

## НЕТРИВИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЯ

«Истинные законы не могут быть линейными...»

*А. Эйнштейн*

*А. Т. Филиппов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Работа содержит обзор основных физических идей, возникших в связи с изучением солитонных решений в нелинейных теориях поля. Кратко изложены основные аналитические методы, используемые при решении соответствующих нелинейных краевых задач. Систематически применяется метод редукции этих задач к проблемам классической механики точек. Подробно рассмотрены решения, имеющие особенности по координатным и импульсным переменным, в частности, решения, обращающиеся в нуль вне конечной области пространства и решения, обращающиеся в бесконечность на некоторой замкнутой поверхности. Подробно обсуждаются решения уравнений теории поля в одномерном пространстве, сферически-симметричные решения уравнений Янга — Миллса, вихри в сверхтекучей жидкости, нелинейное уравнение для пропагатора электрона в «конечной» квантовой электродинамике и некоторые другие задачи. Указаны возможные применения обсуждаемых методов к решению других проблем.

This is a review of ideas related to solutions in non-linear field theories. Some useful analytic methods for solving corresponding non-linear boundary value problems are outlined. A method of reducing some of them to simple problems of classical point-particle dynamics is systematically employed. The soliton-like solutions with singularities in coordinate and for momentum variables are investigated. A special attention is given to solutions which are zero outside of a finite domain in space and to solutions having a singularity on a closed surface. Qualitative properties of one (space) dimensional equations are discussed in detail as well as spherically-symmetric solutions of the Yang-Mills equations, vortices in superfluids, solutions of a non-linear electron propagator equation in the «finite» Q.E.D., etc. Applications of the analytical and qualitative methods discussed in the text to diverse physical problems are outlined.

### ВВЕДЕНИЕ

В течение многих лет большинство исследователей, занимающихся проблемами квантовой теории поля и ее приложений к физике элементарных частиц, пытались построить полевую теорию взаимодействий частиц на основе квантовой электродинамики, и считали, что в нулевом приближении взаимодействие можно «выключить», а затем учесть его эффекты с помощью каких-либо

приближений. Теория возмущений, пригодная для расчетов в квантовой электродинамике, очевидно, не была приспособлена для решения проблем теории сильных взаимодействий, и поэтому одной из основных задач считалось суммирование рядов теории возмущений или же построение последовательных приближений, непосредственно не связанных с малостью взаимодействия.

В последнее время, однако, выяснилось, что в наиболее интересных для физических приложений теории поля, взаимодействие выключать нельзя даже в нулевом приближении. Теперь представляется более вероятным, что сначала надо найти решения нелинейных уравнений классической теории поля, а затем выполнять квантование «вблизи» этих нетривиальных классических решений. Неприменимость идеи о выключении взаимодействия связана с тем, что при сколь угодно малой константе связи нетривиальные решения не переходят в решения при нулевой константе связи. К нетривиальным решениям относятся давно известные в гидродинамике уединенные волны (солитоны), монополи, вихри, инстантоны и т. п. Изучению некоторых из этих объектов и посвящен обзор.

Сейчас уже существует несколько очень хороших обзорных работ по этой теме, которые в дальнейшем широко цитируются и используются. В них подробно изложены найденные в явном аналитическом виде нетривиальные решения классических уравнений и методы их квантования. В частности, особенно полно представлен метод обратной задачи рассеяния и квазиклассическое квантование. Хорошо освещены и применения методов алгебраической топологии и алгебраической геометрии к построению топологических солитонов.

Основная цель обзора — показать, что классические качественные и приближенные методы математической физики, хорошо зарекомендовавшие себя при изучении нелинейных проблем в других областях науки, могут принести пользу и в квантовой теории поля. Помимо этого, значительное место будет отведено разного рода разрывным солитоноподобным решениям, которые пока изучались лишь эпизодически. Нам хотелось не только дать некоторое представление о поразительном разнообразии явлений, открывающихся в нелинейных теориях, но и указать на их связь с нелинейными явлениями, иногда весьма далекими от физических. Опыт, накопленный при решении таких задач, может обогатить арсенал методов, применяемых в квантовой теории поля, и подсказать новые физические идеи. Обращение к этому опыту кажется уместным и своевременным.

В первом разделе обзора сделана попытка обрисовать в общих чертах современное состояние исследований нелинейных задач теории поля и их связей с другими проблемами. Не затрагиваются лишь применения метода обратной задачи рассеяния и топологи-

ческих методов. Второй раздел содержит краткий очерк основных математических отличий нелинейных задач от линейных, ясное понимание которых существенно при их использовании в физике. Коротко изложены математические методы и результаты, полезные для уяснения следующих разделов, которые в основном иллюстрируют идеи, сформулированные в двух первых разделах. Отбирая примеры, автор стремился лишь к тому, чтобы они были достаточно простыми и разнообразными. Приложения к более сложным задачам лишь намечены. Список литературы не полон, и часто цитируются не основополагающие работы, а обзоры или более поздние статьи. Довольно широко цитируются монографии, использованные при работе над обзором. Хотя многие из них могут показаться далекими от основной темы, автор надеется, что знакомство с ними будет полезным читателю.

## 1. ОБЗОР ОСНОВНЫХ ИДЕЙ

Возможность математического описания самых разнообразных явлений — одна из наиболее поразительных отличительных особенностей научного знания. Еще более удивительно сколь разные по своей природе научные проблемы решаются по существу одинаковыми математическими методами. Замечательный пример этой «всеядности» математики — теория колебаний и волн, не только охватывающая все физические теории (см., например, [1—6]), но и получившая в последнее время нетривиальные приложения в химии, биологии, социологии и других науках (см., например, [7—10]).

Математическая формулировка огромного большинства научных задач приводит к необходимости решать те или иные нелинейные уравнения. Наиболее полно разработана теория нелинейных дифференциальных уравнений. Задачи классической механики сводятся к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$du_i/dt = f_i(u_1, \dots, u_N; t) \quad (1)$$

с начальными условиями  $u_i(t_0) = u_i^0$  (задача Коши).

Наиболее изучены (см., например, [11—13]) консервативные динамические системы, правые части которых не зависят от  $t$ , и выражаются через функцию Гамильтона  $H(p, q)$ :

$$dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i; \quad dq_i/dt = \partial H/\partial p_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Как в механике, так и в других проблемах, важное значение приобретают устойчивость решений относительно малых вариаций начальных значений или правых частей уравнений. Кроме того очень часто возникает необходимость решать вместо задачи Коши некоторую краевую задачу, например,  $u_i(t_i) = u_i^0$ , где  $t_i$ , в част-

ности, может быть равно  $\infty$ . В некоторых проблемах приходится использовать граничные условия более общего вида.

В механике континуума, теории поля, квантовой механике и в других теориях наиболее часто встречаются нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными (УЧП). Типичные примеры таких уравнений

$$\partial^2 u_i / \partial t^2 - \Delta u_i = f_i(u_1, \dots, u_N); \quad (3)$$

$$\gamma \partial u_i / \partial t - \Delta u_i = f_i(u_1, \dots, u_N), \quad (4)$$

где  $\gamma$  — вещественная или мнимая постоянная;  $u_i \equiv u_i(x, t)$ , в частности,  $u_i$  может не зависеть от  $t$ . Многочисленные примеры использования и исследования этих и более сложных УЧП можно найти, например, в книгах [5, 6, 9, 14—20]. Отметим, что (3) и (4) относятся к простейшему типу нелинейных уравнений. В математической литературе уравнения с такой нелинейностью называют почти линейными [16, 17]. Как и в случае ОДУ, к уравнениям (3) и (4) должны быть добавлены некоторые начальные и граничные условия. Общая теория решения таких задач разработана достаточно полно лишь в линейной теории.

Уравнения (3), (4) обычно являются экстремалиями некоторого функционала (лагранжиана или гамильтониана) и тогда их можно записать в лагранжевой или гамильтоновой форме. Аналогичные функционалы существуют и для некоторых более сложных УЧП, не относящихся к классу почти линейных уравнений (см., например, [5, 6]).

Например, если

$$f_i = -\partial V / \partial u_i; \quad V \equiv V(u_1, \dots, u_N), \quad (5)$$

то уравнения (3) вытекают из вариационного принципа для лагранжиана ( $\partial_\mu \equiv \partial / \partial x^\mu$ ):

$$L \equiv \int d^3x \mathcal{L}(x) = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \sum_i (\partial_\mu u_i)^2 - V(u) \right\} \quad (6)$$

или гамильтониана:

$$H \equiv \int d^3x \mathcal{H}(x) = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u_i)^2 \right] + V(u) \right\}. \quad (7)$$

Граничные условия для функций  $u_i$  часто следуют из условия ограниченности для  $L$  или  $H$ , или из некоторых условий нормировки для функций  $u_i$ . В других случаях их можно получить, введя в  $\mathcal{L}$  или  $\mathcal{H}$  соответствующие дополнительные члены (см., например, [21], гл. 4).

Простейшие задачи для УЧП тесно связаны с ОДУ, а в некоторых случаях просто сводятся к ним. Рассмотрим, например, одномерное пространство, так что  $\nabla u_i \equiv du_i/dx$ . Если  $u_i$  не зависит от времени, то уравнения (3) и (4) имеют вид

$$d^2u_i/dx^2 = \partial V/\partial u_i \equiv -\partial U/\partial u_i. \quad (8)$$

Определив *квазивремя*  $\tau \equiv x$ , *квазиэнергию*

$$K = \frac{1}{2} \sum_i \dot{u}_i^2 + U(u_1, \dots, u_N), \quad (9)$$

где  $u_i \equiv du/d\tau \equiv du/dx$ , и *квазимпульс*  $v_i \equiv \dot{u}_i$ , можно записать систему (8) в гамильтоновой форме (2):

$$\dot{v}_i = -\partial K/\partial u_i; \quad \dot{u}_i = \partial K/\partial v_i. \quad (10)$$

При этом (8) можно рассматривать как лагранжевы уравнения движения этой механической системы. К такой же задаче приводят решения уравнений (3) и (4) с простой зависимостью от времени.

Для уравнений (3) представляют интерес решения вида  $u_i(x, t) \equiv u_i(z) \equiv u_i(x - V_i t)$ , где  $|V_i| < 1$ . Полагая  $\gamma_i^2 \equiv (1 - V_i^2)^{-1}$ ,  $u_i \equiv \gamma_i \bar{u}_i(z)$ , можно переписать уравнение (3) с правой частью (5) в виде

$$\Delta \bar{u}_i(z) = \partial \bar{V}/\partial \bar{u}_i; \quad \bar{V} \equiv V(\gamma_1 \bar{u}_1, \dots, \gamma_N \bar{u}_N), \quad (11)$$

что в одномерном пространстве можно привести к гамильтоновой форме (10). Если  $u_i$  в (3) — комплексные функции, а  $V(u)$  зависит лишь от  $|u_i|^2$ , то уравнение (3) имеет решения вида  $u_i(x, t) = \exp(-i\omega_i t) u_i(x)$ . Переопределяя  $V$ , приходим к уравнениям

$$\Delta u_i(x) = \frac{\partial}{\partial u_i^*} [V - \omega^2 |u_i|^2], \quad (12)$$

что в одномерном пространстве немедленно приводится к гамильтоновой системе.

Аналогичные решения можно написать для уравнений (4). При  $N = 1$ ,  $\gamma = -i$ , когда уравнение (4) можно рассматривать как нелинейное обобщение уравнения Шредингера, оно допускает решение вида  $u(x - Vt) \exp[-i(\omega t - Vx/2 + V^2 t/4)]$ . При вещественном  $\gamma$  можно искать следующие решения:  $u_i(x, t) = u_i(x - V_i t)$ . При этом уравнения имеют вид

$$\Delta u_i(z) = \partial V/\partial u_i - \gamma(V_i \nabla) u_i(z). \quad (13)$$

Даже в одномерном случае эта система не сводится к гамильтоновой. Однако, последний член в правой части равен  $\gamma V_i du_i/dz$ . Если считать  $z$  квазивременем  $\tau$ , а  $u_i$  координатой квазиточки механической системы, то, как легко понять, эти члены можно

интерпретировать как диссипативные. При этом вместо сохранения квазиэнергии (9) получаем

$$dK/d\tau = - \sum \gamma V_i \dot{u}_i^2; \dot{u}_i \equiv du_i/d\tau \equiv du_i/dz. \quad (14)$$

Если  $\gamma \geq 0$ , что соответствует диссипации настоящей энергии, описываемой исходным уравнением (4), получаем закон диссипации квазиэнергии для соответствующей динамической системы.

К неконсервативным динамическим системам приводят и уравнения (3) и (4) в пространствах большего числа измерений. Исключая зависимость от времени одним из указанных выше способов и рассматривая решение с определенной пространственной симметрией (сферической, аксиальной) или разделяя переменные, когда это возможно, можно получить из (3) и (4) динамические системы. Например, уравнение (3) для сферически или аксиально симметричных стационарных решений с потенциалом (5) сводится к решению системы

$$\frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{du_i}{dr} = - \frac{\partial U}{\partial u_i}, \quad (15)$$

где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ,  $\nu = 1$  при аксиальной симметрии и  $\nu = 2$  для сферически симметричных решений. Отождествляя  $r$  с квази-временем  $\tau$ , видим, что система (15) неконсервативна. Квазиэнергия  $K$ , определяемая выражением (9), не сохраняется:

$$\frac{dK}{d\tau} = - \frac{\nu}{\tau} \sum_i \dot{u}_i^2 \leq 0. \quad (16)$$

В теории комплексного скалярного поля такой подход был использован в работе [22] (см. также [20]).

Для приложений в физике элементарных частиц представляют интерес также и симметричные решения в евклидовом пространстве — времени, получающиеся при  $t = ix_0$  (инстантоны, мероны и т. п. см. [23—25]). Такие решения всегда приводят к неконсервативным динамическим системам типа (15), где  $r^2 = x_0^2 + x_1^2 + \dots$ ;  $\nu = n + 1$ ;  $n$  — размерность пространства.

Выше приведены простейшие уравнения для скалярных полей. Наиболее интересны для приложений в физике элементарных частиц векторные и спинорные поля. Некоторые примеры построения механических аналогий для таких полей будут рассмотрены ниже. Финкельштейн и др. [22] механическую аналогию изящно применили для получения решений нелинейного обобщения уравнения Дирака, локализованных в пространстве и имеющих конечные массы, заряды и спины. Заметим, что в работе [22] имеются ошибки, исправленные в последующей работе [26] (см. также [20]).

В работах [22, 26] рассмотрены уравнения для спинорного поля  $\psi$ , вытекающие из лагранжиана

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - M\bar{\psi}\psi + a(\bar{\psi}\psi)^2 + b(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2. \quad (17)$$

В классической теории наиболее общая комбинация и вариантов четвертой степени по  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  сводится к написанной комбинации скалярного и псевдоскалярного взаимодействий. Для состояний с определенным значением полного момента, связанного с оператором  $k = \gamma^0 [-i\sigma(\mathbf{r} \times \nabla) + 1]$ , разложение  $\psi$  по шаровым спинорам, являющимся собственными функциями  $k$  с собственными значениями  $\pm(j + 1/2)$ , позволяет выполнить разделение переменных. В итоге зависимость от углов выделяется в явном виде и  $\psi(\mathbf{x}, t) = \exp(-i\omega t)\psi(\mathbf{x})$  определяется двумя функциями  $f$  и  $g$ , зависящими от  $x = Mr$  и удовлетворяющими системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. При  $|k| = 1$  эти уравнения можно записать в форме

$$df/dx = -\partial K/\partial g, \quad dg/dx = \partial K/\partial f - 2g/x; \quad (18)$$

$$K = \{(1 + \beta)g^2 - (1 - \beta)f^2 + (f^4 + g^4 + \lambda f^2 g^2)/2\}/2, \quad (19)$$

где  $\lambda = -2[1 + (2/3)(b/a)]$ ,  $\beta = -\omega/M$ . Легко видеть, что

$$\frac{dK}{dx} = -\frac{2}{x}g \frac{\partial H}{\partial g} = -\frac{2}{x}g^2 [(1 + \beta) + g^2 + \frac{1}{2}\lambda f^2]. \quad (20)$$

На этом примере особенно ясно видно, как весьма сложная задача теории поля свелась к довольно хорошо изученной и достаточно наглядной задаче классической динамики, для исследования и решения которой можно использовать богатый арсенал математических орудий и наглядные образы. Отличие от задач классической динамики состоит, во-первых, в том, что нас могут интересовать весьма необычные с точки зрения классической механики начальные и граничные условия и, во-вторых, гамильтонианы также могут иметь довольно непривычный вид. С точки зрения современного абстрактного подхода к классической динамике (ср. [12, 13]), это не является существенным ограничением, и можно сказать, что приведенные выше рассуждения дают нам *метод* решения определенного класса задач теории поля *сведением их к задачам классической динамики*. Идея этого метода столь очевидна, что трудно установить, кто его впервые применил. По-видимому, сознательное систематическое использование метода в теории поля начинается с работ [22, 26]. В последнее время многие нетривиальные приложения рассмотрены в работах Ли с сотр. [27—29], см. также [25, 30]. В этом обзоре коснемся лишь задач, приводящих к довольно простым динамическим системам. Для полного решения таких задач не нужно привлекать современные математические методы, однако, при использовании динамических систем с боль-

шим числом степеней свободы применение современных методов и результатов станет необходимым и безусловно будет чрезвычайно плодотворным.

В качестве дальнейшего развития идеи о сведении полевых конфигураций к более простым механическим системам можно привести теорию релятивистской струны (см. обзор [31] и цитированную в нем литературу). Идея состоит в том, что в определенном смысле наиболее существенными могут оказаться такие пространственно-одномерные конфигурации полей, которые ведут себя подобно достаточно простому распределенному механическому объекту (струна). Существуют некоторые указания на то, что это действительно происходит в теории поля Янга — Миллса в 4-пространстве времени [32]. Ниже покажем, что использование обсуждавшихся выше более простых дискретных динамических моделей может оказаться полезным и для систематического поиска полевых конфигураций, подобных распределенным механическим системам типа струны.

Рассмотрим теперь начальные и граничные условия, которым должны удовлетворять решения дискретных динамических систем, связанных с конфигурациями полей. Наибольший интерес, естественно, вызывают конфигурации, соответствующие конечной энергии (7). Условие конечности энергии накладывает определенные требования на функции  $u_i$ , которые легко устанавливаются в каждом конкретном случае. Стандартное условие при  $|x| \rightarrow \infty$  есть:  $|u_i| \rightarrow 0$ ,  $|\nabla u_i| \rightarrow 0$  достаточно быстро.

Однако, часто существует и другой класс решений, для которых выполнены условия:  $u_i \rightarrow u_i^0$  достаточно быстро при  $|x| \rightarrow \infty$  ( $u_i^0$  — константы). Рассмотрение решений динамической системы (8) или (9) показывает (см. подробнее следующие разделы), что такая ситуация может реализоваться, если

$$\frac{\partial V}{\partial u_i^0}(u_1^0, \dots, u_N^0) = 0,$$

т. е. если  $u_i^0$  — точка покоя динамической системы. В теории поля такая конфигурация полей  $u_i(x, t) = u_i^0 \equiv 0$  соответствует *нетривиальному вакууму* (для тривиального вакуума  $u_i^0 \equiv 0$ ). Из общей теории динамических систем следует, что квазиточке  $u_i(\tau)$  требуется бесконечное квазивремя для того, чтобы достичь точки покоя, а отсюда следует, что  $u_i$  действительно быстро стремятся к  $u_i^0$ . Например, для одной функции  $u$  при  $u \rightarrow u^0$  имеем  $V(u) = V(u^0) + \frac{(u-u^0)^2}{2} V''(u^0) + \dots$ , где предполагается  $V''(u^0) > 0$ . Из сохранения квазиэнергии [уравнение (10)] и из условия  $\dot{u} \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow u^0$  следует, что  $K = -V(u^0)$ , т. е.  $\dot{u} \approx |u^0 - u| \sqrt{V''(u^0)}$ , откуда получаем  $u = u^0 - C \exp[-x \sqrt{V''(u^0)}]$ .



Таким образом, разность  $u^0 - u$  экспоненциально мала при  $x \rightarrow +\infty$ . Если  $V''(u^0) = 0$ , но  $V^{(m)}(u^0) > 0$  при некотором  $m$ , то  $u^0 - u$  стремится к нулю как  $\sim x^{-2/(m-2)}$ . Теперь можно воспользоваться тем обстоятельством, что потенциальная функция определена лишь с точностью до постоянной и заменить в (7)  $V(u)$  на  $V(u) - V(u^0)$ . Если эта разность достаточно быстро стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , (а  $|\nabla u_i|^2 \rightarrow 0$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ ), то энергия остается конечной, и такое решение соответствует *топологическому солитону*. Если энергия остается конечной за счет того, что  $|u_i|^2$ ,  $|\nabla u_i|^2$  достаточно быстро обращаются в нуль при  $|x| \rightarrow \infty$ , то решение отвечает *нетопологическому солитону*.

Заметим, что термин *солитон* будет использован в широком смысле, считая, что это любое классическое решение нелинейных локальных уравнений поля, сосредоточенное в некоторой области пространства во все времена и имеющее конечную энергию (см. [27—29]). В математической литературе солитонem называют такие решения весьма специальных нелинейных уравнений, которые сохраняют скорость и форму при столкновениях (см., например, [33, 6]). Уравнения, описывающие эти «настоящие» солитоны, обладают бесконечным набором полиномиальных законов сохранения, и их можно рассматривать как вполне интегрируемые гамильтоновы системы.

В приведенном выше определении солитона подразумевалось, что функции  $u_i$  непрерывны и достаточное число раз дифференцируемы. Для физических приложений это может оказаться слишком сильным ограничением, и будем также рассматривать решения, которые могут иметь разрывы в первых производных (слабые разрывы) или даже в самих функциях (сильные разрывы). Область  $D$ , ограниченную поверхностью разрыва  $\partial D$ , будем называть *доменом*. Весьма интересен для приложений частный случай домена, когда решение определено лишь внутри этой области, так что интегралы (6) и (7), определяющие действие и энергию, берутся лишь по области  $D$  и содержат поверхностные члены, определяющие граничные условия на  $\partial D$ . В качестве примера домена можно привести массачусетский «мешок» [35] (см. также обзор [36]) и его модификации [37, 38]. Домены играют существенную роль в магнетиках, сверхпроводниках и в других упорядоченных средах (см., например, [39]). Следует лишь предостеречь читателя, что здесь термин *домен* используем так же, как и солитон несколько вольно. Заканчивая это терминологическое отступление, заметим, что станфордский мешок [40] в нашей терминологии есть безусловно топологический солитон. По этой причине мы и предпочитаем пользоваться термином *домен* для мешка с особенностью на границе.

Необходимость изучения разрывных решений следует также из того, что у большинства интересных для приложений нелиней-

ных уравнений почти все решения имеют особенности или в точке, или на поверхности. Решения без особенностей, определенные на всем пространстве, — редкое исключение (см. разд. 2), и интерес к ним объясняется их столь же исключительными свойствами. Однако, не менее интересными свойствами могут обладать и решения с особенностями. Достаточно привести пример сингулярных решений в теории гравитации Эйнштейна — решение Шварцшильда (см., например, [19]) и решения с космологической сингулярностью (см. [41—43]).

Выше мы говорили лишь о нелинейных уравнениях классической теории поля. Их изучение интересно само по себе и находит многочисленные приложения в классической и квантовой физике сплошных сред. Сверх того, проблемы квантовой механики и квантовой теории поля часто формально сводятся к проблемам рассмотренного выше типа (см. примеры, приведенные ниже). Однако, в настоящее время наибольшее внимание привлекает другая возможность использования решений классических уравнений в квантовой теории поля. При определенных условиях классическое решение может оказаться хорошим первым приближением для квантовой теории. Рассмотрим скалярные поля  $u_i$  и введем формально константу связи  $g$ , положив  $V(u) = v(gu)/g^2$ , где  $v(gu)$  можно разложить в ряд по степеням  $g$ :

$$v(gu) = \sum_i \frac{1}{2} m_i^2 g^2 u_i^2 + O(g^3 u_i^3).$$

Тогда при  $g \rightarrow 0$  уравнения движения для  $u_i$  переходят в линейные уравнения, описывающие плоские волны, а не солитоны. Чтобы получить при  $g \rightarrow 0$  солитон, положим  $u_i = u_i^{cl}/g$ , тогда  $u^{cl}$  удовлетворяет уравнению (3), а лагранжиан равен  $\mathcal{L}(u^{cl})/g^2$ , так что  $g^2$  играет роль постоянной Планка  $\hbar$ . (Напомним, что в квантовой теории действие равно  $\mathcal{L}^{cl}/\hbar$ .)

Таким образом, при малом значении  $g$  можно ожидать, что возможно квазиклассическое разложение квантованных полей. Для одного скалярного статического поля в одномерном пространстве уравнение для  $u^{cl}$  имеет вид  $u_{cl}'' = V'(u_{cl})$ . Представим квантовый оператор  $u$ , соответствующий классическому полю, в виде:

$$u = \frac{1}{g} u_{cl}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \psi_n(x) \exp(i \omega_n t), \quad (21)$$

где  $q_n$  — операторы;  $\psi_n$  — полная ортонормированная система функций. Подставляя это выражение в уравнение (3) и приравни-

вая члены при одинаковых степенях  $g$ , получаем для  $\psi_n$  уравнения (члены порядка  $g^0$ )

$$(-d^2/dx^2 + v''(u_{cl}))\psi_n = \omega_n^2 \varphi_n. \quad (22)$$

Члены порядка  $1/g$  дают уравнение для  $u_{cl}(x)$ :

$$d^2u_{cl}/dx^2 = v'(u_{cl}). \quad (23)$$

Дифференцируя (23) по  $x$ , получаем, что  $du/dx \equiv \psi_1(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(-d^2/dx^2 + v''(u_{cl}))\psi_1(x) = 0, \quad (24)$$

которое совпадает с (22) при  $\omega_n = 0$ .

Следовательно, мы получили *линейное* уравнение Шредингера для волновых функций  $\psi_n$ . Это уравнение обязательно имеет  $\omega_1 = 0$  одним из своих собственных значений (24). Для того чтобы классическое решение  $u_{cl}$  было стабильным относительно малых флуктуаций, остальные собственные значения должны быть положительными,  $\omega_n^2 > 0$ ,  $n \geq 2$ . Чтобы понять это, достаточно считать второй член в правой части (21) классической возмущающей функцией. Если некоторое  $\omega_n^2 < 0$ , то возмущения будут экспоненциально расти при  $t \rightarrow \infty$ . Другой способ рассуждения состоит в том, чтобы рассмотреть первую и вторую вариации классической энергии (7) при  $t = \text{const}$  относительно функции  $u$ . Обращение в нуль первой вариации (стационарность энергии) дает уравнение (23), а условие минимума энергии, т. е. неотрицательность второй вариации, выражается в виде требования неотрицательности собственных значений оператора Шредингера (22). Заметим, что уравнение (24) следует из того, что уравнение для  $u_{cl}$  инвариантно относительно трансляций в пространстве. По этой причине решение  $\psi_1$  называют *трансляционной модой*. Разложение (24) соответствует квантованию в системе центра масс, трансляционное движение исключено, однако, к условию ортонормированности функций  $\psi_n$ ,  $(\psi_m, \psi_n) = \delta_{mn}$ ;  $m, n \geq 2$  необходимо добавить ортогональность  $\psi_1$  ко всем  $\psi_n$ ,  $(\psi_1, \psi_n) = 0$ ,  $n \geq 2$ .

Последовательное описание процедуры канонического квантования вблизи классического решения для систем достаточно общего вида дано в [44]. Существуют и другие методы квантования, подробный обзор которых можно найти в [45—48]. Все эти методы достаточно просты и понятны и восходят к волновому методу вычисления тепловых флуктуаций в твердых телах, предложенному еще Эйнштейном. Поэтому естественно объединить их под общим названием *метода квантовых флуктуаций*, хотя они и имеют некоторые отличия. Основная идея квантования вблизи нетривиальных классических решений применялась ранее в квантовой механике молекул (приближение Борна — Оппенгеймера).

Аналогия с этим приближением использована в [49] (см. также [45]). Другой подход [50, 51] основан на обобщенном квазиклассическом приближении [52—54] и использует фейнмановский метод квантования [46—48]. Квантование вблизи классического решения в теории поля, использованной для описания задачи многих тел, впервые было предложено Н. Н. Боголюбовым [55], который получил решение, описывающее сверхтекучесть в слабо неидеальном бозе-газе. В работе [56] метод Боголюбова был применен для описания пространственно-неоднородных основных состояний бозе-систем. Исходя из этих результатов, Л. П. Питаевский [57] получил уравнение, описывающее вихревую нить в слабо-неидеальном сверхтекучем бозе-газе, по форме совпадающее с феноменологическим уравнением Гинзбурга — Ландау [58] для сверхпроводников и с аналогичным феноменологическим уравнением для сверхтекучих жидкостей [59]. В работе [57] были исследованы статические решения, описывающие изолированную вихревую нить, и рассмотрено квантование колебательных движений нити, которое описывалось уравнениями типа (22). Так как вихревая нить — типичный пример топологического солитона, можно сказать, что в [57] было впервые выполнено квантование солитона в указанном выше смысле. «Перевод» этих рассуждений на язык континуальных интегралов и приложения к другим физическим проблемам можно найти в [60].

Все упомянутые методы квантования солитонов приводят к линейным уравнениям типа (22). В дальнейшем мы их не будем рассматривать, поскольку наша основная задача — изучение эффектов нелинейностей. Необходимо, однако, подчеркнуть, что предположение о малости квантовых флуктуаций может оказаться не выполненным в задачах, представляющих наибольший физический интерес, таких, как проблема удержания кварков в адронах. Например, в [61] для пространственно-одномерной модели стэнфордского мешка показано, что квантовые «поправки» много больше классической энергии. В работе [62] указан механизм образования больших флуктуаций поля Янга — Милса в трехмерном пространстве, которые могут привести к полной перестройке вакуума квантовой хромодинамики. (Отметим, что в этой работе нетривиально использована динамическая модель нелинейного маятника.) Аналогичная трудность хорошо известна в теории фазовых переходов, где были найдены лишь обходные пути частичного решения проблемы (см., например, [63, 64]). Одна из простейших возможностей — модификация и усложнение исходных классических уравнений, которые должны частично учесть флуктуации. Эта возможность в феноменологической теории сверхтекучести подробно рассмотрена в работе [65], в квантовой теории поля таких попыток, по-видимому, не предпринималось.

В последнее время, особенно в работах Фаддеева с сотр. [66,

67] сформировалось новое направление в теории квантования нелинейных полей, основанное на квантовом варианте метода обратной задачи рассеяния и не связанное с предварительным решением соответствующей классической задачи. Этот метод применим к пространственно-одномерным задачам, которые вполне интегрируемы в классическом случае (например, уравнение (3) при  $N = 1$  и  $f = -\sin u$ ) или уравнение (4) при  $N = 1$ ,  $\gamma = i$ . Совсем недавно были выдвинуты соображения в пользу того, что реалистические теории поля (скажем, поле Янга — Миллса в 3-пространстве), как и 3-модели фазовых переходов могут оказаться близкими к вполне интегрируемым (эту идею развивает А. М. Поляков [32], см. также [68]). Если подобные надежды оправдаются, то отнести к этому можно только как к величайшему чуду.

Выше сказано лишь о квантовании солитонов в вещественном пространстве—времени. Квантовая теория, основанная на решениях классических уравнений в евклидовом пространстве—времени (мнимое время) выглядит существенно иначе [23—25]. В этом случае, пока не удалось построить каноническую процедуру квантования, однако, в простейших моделях был с успехом применен метод континуального интеграла. Разложение переменных интегрирования вблизи классических решений, обеспечивающих стационарность классического евклидова действия позволило получить разложения квантовых амплитуд, не связанные с теорией возмущений (особенности типа  $\exp(-c/g^2)$  [23]). Развитие этих идей привело к обнаружению туннельных переходов между различными классическими вакуумами в калибровочных теориях поля [69, 70] (эта возможность была ранее обнаружена В. Н. Грибовым, исходившим из несколько иных соображений, см., например, [62]). При наличии таких переходов становятся возможными теории не хиггсова типа, в которых спонтанное нарушение некоторой непрерывной симметрии не приводит к появлению безмассовых частиц, так как условия теоремы Боголюбова — Намбу — Голдстоуна не выполняются. Это позволило, в частности, найти подход к решению проблемы лишней аксиальной  $U(1)$ -симметрии в квантовой хромодинамике [71], которая может спонтанно нарушаться без того, чтобы появился девятый псевдоскалярный мезон с нулевой (или малой) массой [72].

Природу описанных явлений можно понять на простой модели. Рассмотрим одномерное движение частицы в поле, описываемом симметричным потенциалом  $V(u) = V(-u) \geq 0$ , имеющим два минимума  $\pm a$ , где  $V(\pm a) = 0$ , отделенных «горбом». В классической теории переходы между точками покоя  $\pm a$  запрещены, но в квантовой механике возможно туннелирование, которое приводит к снятию вырождения основного состояния, с симметричной волновой функцией (симметрия «вакуума» восстановлена!). Энергия антисимметричного состояния отличается от энергии

основного состояния на  $\Delta E \sim \exp(-I/\hbar)$ , где  $I$  можно оценить квазиклассическим методом («барьерный фактор» [73]):  $I = \int \sqrt{2[V(u) - E_0]} du$ , где  $E_0 \sim \hbar\omega$ ;  $\omega$  — классическая частота движения частицы с энергией  $E_0$  в потенциальной яме вблизи точки покоя  $a$ . Положим  $t = i\tau$  и рассмотрим «движение» (при изменении  $\tau$ ) классической «квазиточки» между  $-a$  и  $a$ , которое разрешено, так как уравнение движения  $\ddot{u} = -V'(u)$  переходит в  $d^2u/d\tau^2 = V'(u)$ , а закон сохранения энергии  $\dot{u}^2 = 2(E_0 - V(u))$  переходит в  $(du/d\tau)^2 = 2[V(u, (\tau)) - E_0]$ . Теперь нетрудно проверить: если мы рассмотрим движение «квазиточки»  $u_0(\tau)$  из  $-a$  при  $\tau = -\infty$  в  $+a$  при  $\tau = +\infty$  (на уход из  $-a$  и приход в  $+a$  требуется бесконечное время, так как  $V'(\pm a) = 0$ , см. аналогичное рассуждение выше), то с точностью до членов порядка  $\hbar$ :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{du_0}{d\tau} \right)^2 + V(u_0(\tau)) \right]. \quad (25)$$

Действительно, используя закон сохранения энергии для  $u_0(\tau)$ , т. е.  $du_0/d\tau = \sqrt{2V(u_0)}$ , этот интеграл можно переписать в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau 2V[u_0(\tau)] = \int_{-a}^a du_0 2V(u_0) \frac{d\tau}{du_0} = \int_{-a}^a du \sqrt{2V(u)}. \quad (26)$$

Так как  $E_0 \sim \hbar\omega$ , то это выражение при  $\hbar \rightarrow 0$  совпадает с написанным выше стандартным квазиклассическим выражением.

Этот метод использования мнимого времени для описания туннельных переходов в квазиклассике был предложен в работах [74, 75] (см. также обзоры [25, 48]). Его преимущество — возможность непосредственного применения в теории поля. В представлении (25) легко узнается классическое евклидово действие, и проведенные рассуждения легко переводятся на язык континуального интегрирования [74]. Классическое решение  $u_0(\tau)$  является простейшим примером *инстантона*. Вспоминая, что в изучаемых нами нелинейных теориях роль  $\hbar$  играет малая константа взаимодействия  $g^2$ , можно понять природу появления неаналитичности по  $g^2$  при  $g^2 \rightarrow 0$ .

Для понимания структуры вакуума в калибровочных теориях нужно вместо двух потенциальных ям рассмотреть периодическое поле  $V(u) = 1 - \cos au$ . Тогда бесконечнократно вырожденное, при отсутствии эффектов туннелирования, основное состояние превращается в энергетическую зону, описываемую функциями Блоха

$$\psi_\Theta(u) = \sum_n \exp(i n \Theta) \psi(u - an),$$

где  $\Theta$  — непрерывный параметр;  $\psi(u - an)$  — локализованное в точке  $an$  состояние, соответствующее движению классической частицы в  $n$ -й яме. Параметр  $\Theta$  играет важную роль в квантовой теории калибровочных полей и называется *вакуумным углом* [69, 70]. Физические величины в общем случае зависят от вакуумного угла  $\Theta$ , который играет роль некоторого внешнего поля [76]. При наличии безмассовых фермионов, взаимодействующих с калибровочным полем, зависимость от  $\Theta$  исчезает [69, 70], а также см. [76, 77], вакуум становится вырожденным, оставаясь неинвариантным относительно киральных преобразований (последний факт связан с блоховской структурой вакуумных функций), и мы приходим к решению  $U(1)$ -проблемы [69, 70, 72].

Поясним происхождение этого важного результата. В теории безмассовых фермионов, взаимодействующих с калибровочным полем  $F^{\mu\nu}$ , дивергенция аксиального тока  $j_\mu^5$  пропорциональна  $\text{Sp}(\tilde{F}^{\nu\mu}F_{\mu\nu})$  (вклад треугольной диаграммы). Если  $j \equiv \int d^4x \text{Sp}(\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = 0$ , то получаем все неприятности  $U(1)$ -проблемы. На первый взгляд, действительно  $j = 0$ , так как подынтегральное выражение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) &= \\ &= \partial_\mu \text{Sp} \left\{ g^{\mu\nu\lambda\sigma} \left[ 2A_\nu \partial_\lambda A_\sigma + \frac{4}{3} A_\nu A_\lambda A_\sigma \right] \right\} \equiv \partial_\mu S^\mu. \end{aligned}$$

Если на бесконечности поля можно убрать выбором калибровки  $A = g^{-1}\nabla g$  (на бесконечности — вакуум), то  $j = 0$ . Однако вакуум имеет более сложную структуру, соответствующую функциям Блоха, где функциям  $\psi(u - an)$  соответствуют поля  $A_n$ , которые можно убрать калибровочными преобразованиями,  $A_n \sim g_n^{-1}\nabla g_n$ , но эти калибровочные преобразования  $g_n$  при разных  $n$  нельзя непрерывно перевести друг в друга, они распадаются на неэквивалентные классы. (Переброс точки из одного минимума в другой — дискретная операция!) Таким образом, интеграл от  $\partial_\mu S^\mu$  не обращается в нуль (это легко понять на одномерном примере  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dj}{dx} = j(+\infty) - j(-\infty) \neq 0$ , если  $j(x)$  соответствует топологическому солитону). В этом и состоит решение  $U(1)$ -проблемы.

По поводу описанного важного результата уместно, однако, вспомнить известное высказывание И. Я. Померанчука и поискать, нет ли здесь «третьего выхода». Действительно, если кварки навечно помещены в адронную «тюрьму», то вакуум возможно имеет более сложную структуру и не выражается через  $g_n$ . Тогда нет причин для того, чтобы  $j = 0$ , независимо от того, какую роль играют в калибровочной теории инстантоны. Такая возможность

подробно обсуждается в работе Виттена [78] (см. также более раннюю работу Когута и Сусскинда [79]). Зависимость от  $\Theta$  можно непосредственно ввести в лагранжиан в виде дивергенции  $\Theta \partial_\mu S^4$ . На простых моделях нетрудно проверить, что при нулевых массах фермионов физические эффекты не зависят от  $\Theta$  и что лишней киральной  $U(1)$ -симметрии нет [78]. Такой подход, если его удастся провести в реальной квантовой хромодинамике, позволит понять различие между простой моделью кварков, дополненной простейшими соотношениями квантовой хромодинамики и хорошо объясняющей спектр мезонов (см., например, [80] и цитированную там литературу), и основанным на инстантонах сложным объяснением аномального спектра масс псевдоскалярных мезонов\*. Достаточно предположить, что реалистическая модель адронов является солитонной моделью, в которой вакуум имеет нетривиальную структуру (см., например, [81]). Отметим также, что квантовая теория инстантонов в приближении слабого взаимодействия как будто противоречит результатам, получаемым с помощью  $1/N$  разложения, которое позволяет дать единое качественное объяснение почти всем основным явлениям физики адронов (см. [78] и особенно [83]).

В дальнейшем не будем специально обсуждать инстантонные решения, хотя все методы вполне пригодны и для построения таких решений. Эти проблемы прекрасно освещены в обзорной литературе (см. особенно [25, 45 и 84]), к которой мы рекомендуем обратиться читателю.

На этом закончим обсуждение квантовых аспектов нелинейных теорий поля и вернемся к классической теории. Любопытно отметить, что уравнение Шредингера (22) естественно появляется и в чисто классических задачах. Во-первых, напомним, что уравнение (22) можно рассматривать как условие стабильности классического решения. Во-вторых, если потенциал (5) билинеен по некоторым из полей  $u_i$ , то для этих полей уравнения (11)–(13) имеют вид уравнения Шредингера, хотя граничные условия могут быть необычными. Потенциалы в этих уравнениях Шредингера определяются решениями нелинейных классических уравнений для остальных полей. Несмотря на то, что эти уравнения зависят от «линейных» функций  $u_i$ , часто удается эту зависимость описать небольшим числом параметров, например, граничными значениями «линейных» функций, которые окончательно определяются при

---

\* Дело в том, что учет простейших двухглюонных аннигиляционных диаграмм с поправками, нарушающими  $U(1)$ -симметрию, позволяет полностью объяснить все особенности спектра мезонов [80, 81], тогда как согласно инстантонной точке зрения эти диаграммы не имеют никакого отношения к делу (см. особенно работы [82], где наиболее последовательно разработаны приложения инстантонного механизма в физике резонансов).



решении уравнения Шредингера. Таким образом, формально линейное уравнение в конце концов приводит к некоторой нелинейной краевой задаче. Подобные уравнения естественно появляются при включении фермионных полей и, конечно, играют важную роль в теории самосогласованного поля (см. ниже). Наконец, напомним, что решение вполне интегрируемых систем также сводится к уравнению Шредингера, хотя для него нужно решать обратную задачу рассеяния. Теория вполне интегрируемых систем нами не затрагивается, читатель может обратиться к прекрасным обзорам [6, 33, 66, 67, 85] и оригинальным работам [34, 50, 51]. Понятие интегрируемости будем использовать в более узком смысле, когда исходную систему (3) можно в некотором приближении проинтегрировать (не обязательно в явном аналитическом виде). Тогда точные решения можно строить по теории возмущений относительно найденных интегралов.

Таким образом, динамические аналогии, обсуждавшиеся выше, часто будут иметь смешанный классически квантовый характер. Часть переменных соответствует нелинейным классическим динамическим системам, а другая часть описывается линейными уравнениями Шредингера. Такие системы хорошо известны в физике (вновь вспомним о приближении Борна — Оппенгеймера в теории молекул!) и разработанные для соответствующих задач методы можно с пользой применить при поисках нетривиальных решений классических нелинейных уравнений.

Обсудим кратко, какие из методов нелинейной динамики используются или могут быть с пользой применены к решению нелинейных уравнений теории поля. В прошлом веке основной задачей было аналитическое решение уравнений динамики. Для этой цели были разработаны методы полного интегрирования уравнений движения (Гамильтон, Якоби, Лиувилль) и велись систематические поиски интегрируемых систем [11]. Эти методы продолжают развиваться и сейчас [86] и, как уже отмечалось, получили интереснейшее развитие в классических и квантовых нелинейных теориях поля [34, 66, 67]. Однако, после работ Пуанкаре [87] стало ясно, что динамическая система общего вида неинтегрируема, т. е. помимо инвариантов группы Пуанкаре (энергия, импульс, момент) она не имеет никаких других интегралов движения. В связи с этим Пуанкаре разработал два общих метода — теорию возмущений и метод качественного глобального анализа поведения решений системы. В наше время эти методы были глубоко разработаны, обобщены и нашли фундаментальные приложения в различных областях науки, неговоря уже о механике и теоретической физике (см., например, [3—13, 88—92]), достаточно даже бегло перелистать эти монографии, чтобы получить представление об интенсивности развития и широте приложений методов, восходящих к Пуанкаре).

Можно таким образом утверждать, что всякий подход к теории нелинейных систем лежит на «трех китах»: 1) интегрируемость, 2) теория возмущений, 3) качественная теория. Простейшие иллюстрации этого тезиса читатель встретит ниже. К сожалению, эти иллюстрации слишком просты и не могут полностью выявить перспективу применения новейших методов.

Однако даже в нашем довольно узком подходе к применению теории динамических систем в проблемах нелинейной теории поля можно было бы продвинуться дальше, обратившись к более сложным методам. Например, мы ограничиваемся исследованием простейших потенциалов, когда соответствующие вакууму критические точки  $u_i^0$ , в которых  $\frac{\partial}{\partial u_i} V(u^0) = 0$ , легко определяются.

В общем случае ( $N > 1$ , произвольные  $V$ , непотенциальные  $f_i$ , более сложные, чем (3), (4) системы) выявление критических точек — совсем не простая задача, а главное — рассмотрение все более сложных примеров не позволит выяснить, какие возможности для системы некоторого класса существенно различны. В действительности, эта проблема поддается достаточно общему и строгому решению — она служит предметом весьма красивой математической теории критических точек, получившей название *теории катастроф* (см. книгу Тома [94], одного из основателей этой теории, а также [93, 89]; интересные приложения теории к проблемам, весьма далеким от физических, можно найти в [9, 10, 94]).

В этом обзоре рассмотрены лишь системы, которые так или иначе сводятся к двумерным консервативным или неконсервативным гамильтоновым системам и при изучении которых можно пользоваться простой и наглядной теорией Пуанкаре — Бендиксона. В системах с большим числом переменных могут возникать явления, не имеющие аналогий в поведении решений простых двумерных систем (см., например, [13]), вспомним хотя бы о наличии седловых критических точек. Для многомерных систем наиболее плодотворен подход, основанный на всех «трех китах». В частности, с пользой можно употреблять классические методы Пуанкаре, Ляпунова и др. для исследования поведения решений многомерных систем вблизи точек покоя (см. особенно гл. 2, 3, книги [95], гл. 3 в [88] и гл. 5 в [89]). В последнее время наметился существенный прогресс в общей качественной теории динамических систем и успешно развиваются методы возмущений (см. [12, 13, 89—91]). Ниже рассмотрены методы возмущений лишь в весьма частных задачах. Эти методы, однако, можно применить и для решения гораздо более сложных проблем.

Метод перехода от УЧП к динамической системе обычно связан с разделением переменных. В нелинейных задачах такое разделение основано на искусственных приемах — общей теории нет.

При этом в достаточно сложных теориях может возникнуть вопрос: удовлетворяют ли функции частного вида, используемые для разделения переменных полным уравнением движения. Следующая простая теорема (на ее значение обратил внимание Коулмен [96]) позволяет просто, без лишних вычислений получить ответ. Если гамильтониан  $H(u)$  [или лагранжиан  $L(u)$ ] инвариантен относительно некоторой группы преобразований  $G: u \rightarrow gu$ , то экстремум  $H$  (или  $L$ ) на множестве функций, стационарных относительно  $G$ , т. е.  $gu = u$ , является экстремумом  $H$  (или  $L$ ) на множестве всех  $u$ . Более важен и более труден другой вопрос, какие еще экстремумы есть у  $L$  и  $H$  на функциях других классов. К сожалению, эта проблема, относящаяся к глобальной теории существования решений, разработана недостаточно. На практике наиболее полезны вариационные методы, с помощью которых можно не только доказывать теоремы существования, но и находить приближенные решения (некоторые новые идеи о приложении вариационных методов к нелинейным системам ОДУ и УЧП можно найти, например, в обзорах [97, 98]).

Последнее замечание о роли динамических систем в классической теории поля. Как отмечалось выше, квантование в общем неинтегрируемом случае возможно лишь в квазиклассическом пределе, когда  $g^2 \rightarrow 0$ . Таким образом, при решении задачи Коши для уравнений (3), (4) или краевых задач — для (11)—(13) это обстоятельство также можно использовать, отыскивая квазиклассическое решение классического уравнения (разложение по малому параметру  $g^2$ ). Для линейных уравнений с частными производными такой подход [99] приводит к уравнению Гамильтона — Якоби (УЧП первого порядка), которое, как известно (см. 16, 89), эквивалентно динамической системе. Для нелинейных уравнений положение оказывается более сложным. Решения динамической системы по-прежнему играют важную роль, но построение асимптотики требует также решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в ЧП [99, 100]. Возможно, что в важных частных случаях можно получить более простые подходы (см. некоторые замечания ниже).

На роль динамических систем в теории поля можно посмотреть и в более общем плане, рассматривая поле (систему с бесконечным числом степеней свободы) как предел систем с конечным числом степеней свободы. Некоторые результаты, полученные для систем с произвольным конечным числом степеней свободы можно тогда с должной осторожностью перенести в теорию поля. К сожалению, таких результатов весьма мало. Еще меньше результатов, относящихся непосредственно к системам с бесконечным числом частиц [103]. Во всяком случае использование языка и качественных результатов теории динамических систем полезно при изучении и более сложных задач нелинейной теории поля (см., например,

замечания о применении теории бифуркаций к проблеме гидродинамической устойчивости в § 33 книги [89] и цитированные там работы).

## 2. ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ И МЕТОДОВ

Нелинейные уравнения существенно отличаются от линейных, и их теория не имеет столь простого и законченного вида. Особенно важно различие в их глобальном поведении, т. е. не в окрестности точки, а в конечной области и во всем пространстве. Рассмотрим задачу Коши для системы (1). Если  $f_i$  — голоморфные функции всех переменных в окрестности начальной точки  $t_0, u_i^0$ , то решение задачи Коши  $u_i(t_0) = u_i^0$  существует голоморфно по  $t$  и единственно. Это — *теорема Коши* для ОДУ. Аналогичная теорема для УЧП носит название *теоремы Коши — Ковалевской* [16]. Для УЧП единственность доказана на самом деле лишь в классе аналитических функций. Решения, согласно этим теоремам, можно искать в виде степенных рядов по независимым переменным, которые сходятся, по крайней мере, в некоторой окрестности начальных значений.

Наиболее существенно следующее отличие нелинейных задач от линейных. Если система (1) линейна,  $f_i = \sum_j f_{ij}(t) u_j + f_i^0$ , то ее решения могут иметь особые точки (в смысле теории аналитических функций) лишь при тех значениях  $t = t_{ij}$ , при которых коэффициенты  $f_{ij}(t)$  не голоморфны. Это значит, что радиус сходимости степенного ряда, определяющего решение, просто равен расстоянию от  $t_0$  до ближайшей особенности коэффициентов  $t_{ij}$ . Используя известные методы аналитического продолжения (например, мы будем часто пользоваться преобразованием степенного ряда в непрерывную дробь с помощью  $Q - D$ -алгоритма [101]), можно легко продолжить решения на все значения  $t$ , вводя, если необходимо, определенные граничные условия при  $t = t_{ij}$ . Этот способ построения хорошо знаком, например, по задачам квантовой механики. При решении нелинейных уравнений даже с всюду голоморфными правыми частями особенности, как правило, возникают. Подчеркнем, что появление особенностей именно не исключение, а правило. Самое неприятное свойство этих особенностей, что они зависят от начальных условий. Их называют *движущимися*, в отличие от *неподвижных* особенностей, не зависящих от начальных данных. Все особенности линейных, уравнений, очевидно, неподвижны. Для одного ОДУ первого или второго порядка, рационально зависящего от  $u$  и  $u'$  с голоморфной зависимостью от  $t$  в конце прошлого века была построена изящная теория, которая прекрасно изложена В. В. Голубевым [102, см. гл. 1—3]. Знакомство с результатами этой теории необходимо всякому, кто

занимается нелинейными задачами. Приведем здесь лишь один пример. Решения уравнения Пенлеве

$$d^2u/dt^2 = au^3 + btu + c,$$

где  $a, b, c$  — константы, являются мероморфными трансцендентными функциями с неподвижными полюсами. Точка  $t = \infty$  — существенно особая [102].

Даже очень простые нелинейные уравнения могут иметь движущиеся критические особенности, в окрестности которых решение неоднозначно. Например, уравнение  $\ddot{u} = \exp u$  имеет общее решение

$$u = \ln(2C_1^2) + C_1 t - C_2 - 2 \ln(\exp(C_1 t - C_2) - 1).$$

Особенность при  $t = C_2/C_1$  — движущаяся критическая. Классический пример простой системы, решения которой имеют движущиеся полюсы, — уравнения для эллиптических функций Якоби  $u_1 = \operatorname{sn} t; u_2 = \operatorname{cn} t; u_3 = \operatorname{dn} t; \dot{u}_1 = u_2 u_3; \dot{u}_2 = -u_3 u_1; \dot{u}_3 = -k^2 u_1 u_2; u_1(0) = 0; u_2(0) = u_3(0) = 1$ . В дальнейшем полезно вспоминать следующее простое уравнение

$$\ddot{u} = 2\lambda \frac{n+1}{(n-1)^2} u^n.$$

При  $\lambda > 0, n > 1$  все решения этого уравнения при некотором  $t = t_0$  становятся бесконечными и ведут себя при  $t \rightarrow t_0$  как  $\lambda^{-1/(n-1)} |t - t_0|^{-2/(n-1)}$ . При  $\lambda < 0$  все решения — ограниченные периодические функции.

Механическая аналогия позволяет наглядно понять и обобщить этот результат. Рассмотрим уравнение (10) с квазиэнергией (9), определяемой потенциалом  $U$ . Допустим, что потенциал ограничен сверху и не ограничен снизу, когда одна из переменных, скажем,  $u_1$ , стремится к  $\infty$ , а остальные фиксированы:  $u_i = u_i^0$  ( $i = 2, \dots, N$ ). Рассмотрим движение системы, соответствующее такой сохраняющейся квазиэнергии  $K$  и такому начальному условию  $u_1(0) = u_1^0$  [остальные  $u_i$  фиксированы, а соответствующие  $v_i \equiv 0$  в силу (10)], что «частица»  $u_1$  может свободно двигаться направо до  $+\infty$  (например, траектории  $(1, \infty), (2, \infty), (3, \infty)$  на рис. 1). Зависимость этого движения от времени, очевидно, определяется из уравнения

$$\tau(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{u_1^0}^{u_1} du_1 [K - U(u_1, u_2^0, \dots, u_N^0)]^{-1/2}, \quad (27)$$

где  $K = v_1^2(0)/2 + U(u_1^0, \dots, u_N^0)$ , а если движение начинается в точках 1, 2, 3, то  $v_1(0) = 0$ . Если при  $u_1 \rightarrow +\infty$  интеграл (27)

сходится, то «частица» уходит в  $\infty$  за конечное «время»  $\tau_\infty = \tau(+\infty)$ . Это значит, что соответствующее решение (10) определено лишь на конечном интервале, величина которого зависит от начальных условий. При этом, разумеется, могут быть и решения, определенные при всех  $\tau$ , например, периодические движения между точками 4 и 5, 6 и 7, движение из точки 8 в точку покоя 9 и т. д. Это рассуждение, поддающееся дальнейшим обобщениям,

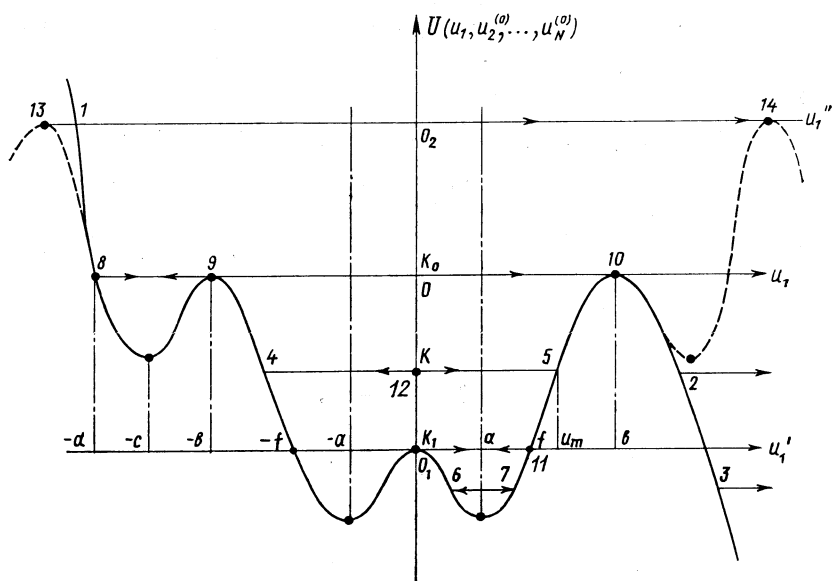


Рис. 1.

на которых мы не останавливаемся, позволяет понять происхождение сингулярностей в решениях уравнений типа (3), (4) как по пространственным, так и по временной координате. В последнем случае квазивремя есть просто время, а квазипотенциал  $U$  совпадает с потенциалом  $V$ .

Для достаточно простых уравнений (3) уход решений в  $\infty$  за конечное время можно доказать и непосредственно, не обращаясь к механическим моделям. Рид и Саймон [104, гл. 10], на примере задачи Коши для уравнения  $u_{tt} - u_{xx} = \lambda u^n$ ,  $n > 1$ , подробно показали, каким образом при  $\lambda > 0$ , а также при  $\lambda < 0$  и четном значении  $n$  происходит обращение  $u(x, t)$  в  $\infty$  за конечное время. Рассуждение сводится к доказательству существования простого дифференциального неравенства,  $(F(t)^{-\alpha})'' \leq 0$  при всех  $t \geq 0$ , для функции  $F(t) = \int u^2(x, t) dx$  при некотором выборе началь-

ных данных  $u(x, 0)$ ,  $u_t(x, 0)$  и параметра  $\alpha > 0$ . Для доказательства существенно, что настоящая энергия (7) сохраняется и что  $V(u)$  при достаточно большом значении  $|u|$  довольно быстро стремится к  $-\infty$ . Это рассуждение также поддается обобщениям (см., например, [105—107]), на которых мы не имеем возможности подробно останавливаться. Важно подчеркнуть следующее. Для потенциалов  $V$ , допускающих уход решений на бесконечность за конечное время, функционал энергии обычно не ограничен снизу, т. е. можно построить такую последовательность решений  $u^{(n)}$ , что  $H\{u^{(n)}\}_{n \rightarrow \infty} \rightarrow -\infty$ . По этой причине такие гамильтонианы в дальнейшем рассматривать не будем. Они, конечно, могут иметь локальные минимумы, такие же локальные минимумы можно получить и с помощью гамильтонианов, ограниченных снизу.

Теперь можно сделать следующее наблюдение. В силу релятивистской инвариантности члены  $\partial^2 u_i / \partial t^2$  и  $\nabla^2 u_i$  входят в уравнение (3) с разными знаками. Если  $|V(u)|$  достаточно быстро растет при  $|u| \rightarrow \infty$  (это, например, всегда выполняется для наиболее часто изучаемых полиномиальной нелинейности), то, потребовав ограниченности гамильтониана снизу, получим теорию, в которой решения могут обращаться в  $\infty$  в конечной части пространства. Чтобы понять это, достаточно рассмотреть нашу простую динамическую модель с  $\tau = x$  и  $U = -V$ . Это наблюдение можно было бы попробовать охватить теоремой о *дополнительности сингулярностей во времени и пространстве*, но мы предоставим эту задачу математикам. Для нас важно лишь то, что уравнения типа (3), (4), для которых существуют глобальные решения задачи Коши (и интеграл энергии ограничен снизу), в статическом случае или для зависимости от времени специального вида [см. уравнения (11)—(13)] приводят к уравнениям, решения которых могут иметь особенность в конечной части пространства.

Отсюда можно получить некоторые выводы о том, каким должен быть потенциал, чтобы он допускал решения без особенностей, определенные во всем пространстве (в частности, топологические и нетопологические солитоны). Соответствующие примеры приведем в разд. 3. Возможность ухода на бесконечность существенно ограничивает выбор таких решений и значительный интерес могут представлять решения, определенные в конечной части пространства («мешки» или «домены»). Если смотреть на классические решения, обращающиеся в  $\infty$  на некоторой замкнутой поверхности, как на потенциал для других полей (такие потенциалы подробно изучались ранее [108] и были первоначально получены из совершенно иных соображений [109]), то можно прийти к простейшей потенциальной модели удержания кварков в адронах, тесно связанной с моделью мешков (ср. с замечаниями о желательности сингулярности на поверхности мешка в рабо-

те [38]). Таким образом, сингулярные решения заслуживают детального изучения и мы их отбрасывать не будем. Несколько иной подход к использованию сингулярных решений намечен в интересной работе [110], где подробно изучены решения уравнения Лиувилля в одномерном пространстве, т. е. уравнение (3) при  $f = \pm \exp u$ ,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2$ .

Любопытно, что рассуждения, основанные на простой динамической модели и уравнении (27), позволяют строго доказать довольно сильные математические результаты. Приведем только одну теорему Келлера—Оссермана [106, 107] о решениях уравнения

$$\Delta u = f(u), \quad (28)$$

где  $u = u(x_1 \dots x_n)$  и  $\Delta = \sum_i \partial^2/\partial x_i^2$ .

Пусть  $f(u)$  непрерывна при всех  $u$ ,  $f(u) \geq \varepsilon > 0$  и  $f(u)$  монотонно растет при  $u \geq u_0$ . Если

$$\int_0^\infty du \left[ \int_0^u dv f(v) \right]^{-1/2} < \infty, \quad (29)$$

то дважды непрерывно дифференцируемая функция не может удовлетворять уравнению (28) во всем пространстве. Доказательство основано на редукции уравнения (28) к ОДУ с помощью инвариантности (28) относительно вращений. Условие (29) есть по существу условие ухода в бесконечность за конечное квазивремя [ср. с (27)].

На самом деле это лишь простое следствие теоремы Келлера — Оссермана, которую к тому же можно обобщить в различных направлениях. Почти очевидно, что требование монотонности  $f(u)$  излишне. Это доказано в работах [111], где рассмотрено и более общее уравнение (28) с  $f = f(u, |\text{grad } u|)$ ,  $(\text{grad } u)_i \equiv \equiv \partial u/\partial x_i$ . Ясно также, что вместо лапласиана в (28) может быть более общий эллиптический оператор [112, 113]. Можно также допустить зависимость правой части от  $x_i$  [в работе [114] рассмотрено уравнение (28) с  $f = p(x) f(u)$ ]. В частных случаях можно получить более сильные результаты. Так, для уравнения Лиувилля (уравнение (28) с  $f(u) = e^u$ ) удается найти поведение решения вблизи сингулярности ([115], а также см. [110]). Условие  $f(u) > 0$  существенно ослабить нельзя. Как ясно из предыдущего, если при некотором  $u = u_0$  будет  $f(u_0) < 0$ , то могут быть решения, определенные во всем пространстве, даже если выполнено (29). Достаточно понять, что в этом случае потенциал  $U(u) = - \int_0^u dv f(v)$  имеет, по крайней мере, один минимум и в одномерном пространстве будет существовать всюду конечное диффе-



ренцируемое решение (например, периодическое решение, отвечающее траектории (6, 7) на рис. 1). Поэтому более интересна следующая постановка задачи.

Пусть условия теоремы выполнены лишь для достаточно больших значений  $u$ . Требуется найти такие дополнительные ограничения, при которых решение определено (и непрерывно дифференцируемо) во всем пространстве (или всюду кроме точки  $x = 0$ ). При  $n = 1$  и  $N = 1$  эти условия легко найти. Например, на рис. 1 такие решения получаются лишь если  $K \leq K_0$  и  $-d < u(0) < b$ . Разумеется, если уравнение интегрируется, то дополнительные условия можно найти, хотя они могут быть весьма громоздкими. Если явный вид решений не известен, то при  $n > 1$  проблема намного сложнее. Возможный подход к ее решению — изучение ситуации вблизи *бифуркации*. Рассмотрим вместо  $f(u)$  функцию  $f(u, \lambda)$ , зависящую от параметра  $\lambda$ , и пусть  $f(u, \lambda) > 0$  при  $\lambda > 0$  и  $f(u, 0) = 0$ , т. е. при  $\lambda = 0$  происходит бифуркация — появляется критическая точка. Идея состоит в том, что при малых  $\lambda$  задача существенно упрощается. Другая важная для приложений нерешенная задача — исследование аналогичных явлений для систем уравнений (11). Обобщение, по-видимому, возможно, если потенциал  $V$  обладает высокой симметрией, например  $V = V(u_1^2 + \dots + u_N^2)$ . В общем случае проблема весьма трудна. Однако указанные задачи столь важны для приложений, что ответы на поставленные (или близкие к ним) вопросы должны быть найдены.

Рассмотрим теперь некоторые «положительные» результаты — теоремы существования глобальных решений задачи Коши и краевых задач для нелинейных уравнений. После предыдущего читатель не удивится, что для существования глобальных решений требуются довольно жесткие ограничения на уравнения. Результатов, которые удовлетворяют двум важным для нас требованиям — достаточная общность и полезность для приложений, — довольно мало. Приведем лишь несколько примеров теорем, удовлетворяющих этим требованиям. Для ОДУ достаточно хорошо изучены лишь некоторые краевые задачи для уравнения

$$d^2u/dt^2 = f(t, u, u') \quad (30)$$

Полезна и, видимо, допускает различные обобщения следующая теорема Гаммерштейна — Чинквини ([116], а также гл. 8 книги [117]). Задача

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f(t, u); \quad u(0) = u(t_1) = 0 \quad (t_1 > 0) \quad (31)$$

разрешима, если  $f(t, u)$  непрерывна при  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $-\infty < u < +\infty$  и если существуют такие числа  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$ , что при

всех  $t$  и  $u$  из указанной области:

$$\int_0^u dvf(t, v) \geq -c_1 y^2 - c_0, \quad 0 < t_1 < \pi / \sqrt{2c_1}. \quad (32)$$

Границу  $t_1 < \pi / \sqrt{2c_1}$  улучшить нельзя.

Заметим, что более общая краевая задача  $u(t_0) = u_0$ ,  $u(t_1) = u_1$  сводится к (31) простой заменой

$$\bar{t} = t - t_0; \quad \bar{v}(\bar{t}) = u(t) \frac{u_1 - u_0}{t_1 - t_0} (t - t_0) - u_0.$$

Еще одна общая теорема позволяет установить существование и единственность решения часто встречающейся краевой задачи на полубесконечном интервале.

*Теорема Мамбриани* ([118], а также гл. 12 книги [117]): решение задачи

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = f(t, u) g(t); \quad u(0) = u_0 \geq 0, \quad u(+\infty) = 0 \quad (33)$$

существует и единственно, если  $f$  непрерывна при  $t \geq 0$ ,  $u \geq 0$ ;  $f > 0$  при  $t > 0$ ,  $u > 0$ ;  $f(t, 0) = 0$  при  $t \geq 0$ ,  $0 < \frac{\varphi(t, u_1) - \varphi(t, u_2)}{u_1 - u_2} < N(t, L)$  при  $0 \leq u_1, u_2 \leq L$ ,  $t > 0$ ;  $f(t, c) > \varepsilon(c) > 0$  при  $t \geq 0$  и  $c > 0$ ;  $g(t)$  непрерывна, больше 0 и интегрируема на любом конечном отрезке, но

$$\int_0^{\infty} dtg(t) = +\infty.$$

Обобщение этой теоремы для уравнения (30) дано Тонелли [119].

Эта теорема, например, позволяет доказать существование и единственность решения краевой задачи  $u(0) = 1$ ,  $u(+\infty) = 0$  для хорошо изученного уравнения Томаса — Ферми  $u'' = t^{-1/2} u^{3/2}$ . Более детально изучено также глобальное поведение решений уравнения Лэна — Эмдена — Фаулера [120, 117]:

$$\frac{d}{dt} \left( t^2 \frac{du}{dt} \right) + t^\lambda u^n = 0, \quad \lambda > 0, \quad n > 0 \quad (34)$$

и более общих уравнений Льенара

$$d^2 u / dt^2 + f(u) du / dt + g(u) = e(t) \quad (35)$$

и Рэля (замена в (35)  $f = f(u, \dot{u})$ ) [121]. Уравнения такого типа встретятся нам ниже. Отметим, что к подобным уравнениям сводятся весьма интересные задачи современной ядерной физики (см. монографию Мигдала [122]). Дальнейшие математические

результаты можно найти в цитированной выше литературе. К сожалению, большинство строгих результатов получено при ограничениях, не позволяющих применить их в рассматриваемых нами задачах.

Гораздо хуже обстоит дело с глобальной теорией для УЧП. Вот два основных результата о решении эллиптической краевой задачи в конечной области

$$\Delta u = -f(x, u), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in D, \quad u|_{\partial D} = u_0. \quad (36)$$

Функция  $f$  предполагается непрерывно дифференцируемой при  $x \in D + \partial D$  и при всех  $u$ . Если  $f = f_1(x, u) + f_2(x, u)$ , где  $\partial f_1 / \partial u \leq 0$ ;  $|f_2|$  — ограниченная функция при указанных  $x$  и  $u$ , то задача (36) имеет решение и притом единственное. Она также имеет решение для любых непрерывно дифференцируемых функций  $f$ , если только область  $D$  достаточно мала (см. приложение к гл. 4 в книге [16]). Единственность решений можно доказать при более общих условиях и для более общих уравнений (см. гл. 4 [16]). Другие теоремы существования и единственности можно найти в работе [123].

Существует ряд теорем о решении задачи Коши для уравнений (3) и других подобных уравнений, например, для классических уравнений взаимодействующих полей Максвелла и Дирака (см. [104] гл. 10, п. 13 и замечания к этому разделу). Недавно была получена довольно общая теорема для систем (3) с  $f_i = -\frac{\partial V}{\partial u_i}(x; u_1 \dots u_N)$  [124]. Помимо стандартных общих требований (дифференцируемость и т. п.), для доказательства существенны условия, аналогичные (32), и ограничения на рост  $\|f\|$  при росте  $\|u\|$ , усиливающиеся с увеличением размерности пространства.

Большинство современных исследований глобальных решений нелинейных уравнений опираются на методы функционального анализа и широко используют общие вариационные методы (см., например, [97, 98, 123]). Чрезвычайно эффективны топологические методы, в последнее время успешно применяются методы алгебраической топологии [123]. Отметим, в особенности, красивое приложение тополого-геометро-алгебраических методов к явному вычислению общих инстантонных решений уравнений Янга—Миллса [125, 126]. Доступное изложение основных идей и результатов гомологической топологии и приложений к простейшим нелинейным физическим задачам можно найти в лекциях Шварца и др. ([127], см. также [128]). К сожалению, лишь немногие проблемы нелинейной теории поля допускают столь изящное решение современными средствами, и поэтому методы классического анализа сохраняют свое значение.

Кратко остановимся на некоторых из таких методов, применяемых в дальнейшем. Качественная теория простейших динамических систем

$$\dot{u}_1 = f_1(u_1, u_2); \dot{u}_2 = f_2(u_1, u_2)$$

разработана особенно полно (теория Пуанкаре — Бендиксона), и мы будем свободно, без дальнейших оговорок ее применять. Особенно полное и ясное изложение дано в [4, 95]. Основные факты и идеи очень наглядно, но менее полно, представлены в [88]. Особенно интересна теория предельных циклов, получившая существенное новое развитие в наше время. В нелинейной теории поля системы с предельными циклами встречаются при исследовании нелинейных волн, которые в данном обзоре по существу не обсуждаются. Знакомство с результатами и методами этой простой и исключительно красивой теории безусловно необходимо всякому, кто хочет разобраться в тех или иных нелинейных проблемах. Приведем здесь лишь простейшие основные факты общей теории автономных динамических систем

$$\dot{u} \equiv du/dt = f(u); u = (u_1 \dots u_N); f = (f_1 \dots f_N), \quad (37)$$

необходимые для ясного понимания дальнейших разделов. Для простоты предполагаем, что функции  $f_i$  определены и непрерывны при всех  $u$ .

Очевидно, что каждому решению  $u(t)$  системы соответствует другое решение  $u(t + t_0)$  при любом значении  $t_0$ . Отсюда, в частности, следует, что любая особенность решения будет обязательно движущейся. За исключением упоминавшейся выше теории Пенлеве, никаких других общих теорем, позволяющих классифицировать ОДУ по характеру особых точек их решений (движущиеся, неподвижные, критические, некритические и т. д.), по-видимому, нет.

В дальнейшем важно различать обыкновенные и особые точки  $u^{(0)}$  системы (37) ( $u^{(0)}$  можно рассматривать как начальные значения  $u_i(t_0) = u_i^{(0)}$ ). Если не все  $f_i(u^{(0)}) = 0$ , то  $u^{(0)}$  — *обыкновенная точка*, если же  $f_i(u^{(0)}) = 0$  для всех  $i$ , то  $u^{(0)}$  — *особая точка* (или *точка покоя*) системы. Если  $u^{(0)}$  — точка покоя, то  $u(t) = u^{(0)}$  есть решение системы (37). Как отмечалось в разд. 1, точки покоя для динамических систем, возникающих в теории поля, соответствуют возможным вакуумам и являются критическими (или стационарными) точками потенциала [см. (1)–(10)]. Таким образом, первая задача — определение всех точек покоя и поведения решений вблизи них.

Вблизи обыкновенной точки решения устроены очень просто. В окрестности обыкновенной точки, где решение системы единственно, семейство траекторий системы (37) топологически эквива-

лентно семейству прямых, проходимых движущейся точкой в равномерном движении. Вблизи точек покоя решения устроены намного сложнее. Ни одна траектория, начинающаяся при конечном значении  $t = t_0$  в обыкновенной точке, не может прийти в точку покоя за конечное время (иначе была бы нарушена единственность решения в точке покоя). Если же решение  $u(t) \rightarrow u^{(0)}$  при  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$ , то  $u^{(0)}$  — точка покоя. Наконец, если траектория  $u(t)$  при возрастании  $t$  от  $t_0$  не выходит из некоторой замкнутой ограниченной области, то решение  $u(t)$  определено при  $t_0 \leq t < +\infty$ .

В двумерном случае ( $N = 2$ ) можно получить более сильные результаты. Например, внутри всякой области на плоскости  $(u_1, u_2)$ , ограниченной замкнутой траекторией, есть, по крайней мере, одна точка покоя. С другой стороны, всякая замкнутая траектория, лежащая в достаточно малой окрестности особой точки, обязательно содержит эту точку внутри себя. Если некоторая траектория «выходит» из точки покоя  $u^{(0)}$  при  $t = -\infty$  и «входит» в нее при  $t = +\infty$ , и в области, ограниченной ею, нет других особых точек, то любая траектория, проходящая через внутреннюю точку области, начинается и заканчивается в  $u^{(0)}$ . Доказательства приведенных фактов и дальнейшие топологические и аналитические результаты о поведении решений вблизи точек покоя можно найти в цитированных выше руководствах (см. особенно [95, 4]). Для понимания дальнейшего необходимо уметь в достаточно простых уравнениях находить фокусы, узлы, седла и центры.

Для построения аналитических приближений к решениям, существование, единственность и общие свойства которых установлены, обычно наиболее эффективно применение одного из многих вариантов теории возмущений [3, 15, 52, 87—92]. Самая грубая классификация методов теории возмущений для систем вида (37) заключается в следующем.

Если некий малый параметр  $\varepsilon$  (можно рассматривать и несколько параметров) содержится лишь в правой части (37), т. е.  $f = f(u, \varepsilon)$ , то естественно разлагать правые части по степеням  $\varepsilon$  и искать решение в виде аналогичного ряда. Такие методы будем относить к категории аналитических методов возмущений. Преимущество таких методов — простота и возможность, в некоторых случаях, доказать сходимость разложения

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u^{(n)} \quad (38)$$

при достаточно малом  $\varepsilon$  (в общем случае этот ряд при малых является асимптотическим). Особенно удобно, когда уравнения в нулевом приближении становятся линейными. Тогда для рассматриваемой краевой задачи можно построить функцию Грина и решать

полученное уравнение итерациями (см. примеры ниже). Таким способом удастся преодолеть основную трудность, связанную с необходимостью выполнения граничных условий в каждом приближении. Решение задачи Коши обычно не вызывает затруднений, что вытекает из *теоремы Пуанкаре*: пусть в уравнениях (37)  $f = f(t, u, \varepsilon)$  и (37) имеет при  $\varepsilon = 0$  такое решение  $u^{(0)}(t)$  на некотором конечном отрезке времени, что  $f(t, u, \varepsilon)$  можно разложить в ряд по степеням  $\varepsilon$  и  $\|u - u^{(0)}(t)\|$ , равномерно сходящийся в некоторой области переменных  $t, u, \varepsilon$ , содержащей внутри траекторию  $u^{(0)}(t)$  и точку  $\varepsilon = 0$ . Тогда (37) имеет решение  $u(t, \varepsilon)$ , которое можно разложить в степенной ряд по  $\varepsilon$ , сходящийся в некоторой окрестности точки  $\varepsilon = 0$ , причем  $u(t, 0) = u^{(0)}(t)$ . Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы, в несколько более общей формулировке, можно найти в гл. 2 книги [129] (заметим, что в ней очень хорошо изложена качественная теория вместе с аналитическими и приближенными методами, а также подробно рассмотрены многочисленные примеры). Применение теоремы Пуанкаре часто позволяет доказать сходимость разложений по  $\varepsilon$  не только для решения задачи Коши, но и для решений краевых задач.

Совершенно иная ситуация возникает, когда малый параметр (или малые параметры) оказываются множителями производных в (37) (всех или некоторых):

$$\varepsilon \dot{u} = f(t, u, v, \varepsilon); \quad \dot{v} = g(t, u, v, \varepsilon). \quad (39)$$

При  $\varepsilon = 0$  эта система становится вырожденной (понижение порядка), и ее решение в общем случае не может удовлетворять начальным или граничным условиям. Возмущения такого типа впервые встретились, по-видимому, в гидродинамике при изучении движения жидкости с малой вязкостью  $\varepsilon$  (см., например, [14, 15]). В этом случае из физических соображений легко понять, что происходит. Вблизи стенок ролью вязкости, сколь бы мала она ни была, пренебречь нельзя, так как скорость жидкости на стенке должна быть равна нулю при сколь угодно малой вязкости. На некотором расстоянии от стенки жидкость при  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно считать почти идеальной и для описания ее движения пользоваться приближением  $\varepsilon = 0$ . Область вблизи стенки, толщина которой стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и в которой характер движения жидкости резко изменяется, называют *пограничным слоем Прандтля*. Разложения при малых  $\varepsilon$  в области пограничного слоя (внутреннее) и в области вне пограничного слоя (внешнее) должны определяться существенно разными способами. Один из методов получения решения краевой задачи состоит в *сращивании* внешнего и внутреннего решений в области их общей применимости. Заметим, что аналогичная идея используется в квазиклассическом методе при сшивании реше-

ний в точке поворота. Окрестность точки поворота, допуская некоторую вольность, можно рассматривать как пограничный слой.

Идею методов сращивания легче всего понять на простом примере Фридрикса [15, гл. 5].

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = a; \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 1. \quad (40)$$

Точное решение этой задачи

$$u(t) = (1 - a) [1 - \exp(-t/\varepsilon)] / [1 - \exp(-1/\varepsilon)] + at \quad (41)$$

сразу позволяет увидеть природу трудностей (члены  $\exp(-t/\varepsilon)$ ,  $\exp(-1/\varepsilon)$  не разлагаются в степенные ряды по  $\varepsilon$ ). Если положить в (40)  $\varepsilon = 0$ , то решение  $u^{(0)} = (1 - a) + at$  при  $a \neq 1$  удовлетворяет лишь второму граничному условию. Вид точного решения (41) подсказывает, что внутреннее разложение нужно искать с помощью «растягивания» времени. Положив  $T = t/\varepsilon$ , получим  $d^2 u/dT^2 + du/dT = a\varepsilon$ ;  $u(0) = 0$ . Решение этой задачи с  $[1 - \exp(-T)]$ , очевидно, не удовлетворяет граничному условию при  $t = 1$ , т. е.  $T = 1/\varepsilon$ . Сращивание решений дает  $u = (1 - a) \times [1 - \exp(-t/\varepsilon)]$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и фиксированном  $t/\varepsilon$  и  $u = (1 - a) + at$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и фиксированном  $t > 0$ . Идея *растягивания внутренней координаты* — очень общая. Иногда, впрочем, может потребоваться еще и некоторое растягивание переменных  $u$ . Дальнейшее обсуждение метода сращивания и примеры его применений можно найти в [15, 92].

Другой метод, впервые введенный Пуанкаре при исследовании нелинейных колебаний, [87] основан на деформировании независимой координаты, т. е. в дополнение к (38) положим, что

$$t = s + \varepsilon t_1(s) + \varepsilon^2 t_2(s) + \dots,$$

где неизвестные функции  $t_i(s)$  подбираются так, чтобы высшие приближения «не портили» низшие (см. подробнее [15, 92]). Преимущество этого метода в том, что он позволяет получить решение на всем интервале, однако, к сингулярным возмущениям (39) он не применим. Идея этого метода — выбор некоторых произвольных функций — успешно работает в *методе многих масштабов*. Поясним его на примере Фридрикса. Как и выше, положим  $T = t/\varepsilon$  и будем искать  $u$  в виде

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u^{(n)}(t, T),$$

где  $t$  и  $T$  формально рассматриваются как независимые переменные. Для  $u^{(0)}$  сразу получается выражение  $u^{(0)}(t, T) = u_1^{(0)}(t) + \exp(-T) u_2^{(0)}(t)$ . Рассматривая уравнение для  $u^{(1)}$ , можно

убедиться, что  $u^{(1)}$  «не портит»  $u^{(0)}$  только в том случае, если  $u_2^{(0)} = \text{const}$  и  $u_1^{(0)} = \text{const} + at$ . Граничные условия позволяют определить эти константы, и мы получаем приближение  $u^{(0)} = (1 - a) [1 - \exp(-t/\epsilon)] + at$ , равномерно пригодное во всем интервале  $0 \leq t \leq 1$ .

Дальнейшее развитие описанных методов привело к построению достаточно простых алгоритмов построения последовательных приближений для довольно широкого класса линейных и нелинейных сингулярно возмущенных начальных и краевых задач. При определенных условиях удалось доказать, что соответствующие формальные степенные ряды по  $\epsilon$  являются асимптотическими (при  $\epsilon \rightarrow 0$ ) разложениями точных решений. Как должно быть ясно хотя бы из примера (40), (41), эти ряды не могут быть сходящимися. По этой причине методы разложения решений сингулярно возмущенных задач типа (39) называют *асимптотическими*. Описание и примеры применения подобных алгоритмов можно найти в работах [30, 131] (см. также [132] гл. 7, 10 и добавление 2). Пример использования такого алгоритма в теории солитонов будет приведен ниже.

Подчеркнем, что в некоторых нелинейных задачах разложения по  $\epsilon$  могут иметь более сложную структуру, например, могут появляться члены, содержащие логарифмическую зависимость от  $\epsilon$ . Если считать  $\epsilon$  константой связи, то аналогичные особенности по  $\epsilon$  можно встретить и в линейных задачах, например, в решениях уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом [108]. Возможно, что эта связь не случайна, а имеет более глубокий смысл. Например, уравнение КДВ (см., например, [6, 33]):

$$u_{xxx} - 6uu_x + u_t = 0 \quad (42)$$

имеет семейство сингулярных решений  $u = 2(x - x_0)^{-2}$ . Используя галилееву инвариантность, можно написать семейство решений  $u = 2(x - 6ct - x_0) - c$ , зависящих от времени. Полагая  $u = v^2 + v_x$  и  $v = \psi_x/\psi$ , получаем, что для любого стационарного решения  $u$  уравнения (42) выполнено соотношение

$$\psi_{xx} \equiv d^2\psi/dx^2 = u\psi, \quad (43)$$

на которое можно смотреть как на уравнение Шредингера с потенциалом  $u(x)$  (на этом основывается метод обратной задачи рассеяния). Мы видим, что каждому сингулярному решению уравнения КДВ соответствует сингулярный потенциал в уравнении (43). Возможно, что подобная связь существует и для более общих уравнений, но этот вопрос не изучен.

Заканчивая этот раздел, остановимся кратко на одном простом приеме приближенного вычисления решений нелинейных уравнений, который особенно полезен для получения решений, имеющих сингулярность по независимой переменной  $t$ . Мы уже упоми-



нали, что самый легкий (и незаслуженно редко применяемый) способ получить приближенное выражение для решения нелинейного уравнения состоит в разложении его в степенной ряд вблизи начальной точки. Согласно теореме Коши — Ковалевской такие ряды имеют ненулевой радиус сходимости, но трудность заключается в том, что для нелинейного уравнения значение этого радиуса неизвестно и почти наверняка зависит от начальных условий. Преобразование этого ряда в рациональную функцию (приближения Падэ) не только существенно улучшает приближение, но и позволяет приближенно найти положение сингулярности. Мы приведем здесь очень простой и эффективный алгоритм частных и разностей (или  $Q - D$ -алгоритм), позволяющий преобразовать в степенной ряд в непрерывную (или цепную) дробь, которая последовательно дает  $(N - 1, N)$ -,  $(N, N)$ -приближения Падэ (см. [101], теория непрерывных дробей изложена в [133], о приложениях приближений Падэ в физике элементарных частиц см. [134] и цитированную литературу). Степенной ряд записывается в виде непрерывной дроби [101]:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)} t^n = u^{(0)}/1 - q_1^{(0)}t/1 - e_1^{(0)}(t)/1 - q_2^{(0)}t/1 - e_2^{(0)}t/1 - \dots, \quad (44)$$

где  $q_i^{(k)}$ ,  $e_i^{(k)}$  определяется рекуррентными формулами:

$$\left. \begin{aligned} e_0^{(k)} &= 0; \quad q_1^{(k)} = u^{(k+1)}/u^{(k)}; \\ e_i^{(k)} &= e_{i-1}^{(k+1)} + q_i^{(k+1)} - q_i^{(k)}; \\ q_{i+1}^{(k)} &= q_i^{(k+1)} \frac{e_i^{(k+1)}}{e_i^{(k)}}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

При расчете удобно располагать эти числа следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & u^{(0)} \\ & & & & & & q_1^{(0)} \\ u^{(1)} & & & & & & e_1^{(0)} \\ & & & & & & q_2^{(0)} \\ u^{(2)} & & & & & & e_2^{(0)} \\ & & & & & & q_3^{(0)} \\ & & & & & & e_3^{(0)} \\ u^{(3)} & & & & & & q_4^{(0)} \\ & & & & & & e_4^{(0)} \\ & & & & & & q_5^{(0)} \end{array} \quad (46)$$

и вычислять  $q_i^{(k)}$ ,  $e_i^{(k)}$ , последовательно двигаясь от столбца к столбцу (по выписанным коэффициентам ряда можно найти все числа, лежащие выше пунктирной линии).

Эффективность этого приема определяется следующей теоремой Адамара [101]. Если  $u(t) = P_m(t)/Q_n(t) + R(t)$ , где  $P_m$  и  $Q_m$  —

полиномы;  $Q_m(t)$  не имеет нулей в комплексной плоскости  $t$  при  $|t| < T$ , а  $R(t)$  регулярна при  $|t| \geq T_1$ ,  $T_1 < T$ , то можно определить такую последовательность полиномов  $p_i^{(k)}(t)$ , что  $p_n^{(k_i)}(t) \rightarrow Q_n(t)$ . Полиномы строятся с помощью рекуррентного соотношения

$$p_0^{(k)} \equiv 1, \quad p_i^{(k)}(t) = t p_{i-1}^{(k+1)}(t) - q_i^{(k)} p_{i-1}^{(k)}(t) \quad (47)$$

(предполагается, что соотношения (45) позволяют определить все коэффициенты  $q_i^{(k)}$ ).

Если  $q_n^{(k)}$  стремится к определенному пределу при  $k \rightarrow \infty$ , то этот предел — полюс функции  $u(t)$ . Немного сложнее определение комплексных полюсов [101]. Подобно приближению Падэ, этот алгоритм часто дает неплохие результаты и для функций с более сложными особенностями, например, с точками ветвления. Этот метод позволяет получить не только численное, но и аналитическое приближение.

Мы не обсуждаем разнообразные полезные численные методы решения нелинейных задач. Их можно найти в многочисленных руководствах по численному анализу (см., например, [135]). Отметим лишь один новый метод решения линейных и нелинейных краевых задач, основанный на сведениях их к задаче Коши — *метод инвариантного погружения* [136]. При таком сведении уравнение сильно усложняется. Например, линейная краевая задача для ОДУ сводится к нелинейной задаче Коши для некоторой более сложной системы ОДУ. Нелинейная краевая задача для ОДУ сводится к нелинейной задаче Коши для некоторой системы УЧП весьма специального вида. Тем не менее при использовании современных ЭВМ это усложнение полностью окупается, так как задача Коши решается несравненно легче. Таким образом, иногда для упрощения решения полезно усложнять уравнения. Далеко не всегда следует пытаться линеаризовать нелинейные задачи и сводить УЧП к ОДУ!

### 3. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

В этом разделе рассматриваются простейшие теории поля в двумерном пространстве — времени. Решение статической задачи и задач с простой зависимостью от времени [см. (11), (12)] сразу сводит проблему к решению динамических систем вида (4) или (8).

Необходимо учесть, что далеко не все результаты, полученные в одномерном случае, можно перенести на пространство большего числа измерений. Например, имеет место следующая т е о р е м а [137]. Если в скалярной теории поля в пространстве  $n$  измерений, описываемой лагранжианом (6),  $V(u) \geq 0$  ( $V \not\equiv 0$ ), то при  $n \geq 2$

не существует статических регулярных решений, соответствующих классических уравнений (3), (5), обладающих конечной энергией. Для доказательства сделаем масштабное преобразование  $u_i(x) \rightarrow u_i(x/s)$ , тогда энергию (7) можно представить в виде

$$H(s) = s^{n-2}H_1 + s^n H_2,$$

где  $H_1$  и  $H_2$  не зависят от  $s$  и соответствуют кинетической и потенциальной энергии системы. Так как гамильтониан должен быть инвариантен относительно произвольных вариаций полей  $u_i$ , то

$$\frac{dH}{ds} = (n-2)H_1 + nH_2 = 0. \tag{48}$$

Так как  $H_1 > 0$  и  $H_2 > 0$ , то это условие можно выполнить лишь при  $n < 2$ . (При  $n = 1$  оно дает обычное вириальное соотношение  $H_1 = H_2$ .) Эта теорема обобщена на случай поля Янга — Миллса с компактной группой внутренней симметрии [138] — нетривиальное статическое решение может существовать лишь при  $n = 4$ . Для некомпактных групп она не выполняется, соответствующие решения найдены в работе [139]. Если поля взаимодействуют с внешними источниками, которыми могут быть поля фермионов, поле Хиггса и т. п., то условия теоремы, вообще говоря, нарушаются и топологические солитоны могут существовать. Для зависящих от времени нетопологических солитонов запрета также нет. Если  $n = 2$  и  $V \equiv 0$ , то условие (48) не запрещает существования солитона. Эти условия реализуются в теории нелинейного кирального поля [140] (см. также [96]). Эта теорема ничего не говорит о возможности существования разрывных решений с конечной энергией, например, доменов или мешков в пространстве любого числа измерений.

Вернемся теперь в одномерное пространство. Для одного скалярного поля без источников

$$H = \int dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + V(u) \right], \tag{49}$$

и задача сводится к изучению движения квазиточки  $u(\tau)$  в поле потенциала  $U(u) = -V(u)$ , причем квазиэнергия

$$K = \dot{u}^2/2 + U(u); \quad \dot{u} \equiv du/d\tau \equiv du/dx \tag{50}$$

сохраняется. Возможные типы движений можно найти с помощью рис. 1. Движению из точки покоя 9 в точку покоя 10 соответствует топологический солитон («кинк»). Напомним, что для вычисления энергии  $H$  не нужно знать  $u(\tau)$  [ср. с (25), (26)]. Действительно, из (49) и (50) немедленно следует, что

$$H = \int dx [K + 2V] = \int du \frac{K + 2V}{|du/dx|} = \int \frac{du}{\sqrt{2}} \frac{K + 2V(u)}{\sqrt{K + V(u)}}. \tag{51}$$

Если  $du/dx = 0$  в каких-либо конечных точках, то интеграл по  $u$  заменится на сумму интегралов между значениями  $u_i$ , в которых  $K + V(u_i) = 0$ . Если при некотором  $x$  квазискорость  $du/dx$  и потенциал  $V(u)$  одновременно обращаются в нуль, то  $K = 0$  и (51) дает

$$H = \int du \sqrt{2V(u)}. \quad (52)$$

Таким образом, для вычисления энергии солитона, соответствующего движению из 9 в 10 на рис. 1, достаточно знать  $V(u) \equiv -U(u)$  на отрезке  $-b \leq u \leq b$ . Движению из точки 9 ( $x = -\infty$ ) в 8 и обратно ( $x = +\infty$ ) соответствует «яма», или «двойной кинк» — солитон с нулевым топологическим зарядом, так как  $u(-\infty) = u(+\infty) = -b$ . Если сдвинуть на рис. 1 начало отсчета потенциала из  $O$  в  $O_1$ , то движению из точки  $O_1$  в 11 и обратно будет соответствовать нетопологический солитон, для которого  $u \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Для этого решения не только выполнено условие конечности энергии, но и функция  $u$  квадратично интегрируема. Только такие решения нелинейных уравнений отыскивали на начальном этапе исследований в нелинейных теориях поля [20, 22, 26]. Такое решение в скалярной теории в трехмерном пространстве было найдено в работе [22]. Существование этого решения не противоречит теореме Хобарта — Деррика, так как авторы [22] выбрали потенциал

$$V(u) = \mu^2 |u|^2 - \gamma |u|^4 / 2, \quad (53)$$

который при  $\gamma > 0$  не удовлетворяет условиям теоремы (на интервале от  $-f$  до  $f$  величина  $U = -V$  имеет как раз такую форму, как на рис. 1).

Аналогично можно рассматривать решения, соответствующие другим движениям (периодические, разрывные и т. п.). Как это делается — совершенно ясно, и мы предоставляем исследования различных примеров и явное вычисление решений читателю. Обсудим только возможность существования *доменов* в простейшей теории поля, определяемой гамильтонианом (49).

Для достаточно сложных потенциалов такие решения всегда существуют и имеют конечную энергию. Напомним, что уравнения для этих решений вытекают из вариационного принципа для гамильтониана (49), где интеграл берется по конечному отрезку оси  $x$  (для простоты полагаем  $-R \leq x \leq R$ ), а на границе отрезка  $u = 0$  ( $u(R) = u(-R) = 0$ ) и  $\delta u = 0$  ( $\delta u(R) = \delta u(-R) = 0$ ). Для упрощения рассуждений будем считать, что  $V(u) = V(-u)$  и что решение симметрично  $u(x) = u(-x)$ , т. е.  $u'(0) = 0$ . Домену тогда соответствует движение от точки 12 к точке 5 и обратно. Размер его  $2R$ , равен квазивремени, затрачиваемому квазиточкой на это движение, т. е. полупериоду ее колебаний между 4 и 5.

Любое такое движение между линиями  $(O_1, 11)$  и  $(O, 10)$  определяет некоторый домен. Легко понять, что величина  $R$  ограничена снизу. Действительно, полупериод или размер

$$2R = \sqrt{2} \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{K-U(u)}}, \quad K=U(u_m), \quad (54)$$

непрерывно зависит от  $u_m$  (или  $K$ ) при  $f < u_m < b$  (или  $K_1 < K < K_0$ ). При  $u_m = f$  и  $u_m = b$ ,  $R = +\infty$ , и поэтому  $R(u_m)$  при некотором  $u_m$  имеет минимум. Это весьма общее утверждение можно сформулировать в виде теоремы, эту работу мы оставляем читателю.

Теперь представим себе, что начало отсчета энергии на рис. 1 сдвинуто в точку  $O_2$  и  $K_1 < K_0 < 0$ . Тогда энергия решений, соответствующих движениям с квазиэнергиями  $K_1$  и  $K_0$ , равна  $+\infty$ , откуда следует, что при некотором  $K$  в интервале  $K_1 < K < K_0$  она имеет положительный минимум. Таким образом, энергия домена  $H(R)$  при некотором конечном ( $\neq 0, \infty$ ) значении  $R$  минимальна. Это свойство доменов позволяет надеяться, что они найдут применения в физике. В физике элементарных частиц — это объект типа «пустого мешка», в феноменологической теории фазовых переходов — это капля, внутри которой параметр порядка  $\Psi$  (наша функция  $u$ ) отличен от нуля\*.

Заметим, что легко придумать потенциал, допускающий одновременно существование домена и топологического солитона, причем энергию домена можно сделать меньше энергии солитона. Вернемся опять к рис. 1, где начало отсчета выбрано в точке  $O_2$ . Изменим потенциал  $U$  так, чтобы он стал симметричным и отрицательным всюду, кроме точек покоя  $13$  и  $14$ . Тогда движение из  $13$  в  $14$  соответствует кинку, энергия которого согласно (52) зависит от поведения потенциала на всем отрезке  $13-14$ . Энергия же домена, определяемая по общей формуле (51), зависит лишь от поведения  $U(u)$  при  $-u_m \leq u \leq u_m$ . Выбирая потенциал  $V(u) = -U(u)$  на отрезке  $(u_m, 14)$  достаточно большим, можно всегда сделать энергию солитона большей, чем энергия домена.

Рассмотрим один интересный пример. Пусть поле  $u$  взаимодействует с внешним источником  $\rho(x)$ , например

$$V(u) = \frac{g^2}{4} u^4 - \frac{e}{2} \rho(x) u^2. \quad (55)$$

---

\* Современная теория фазовых переходов подсказывает, что зависимость свободной энергии  $F(\Psi)$  в таких теориях, следуя предложению Гинзбурга, будем называть их  $\Psi$ -теориями, должна иметь более сложный вид, чем в первоначальной теории (см., например, [65, 141, 39]). Поэтому условия для возникновения доменов (в нашем смысле) могут в принципе реализоваться.

Если при всех  $x$   $\rho(x) \equiv \text{const}$ , то мы возвращаемся к теории поля Хиггса [или что то же самое — к теории Гинзбурга — Ландау] без источников. Предположим теперь, что  $\rho(x) \equiv \rho_0 \equiv \text{const}$  при  $-R \leq x \leq R$ , причем  $\rho_0 R = 1$ , и будем искать решение типа домена на этом отрезке, т. е. решение соответствующей вариационной задачи для (49) с условиями  $u(-R) = u(R) = 0$ . Условие  $\rho_0 R = 1$  означает, что «заряд» источника фиксирован, как бы мы ни «размазывали» его в пространстве. Смысл этой модели состоит в том, что наличие внешнего источника делает тривиальный вакуум  $u \equiv 0$  неустойчивым и приводит к образованию нетривиального вакуума (минимум  $V(u)$  при  $u \neq 0$ ). Там, где нет источника, возможно лишь тривиальное решение с конечной энергией, так как при  $\rho(x) \equiv 0$  все решения  $u(x)$  обращаются в  $\infty$  при некотором конечном значении  $x$ . С помощью соотношений (51) и (54) можно получить для  $R$  и  $H$  выражения

$$R = \sqrt{\frac{2}{\epsilon \rho_0}} \frac{1}{v_1} \mathbf{K} \left( \frac{v_0}{v_1} \right); \quad v_1 = \sqrt{2 - v_0^2}; \quad v_0 = \frac{g}{\sqrt{\epsilon \rho_0}} u(0); \quad (56)$$

$$H = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{(\epsilon \rho_0)^{3/2}}{g^2} v_1 \left\{ \left( 1 - \frac{v_0^2}{4} \right) \mathbf{K} \left( \frac{v_0}{v_1} \right) - \mathbf{E} \left( \frac{v_0}{v_1} \right) \right\}, \quad (57)$$

где  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{E}$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода [142, 143]. Если выполнено условие  $\rho_0 R = 1$ , то отсюда получаем

$$R = \frac{2}{\epsilon v_1} \mathbf{K}^2 \left( \frac{v_0}{v_1} \right); \quad (58)$$

$$H = -\frac{\epsilon^3}{3g^2} \frac{v_1^4}{K^3} \left\{ \left( 1 - \frac{v_0^2}{4} \right) \mathbf{K} - \mathbf{E} \right\}, \quad (59)$$

где для простоты опустим аргумент  $v_0/v_1$  у функций  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{E}$ . Используя известные свойства этих функций [142, 143], нетрудно понять, что минимальное значение  $R$  достигается при  $v_0 \rightarrow 0$  и равно  $R_{\text{мин}} = \pi^2/(4e)$ . Из того, что  $\mathbf{K} \rightarrow +\infty$  при  $v_0/v_1 \rightarrow 1$ , легко заключить, что при некотором значении  $v_0$  в интервале  $0 < v_0 < 1$  величина  $H$  достигает минимального значения. При этом

$$R = R_e \approx 7,6/e; \quad H = H_e \approx -0,021e^3/g^2. \quad (60)$$

Стоит особо отметить, что размер домена не зависит от константы связи  $g$ ! Так как при  $g \rightarrow 0$  энергия  $H_e$  имеет особенность и стремится к  $-\infty$ , то для достаточно малого  $g$  при неизменном размере домена можно сделать энергию связи сколь угодно большой. По этой причине рассуждения, относящиеся к такой исключительно простой модели, могут быть полезны для конструирования новых моделей удержания кварков.

Подобным же образом можно провести расчет других простых одномерных скалярных моделей. Так, через простые эллиптические интегралы выражается энергия системы двух точечных зарядов, когда в (55)  $\rho(x) = \delta(x - R) + \delta(x + R)$  и ищется решение при  $-\infty < x < \infty$ . Если  $\rho(x) = \delta(x)$ , то само решение имеет очень простой вид  $u(x) = (\sqrt{2}/g) (|x| + 2/e)^{-1}$  и имеет энергию  $H = -e^3/(12g^2)$  (это решение нашел О. Раси-Заде). С помощью этого решения можно легко найти такое решение  $u(x)$  для потенциала (55) и  $\rho(x) = \rho_0 \Theta(R - x) \Theta(R + x)$ , которое непрерывно с первой производной на всей оси  $x$  и обращается в нуль при  $|x| \rightarrow \infty$ . Аналогично можно построить решения для потенциалов и источников более общего вида (например, с линейным взаимодействием источника с полем и т. д.). Эти задачи были рассмотрены нами совместно с О. Раси-Заде. Некоторые из решений обладают очень интересными свойствами, но возможности их применения в физических проблемах нам пока не вполне ясны.

Хотя формально мы обсуждали лишь статические решения, по существу все, что сказано выше, относится и к решениям с простой зависимостью от времени — достаточно смотреть на правые части соответствующих уравнений (11), (12) как на градиенты некоего нового эффективного потенциала. Один тип получаемых при этом решений следует все же отметить особо ввиду его значения для приложений в физике элементарных частиц. Рассмотрим комплексное скалярное поле  $u(x, t) = \exp(-i\omega t) u(x)$ , где  $u(x)$  можно взять вещественным. Так как  $V(u) = V(|u|^2)$ , то в теории сохраняется заряд

$$Q = i \int \left( u^* \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial t} u \right) dx = 2\omega \int dx u^2(x). \tag{61}$$

Отсюда, в частности, следует, что решение должно быть квадратично интегрируемой функцией, т. е.  $|u| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  достаточно быстро. Даже если при  $\omega = 0$  потенциал  $V(u)$  не допускает конечных всюду определенных решений (скажем,  $V(u) = |u|^4$ ), при  $\omega \neq 0$  эффективный потенциал [см. (12)]

$$U_{\text{эф}}(u) = -V(|u|^2) + \omega^2 |u|^2 \tag{62}$$

такое решение допускает. Интегралы (51), (61) легко сводятся к интегралам по  $u$  от величин, зависящих лишь от  $U_{\text{эф}}$ , и для достаточно простых потенциалов выражаются через известные функции. Для установления наиболее важных свойств решений не нужно знать даже эти выражения.

Пусть при  $u \rightarrow 0$

$$V = m^2 u^2 - g^2 u^4 / 4 + \dots,$$

где опущены члены, которые стремятся к нулю быстрее, чем  $u^4$ . Предположим, что при всех значениях  $u$ , кроме  $u = 0$ ,  $V > 0$ . При  $\omega = 0$  для такого потенциала никаких решений с конечной энергией, определенных и регулярных при всех значениях  $x$ , не существует. При  $\omega \neq 0$  решения могут появиться. Чтобы для такого решения выполнялось условие  $u \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , должно быть  $\omega < m$  (иначе при  $u = 0$  квазипотенциал  $U(u)$  не будет иметь максимума). Далее, при достаточно большом значении  $\omega < m$  квазипотенциал в некоторой точке  $u_0$  обратится в нуль. Действительно, всегда можно взять  $\omega$  столь близким к  $m$ , что таким корнем будет

$$u_0 = 2(m^2 - \omega^2)^{1/2}/g_1$$

где отброшены члены более высокого порядка по  $(m^2 - \omega^2)^{1/2}$ . Тогда солитон будет соответствовать движению квазиточки из  $u = 0$  в  $u_0$  и обратно (на рис. 1 это движение из  $O_1$  в  $II$  и обратно). Теперь можно получить простое неравенство. С помощью (7), (50), (61), (62) и преобразования от  $dx$  к  $du$  можно получить, что

$$Q = 2\sqrt{2} \omega \int_0^{u_0} du \frac{u^2}{\sqrt{-U_{эф}}} ;$$

$$H = 2\sqrt{2} \omega^2 \int_0^{u_0} du \frac{u^2}{\sqrt{-U_{эф}}} - 2\sqrt{2} \int_0^{u_0} du \sqrt{-U_{эф}},$$

откуда следует, что

$$H = \omega Q - 2\sqrt{2} \int_0^{u_0} du \sqrt{-U_{эф}} < \omega Q < mQ. \quad (63)$$

Из этого неравенства можно получить следующую теорему (см. [144]). Если  $V(u)$  удовлетворяет описанным выше условиям, то энергия солитона всегда меньше энергии плоской волны, нормированной условием (61) на конечном отрезке  $-L \leq x \leq L$  ( $L \rightarrow \infty$ ):

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q}{\omega(k)L}} \exp[i(kx - \omega t)] + O(L^{-3/2}),$$

где  $\omega(k) = (k^2 + m^2)^{1/2}$ . Энергия этой волны равна  $\omega(k) Q \geq mQ$ , откуда и следует утверждение теоремы. Заметим, что (63) дает более сильную оценку  $H < \omega Q$ , в работе [144] показано лишь, что  $H < mQ$ .

Аналогичные солитоны можно построить в трехмерном пространстве. Из-за появления «диссипативных» членов все несколько



усложняется, в частности, заряд  $Q$  должен быть больше некоторой критической величины  $Q > Q_c$  [27].

Рассмотрим теперь взаимодействие скалярного поля с фермионным. Будем считать, что скалярное поле не зависит от времени, а  $\psi = \exp(-iEt) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  и возьмем лагранжиан системы в виде

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu u)^2/2 - V(u) + \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - M \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \psi f(u). \quad (64)$$

Уравнения движения, вытекающие из этого лагранжиана, можно получить также из вариационного принципа для гамильтониана (с независимыми вариациями по  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ ):

$$H = \int dx \left[ -E \bar{\psi} \gamma^0 \psi - \bar{\psi} i \gamma^1 \frac{d\psi}{dx} + M \bar{\psi} \psi + f(u) \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + V(u) \right]. \quad (65)$$

Возьмем представление для  $\gamma$ -матриц

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad i\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот выбор удобен, так как для него можно будет считать  $\varphi$  и  $\chi$  вещественными. Уравнения для  $\varphi$ ,  $\chi$  и  $u$  тогда имеют вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial u} + \bar{\psi} \psi \frac{df}{du} = \frac{\partial V}{\partial u} + (\varphi^2 - \chi^2) \frac{df}{du}; \quad (66)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = (E + M + f(u)) \chi; \quad \frac{d\chi}{dx} = -(E - M - f(u)) \varphi. \quad (67)$$

Легко найти сохраняющуюся квазиэнергию, записав эти уравнения в гамильтоновом виде (10) и считая  $u$ ,  $\chi\sqrt{2}$  координатами, а  $u'$ ,  $\varphi\sqrt{2}$  — импульсами. Квазиэнергия

$$K = u'^2/2 - V(u) + (f(u) + M)(\chi^2 - \varphi^2) + E(\chi^2 + \varphi^2). \quad (68)$$

Из уравнений (67) следует, что

$$\frac{d}{dx} (\bar{\psi} \psi) \equiv \frac{d}{dx} (\varphi^2 - \chi^2) = 4E\varphi\chi. \quad (69)$$

Если  $E = 0$  (статическое решение), то

$$\varphi^2 - \chi^2 = -\rho_0 \equiv \text{const}. \quad (70)$$

Решения при  $\rho_0 \equiv 0$  были изучены в работе [40] и привели к изобретению стэнфордского мешка. При этом уравнение (66) для  $u(x)$  вообще не зависит от  $\bar{\psi}\psi$ , и при должном выборе  $V(u)$  можно построить кинк, который будет потенциалом для частиц, описываемых полем  $\psi$  (кварков). Уравнения (67) линейны по  $\varphi$

и  $\chi$  и легко интегрируются при любом известном «потенциале»  $f(u(x))$

$$\varphi = \chi = \varphi_0 \exp \left\{ \int_{x_0}^x dx [M + f(u(x))] \right\}. \quad (71)$$

Если  $f$  стремится к конечным пределам при  $x \rightarrow \pm \infty$ , таким, что  $M + f(u(+\infty)) < 0$ , а  $M + f(u(-\infty)) > 0$ , то это решение квадратично интегрируемо (нормируемо). Заметим, что  $\varphi$  и  $\chi$  «сосредоточены» вблизи точек, где  $M + f(u(x)) = 0$ . В работе [40]  $V = -m^2 u^2 + g^2 u^4 / 4$ ,  $f(u) = u(x)$ , и ясно, что эти условия выполняются. Для нетопологического солитона  $u(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , и при весьма общих ограничениях на  $f(u)$  и  $V(u)$  решения при  $E = 0$  не могут быть нормированными. Этот результат верен и для трехмерного пространства (см. приложения к работе [28]). Как показано в работе [145], решения с  $E = 0$  для топологических солитонов  $u(x)$  существуют и в трехмерном пространстве. Полная энергия системы (65) не зависит от  $\psi$  и определяется выражениями (49) — (52). Это легко проверить, воспользовавшись уравнениями движения (67). Таким образом, если энергия решения  $u(x)$  конечна, то мы получаем стэнфордский мешок [40] и его обобщения [общий вид  $V(u)$  и  $f(u)$ ].

Если  $\rho_0 \neq 0$ , то уравнения для  $\varphi$  и  $\chi$  также легко решаются

$$\varphi = \frac{1}{2} \left( \varphi_1 - \frac{\rho_0}{\varphi_1} \right); \quad \chi = \frac{1}{2} \left( \varphi_1 + \frac{\rho_0}{\varphi_1} \right);$$

$$\varphi_1 \equiv \exp \left\{ \int_{x_0}^x dx [M + f(u(x))] \right\}. \quad (72)$$

Ясно, что эти решения не могут убывать при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ . Однако можно построить решения на конечном отрезке оси  $x$ . Например, если положить  $f(u) = eu^2/2$ ,  $V(u) = g^2 u^4/4$ , то получим в точности модель домена, решенную выше [см. (55)—(60)], только теперь роль источника играет фермионное поле.

Дальнейшее обсуждение теории взаимодействия фермионов с нетопологическими солитонами и ее применений к моделям адронов можно найти в работах [28], см. также цитированную в них литературу. Более детальный анализ решений с топологическими солитонами и их приложений дан в [40, 145]. В последней работе предложена очень интересная и несколько загадочная интерпретация солитонов, взаимодействующих со статическими фермионными полями, как вырожденных дублетов с фермионными числами  $\pm 1/2$  (см. также краткое обсуждение в обзоре [45]). Время подведения итогов подобных исследований пока не пришло, но можно сказать, что включение фермионов в число полей приводит к появлению новых и неожиданных эффектов.

Неожиданности могут подстергать нас и при исследовании задачи с несколькими полями. Мы лишь кратко опишем легко решаемые задачи. Наиболее естественно, конечно, рассматривать поля с некоторой внутренней симметрией, простейшая из которых определяется условием  $V = V(u_1^2 + \dots + u_N^2)$ . При  $N = 2$  и 3 задача легко сводится к интегрированию уравнений движения квазиточки на плоскости ( $N = 2$ ) и в пространстве ( $N = 3$ ). Поскольку  $V$  зависит лишь от  $u^2 = u_1^2 + \dots + u_N^2$ , то помимо квазиэнергии сохраняется и квазимомент. Пользуясь этими законами сохранения, можно полностью проинтегрировать систему и исследовать все ее решения. Например, при  $N = 2$  сохранение квазимомента дает условие  $u_1 \dot{u}_2 - \dot{u}_1 u_2 = \text{const}$  или в «полярных» координатах  $u_1 = u \cos \theta$ ,  $u_2 = u \sin \theta$ :  $u^2 \dot{\theta} = L$ . Решения уравнения для

$$\ddot{u} = V'(u) + L^2 u^{-3}$$

существенно отличаются при  $L = 0$  и  $L \neq 0$ . После изученных выше примеров, анализ возникающих при этом возможностей — несложное упражнение.

По-видимому, интересно было бы изучить системы с более сложной и с нарушенной симметрией. Аналогичными способами можно строить решения для киральных полей  $\sum u_i^2 = 1$  [140, 146].

#### 4. ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ. ПОЛЕ ЯНГА—МИЛЛСА

Как уже отмечалось выше, для поля Янга — Миллса с компактной группой внутренней симметрии и без источников, регулярных солитонов нет. Если включить источники, например, другие поля, то положение сразу меняется. Рассмотрим взаимодействие поля Янга — Миллса  $A_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ):

$$F_{\mu\nu}^a = A_{\mu,\nu}^a - A_{\nu,\mu}^a + e\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (73)$$

и скалярного поля  $\phi_a$

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}/4 + (D^\mu \phi)_a (D_\mu \phi)^a/2 - \lambda(\phi^2 - m^2)^2/4, \quad (74)$$

где ковариантная производная  $D^\mu$  определяется соотношением

$$(D^\mu \phi)_a = \phi_{a,\mu} - e\epsilon_{abc} A_\mu^b \phi_c. \quad (75)$$

Это —  $SO(3)$ -инвариантная калибровочная теория Джерджи и Глэшоу [147]. Статические решения можно искать подстановкой [148—150], см. также [84, 128] и цитированную в них литературу:

$$\Phi_a = \frac{\hbar(r) x^a}{er^2}; \quad A_a^0 = \frac{j(r)}{er^2}; \quad A_a^i = \epsilon_{iak} \frac{x^k}{er^2} [1 - k(r)]. \quad (76)$$

Энергию таких решений можно представить в виде:

$$H = - \int d^3x \mathcal{L}(x) = \frac{4\pi}{e^2} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \left[ r^2 k'^2 + \frac{1}{2} (rh' - h)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (rj' - j)^2 + \frac{1}{2} (k^2 - 1)^2 + k^2 (h^2 - j^2) + \frac{\lambda}{4e} (h^2 - m^2 e^2 r^2)^2 \right]. \quad (77)$$

Согласно упоминавшейся ранее теореме, уравнения для  $j$ ,  $h$  и  $k$  можно искать, непосредственно из условия  $\delta H = 0$ :

$$r^2 k'' = k (h^2 - j^2) + k (k^2 - 1); \quad (78)$$

$$r^2 h'' = 2k^2 h + 2\lambda h^3 / e^2 - 2\lambda m^2 r^2 h; \quad (79)$$

$$r^2 j'' = 2k^2 j. \quad (80)$$

Для того чтобы энергия была конечной, достаточно, чтобы:  $(k - 1)$ ,  $h$  и  $j$  при  $r \rightarrow 0$  убывали как  $\sim r$  или быстрее, и при  $r \rightarrow \infty$   $k$ ,  $(h - mer)$  достаточно быстро стремились к нулю, а  $j(r)$  росла не быстрее, чем  $r$ .

Если  $j \equiv 0$ ,  $h \equiv 0$ , то такого решения, определенного при всех  $r$  и регулярного, не существует. При  $j \equiv 0$  получается *магнитный монополю Полякова — т-Хоофта* [149]. (Интерпретация решения как магнитного монополя связана с тем, что нейтральная компонента поля  $A_\mu^a$  истолковывается [147] как электромагнитный потенциал. Вычисляя поток магнитного поля через сферу большого радиуса, можно найти магнитный заряд системы  $g_m = 4\pi/e$  [149].) Строгое доказательство теоремы существования дано в работе [151]. При  $j \neq 0$  также существует нетривиальное решение, соответствующее монополю, имеющему электрический заряд (дион) [150]. Эти объекты обладают чрезвычайно интересными физическими свойствами, которые мы не имеем возможности здесь обсуждать, отсылая интересующегося читателя к цитированным оригинальным работам и обзорам. Одно из наиболее интересных свойств — «перепутывание» пространственных и внутренних симметрий в (76). В результате полный момент  $\mathbf{J}$  приобретает изоспиновую добавку:  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{I}$ . На этом основана интереснейшая идея получения спина из изоспина, так что в квантовой теории могут появиться солитонные решения со спином  $1/2$  даже если все исходные поля имеют целые спины! Простейшая реализация этой идеи получается, если к описанной модели, допускающей монополю, присоединить скалярное поле с изоспином  $1/2$ . Этот изоспин в поле монополя «превращается» в спин  $1/2$  [152, см. также 45].

Существует интересная возможность упрощения уравнений, основанная на оценке энергии снизу [140]. Для статических решений в модели (74) такую оценку можно получить при  $\lambda \rightarrow 0$  (при

этом сохраняется условие  $|\phi| \rightarrow m$  при  $r \rightarrow \infty$ ) [153]. Энергию при этом можно оценить с помощью тривиального неравенства

$$(F_{ik} - \varepsilon_{ikhj} D^j \phi)^2 \geq 0,$$

откуда (мы опускаем суммирование по индексам  $a$ ):

$$H = \int d^3x \left( \frac{1}{4} F_{ik}^2 + \frac{1}{2} (D^i \phi)^2 \right) = \int d^3x \left[ \frac{1}{4} (F_{ik} \mp \varepsilon_{ikhj} D^j \phi)^2 \pm \frac{1}{2} F_{ik} \varepsilon_{ikhj} D_j \phi \right] \geq \pm \frac{1}{2} \int d^3x F_{ik} \varepsilon_{ikhj} D_j \phi = mg_m. \quad (81)$$

Последнее равенство вытекает из определения магнитного заряда  $\int B_k dS_k = g_m$ , где  $B_k = \varepsilon_{ikhj} F_{ik}/2$  ( $dS_k$  — нормальный вектор площади поверхности); знак  $\pm$  выбирается так, чтобы  $mg_m$  было положительным. Неравенство (81) становится точным, если

$$F_{ik} = \pm \varepsilon_{ikhj} D^j \phi. \quad (82)$$

Эти уравнения первого порядка можно переписать в виде простой системы

$$rk' = -kh; \quad rh' = h - (k^2 - 1), \quad (83)$$

которая легко решается заменой  $k = r\bar{k}$ ,  $h = -(1 + r\bar{h})$ . Единственное решение с конечной энергией

$$h = r \operatorname{cth} r - 1; \quad k = r (\operatorname{sh} r)^{-1} \quad (84)$$

было впервые найдено в работе [154]. Описанный метод его получения [153] можно использовать и в других случаях — для дионов, для вихрей в сверхпроводниках второго рода [153, 155] и в других моделях (см. [96, 128]).

Перейдем теперь к более подробному обсуждению уравнений (78) — (80). Заменой  $\tau = \ln(r_0/r)$ ,  $r^2 d^2/dr^2 = d^2/d\tau^2 + d/d\tau$  эти уравнения можно свести к лагранжевым уравнениям движения для неконсервативной системы (диссипативные члены  $d/d\tau$ ) с лагранжианом, зависящим от квазивремени [последний член в (79)]. Тем не менее общие методы, изложенные в разд. 3, позволяют довольно полно исследовать поведение решений этой системы и получить хорошие приближения для интересующих нас решений. Из общей теории следует, что решения имеют особенности, например, обращаются в бесконечность за конечное квазивремя. Это обстоятельство, в частности, не допускает существования регулярных солитонов для свободного поля Янга—Миллса.

Изучим его более подробно. Простейшее уравнение для свободного поля получается, если положить в (78) — (80)  $j \equiv h \equiv 0$ . Рассмотрим движения соответствующей квазиточки на энергетиче-

ческой диаграмме типа рис. 1 и на фазовой плоскости, определив квазиимпульс  $p = \dot{k}$ . Структура решений становится ясной из простого изучения рис. 2, где  $U(k) = k^2/2 - k^4/4$  — квазипотен-

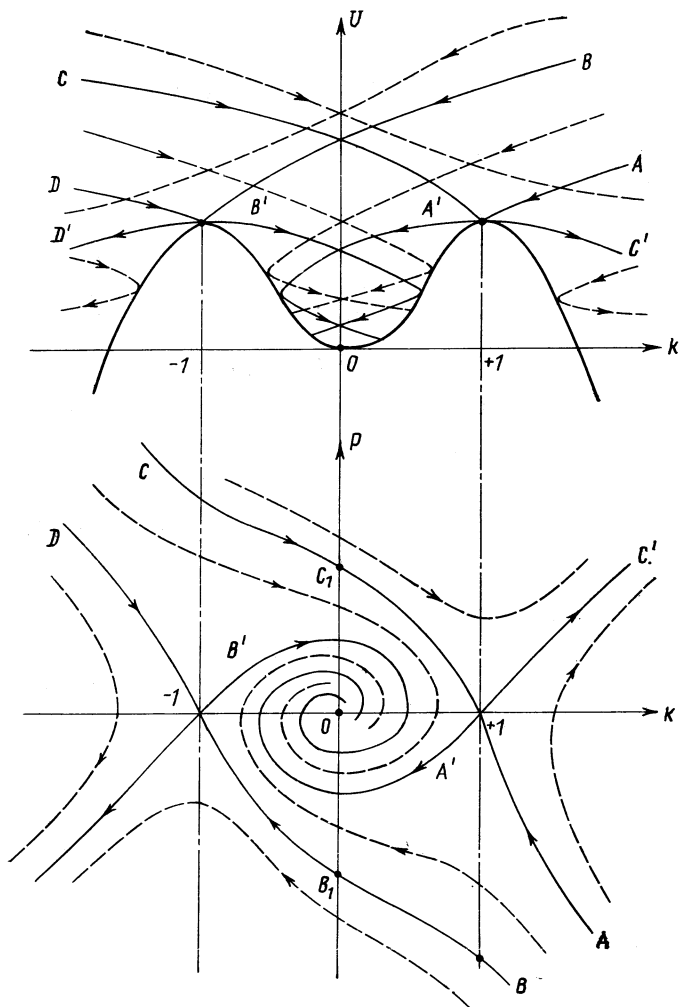


Рис. 2.

циал. Сплошные линии соответствуют движению, начинающемуся или оканчивающемуся в точках покоя  $k = \pm 1, 0, p = 0$ , они отмечены буквами  $A, A', B, B'$  и т. п. Остальные движения, отмеченные пунктирными линиями, соответствуют фазовым траекто-

ряим, лежащим в областях, отделенных сплошными линиями. Направление стрелок соответствует возрастанию квазивремени  $\tau$ , т. е. убыванию  $r$ . При всех  $\tau$  определены лишь решения, соответствующие траекториям  $A'$  и  $B'$  и точкам покоя. Из последних решений лишь  $k \equiv 0$  не тривиально, т. е. соответствует ненулевому полю:

$$F_{ij}^a = -\varepsilon_{ija} \frac{k'}{er} + \frac{1}{e} \varepsilon_{ijl} x_l x_a \left[ \frac{k'}{r^3} + \frac{(1-k^2)}{r^4} \right]. \quad (85)$$

Это решение, как и те, которые соответствуют траекториям  $A'$  и  $B'$ , в согласии с общей теоремой, имеют бесконечную энергию.

Легко, однако, построить решения с конечной энергией, определенные не при всех значениях  $r$ , например, при  $0 \leq r \leq R$  или при  $0 < R_1 \leq r \leq R_2$  и т. п. Решения для которых  $k' = 0$  или  $k = 0$  на концах интервала, минимизируют энергию (77), если в этом выражении интеграл распространяется лишь на соответствующий интервал. Для более общих граничных условий необходимо ввести в (77) дополнительные члены. Неизвестно, существуют ли локальные минимумы  $H$  (по параметрам  $R, R_1, R_2, \dots$ ) для решений, принадлежащих к таким классам. Отметим лишь, что существует два решения, определенных при  $0 \leq r \leq R$ , удовлетворяющих условиям  $k' = 0$  или  $k = 0$  на концах интервала и имеющих конечную энергию. Эти решения соответствуют траекториям  $(C_1, +1)$  и  $(B_1, -1)$  на рис. 2 (спиралям, навивающимся на 0, соответствует бесконечная энергия). Решения вблизи точек  $k = \pm 1$  ( $r \rightarrow 0$ ) можно найти в виде степенных рядов [156]

$$k = \pm \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{10} \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \dots \right]. \quad (86)$$

Преобразование этих рядов в непрерывные дроби с помощью  $Q - D$ -алгоритма позволяет быстро получить хорошее приближение для больших  $r$ , вплоть до точки  $r_0$ , где решение имеет полюс (обнаруженный в [156])

$$k \approx \pm \frac{\sqrt{2} r_0}{r_0 - r} + \dots \quad (87)$$

На отрезках, соответствующих траекториям  $(C_1, +1)$ ,  $(B_1, -1)$ ,  $r < r_0$ , никаких особенностей нет, и такие приближения быстро дают очень хорошую точность. К сожалению, зависимость энергии этих доменов от  $R$  тривиальна  $-H(R) \sim 1/R$ , и они сами по себе не могут быть устойчивыми при вариациях  $R$ . Если, однако, как это делается в модели массачузетского мешка [35], добавить к энергии объемный вклад  $(4\pi/3) R^3 B$ , то такой «мешок» стабилизируется. К аналогичному эффекту приводит, очевидно, и добавка поверхностной энергии.

Подобным образом можно проанализировать более сложные уравнения. Например, при  $h \equiv 0$  уравнения (78), (80) также описывают свободное поле Янга—Миллса. Помимо «магнитного» поля  $k$  теперь может быть и «электрическое»  $j$ . Система уравнений (78), (80) имеет смешанный «классически квантовый» характер, т. е. на уравнение (80) удобно смотреть как на уравнение Шредингера. На бесконечном интервале задача не имеет регулярных решений с конечной энергией. На конечном интервале такие решения в принципе возможны, но этот вопрос детально не изучен. Автор пытался построить решение, беря в качестве нулевого приближения решения уравнения (78) при  $j \equiv 0$ , соответствующее траекториям  $(C_1, +1)$  и  $(B_1, -1)$ , и обнаружил, что уравнение Шредингера (79) решений не имеет. Этот результат сохраняется и для некоторых более общих решений уравнений (78), например, для тех, которые соответствуют траектории  $(B_2, -1)$  (в этом случае  $A_a^i(R) = 0$ ).

Проблемы, относящиеся к доменным решениям, конечно, заслуживают более глубокого изучения. Может быть, начать его следовало бы с исследования решений для поля Янга—Миллса с внешними источниками, что представляет и самостоятельный интерес (например, источники-кварки). Чтобы увидеть, какого рода задачи при этом возникают, положим:

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}/4 - j_a^\mu A_\mu^a - F_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}/2, \quad (88)$$

где  $D_\mu j^\mu \equiv 0$ . Возьмем поле  $A_a^\mu$  в виде (76) при  $A_a^0 \equiv 0$ , а статические источники в виде

$$j_i^a = \varepsilon_{iaj} x_j f(r); \quad G_{ij}^a = \varepsilon_{ija} g_1(r) + \varepsilon_{ijk} x_k x_a g_2(r)/r^2, \quad (89)$$

остальные компоненты равны нулю. Тогда вместо (78) получим

$$r^2 k'' = k^3 - k + er^2 [g_1(r) + r^2 g_2(r)] k(r) - \\ - er^2 [r g_1'(r) + g_1(r) + r^2 f(r)].$$

Решения уравнений Янга — Миллса с источниками изучены мало (см. однако [157]), где рассмотрены простейшие точечные источники).

Другая возможность состоит в использовании решений с особенностью на конечном расстоянии (87). Предположим, что уравнения (78) и (80) (при  $h \equiv 0$ ) допускают такие решения, что  $j \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и  $|k| \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow 0$ . Тогда  $k(r)$  при некотором  $r = r_0$  обращается в  $\infty$ . Так как поведение  $k$  при  $k \rightarrow \infty$  определяется членом  $\sim k^3$ , в правой части (78), то вблизи  $r_0$  решение  $k$  должно иметь вид (87). Подставляя это выражение в (80), находим, что при  $r \rightarrow r_0$  должно быть

$$j(r) \underset{r \rightarrow r_0}{\sim} (r_0 - r)^{(1 + \sqrt{17})/2}$$



[второе решение обращается в  $\infty$  и нарушает условия применимости асимптотики (87)]. Таким образом, если  $k(r)$  известно, то для  $j(r)$  поставлена элементарная задача на собственные значения для одномерного уравнения Шредингера с потенциалом  $2k^2(r)/r^2$ , сингулярным на обоих концах ( $r = 0$  и  $r = r_0$ ). Эта задача, однако, не имеет решения, так как  $k^2 \geq 0$ . Решения могут возникнуть, если в правой части уравнения (80) появятся дополнительные члены, определяемые источниками поля  $j$ .

Заметим, что уравнения, весьма похожие на (78) и (80), можно получить и для нелинейных скалярных полей. Рассмотрим, например [28]:

$$\mathcal{L} = \dot{u}_{,\mu} u_{,\mu} + (v_{,\mu})^2/2 - fv^2|u|^2 - (\lambda/8)(v^2 - m^2)^2. \quad (90)$$

Полагая

$$v = mk(r); \quad u = \frac{m}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \frac{j(r)}{r},$$

получаем

$$k'' + \frac{2}{r} k' = \frac{f}{\lambda} \frac{j^2}{r^2} k - (k^2 - 1) k/2;$$

$$j'' = \frac{m^2}{\mu^2} k^2 j - \frac{\omega^2}{m^2 \lambda} j.$$

В работе [28] были изучены нетопологические солитоны, описываемые этими уравнениями, для которых отличен от нуля заряд (61). Замечания, сделанные выше о возможности доменных и сингулярных решений, полностью относятся и к этим уравнениям. Нетопологические солитонные решения в калибровочных теориях поля изучались в [158], а в теориях с фермионами — в работе [28].

Недавно были получены и подробно изучены уравнения аналогичные (78)—(80) для теорий Янга — Миллса, основанных на компактных простых группах картановского списка [159, 160]. В настоящее время не ясно, возникают ли в этих теориях принципиально новые физические эффекты, не наблюдавшиеся в более простых моделях. Хотя уравнения и имеют структуру, аналогичную (78) и (80), они представляют динамические системы более высокого порядка и опыт классической динамики говорит, что в таких системах возникают явления, не имеющие аналогий в более простых системах. Таким образом, детальный анализ решений общих уравнений необходим.

В заключение надо сказать несколько слов о возможных подходах к квантовой теории сильно сингулярных решений. На первый взгляд может показаться, что переход к квантовой теории тривиален. Действительно, если в уравнении (22) для квантовых флуктуаций потенциал  $v''(u_{c1})$  обращается в бесконечность при

некотором конечном значении  $x$ , то в окрестности этой точки  $\psi$  должно быть малым и, казалось бы, ничего существенно нового не произойдет. Однако, это рассуждение ошибочно, так как в сильном поле вблизи этой сингулярности будут происходить многочисленные эффекты, связанные с конденсацией зарядов на сингулярной поверхности, сильной поляризацией вакуума и т. п. Подобные эффекты, приводящие к полной перестройке вакуума в сильном поле тяжелых ядер хорошо известны [122], и при любой попытке использования сингулярных потенциалов они должны учитываться. Пока можно лишь предположить, что сингулярный потенциал может быть только первым приближением. В более полной теории сингулярная поверхность может превратиться в существенно динамический объект. Возможно, что для разумного приближенного описания этого объекта более пригоден образ пленки или мембраны (ср. с [37, 38]).

## 5. ВИХРИ. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В предыдущем разделе были рассмотрены решения в 3-пространстве без особенностей и решения, имеющие особенности в точке или на поверхности. Решения, имеющие особенность на линии в 3-пространстве, называются *вихрями*. Ограничимся обсуждением вихрей с цилиндрической симметрией, тогда эта особенность будет особенностью в точке для 2-пространства. На примере вихрей покажем, как использовались методы возмущений, хотя можно было бы применять и другие методы, описанные выше. Для простоты и наглядности будем говорить о вихрях в сверхтекучей жидкости или газе, и предположим, что для их описания можно применять  $\Psi$ -теорию сверхтекучести (см. [57—59, 65]). Изучим структуру отдельного вихря, ограниченного некоторой поверхностью, на которой поставлены достаточно общие граничные условия. Такой вихрь может быть ячейкой решетки вихрей или существовать сам по себе. Уравнение для параметра порядка  $\Psi$  можно получить из вариационного принципа для энергии

$$H = \int_D d^3x \left[ (\nabla\Psi)^2 + \frac{1}{2} f(|\Psi|^2) \right] + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial D} d^2S |\Psi|^2, \quad (91)$$

где в простейшем случае  $f(u^2) = u^4/2 - u^2 + C$ . Более точная теория, соответствующая современным представлениям о критических показателях, получается при  $f(u^2) = \mu \frac{u^6}{3} + (1 - \mu) \frac{u^4}{2} - u^2 + C$ . (Заметим, что мы выбрали единицы, в которых равновесное значение параметра  $\Psi_e$  порядка (равно) 1.) Из вариационного принципа для  $H$  следуют уравнения и граничные условия

$$\Delta\Psi = \Psi df/d|\Psi|^2, \quad (\mathbf{n}\nabla\Psi + \Psi/\lambda)_{\partial D} = 0. \quad (92)$$

При  $\lambda \rightarrow \infty$  получается естественное граничное условие  $(\mathbf{n}\nabla\Psi)_{\partial D} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к границе области  $D$ . Если заменить во втором интеграле в (91)  $|\Psi|^2$  на  $|\Psi - \Psi_0|^2$ , то получим неоднородное граничное условие  $(\lambda\mathbf{n}\nabla\Psi + \Psi - \Psi_0)_{\partial D} = 0$ , которое при  $\lambda \rightarrow 0$  переходит в граничное условие фиксированного значения  $\Psi$  на границе,  $(\Psi - \Psi_0)_{\partial D} = 0$ . Эта задача соответствует варьированию лишь первого члена в (49) с условием  $\delta\Psi|_{\partial D} = 0$ . Аналогично можно написать функционал энергии, соответствующий более сложным условиям на границе или другим дополнительным условиям (например, сохранение какого-либо «заряда», описываемого постоянством соответствующего функционала).

Обычно решались задачи следующего типа. Либо искались решения во всем пространстве с естественным граничным условием на бесконечности, либо ставилось условие  $\Psi|_{\partial D} = 0$  на границе некоторого заданного объема, например, стенки сосуда. Более общие граничные условия систематически не изучались, а между тем, как говорилось ранее, они представляют значительный интерес не только в проблемах сверхтекучести, но и в других фазовых переходах.

Рассмотрим отдельный цилиндрически-симметричный вихрь. Полагая  $\Psi = F(r) \exp(i\varphi)$ , получим для  $F$  следующую краевую задачу:

$$F'' + \frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F + F - F^3 = 0; \quad (93)$$

$$F'(R) + \frac{1}{\lambda} F(R) = 0; \quad F(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r. \quad (94)$$

При  $\lambda \rightarrow \infty$  воспроизводится естественное граничное условие  $F'(R) = 0$ , пригодное для описания решетки вихрей (в приближении Вигнера — Зейтца), а при  $\lambda \rightarrow 0$  получается граничное условие  $F(R) = 0$ , обычно используемое на границе сверхтекучей жидкости с твердой стенкой.

При  $R \gg 1$  можно получить хорошее приближенное решение задачи (93), (94), используя разложение в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon \equiv 1/R \ll 1$ . Чтобы это разложение было равномерно пригодным при  $0 \leq r \leq R$ , необходимо использовать достаточно тонкие методы.

С помощью замены  $\ln r/R = t$  преобразуем уравнение (33) к виду

$$\varepsilon^2 (\ddot{F} - F) + e^{2t} (F - F^3) = 0. \quad (95)$$

При  $\varepsilon = 0$  получаем равновесное решение  $F \equiv 1$ . Оно, однако, не удовлетворяет граничным условиям. Рассмотрим сначала погра-

ничный слой при  $r \sim R$ . Для его описания введем вторую переменную  $\tau \equiv t/\varepsilon$  (метод многих масштабов) и будем искать  $F$  в виде:

$$F = f(t, \varepsilon^2) + g(\tau, \varepsilon), \quad (96)$$

считая  $t$  и  $\tau$  независимыми переменными. Полагая

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^{2n}, \quad f_0 = 1, \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \varepsilon^n, \quad (97)$$

находим для  $f_n$  алгебраические соотношения

$$\begin{aligned} f_n - (f^3)_n &= \exp(-2t) [\dot{f}_{n-1} - f_{n-1}], \quad (f^3)_n \equiv \\ &\equiv \sum_{m_1+m_2+m_3=n} f_{m_1} f_{m_2} f_{m_3}, \end{aligned} \quad (98)$$

и для  $f$  в прежних переменных находим асимптотическое разложение

$$f(r) = \left( 1 - \frac{1}{2r^2} - \frac{9}{8r^4} - \frac{161}{16r^6} - \frac{12209}{64r^8} - \dots \right), \quad r \gg 1. \quad (99)$$

Уравнения для  $g_n$  оказываются сложнее

$$d^2 g_0 / d\tau^2 = 2g_0 + 3g_0^2 + g_0^3, \quad (100)$$

откуда получаем решение, убывающее с  $(r/R)$ :

$$g_0 = 2 [1 - (R/r)^{R\sqrt{2}} (1 + 2/g_0(R))]^{-1}. \quad (101)$$

Уравнение для  $g_n$  при  $n \geq 1$  линейны, например,

$$d^2 g_1 / d\tau^2 = g_1(\tau) [2 + 6g_0 + 3g_0^2] + 2\tau d^2 g_0 / d\tau^2.$$

Решение (96) в нулевом приближении может удовлетворять граничным условиям. Достаточно взять  $g_0(R) = \sqrt{2}/\lambda$ . Чтобы удовлетворить условию  $F'(R) = 0$ , достаточно положить  $g_0(R) = 0$ , а условие  $F(R) = 0$  выполнено, если  $g_0(R) = 1$ .

Найденное решение, однако, непригодно при малых  $r$ . Однако, в этом случае можно найти его в виде степенного ряда:

$$F(r) = r \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n} = a_0 r (1 - r^2/8 + \dots), \quad (102)$$

где  $a_0$  — неизвестный параметр;

$$a_n = \frac{1}{4n(n+1)} [(a^3)_{n-2} - a_{n-1}], \quad n \geq 2.$$

Радиус сходимости этого ряда конечен, поскольку  $F(r)$  имеет особенности в комплексной плоскости. Простое сшивание решений (102) и (99) выполнить не удастся, так как у этих решений нет общей области применимости. Можно попытаться преобразовать

оба ряда каким-либо известным методом, например, с помощью приближений Падэ или  $Q - D$ -алгоритма. Проще поступить иначе.

Найдем функцию, которая при  $r \rightarrow 0$  разлагается в степенной ряд типа (102), а при  $r \rightarrow \infty$  имеет асимптотическое разложение (99). Удобно для этой цели использовать обобщенные гипергеометрические функции. В нашем случае легко воспроизвести члены  $1 - 1/2r^2$  и  $a_0 r (1 - r^2/8)$  с помощью вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi$ :

$$F \approx F_{\text{int}} \equiv r \sqrt{\pi/8} \exp(-r^2/2) \Phi(3/2, 2, r^2/2). \quad (103)$$

Точность полученного приближения можно проверить с помощью правила сумм

$$2a_0(R) = F(R)/R + F'(R) + \int_0^R dr F(r) [1 - F^2(r)],$$

вытекающего из дифференциального уравнения. Улучшить приближение можно, домножая  $F_{\text{int}}$  на  $P_N(r^2)/Q_N(r^2)$ , где  $P_N$  и  $Q_N$  — полиномы, неизвестные коэффициенты которых определяются по коэффициентам разложений (99) и (102). Например, для воспроизведения третьих членов в разложениях (55) и (58) достаточно взять

$$\frac{P_N}{Q_N} = \frac{b}{a} \frac{4 + ar^4}{4 + br^4},$$

где  $b^{-1} - a^{-1} = 3/16$ ;  $48(a - b) + 2 = \pi b^2/a^2$ .

Точность определения  $a_0$  при этом  $\lesssim 4\%$ .

Заметим, что описанный метод пригоден для построения сферически симметричных решений, для нелинейностей более общего вида, для систем нелинейных уравнений (примеры таких уравнений обсуждались выше).

При малых значениях  $R$  можно использовать более простую теорию возмущений, записав (31) в следующем виде:

$$\ddot{F} - F = R^2 (F^3 - F) \exp(2t).$$

Чтобы в первом приближении можно было удовлетворить граничным условиям при  $r = R$ , представим это уравнение в несколько ином виде

$$\ddot{F} - F + R^2 \exp(2t) (1 - f_0^2) F = R^2 \exp(2t) (F^2 - f_0^2) F,$$

где  $f_0$  — пока произвольное число. Если пренебречь правой частью, то получим решение  $F^{(0)} = c_1 J_1(r \sqrt{1 - f_0^2})$ , где параметр  $a = \sqrt{1 - f_0^2}$  определяется из граничного условия при  $r = R$ .

Очевидно, что  $F$  удовлетворяет уравнению

$$F(r) = c_1 J_1(ar) - \frac{2}{\pi} J_1(ar) \int_0^r r' dr' N_1(ar') [F^2(r') - f_0^2] F(r') + \\ + \frac{2}{\pi} N_1(ar) \int_0^r r' dr' J_1(ar') [F^2(r') - f_0^2] F(r'). \quad (104)$$

Это уравнение можно решать итерациями, подставляя под интегралом вместо  $F$  нулевое приближение  $F^{(0)}$ . Граничное условие при  $r = R$  будет выполнено, если выполняется условие

$$c_1^2 \int_0^R r' dr' J_1^4(ar) = f_0^2 \int_0^R r' dr' J_1^2(ar).$$

Разумеется, аналогично можно построить и следующие приближения. Однако, уже построенное приближение достаточно точно, так что, пользуясь при больших  $R$  приближением (52) и при достаточно малых  $R$  только что описанной теорией возмущений, можно получить хорошее аналитическое приближение для описания структуры вихря при всех значениях  $R$ .

Заметим, что при описании вихря во вращающемся сосуде значение  $R$  обычно фиксируется условием квантования циркуляции (аналогичным условию квантования магнитного потока в сверхпроводнике). Мы сознательно не учитываем это условие, стремясь показать, что предлагаемые методы применимы для построения решений более общей природы.

Например, вихревую решетку Абрикосова в сверхпроводнике второго рода можно описать уравнениями ( $F$  — параметр порядка, магнитное поле равно  $H = dp/dr$ ,  $\kappa$  — параметр Гинзбурга — Ландау):

$$\left. \begin{aligned} F'' + F'/r + (1 - p^2(r)/r^2) F - F^3 &= 0; \\ p'' - p'/r &= F^2 p / \kappa^2 \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

с краевыми условиями  $F \sim r$ ,  $F'(R) = 0$ ,  $p(0) = -1$ ,  $p(R) = 0$ ,

причем условие квантования магнитного потока позволяет выразить  $R$  через среднее значение  $\langle H \rangle \equiv B$ ;  $R = (2H_{c2}/B)^{1/2}$ . Описанные выше методы с соответствующими изменениями были применены к этой задаче в работе Ю. С. Гальперн и автора [161].

Основной параметр в краевой задаче (105) — величина магнитной индукции  $B$  (или же  $\bar{R}$ ). Вихревая решетка существует, если  $H_{c1} < B < H_{c2}$ , где при  $\kappa^2 \gg 1$  нижнее критическое поле  $H_{c1}$  можно считать весьма малым, а верхнее  $H_{c2}$  весьма большим

$(H_{c2}/H_{c1} \sim 2\kappa^2 \ln \kappa^2)$ . Случаи  $B \sim H_{c2}$  ( $R \sim \sqrt{2}$ ) и  $B \sim H_{c1}$  ( $R \gg 1$ ) резко отличаются и требуют различного рассмотрения.

При  $B \sim H_{c2}$  можно построить теорию возмущений по параметру  $\varepsilon = H_{c2}/B - 1$  при любых значениях  $\kappa^2 > 1/2$ . Эта теория дает хорошие результаты, если  $\varepsilon \ll 1$ . Приведем первые члены разложения:

$$\left. \begin{aligned} F(r) &= c_0 (1 - B/H_{c2})^{1/2} (r/R) \exp(-r^2/2R^2) \times \\ &\quad \times \{1 + (H_{c2}/B - 1)v(r^2/R^2) + \dots\}; \\ p(r) &= (r^2/R^2 - 1) + (H_{c2}/B - 1)(c_0^2/2\kappa^2) \times \\ &\quad \times \{-1 + (r^2/R^2)(1 - 2/e) + \exp(-r^2/R^2)(1 + r^2/R^2)\} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

где  $v$  можно выразить через элементарные функции и интегральную показательную функцию  $Ei(r^2/R^2)$ .

Эта теория возмущений аналогична разложению для сверхтекучего вихря, основанному на итерациях уравнения (104). Если  $R \gg 1$ , что возможно лишь для больших значений параметра Гинзбурга — Ландау, то можно построить теорию возмущений, основанную на выделении пограничного слоя. Расчеты по существу совпадают с (95)—(103).

Абрикосовские вихри существуют и в релятивистской теории поля. Простейшая модель — взаимодействие безмассового векторного поля с комплексным скалярным полем Хиггса [162]. Такие же решения есть для поля Янга — Миллса, взаимодействующего с полями Хиггса (см., например, [163] и цитируемую литературу). Простейшие уравнения с точностью до обозначений, совпадают с уравнениями (105).

Изложенные методы теории возмущений можно использовать и для решения других задач, например, для решения уравнений, приведенных в предыдущем разделе, для замкнутых вихрей, для вихрей, взаимодействующих с фермионами [164] и т. п.

## 6. УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

Один из первых источников нелинейных задач в квантовой теории — *метод самосогласованного поля*. Он применялся не только в теории атома [165], но и в теории сверхпроводимости [166, 167] и в других проблемах. Недавно была возрождена, в новом оформлении идея использования приближения самосогласованного поля для описания волновых функций кварков в барионах [83]. Первая часть данного раздела посвящена краткому обсуждению этого подхода, во второй описаны любопытные свойства решений нелинейных уравнений для пропагатора электрона в «конечной» квантовой электродинамике [168]. Эти уравнения получены

в приближении, аналогичном приближению самосогласованного поля.

**Бариион как «монополю» в  $1/N$  разложении квантовой хромодинимики.** Основная идея состоит в том, что в  $1/N$  разложении [169] барион есть нечто вроде монополя, так как его масса обратно пропорциональна квадрату «константы связи», равной  $1/\sqrt{N}$  [83]. Напомним, что  $1/N$  разложение основано на замене исходной  $SU(3)$ -калибровочной симметрии на  $SU(N)$ . При  $N \rightarrow \infty$  теория существенно упрощается [169], и можно пользоваться разложением по степеням константы связи  $1/\sqrt{N}$ . Предполагается, что это разложение пригодно уже при  $N = 3$ . В работе [83] приведены аргументы в пользу того, что при  $N \rightarrow \infty$  волновую функцию кварков в барионе можно описывать уравнением самосогласованного поля и что оператор энергии  $N$  кварков

$$H = NM + \sum_i (-\Delta_i/2M) - \frac{g^2}{N} \sum_{i < j} V(|x_i - x_j|) \quad (107)$$

пропорционален  $N \equiv (1/\sqrt{N})^{-2}$ , т. е. имеет характерную для солитонов особенность по константе связи. При выполнении предельного перехода считается, что  $g/\sqrt{N}$  стремится к конечному пределу [83]. Тогда все члены в (107) пропорциональны  $N$  [имеется  $N(N-1)/2$  парных взаимодействий кварков с потенциалом  $V(|x_i - x_j|)$ ].

Уравнение самосогласованного поля для  $N$  кварков

$$\psi(x_1 \dots x_N, t) = \prod_i \varphi(x_i, t) \quad (108)$$

можно получить из вариационного принципа для энергии, оно имеет вид

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\Delta}{2M} \varphi(x, t) + g^2 \int d^3y \varphi^*(y, t) \varphi(y, t) V(|x-y|). \quad (109)$$

Для простоты кварки считаются тождественными, т. е. отличаются лишь цветом. В работе Виттена [83] убедительно показаны преимущества такого подхода к описанию барионов и рассмотрены постановки стационарных и нестационарных задач, связанных с уравнениями самосогласованного поля. Читатель, который интересуется общими идеями  $1/N$  разложения и их приложениями к теории мезонов и барионов, должен обратиться к работам Тоофта [169], Виттена [83] и Мигдала [170] (в последней  $1/N$  разложение трактуется в несколько ином плане). Здесь рассмотрена лишь простейшая задача, на примере которой видно, что уравнения самосогласованного поля можно решать описанными выше методами.

В работе [83] потенциал  $V$  берется в кулоновском приближении. Мы предлагаем более реалистичский потенциал, позволяющий



описывать удержание кварков. Из феноменологии следует, что такой потенциал должен быть кулоновым на малых расстояниях и достаточно быстро растущим на больших. Наиболее популярен потенциал

$$V(r) = -(\alpha_s/r)[1 - (r/r_0)^2], \quad (110)$$

хорошо описывающий спектроскопию чармония (см., например, [171]). Простейшие решения уравнения (109) — стационарные  $\varphi(x, t) = \exp(-iEt)\varphi(x)$ . Рассмотрим сначала одномерное пространство, в котором «кулоновский» потенциал

$$V(|x-y|) = g^2|x-y| \quad (111)$$

в то же время удерживает кварки. Уравнение самосогласованного поля

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \lambda^2\varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy\varphi^2(y)|x-y| - \varepsilon\varphi(x), \quad (112)$$

где  $\lambda^2 = 2Mg^2$ ,  $\varepsilon = 2ME$ , легко свести к системе двух уравнений

$$d^2\varphi/dx^2 = \psi(x)\varphi(x), \quad d^2\psi/dx^2 = 2\lambda^2\varphi^2, \quad (113)$$

**ПОЛОЖИВ**

$$\psi(x) \equiv \varphi^{-1}(x) d^2\varphi/dx^2, \quad (114)$$

и дважды продифференцировав  $\psi$ . Легко получить граничное условие для  $\psi(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\psi(x) = \lambda^2x - \varepsilon + \dots \quad (115)$$

Рассмотрим симметричное решение  $\varphi(x) = \varphi(-x)$ ,  $\psi(x) = \psi(-x)$ . Тогда при  $x = 0$  должны быть выполнены условия

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 0. \quad (116)$$

Кроме того,  $\varphi(x)$  должна быть убывающей функцией при  $|x| \rightarrow \infty$ , удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi^2(x) = 1. \quad (117)$$

Уравнения (113), (115)–(117) полностью определяют задачу. Для уравнений (113) легко найти сохраняющуюся квазиэнергию

$$K = \psi'^2/(4\lambda^2) + \varphi'^2 - \varphi^2\psi. \quad (118)$$

При  $x \rightarrow \infty$  получаем соотношение  $\lambda^2 = 4K$ , а при  $x \rightarrow 0$  из (116) следует, что  $K = -\varphi^2(0) \psi(0)$ , откуда вытекает нетривиальное соотношение

$$\psi(0) = -\lambda^2/[4\varphi^2(0)]. \quad (119)$$

Используя второе уравнение (113), можно найти приближение для «потенциала»  $\psi(x)$  при  $x \rightarrow 0$ :

$$\psi(x) = -\lambda^2/[4\varphi^2(0)] + \lambda^2\varphi^2(0)x^2 + \dots \quad (120)$$

Основываясь на (115) и (119), нетрудно построить хорошее первое приближение для  $\psi(x)$ , решить линейную краевую задачу для  $\varphi(x)$ , считая  $\psi(x)$  известным, и определить неизвестное значение параметра  $\varphi(0)$  из условия нормировки (117).

Другой, более стандартный и более систематический подход может быть основан на вариационном принципе. При этом можно быстро получить хорошее приближение, если брать пробные функции  $\varphi_\alpha(x)$ , удовлетворяющие всем найденным выше дополнительным условиям. При заданных пробных функциях потенциал определяется соотношением

$$\psi(x) = \varepsilon + \lambda^2 x - \int_x^\infty dy \varphi^2(y) (x-y), \quad (121)$$

а вариационные параметры получаются из уравнения

$$\delta_\alpha \int [\varphi_\alpha'^2 + \psi\{x, \varphi_\alpha\} \varphi_\alpha^2] = 0 \quad (122)$$

(зависимые параметры можно исключить или же ввести соответствующие дополнительные члены в вариационный принцип). Значение  $\varepsilon$  определяется из уравнения

$$\int [\varphi_\alpha'^2 + \psi\{x, \varphi_\alpha\} \varphi_\alpha^2] = 0. \quad (123)$$

Аналогичный вариационный расчет можно выполнить и в трехмерной задаче. Заметим, что для потенциала (110) интегро-дифференциальное уравнение (109) легко сводится к системе дифференциальных уравнений. Считая стационарное решение  $\varphi(x, t) = \exp(-iEt) \varphi(x)$  сферически симметричным и определяя

$$\psi \equiv r\varphi^{-1}(x) \Delta\varphi(x), \quad (124)$$

получим для  $\varphi$  и  $\psi$  систему

$$d^4\psi/dr^4 = \mu^2\varphi^2(r) - \lambda^2 d^2(r\varphi^2)/dr^2; \quad (125)$$

$$d^2\varphi/dr^2 + (2/r) d\varphi/dr = \varphi(r) \psi(r)/r, \quad (126)$$

где  $\lambda^2 = 8\pi\alpha_s M$ ;  $\mu^2 = 16\pi M\alpha_s/r^2$ . Граничные условия легко определяются, и мы их не выписываем. Решение этих уравнений,

конечно, сложнее, чем решение одномерных, но ни с какими принципиальными трудностями не связано. Аналогично можно изучить уравнения, содержащие зависимость от времени.

Мы не приводим результаты конкретных расчетов, так как для реальных приложений к спектроскопии барионов эти уравнения необходимо несколько обобщить. Во-первых, следует учесть релятивистские эффекты, хотя бы на уровне кинематики. Во-вторых, необходимо ввести зависимость сил от «ароматов» и спинов кварков. На этом пути можно, по-видимому, прийти к простому и единому описанию барионов и мезонов.

**Уравнения самосогласованного поля для пропагатора электрона.** Рассмотрим нелинейное уравнение для пропагатора электрона, полученное Джонсоном, Бэйкером и Виллеем [168, 172] в связи с попыткой построить квантовую электродинамику без расходимостей. Это уравнение можно получить из уравнения Дайсона, считая вершинную функцию и пропагатор фотона свободными, а затравочную массу электрона равной нулю (при этом выбирается калибровка Ландау). Подобные уравнения изучались ранее в статистической физике [173] и соответствуют приближению Хартри — Фока для энергии основного состояния системы.

Нетрудно проверить, что в указанном приближении массовый оператор электрона  $\alpha(x)$  подчиняется уравнению  $[x \equiv p_{\text{евкл}}^2, g \equiv (3/4\pi)(e^2/4\pi)]$

$$(x\alpha)'' + g\alpha(\alpha^2 + x)^{-1} = 0. \quad (127)$$

Теория сама по себе не содержит размерного параметра ( $\hbar = c = 1$ ), и его можно ввести в граничное условие. Проще всего задать значение  $\alpha(x)$  при  $x = 0$ . Беря  $\alpha(0)$  в качестве единицы массы, положим

$$\alpha(0) = 1. \quad (128)$$

Условие (128) определяет единственное решение в евклидовой области  $x \geq 0$ , которое можно представить в виде степенного ряда [174]:

$$\alpha(x) = 1 - \frac{g^2}{2}x + \frac{g^2(2-g^2)}{12}x^2 - \frac{g^2(3-5g^2+g^4)}{36}x^3 + \dots \quad (129)$$

Преобразование такого ряда в цепную дробь показывает, что радиус сходимости конечен, но особенность лежит не на положительной оси. Характер этой особенности оказывается довольно сложным. Для выяснения его положим  $x \equiv -y$ ,  $\alpha = y^{1/2} \beta(y)$ ,  $t \equiv \ln(y/y_0)$ . Тогда

$$\ddot{\beta} + 2\dot{\beta} + (3/4)\beta = g\beta/(\beta^2 - 1); \quad (130)$$

$$\beta(t) \rightarrow y_0^{-1/2} \exp(-t/2), \quad t \rightarrow -\infty. \quad (131)$$

Это уравнение сводится к автономной системе. Мы воспользуемся ее первым интегралом, и для получения оценки положения особой точки в комплексной плоскости  $x$  рассмотрим приближение  $g \ll 1$ . При  $g \rightarrow 0$

$$\alpha(y) \approx 1 + g \left[ 1 + \frac{1-y}{y} \ln(1-y) \right] + \dots, \quad y < 1. \quad (132)$$

Отсюда можно найти начальные условия для определения решения в комплексной плоскости  $y$  или  $t$ . Удобнее, однако, взять начальное условие в точке  $\bar{t}$ , в которой  $\dot{\beta}(\bar{t}) = 0$ . Легче всего найти эту точку из уравнения первого порядка

$$\dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} = -2\dot{\beta} - \frac{3}{4}\beta + g\beta(\beta^2 - 1)^{-1} \quad (133)$$

и его интеграла

$$\dot{\beta}^2 + \frac{3}{4}\beta^2 - g \ln(\beta^2 - 1) + 4 \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta \dot{\beta}(\beta) = C. \quad (134)$$

Отсюда, кстати, видно, что особенностей на вещественной оси быть не может, достаточно рассмотреть предел  $\beta^2 \rightarrow 1$ . Так как при малом  $\beta$  функция  $g$  близка к единице, то удобно положить  $\beta = 1 + v$ . В интересующей нас области  $v$  удовлетворяет приближенному уравнению

$$\dot{v} = -[g \ln(v/v_0) + (v - v_0)/2 + v_1^2], \quad (135)$$

где  $v_0 \sim g$ ,  $v_1 \sim -1/2$ .

Отсюда

$$t = v_0 \int_{v/v_0}^1 d\xi \{ g \ln \xi + (v_0/2)(\xi - 1) + v_1^2 \}^{-1/2}. \quad (136)$$

При уменьшении  $v/v_0$  мы упрямся в точку ветвления. Чтобы при дальнейшем уменьшении  $v$  оставалось вещественным, необходимо брать в дальнейшем чисто мнимые значения  $t$ . Это происходит при  $\dot{v}(\bar{t}) = 0$ , т. е. при  $\dot{\beta}(\bar{t}) = 0$ . Особая точка определяется теперь условием  $v = 0$ , откуда находим, что особенность расположена при

$$y \approx \bar{y} (1 \mp i\bar{v} \sqrt{\pi/g}). \quad (137)$$

При малом  $g$  имеем простое приближение

$$\bar{v} \approx v_0 \exp(-v_1^2/g) \sim g \exp(-1/4g), \quad (138)$$

т. е. при  $g \rightarrow 0$  мнимая часть особенности (137) экспоненциально убывает. Хотя, вообще говоря, особенности пропагатора в ком-

плексной плоскости не позволяют придать теории физический смысл, при  $g \gg 1$  комплексные особенности практически невозможно отличить от вещественных. Отметим также, что если обойти точку ветвления в  $p^2$ -плоскости по пути, указанному на рис. 3, то на линии  $AA'$  мнимая часть  $\alpha(x)$  окажется положительной.

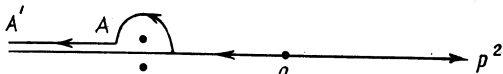


Рис. 3

В работе [175] было найдено решение, вещественное при  $-\infty < x < +\infty$ . Оно соответствует продолжению решения на отрицательные значения  $x$  без обхода особой точки. Из предыдущего ясно, что заключение об отсутствии особенностей в комплексной плоскости  $x = p^2$ , сделанное на этом основании в работе [175], ошибочно. Наличие какой-то особенности в плоскости было впервые показано в работе [174]. Характер особенности при  $g \ll 1$  был выяснен автором этого обзора в конце 1977 г., а приведенные выше рассуждения впервые опубликованы в работе [30]. Исходя из результатов работы [174], Аткинсон и Блатт [176] независимо и другим, численным методом получили ту же самую особенность. Аналитический расчет, проведенный в работе [30] при  $g \ll 1$ , и численный расчет работы [176] хорошо дополняют и подтверждают друг друга.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы попытались показать, какие неожиданные и интересные явления могут встретиться при решении существенно нелинейных проблем. Помимо широко известных регулярных солитонов, вихрей и локализованных решений с особенностью в точке могут существовать домены, имеющие особенность на поверхности и определенные в конечной части пространства. Этим решениям могут соответствовать минимумы (по крайней мере, локальные) полной энергии системы, и, таким образом, они могут описывать стабильные или метастабильные состояния, не встречающиеся в линеаризованной теории. Коротко это можно суммировать как проявление некоей рудиментарной способности нелинейных уравнений к «самоорганизации». Придать более точный смысл этому несколько рискованному утверждению удастся, видимо, лишь после того, как будет понято развитие таких систем во времени из произвольного начального состояния.

Из приведенных в обзоре примеров можно увидеть, какой стратегии стоит придерживаться и какие приемы использовать при решении нелинейных задач. Хотя таких общих и эффективных методов, как в линейной теории, мы здесь не имеем, все же «прием, примененный дважды, становится методом, а двукратное

применение одного и того же метода — это уже теория» (Д. Пойа). Все изложенные приемы применены не менее двух раз.

Полезно сводить задачу к решению автономной системы, использовать методы качественной теории, разложения в степенные ряды и асимптотические разложения, выделяя пограничный слой и т. п. При построении решений с особенностями очень эффективно преобразование степенного ряда в непрерывную дробь, хорошие результаты дает интерполяция по крайевым условиям не только полиномами, но и специальными функциями. Все эти приемы или методы полезны и при решении намного более сложных задач. Они дают приближения, качественно правильно воспроизводящие особенности точного решения, и могут служить хорошими первыми приближениями при численном расчете. Возможности применения подобных методов классического анализа и их обобщений далеко не исчерпаны, и их несомненно стоит использовать наряду с более современными орудиями функционального анализа, алгебры и топологии, для решения нелинейных задач физики.

Этот обзор вырос из доклада автора на V Международном совещании по нелокальной квантовой теории поля (Алушта, апрель 1979), посвященном памяти его организатора Д. И. Блохинцева, всегда уделявшего большое внимание нелинейным проблемам теории поля и привлекавшего к участию в совещаниях наиболее активных исследователей. Общине и дискуссии с участниками этого совещания, а также с участниками семинара ИТФ им. Ландау (Черноголовка, декабрь 1978), посвященного различным аспектам теории солитонов, оказали значительное влияние на содержание обзора. Полезные замечания, учтенные при работе над ним, сделали А. Н. Васильев, Г. Паризи, М. В. Савельев и Л. Д. Фаддеев. Некоторые из задач третьего раздела изучены совместно с О. Раси-Заде, который также прочел рукопись и помог выявить неточности. Авторы цитированных препринтов любезно прислали свои работы до опубликования, что существенно помогло в работе, особенно близкими оказались работы Т. Д. Ли и сотр.

Всем коллегам, содействовавшим появлению этой работы, автор выражает сердечную благодарность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 4. М., Изд. АН СССР, 1955.
2. Крауфорд Ф. Волны. Пер. с англ. М., Наука, 1974.
3. Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. 1. Киев, «Наукова думка», 1969.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
5. Узем Д. Б. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
6. Нелинейные волны. Сб. статей. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
7. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Пер. с франц. М., Наука, 1976.

8. **Колебательные процессы** в биологических и химических системах. Сб. статей. М., Наука, 1967.
9. **Николис Г., Пригожин И.** Самоорганизация в неравновесных системах. Пер. с англ. М., Мир, 1979.
10. **Towards a Theoretical Biology.** Ed. C. M. Waddington. Edinburgh, 1970—1972.
11. **Уиттекер Е.** Аналитическая динамика. М.—Л., ОНТИ, 1937.
12. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М., Наука, 1971.
13. **Нитецки З.** Введение в дифференциальную динамику. Пер. с англ. М., Мир, 1975.
14. **Милл-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. Пер. с англ. М., Мир, 1964.
15. **Ван Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкостей. Пер. с англ. М., Мир, 1967.
16. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М., Мир, 1964.
17. **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными. Пер. с япон. М., Мир, 1977.
18. **Море Ф. М., Фешбах Г.** Методы теоретической физики. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
19. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1955.
20. **Нелинейная квантовая теория поля.** Сборник статей. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
21. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Т. 1. М.—Л., Гостехтеориздат, 1951.
22. **Finkelstein R., Lelevier R., Ruderman M.**— *Phys. Rev.*, 1951, v. 83, p. 326—332.
23. **Polyakov A. M.**— *Phys. Lett. B*, 1975, v. 59, p. 82; — *Nucl. Phys. B*, 1977, v. 120, p. 429.
24. **Belavin A. A., e.a.**— *Phys. Lett. B*, 1975, v. 59, p. 85.
25. **Coleman S.** Preprint HUTP-78/A 004, Harvard, 1978.
26. **Finkelstein R., Fronsdal C., Kaus P.**— *Phys. Rev.*, 1956, v. 103, p. 1574—1579.
27. **Friedberg R., Lee T. D., Sirlin A.**— *Phys. Rev. D*, 1976, v. 13, p. 2739; — *Nucl. Phys. B*, 1976, v. 115, p. 1, 32.
28. **Friedberg R., Lee T. D.**— *Phys. Rev. D*, 1977, v. 15, p. 1694; *Phys. Rev. D*, 1977, v. 16, p. 1096.
29. **Lee T. D.**— *Phys. Reports C*, 1976, v. 23, p. 254.
30. **Филиппов А. Т.**— В кн.: Труды V Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. ОИЯИ, P2-12462, Дубна, 1979.
31. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.**— ЭЧАЯ, 1978, т. 9, с. 709—758.
32. **Polyakov A. M.**— *Phys. Lett. B*, 1979, v. 82, p. 247.
33. **Scott A. C., Chu F. Y. F., McLaughlin D. W.**— *Proc. of the IEE*, 1973, v. 61, p. 1443.
34. **Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.**— Функциональный анализ и его приложения. Т. 5. М., Наука, 1971, с. 18.
35. **Chodos A. e.a.**— *Phys. Rev. D*, 1974, v. 9, p. 3471.
36. **Johnson K.**— *Acta Phys. Polonica B*, 1975, v. 6, p. 865.
37. **Hasenfrantz P., Kuti J.**— *Phys. Repts*, 1977, v. 40, p. 75—179.
38. **Johnson K.** Preprint MIT, CTP N 719. Cambridge, 1978.
39. **Хуберт А.** Теория доменных стенок в упорядоченных средах. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
40. **Bardeen W. A. e.a.**— *Phys. Rev. D*, 1974, v. 11, p. 1094.
41. **Пенроуз Р.** Структура пространства — времени. Пер. с англ. М., Мир, 1972.

42. Белинский В. Л., Лифшиц Е. М., Халатников И. М.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 1606.
43. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Наука, 1973.
44. Christ N. H., Lee T. D.— Phys. Rev. D, 1975, v. 12, p. 1606.
45. Jackiw R.— Rev. Mod. Phys., 1973, v. 43, p. 681.
46. Rajaraman R.— Phys. Reports C., 1975, v. 21, p. 227.
47. Gervais J. L., Neveu A.— Phys. Reports. C, 1976, v. 23, p. 237.
48. Gervais J. L.— Acta Phys. Austriaca, Suppl., 1977, v. 18, p. 385.
49. Goldstone J., Jackiw R.— Phys. Rev. D, 1975, v. 11, p. 1486.
50. Dashen R., Hasslacher B., Neveu A.— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 4114, 4130; 1975, v. 11, p. 3424.
51. Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д.— ТМФ, 1975, т. 25, с. 147.
52. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М., Изд-во МГУ, 1965; — ТМФ, 1970, т. 2, с. 30.
53. Keller J.— Ann. Phys., 1958, v. 4, p. 180.
54. Gutzwiller M.— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 1979; 1969, v. 10, p. 1004; 1970, v. 11, p. 1791; 1971, v. 12, p. 343.
55. Боголюбов Н. Н.— Изв. АН СССР, серия физ., 1947, т. 11, с. 77.
56. Gross E. P.— Phys. Rev., 1957, v. 106, p. 161.
57. Пятаевский Л. П.— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 646.
58. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.— ЖЭТФ, 1950, т. 20, с. 1064.
59. Гинзбург В. Л., Пятаевский Л. П.— ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 1240.
60. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
61. Drell S. D., Weinstein M. and Yankielowicz S. Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 487; Drell S. D. Quark confinement. Preprint SLAC-PUB-2020, Stanford, 1977.
62. Грибов В. Н.— В кн.: Физика элементарных частиц (Материалы 12-й зимней школы ЛИЯФ). Л., Изд-во ЛИЯФ, 1977, с. 147—162.
63. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М., Наука, 1975.
64. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение, М., Мир, 1975.
65. Гинзбург В. Л., Собянин А. А.— УФН, 1976, т. 120, с. 153—216.
66. Фаддеев Л. Д.— В кн.: Труды V Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Изд-во ОИЯИ, P2-12462, Дубна, 1979.
67. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.— УМН, 1979, т. 34, вып. 5 с. 3.
68. Арефьева И. Я.— В кн.: Труды V Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Изд-во ОИЯИ, P2-12462, Дубна, 1979.
69. Jackiw R., Rebbi C.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 172.
70. Callan C., Dashen R., Gross D.— Phys. Lett. B, 1976, v. 63, p. 334.
71. Weinberg S.— Phys. Rev. D, 1975, v. 11, p. 3583.
72. 't Hooft G. Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 8; — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 3432.
73. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Наука, 1974.
74. McLaughlin D.— J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 1099.
75. Freed K.— J. Chem. Phys., 1972, v. 56, p. 692.
76. Coleman S.— Ann. of Phys., 1976, v. 101, p. 239.
77. Kogut J., Susskind L.— Phys. Rev. D, 1976, v. 11, p. 3594.
78. Witten E.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 149, p. 285—320.
79. Kogut J., Susskind L.— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 3468.
80. Филиппов А. Т.— Ядерная физика, 1979, т. 29, с. 1035—1053.
81. Friedberg R., Lee T. D. QCD and the soliton model of hadrons. Columbia Univ. Preprint CU-TP-118, N. Y., 1978.
82. Shifman M. A., Vainstein A. I., Sakharov V. I. Preprints ITEP 73, 80,



- 81, 94, Moscow, 1978; Захаров В. И. — В кн.: Труды V международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. ОИЯИ P2-12462. Дубна, 1979.
83. Witten E. Baryons in the  $1/N$  Expansion. Preprint HUPT-79/A007. Cambridge, 1979.
84. Marciano W., Pagels H. — Phys. Reports, 1979, v. 36C, p. 137.
85. Faddeev L. D., Korepin V. E. — Phys. Reports, 1978, v. 28, p. 3.
86. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М., Наука, 1977.
87. Пуанкаре А. Избранные труды. Т. I, II. М., Наука, 1971, 1972.
88. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1974.
89. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
90. Проскураков А. П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1977.
91. Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. Пер. с англ. М., Наука, 1979.
92. Найфэ А. Х. Методы возмущений. Пер. с англ. М., Мир, 1976.
93. Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
94. Thom R. Stabilité Structurelle et Morphogenese. N. Y., Benjamin, 1972.
95. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехтеориздат, 1947.
96. Фаддеев Л. Д. — В кн.: Нелокальные, нелинейные и неренормируемые поля. ОИЯИ, Д2-9888. Дубна, 1976.
97. Berger M. S. New Variational Methods in nonlinear analysis. Univ. of Miami. Preprint CTS-73-M-9, Coral Gables, 1973.
98. Теория ветвлений и нелинейные задачи на собственные значения. Сб. статей. Пер. с англ. М., Мир, 1974.
99. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., Наука, 1976.
100. Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М., Наука, 1976.
101. Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. литературы, 1960.
102. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехтеориздат, 1941.
103. Landford O. E. — Comm. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 176—191; 1969, v. 11, p. 257—292.
104. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Пер. с англ. М., Мир, 1978.
105. Levine H. — Arch. Rat. Mech. Anal., 1973, v. 51, p. 371—386.
106. Keller J. — Comm. Pure Appl. Math., 1957, v. 10, p. 503—510; p. 523—532.
107. Osserman R. — J. Math., 1957, v. 7, p. 1641—1647; Univ. of Miami. Preprint CTS-M-73-8. Coral Gables, 1973.
108. Филиппов А. Т. — ЭЧАЯ, 1979, т. 10. с. 501—538.
109. Filippov A. T. — Phys. Lett. B, 1974, v. 51, p. 379.
110. Jorjadze G. P., Pogrebkov A. K., Polivanov M. K. Preprint ICTP IC/78/126, Trieste, 1978.
111. Redheffer R. — J. Math. Anal. Appl., 1960, v. 1, p. 277—299, — Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, v. 10, p. 427—457.
112. Colabi E. — Duke Math. J., 1958, v. 25, p. 45—56.
113. Musialek J. — Prace Mat., 1963, v. 8, p. 21—23.
114. Goyal V. B. — Composite Mat., 1967, v. 18, p. 162—169.
115. Nitsche J. — Math. Z., 1957, Bd., 69m, S. 317—324.

116. Hammerstein H.— Acta Math., 1930, v. 54, p. 118—122; Cinquini S.— Boll. Unione Mat. Ital, 1938, v. 17, p. 99—105.
117. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. литературы, 1954.
118. Mambriani A.— Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 1929, v. 9, p. 142—144; p. 620—622.
119. Tonelli L.— Ann. delle R. Sc. Norm., Sup. di Pisa (2), 1939, v. 8, p. 75—88.
120. Чандрасенар С. Введение в учение о строении звезд. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. литературы, 1950.
121. Рейсиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1974.
122. Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. М., Наука, 1978.
123. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
124. Parenti C., Strocchi F., Velo G.— Phys. Lett. B, 1975, v. 59, p. 157; Skula Norm. di Pisa. Preprint S.N.S. 22, Pisa, 1975, S.N.S. 3, Pisa, 1976.
125. Дринфельд В., Манин Ю. И.— Функц. анализ и его приложения, 1978, т. 12, с. 78; Atiyah M. e.a.— Phys. Lett. A, 1979, v. 65, p. 185.
126. Christ N., Weinberg E., Stunton N.— Phys. Rev. D, 1978, v. 18, p. 2013; Corrigan E. e.a.— Nucl. Phys. B, 1978, v. 140, p. 31.
127. Элементарные частицы (Третья школа физики ИТЭФ). Вып. 1. М., Атомиздат, 1975.
128. Goddard P., Olive D. CERN preprint TH 2445. Geneva, 1977.
129. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. литературы, 1961.
130. Вишик М. И., Люстерник Л. А.— УМН, 1957, т. 12, с. 3—122.
131. Васильева А. Б.— УМН, 1963, т. 18, с. 15—86.
132. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М., Мир, 1968.
133. Wall H. S. Analytic theory of Continued Fractions. N. Y., Van Nostrand, 1948.
134. Zinn Justin J.— Phys. Repts. C, 1971, v. 1, p. 56.
135. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М., Наука, 1975.
136. Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. Пер. с англ. М., Мир, 1976.
137. Hobart R.— Proc. Phys. Soc. (Lond), 1963, v. 82, p. 201; Derrick G. H.— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 1252.
138. Deser S.— Phys. Lett., 64B, 1976, v. 14, p. 463; Pagels H. Phys. Lett. 68B, 1977, v. 64, p. 466.
139. Wu T. T., Yang C. N.— Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 3233.
140. Skyrme T. H. R.— Proc. Roy. Soc. (Lond) A, 1958, v. 247, p. 260; 1961, v. 260, p. 127; 1961, v. 262, p. 237.
141. Neumann L., Tewordt L.— Z. Phys., 1966, Bd. 189, S. 55.
142. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
143. Handbook of Mathematical Functions. Ed. M. Abramowitz, I. A. Stegun. N. Y., Dover Publ. Inc., 1970.
144. Lee T. D. Nontopological solitons. Columbia Univ. preprint CO-2271-76. N. Y., 1976.
145. Jackiw R., Rebbi C.— Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 3398.
146. Enz U.— Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 1392; Finkelstein D. e.a.— J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 788.
147. Georgi H., Glashow S.— Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 2977.
148. Wu T. T., Yang C. N. Properties of Matter under Unusual conditions. N. Y., Interscience, 1969.

149. Поляков А. М. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 430; 't Hooft G. — Nucl. Phys. B, 1974, v. 79, p. 276.
150. Julia B., Zee A. — Phys. Rev., D, 1975, v. 11, p. 2227.
151. Schwarz A. S. — Nucl. Phys., B, 1976, v. 112, p. 358.
152. Jackiw R., Rebbi C. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1116; Hasenfrantz P., 't Hooft G. Ibid., p. 1119; Goldhaber A. ibid., 1122.
153. Богомольный Е. Б. — Ядерная физика, 1975, т. 21, с. 219.
154. Prasad M. K., Sommerfield C. M. Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 760.
155. Weinberg E. J. Columbia Univ. preprint CU-TP-144, N. Y., 1978.
156. Rosen G. — J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 595.
157. Mandula J. E. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 3497—3507.
158. Friedberg R., Lee T. D., Sirlin A. — Nucl. Phys. B, 1976, v. 115, p. 1, 32.
159. Witten E. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 121.
160. Leznov A. N., Saveliev M. V. — Phys. Lett. B, 1978, v. 79, p. 294; Preprints ИЯФ 78-159, 78-176, 78-177. Serpukhov, 1978.
161. Гальперн Ю. С., Филиппов А. Т. Препринт ОИЯИ Р2-10938, Дубна, 1977.
162. Nielsen H. B., Olesen P. — Nucl. Phys. B, 1973, v. 61, p. 45.
163. Wyld H. W., Cutler R. T. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 1648.
164. Senjanovic P. — Nucl. Phys. B, 1976, v. 116, p. 365.
165. Хартри Д. Расчеты атомных структур. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. литературы, 1960.
166. Боголюбов Н. Н. — УФН, 1959, т. 67, с. 549.
167. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. Пер. с англ. М., Мир, 1968.
168. Johnson K., Baker M., Willey R. — Phys. Rev. B, 1964, v. 136, p. 1111.
169. 't Hooft G. — Nucl. Phys. B, 1974, v. 72, p. 461.
170. Migdal A. A. — Ann. Phys. (N. Y.), 1978, v. 110, p. 46.
171. Вайнштейн А. И. и др. — УФН, 1977, т. 123, с. 217.
172. Haag R., Maris Th. A. J. — Phys. Rev., 1963, v. 132, p. 2325.
173. Luttinger J. M., Ward J. C. — Phys. Rev., 1960, v. 118, p. 1417.
174. Dragovic B. G., Mavlo D. P., Filippov A. T. — Fizika, 1978, Bd. 10, S. 51.
175. Fukuda R., Kugo T. — Nucl. Phys. B, 1976, v. 117, p. 250.
176. Atkinson D., Blatt D. W. E. — Nucl. Phys. B, 1979, v. 151, p. 342.