и по программе, описанной в работе [78] (пунктирные кривые).

Угловые распределения частиц из  $(d, p)$ - и  $(\alpha, t)$ -реакций однонуклонной передачи на ядрах  $^{12}\text{C}$  и  $^{27}\text{Al}$  [101, 105] приведены на рис. 20. Кривые показывают результаты расчетов для механизма срыва по программам OLYMP, LOLA и по программе, описанной в работе [78]. Видно, что если в  $(d, p)$ -реакции учет конечного радиуса практически не влияет ни на форму, ни на абсолютное значение сечения (сечения совпадают в этих расчетах без дополнительной нормировки), то для  $(\alpha, t)$ -реакции ситуация совершенно другая. Эффекты отдачи и конечного радиуса существенно сказываются на форме углового распределения, особенно в  $(\alpha, t)$ -реакции на  $^{11}\text{B}$ . Однако для  $(\alpha, t)$ -реакций даже учет конечного радиуса не позволяет получить угловое распределение в согласии с экспериментом, если рассматривать только механизм

срыва. Это обстоятельство еще раз указывает на важность обменных механизмов в реакциях с  $\alpha$ -частицами.

Экспериментальное угловое распределение тритонов из реакции  ${}^7\text{Li}(d, t){}^6\text{Li}$  при  $E_d = 12$  МэВ [106] и распределения, вычисленные [107] по программе FUNLY-2 для прямых и обменных процессов, а также полное угловое распределение, определяемое

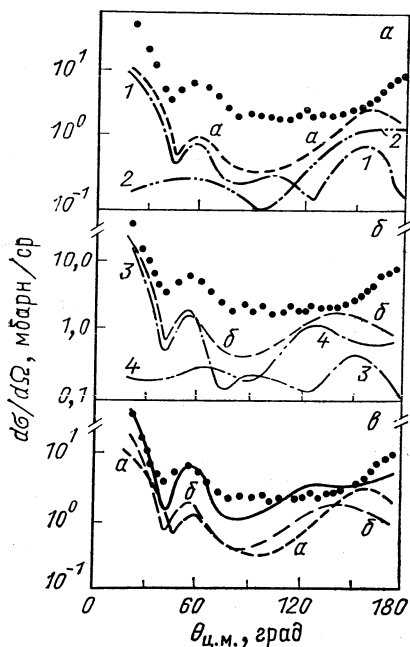


Рис. 21. Угловое распределение тритонов из реакции  ${}^7\text{Li}(d, t){}^6\text{Li}$  [106]: кривые — расчет по программе FUNLY-2:  $\alpha$  — прямые процессы; 1 — срыв; 2 — тяжелое замещение;  $\beta$  — обменные процессы; 3 — обычное замещение; 4 — тяжелый срыв;  $\epsilon$  — угловое распределение, являющееся некогерентной суммой прямых ( $\alpha$ ) и обменных ( $\beta$ ) процессов.

как некогерентная сумма прямых и обменных процессов, приведены на рис. 21. Следует подчеркнуть, что угловые распределения и для прямых, и для обменных процессов получены в результате когерентного сложения амплитуд отдельных механизмов. Приведенные на рис. 20 результаты наглядно показывают, что в реакции  ${}^7\text{Li}(d, t){}^6\text{Li}$  вклад каждого из четырех механизмов в сечение реакции не является малым во всей области углов, и только учет всех четырех механизмов позволяет получить теоретическое угловое распределение в согласии с экспериментальным. (Отметим, что все кривые на рис. 21 приведены без каких-либо нормирующих множителей.)

В заключение приводится таблица наиболее широко используемых программ с описанием их вычислительных особенностей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Самым уязвимым с точки зрения теоретического обоснования метода искаженных волн является то обстоятельство, что по своему определению этот метод основан на использовании оптической модели ядра. Поэтому, строго говоря, он должен быть отнесен к разряду полуэмпирических методов. Однако, с другой стороны, в наиболее последовательных вариантах МИВОКОР перестройка участвующих в реакции частиц в рамках задачи трех тел описывается точно (другие приближения, как, например, учет только одноступенчатых механизмов, не носят принципиального харак-

Т а б л и ц а

Программа	Тип реакции	Возможные механизмы реакции	Ограничения на переданный момент	Число интервалов		Число суммирований		Ориентировочное время счета на ЭВМ БЭСМ-6, мин
				однократных	двукратных	когерентных	некогерентных	
DWUCK — — Гриднев	Реакции с легкими частицами на относительно тяжелых ядрах	Срыв	<i>l</i> только одной четности	1	—	2	2	0,3
RCDC	Реакции однонуклонной передачи с тяжелыми ионами $c/x$ , $c/A \ll 1$	»	То же	3	—	6	2	1
BRUNHILD	Реакции однонуклонной передачи с тяжелыми ионами высоких энергий, $c/x$ , $c/A \ll 1$ , $\theta \lesssim 40^\circ$	»	Ограничений нет	2	—	8	2	6
WOMBLE	Реакции однонуклонной передачи с относительно легкими ионами высоких энергий на сравнительно легких мишенях ( $E > 10$ Мэв/нуклон, $\theta \lesssim 30^\circ$ )	Срыв	Ограничений нет	2	—	1	2	5
LOLA	Реакции передачи при выполнении условий: $J_c$ , $S_c$ , $T_c$ , $\Lambda_1$ и $\Lambda_2$ имеют одно значение	Срыв, тяжелый срыв	То же	1	1	7	1	15
MARS — SATURN	Реакции однонуклонной передачи с тяжелыми ионами на тяжелых ядрах	Срыв		1	1	7	2	5
FUNLY-2	Реакции на самых легких ядрах, когда $C = \alpha$	Прямые и обменные процессы	<i>l</i> только одной четности	1	1	4	1	5
OLYMP-1	$x \leq 4$ ; $A, B \leq 16$	Прямые процессы	То же	1	1	4	2	10
OLYMP-2	$x \leq 4$ ; $A, B \leq 16$	Обменные процессы	Ограничений нет	1	1	9	2	15
MERCURY	$x \leq 6$ ; $A \leq 40$ ; $E \lesssim 30-50$ МэВ	Срыв	То же	3	—	11	1	10
AICINT	$x \leq 4$ ; $A, B \leq 16$	Обменные процессы	» »	2	—	—	7	1
HI — DRC	$x \leq 6$ ; $A \leq 40$ ; $E \lesssim 30-50$ МэВ	Срыв	» »	4	—	17	1	10— 30



тера). В этом смысле можно сказать, и вся совокупность изложенных в настоящем обзоре результатов это подтверждает, что здание МИВОКОР построено на достаточно надежном фундаменте.

Результаты, приведенные в обзоре, относятся только к анализу угловых распределений, образующихся в реакции частиц. Однако нетрудно распространить аппарат МИВОКОР и для расчета угловых зависимостей таких характеристик реакций, которые связаны с недиагональными элементами матрицы плотности (например, поляризации конечных частиц, угловых корреляций этих частиц с продуктами распада конечного ядра, когда оно образуется в возбужденном состоянии). В частности, для расчета угловой зависимости поляризации вылетающих частиц нужно в оптические потенциалы и в потенциалы, ответственные за перестройку частиц, ввести спин-орбитальное взаимодействие. Угловые корреляции выражаются непосредственно через величины  $\beta_{\Lambda, \Lambda_2, l, m_l}(\vartheta, \kappa_{c_2}, \kappa_{c_1})$ , определяемые выражением (30), и поэтому их можно вычислить по имеющимся программам МИВОКОР.

Из результатов, приведенных в обзоре, следует, что до сих пор МИВОКОР использовали только для описания и анализа уже полученных экспериментальных результатов и не применяли для предсказания качественных особенностей угловых распределений конкретных реакций. Вопрос о том, в какой степени МИВОКОР обладает предсказательной силой, очень сложен. Он связан, в первую очередь, с чувствительностью результатов расчета к параметрам метода и с надежностью их определения. Параметры, необходимые для анализа, вводятся в программы МИВОКОР независимым образом (параметры оптических потенциалов — из подгонки угловых распределений упругого рассеяния и микроскопических подходов, спектроскопические факторы — из теоретических модельных расчетов). Все проведенные по МИВОКОР расчеты угловых распределений механизма срыва, а таких расчетов большинство, показывают, что наиболее сильно теоретические кривые меняются при изменении параметров оптических потенциалов. Микроскопические расчеты многотельных оптических потенциалов позволяют существенно уменьшить произвол выбора параметров и тем самым повысить надежность предсказываемых расчетных угловых распределений.

Что касается структурных множителей, то угловые распределения разных механизмов по-разному чувствительны к ним. Для прямых процессов в тех случаях, когда сечение факторизуется на кинематический и структурный множители (см. разд. 2), форма углового распределения для одного переданного момента  $l$  не зависит от спектроскопического множителя, так как этот множитель лишь нормирует абсолютное значение сечения. Если в реакции возможно несколько значений  $l$ , то форма углового распределения даже для прямых процессов уже существенно зависит

от отношений соответствующих спектроскопических множителей. Для обменных процессов чувствительность угловых распределений к структурным множителям значительно более сильная, поскольку даже для одного значения  $l$  структурные множители существенно влияют на форму угловых распределений.

Однако специальных исследований, посвященных чувствительности МИВОКОР к параметрам метода, не проводилось. Не изучались также соотношения сечений между переходами для различных реакций, имеющих одинаковый входной или выходной канал. Поэтому пока нет веских оснований для того, чтобы сделать определенные заключения о МИВОКОР как о методе, с помощью которого можно с достаточной степенью точности предсказывать абсолютные значения сечений реакций и их угловые характеристики.

Законность использования МИВОКОР для анализа энергетических зависимостей сечения (функций возбуждения) обосновать значительно сложнее. Это связано с тем, что, с одной стороны, экспериментальные функции возбуждения часто ведут себя крайне нерегулярно, в них наблюдаются резонансы различной формы и амплитуды, а с другой — оптическая модель, так же как и метод искаженных волн, по своему определению, могут претендовать только на описание гладкого дифференциального сечения, усредненного по некоторому интервалу энергий. Поэтому анализ функций возбуждения требует дальнейшего совершенствования самого метода.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tobocman W.** Direct Nuclear Reaction Theory. N. Y., Oxford University Press, 1964; **Austern N.** Direct Nuclear Reaction Theory. Wiley, N. Y., 1970.
2. **Austern N. e. a.** — Phys. Rev. B, 1964, v. 133, p. 1.
3. **Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W.** — Nucl. Phys. A, 1969, v. 139, p. 209.
4. **Tobocman W. e. a.** — Nucl. Phys. A, 1973, v. 205, p. 193; **Zelenskaja N. S.** Raport of Institute of Nuclear Physics. Cracow, N. 1002/PL, 1978.
5. **Graider K. R.** In: Proc. of Intern. Confer. of Nucl. React. with Heavy Ions. Heidelberg, 1969.
6. **Фаддеев Л. Д.** — ЖЭТФ, 1961, т. 12, с. 1014; — Докл. АН СССР, 1961, т. 6, с. 384.
7. **Neudatchin V. G. e. a.** — Phys. Lett. B, 1968, v. 27, p. 490; **Зеленская Н. С.** — Ядерная физика, 1971, т. 13, с. 734; **Gurbanovich I. S. e. a.** — Ann. of Phys., 1974, v. 87, p. 263; **De Takasy N. B.** — Nucl. Phys. A, 1974, v. 231, p. 243; **Managoli V., Robson D.** — Ibid., 1975, v. 252, p. 354; **Зеленская Н. С.** — Ядерная физика, 1977, т. 25, с. 514.
8. **Werby M. F.** — Phys. Rev. C, 1975, v. 11, p. 2405.
9. **Gell-Man M., Goldberger M. L.** — Phys. Rev., 1953, v. 91, p. 398.
10. **Теплов И. Б. и др.** — ЭЧАЯ, 1977, т. 8, вып. 4, с. 769.
11. **Hodson P. E.** — Rep. Progr. Phys., 1971, v. 34, p. 765.
12. **Sinha V.** — Phys. Rep. C, 1975, v. 20, p. 1.
13. **Верещагин А. Н. и др.** — Изв. АН СССР, Сер. физ., 1970, т. 34, с. 460; **Беляева Т. Л. и др.** (в печати). В кн: Обработка и интерпретация физических экспериментов. М., Изд-во МГУ, 1979, с. 84.

14. Perey C. M., Perey F. G.— Atomic Data and Nucl. Data Tables, 1976, v. 17, p. 2.
15. Токаревский В. В. Докторская диссертация. ИЯИ АН УССР, Киев, 1972; Ronsin G. e. a.— Nucl. Phys. A., 1973, v. 207, p. 353.
16. Dar A.— Phys. Lett., 1963, v. 7, p. 339; Bleir S. Y. Lectures in Theoretical Physics. V. VIII, Colorado, University of Colorado Press, Boulder, 1966; Иношии Е. В.— ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 1592; Frahn E. Fundamental Nuclear Theory. Vienna, Austria, Atomic Energy Agency, 1967.
17. Гриднев К. А., Оглоблин А. А.— ЭЧАЯ, 1975, т. 6, вып. 2, с. 393; Eck Y. S. e.a.— Nucl. Phys. A, 1975, v. 225, p. 157; Grotowsky K. Radial Shape of Nucl. Invited Papers Proc. Intern. Conf., Cracow, 1976, p. 239.
18. Симонов И. Н., Теренецкий К. О., Токаревский В. В.— Ядерная физика, 1971, т. 14, с. 104.
19. De Vries R. M. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 450.
20. Гурбанович И. С., Зеленская Н. С.— Ядерная физика, 1978, т. 27, с. 1513.
21. Neudatchin V. G. e.a.— Phys. Lett. B, 1971, v. 34, p. 581; Kukulin V. I., Neudatchin V. G., Smirnov Ju. F.— Nucl. Phys. A, 1975, v. 245, p. 429; Cohler M. D. e.a.— Phys. Lett. B, 1976, v. 63, p. 377.
22. Watanabe S.— Nucl. Phys., 1958, v. 8, p. 484.
23. Greenless G. W., Pyle G. Y., Tang I. C.— Phys. Rev., 1968, v. 171, p. 1115.
24. Watson Y. W.— Nucl. Phys. A, 1972, v. 198, p. 129; Saito S., Nishioka H., Yasuno M.— Progr. Theor. Phys., 1977, v. 58, p. 190.
25. Гурбанович И. С., Зеленская Н. С.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1978, т. 42, с. 2324.
26. Bingham H. G., Kemper K. W., Fletcher N. R.— Nucl. Phys. A, 1971, v. 175, p. 374.
27. Чернов И. П. и др.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1974, т. 38, с. 2530.
28. Delion D. S. e. a.— J. Phys. G., 1978, v. 4, p. 125; Гончар В. Г., Теренецкий К. О., Токаревский В. В.— Ядерная физика, 1976, т. 23, с. 87.
29. Вершинин Г. А., Черданцев П. А., Чернов И. П.— Ядерная физика, 1975, т. 22, с. 1150; Гулга Р. К.— ЭЧАЯ, 1978, т. 8, с. 717.
30. Von Oertzen W.— Nucl. Phys. A, 1970, v. 148, p. 529.
31. Fuller R. G.— Nucl. Phys. A, 1973, v. 216, p. 199.
32. Regge A. T.— Nuovo cimento, 1959, v. 14, p. 951; 1960, v. 18, p. 947.
33. Carlson B. V., McVoy K. W.— Nucl. Phys. A, 1977, v. 292, p. 310.
34. Braun G. E., Tang Y. C.— Phys. Rev., 1968, v. 176, p. 1235; Tang Y. C., Braun G. E.— Phys. Rev. C, 1971, v. 4, p. 1979.
35. Kondo Y. e.a.— Progr. Theor. Phys., 1975, v. 53, p. 1006.
36. Bohn H. e. a.— Phys. Rev. C, 1977, v. 16, p. 665.
37. Chatwin R. A. e.a.— Phys. Rev. C., 1970, v. 1, p. 975.
38. Michel F., Vanderpoorten R.— Phys. Rev. C, 1977, v. 16, p. 142.
39. Зеленская Н. С., Теплов И. Б., Юценко Т. А.— Ядерная физика, 1977, т. 26, с. 61.
40. Satchler G. R.— Nucl. Phys., 1964, v. 55, p. 1.
41. Гепперт-Майер М., Иенсен И. Г. Д. Элементарная теория ядерных оболочек. Пер. с англ., М., Изд-во иностр. лит. 1958; Эллиотт Дж., Лейн А. Модель ядерных оболочек.— В кн.: Строение атомного ядра. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959, с. 279.
42. Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф. Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М., Наука, 1969, с. 141.
43. Зеленская Н. С., Теплов И. Б.— Изв. АН СССР, Сер. физ., 1977, т. 41, с. 1711.
44. Cohen S., Kurath D.— Nucl. Phys. A, 1967, v. 101, p. 1. Бояркина А. Н. Структура ядер 1р-оболочки. М., Изд-во МГУ, 1973.
45. Talmi I.— Helv. Phys. Acta, 1952, v. 25, p. 185. Brody T. A., Moshinsky M. Table of Transformations Brackets. Mexico, 1960. Smirnov Yu. F.— Nucl. Phys., 1961, v. 27, p. 177; 1962, v. 39, p. 346.

46. Elbaz E.— Comptes rendus d'activite 1973—1974. Departement de physique nucleaire, C.8.I.
47. Jackson A. D., Maximan L. C.— SIAM, 1972, v. 3, p. 446.
48. Sawaguri T., Tobocman W.— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 2223.
49. Anni R., Taffara T.— Nuovo cimento A, 1974, v. 22, p. 11.
50. Elbaz E., Meyer J., Nahabetian R.— Lett. Nuovo cimento, 1974, v. 10, p. 418.
51. Moshinsky M.— Nucl. Phys., 1959, v. 13, p. 104.
52. Ахизер А. И., Померанчук И. Я. Некоторые вопросы теории ядра. М., Физматгиз, 1950, с. 121.
53. Kubo K. I., Hiraba M.— Nucl. Phys. A, 1972, v. 187, p. 186; Kubo K. I.— Nucl. Phys. A, 1972, v. 187, p. 205; Kubo K. I., Nemoto F., Bando H.— Nucl. Phys. A, 1974, v. 224, p. 573.
54. Schmittroth F., Tobocman W., Golestanen A.— Phys. Rev. C, 1970, v. 1, p. 377.
55. Bonche P., Giraud B.— Nucl. Phys. A, 1973, v. 199, p. 160.
56. Hill D. L., Wheeler J. A.— Phys. Rev., 1953, v. 89, p. 1102; Griffin J., Wheeler J. A.— Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 311.
57. Buttle P. J. A., Goldfarb L. J. B.— Nucl. Phys., 1966, v. 78, p. 409.
58. Braun-Münzinger P., Harney H. L.— Nucl. Phys. A, 1974, v. 223, p. 381.
59. Борбей Н., Долинский Э. И., Туровцев В. В.— Ядерная физика, 1968, т. 8, с. 492.
60. Nagarajan M. A.— Nucl. Phys. A, 1973, v. 209, p. 485.
61. McCarthy I. E., Pursey D.— Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 578. Janus R. T., McCarthy I. E.— Phys. Rev. C, 1974, v. 10, p. 1041.
62. Зеленская Н. С., Лебедев В. М., Юценко Т. А.— Ядерная физика, 1978, т. 28, с. 90.
63. Dodd L. R., Greider K. R.— Phys. Rev., 1969, v. 180, p. 1187.
64. Nagarajan M. A.— Nucl. Phys. A, 1972, v. 196, p. 34.
65. Baltz A. J.— Phys. Rev. C, 1976, v. 13, p. 668.
66. Baltz A. J., Kahana S.— Phys. Rev. C, 1974, v. 9, p. 2243.
67. Broglia R. A., Winter A.— Nucl. Phys. A, 1972, v. 182, p. 112.
68. Edwards S. e.a.— Phys. Rev. C, 1973, v. 8, p. 456.
69. De Vries R. M.— Phys. Rev. C, 1973, v. 8, p. 951.
70. Low K. S., Tamura T.— Phys. Rev. C, 1975, v. 11, p. 789.
71. Chant N. S., Craig J. N.— Phys. Rev. C, 1976, v. 14, p. 1763.
72. Эдмондс А. Угловые моменты в квантовой механике.— В кн.: Деформация атомных ядер. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958, с. 314.
73. McMahan C. A., Tobocman W.— Nucl. Phys. A, 1973, v. 212, p. 465.
74. Robson D., Koshel R. D.— Phys. Rev. C, 1972, v. 6, p. 1125.
75. Charlton L. A.— Phys. Rev. C, 1973, v. 8, p. 146.
76. Lane A. M., Robson D.— Phys. Rev., 1969, v. 178, p. 1715.
77. Kunz P. D.— Program DWUCK. University of Colorado. Boulder, Colorado, 1969, (unpublished).
78. Гриднев К. А. и др.— Препринт ОИЯИ, 2458. Дубна, 1965.
79. Бут Х. Д. Численные методы. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит. 1969.
80. Bonche P.— Program SETILL. Thesis. Paris, 1974 (unpublished).
81. Bethge K., Pullen D. J., Middleton R.— Phys. Rev. C, 1970, v. 2, p. 395.
82. Liu M. e.a.— Nucl. Phys. A, 1970, v. 143, p. 34.
83. Bock R. e.a.— Phys. Lett., 1965, v. 18, p. 45.
84. Wenneis S., Braun-Münzinger P., Harney H. L.— Report MPIH, 1974, v. 19.
85. Von Oertzen e. a.— Nucl. Phys. A, 1970, v. 143, p. 34.
86. Braun-Münzinger P., Harney H. L., Wennies S.— Nucl. Phys. A, 1974, v. 235, p. 190.
87. De Vries R. M. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 683.
88. De Vries R. M. Computer code «LOLA». Saclé, 1974 (unpublished).

89. Hange P. S.— Nucl. Phys. A, 1974, v. 223, p. 395.
90. Tamura T., Low K. S.— Comp. Phys. Com., 1974, v. 8, p. 349.
91. Blair J. S. e.a.— Phys. Rev. C, 1974, v. 10, p. 1856.
92. Ford J. L. C. e.a. Argonne National Laboratory PHY 1973 B, 1973 (unpublished).
93. Ellegard C., Vedelsby P.— Phys. Lett. B, 1968, v. 26, p. 155.
94. Ring P., Werner E.— Nucl. Phys. A, 1973, v. 211, p. 198.
95. Charlton L. A., Robson D.— Techn. Report. Florida State University, 1973, N 5; — Bull Amer. Phys. Soc., 1972, v. 17, p. 508.
96. Lee L. L. e.a.— Phys. Rev. B, 1964, v. 136, p. 971.
97. White R. L., Charlton L. A., Kemper K. W.— Phys. Rev. C, 1975, v. 12, p. 1918.
98. Morgan G. R., Fletcher N. R., Norton G. A.— Phys. Lett. B, 1975, v. 60, p. 35.
99. Moore G. E., Kemper K. W.— Phys. Rev. C, 1976, v. 14, p. 977.
100. Зеленская Н. С., Юценко Т. А. В кн.: Обработка и интерпретация физических экспериментов. Вып. 7. М., Изд-во МГУ, 1978, с. 47.
101. Дмитриева Т. А. и др.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1974, т. 38, с. 2567.
102. Лебедев В. М., Спасский А. В., Теплов И. Б.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1973, т. 37, с. 2663.
103. Talley T. L. e.a.— Bull Amer. Phys. Soc., 1966, v. 11, p. 337.
104. Заикин П. Н. и др. В кн.: Обработка и интерпретация физических экспериментов. Вып. 5. М., Изд-во МГУ, 1976, с. 48.
105. Lebedev V. M. e. a.— Nucl. Phys. A, 1978, v. 298, p. 206.
106. Zander A. R., Kemper K. W., Fletcher N. R.— Nucl. Phys. A, 1971, v. 173, p. 273.
107. Werby M. F., Edwards S.— Phys. Rev. C, 1973, v. 8, p. 978.
108. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л., Наука, 1975.
109. Crowley B. J. B.— Ann of Phys., 1979, v. 117, p. 323.
110. Crowley B. J. B.— J. Phys. A: Math. Gen., 1978, v. 11, p. 509.
111. Crowley B. J. B. Computed Code WOMBLE, Oxford. Department of Theoretical Physics. 1977 (unpublished).
112. Paschopoulos I. e. a.— Nucl. Phys. A, 1975, v. 252, p. 173.