«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1981, том 12, вып. 1

УДК 530.12:531.51

ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И НОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРОСТРАНСТВЕ И ВРЕМЕНИ

В. И. Денисов
Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили
Институт физики высоких энергий, Серпухов

Построена полевая теория гравитации, в основу которой положены два принципа.

1. Наличие законов сохранения для вещества и гравитационного поля, что достигается выбором псевдоевклидовой геометрии в качестве естественной геометрии для гравитационного поля.

2. Принцип геометризации (принцип тождественности), утверждающий, что уравнения движения вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени могут быть тождественно представлены как уравнения движения вещества в некотором эффективном римановом пространстве — времени с метрическим тензором, зависящим от гравитационного поля и метрического тензора псевдоевклидова пространства — времени.

We have constructed field gravitation theory based on two principles.

1. Availability of conservation laws for matter and gravitational field, which is achieved due to pseudoeuclidean geometry chosen as a natural geometry for gravitational field.

2. Geometrization principle (identity principle), stating that the equations of matter motion under the influence of gravitational field in pseudoeuclidean space — time may identically be presented as an equation of matter motion in some effective Riemannian space — time with a metric tensor dependent on gravitational field and the metric tensor of pseudoeuclidean space — time.

ВВЕДЕНИЕ

Во всех физических теориях, описывающих различные формы материи, одной из важнейших характеристик поля является плотность тензора энергии — импульса, которую обычно получают вариацией плотности лагранжиана L по компонентам метрического тензора пространства — времени g_{in}:

$$T^{in} = -2\delta L/\delta g_{in}$$

Приведенная характеристика отражает существование поля: если плотность тензора энергии — импульса равна нулю в некоторой бесконечно малой области пространства, то и поле отсутствует в указанной области. При этом энергия — импульс любого физического поля вносит вклад в полный тензор энергии — импульса системы и не обращается в тождественный нуль вне источника поля. Последнее позволяет рассматривать перенос энергии волнами в духе Фарадея — Максвелла: изучать характер распределения интенсивности поля в пространстве, определять потоки энергии через поверхность, вычислять изменение энергии — импульсе в процессах излучения, поглощения и т. д.

В общей теории относительности (ОТО) гравитационное поле не обладает свойствами, присущими другим физическим полям, так как оно лишено такой характеристики. Плотность полного симметрического тензора энергии — импульса системы, состоящей из гравитационного поля и вещества (при этом веществом мы будем считать и все поля материи, кроме гравитационного поля) в силу уравнений Эйнштейна оказывается строго равной нулю:

$$T^{in}+t^{in}=0, \tag{A}$$

где T^{in} — плотность симметрического тензора энергии — импульса вещества;

$$t^{in}=-\left(\sqrt{-g}/8\pi\right)\left[R^{in}-(1/2)\,g^{in}R\right].$$

Из (A) следует также, что все компоненты плотности симметрического тензора энергии — импульса гравитационного поля t^{in} равны нулю всюду вне вещества. Поэтому в выражении (A) тензор t^{in} является характеристикой геометрии внутри вещества, в то время как тензор T^{in} является характеристикой вещества.

Таким образом, уже из приведенных результатов следует, что гравитационное поле в ОТО Эйнштейна не обладает свойствами, присущими другим физическим полям, так как вне источника оно лишено основной физической характеристики — тензора энергии — импульса.

Физической характеристикой гравитационного поля в теории Эйнштейна является тензор кривизны R^i_{nlm}. Ясным осознанием этого мы обязаны Сингу (см. с. 8 в [1]): «...Если мы принимаем идею о том, что пространство — время является римановым четырехмерным пространством (а если мы релятивисты, так мы должны это сделать), то, очевидно, первая наша задача будет состоять в том, чтобы прочувствовать эту четырехмерность, подобно тому, как мореплаватели далеких времен должны были ощутить сферичность океана. И первое, что нам нужно осмыслить,— это тензор Римана, поскольку *этот тензор и есть* гравитационное поле: если он обращается в нуль (и только в этом случае) — поля не существует. И однако, что довольно странно, этот важнейший факт был отодвинут на задний план...». И далее он отмечает: «...В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно; оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя...».

Однако указанная характеристика гравитационного поля отражает скорее способность гравитационного поля изменить энергию — импульс вещества, т. е. отражает силовое воздействие гравитационного поля на вещество, описываемое уравнением [2]:

$$\delta^2 n^i/\delta s^2 + R^i_{mkl} u^m u^l n^k = 0,$$

где $u^i = dx^i/ds$ — 4-вектор скорости; n^i — бесконечно малый вектор отклонения геодезических. Но о потоке энергии, переносимой волной, описание с помощью волн кривизны никакой информации не дает.

Таким образом, ОТО Эйнштейна связывает воедино вещество и гравитационное поле, причем, если первое характеризуется, как и во всех физических теориях, тензором энергии — импульса, т. е. тензором второго ранга, то характеристикой второго является тензор кривизны — тензор четвертого ранга. Отсюда непосредственно следует, что в ОТО, в принципе, не существует законов сохранения, связывающих вместе вещество и гравитационное поле. Таким образом, создание ОТО получено ценой отказа от законов сохранения вещества и гравитационного поля вместе взятых.

Лоренц и Леви — Чивита предлагали рассматривать величины

$$t^{in} = -2\delta L_g/\delta g_{in} = -\left(\sqrt{-g}/8\pi\right)\left[R^{in} - (1/2)\, g^{in} R\right] \tag{1}$$

как компоненты плотности тензора энергии — импульса гравитационного поля, а выражение (А) как своеобразный закон сохранения плотности полного тензора энергии — импульса.

Своеобразие закона сохранения (А) состоит в том, что он является локальным законом сохранения, позволяющим по изменению тензора энергии — импульса вещества в какой-либо точке определить изменение тензора энергии — импульса гравитационного поля в этой же точке:

$$\partial T^{0i}/\partial t = -\partial t^{0i}/\partial t. \tag{2}$$

Следует подчеркнуть, что в теории Эйнштейна изменение энергии — импульса вещества непосредственно связано только с изменением скалярной кривизны R и тензора второго ранга R^{in} в области, занимаемой веществом. Результатом этой непосредственной связи и является своеобразный закон сохранения (2).

Волны кривизны, описываемые тензором четвертого ранга R^i_{nlm}, в ОТО не связаны непосредственно с изменением энергии — импульса вещества, а связаны косвенно, через метрический тензор g_{in}. Поэтому для волн кривизны в ОТО не существует никаких законов сохранения, связывающих изменение тензора йнергии —

импульса вещества (тензора второго ранга) с изменением тензора кривизны (тензора четвертого ранга).

Введение закона сохранения на основе выражения (А) не удовлетворяло Эйнштейна. Он писал (см. с. 645 в [3]): «...Конечно, нельзя выдвинуть *логического* возражения против такого *рода наименования.* Однако я нахожу, что из уравнений (А) нельзя вывести таких следствий, какие мы привыкли делать из законов сохранения. Это связано с тем, что согласно (А), компоненты тензора *полной энергии* всюду обращаются в нуль». (Курсив наш.— *Авторы.*)

Далее Эйнштейн подчеркивает, что согласно (А) материальная система может полностью раствориться, не оставив какого-либо следа, так как ее энергия (А) равна нулю.

Эйнштейн правильно отмечает, что из уравнения (А) нельзя вывести таких следствий, какие привыкли делать из законов сохранения, но дело здесь не в *наименовании*, а в сущности общей теории относительности.

Попытки Эйнштейна [3, 4] получить в ОТО какие-либо законы сохранения с помощью введения нековариантных псевдотензоров, как показано в работе [5], не решают проблемы, так как псевдотензоры энергии — импульса не являются энергетическими характеристиками гравитационного поля и ни в какой мере не связаны с существованием волн кривизны. Поэтому подсчет потерь энергии источником и определение потоков энергии гравитационных волн с использованием любых псевдотензоров энергии — импульса не имеют никакого физического смысла.

Тем не менее псевдотензоры энергии — импульса вот уже свыше шестидесяти лет используются при различных энергетических расчетах в общей теории относительности, хотя они имеют такое же отношение к гравитационному полю (характеризуемому тензором четвертого ранга — тензором кривизны R^i_{nlm}) в теории Эйнштейна, как прошлогодний снег к загадке Тунгусского метеорита.

Почему же так произошло? Нет ли здесь догматизма? Может быть, и есть. Ведь, как сказал Цицерон: «Желающим научиться чему-либо препятствует очень нередко авторитет тех, кто учит». И осознание того фундаментального факта, что в общей теории относительности Эйнштейна отсутствует единый закон сохранения вещества и гравитационного поля, задержалось во времени.

Однако, как писал Гельвеций: «Истина может на время быть затемнена заблуждением, но ее свет рано или поздно пробивает тучи».

В работе [5] также показано, что известная формула для подсчета потерь энергии на излучение слабых гравитационных волн

$$-dE/dt = (G/45c^5)\,\dddot{D}^2_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

впервые полученная Эйнштейном, не имеет места в общей теории относительности, а поэтому ее использование в теории Эйнштейна является незаконным. Некоторые авторы [6] ранее справедливо указывали, что формула (3) не получена последовательно в общей теории относительности. Другие авторы [7—8], возражая им, утверждали, что строгость вывода формулы (3) в общей теории относительности превышает строгость анализа многих других вопросов математической физики, которым физики всецело доверяют.

Однако, как показано в работе [5], это утверждение неправильно, поскольку дело здесь заключается не в математических тонкостях, а в сущности общей теории относительности: формула (3) в принципе не следует из теории Эйнштейна.

В силу того, что вещество характеризуется тензором энергии — импульса (тензором второго ранга), а гравитационное поле характеризуется тензором кривизны (тензором четвертого ранга), в общей теории относительности Эйнштейна отсутствует единый закон сохранения, связывающий вещество и гравитационное поле.

Таким образом, гравитационное поле в общей теории относительности совершенно отличается от других физических полей и не является полем в духе Фарадея — Максвелла.

Поскольку в теориях других физических полей существует единый закон сохранения энергии — импульса различных форм материи и в настоящее время нет никаких экспериментальных данных о его нарушении (более того, развитие физики всегда демонстрировало его незыблемость и правомерность), то у нас нет никаких оснований для отказа от него.

Поэтому будем считать, что закон сохранения, связывающий энергию — импульс различных форм материи, должен быть основой любой физической теории. Только экспериментальные данные могли бы заставить нас отказаться от этого положения. Указанный закон должен быть справедливым для всех полей материи, в том числе и для гравитационного поля.

Математически закон сохранения энергии — импульса и момента импульса является отражением определенных свойств пространства — времени: однородности и изотропности. Существует три типа пространств [9], обладающих свойствами однородности и изотропности в такой степени, что они допускают введение всех законов сохранения энергии — импульса и момента импульса, приводя ко всем десяти интегралам движения для замкнутой системы: пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского), пространство нулевой кривизны (псевдоевклидово пространство) и пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана). Первые два пространства являются бесконечными, имеющими бесконечный объем, третье пространство является замкнутым, имеющим конечный объем, но не имеющим границ.

Поскольку экспериментальные данные, полученные при изучении сильных электромагнитных и слабых взаимодействий, свидетельствуют, что *геометрия пространства — времени является псевдоевклидовой*, то естественно считать, по крайней мере на данной ступени наших знаний, что эта *геометрия является единой для всех физических процессов, в том числе и для гравитационных. Это утверждение составляет одно из основных положений развиваемого нами полевого подхода к теории гравитационного взаимодействия.* Совершенно очевидно, что оно приводит к выполнению всех законов сохранения энергии — импульса и момента импульса, приводя ко всем десяти интегралам движения для системы, состоящей из гравитационного поля и остальных полей материи. Гравитационное поле в полевом подходе аналогично всем другим физическим полям характеризуется своим тензором энергии — импульса, который вносит свой вклад в полный тензор энергии — импульса системы. В этом состоит принципиальное отличие нашего подхода от ОТО Эйнштейна.

Другим важным принципом, который положен в основу полевого подхода к теории гравитационного взаимодействия, является принцип геометризации (принцип тождественности), утверждающий, что уравнения движения вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени с метрическим тензором γ_{in} могут быть тождественно представлены как уравнения движения вещества в некотором эффективном римановом пространстве — времени с метрическим тензором g_{in}, зависящим от гравитационного поля и метрического тензора γ_{in}.

Этот принцип был введен и сформулирован нами в работе [10], хотя, по существу, он уже был высказан в работе [11]. Формулировка и учет приведенного принципа составляет другое принципиальное отличие полевого подхода от теории Эйнштейна. Этот принцип отражает универсальность взаимодействия гравитационного поля с остальными полями материи, что следует из результатов гравитационных экспериментов и соответствует определенному выбору плотности лагранжиана взаимодействия между ними.

Конечно, идея о гравитационном поле, как о физическом поле, переносящем энергию, объединенная с принципом тождественности, приводит нас к другим уравнениям гравитационного поля, отличным от уравнений Эйнштейна, и изменяет наши представления о пространстве — времени и гравитации.

Следует подчеркнуть, что полевой подход к теории гравитационного взаимодействия не конкретизирует заранее природу гравитационного поля. Мы не знаем, какова природа реальног гравитационного поля. Возможно, например, что для его адекватного описания необходимо использовать спин-тензоры, или, скажем, векторное поле. Только время и экспериментальные факты позволят сделать окончательный выбор варианта теории.

Одна из возможных реализаций рассматриваемого подхода, заключающаяся в использовании симметрического тензорного поля второго ранга для описания гравитационного поля, была предпринята в работах [11, 12]. Однако простейшие варианты, например квазилинейная теория, не обладали логической последовательностью и требовали формулировки дополнительных условий для обеспечения положительной определенности энергии гравитационных волн. В последующих работах [10, 13] была предложена полевая теория гравитации, в которой за основу было взято симметрическое тензорное поле второго ранга, спиновая структура которого была ограничена с помощью формализма проекционных операторов с таким расчетом, чтобы свободные гравитационные волны имели спин, равный двум.

Полевая теория гравитации позволяет описать всю имеющуюся на сегодняшний день совокупность экспериментальных фактов и является одним из путей реализации полевого подхода к теории гравитационного взаимодействия.

Целью настоящей работы является более четкое изложение современного варианта указанной теории и ее предпосылок, а также выяснение в возможно более полном объеме следствий этой теории. В работе использована система единиц, в которой $G = c = 1$. В разд. 1, 2 формулируются основные положения полевого подхода в применении к симметрическому тензорному полю второго ранга, а также устанавливается ряд соотношений, имеющих общий характер и не связанных с конкретным выбором плотности лагранжиана. В разд. 3—6 предлагается конкретная реализация развитых выше представлений. Постньютоновское приближение полевой теории гравитации, построенное в разд. 7, и анализ экспериментальных результатов, проделанный в разд. 9, показывают, что полевая теория гравитации позволяет описать всю имеющуюся совокупность экспериментальных фактов. Сравнение постньютоновских параметров полевой теории гравитации и ОТО Эйнштейна показывает, что эти две теории неразличимы с точки зрения любых экспериментов, выполненных с постньютоновской степенью точности. В разд. 9 и 10 исследуется гравитационное поле источника островного типа со сферически симметричным движением и распределением вещества. Законы сохранения в постньютоновском приближении полевой теории гравитации рассмотрены в разд. 11. В разд. 12 построена нестационарная модель однородной Вселенной, которая дает возможность описать эффект космологического красного смещения. В заключение перечислены основные выводы полевой теории гравитации, а также принципиальные отличия ее от ОТО Эйнштейна.

1. ФИЗИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ЕСТЕСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ НЕГО

В любой физической теории, в которой полевой переменной является тензорная величина, форма дифференциальных уравнений поля не должна зависеть от выбора координат, в которых описывается данный процесс. Это может быть достигнуто двумя путями: либо при наличии в уравнениях поля только ковариантных производных в естественной для описываемого процесса метрике пространства — времени, либо путем составления из функций поля и их частных производных тензорной величины. В последнем случае уравнения поля будут существенно нелинейными.

В уравнениях ОТО Эйнштейн связал метрический тензор риманова пространства — времени g_{in} с веществом. Таким образом, возникла идея о влиянии вещества на метрику пространства — времени. Однако такой подход не позволяет считать гравитационное поле в ОТО физическим полем, обладающим плотностью энергии — импульса. Кроме того, естественной геометрией гравитационного поля в ОТО стала геометрия риманова пространства — времени, что, в общем, не следовало ни из каких экспериментальных фактов, а являлось, скорее, гипотезой об определенном характере самодействия гравитационного поля. Однако самодействие гравитационного поля не обязательно может сводиться к изменению геометрии, хотя оно может быть и нелинейным. В этой связи возникает вопрос о естественной геометрии для гравитационного поля.

Любому физическому полю соответствует некоторая естественная геометрия, такая, что в отсутствие взаимодействия с другими полями фронт свободной волны рассматриваемого физического поля движется по геодезическим естественного пространства — времени.

Распространение фронта волны безмассового поля (уравнение характеристик) [14]

$$g^{in}(\partial\psi/\partial x^i)(\partial\psi/\partial x^n)=0, \tag{4}$$

а также движение свободных материальных частиц (уравнение Гамильтона — Якоби)

$$g^{in}(\partial\psi/\partial x^i)(\partial\psi/\partial x^n)=1 \tag{5}$$

определяются метрическим тензором естественной для этих процессов геометрии.

Вопрос о выборе естественной геометрии — это вопрос о том, посредством какого эффективного метрического тензора свертываются старшие производные в плотности лагранжиана. Вполне возможна отмечавшаяся еще Лобачевским ситуация, когда различные физические явления будут описываться в терминах различных естественных геометрий.

Из уравнений (4) и (5) следует, что естественная геометрия физической теории допускает экспериментальное определение на основе данных по движению пробных частиц и полей. Изучение движения пробных частиц с массой и безмассовых полей позволяет определить метрический тензор естественного пространства — времени с точностью до постоянного множителя [15, 16].

Таким образом, изучение движения различных форм материи позволяет экспериментально проверить характер геометрии пространства — времени мира. По мере развития наших знаний о природе расширялись и представления о пространстве — времени. Так, механика Ньютона (механические явления) в соединении с принципом относительности (как мы теперь знаем) установила, что пространство является евклидовым, а время абсолютно, т. е. одинаково во всех системах координат.

В дальнейшем электродинамика Фарадея — Максвелла (электромагнитные явления) в соединении с принципом относительности привела к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства — времени мира. Этим мы в высшей степени обязаны Минковскому. В работе «Пространство и время» [17] он писал: «...Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед Вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикцию и лишь некоторый вид соединения обоих должен сохранить самостоятельность...», и далее он отмечал, что: «...в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но проекции этого мира на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом...».

Именно Минковский первым открыл, что суть теории относительности (или, как ее иногда называют, специальной теории относительности) состоит в том, что геометрия пространства — времени является псевдоевклидовой геометрией. Последующее изучение сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий показало, что в отсутствие гравитации для полей, связанных с этими взаимодействиями, естественной геометрией является псевдоевклидова геометрия.

Таким образом, геометрия Минковского имеет всеобщий характер, являясь в отсутствие гравитации естественной геометрией для всех известных полей. *Отсюда следует, что псевдоевклидово пространство — время не является априорным, заданным с самого начала и существующим независимо.* Его существование неотделимо от существования материи.

В случае псевдоевклидовой геометрии имеется группа преобразований координат, оставляющих инвариантным метрический тензор пространства — времени — группа Лоренца. Так как преобразования Лоренца соответствуют переходу между различными инерциальными системами координат, то в указанном случае в инерциальных системах координат все полевые уравнения являются инвариантными. Это означает, что для всех явлений, полей и взаимодействий, для которых естественной геометрией является псевдоевклидова геометрия, справедлив принцип относительности.

Согласно принципу относительности [18], «...законы физических явлений будут одинаковыми как для покоящегося наблюдателя, так и для наблюдателя, находящегося в состоянии равномерного поступательного движения, так что мы не имеем и не можем иметь никаких средств, чтобы различить, находимся ли мы в таком движении, или нет».

То, что эти теории формулируются в инерциальных системах координат, не является ограничением, так как физические явления можно описывать и в любой другой произвольной системе, в том числе и в ускоренной системе координат. В последнем случае будет существовать бесконечный набор соответствующих ускоренных систем отсчета, в которых все физические процессы будут протекать одинаково.

Таким образом, формулировка теории в инерциальных системах координат обеспечивает наиболее простую форму описания, однако она ни в какой мере не исключает возможности описания физических процессов и в любой другой допустимой координатной системе *.

Одним из ключевых вопросов, возникающих при построении теории гравитационного поля, является вопрос о характере взаимодействия гравитационного поля с веществом. При этом веществом будем считать и все поля материи, кроме гравитационного. Гравитационное поле при действии на вещество может изменять его геометрию, если оно входит в члены при высших производных в уравнения движения вещества. Тогда движение материальных тел и других физических полей в псевдоевклидовом пространстве — времени под действием гравитационного поля будет неотличимым от их движения в некотором эффективном римановом пространстве — времени.

Из опытных данных следует универсальность действия гравитационного поля на вещество, поэтому эффективное риманово пространство — время будет единым для всего вещества, независимо от его вида.

Это приводит нас к утверждению, которое мы назовем принципом тождественности (принципом геометризации), определив его следующим образом: *уравнения движения вещества под действием гравитационного поля* φ_{in} *в псевдоевклидовом пространстве —*

---

* Допустимыми системами координат мы называем такие системы координат, для которых квадратичная форма $\gamma_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$ является отрицательно определенной, а компонента γ_{00} удовлетворяет условию: $\gamma_{00} > 0$.

времени с метрическим тензором γ_{in} могут быть тождественно представлены как уравнения движения вещества в некотором эффективном римановом пространстве — времени с метрическим тензором g_{in}, зависящим от гравитационного поля φ_{in} и метрического тензора γ_{in}.

При таком подходе в силу принципа тождественности гравитационное поле φ_{in} (как физическое поле) при описании движения вещества как бы исключается, и, образно говоря, идет на формирование эффективного риманова пространства — времени с метрическим тензором g_{in}. Это означает, что описание движения вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени физически тождественно описанию движения вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве — времени. Следует подчеркнуть, что принцип тождественности не вытекает из каких-либо других физических принципов. Это есть независимый принцип, определяющий с одной стороны, эквивалентность описания движения вещества, а с другой — характер взаимодействия гравитационного поля с веществом.

Принцип тождественности, в частности, устанавливает строгую связь между теоретико-полевым представлением о физическом поле, как носителе энергии — импульса (этим мы обязаны прежде всего Фарадею и Максвеллу), и представлениями Эйнштейна о римановом пространстве — времени мира.

Принцип тождественности лежит в основе развиваемых здесь представлений о пространстве — времени и гравитации, именно в формулировке и учете этого принципа и состоит основное отличие нашей теории от ОТО Эйнштейна. В силу принципа тождественности на создание риманова пространства — времени, в котором производится описание движения вещества, идет энергия — импульс гравитационного поля, которое рассматривается как физическое поле, обладающее плотностью энергии — импульса. Это означает, что геометрическое описание движения вещества находится в полном соответствии с законами сохранения всех физических полей, в том числе и гравитационного поля. Риманово пространство — время является своеобразным носителем энергии — импульса, в согласии с принципом тождественности в него закладывается столько энергии, сколько ее содержится в гравитационном поле.

Принцип тождественности связывает воедино теоретико-полевые представления о физических полях с геометрическими представлениями. Риманово пространство — время для движения материи имеет полевое происхождение, оно в буквальном смысле является проявлением существования гравитационного поля как физического поля, обладающего плотностью энергии — импульса. Принцип тождественности определяет характер взаимодействия гравитационного поля φ_{in} с веществом. Он, в частности, отражает и тот физический факт, что инертная масса точечного тела равна его гравитационной массе.

Другим ключевым моментом при построении теории гравитации является выбор плотности лагранжиана гравитационного поля.

Для линейных теорий естественной геометрией является геометрия плоского пространства — времени, и теория гравитации с линейными уравнениями свободного гравитационного поля формулируется в терминах плоского пространства — времени с метрическим тензором γ_{in}. Будем называть теории гравитации, формулируемые в терминах плоского пространства — времени, теориями класса А. Теории класса А могут быть и нелинейными, но важно, что эта нелинейность не входит в члены со старшими производными в уравнениях поля и не меняет, таким образом, геометрию естественного пространства — времени. Таким образом, в теориях класса А мы имеем единое плоское пространство — время; риманово же пространство — время, в терминах которого описывается движение вещества, является эффективным, возникающим как результат действия гравитационного поля φ_{in} на вещество.

Среди теорий класса А следует отметить подкласс двуметрических теорий, у которых гравитационное поле φ_{in} в комбинации с метрическим тензором γ_{in} образует в плотности лагранжиана гравитационного поля L_g новую полевую переменную — метрический тензор эффективного риманова пространства — времени g_{in}, в терминах которого формулируются уравнения движения вещества, причем естественной геометрией для этой полевой переменной является псевдоевклидова геометрия:

$$L = L_g(\gamma_{in}, g_{in}(\gamma_{lm}, \varphi_{lm})) + L_M(g_{in}, \varphi_A).$$

Примером нелинейной теории указанного подкласса является теория Розена [19] с плотностью лагранжиана

$$L_g = (\sqrt{-\gamma}/64\pi)\,\gamma^{ik} g^{mn} g^{pl}\,[D_i g_{nl} D_k g_{mp} - (1/2)\, D_i g_{nm} D_k g_{pl}],$$

где γ — определитель метрического тензора плоского пространства — времени, D_i — ковариантная производная в плоском пространстве — времени.

В двуметрических теориях гравитационное поле φ_{in} фактически отсутствует, так как полевой переменной является метрический тензор g_{in}, поэтому здесь нет достаточно глубокого физического обоснования связи между эффективным римановым пространством — временем и единым плоским пространством — временем.

В теориях класса А мы фактически имеем два физических пространства — времени: плоское пространство — время с метрическим тензором γ_{in}, в терминах которого формулируются уравнения гравитационного поля, и неевклидово пространство — время с метрическим тензором g_{in}, в терминах которого формулируется движение вещества. Оба эти пространства — времени являются реальными наблюдаемыми пространствами — временами.

Если в нелинейной теории тензорного поля φ_{in} нелинейные члены входят в свертку производных в плотности лагранжиана (в члены со старшими производными в уравнениях поля), то для такой теории естественным является неевклидово пространство — время с некоторым эффективным метрическим тензором $g_{in} = g_{in}(\gamma_{lm}, \varphi_{lm})$. Будем называть теории гравитации, формулируемые в терминах эффективного риманова пространства — времени, теориями класса Б. Плотность лагранжиана теорий этого класса имеет вид

$$L = L_g(g_{in}, \varphi_{in}) + L_M(g_{in}, \varphi_A).$$

Теории указанного класса заслуживают специального рассмотрения, так как среди них возможны теории, обладающие законом сохранения полного тензора энергии — импульса. Следует отметить также, что уравнения гравитационного поля в теориях класса Б обязательно нелинейны.

Подклассом геометризованных теорий класса Б является множество теорий с полной геометризацией, в которых плотность лагранжиана гравитационного поля зависит только от метрического тензора g_{in}:

$$L = L_g(g_{in}) + L_M(g_{in}, \varphi_A).$$

Теория Эйнштейна относится к этому подклассу теорий и соответствует частному выбору плотности лагранжиана в форме $L_g = \sqrt{-g}R$. В теориях с полной геометризацией плоское пространство — время полностью исключено из описания движения как вещества, так и гравитационного поля. Ни гравитационное поле φ_{in}, ни метрический тензор γ_{in} нигде в теории не появляются. Величины g_{in} имеют при этом двойной смысл: переменных физического поля и метрического тензора пространства — времени. Последнее приводит к тому, что в теориях рассматриваемого подкласса гравитационное поле не является полем Фарадея — Максвелла, обладающим плотностью энергии — импульса.

Следует подчеркнуть, что теории классов А и Б — это существенно различные теории гравитации. Никаким преобразованием переменных поля или преобразованием координат нельзя свести теорию одного класса в теорию другого класса.

Теория, приводящая к линейным уравнениям свободного гравитационного поля, является простейшим вариантом среди всех теорий класса А. В этом случае гравитационное поле описывается в том же физическом пространстве — времени, в каком описываются в отсутствие гравитации другие физические поля, в результате чего плоское пространство — время оказывается общим для всех физических полей. И хотя мы будем рассматривать теорию в плоском пространстве — времени, тем не менее движение вещества можно рассматривать тождественно или как движение вещества в псевдоевклидовом пространстве — времени под действием гравитационного поля, либо мы можем исключить это гравитационное поле и рассматривать движение вещества в эффективном римановом пространстве — времени. Эту теорию гравитации в дальнейшем будем называть полевой теорией гравитации.

Таким образом, в полевой теории гравитации существуют два реально наблюдаемых пространства — времени. Фронт гравитационной волны движется по геодезическим плоского пространства — времени, поэтому гравитационные волны могут использоваться для определения геометрии псевдоевклидова пространства — времени. Фронт электромагнитной волны движется по геодезическим эффективного риманова пространства — времени, поэтому электромагнитные волны и массивные частицы могут использоваться для определения геометрии этого риманова пространства — времени. Следует подчеркнуть, что *хотя в полевой теории гравитации имеются два метрических тензора* g_{in} *и* γ_{in}, *данная теория ни по смыслу, ни по уравнениям поля не попадает в класс так называемых двуметрических теорий, ибо в данной схеме метрический тензор* g_{in} *отражает только эффективное воздействие гравитационного поля на вещество.* Отметим также, что уравнения полевой теории гравитации можно формулировать не только для инерциальных, но и для неинерциальных систем координат, причем при переходе от одной неинерциальной системы координат к другой, уравнения поля являются форм-инвариантными для каждой бесконечной совокупности неинерциальных систем координат. В случае инерциальных систем координат уравнения поля являются лоренц-инвариантными при переходе от одной инерциальной системы к другой. Это приводит нас к необходимости расширения принципа относительности, который мы сформулируем в следующем виде: *никакими физическими явлениями, в том числе и гравитационными, нельзя определить, находимся мы в покое или в состоянии равномерного и поступательного движения.*

Подчеркнем, что принцип относительности не требует постоянства скорости распространения фронта электромагнитной волны — скорости света. Естественно, что при наличии взаимодействия с внешними гравитационными полями, скорость света, как и скорость движения любых тел, не является постоянной.

Такой подход позволяет сохранить в теории все законы сохранения в их обычном смысле, в результате чего распространение волн кривизны в римановом пространстве — времени отражает обычный перенос энергии гравитационными волнами в псевдоевклидовом пространстве — времени. Поэтому в нашем подходе волны кривизны в римановом пространстве — времени являются прямым следствием существования гравитационных волн в духе Фарадея — Максвелла, обладающих плотностью энергии — импульса.

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВА

Мы будем предполагать, что гравитационное поле универсально — оно действует на все виды вещества одинаковым образом. Указанная универсальность действия гравитационного поля и заложена в принцип тождественности, который дает нам возможность действие этого поля на вещество представить в форме движения вещества в римановом пространстве — времени. Само гравитационное поле, обладающее плотностью энергии — импульса, является выделенным от других форм материи, его действие на себя, если таковое имеется, совершенно отличается от действия на вещество.

Это отличие проявляется в том, что геометрия пространства — времени для гравитационного поля остается псевдоевклидовой. Если свободное гравитационное поле воздействует на себя, то его уравнения будут нелинейными, но эта нелинейность не изменит характера геометрии. В данном представлении свободное гравитационное поле может описываться и линейными уравнениями поля, в таком случае воздействие свободного гравитационного поля на себя отсутствует. Конечно, уравнения поля в веществе всегда являются нелинейными уравнениями.

Существование универсального гравитационного поля, как физического поля, обладающего плотностью энергии — импульса, и является тем принципиальным моментом, который приводит нас к представлениям о пространстве — времени и гравитации, отличным от представлений общей теории относительности Эйнштейна.

В настоящем разделе получен ряд общих утверждений, справедливых для всех локальных теорий класса А, не связанных с конкретным выбором плотности лагранжиана.

Исходя из принципа тождественности, плотность лагранжиана системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, для теорий указанного класса запишем в виде

$$L = L_g(\gamma_{in}, \varphi_{in}) + L_M(g_{in}, \varphi_A), \tag{6}$$

где γ_{in} — метрический тензор псевдоевклидова пространства — времени с сигнатурой $(+, -, -, -)$; φ_{in} — гравитационное поле; φ_A — остальные поля материи.

Не ограничивая общности, будем считать, что метрический тензор риманова пространства — времени g_{in} является локальной функцией, зависящей от метрического тензора плоского пространства — времени γ_{in}, гравитационного поля φ_{in} и их частных производных до второго порядка включительно:

$$g_{lm}=g_{lm}(\gamma_{in};\ \partial_p\gamma_{in},\ \partial_{pl}\gamma_{in},\ \gamma^{in},\ \partial_p\gamma^{in},\ \partial_{pl}\gamma^{in},\ \varphi_{in},\ \partial_p\varphi_{in},\ \partial_{pl}\varphi_{in}), \tag{7}$$

где введено обозначение

$$\partial_{np}\varphi=\partial^2\varphi/\partial x^n\,\partial x^p.$$

Плотность лагранжиана вещества L_M будем считать зависящей только от полей φ_A, их частных производных первого порядка и метрического тензора g_{in}. Легко убедиться, что в этом случае в плотность лагранжиана вещества войдут частные производные гравитационного поля вплоть до второго порядка.

Плотность лагранжиана гравитационного поля будем считать зависящей от метрического тензора γ_{in}, гравитационного поля φ_{in} и их частных производных до третьего порядка включительно.

Для получения законов сохранения воспользуемся ковариантным методом бесконечно малых смещений. Как известно, для получения сильных законов сохранения достаточно только инвариантности функции действия при инфинитезимальных преобразованиях координат. Поэтому сильные законы сохранения (не зависящие от выполнения уравнений поля) должны иметь место как для плотности лагранжиана вещества L_M, так и для плотности лагранжиана гравитационного поля L_g.

Поскольку действие J есть скаляр, то при произвольном бесконечно малом преобразовании координат

$$x'^i=x^i+\xi^i(x) \tag{8}$$

вариации действия вещества δJ_M и гравитационного поля δJ_g равны нулю.

Так как в плотность лагранжиана вещества войдут как ковариантные, так и контрвариантные компоненты метрического тензора риманова пространства — времени, то будем варьировать плотность лагранжиана по ним, как по независимым, а затем учтем соотношения между их вариациями:

$$\delta g^{np}=-g^{ni}g^{pl}\delta g_{il}.$$

Тогда плотность симметрического тензора энергии — импульса вещества в римановом пространстве — времени T^{in} будет иметь вид

$$T^{in}=-2\frac{\Delta L_M}{\Delta g_{in}}=-2\left(\frac{\delta L_M}{\delta g_{in}}-g^{im}g^{np}\frac{\delta L_M}{\delta g^{pm}}\right); \tag{9}$$

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\partial_n\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_n\varphi)}\right)+\partial_{np}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{np}\varphi)}\right)-$$
$$-\partial_{ipn}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{ipn}\varphi)}\right)+\partial_{ilpn}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{ilpn}\varphi)}\right)-\ldots, \tag{10}$$

где $\delta L/\delta\varphi$ — вариация Эйлера — Лагранжа.

Вариацию интеграла действия вещества при преобразовании (8) запишем в виде

$$\delta J_M = \int d^4x \left\{ \frac{\Delta L_M}{\Delta g_{in}} \delta g_{in} + \frac{\delta L_M}{\delta \varphi_A} \delta \varphi_A + \mathrm{Div} \right\} = 0, \qquad (11)$$

где $\Delta L_M / \Delta g_{in}$ определяется выражением (9), а Div означает дивергенциальные члены, учет которых приводит к соотношениям, несущественным для целей нашего рассмотрения.

Вариацию интеграла действия вещества при преобразовании (8) можем записать и в другом виде, эквивалентном (11). Введем обозначение

$$\Delta L / \Delta \gamma_{mn} = \delta L / \delta \gamma_{mn} - \gamma^{ns} \gamma^{mp} \delta L / \delta \gamma^{ps}, \qquad (12)$$

где $\delta L / \delta \gamma_{mn}$ и $\delta L / \delta \gamma^{ps}$ следует понимать в смысле соответствующих частных производных, задаваемых выражением (10). При этом ковариантный метрический тензор γ_{mn} и контрвариантный метрический тензор γ^{mn} следует считать независимыми тензорами, так как их зависимость уже учтена в (12).

Тогда вариация интеграла действия вещества при преобразовании (8) принимает вид

$$\delta J_M = \int d^4x \left\{ \frac{\delta L_M}{\delta \varphi_{nm}} \delta \varphi_{nm} + \frac{\Delta L_M}{\Delta \gamma_{mn}} \delta \gamma_{mn} + \frac{\delta L_M}{\delta \varphi_A} \delta \varphi_A + \mathrm{Div} \right\} = 0. \qquad (13)$$

Вариации $\delta \gamma_{mn}$, $\delta \varphi_{mn}$, $\delta \varphi_A$ и δg_{mn} при преобразованиях координат (8) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\delta \gamma_{lm} &= -\gamma_{ln} D_m \xi^n - \gamma_{mn} D_l \xi^n; \\
\delta \varphi_{lm} &= -\varphi_{ln} D_m \xi^n - \varphi_{mn} D_l \xi^n - \xi^n D_n \varphi_{lm}; \\
\delta \varphi_A &= -\xi^n D_n \varphi_A + F^{B;\, l}_{A;\, n} \varphi_B D_l \xi^n; \\
\delta g_{lm} &= -g_{ln} D_m \xi^n - g_{mn} D_l \xi^n - \xi^n D_n g_{lm}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

С учетом равенств (14) вариацию интеграла действия вещества (13) можно записать в виде

$$\delta J_M = \int d^4x \left\{ \xi^n \left[2D_l \left(\frac{\delta L_M}{\delta \varphi_{lm}} \varphi_{mn} \right) - D_l t^l_{Mn} - \frac{\delta L_M}{\delta \varphi_{lm}} D_n \varphi_{lm} - D_l \left(\frac{\delta L_M}{\delta \varphi_A} F^{B;\, l}_{A;\, n} \varphi_B \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \varphi_A} D_n \varphi_A \right] + \mathrm{Div} \right\} = 0, \qquad (15)$$

где плотность симметрического тензора энергии — импульса вещества в плоском пространстве — времени есть:

$$t^{in}_M = -2 \Delta L_M / \Delta \gamma_{in}; \quad t^i_{Ml} = \gamma_{ln} t^{in}_M.$$

Из произвольности вектора смещения ξ^n в (15) следует тождество

$$D_i t^i_{Mn} - 2D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{im}}\varphi_{mn}\right) + \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{lm}} D_n\varphi_{lm} + \\ + D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} F^{B;\,i}_{A;\,n}\varphi_B\right) + \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} D_n\varphi_A = 0. \quad (16)$$

Другое важное тождество получим, если подставим соотношения (14) в (11):

$$D_i(g_{nl}T^{il}) - \frac{1}{2}T^{lm}D_n g_{lm} = \\ = -D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} F^{B;\,i}_{A;\,n}\varphi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} D_n\varphi_A. \quad (17)$$

Выразим теперь ковариантные производные, стоящие в левой части тождества (17), через частные производные и связности плоского пространства — времени γ^i_{nl}:

$$\gamma^i_{nl} = (1/2)\,\gamma^{is}(\partial_n\gamma_{ls} + \partial_l\gamma_{ns} - \partial_s\gamma_{ln}).$$

Учитывая, что T^{in} — плотность тензора веса 1, получим

$$\partial_i(g_{nl}T^{il}) - \frac{1}{2}T^{lm}\partial_n g_{lm} = \\ = -D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} F^{B;\,i}_{A;\,n}\varphi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} D_n\varphi_A.$$

Но левая часть этого выражения представляет собой ковариантную дивергенцию в римановом пространстве — времени от плотности тензора энергии — импульса вещества T^i_n:

$$\partial_i(g_{nl}T^{il}) - \frac{1}{2}T^{lm}\partial_n g_{lm} = \\ = \partial_i(g_{nl}T^{il}) - \Gamma^l_{in}T^i_l = \nabla_i T^i_n = g_{np}\nabla_i T^{ip},$$

где, как обычно, Γ^l_{in} обозначает связность риманова пространства — времени:

$$\Gamma^l_{in} = (1/2)\,g^{ls}(\partial_i g_{ns} + \partial_n g_{is} - \partial_s g_{in}).$$

Поэтому соотношение (17) принимает вид

$$g_{in}\nabla_l T^{il} = -D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} F^{B;\,i}_{A;\,n}\varphi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_A} D_n\varphi_A. \quad (18)$$

Вычитая из (16) равенство (18), получим

$$D_i t^i_{Mn} - 2D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{li}}\varphi_{ln}\right) + \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{lm}} D_n\varphi_{lm} = g_{in}\nabla_l T^{il}. \quad (19)$$

Следует подчеркнуть, что тождество (19) справедливо независимо от выполнения уравнений движения вещества и гравитационного поля.

Аналогичным образом, из инвариантности действия гравитационного поля при преобразовании (8) получим:

$$D_i t^i_{gn} - 2D_i\left(\frac{\delta L_g}{\delta\varphi_{li}}\varphi_{ln}\right) + \frac{\delta L_g}{\delta\varphi_{lm}} D_n\varphi_{lm} = 0. \tag{20}$$

Для плотности симметрического тензора энергии — импульса гравитационного поля t^i_{gn} имеем, как обычно:

$$t^i_{gn} = -2\gamma_{mn}\,\Delta L_g/\Delta\gamma_{im}.$$

Из соотношений (19) и (20) следует

$$D_i\,(t^i_{Mn} + t^i_{gn}) - 2D_i\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi_{il}}\varphi_{ln}\right) + \frac{\delta L}{\delta\varphi_{lm}} D_n\varphi_{lm} = \nabla_i T^i_n. \tag{21}$$

При условии выполнения уравнений гравитационного поля

$$\delta L/\delta\varphi_{nm} = \delta L_g/\delta\varphi_{nm} + \delta L_M/\delta\varphi_{nm} = 0 \tag{22}$$

выражение (21) упрощается:

$$D_i\,(t^i_{Mn} + t^i_{gn}) = g_{in}\nabla_m T^{im}. \tag{23}$$

Равенство (23) является проявлением принципа тождественности. Из него следует, что ковариантная дивергенция в псевдоевклидовом пространстве — времени от суммы плотностей тензоров энергии — импульса вещества и гравитационного поля преобразовалась в ковариантную дивергенцию в римановом пространстве — времени с метрическим тензором g_{in} от плотности тензора энергии — импульса только вещества. Таким образом, это различные формы записи одного и того же выражения. При условии выполнения уравнений движения вещества

$$\delta L_M/\delta\varphi_A = 0 \tag{24}$$

выражение (16) упрощается:

$$D_i t^i_{Mn} - 2D_i\left(\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{il}}\varphi_{ln}\right) + \frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{lm}} D_n\varphi_{lm} = 0, \tag{25}$$

а из соотношения (17) автоматически следует ковариантный закон сохранения в римановом пространстве — времени:

$$\nabla_n T^{nm} = 0.$$

Это утверждение является общим для теорий с геометризованной плотностью лагранжиана вещества и не связано с каким-либо конкретным вариантом теории гравитации.

Далее мы видим, что из (25) и (20) при условии выполнения уравнений гравитационного поля (22) следует ковариантное уравнение сохранения для плотности полного симметрического тензора энергии — импульса в псевдоевклидовом пространстве — времени:

$$D_i\,(t^i_{Mn}+t^i_{gn})=0. \qquad (26)$$

Таким образом, гравитационное поле, рассматриваемое в псевдоевклидовом пространстве — времени, ведет себя аналогично всем другим физическим полям. Оно обладает энергией — импульсом и вносит вклад в плотность полного тензора энергии — импульса системы.

На основании равенства (26) и тождества (23) получим

$$D_i\,(t^i_{Mn}+t^i_{gn})=g_{ln}\nabla_i T^{il}=0.$$

Таким образом, ковариантный закон сохранения энергии — импульса вещества и гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени представлен в виде ковариантного уравнения сохранения плотности тензора энергии — импульса только одного вещества в римановом пространстве — времени с метрическим тензором g_{in}.

Закон сохранения для плотности полного тензора энергии — импульса (26) и закон сохранения в форме

$$\nabla_n T^{ni}=\partial_n T^{ni}+\Gamma^i_{lm}T^{lm}=0 \qquad (27)$$

при выполнении уравнений гравитационного поля (22) и уравнений движения вещества (24) представляют собой просто различные формы записи одного и того же закона сохранения. Закон сохранения (26) выражает тот факт, что в псевдоевклидовом пространстве — времени сохраняется плотность полного тензора энергии — импульса системы, состоящей из вещества и гравитационного поля. Этот закон имеет обычный вид закона сохранения. Закон сохранения (27) в римановом пространстве — времени не является законом сохранения в обычном понимании, так как плотность тензора энергии — импульса вещества T^{in} не должна сохраняться: $\partial_n T^{ni}\neq 0$.

Как указывал еще Эйнштейн (см. с. 492 в [3]): «...Наличие второго члена в левой части с физической точки зрения означает, что для одной лишь материи законы сохранения импульса и энергии в их подлинном смысле не выполняются; точнее говоря, они выполняются лишь тогда, когда g_{ni} постоянны, т. е. когда компоненты напряженности гравитационного поля равны нулю. Этот второй член представляет собой выражение для импульса и соответственно для энергии, которые в единицу времени и в единице объема передаются материи от гравитационного поля...».

В указанном случае второе слагаемое в (27) выражает энергетическое воздействие гравитационного поля на материю и показывает, что материя получает энергию как бы «запасенную» в римановой геометрии. Энергия же гравитационного поля как бы пошла на создание римановой геометрии. Но какая величина сохраняется — из (27) не видно.

Отсутствие законов сохранения в их подлинном смысле в теории гравитации Эйнштейна и заставило его ввести в ковариантную теорию нековариантную величину — псевдотензор энергии — импульса гравитационного поля, чтобы можно было сформулировать закон сохранения суммы тензора энергии — импульса вещества и псевдотензора энергии — импульса гравитационного поля. Однако такой подход, как показано в работе [5], не имеет никакого физического смысла.

Отсутствие законов сохранения в их подлинном смысле присуще всему подклассу теорий гравитации с полной геометризацией, а не только теории Эйнштейна. Плотность лагранжиана гравитационного поля L_g теорий этого подкласса зависит от поля φ_{in} и метрического тензора γ_{in} только через метрический тензор риманова пространства — времени g_{in}. Поэтому в теориях указанного подкласса для плотности симметрического тензора энергии — импульса вещества и гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени имеем

$$-\frac{1}{2}t^{in}=\frac{\Delta L}{\Delta\gamma_{in}}=\frac{\Delta L_g}{\Delta\gamma_{in}}+\frac{\Delta L_M}{\Delta\gamma_{in}}=\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial\gamma_{in}}-$$
$$-\partial_p\left(\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial(\partial_p\gamma_{in})}\right)+\partial_{pq}\left(\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial(\partial_{pq}\gamma_{in})}\right)-$$
$$-\gamma^{is}\gamma^{np}\left\{\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial\gamma^{sp}}-\partial_q\left[\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial(\partial_q\gamma^{sp})}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\partial_k\left(\frac{\Delta L}{\Delta g_{lm}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial(\partial_{qk}\gamma^{sp})}\right)\right]\right\}.$$

Поскольку в геометризованной теории уравнения гравитационного поля имеют вид

$$\Delta L/\Delta g_{lm}=\delta L/\delta g_{lm}-g^{ls}g^{mp}\delta L/\delta g^{sp}=0,$$

плотность симметрического тензора энергии — импульса вещества и гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве — времени в силу уравнений гравитационного поля обращается в нуль:

$$\Delta L/\Delta\gamma_{in}=-(1/2)\,t^{in}=0.$$

Аналогичный вывод о равенстве нулю плотности симметрического тензора получается и для свободного гравитационного поля. В теории Эйнштейна ($L_g=\sqrt{-g}R$) уравнения свободного гравитационного поля имеют вид $R_{in}=0$.

Эти уравнения содержат такие решения для переменных g_{in}, для которых тензор кривизны R^i_{nlm} отличен от нуля. Отсюда следует, что обращение в нуль плотности симметрического тензора энергии — импульса свободного гравитационного поля $t^{in} = -2\Delta L/\Delta g_{in}$ не ведет к исчезновению поля φ_{in} и, следовательно, существует некоторое фиктивное поле, не обладающее плотностью энергии — импульса, но приводящее к искривлению пространства — времени (образованию римановой геометрии).

Таким образом, наш подход показывает, что в ОТО Эйнштейна риманова геометрия создана на базе фиктивного поля φ_{in}, не обладающего плотностью энергии — импульса, поэтому на ее создание не затрачена энергия, хотя сама риманова геометрия являетсе своеобразным источником энергии. Переход к ОТО в развитом нами формализме с необходимостью приводит к обращению в нуль всех компонент тензора энергии — импульса свободного гравитационного поля. Поле φ_{in} лишается важнейших физических характеристик и перестает быть наблюдаемым физическим полем, несущим энергию — импульс. Подход Эйнштейна в принципе не позволяет ввести понятие гравитационного поля, обладающего энергией — импульсом.

Таким образом, мы приходим к следующим выводам.

1. В локальных теориях класса А гравитационное поле, описываемое в псевдоевклидовом пространстве — времени, является физическим полем, обладающим энергией — импульсом. Движение вещества, на основании принципа тождественности, описывается в эффективном римановом пространстве — времени, на создание которого идет энергия — импульс гравитационного поля.

В этом подходе геометрическое описание возникает на основе теоретико-полевых представлений о гравитационном поле и в его основе лежат законы сохранения.

2. В подклассе теорий с полной геометризацией гравитационное поле и вещество имеют единую геометрию. Тогда гравитационное поле теряет свойства физического поля, оно не обладает плотностью энергии — импульса. В указанном подходе отсутствуют теоретико-полевые представления о гравитационном поле как о поле в духе Фарадея — Максвелла.

Общая теория относительности реализует данную возможность построения теории. Она ввела поле нового типа, описываемое тензором кривизны, которое не является полем Фарадея — Максвелла. Поэтому здесь отсутствуют законы сохранения вещества и гравитационного поля вместе взятых.

3. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ

Для простоты в этом разделе мы рассматриваем формулировку теории в декартовых координатах, хотя, конечно, все уравнения и выражения теории можно ковариантным образом записать в произвольной криволинейной системе координат.

Рассмотрим теории класса А с плотностью лагранжиана в форме (6). Уравнения гравитационного поля и уравнения движения вещества имеют вид:

$$\delta L_g/\delta\varphi_{in} + \delta L_M/\delta\varphi_{in} = 0; \tag{28}$$

$$\delta L/\delta\varphi_{\mathbf{A}} = 0. \tag{29}$$

Среди множества теорий с плотностью лагранжиана (6) имеются теории, в которых интеграл действия инвариантен относительно калибровочного преобразования:

$$\varphi_{in} \to \varphi_{in} + \partial_i\alpha_n + \partial_n\alpha_i, \tag{30}$$

где α_i — произвольный калибровочный 4-вектор.

Как известно [20], в электродинамике интеграл действия также инвариантен относительно аналогичного калибровочного преобразования вектор-потенциала $A_i \to A_i + \partial_i f$. Гравитационное поле, также как и электромагнитное, является дальнодействующим, т. е. потенциал убывает с ростом r как $1/r$. Как известно, калибровочная инвариантность электродинамики приводит к тому, что масса фотона остается равной нулю и при учете радиационных поправок.

Из инвариантности действия свободного гравитационного поля $J_g = \int L_g d^4x$ относительно калибровочного преобразования (30) следует

$$\delta J_g = \int \left[-2\alpha_n \partial_i \frac{\delta L_g}{\delta\varphi_{in}} + \mathrm{Div} \right] d^4x = 0,$$

где Div — означает дивергенциальные члены.

В силу произвольности калибровочного вектора α_n получим

$$\partial_i \delta L_g/\delta\varphi_{in} = 0. \tag{31}$$

Из уравнений поля (28) и уравнения сохранения (31) следует уравнение сохранения для источника гравитационного поля

$$\partial_i \delta L_M/\delta\varphi_{in} = 0.$$

Как известно, из калибровочной инвариантности электродинамики с плотностью лагранжиана $L = L_M + L_A$ следуют аналогичные уравнения сохранения:

$$\partial_i \delta L_M/\delta A_i = 0; \quad \partial_i \delta L_{\mathbf{A}}/\delta A_i = 0.$$

Поскольку в калибровочной теории источник в уравнениях поля является сохраняющимся, то обычно предполагают, что источником в уравнениях калибровочной теории гравитации является полный тензор энергии — импульса системы вещество плюс гравитационное поле. Это приводит к тому, что уравнения поля становятся нелинейными, и обычно высказывается предположение, что последовательное включение таких нелинейностей может привести к нелинейной геометризованной теории гравитации Эйнштейна [21—23].

Однако в действительности подобная гипотеза приводит прежде всего к тому, что гравитационное поле не является носителем энергии — импульса. Если предположить возможность отождествления источника $\delta L_M/\delta\varphi_{in} = (1/2)\ J^{in}$ с полным тензором энергии — импульса $\Delta L_g/\Delta\gamma_{in} + \Delta L_M/\Delta\gamma_{in}$, то отсюда непосредственно следует, что тензор энергии — импульса свободного гравитационного поля при $L_M = 0$ равен нулю. Подобная теория не обладает свойствами, характерными для других физических систем, и поэтому мы считаем ее неприемлемой.

Согласно теореме Нётер, инвариантность интеграла действия относительно некоторой группы преобразований влечет существование определенных сохраняющихся величин. Инвариантность относительно преобразований координат приводит, как известно, к сохранению плотности тензора энергии — импульса t^{in}. Инвариантность интеграла действия относительно калибровочных преобразований (30) приводит к сохранению тока J^{in}. Поскольку координатные преобразования и калибровочные преобразования — совершенно различные преобразования, то и t^{in} и J^{in} представляют собой, естественно, совершенно различные физические величины.

Проблема построения калибровочно-инвариантной теории тензорного поля — это прежде всего проблема построения сохраняющегося тензорного тока J^{in}, или другими словами, проблема построения плотности лагранжиана вещества L_M, который приводит к сохраняющейся вариации $\delta L_M/\delta\varphi_{in}$.

Для решения указанной проблемы необходимо рассмотреть вопрос о спиновых состояниях поля, описываемого симметрическим тензором второго ранга.

Во всех релятивистских теориях свободных полей имеет место принцип инвариантности относительно группы координатных преобразований — группы Пуанкаре. Согласно этому принципу, волновая функция реализует базис представления группы Пуанкаре. Простейший тип поля определяется неприводимым представлением.

Группа Пуанкаре обладает двумя инвариантами:

$$q^2 = q_n q^n;$$
$$S^2 = (1/2)\ L_{mn}L^{mn} - (q_n q^p/q^2)\ L^{nm}L_{pm},$$

где — iL_{mn} — генератор 4-мерных вращений.

Для неприводимых представлений эти равенства превращаются в тождества и параметры $m^2 = q^2$ и $S^2 = s\,(s+1)$ (масса и спин) характеризуют собой неприводимое представление группы Пуанкаре.

Простейшее неприводимое представление группы Пуанкаре есть скалярное представление, для которого $s = 0$. Волновая функция является в этом случае только функцией q и удовлетворяет волновому уравнению $(q^2 - m^2)\,\varphi(q) = 0$.

Векторная функция $\varphi_i(q)$ образует базис приводимого представления D, разлагающегося на сумму двух неприводимых представлений со спином 0 и 1:

$$D = D(0) + D(1),$$

где $D(s)$ означает неприводимое представление, соответствующее спину s.

Величина, которая преобразуется как произведение $D^S = \underbrace{D \times \ldots \times D}_{S}$, есть тензор ранга S. Он реализует приводимое представление, которое с помощью стандартной техники Клебша — Гордана можно разложить по неприводимым представлениям, например:

$$D \times D = D(2) + 3D(1) + 2D(0).$$

Неприводимое представление $D(s)$ является $2S + 1$-мерным.

Каждая компонента волновой функции удовлетворяет волновому уравнению, в то время как условие $S^2 = s(s + 1)$ обеспечивает равенство нулю проекций поля φ на пространства представлений с низшими спинами. Для случая $S = 2$ эти условия могут быть записаны в известной форме:

$$q_i\varphi_n^i = 0;\quad \varphi_{ni} = \varphi_{in};\quad \gamma^{in}\varphi_{in} = 0$$

или кратко $\eta_i\varphi = 0$.

Дополнительные условия устанавливают связь между различными компонентами тензорного поля φ_{in}, ограничивая тем самым число независимых компонент. Другими словами, тензор ранга S является избыточным для описания конкретного физического поля с определенным спином.

Чтобы избавиться от избыточности формализма тензорных полей, удобно работать непосредственно с неприводимыми представлениями тензорного поля. Это осуществляется посредством проекционных операторов P_S, проецирующих тензор ранга S на неприводимое представление, так что поле $\psi = P_S\varphi$ преобразуется в соответствии с $D(s)$, т. е. $\eta_i\psi = 0$. Если специфический тензор φ преобразуется в соответствии с $D(s)$, то $\varphi = P_S\psi$.

Формализм проекционных операторов рассматривается, например, в работах [24, 25].

Симметрический тензор второго ранга φ_{in} можно представить в виде суммы неприводимых представлений: одного представления со спином 2, одного — со спином 1 и двух представлений со спином 0:

$$\varphi_{in} = (P_2 + P_1 + P_0 + P_{0^*})^{lm}_{in}\, \varphi_{lm}.$$

Проекционные операторы P_S удовлетворяют стандартным соотношениям:

$$P_S P^T = \delta^T_S P_S;\quad P^{in}_{S\,in} = 2S + 1;$$

$$\sum_S P^{lm}_{S\,ik} = \mathbb{1} = \frac{1}{2}\,(\delta^l_i \delta^m_k + \delta^m_i \delta^l_k).$$

Величины P_S удобно записывать в импульсном представлении, когда $\partial_n \to iq_n$; $\Box \to -q^2$.

Введем вспомогательные операторы:

$$X_{in} = \left(1/\sqrt{3}\right)(\gamma_{in} - q_i q_n/q^2);\quad Y_{in} = q_i q_n/q^2,$$

с помощью которых операторы P_S можно представить в форме:

$$P_0 = X_{in} X^{lm};\quad P_{0^*} = Y_{in} Y^{lm};$$

$$P_1 = \left(\sqrt{3}/2\right)(X^l_i Y^m_n + X^m_n Y^l_i + X^m_i Y^l_n + X^l_n Y^m_i);$$

$$P_2 = (3/2)\,(X^l_i X^m_n + X^m_i X^l_n) - X_{in} X^{lm}.$$

В x-представлении проекционные операторы P_S являются нелокальными интегродифференциальными операторами:

$$P^{lm}_{in}\varphi_{lm} = \int d^4y\, P^{lm}_{in}(x, y)\, \varphi_{lm}(y)$$

например, величина $Y\varphi = Y_{in}\varphi^{in}$ имеет вид

$$Y_{in}\varphi^{in}(x) = -\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^n}\int G(x-y)\,\varphi^{in}(y)\,d^4y,$$

где $G(x - y)$ — функция Грина скалярного волнового уравнения

$$\Box\, G(x-y) = -\delta(x-y);\quad \Box = \partial_i \partial^i.$$

Следует подчеркнуть, что операторы P_2 и P_0 сохраняющиеся:

$$q_l P^{lm}_{2in} = q_m P^{lm}_{2in} = 0;\quad q_l P^{lm}_{0in} = q_m P^{lm}_{0in} = 0.$$

Поэтому, если в плотность лагранжиана гравитационного поля поле φ_{in} входит только в виде комбинации

$$f_{in} = [(P_2 + \alpha P_0)\,\varphi]_{in}, \tag{32}$$

то плотность лагранжиана, а следовательно, и уравнения свободного гравитационного поля инвариантны относительно калибровочного преобразования (30). Следует отметить, что хотя в теории все десять компонент гравитационного поля φ_{in} являются независимыми, из десяти компонент f_{in} только шесть независимы, так как операторы проектирования выделяют лишь шесть спиновых состояний: пять состояний представления со спином 2 и одно состояние со спином 0. Однако применение выражения (32) не совсем удобно, так как оно является интегродифференциальным и поэтому приводит к нелокальным уравнениям поля.

Чтобы уравнения поля были локальными, необходима дифференциальная связь между полями f_{in} и φ_{in}.

Этого можно добиться, если взять, например, следующую комбинацию:

$$f_{lm} = \Box^2 [(P_2 + \alpha P_0)\varphi]_{lm}.$$

В рассматриваемом случае тензор f_{lm} будет выражаться через четвертые производные от функций поля φ_{lm}. Но среди всех значений α значение $\alpha = -2$ является выделенным в том смысле, что позволяет записать f_{lm} в виде комбинации не четвертых производных от поля φ_{lm}, а лишь используя вторые производные:

$$f_{in} = \Box [(P_2 - 2P_0)\varphi]_{in}. \tag{33}$$

Легко убедиться, что оператор $\Box (P_2 - 2P_0)$ является градиентно инвариантным и локальным оператором самого низшего порядка: в теории, использующей симметрическое тензорное поле второго ранга, нет другого локального оператора, использующего более низшие производные и приводящего к калибровочной инвариантности. Таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned} f_{in} = \Box\,\theta_{in} - \partial_i\partial^m\theta_{mn} - \partial_n\partial^m\theta_{mi} + \\ + \gamma_{in}\partial^l\partial^m\theta_{lm};\ \partial^i f_{in} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где введено обозначение

$$\theta_{lm} = \varphi_{lm} - (1/2)\,\gamma_{lm}\varphi^n_n. \tag{35}$$

В указанном случае векторное поле и поле спина 0′, которые не инвариантны при градиентном преобразовании (30), будут исключены из теории.

Поскольку вся теория должна быть калибровочно-инвариантной, постольку считаем, что в уравнения связи $g_{in} = g_{in}(\varphi_{lm})$ поля φ_{lm} входят только через поле f_{lm}. Более того, считаем, что метрический тензор риманова пространства — времени g_{in} является локальной функцией только от полей f_{lm} и от метрического тензора плоского пространства — времени. Относительно вида этой функции сейчас не будем делать никаких предположений, кроме требования, чтобы квадратичная форма с коэффициентами $g_{\alpha\beta}$ была отрицательно определенной, а компонента g_{00} была положительной величиной. Тогда параметр x^0 будет иметь характер времени, а параметры x^α — характер пространственных координат и в римановом пространстве — времени.

4. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Плотность лагранжиана гравитационного поля калибровочной теории с использованием производных от полей f_{lm} не выше первого порядка можно записать в самом общем виде:

$$L_g = \frac{1}{64\pi}\{\partial_i f_{lm}\partial^i f^{lm} - b\partial_i f_l^l \partial^i f_n^n - m_g^2[\alpha f_{in} f^{in} + \beta f_i^i f_n^n]\}.$$

При $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$ полученные уравнения описывают гравитационное поле, квант которого (гравитон) обладает не равной нулю массой покоя. Так как мы ожидаем, что фронт гравитационной волны распространяется с фундаментальной скоростью $v = c$, то масса покоя гравитона должна быть равна нулю. Для этого необходимо принять

$$\alpha = \beta = 0.$$

Кроме того, в данной формулировке теории симметрические поля играют роль потенциалов гравитационного поля, а связность риманова пространства — времени —«напряженностей» поля. Эти напряженности поля оказываются пропорциональными первым производным от полей

$$\Gamma_{i,\,nl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{in}}{\partial f_{pq}}\frac{\partial f_{pq}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial f_{qp}}\frac{\partial f_{pq}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{ln}}{\partial f_{pq}}\frac{\partial f_{pq}}{\partial x^i}\right).$$

Поэтому «наблюдаемыми» являются первые производные от полей f_{lm} (для слабого поля в линейном приближении $\Gamma_{in,l}$ и Γ^i_{nl} выражаются только через первые производные от полей f_{lm}, а в высших приближениях при первых производных полей появляются множители, зависящие нелинейным образом от потенциалов f_{lm}).

Чтобы тензор энергии — импульса гравитационного поля зависел только от указанных наблюдаемых, в том числе и в слабом поле, необходимо потребовать, чтобы в плотность лагранжиана свободного гравитационного поля входили только первые производные от полей f_{lm}.

Перебором различных значений b можно реализовать различные физические ситуации. Можно показать, что энергия свободного гравитационного поля является знакоположительной величиной, если $b \leqslant 1/2$. Кроме того, при $b < 1/2$ происходит излучение скалярной компоненты гравитационных волн, причем значение этой компоненты и ее энергия существенно зависят от b, так как при $b < 1/2$ скалярная компонента переносит положительную энергию. Однако такая степень общности нам в дальнейшем не потребуется, так как мы предполагаем, что гравитационные волны (гравитоны) характеризуются значением спина $s = 2$ и положительно определенной энергией. Поэтому в дальнейшем примем $b = 1/2$, чтобы исключить излучение скалярной компоненты.

Итак, приходим к плотности лагранжиана свободного гравитационного поля в виде

$$L_g = \frac{1}{64\pi}\{\partial_i f_{lm}\partial^i f^{lm} - \frac{1}{2}\partial_i f^l_l \partial^i f^m_m\}. \quad (36)$$

Эта плотность лагранжиана гравитационного поля является самой простейшей плотностью лагранжиана, инвариантной при калибровочных преобразованиях полей φ_{in} (30). Поля f_{lm} можно также подвергнуть калибровочному преобразованию

$$f_{lm} \to f_{lm} + \partial_l a_m + \partial_m a_l - \gamma_{lm}\partial_n a^n, \quad (37)$$

не нарушающему условий $\partial^l f_{lm} = 0$, если калибровочные векторы a^n удовлетворяют однородным уравнениям: $\Box a^n = 0$. При калибровочных преобразованиях (37) плотность лагранжиана свободного гравитационного поля изменяется на дивергенцию:

$$L_g \to L_g + \partial_l C^l,$$

где плотность вектора C^l имеет вид

$$C^l = \frac{1}{32\pi}\{2\partial_i f^{lm}\partial^i a_m + \partial_i a_m \partial^i \partial^m a^l + \partial_i a_m \partial^i \partial^l a^m - \partial_i a^l \partial^i \partial_n a^n\}.$$

Поэтому уравнения поля при калибровочных преобразованиях (37) получим в том же виде, что и до преобразования (37). Плотность канонического тензора энергии — импульса свободного гравитационного поля при калибровочных преобразованиях (37) изменяется на дивергенцию от антисимметрического тензора третьего ранга:

$$\tilde{t}^n_{gi} \to \tilde{t}^n_{gi} + \partial_l [\delta^l_i C^n - \delta^n_i C^l].$$

Как будет показано в дальнейшем, наличие этой дивергенции в плотности канонического тензора энергии — импульса не сказывается на наблюдаемых физических величинах.

Следует подчеркнуть тот факт, что симметрические поля f_{lm} не являются независимыми в силу четырех условий $\partial^l f_{lm} = 0$, которым они удовлетворяют, поэтому при выводе уравнений поля вариацию Эйлера — Лагранжа надо брать по полю φ_{in}, так как только у этого поля все десять компонент являются независимыми. Если же при выводе уравнений поля вариацию Эйлера — Лагранжа брать по полю f_{lm}, то необходимо учесть и четыре дополнительных условия $\partial^l f_{lm} = 0$, которым удовлетворяет указанное поле, т. е. ставить задачу на условный экстремум. В обоих случаях мы придем к эквивалентным уравнениям поля

Из соотношения (34) имеем:

$$\frac{\partial f_{in}}{\partial(\partial_l m\varphi_{sq})}=\frac{1}{4}[\delta_p^q\delta_k^s+\delta_p^s\delta_k^q-\gamma_{pk}\gamma^{qs}][\gamma^{lm}(\delta_i^p\delta_n^k+\delta_i^k\delta_n^p)-$$
$$-\gamma^{lp}(\delta_i^m\delta_n^k+\delta_i^k\delta_n^m)-\gamma^{mp}(\delta_i^l\delta_n^k+\delta_i^k\delta_n^l)+\gamma_{in}(\gamma^{lp}\gamma^{mk}+\gamma^{lk}\gamma^{mp})]. \quad (38)$$

Тогда, используя выражение для плотности лагранжиана гравитационного поля (36) и учитывая (38), получим

$$\frac{\delta L_g}{\delta\varphi_{lm}}=-\frac{1}{32\pi}\{\Box\,{}^3\theta^{lm}-\partial^l\partial_n\Box\,{}^2\theta^{nm}-\partial^m\partial n\Box\,{}^2\theta^{ln}+\gamma^{lm}\partial_n\partial_p\Box\,{}^2\theta^{np}\}.$$

Вариацию плотности лагранжиана вещества можно получить двумя способами: либо непосредственно, записывая вариацию Эйлера — Лагранжа (10) по полю φ_{lm}, либо используя то обстоятельство, что в плотность лагранжиана вещества гравитационное поле входит лишь через посредство поля f_{lm} (34), а поле f_{lm}, в свою очередь, входит в плотность лагранжиана вещества через посредство метрического тензора риманова пространства — времени. В обоих случаях мы получим одинаковый результат.

Учитывая определение (9), вариацию плотности лагранжиана вещества можно записать в виде

$$\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{ik}}=-\frac{1}{2}\left[T^{lm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial f_{np}}\frac{\partial f_{np}}{\partial\varphi_{ik}}-\partial_s\left(T^{lm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial f_{np}}\frac{\partial f_{np}}{\partial(\partial_s\varphi_{ik})}\right)+\right.$$
$$\left.+\partial_s\partial_q\left(T^{lm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial f_{np}}\frac{\partial f_{np}}{\partial(\partial_{sq}\varphi_{ik})}\right)\right]. \quad (39)$$

Вводя обозначение

$$h^{lm}=\frac{1}{2}T^{np}\frac{\partial g_{np}}{\partial f_{ik}}(\delta_i^l\delta_k^m+\delta_i^m\delta_k^l-\gamma_{ik}\gamma^{lm}) \quad (40)$$

и учитывая соотношения (38), из выражения (39) имеем

$$\frac{\delta L_M}{\delta\varphi_{lm}}=-\frac{1}{2}[\Box h^{lm}-\partial^l\partial_n h^{mn}-\partial^m\partial_n h^{ln}+\gamma^{lm}\partial_n\partial_p h^{np}].$$

Тогда уравнения гравитационного поля (28) принимают следующий вид:

$$\Box^3\theta^{lm}-\partial^l\partial_n\Box^2\theta^{nm}-\partial^m\partial_n\Box^2\theta^{ln}+\gamma^{lm}\partial_n\partial_p\Box^2\theta^{np}=-16\pi J^{lm}, \quad (41)$$

где

$$J^{lm}=\Box h^{lm}-\partial^l\partial_n h^{nm}-\partial^m\partial_n h^{nl}+\gamma^{lm}\partial_n\partial_p h^{np}.$$

Уравнения поля (41) с учетом определения (34) можно переписать в виде

$$\Box^2 f^{lm}=-16\pi J^{lm}. \quad (42)$$

Легко убедиться, что уравнения гравитационного поля как в форме (41), так и в форме (42) являются инвариантными при калибровочных преобразованиях (30) с произвольным калибровочным вектором α^n. Если возьмем полную дивергенцию по одному из индексов в уравнениях поля (41) и (42), то получим тождественно $0 = 0$. Поэтому, хотя поле φ_{lm} имеет десять независимых компонент, структура уравнений такова, что четыре компоненты, отвечающие неприводимым представлениям со спинами 1 и 0′, автоматически исключаются из уравнений, в результате чего в уравнения будут входить только шесть независимых компонент, отвечающих спинам 2 и 0. Для них мы имеем шесть независимых уравнений поля, поскольку в силу калибровочной инвариантности выполняются четыре условия (31).

Уравнения гравитационного поля (41) можно упростить, воспользовавшись калибровочным преобразованием (30) и наложив дополнительные условия на функции поля. Произвол в выборе калибровки означает, что при решении конкретных задач необходимо явно определить калибровочные условия каким-либо способом, например, наложением дополнительных условий. Тот факт, что вариация Эйлера — Лагранжа в калибровочной теории удовлетворяет четырем тождествам (31), также означает, что при решении уравнений поля в конкретной задаче необходимо наложить по меньшей мере четыре дополнительных условия на поле. При калибровочных преобразованиях (30) в силу соотношения (35) поля θ_{lm} подвергаются калибровочному преобразованию:

$$\theta_{lm} \to \theta_{lm} + \partial_l \alpha_m + \partial_m \alpha_l - \gamma_{lm} \partial_n \alpha^n. \tag{43}$$

Наиболее общими дополнительными условиями, линейными по полю $\Box^2 \theta^{ln}$, являются условия

$$\partial_n \Box^2 \theta^{nm} = A \partial^m \Box^2 \theta^n_n. \tag{44}$$

При выполнении условий (44) уравнения гравитационного поля записываются в виде

$$\Box^3 \theta^{lm} - 2A \partial^l \partial^m \Box^2 \theta^n_n + A \gamma^{lm} \Box^3 \theta^n_n = -16\pi J^{lm}.$$

Легко убедиться, что левая часть этих уравнений является также сохраняющейся при учете дополнительных условий (44). При $A = 0$ получим уравнения гравитационного поля в наиболее простом виде

$$\Box^3 \theta^{lm} = -16\pi J^{lm} \tag{45}$$

с дополнительными условиями

$$\partial_n \Box^2 \theta^{nm} = 0. \tag{46}$$

Таким образом, уравнения гравитационного поля в нашем случае являются уравнениями с высшими производными. При этом уравнения (45) также являются инвариантными при калибровочных преобразованиях (43), не нарушающих дополнительные условия (46).

Введем поле H^{lm} в соответствии с уравнением

$$\Box H^{lm} = h^{lm}. \qquad (47)$$

Тогда уравнения (45) принимают вид

$$\Box^3 \theta^{lm} = -16\pi \{\Box h^{lm} - \partial^l \partial_n \Box H^{nm} - \partial^m \partial_n \Box H^{nl} + \gamma^{lm} \Box \partial_n \partial_p H^{np}\}.$$

Так как нас в дальнейшем будут интересовать лишь причинно обусловленные решения, то согласно [26] можем «сократить» эти уравнения на оператор Даламбера. Вводя обозначение

$$\psi_{lm} = \Box \theta_{lm} \qquad (48)$$

для причинно обусловленных решений, получим уравнения гравитационного поля в следующем виде:

$$\Box \psi^{lm} = -16\pi \{h^{lm} - \partial^l \partial_n H^{nm} - \partial^m \partial_n H^{nl} + \gamma^{lm} \partial_n \partial_p H^{np}\}.$$

Тензорный ток, стоящий в правой части этого уравнения, вне источника удовлетворяет условию

$$\Box \{h^{lm} - \partial^l \partial_n H^{mn} - \partial^m \partial_n H^{ln} + \gamma^{lm} \partial_n \partial_p H^{np}\} = 0.$$

Поэтому вне вещества этот тензорный ток можно устранить при проведении калибровочного преобразования. Действительно, так как условия (46) допускают преобразования (43) с калибровочным 4-вектором, удовлетворяющим уравнению:

$$\Box^3 \alpha^n = 0, \qquad (49)$$

то мы имеем возможность провести следующее калибровочное преобразование:

$$\psi^{mn} \to \psi^{mn} + \partial^m \Box \alpha^n + \partial^n \Box \alpha^m - \gamma^{nm} \partial_l \Box \alpha^l. \qquad (50)$$

Вне источника в качестве калибровочного 4-вектора выбираем вектор, удовлетворяющий условию:

$$\Box^2 \alpha^n = 16\pi \partial_m H^{mn}.$$

Так как вне источника выполняются уравнения $\Box H^{mn} = 0$, то и калибровочный 4-вектор удовлетворяет в указанной области уравнению (49), в результате чего дополнительные условия (46) удовлетворяются автоматически. Вид калибровочного вектора внутри источника для наших целей несуществен. После калибровочного преобразования (50) вне источника получаем уравнения гравитационного поля в виде

$$\Box \psi^{mn} = 0.$$

Это означает, что тензорный ток

$$I^{mn} = h^{mn} - \partial^n \partial_l H^{lm} - \partial^m \partial_l H^{ln} + \gamma^{mn} \partial_l \partial_p H^{lp}$$

отличен от нуля только внутри вещества. Поэтому в данной калибровке уравнения гравитационного поля принимают вид

$$\Box\psi^{mn} = -16\pi I^{mn}. \tag{52}$$

Уравнения (52) допускают калибровочные преобразования (43) на классе векторов, удовлетворяющих условию:

$$\Box^2 \alpha^n = 0.$$

Поэтому будем решать уравнения с дополнительными условиями $\partial_l\psi^{lm} = 0$, которые оставляют возможность проводить калибровочные преобразования только на указанном классе. Выбор дополнительных условий находится в соответствии с теоремой Фока [27], согласно которой решение однородного волнового уравнения $\Box\partial_l\psi^{lm} = 0$, ограниченное во всем пространстве и удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда, тождественно равно нулю:

$$\partial_l\psi^{lm} = 0.$$

Таким образом, получаем уравнения гравитационного поля

$$\Box\psi^{lm} = -16\pi I^{lm} \tag{53}$$

с дополнительными условиями

$$\partial_l\psi^{lm} = 0. \tag{54}$$

Заметим далее, что выражение $\Box f_{lm}$ с учетом принятого обозначения (48) можно записать в виде

$$\Box f_{lm} = \Box\psi_{lm} - \partial_l\partial^n\psi_{nm} - \partial_m\partial^n\psi_{ln} + \gamma_{lm}\partial^n\partial^p\psi_{np}.$$

Последнее выражение также является инвариантным при преобразованиях (50) с любым калибровочным вектором α^n, но оператор $\Box f_{lm}$ в данном случае будет иметь первоначальный вид. Мы можем упростить этот оператор, если учтем, что в принятой нами калибровке выполняются дополнительные условия (54). В таком случае получим

$$\Box f_{lm} = \Box\psi_{lm}. \tag{55}$$

Следует отметить, что полученное выражение $\Box f_{lm}$ (55) также является инвариантным при калибровочных преобразованиях (50), не нарушающих дополнительные условия (54). Соотношения (55) позволяют переписать уравнения гравитационного поля в виде

$$\Box f^{nm} = -16\pi I^{nm} \tag{56}$$

дополнительными условиями

$$\partial_n f^{nm} = 0. \tag{57}$$

Следует особо подчеркнуть, что тензорный ток I^{nm}, стоящий в правой части уравнений (56), сосредоточен только в веществе.

Решение этих уравнений для случая излучения гравитационных волн дано в разд. 6.

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В разд. 2 были получены законы сохранения, справедливые для всех теорий гравитации класса А. Наличие в теориях указанного класса дифференциального закона сохранения плотности полного симметрического тензора энергии — импульса системы в плоском пространстве — времени (26) позволяет получить соответствующий интегральный закон сохранения.

В декартовых координатах имеем

$$\partial_n(t_g^{in}+t_M^{in})=0.$$

Интегрируя это выражение по некоторому объему V при $i=0$, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int dV\,(t_g^{00}+t_M^{00})=\int dS_\alpha\,(t_g^{0\alpha}+t_M^{0\alpha}). \tag{58}$$

Равенство (58) означает, что изменение энергии вещества и гравитационного поля в некотором объеме V равно потоку энергии через поверхность, ограничивающую этот объем. Если взять в качестве объема интегрирования объем, занимаемый веществом, и предположить, что через поверхность, ограничивающую этот объем, нет потоков вещества, то изменение суммарной энергии вещества и гравитационного поля в источнике будет равно потоку энергии гравитационного поля через поверхность источника.

Таким образом, при излучении гравитационных волн энергия источника должна изменяться, причем, если гравитационные волны переносят положительную энергию, то энергия источника должна уменьшаться:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int dV\,(t_g^{00}+t_M^{00})=\int dS_\alpha t_g^{0\alpha}. \tag{59}$$

Все эти выводы и соотношения справедливы и для полевой теории гравитации, являющейся конкретным представителем теорий класса А.

Так как симметрический и канонический тензоры энергии — импульса различаются на дивергенцию антисимметрического тензора третьего ранга, то для канонического тензора энергии — импульса также имеют место законы сохранения (26) и (58).

Канонический тензор энергии — импульса свободного гравитационного поля можно получить следующим образом. Запишем равенство

$$\partial_p L_g = \partial_n \left(\frac{\partial L_g}{\partial (\partial_n f_{lm})} \partial_p f_{lm} \right) - \partial_p f_{lm} \partial_n \left(\frac{\partial L_g}{\partial (\partial_n f_{lm})} \right). \qquad (60)$$

Свободное гравитационное поле согласно (56) удовлетворяет уравнению

$$\partial_n (\partial L_g / \partial (\partial_n f_{lm})) = \Box f^{lm} = 0,$$

поэтому выражение (60) означает равенство нулю дивергенции канонического тензора энергии — импульса свободного гравитационного поля.

Отсюда получаем

$$\tilde{t}^{\,n}_{gp} = - L_g \delta^n_p + (\partial L_g / \partial (\partial_n f_{lm})) \, \partial_p f_{lm}. \qquad (61)$$

Используя выражение для плотности лагранжиана свободного гравитационного поля (36), находим

$$\tilde{t}^{\,n}_{gp} = \frac{1}{64\pi} \left\{ -\delta^n_p \left[\partial_i f_{lm} \partial^i f^{lm} - \frac{1}{2} \partial_i f^l_l \partial^i f^m_m \right] + \right.$$
$$\left. + 2\partial_p f_{lm} \partial^n f^{lm} - \partial_p f^l_l \partial^n f^m_m \right\}. \qquad (62)$$

Для получения симметрического тензора энергии — импульса гравитационного поля t^{in} плотность лагранжиана гравитационного поля L_g и выражение для f_{in} необходимо записать в явно ковариантной форме.

Переходя в (36) от декартовой системы координат к произвольной криволинейной системе, получаем

$$L_g = (\sqrt{-\gamma}/64\pi) \gamma^{ik} (\gamma^{ln}\gamma^{mp} - (1/2)\, \gamma^{lm}\gamma^{np}) \, D_i f_{lm} D_k f_{np}. \qquad (63)$$

Аналогично, из (33) имеем

$$f_{ik} = \gamma^{lm} (D_l D_m \varphi_{ik} - D_i D_l \varphi_{mk} - D_k D_l \varphi_{mi} +$$
$$+ D_i D_k \varphi_{lm} + \gamma_{ik} \gamma^{pn} [D_l D_n \varphi_{mp} - D_n D_p \varphi_{lm}]). \qquad (64)$$

Введем также для сокращения записи последующих выражений обозначение

$$\Lambda^{ik} = - A^{lm} [\partial_l \partial_m \varphi^{ik} - \partial^i \partial_l \varphi^k_m - \partial^k \partial_l \varphi^i_m + \partial^i \partial^k \varphi_{lm}] +$$
$$+ (1/2) f^n_n A^{ik} + A^n_n [f^{ik} - (1/2)\, \gamma^{ik} f^m_m] +$$
$$+ (1/2)\, \partial_s \{\varphi^i_n [-\partial^s A^{kn} + 2\partial^n A^{sk} + 2\gamma^{sk} \partial_l A^{ln} -$$
$$- \gamma^{kn} \partial_l A^{ls} - \partial^k A^{sn} + \gamma^{kn} \partial^s A^l_l - 2\gamma^{sk} \partial^n A^l_l] +$$
$$+ \varphi^s_n [\partial^i A^{kn} - \partial^n A^{ik} - \gamma^{ik} \partial_l A^{ln} + \gamma^{ik} \partial^n A^l_l] +$$
$$+ 2\gamma^{ks} A^{np} \partial^i \varphi_{np} - A^{sn} \partial^i \varphi^k_n - 3A^{kn} \partial^i \varphi^i_n +$$

$$+2A^{ks}\partial^i\varphi^n_n-\gamma^{ik}A^{np}\partial^s\varphi_{np}+3A^{kn}\partial^s\varphi^i_n-$$
$$-A^{ik}\partial^s\varphi^n_n-2\gamma^{sk}A^{ln}\partial_l\varphi^i_n-2A^{sk}\partial_l\varphi^{li}+$$
$$+A^{ns}\partial_n\varphi^{ik}+\gamma^{ik}A^{ln}\partial_l\varphi^s_n+A^{ik}\partial_n\varphi^{ns}+$$
$$+A^l_l\,[2\partial^i\varphi^{ks}-2\gamma^{ks}\partial^i\varphi^n_n-2\partial^s\varphi^{ik}+$$
$$+\gamma^{ik}(\partial^s\varphi^n_n-\partial_n\varphi^{ns})+2\gamma^{ks}\partial_n\varphi^{ni}]\}. \qquad (65)$$

Симметрический тензор энергии — импульса гравитационного поля можно получить, подставляя (63) и (64) в (12). В декартовой системе координат имеем

$$t^{ik}_g=(1/64\pi)\,\{-\gamma^{ik}\,[\partial_l f_{np}\partial^l f^{np}-(1/2)\,\partial_l f^n_n\partial^l f^p_p]+2\partial^i f_{nm}\partial^k f^{nm}-$$
$$-\partial^i f^n_n\partial^k f^m_m\}+(1/16\pi)\,\{\partial_l f^{in}\partial^l f^k_n-(1/2)\,\partial_l f^{ik}\partial^l f^n_n\}-$$
$$-(1/32\pi)\,\partial_l\,\{f^i_p\,[\partial^l f^{kp}+\partial^k f^{lp}]-f^{ik}\partial^l f^n_n+$$
$$+f^k_n\,[\partial^l f^{in}+\partial^i f^{ln}]-f^l_n\,[\partial^i f^{kn}+\partial^k f^{in}]\}-2\Lambda^{(ik)}, \qquad (66)$$

где, как обычно, по индексам, заключенным в круглые скобки, производится симметризация:

$$\Lambda^{ik}=(\Lambda^{ik}+\Lambda^{ki})/2.$$

Тензор A^{mn}, входящий в (65), в этом случае имеет вид

$$A^{mn}=-(1/32\pi)\,\Box\,(f^{mn}-(1/2)\,\gamma^{mn}f^l_l).$$

Вне вещества $\Box f_{nm}=0$, поэтому выражение для t^{ik}_g существенно упрощается:

$$t^{ik}_g=\tilde t^{ik}_g+(1/32\pi)\,\partial_l\,[f^l_n\,(\partial^i f^{kn}+\partial^k f^{in})-f^i_n\partial^k f^{nl}-f^k_n\partial^i f^{nl}], \qquad (67)$$

где $\tilde t^{ik}_g$ — канонический тензор энергии — импульса свободного гравитационного поля (62).

Покажем, что в волновой зоне симметрический тензор энергии — импульса гравитационного поля t^{ik}_g отличается от канонического тензора энергии — импульса $\tilde t^{ik}_g$ лишь на неволновые члены, убывающие быстрее, чем $1/r^2$.

Так как в волновой зоне справедливо разложение

$$f_{lm}=a_{lm}\,(t-r,\ \theta,\ \varphi)/r+O\,(1/r^2),$$

то для произвольной функции $F\,(f_{lm})$ имеем

$$\partial_\alpha F=n_\alpha\partial F\,(flm)/\partial t+O\,((1/r)\,F\,(f_{lm})),$$

где $n_\alpha=x_\alpha/r$. Поэтому выражение (67) можно записать в виде

$$t^{ik}_g=\tilde t^{ik}_g+\frac{1}{32\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\{(f^{0l}+n_\alpha f^{\alpha l})\,(\partial^i f^k_l+\partial^k f^i_l)-$$
$$-f^{i}_n\partial^k\,(f^{0n}+n_\alpha f^{\alpha n})-f^k_l\partial^i\,(f^{0l}+n_\alpha f^{\alpha l})\}+O\,(1/r^3).$$

Обозначая дифференцирование по времени точкой, из дополнительных условий (57) находим

$$\dot{f}^{0l}+n_\alpha \dot{f}^{\alpha l}=O\,(1/r^2). \tag{68}$$

Интегрируя это выражение по времени и полагая константы интегрирования равными нулю, так как волны не должны иметь не зависящей от времени части, получаем

$$f^{0l}+n_\alpha f^{\alpha l}=O\,(1/r^2). \tag{69}$$

Отсюда следует, что в волновой зоне симметрический тензор энергии — импульса гравитационного поля отличается от канонического тензора энергии — импульса на неволновую величину, убывающую быстрее, чем $1/r^2$ с ростом r:

$$\bar{t}_g^{ik}=\tilde{t}_g^{ik}+O\,(1/r^3). \tag{70}$$

Поэтому в волновой зоне расчеты, выполненные как с использованием симметрического, так и канонического тензоров энергии — импульса гравитационного поля, дадут один и тот же результат. Эти тензоры являются эквивалентными и при расчете интегральных характеристик гравитационного излучения.

Действительно, из выражения (67) имеем

$$t_g^{00}=\tilde{t}_g^{00}+\frac{1}{16\pi}\,\partial_\alpha\,(f^{\alpha l}\dot{f}_l^0-\dot{f}^{\alpha l}f_l^0).$$

Поэтому

$$\int t_g^{00}\,dV=\int \tilde{t}_g^{00}\,dV+\frac{1}{16\pi}\int dS_\alpha\,(f^{\alpha l}\dot{f}_l^0-f_l^0\dot{f}^{\alpha l}).$$

Если граница области интегрирования находится в волновой зоне, то в силу соотношений (68) и (69)

$$f^{\alpha l}\dot{f}_l^0-f_l^0\dot{f}^{\alpha l}=n_\beta\,(f^{\alpha l}\dot{f}_l^\beta-\dot{f}^{\alpha l}f_l^\beta)+O\,(1/r^3).$$

Выбрав в качестве поверхности интегрирования сферу радиуса r ($dS_\alpha = -r^2 n_\alpha\, d\Omega$), получим

$$\int t_g^{00}\,dV=\int \tilde{t}_g^{00}\,dV+O\,(1/r). \tag{71}$$

Кроме того, из соотношения (70) следует

$$\int t_g^{0\alpha}\,dS_\alpha=\int \tilde{t}_g^{0\alpha}\,dS_\alpha+O\,(1/r). \tag{72}$$

Таким образом, из (71) и (72) следует эквивалентность канонического и симметрического тензоров энергии — импульса при расчете интегральных характеристик гравитационного излучения.

Рассмотрим источник гравитационных волн островного типа. Покажем, что вне источника волн компоненты $\tilde{t}_{g0}^0$ и $\tilde{t}_{g0}^\alpha$ знакоопределены и положительны. Для этого возьмем произвольную точку вне источника и выделим вокруг выбранной точки область пространства, линейные размеры которой значительно меньше радиуса кривизны волнового фронта в указанной точке. Тогда в выделенной области гравитационную волну можно рассматривать как плоскую волну. Направим для определенности ось x декартовой системы координат так, чтобы она проходила через выбранную точку. Начало декартовой системы поместим в любую точку источника. Тогда в нашей области функции f_{lm} будут являться лишь функциями разности $u = x - t$. Для компонент $\tilde{t}^0_{g0}$ и $\tilde{t}^1_{g0}$ в этом случае получим из (62)

$$\tilde{t}^0_{g0} = \tilde{t}^1_{g0} = \frac{1}{32\pi}(\dot{f}^2_{00} + \dot{f}^2_{11} + \dot{f}^2_{22} + \dot{f}^2_{33} + $$

$$+ 2\dot{f}^2_{12} + 2\dot{f}^2_{13} + 2\dot{f}^2_{23} - 2\dot{f}^2_{01} - 2\dot{f}^2_{02} - 2\dot{f}^2_{03}). \tag{73}$$

Из условий (57) имеем

$$\dot{f}_{00} = \dot{f}_{11}; \quad \dot{f}_{01} = -\dot{f}_{11};$$

$$\dot{f}_{02} = -\dot{f}_{12}; \quad \dot{f}_{03} = -\dot{f}_{13}.$$

Подставляя эти соотношения в (73), получаем

$$\tilde{t}^0_{g0} = \tilde{t}^1_{g0} = (1/16)\{\dot{f}^2_{23} + (1/4)(\dot{f}_{22} - \dot{f}_{33})^2\} \geqslant 0$$

В силу произвольности выбранной точки последнее соотношение верно во всем пространстве вне источника. Таким образом, плотность энергии гравитационной волны положительно определена, и вклад в энергию дают только поперечные компоненты гравитационной волны. Поэтому из (59) следует, что энергия источника при излучении волн уменьшается.

Для получения плотности симметрического тензора энергии — импульса вещества в плоском пространстве — времени t^{in}_M заметим, что метрический тензор γ_{in} входит в плотность лагранжиана вещества только через метрический тензор риманова пространства — времени $g_{in} = g_{in}(\gamma_{lm}, \varphi_{lm})$. Поэтому плотность тензора t^{in}_M можно записать в виде

$$t^{in}_M = T^{lm} A^{in}_{lm} - 2\Lambda^{(in)}, \tag{74}$$

где

$$A^{in}_{lm} = \partial \tilde{g}_{lm}/\partial \gamma_{in} - \gamma^{is}\gamma^{nq}\, \partial \tilde{g}_{lm}/\partial \gamma^{sq}, \tag{75}$$

а знак тильда означает, что метрический тензор риманова пространства — времени перед операцией дифференцирования должен быть представлен в «каноническом» виде — как функция поля

f_{in} и метрики γ_{in}:

$$\tilde{g}_{lm} = g_{lm}(\gamma_{in}, f_{in}).$$

Выражение для Λ^{in} получим из (65), если положить

$$A^{lm} = -(1/2)\, T^{np}\, \partial g_{np}/\partial f_{lm}.$$

Поскольку авторы не считают необходимым в данной статье остановить свой выбор на каком-либо конкретном уравнении связи $g_{in} = g_{in}(\gamma_{lp}, \varphi_{lp})$, то мы не имеем возможности получить выражение для t_M^{in} в явном виде. Как будет показано далее, исходя из результатов экспериментов, выполненных в Солнечной системе, можно получить уравнение связи в приближении слабого поля с точностью до квадратичных членов. Это позволит нам получить явное выражение для t_M^{in} в том же приближении.

6. ИЗЛУЧЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Уравнения поля с учетом принятой нами калибровки имеют вид

$$\Box f^{lm} = -16\pi I^{lm}, \tag{76}$$

причем тензорный ток I^{lm} (51) задан только в веществе.

Хотя эти уравнения и являются нелинейными уравнениями из-за того, что f^{in} входит нелинейным образом в правую часть, все же анализ их волновых решений оказывается возможным.

Так как метрический тензор g_{ln}, а также тензор энергии — импульса свободного гравитационного поля, т. е. поля вне вещества, зависят только от полей f_{ln}, то и уравнения поля (76) будем решать относительно f_{ln}.

Запишем тензоры f^{ln} и I^{ln} в виде интегралов Фурье по времени:

$$\left.\begin{aligned} f^{nm}(\mathbf{r}, t) &= \int \exp(-i\omega t)\, \tilde{f}^{nm}(\omega, \mathbf{r})\, d\omega; \\ I^{nm}(\mathbf{r}, t) &= \int \exp(-i\omega t)\, \tilde{I}^{nm}(\omega, \mathbf{r})\, d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Выделим в спектре $\tilde{I}^{nm}(\omega, \mathbf{r})$ статическую часть $\tilde{I}_0^{nm}(\mathbf{r})$. Очевидно, что статическая часть тензорного тока $\tilde{I}_0^{nm}(\mathbf{r})$ будет давать лишь статические решения, поэтому мы ее опустим. С учетом представлений (77) уравнения поля (76) примут вид

$$\Delta \tilde{f}^{nm} + \omega^2 \tilde{f}^{nm} = 16\pi \tilde{I}^{nm}.$$

Поместим начало декартовой системы координат в какую-либо точку источника. Тогда в этой системе решение уравнений поля можно записать в виде:

$$\tilde{f}^{nm} = -4 \int \frac{\exp(i\omega R)}{R}\, \tilde{I}^{nm}(\omega, \mathbf{r}')\, dV, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \tag{78}$$

Воспользовавшись условиями Лоренца (57) $i\omega\tilde{f}^{0l} = \partial_\alpha\tilde{f}^{\alpha l}$, выразим компоненты $\tilde{f}^{0l}$ через пространственные компоненты:

$$\tilde{f}^{00} = -(1/\omega^2)\,\partial_\alpha\partial_\beta\tilde{f}^{\alpha\beta};\quad \tilde{f}^{0\alpha} = -(i/\omega)\,\partial_\beta\tilde{f}^{\alpha\beta}.$$

Вне источника гравитационных волн выбором калибровки

$$f^{lm} = f'^{lm} + \partial^l\alpha^m + \partial^m\alpha^l - \gamma^{lm}\partial_n\alpha^n, \tag{79}$$

совместимой с условием Лоренца (57) при $\Box\alpha^n = 0$, мы можем наложить на компоненты волны $\tilde{f}'^{lm}$ еще четыре условия по числу независимых калибровочных векторов. В качестве таких условий можно выбрать следующие условия: $\tilde{f}'^n_n = 0$; $\tilde{f}'^{0\alpha} = 0$ (ТТ-калибровка).

Калибровочные векторы, приводящие к этим условиям, имеют вид:

$$\tilde{\alpha}^0 = (i/2\omega)\,[\tilde{f}^{00} - (1/2)\tilde{f}^n_n];$$
$$\tilde{\alpha}^\alpha = (i/\omega)\,\tilde{f}^{0\alpha} + (1/2\omega^2)\,\partial^\alpha\,[\tilde{f}^{00} - (1/2)\tilde{f}^n_n].$$

В результате такой калибровки получим:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{f}'^n_n = 0;\quad \tilde{f}'^{0n} = 0;\\ &\tilde{f}'^{\alpha\beta} = \tilde{f}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\tilde{f}^n_n - \frac{i}{\omega}\,(\partial^\beta\tilde{f}^{0\alpha} + \partial^\alpha\tilde{f}^{0\beta}) -\\ &-\frac{1}{\omega^2}\,\partial^\alpha\partial^\beta\left(\tilde{f}^{00} - \frac{1}{2}\tilde{f}^n_n\right). \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Учитывая условия Лоренца (57), выражения (80) запишем в виде:

$$\tilde{f}'^{\alpha\beta} = \tilde{P}^{\alpha\beta} - (1/\omega^2)\,(\partial^\beta\partial_\varepsilon\tilde{P}^{\alpha\varepsilon} + \partial^\alpha\partial_\varepsilon\tilde{P}^{\beta\varepsilon}) +$$
$$+ (1/2\omega^2)\,\gamma^{\alpha\beta}\partial_\varepsilon\partial_\tau\tilde{P}^{\varepsilon\tau} + \frac{1}{2\omega^4}\,\partial^\alpha\partial^\beta\partial_\varepsilon\partial_\tau\tilde{P}^{\varepsilon\tau}, \tag{81}$$

где введено обозначение:

$$\tilde{P}^{\alpha\beta} = \tilde{f}^{\alpha\beta} - (1/3)\,\gamma^{\alpha\beta}\tilde{f}^\tau_\tau. \tag{82}$$

Таким образом, волновое решение уравнений поля содержит в общем случае шесть ненулевых пространственных компонент $\tilde{f}'^{\alpha\beta}$, но независимыми из них являются только две компоненты в силу трех условий Лоренца (57) (четвертое условие Лоренца тривиально в силу ТТ-калибровки) и равенства нулю следа $\tilde{f}^{n\prime}_n = 0$. Эти дополнительные условия представляют собой известные дополнительные условия для неприводимого представления со спином 2 в ТТ-калибровке, следовательно, свободная гравитационная волна имеет спин 2, а скалярная компонента, соответствующая неприводимому представлению со спином 0, не излучается в виде гравитационных волн. Последнее можно заметить и из выражения для тензора энергии — импульса гравитационных волн, так как в случае волнового решения скалярная компонента не дает вклад в тензор энергии — импульса поля.

Обычно волновые решения уравнений гравитационного поля записывают в несколько ином виде, позволяющем наглядно показать квадрупольный характер излучаемых гравитационных волн.

В нашем случае также возможно выразить полученное решение через обобщенные квадрупольные моменты тензорного тока I^{lm}. Для этого учтем, что пространственные компоненты $\tilde{f}^{\alpha\beta}$ (78) в силу сохранения тензорного тока $\partial_n I^{nm}$ можно записать в виде:

$$\tilde{f}^{\alpha\beta} = -4\int \frac{\exp(i\omega R)}{R}\tilde{I}^{\alpha\beta}\,dV = 2\omega^2\left\{\int \frac{\exp(i\omega R)}{R}\tilde{I}^{00}x^\alpha x^\beta\,dV + \right.$$
$$+\frac{2i}{\omega}\partial_\tau\int \frac{\exp(i\omega R)}{R}\tilde{I}^{0\tau}x^\alpha x^\beta\,dV -$$
$$\left. -\frac{1}{\omega^2}\partial_\varepsilon\partial_\tau\int \frac{\exp(i\omega R)}{R}\tilde{I}^{\tau\varepsilon}x^\alpha x^\beta\,dV\right\}. \tag{83}$$

Это соотношение является точным. Оно существенно упрощается, если линейные размеры источника значительно меньше расстояния от его центра до точки наблюдения. Опуская неволновые члены, убывающие быстрее, чем $1/r$, получаем

$$\tilde{f}^{\alpha\beta} = \frac{2\omega^2}{r}\int dV x^\alpha x^\beta \exp(i\omega R)(\tilde{I}^{00} + 2n_\tau\tilde{I}^{0\tau} + n_\varepsilon n_\tau\tilde{I}^{\varepsilon\tau}),$$

где $n^\varepsilon = x^\varepsilon/r$; $n_\tau n^\tau = -1$. Тогда выражение (82) можно записать в виде

$$\tilde{P}^{\alpha\beta} = \frac{2\omega^2}{r}\int dV\left(x^\alpha x^\beta - \frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}x_\varepsilon x^\varepsilon\right)\times$$
$$\times(\tilde{I}^{00} + 2n_\tau\tilde{I}^{0\tau} + n_\varepsilon n_\tau\tilde{I}^{\varepsilon\tau})\exp(i\omega R). \tag{84}$$

Вводя операторы проектирования

$$Z^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta, \tag{85}$$

удовлетворяющие условиям

$$Z^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} = 2; \quad Z^{\alpha\beta}Z_{\beta\tau} = Z^\alpha_\tau,$$

соотношение (81) перепишем в виде

$$\tilde{f}'^{\alpha\beta} = (Z^\alpha_\varepsilon Z^\beta_\tau - (1/2)\,Z^{\alpha\beta}Z_{\varepsilon\tau})\,\tilde{P}^{\varepsilon\tau}. \tag{86}$$

Подставляя (84) в интеграл Фурье, получаем

$$P^{\alpha\beta} = -\frac{2}{r}\frac{d^2}{dt^2}\int dV\left(x^\alpha x^\beta - \frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}x_\tau x^\tau\right)\times$$
$$\times[I^{00} + 2n_\tau I^{0\tau} + n_\varepsilon n_\tau I^{\varepsilon\tau}]_{\mathrm{ret}}. \tag{87}$$

Здесь $[\ldots]_{\text{ret}}$ означает, что выражение в квадратных скобках берется в запаздывающий момент времени $t' = t - R$. Если ввести бесследовый тензор обобщенного квадрупольного момента

$$\mathscr{D}^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta} + 2n_\tau D^{\alpha\beta\tau} + n_\varepsilon n_\tau D^{\alpha\beta\tau\varepsilon}, \tag{88}$$

где

$$\left.\begin{aligned} D^{\alpha\beta} &= \int dV\,(3x^\alpha x^\beta - \gamma^{\alpha\beta}x_\tau x^\tau)\,[I^{00}]_{\text{ret}};\\ D^{\alpha\beta\tau} &= \int dV\,(3x^\alpha x^\beta - \gamma^{\alpha\beta}x_\varepsilon x^\varepsilon)\,[I^{0\tau}]_{\text{ret}};\\ D^{\alpha\beta\tau\varepsilon} &= \int dV\,(3x^\alpha x^\beta - \gamma^{\alpha\beta}x_\delta x^\delta)\,[I^{\tau\varepsilon}]_{\text{ret}}; \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

то компоненты гравитационной волны (86) можно записать в виде:

$$f'^{\alpha\beta} = -(2/3r)\,[Z^\alpha_\varepsilon Z^\beta_\tau - (1/2)\,Z^{\alpha\beta}Z_{\varepsilon\tau}]\,\ddot{\mathscr{D}}^{\varepsilon\tau}. \tag{90}$$

Здесь и далее точка обозначает производную по времени.

Учитывая, что $\partial_\varepsilon f_{\alpha\beta} = n_\varepsilon \dot{f}_{\alpha\beta}$, для компонент тензора энергии — импульса гравитационной волны $\tilde{t}^{\alpha}_{g0}$ получим следующее выражение:

$$\tilde{t}^{\alpha}_{g0} = (1/32\pi)\,n^\alpha \dot{f}_{\tau\varepsilon}\dot{f}^{\tau\varepsilon}.$$

Тогда для интенсивности излучения энергии гравитационных волн в элемент телесного угла $d\Omega$ имеем

$$dI/d\Omega = (1/32\pi)\,r^2 \dot{f}_{\varepsilon\tau}\dot{f}^{\varepsilon\tau}. \tag{91}$$

Из (91) видно, что интенсивность излучения энергии гравитационных волн в элемент телесного угла является положительной величиной при любых значениях компонент тензора $\dot{f}^{\alpha\beta}$, если все они не равны нулю. Если все компоненты $\dot{f}^{\alpha\beta} = 0$, то и $dI/d\Omega = 0$.

Воспользовавшись соотношениями (85) и (90), выражение (91) можно записать в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi}\left\{\frac{1}{4}\,(\dddot{\mathscr{D}}^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta)^2 + \frac{1}{2}\,\dddot{\mathscr{D}}^{\alpha\beta}\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta} + n_\beta n^\tau \dddot{\mathscr{D}}^{\alpha\beta}\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\tau}\right\}. \tag{92}$$

Выражения (90) и (91) справедливы для точек наблюдения, находящихся вдали от источника на расстояниях, значительно превышающих его линейные размеры и длину волны. При этом на соотношение между размерами источника и длиной излучаемой волны не накладывается никаких ограничений.

Для вычисления потери энергии по всем направлениям в единицу времени остается проинтегрировать (92) по углам точки наблюдения.

Рассмотрим далее наиболее распространенный на практике случай излучения слабых гравитационных волн. В обычно рассматриваемом линейном приближении тензорный ток I^{lm} (51) должен быть взят в отсутствие гравитационного поля. Так как в указанном приближении единственным физическим симметрическим тензором второго ранга, удовлетворяющим закону сохранения, является тензор энергии — импульса вещества, то потребуем, чтобы выполнялось следующее соответствие: в нулевом приближении по гравитационному полю тензорный ток I^{lm} должен автоматически переходить в тензор энергии — импульса вещества:

$$I^{lm}(f_{ik}=0)=T^{lm}. \tag{93}$$

Это требование соответствия позволяет однозначно восстановить в линейном приближении структуру уравнений связи $g_{ik} = g_{ik}(\gamma_{lm}, f_{lm})$. Действительно, воспользовавшись выражениями (40), (47) и (51), получим, что требование соответствия (93) приводит к следующим уравнениям связи в линейном приближении:

$$g_{mn}=\gamma_{mn}+f_{mn}-(1/2)\,\gamma_{mn}f_l^l.$$

Отметим, что в данном случае также $h^{lm} = T^{lm}$. В случае излучения гравитационных волн, длина которых значительно больше размеров источника, запаздыванием в системе можно пренебречь и в формулах (89) брать выражения в квадратных скобках в момент времени $t' = t - r$.

Если компоненты тензора энергии — импульса вещества удовлетворяют неравенствам

$$|\dddot{T}^{00}| \gg |\dddot{T}^{0\alpha}|; \qquad |\dddot{T}^{00}| \gg |\dddot{T}^{\alpha\beta}|,$$

то для потери энергии по всем направлениям в единицу времени получим

$$-dE/dt=(G/45c^5)\,\dddot{D}^{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta}, \tag{94}$$

где

$$D^{\alpha\beta}=\int dV\,(3x^{\alpha}x^{\beta}-\gamma^{\alpha\beta}x_{\tau}x^{\tau})\,T^{00}(t-r)$$

и явно введены гравитационная постоянная G и скорость света c.

Эта формула согласуется с результатами косвенных измерений потерь энергии двойной пульсарной системой PSR 1913 + 16 на предполагаемое излучение гравитационных волн.

Первые наблюдения пульсара PSR 1913 + 16 показали [28], что он является одной из компонент двойной системы и имеет параметры, позволяющие наблюдать ряд релятивистских эффектов. Этот пульсар имеет очень малый период обращения по орбите T = 8 ч, относительно большую орбитальную скорость $v \sim 10^{-3}$ c, его орбита имеет весьма большой эксцентриситет $e = 0{,}6$ и малые линейные размеры — порядка радиуса Солнца. Другая компонента рассматриваемой системы не является пульсаром. Но из отсутствия затмения пульсарного сигнала, а также из малости линейных размеров орбиты пульсара следует, что эта компонента должна быть компактной и может быть нейтронной звездой, белым карликом, либо другим компактным объектом.

Последующие измерения показали [29], что период обращения пульсара по орбите уменьшается ($\dot{T} = (-3{,}2 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-12}$ с за секунду), а периастр этой системы смещается ($\delta\varphi = 4{,}226 \pm \pm 0{,}002^\circ$ за год). После учета различных эффектов Тейлор, Фаулер и Мак-Куллах пришли к выводу, что уменьшение периода обращения и смещение периастра можно объяснить, предположив, что двойная система излучает гравитационные волны, которые уносят положительную энергию в соответствии с формулой (94).

Так как обычно проводимый в ОТО расчет «потери энергии» с использованием псевдотензоров энергии — импульса в приближении слабого поля приводит к выражению (94), в работе [29] был сделан вывод о совпадении результатов наблюдений с предсказанием теории Эйнштейна.

Однако, как показано в [5], формула (94) не является следствием ОТО Эйнштейна. В теории Эйнштейна можно говорить только о волнах кривизны, именно с ними и связана передача энергии веществу, законы же сохранения в их обычном смысле здесь отсутствуют, в результате чего подсчет потерь энергии источником, а также определение потоков энергии гравитационных волн в ОТО оказывается невозможным.

Таким образом, теория Эйнштейна, если верить экспериментальным результатам [29], не в состоянии объяснить результаты наблюдения двойной пульсарной системы PSR 1913 + 16.

В полевой теории гравитации гравитационное поле аналогично всем другим физическим полям, обладает энергией — импульсом и при излучении слабых гравитационных волн медленно движущимся источником его энергия уменьшается в соответствии с (94). Поэтому экспериментальное доказательство существования гравитационных волн как физического поля, переносящего энергию и уменьшающего тем самым энергию источника, явилось бы подтверждением развиваемых здесь представлений.

В заключение настоящего раздела обсудим кратко вопрос о вычислении тензора Римана в полевой теории гравитации. В теории Эйнштейна возможна ситуация [30], когда псевдотензор энергии — импульса гравитационных волн равен нулю, а компоненты тензора Римана не равняются нулю. Этот факт красноречиво свидетельствует о незаконности интерпретации псевдотензоров энергии — импульса как энергетических характеристик гравитационного поля.

В полевой теории гравитации если компоненты тензора энергии — импульса гравитационных волн равны нулю, то и тензор Римана тождественно равен нулю, т. е. на формирование риманова пространства — времени всегда необходимы энергия и импульс гравитационного поля. Следует отметить, что метрика риманова пространства — времени имеет смысл только внутри вещества. Вычислять же компоненты метрического тензора g_{in}, а также тензор кривизны R^i_{nlm} можно в любой точке, в том числе и вне вещества, но при этом следует всегда учитывать необходимость должным образом провести калибровку полей f_{mn} вне вещества, так как физические величины не зависят от компонент поля f_{mn}, которые изменяются при калибровочных преобразованиях. Эти компоненты не входят в выражения для тензора энергии — импульса гравитационного поля. Соответствующим калибровочным преобразованием их всегда можно сделать равными нулю. Поэтому при вычислении вне вещества геометрических характеристик пространства—времени как, например, метрического тензора g_{in}, тензора Римана R^i_{nlm} мы должны подставлять в уравнение связи $g_{in} = g_{in}\,(\gamma_{lm}, f_{lm})$ только те компоненты f_{in}, которые входят в тензор энергии — импульса гравитационного поля, все другие компоненты поля будем полагать равными нулю, так как они соответствующим калибровочным преобразованием могут быть обращены в нуль. Таким образом, наша теория будет всегда внутренне самосогласованной.

Пусть все компоненты канонического тензора энергии — импульса свободных гравитационных волн равны нулю:

$$\tilde{t}^{\,n}_{gp} = (1/64\pi)\,\{2\partial_p f_{lm}\partial^n f^{lm} - \partial_p f^l_l \partial^n f^m_m - \\ - \delta^n_p\,[\partial_i f_{lm}\partial^i f^{lm} - (1/2)\,\partial_i f^l_l \partial^i f^m_m]\} = 0. \tag{95}$$

Из равенства нулю следа этого тензора имеем

$$\partial_p f_{lm}\partial^n f^{lm} - (1/2)\,\partial_p f^l_l \partial^n f^m_m = 0.$$

При $n = p = 0$ получим

$$\dot{f}_{lm}\dot{f}^{lm} - (1/2)\,\dot{f}^m_m \dot{f}^l_l = 0. \tag{96}$$

Покажем, что в ТТ-калибровке у свободной гравитационной волны все компоненты тождественно равны нулю в силу условия (96). Тогда в этой калибровке все компоненты метрического тензора риманова пространства — времени совпадают с компонентами метрического тензора плоского пространства — времени $g_{in} = \gamma_{in}$. Поэтому тензор кривизны при равенстве нулю тензора энергии — импульса гравитационного поля также равен нулю.

Рассмотрим некоторую точку. Ориентируем ось x декартовой системы координат так, чтобы она проходила через точку наблюдения. Выделим вокруг этой точки достаточно малую область, так чтобы в указанной области можно было считать гравитационную волну плоской. Тогда все ее компоненты будут зависеть только от разности $t - x$. Условия $\partial_n f^{nm} = 0$ примут вид

$$\dot{f}^{00} = \dot{f}^{01} = \dot{f}^{11}; \quad \dot{f}^{02} = \dot{f}^{12}; \quad \dot{f}^{03} = \dot{f}^{13}.$$

Интегрируя эти уравнения и полагая константы интегрирования равными нулю, так как гравитационные волны не имеют не зависящей от времени части, получаем:

$$f^{00} = f^{01} = f^{11}; \quad f^{02} = f^{12}; \quad f^{03} = f^{13}.$$

В силу ТТ-калибровки все эти компоненты равны нулю. Кроме того, из равенства нулю следа $f_n^n = 0$ имеем: $f^{22} = -f^{33}$. Из условия равенства нулю тензора энергии — импульса (95) получим

$$2\,(\dot{f}_{23})^2 + (1/2)\,(\dot{f}_{22} - \dot{f}_{33})^2 = 0,$$

откуда следуют равенства:

$$\dot{f}_{23} = 0; \quad \dot{f}_{22} = \dot{f}_{33}.$$

Тогда и поперечные компоненты гравитационной волны равны нулю:

$$f_{23} = 0; \; f_{22} = f_{33} = 0.$$

Таким образом, в ТТ-калибровке из условия равенства нулю тензора энергии — импульса свободной гравитационной волны получаем, что все компоненты этой волны нулевые. Поэтому и все компоненты метрического тензора риманова пространства — времени совпадут с соответствующими компонентами метрического тензора псевдоевклидова пространства — времени: $g_{in} = \gamma_{in}$, что приводит к равенству нулю всех компонент тензора Римана:

$$R^i_{nlm} = 0.$$

7. ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

До недавнего времени требования, предъявляемые к возможным теориям гравитации, сводились к необходимости получить закон тяготения Ньютона в пределе слабого поля, а также описать три эффекта, которые были доступны наблюдению: гравитационное красное смещение в поле Солнца, искривление луча света, проходящего возле Солнца, и смещение перигелия Меркурия.

К этим экспериментам тесно примыкали гравиметрические измерения равенства гравитационной M_g и инертной M_i масс, выполненные в прошлом веке Бесселем и Этвешем. В результате указанных измерений было установлено, что для тел лабораторных размеров отношение величины гравитационной массы к инертной массе может отличаться от единицы не более, чем на 10^{-9}, независимо от вещества, из которого состоит тело. Этот результат произвел глубокое впечатление на Эйнштейна и натолкнул его на формулировку принципа эквивалентности.

Однако, хотя приведенный результат и воспринимается как равенство гравитационной и инертной масс с очень большой точностью, это не означает, что и тела больших размеров имеют совпадающие гравитационную и инертную массы с такой же точностью. Для тел лабораторных размеров собственная гравитационная энергия тела, энергия упругих деформаций тела и т. п. являются очень малыми величинами по сравнению с полной энергией тела. По оценкам Нордтведта [31], для тела массы M, имеющего характерный размер a, отношение собственной гравитационной энергии тела к его полной энергии равно

$$(GM^2/a)/Mc^2 = GM/ac^2 \sim G\rho a^2/c^2,$$

где ρ — плотность тела.

Приведенное отношение по порядку величины равно 10^{-25} для тел лабораторных размеров. Поэтому при точности измерений, равной 10^{-9}, ничего нельзя сказать о том, как распределяется собственная гравитационная энергия между инертной и гравитационной массами тела. И даже гравиметрические эксперименты, проведенные с возросшей точностью (10^{-11} — в экспериментах, выполненных группой Дикке [32], 10^{-12} — в экспериментах группы Брагинского [33]), не позволяют ответить на поставленный вопрос.

Поэтому можно утверждать, что следствием гравиметрических измерений является равенство гравитационной и инертной масс точечного тела, т. е. тела, имеющего пренебрежимо малые размеры, а следовательно, и пренебрежимо малые собственную гравитационную энергию, энергию упругих деформаций и т. п.,— не более. Для решения вопроса о равенстве гравитационной и инертной масс протяженного тела необходимо либо существенно увеличивать точность гравиметрических экспериментов с телами лабораторных размеров, либо проводить измерения с телами больших размеров, например, с планетами, у которых отношение собственной гравитационной энергии к полной энергии существенно выше, чем у тел лабораторных размеров. В последнем случае следствием неравенства инертной и гравитационной масс планеты будут малые возмущения ее орбиты. Однако традиционные методы оптической астрономии не позволяли проводить измерения параметров орбит планет с необходимой для этих целей точностью.

Кроме того, не был разработан соответствующий теоретический аппарат для указанных экспериментов. Таким образом, существовавшие требования к возможным теориям гравитации были явно недостаточными, так как очень большое количество теорий удовлетворяли этим требованиям.

Для дальнейшего отбора теорий гравитации была необходима постановка качественно новых экспериментов.

В настоящее время в связи с развитием экспериментальной техники, в первую очередь космонавтики, и повышением точности измерений появились новые возможности по более точному измерению параметров орбит планет (и прежде всего Луны), по измерению запаздывания радиосигналов в гравитационном поле Солнца, по проведению новых экспериментов в пределах Солнечной системы. Эти эксперименты позволяют провести дальнейшее сужение круга жизнеспособных теорий гравитации. Для облегчения сравнения результатов экспериментов, выполненных в пределах Солнечной системы, с предсказаниями различных теорий гравитации, у которых естественной геометрией для движения вещества является риманова геометрия, Нордтведт и Вилл [34] разработали формализм, получивший название параметризованного постньютоновского (ППН).

В этом формализме метрика риманова пространства — времени, создаваемая некоторым телом, состоящим из идеальной жидкости, записывается в виде суммы всевозможных обобщенных гравитационных потенциалов с произвольными коэффициентами, называемыми постньютоновскими параметрами. Используя пересмотренные параметры Вилла — Нордтведта, метрику риманова пространства — времени можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - 2U + 2\beta U^2 - (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \xi_1)\,\Phi_1 + \\
&+ \xi_1 A + 2\xi_\omega \Phi_\omega - 2\,[(3\gamma + 1 - 2\beta + \xi_2)\,\Phi_2 + \\
&+ (1 + \xi_3)\,\Phi_3 + 3\,(\gamma + \xi_4)\,\Phi_4] - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\,W^\alpha W_\alpha U + \\
&+ \alpha_2 W^\alpha W^\beta U_{\alpha\beta} - (2\alpha_3 - \alpha_1)\,W^\alpha U_\alpha; \\
g_{0\alpha} &= (1/2)\,(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1)\,V_\alpha + (1/2)\,(1 + \alpha_2 - \xi_1)\,N_\alpha + \\
&+ (1/2)\,(\alpha_1 - 2\alpha_2)\,W_\alpha U + \alpha_2 W^\beta U_{\alpha\beta}; \\
g_{\alpha\beta} &= (1 + 2\gamma U)\,\gamma_{\alpha\beta},
\end{aligned}\right\} \quad (97)$$

где W^α — пространственные компоненты скорости системы отсчета относительно некоторой универсальной системы покоя. Для некоторых теорий гравитации — это скорость центра масс Солнечной системы относительно системы покоя Вселенной.

Обобщенные гравитационные потенциалы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&U(\mathbf{r},t)=\int\frac{\rho_0(\mathbf{r}',t)}{R}\,dV;\quad R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|;\quad R^\alpha=x^\alpha-x'^\alpha;\\
&\Phi_1=-\int\frac{\rho_0 v_\alpha v^\alpha}{R}\,dV;\quad \Phi_2=\int\frac{\rho_0 U}{R}\,dV;\\
&\Phi_3=\int\frac{\rho_0\Pi(\mathbf{r}',t)}{R}\,dV;\quad \Phi_4=\int\frac{P}{R}\,dV;\\
&A=\int\frac{\rho_0 v_\alpha v_\beta R^\alpha R^\beta}{R^3}\,dV;\quad V_\alpha=-\int\frac{\rho_0 v_\alpha}{R}\,dV;\\
&N_\alpha=\int\frac{\rho_0 v_\beta R^\beta R_\alpha}{R^3}\,dV;\quad U_{\alpha\beta}=\int\frac{\rho_0 R_\alpha R_\beta}{R^3}\,dV;\\
&\Phi_\omega=\int\frac{\rho_0(\mathbf{r}',t)\rho_0(\mathbf{r}'',t)}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3}\left\{\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}\right\}\times\\
&\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}'',
\end{aligned}\right\}\tag{98}$$

где ρ_0 — инвариантная плотность массы тела; v^α — компоненты скорости элементов идеальной жидкости; P — изотропное давление; $\rho_0\Pi$ — плотность внутренней энергии идеальной жидкости.

Иногда постньютоновское разложение метрики (97) записывают, используя параметры Вилла: γ, β, β_1, β_2, β_3, β_4, ξ, Δ_1, Δ_2, ξ_ω. Эти параметры связаны линейной зависимостью с пересмотренными параметрами Вилла — Нордтведта:

$$\alpha_1=7\Delta_1+\Delta_2-4\gamma-4;\quad \alpha_2=\Delta_2+\xi-1;$$
$$\alpha_3=4\beta_1-2\gamma-2-\xi;\quad \xi_1=\xi;$$
$$\xi_2=2\beta+2\beta_2-3\gamma-1;\quad \xi_3=\beta_3-1;$$
$$\xi_4=\beta_4-\gamma.$$

В этой статье мы будем использовать пересмотренные параметры Вилла — Нордтведта.

Каждой теории гравитации, у которой естественной геометрией для описания движения вещества является риманова геометрия, будет соответствовать свой набор значений десяти постньютоновских параметров β, γ, α_1, α_2, α_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_ω; с точки зрения экспериментов, выполненных в Солнечной системе, одна теория гравитации будет отличаться от другой лишь значениями приведенных параметров. При этом, естественно, предполагается, что метрический тензор g_{in} каждой теории гравитации должен быть записан в той же координатной системе, в какой записан метрический тензор (97), иначе какое-либо сравнение постньютоновских параметров теряет смысл, так как различным системам координат соответствуют различные наборы параметров. Поэтому после определения метрического тензора g_{in}, создаваемого гравитационным полем Солнечной системы, необходимо перейти в «каноническую» координатную систему, в которой метрический тензор g_{in} имеет вид (97).

Для выявления теорий гравитации, которые в постньютоновском пределе позволяют описать все эксперименты, выполненные в Солнечной системе, достаточно определить из всех этих экспериментов значения десяти постньютоновских параметров и отбирать лишь те теории гравитации, постньютоновское приближение которых приводит к значениям параметров, совпадающим с полученными из экспериментов. Тогда все такие теории гравитации будут неразличимы с точки зрения любых экспериментов, выполненных с постньютоновской точностью.

Дальнейший отбор теории гравитации, адекватной действительности, связан либо с повышением точности измерения до постньютоновского уровня, либо с поиском возможностей изучать свойства гравитационных волн, а также явления в сильных гравитационных полях.

Определим теперь, какой набор значений постньютоновских параметров соответствует полевой теории гравитации.

Уравнения гравитационного поля этой теории для вычисления постньютоновского приближения запишем в виде

$$\Box^2 f^{nm} = -16\pi J^{nm}; \quad \Box = \partial_i \partial^i. \tag{99}$$

Если использовать обозначения (40), то для тензорного тока J^{mn} получим следующее выражение:

$$J^{nm} = \Box h^{nm} - \partial^n \partial_p h^{pm} - \partial^m \partial_p h^{pn} - \gamma^{nm} \partial_l \partial_p h^{lp}. \tag{100}$$

Метрический тензор риманова пространства — времени g_{in} является локальной функцией, зависящей только от полей f_{in} и метрического тензора плоского пространства — времени. Исходя из требования соответствия в разд. 6 было получено выражение для метрического тензора риманова пространства — времени в линейном приближении по полю f_{nm}:

$$g_{nm} = \gamma_{nm} + f_{nm} - (1/2)\, \gamma_{nm} f_l^l. \tag{101}$$

Можно было бы предположить, что соотношение (101) представляет собой точное уравнение связи и выполняется всегда, а не только в линейном приближении по слабому полю f_{nm}. Но тогда теория с таким уравнением связи будет относиться к классу так называемых «квазилинейных» теорий гравитации (по терминологии Вилла). Однако, как показано в работе [35], любая квазилинейная асимптотически-лоренц-инвариантная теория гравитации противоречит результатам экспериментов. Поэтому соотношение (101) должно представлять собой лишь разложение уравнения связи с точностью до линейных членов по слабому полю f_{nm}.

Таким образом, уравнение связи $g_{nm} = g_{nm}(\gamma_{lm}, f_{lm})$ должно быть нелинейным уравнением относительно поля f_{lm}.

В настоящей работе мы не будем останавливаться на каком-либо конкретном уравнении связи, поскольку для построения постньютоновского приближения полевой теории гравитации и описания всех эффектов нет необходимости делать такой выбор. Для этого достаточно записать разложение обсуждаемого уравнения связи с точностью до квадратичных членов. И даже таких общих предположений об уравнении связи, как мы увидим далее, достаточно, чтобы описать всю совокупность имеющихся гравитационных экспериментов.

В случае слабого поля разложение приведенного уравнения связи с точностью до квадратичных членов можно записать в самом общем виде

$$g_{nm} = \gamma_{nm} + f_{nm} - (1/2)\,\gamma_{nm} f_l^l + (1/4)\,[b_1 f_{nl} f_m^l + b_2 f_{nm} f_l^l + \\ + b_3 \gamma_{nm} f_{il} f^{il} + b_4 \gamma_{nm} f_l^l f_i^i] \qquad (102)$$

с неопределенными пока коэффициентами b_1, b_2, b_3 и b_4.

На языке теории взаимодействующих полей уравнение связи (102) эквивалентно записи плотности лагранжиана взаимодействия гравитационного поля с остальными полями материи лишь в приближении слабого гравитационного поля с точностью до квадратичных членов включительно.

Следуя Фоку [27], для построения постньютоновского приближения, справедливого в Солнечной системе, будем рассматривать задачу астрономического типа. Будем считать, что компоненты тензора энергии — импульса вещества равны нулю во всем пространстве, кроме некоторых областей. Внутри каждой такой области тензор энергии — импульса должен соответствовать принятой нами модели идеальной жидкости и удовлетворять ковариантному уравнению сохранения в римановом пространстве — времени. Кроме физических свойств модели небесных тел, тензор энергии — импульса вещества будет зависеть также и от метрики риманова пространства — времени. Поэтому чтобы записать выражения для компонент тензора энергии — импульса вещества, надо знать метрику. Но для определения метрического тензора надо решить уравнения (99), что возможно, если известен тензор энергии — импульса вещества. Таким образом, построение тензора энергии — импульса вещества и определение метрического тензора риманова пространства — времени необходимо производить совместно.

Воспользуемся тем обстоятельством, что в пределах Солнечной системы максимальные значения гравитационного потенциала, квадрата характерной скорости v^2 (скорости небесных тел относительно центра масс Солнечной системы), удельного давления P/ρ_0 и удельной внутренней энергии Π имеют примерно одинаковый порядок малости $\sim \varepsilon^2$, где $\varepsilon \sim 10^{-3}$ — некоторый безразмерный параметр. Поэтому в Солнечной системе будут справедливы следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned} U = O(\varepsilon^2);\ v^\alpha = O(\varepsilon); \\ \Pi = O(\varepsilon^2);\ P/\rho_0 = O(\varepsilon^2). \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Кроме того, мы будем рассматривать поле в ближней зоне, т.е. на расстояниях от Солнца, значительно меньших длины гравитационной волны, излучаемой объектами в Солнечной системе, движущимися с характерной скоростью $v^\alpha = \varepsilon$: $R/\lambda \sim R\partial/\partial t \sim \varepsilon$. В таком случае изменения всех величин со временем обусловлены в первую очередь движением вещества. Поэтому частные производные по времени малы по сравнению с частными производными по координатам:

$$\partial/\partial t = 0\,(\varepsilon)\,\partial/\partial x^\alpha. \tag{104}$$

Задачу совместного определения тензора энергии — импульса вещества и метрического тензора риманова пространства — времени будем решать последовательными этапами, каждый из которых соответствует разложению точных уравнений задачи по степеням безразмерного параметра ε.

Имеем следующие точные соотношения: плотность тензора энергии — импульса идеальной жидкости

$$T^{nm} = \sqrt{-g}\,[(P + \mathscr{E})\,u^n u^m - P g^{nm}]; \tag{105}$$

ковариантное уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,\rho_0 u^i\right) = 0 \tag{106}$$

и уравнение сохранения плотности тензора энергии — импульса вещества в римановом пространстве — времени

$$\nabla_n T^{nm} = \partial_n T^{nm} + \Gamma^m_{ni} T^{in} = 0, \tag{107}$$

где $\mathscr{E}$ — полная плотность энергии идеальной жидкости; u^i — 4-вектор скорости; Γ^m_{ni} — связности риманова пространства — времени.

Уравнения гравитационного поля (99) и уравнение связи (102) для наших целей удобнее записать в виде:

$$\Box^2 \chi^{nm} = -16\pi A^{nm}; \tag{108}$$

$$\begin{aligned} g_{nm} = \gamma_{nm} + \chi_{nm} + (1/4)\,[b_1 \chi_{nl}\chi^l_m + b_3 \gamma_{nm}\chi^{li}\chi_{li} - (b_1 + b_2)\,\chi_{nm}\chi^l_l + \\ + (b_4 + b_2/2 + b_1/4)\,\gamma_{nm}\chi^l_l\chi^i_i], \end{aligned} \tag{109}$$

где введены обозначения:

$$\chi^{mn}=f^{mn}-(1/2)\,\gamma^{mn}f_l^l; \tag{110}$$
$$A^{nm}=\Box\left(h^{nm}-\frac{1}{2}\gamma^{nm}h_l^l\right)-\partial^n\partial_l h^{lm}-\partial^m\partial_l h^{ln}.$$

Разложим все величины, входящие в уравнения (105)—(108), в ряды по малому параметру ε. Если пренебречь потерей энергии на излучение гравитационных волн, то эти разложения должны быть справедливыми и при обращении знака времени. При обращении знака времени, т. е. при преобразовании координат $x'^0 = -x^0$, компоненты $v^\alpha, \chi^{0\alpha}$, $T^{0\alpha}$, $g_{0\alpha}$, $A^{0\alpha}$, $\partial/\partial x^0$ изменяют знак на противоположный. Так как $v^\alpha\sim\varepsilon$ и $\partial/\partial x^0\sim\varepsilon\partial/\partial x^\alpha$, то при обращении знака времени безразмерный параметр ε также изменяет знак. Отсюда следует, что при условии пренебрежения потерей энергии на излучение гравитационных волн разложения компонент v^α, $\chi^{0\alpha}$, $T^{0\alpha}$, $g_{0\alpha}$, $A^{0\alpha}$ содержат только нечетные степени параметра ε, а разложения остальных компонент — только четные степени параметра ε.

Разложения тензорного тока A^{nm} и поля χ^{nm} запишем в виде:

$$\chi^{mn}=\overset{(1)}{\chi}{}^{mn}+\overset{(2)}{\chi}{}^{mn}+\ldots; \tag{111}$$
$$A^{mn}=\overset{(0)}{A}{}^{mn}+\overset{(1)}{A}{}^{mn}+\overset{(2)}{A}{}^{mn}, \tag{112}$$

где компоненты нулевого $\overset{(0)}{A}{}^{mn}$, первого $\overset{(1)}{A}{}^{mn}$ и второго $\overset{(2)}{A}{}^{mn}$ приближений имеют следующий порядок малости:

$$\overset{(0)}{A}{}^{0\alpha}=O(\varepsilon);\quad \overset{(0)}{A}{}^{00}=O(1);\quad \overset{(0)}{A}{}^{\alpha\beta}=O(1);$$
$$\overset{(1)}{A}{}^{0\alpha}=O(\varepsilon^3);\quad \overset{(1)}{A}{}^{00}=O(\varepsilon^2);\quad \overset{(1)}{A}{}^{\alpha\beta}=O(\varepsilon^2);$$
$$\overset{(2)}{A}{}^{0\alpha}=O(\varepsilon^5);\quad \overset{(2)}{A}{}^{00}=O(\varepsilon^4);\quad \overset{(2)}{A}{}^{\alpha\beta}=O(\varepsilon^4).$$

Уравнения гравитационного поля (108) с учетом разложений (111), (112) и оценки (104) перепишем в виде ряда последовательных приближений:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^2\overset{(1)}{\chi}{}^{mn}=-16\pi\overset{(0)}{A}{}^{mn};\\&\Delta^2\overset{(2)}{\chi}{}^{mn}=-16\pi\overset{(1)}{A}{}^{mn}+2\partial^2\Delta\overset{(1)}{\chi}{}^{mn}/\partial t^2.\end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Из (40) и (102) получим

$$h^{mn}=T^{mn}+(b_1/4)\,[T^{nl}\chi_l^m+T^{ml}\chi_l^n]+$$
$$+(b_3/2)\,\gamma_{lp}\,T^{lp}\chi^{mn}-[(b_1+b_2)/4]\,T^{mn}\chi_p^p-$$
$$-[(b_1+b_2)/4]\,\gamma^{mn}T^{li}\chi_{li}+(b_2/4+b_1/8+b_4/2)\,\gamma^{mn}\gamma_{lp}T^{lp}\chi_i^i. \tag{114}$$

Тогда для тензорного тока A^{nm} имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(0)}{A}{}^{nm} = -\Delta\,[\overset{(0)}{T}{}^{nm} - (1/2)\,\gamma^{nm}\gamma_{il}\overset{(0)}{T}{}^{il}];\\
&\overset{(1)}{A}{}^{mn} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\overset{(0)}{T}{}^{mn} - \frac{1}{2}\,\gamma^{mn}\gamma_{lp}\overset{(0)}{T}{}^{lp}\right] + \partial^n\,(\overset{(1)}{\Gamma}{}^{m}_{lp}\overset{(0)}{T}{}^{lp}) +\\
&+ \partial^m\,(\overset{(1)}{\Gamma}{}^{n}_{lp}\overset{(0)}{T}{}^{lp}) - \Delta\left[\overset{(1)}{T}{}^{mn} - \frac{1}{2}\,\gamma^{mn}\gamma_{lp}\overset{(1)}{T}{}^{lp} + \frac{b_1}{4}\,(\overset{(0)}{T}{}^{nl}\overset{(1)}{\chi}{}^{m}_{l} +\right.\\
&+ \overset{(0)}{T}{}^{ml}\overset{(1)}{\chi}{}^{n}_{l}) - \frac{b_1+b_2}{4}\,\overset{(0)}{T}{}^{mn}\overset{(1)}{\chi}{}^{l}_{l} +\\
&+ \frac{b_2}{4}\,\gamma^{mn}\overset{(0)}{T}{}^{il}\overset{(1)}{\chi}_{il} + \frac{b_3}{2}\,\gamma_{il}\overset{(0)}{T}{}^{il}\overset{(1)}{\chi}{}^{mn} -\\
&\left.- \left(\frac{b_2}{8} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{2}\right)\gamma^{mn}\overset{(0)}{T}{}^{il}\gamma_{il}\overset{(1)}{\chi}{}^{p}_{p}\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (116)$$

где $\Delta = -\,\partial_\alpha\partial^\alpha$.

Для определения постньютоновских параметров нам достаточно найти компоненты $g_{\alpha\beta}$ с точностью до ε^2, компоненты $g_{0\alpha}$ с точностью до ε^3 и компоненту g_{00} с точностью до ε^4.

Из уравнений связи (109) следует, что для этого необходимо определить компоненты поля $\chi^{\alpha\beta}$ с точностью до ε^2, $\chi^{0\alpha}$ с точностью до ε^3, а χ^{00} с точностью до ε^4.

В исходном приближении считаем, что метрический тензор риманова пространства — времени совпадает с метрическим тензором псевдоевклидова пространства — времени, т. е. пренебрегаем силами тяготения. Тогда уравнения (106) и (107) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial\,(\rho u^i)/\partial x^i = O\,(\varepsilon^2);\\
&\partial_n T^{n0} = O\,(\varepsilon^3);\\
&\partial_n T^{n\alpha} = O\,(\varepsilon^2).
\end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

Учитывая оценки (104) из уравнений (117) имеем:

$$u^0 = 1 + O\,(\varepsilon^2); \quad u^\alpha = v^\alpha\,(1 + O\,(\varepsilon^2));$$

$$T^{00} = \rho_0\,(1 + O\,(\varepsilon^2)); \quad T^{\alpha\beta} = \rho_0 O\,(\varepsilon^2);$$

$$T^{0\alpha} = \rho_0 v^\alpha\,(1 + O\,(\varepsilon^2)).$$

Поэтому компоненты тензорного тока A^{mn} в нулевом приближении можно записать в виде:

$$\overset{(0)}{A}{}^{00} = -(1/2)\,\Delta\rho_0; \quad \overset{(0)}{A}{}^{0\alpha} = -\Delta\,(\rho_0 v^\alpha); \quad \overset{(0)}{A}{}^{\alpha\beta} = (1/2)\,\gamma^{\alpha\beta}\,\Delta\rho_0. \qquad (118)$$

Тогда из уравнения (113) получим:

$$\overset{(1)}{\chi}{}^{00} = -2U; \quad \overset{(1)}{\chi}{}^{\alpha\beta} = 2\gamma^{\alpha\beta}U; \quad \overset{(1)}{\chi}{}^{0\alpha} = 4V^\alpha. \qquad (119)$$

В результате компоненты метрического тензора риманова пространства — времени (109) в первом приближении можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= 1-2U+O(\varepsilon^4);\\ g_{0\alpha} &= 4V_\alpha(1+O(\varepsilon^2));\\ g_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}(1+2U)+O(\varepsilon^4). \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

Знание метрики в этом приближении позволяет определить компоненты тензора энергии — импульса вещества в следующем приближении. Используя выражения (120), находим:

$$\begin{gathered} \sqrt{-g}=1+2U+O(\varepsilon^4);\\ u^0=1+U-(1/2)v_\alpha v^\alpha+O(\varepsilon^4);\\ \Gamma^0_{00}=-\partial U/\partial t+O(\varepsilon^5);\\ \Gamma^\alpha_{00}=\gamma^{\alpha\beta}\,\partial U/\partial x^\beta+O(\varepsilon^4);\\ \Gamma^0_{0\alpha}=-\partial U/\partial x^\alpha+O(\varepsilon^4);\\ \Gamma^\alpha_{\beta\tau}=O(\varepsilon^2);\quad \Gamma^\alpha_{0\beta}=O(\varepsilon^3);\quad \Gamma^0_{\alpha\beta}=O(\varepsilon^3). \end{gathered} \qquad (121)$$

Введем также сохраняющуюся плотность массы ρ в соответствии с равенством $\rho=\sqrt{-g}\rho_0u^0$. Для получения метрики в следующем приближении нам необходимо построить плотность тензора энергии — импульса вещества, которая удовлетворяла бы уравнениям сохранения (107):

$$\begin{gathered} \partial_0T^{00}+\Gamma^0_{00}T^{00}+\partial_\alpha T^{0\alpha}+2\Gamma^0_{0\alpha}T^{0\alpha}=O(\varepsilon^5);\\ \partial_0T^{0\alpha}+\partial_\beta T^{\beta\alpha}+\Gamma^\alpha_{00}T^{00}=O(\varepsilon^4) \end{gathered}$$

в силу ковариантного уравнения неразрывности

$$\left(1/\sqrt{-g}\right)[\partial\rho/\partial t+\partial(\rho v^\alpha)/\partial x^\alpha]=0$$

и уравнения движения идеальной жидкости в ньютоновском приближении [27]:

$$\begin{gathered} \rho\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t}+v^\beta\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}\right)=\gamma^{\alpha\beta}\left(-\rho\frac{\partial U}{\partial x^\beta}+\frac{\partial P}{\partial x^\beta}\right);\\ \rho\left(\frac{\partial\Pi}{\partial t}+v^\beta\frac{\partial\Pi}{\partial x^\beta}\right)=-P\partial_\alpha v^\alpha. \end{gathered}$$

Легко убедиться, что указанным условиям удовлетворяют компоненты плотности энергии — импульса вещества:

$$\left.\begin{aligned} T^{00}&=\rho(1-v_\alpha v^\alpha/2+\Pi+U)+\rho O(\varepsilon^4);\\ T^{0\alpha}&=\rho v^\alpha(1-v_\beta v^\beta/2+\Pi+U)+Pv^\alpha+\rho O(\varepsilon^5);\\ T^{\alpha\beta}&=\rho v^\alpha v^\beta-\gamma^{\alpha\beta}P+\rho O(\varepsilon^4). \end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

При этом имеем следующее соотношение между сохраняющейся ρ и инвариантной ρ_0 плотностями массы:

$$\rho = \rho_0 [1 + 3U - (1/2) v_\alpha v^\alpha] + \rho O(\varepsilon^4). \tag{123}$$

Из (122) и (123) получаем

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(0)}{T}{}^{00} = \rho_0; \quad \overset{(0)}{T}{}^{\alpha\beta} = 0; \quad \overset{(0)}{T}{}^{0\alpha} = \rho_0 v^\alpha; \\ &\overset{(1)}{T}{}^{00} = \rho_0 (4U + \Pi - v_\alpha v^\alpha); \\ &\overset{(1)}{T}{}^{\alpha\beta} = \rho_0 v^\alpha v^\beta - \gamma^{\alpha\beta} P. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Для получения постньютоновского приближения нам осталось определить $\overset{(2)}{\chi}{}^{00}$. Уравнение (114) для компоненты $\overset{(2)}{\chi}{}^{00}$ с учетом (116), (119), (121), (124) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta^2 \overset{(2)}{\chi}{}^{00} = 8\pi \partial^2 \rho_0 / \partial t^2 + 16\pi\Delta \{(3/2) P + \\ + \rho_0 [\Pi/2 - v_\alpha v^\alpha - 2 (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) U]\}. \end{aligned}$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{\chi}{}^{00} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho_0 R\, dV - 4\Phi_1 - 2\Phi_3 - \\ - 6\Phi_4 + 8 (b_1 + b_2 + b_3 + b_5) \Phi_2. \end{aligned} \tag{125}$$

Используя (109), (119) и (125), метрику риманова пространства — времени в постньютоновском приближении запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} &g_{00} = 1 - 2U + 2BU^2 - 4\Phi_1 + 4 (B - 2) \Phi_2 - \\ &\quad - 2\Phi_3 - 6\Phi_4 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho_0 R\, dV + O(\varepsilon^6); \\ &g_{0\alpha} = 4V_\alpha + O(\varepsilon^5); \\ &g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} (1 + 2U) + O(\varepsilon^4), \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

где введено обозначение

$$B = 2 (b_1 + b_2 + b_3 + b_4).$$

Для определения значений постньютоновских параметров нашей теории необходимо перейти в ту координатную систему, в которой записано постньютоновское разложение метрики (97). Если произвести координатное преобразование

$$x'^n = x^n + \xi^n (x) \tag{127}$$

и считать, что

$$\xi^\alpha (x) = O(\xi^2); \quad \xi^0 (x) = O(\varepsilon^3),$$

то метрика (126) в новой координатной системе будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} g'_{00} &= g_{00} - 2\partial_0\xi_0 + O(\varepsilon^6); \\ g'_{0\alpha} &= g_{0\alpha} - \partial_0\xi_\alpha - \partial_\alpha\xi_0 + O(\varepsilon^5); \\ g'_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\alpha + O(\varepsilon^4). \end{aligned}\right\} \quad (128)$$

В качестве «канонической» координатной системы обычно выбирают систему координат, в которой недиагональные компоненты пространственной части метрического тензора g_{in} равны нулю

$$g'_{12} = g'_{23} = g'_{13} = 0$$

и, кроме того, компонента g_{00} не содержит членов вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho_0 R\, dV.$$

Эти требования позволяют однозначно определить 4-вектор с требуемой точностью. В нашем случае для перехода к «канонической» координатной системе необходимо выбрать следующий 4-вектор ξ^n:

$$\xi^\alpha(x) = 0; \quad \xi^0(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho_0 R\, dV.$$

Используя уравнения непрерывности (106), получаем

$$\partial_\alpha\xi_0 = (V_\alpha - N_\alpha)/2.$$

Таким образом, окончательно имеем следующее выражение для метрического тензора эффективного риманова пространства — времени:

$$\left.\begin{aligned} g'_{00} &= 1 - 2U + 2BU^2 - 4\Phi_1 + 4(B-2)\Phi_2 - \\ &\quad - 2\Phi_3 - 6\Phi_4 + O(\varepsilon^6); \\ g_{0\alpha} &= (7/2)V_\alpha + (1/2)N_\alpha + O(\varepsilon^5); \\ g_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}(1 + 2U) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}\right\} \quad (129)$$

Таким образом, постньютоновское приближение полевой теории гравитации приводит к метрике риманова пространства — времени (129), которая содержит только одну произвольную константу B.

Для случая, когда источником гравитационного поля является статическое сферически-симметричное тело радиуса a, эта метрика принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} g_{0\alpha} &= 0; \\ g_{00} &= 1 - 2M/r + 2BM^2/r^2 + O(M^3/r^3); \\ g_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}(1 + 2M/r) + O(M^2/r^2), \end{aligned}\right\} \quad (130)$$

где полная масса источника поля

$$M = 4\pi \int_0^a \rho_0 \left[1 + \Pi + 3\frac{p}{\rho_0} + 2(2-B)U \right] r^2 dr. \qquad (131)$$

Из (129) и (97) следует, что в полевой теории гравитации постньютоновские параметры имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = 1; \ \beta = B = 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4); \\ &\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0; \\ &\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_\omega = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (132)$$

Для сравнения укажем, что в общей теории относительности постньютоновские параметры имеют значения [34]:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = 1; \ \beta = B = 1; \\ &\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0; \\ &\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_\omega = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (133)$$

Таким образом, при $B = 1$ постньютоновские параметры полевой теории гравитации и общей теории относительности Эйнштейна полностью совпадут и, следовательно, эти две теории будут неразличимы с точки зрения *любых* экспериментов, выполненных в гравитационном поле Солнечной системы (с постньютоновской точностью измерений).

Как показано в [36], равенство нулю трех параметров α имеет определенный физический смысл; всякая теория гравитации, в которой $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, не обладает предпочтительной универсальной системой покоя в постньютоновском пределе. В этом случае при переходе от универсальной системы покоя к движущейся системе метрика риманова пространства — времени в постньютоновском пределе является форминвариантной и скорость W^α новой системы координат относительно универсальной системы покоя в явном виде не будет входить в метрику.

Из (132) следует, что в полевой теории гравитации отсутствует универсальная предпочтительная система покоя.

Определенный физический смысл имеет и линейная зависимость параметров ξ и α. Как показано в [37], при выполнении соотношений

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = 0; \ \xi_3 = 0; \\ &\alpha_2 - \xi_1 - 2\xi_\omega = 0; \ \xi_2 = \xi_\omega; \\ &\alpha_3 + \xi_1 + 2\xi_\omega = 0; \\ &3\xi_4 + 2\xi_\omega = 0; \ \xi_1 + 2\xi_\omega = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

из постньютоновских уравнений движения можно определить величины, которые в постньютоновском приближении не зависят от времени.

Однако интерпретировать эти величины как энергию — импульс и момент импульса системы (т. е. как интегралы движения) можно лишь в тех теориях гравитации, которые обладают законами сохранения тензора энергии — импульса вещества и гравитационного поля.

Так, например, в теории Эйнштейна соотношения (134) выполняются, но не зависящие от времени в постньютоновском приближении величины, как показывает детальный анализ, не являются интегралами движения системы, состоящей из вещества и гравитационного поля.

В полевой теории гравитации изолированная система имеет в псевдоевклидовом пространстве — времени все десять законов сохранения в их обычном смысле, которые в постньютоновском приближении приводят к десяти интегралам движения системы, поэтому в постньютоновском приближении полевая теория гравитации имеет не зависящие от времени величины. Выполнение соотношений (134) в полевой теории гравитации подтверждает этот вывод.

8. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим, какие ограничения на значения постньютоновских параметров накладывают эксперименты, и определим, при каком значении параметра B результаты экспериментов согласуются с предсказаниями полевой теории гравитации.

Анализ указанных экспериментов будем проводить в следующем порядке: сначала рассмотрим стандартные эффекты — отклонение света и радиоволн в поле Солнца, смещение перигелия Меркурия и измерение временной задержки радиосигналов в гравитационном поле Солнца. К перечисленным эффектам тесно примыкает планируемый эксперимент по измерению прецессии гироскопа на орбите.

После этого рассмотрим эффект Нордтведта, измерение отношения активной и пассивной масс, а также эффекты, связанные с неравенством нулю параметров α_1, α_2, α_3, ξ_ω .

Эффект красного смещения в гравитационном поле Солнца рассматривать не будем, так как этот эффект полностью описывается в ньютоновском приближении [38].

При расчетах стандартных эффектов в гравитационном поле Солнца в качестве идеализированной модели Солнца обычно рассматривается статический сферически-симметричный шар радиуса

R. Метрика для этого случая записывается в виде ($r > R$):

$$\left.\begin{aligned} &g_{0\alpha}=0;\\ &g_{00}=1-2M/r+2\beta M^2/r^2;\\ &g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}(1+2\gamma M/r), \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

где полная масса Солнца

$$M=4\pi\int_0^R \rho_0\left[1+(3\gamma+1-2\beta)U+\Pi+3\gamma\frac{P}{\rho_0}\right]r^2\,dr. \tag{136}$$

Из сравнения (130) и (135) следует, что в полевой теории гравитации параметры γ и β имеют значения:

$$\gamma=1;\ \beta=B=2\,(b_1+b_2+b_3+b\,).$$

1. Отклонение света и радиоволн в гравитационном поле Солнца. Согласно работе [39], лучи света и радиоволны, рассматриваемые как безмассовые частицы, имеющие прицельный параметр b, отклоняются в гравитационном поле Солнца на угол

$$\delta\varphi=2\,(1+\gamma)M/b.$$

Анализ экспериментальных результатов, полученных при наблюдении искривления в гравитационном поле Солнца лучей света далеких звезд, а также радиоволн, излучаемых квазарами, дает основание считать [40], что постньютоновский параметр

$$\gamma=1\pm0{,}2.$$

2. Временная задержка радиосигналов в поле Солнца. Другим независимым способом определения постньютоновского параметра γ является измерение временной задержки радиосигналов в поле Солнца [41].

Этот эффект состоит в том, что время распространения радиосигналов, посылаемых с Земли, до отражателя, расположенного в другой части Солнечной системы, и обратно, измеренное часами, находящимися на Земле, отличается от времени этого же процесса, происходящего в отсутствие гравитационного поля.

Если начало системы координат совмещено с Солнцем, Земля имеет координаты (x_1, y), а отражатель — (x_2, y), то промежуток собственного времени, затрачиваемый на путь к отражателю и обратно, измеренный по часам, находящимся на Земле, равен

$$T=2\,(x_1+x_2)\left(1-M/\sqrt{x_1^2+y^2}\right)+$$
$$+2\,(1+\gamma)\,M\ln\left[\left(x_1+\sqrt{x_1^2+y^2}\right)\left(x_2+\sqrt{x_2^2+y^2}\right)/y^2\right].$$

При проведении экспериментов по измерению времени задержки радиосигналов в гравитационном поле Солнца в качестве отражателей использовались поверхности планет, а также радиоаппаратура, установленная на спутниках.

В результате указанных экспериментов [42] получено значение $\gamma = 1 \pm 0{,}005$. В полевой теории гравитации, так же как и в ОТО Эйнштейна, $\gamma = 1$, что находится в хорошем согласии с результатами этих экспериментов.

3. Прецессия гироскопа, движущегося по орбите. Если параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ равны нулю, то измерение прецессии гироскопа, движущегося по орбите вокруг Земли, будет третьим независимым способом измерения параметра γ.

Согласно работе [43], угловая скорость прецессии гироскопа, находящегося на круговой орбите в поле Земли, равна

$$\Omega = \frac{2\gamma+1}{2} m \frac{[\mathbf{rv}]}{r^3} + \frac{\gamma+1}{2r^3}\left(-\mathbf{J} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{Jr})}{r^2}\right),$$

где m — масса Земли; $\mathbf{v}$ — линейная скорость гироскопа относительно центра Земли; $\mathbf{J}$ — момент импульса Земли; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой находится гироскоп.

Уровень современного развития техники [44] позволяет надеяться, что этот эксперимент будет осуществлен в ближайшем будущем.

4. Смещение перигелия Меркурия. На смещение перигелия Меркурия, кроме наличия постньютоновских поправок в уравнении движения, влияет еще ряд факторов. К их числу относятся: притяжение со стороны планет Солнечной системы, наличие квадрупольного момента у Солнца и другие. Единственным неопределенным фактором среди них является значение квадрупольного момента Солнца; влияние всех других факторов можно рассчитать с достаточной точностью.

Суммарное смещение перигелия Меркурия, вызываемое наличием квадрупольного момента J_2 у Солнца и постньютоновскими поправками в уравнении движения, равно [42]

$$\delta\varphi = 42{,}98[(2 + 2\gamma - \beta)/3] + 1{,}3\cdot 10^5 J_2$$

(в единицах угловых секунд за столетие).

Из результатов наблюдений следует [40], что $\delta\varphi = 41{,}4 \pm \pm 0{,}9$ угловых секунд за столетие. Измерения видимой формы Солнца, проделанные Дикке и Гольденбергом [45], для величины J_2 дали значение $J_2 = (2{,}5 \pm 0{,}2)\cdot 10^{-5}$, а более поздние измерения Хилла с сотрудниками [42] показали, что $J_2 < 0{,}5\cdot 10^{-5}$. Сравнение наблюдаемых смещений перигелиев Меркурия и Марса [46] дали оценку величины $J_2 : J_2 < 3\cdot 10^{-5}$.

Таким образом, из-за отсутствия прямых измерений квадрупольного момента Солнца остается большая неопределенность в значении β, определяемом по смещению перигелия Меркурия:

$$\beta = 1^{+0{,}4}_{-0{,}2}.$$

Отметим, что в ОТО Эйнштейна параметр β имеет значение $\beta = 1$ в то время, как в полевой теории гравитации $\beta = B$.

5. Эффект Нордтведта и лазерная локация Луны. В любой теории гравитации, как отмечал еще Бонди [47], мы можем различить три вида массы согласно измерениям, по которым они определяются: инертную массу m_i, пассивную гравитационную массу m_p и активную гравитационную массу m_a.

Инертная масса — это масса, которая входит (и определяется им) во второй закон Ньютона:

$$m_1 a^\alpha = F^\alpha.$$

Пассивная гравитационная масса — это масса, на которую действует гравитационное поле, т. е. масса, определяемая выражением:

$$F^\alpha = -m_p \nabla^\alpha V.$$

Активная гравитационная масса — это масса, которая является источником гравитационного поля.

В ньютоновской механике третий закон Ньютона требует равенства активной и пассивной масс $m_a = m_p$ независимо от размеров и состава тела; равенство инертной массы с двумя остальными принимается как эмпирический факт.

В теории Эйнштейна для точечных тел имеет место равенство инертной и пассивной гравитационных масс. При этом равенство активной и пассивной гравитационных масс не постулируется.

В некоторых теориях гравитации все три массы одного и того же тела могут различаться. Поэтому возникает необходимость установить с помощью эксперимента соответствие между этими тремя массами.

Как уже указывалось в разд. 7, первые попытки измерения отношения пассивной гравитационной массы к инертной массе для тел лабораторных размеров [32—33] дали лишь частичный ответ на поставленный вопрос, так как точность экспериментов была заведомо недостаточной, чтобы определить, в каком отношении входят собственная гравитационная энергия тела, энергия упругих деформаций и т. п. в эти массы.

Так как отношение собственной гравитационной энергии тела к его массе возрастает с ростом размеров тела, целесообразнее для указанных целей использовать протяженные тела. Исходя из параметризованного постньютоновского разложения метрики (97) Нордтведт и Вилл [48, 49] на примере Земли и Солнца показали, что движение протяженного тела (Земли) в гравитационном поле массивного точечного тела (Солнца) для широкого класса теорий не будет происходить по геодезическим, т. е. во внешнем поле различные протяженные тела будут двигаться с различным ускорением. Этот эффект получил название эффекта

Нордтведта. Наличие такого эффекта в теории гравитации означает, что пассивная гравитационная масса тела отличается от ее инертной массы. Уравнение движения протяженного тела во внешнем гравитационном поле в этом случае будет иметь вид

$$ma^{\alpha} = m_{\mathrm{p}}^{\alpha\beta}\, \partial U/\partial x^{\beta},$$

где m — инертная масса тела; a^{α} — компоненты ускорения его центра масс; U — внешний гравитационный потенциал; $m_{\mathrm{p}}^{\alpha\beta}$ — тензор пассивной гравитационной массы.

Используя постньютоновское разложение метрики (97), из уравнения сохранения (8.11) можно получить следующее выражение для тензора пассивной гравитационной массы Земли:

$$m_{\mathrm{p}}^{\alpha\beta} = -m\,\{\gamma^{\alpha\beta}\,[1-(\alpha_1-\alpha_2+\gamma+3+\xi_1-4\beta)\,\Omega/m]+ + (\xi_2+\alpha_2-\xi_1)\,\Omega^{\alpha\beta}/m\},$$

где

$$\Omega = -\Omega_{\alpha}^{\alpha};$$

$$\Omega^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\int \frac{\rho(x)\,\rho(x')\,(x^{\alpha}-x'^{\alpha})\,(x^{\beta}-x'^{\beta})}{|x-x'|^{3}}\,dx\,dx'.$$

В общей теории относительности Эйнштейна

$$m_{\mathrm{p}}^{\alpha\beta} = -m\gamma^{\alpha\beta},$$

в полевой теории гравитации

$$m_{\mathrm{p}}^{\alpha\beta} = -m\gamma^{\alpha\beta}\,[1-4\,(1-B)\,\Omega/m].$$

Таким образом, в полевой теории гравитации при $B = 1$, так же как и в теории Эйнштейна, пассивная гравитационная масса Земли равна ее инертной массе. Отличие гравитационной массы от инертной могло бы привести к ряду наблюдаемых эффектов. Одним из таких эффектов является поляризация орбиты Луны в направлении Солнца. Эта поляризация приводит к эксцентриситету орбиты, вытянутой в направлении Солнца с амплитудой:

$$\delta r = c_0\eta\cos\theta_0,$$

где c_0 — константа порядка 10 м; θ_0 — разность между долготой Луны и Солнца;

$$\eta = 4\beta - \gamma - 3 - \alpha_1 + (2/3)\alpha_2 - (2/3)\xi_1 - (1/3)\xi_2 - (10/3)\xi_{\omega}.$$

Измерения, выполненные с использованием лазерной локации Луны [50—51], показали, что

$$c_0\eta = 0 \pm 4\ \text{см}.$$

Отсюда можно получить оценку значения η:

$$\eta = 0 \pm 0{,}03.$$

В теории Эйнштейна $\eta = 0$; в полевой теории гравитации $\eta = 4\,(B-1)$.

Так как на величину B в полевой теории гравитации не накладывается никаких ограничений, то естественно определить ее значение из экспериментов. Используя результаты эксперимента по лазерной локации Луны, получаем

$$|B-1| \leqslant 0{,}008.$$

Отсюда заключаем, что значение $B=1$ в пределах погрешности измерения позволяет описать эксперименты по лазерной локации Луны.

6. Измерение отношения активной и пассивной гравитационных масс. Для активной гравитационной массы в постньютоновском приближении Нордтведт [52] получил следующее выражение:

$$m_a = m + 2\,(\alpha_3/2 + \xi_1/2 - \xi_4)\,E_k + \\ + \xi_3 E_{\text{int}} + (4\beta - 2\xi_2 - 3 - \gamma)\,\Omega - \xi_1 E^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta, \qquad (137)$$

где e_α — единичный вектор, соединяющий массивное тело с точкой, в которой измеряется его поле;

$$E_\text{к} = -\frac{1}{2}\int \rho v_\alpha v^\alpha\, d^3x; \quad E_{\text{int}} = \int \rho \Pi\, d^3x;$$

m — полная масса тела,

$$m = \int \rho \left(1 - \frac{1}{2} v_\alpha v^\alpha + \Pi - \frac{1}{2} U\right) d^3x;$$

$$E^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\int \rho v^\alpha v^\beta\, d^3x.$$

В полевой теории гравитации (137) для активной гравитационной массы принимает вид

$$m_a = m\,[1 - 4\,(1-B)\,\Omega/m].$$

В общей теории относительности из (137) имеем

$$m_a = m.$$

Одним из немногих экспериментов по измерению активной гравитационной массы является эксперимент Крейцера [53]. Этот эксперимент состоял в следующем. В бак, содержащий специально подобранную жидкость, погружался тефлоновый цилиндр, который мог совершать движения от одного конца бака к другому. Жидкость была подобрана так, чтобы цилиндр, полностью погруженный в нее, имел нулевую плавучесть. В таком случае плотности пассивных гравитационных масс жидкости и цилиндра будут равны, так как силы Архимеда, обусловленные гравитационным притяжением Земли, пропорциональны разности плотностей пассивных гравитационных масс. Если бы плотности активных гравитационных масс жидкости и цилиндра были бы различны при этом, то периодическое движение цилиндра от одного конца бака к другому вызывало бы изменения гравитационного поля. Для измерения этих изменений гравитационного поля в эксперименте использовался крутильный маятник.

Анализ результатов описанного эксперимента дал следующие оценки для значений параметров [54]:

$$|\alpha_3/2 + \xi_1/3 - \xi_4| < 0{,}4; \quad |\xi_3| < 0{,}5.$$

7. Эффекты, связанные с наличием предпочтительной системы отсчета. Теории гравитации, у которых хотя бы один из параметров α_1, α_2, α_3 отличается от нуля, обладают предпочтительной системой отсчета. Предсказания таких теорий гравитации относительно стандартных эффектов могут совпадать с результатами наблюдения только в том случае, если Солнечная система является предпочтительной системой отсчета. Однако разумнее предполагать, что Солнечная система, двигающаяся относительно других звездных систем, ничем не выделена по сравнению с ними, а поэтому не может быть предпочтительной универсальной системой покоя для таких теорий.

Так как предпочтительная система покоя должна быть выделенной чем-то по сравнению с другими системами, то разумнее связывать систему покоя с центром масс Галактики или даже Вселенной. В этом случае Солнечная система будет находиться в движении относительно предпочтительной системы покоя со скоростью $\sim 10^{-3}$ с — того же порядка величины, что и орбитальная скорость Солнечной системы относительно центра Галактики. При этом возможно наблюдение ряда эффектов, связанных с движением относительно предпочтительной системы покоя [55], что позволяет оценить параметры α_1, α_2, α_3.

В теориях гравитации с предпочтительной системой покоя постоянная тяготения G, измеряемая в гравиметрических экспериментах, будет зависеть от движения Земли относительно такой системы.

Для относительной величины $\Delta G/G$ имеем:

$$\Delta G/G \approx (\alpha_2/2+\alpha_3-\alpha_1)(\mathbf{W}\mathbf{v})+(\alpha_2/4)[(\mathbf{v}\mathbf{e}_r)^2+2(\mathbf{W}\mathbf{e}_r)(\mathbf{v}\mathbf{e}_r)+(\mathbf{W}\mathbf{e}_r)^2],$$

где $\mathbf{v}$ — орбитальная скорость Земли вокруг Солнца; $\mathbf{W}$ — скорость Солнца относительно предпочтительной системы покоя; $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный от гравиметра к центру Земли.

Вследствие вращения Земли вокруг своей оси вектор $\mathbf{e}_r$ изменяет свою ориентацию относительно векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{W}$, что приводит к периодическому изменению скалярных произведений $(\mathbf{v}\mathbf{e}_r)$

и ($\mathbf{W}\mathbf{e}_r$) с периодом, примерно равным 12 ч. Это приводит к соответствующим периодическим изменениям значения ускорения свободного падения: для точки наблюдения, находящейся на широте θ, имеем

$$\Delta g/g \approx 3\alpha_2 \cdot 10^{-8} \cos^2\theta.$$

Вилл [56], анализируя результаты гравиметрических экспериментов, нашел, что относительные изменения g не превышают $10^{-9}|$: $|\Delta g/g| < 10^{-9}$. Отсюда получаем оценку α_2: $|\alpha_2| < 3\cdot 10^{-2}$

Движение Земли вокруг Солнца также приводит к периодическому изменению величины ($\mathbf{W}\mathbf{v}$) с периодом порядка года. Эта вариация вызывает сжатие и расширение Земли, что в свою очередь приводит к периодическим изменениям угловой скорости вращения Земли из-за изменения ее момента инерции:

$$\Delta\omega/\omega \approx 3\cdot 10^{-9}\,[\alpha_3 + (2/3)\alpha_2 - \alpha_1].$$

Из результатов наблюдений следует

$$\alpha_3 + (2/3)\alpha_2 - \alpha_1 \,| < 0{,}2.$$

Движение Солнечной системы относительно центра Вселенной может приводить к аномальному смещению перигелиев планет $\delta\varphi_0$.

Для Меркурия [55] дополнительный вклад в смещение перигелия (в угловых секундах за столетие) имеет вид

$$\delta\varphi_0 = 35\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\cdot 10^4\alpha_3.$$

Сравнение с наблюдениями и объединение всех этих оценок параметров α дает

$$|\alpha_1| < 0{,}2; \quad |\alpha_2| < 3\cdot 10^{-2}; \quad |\alpha_3| < 2\cdot 10^{-5}.$$

В полевой теории гравитации, так же как и в ОТО Эйнштейна, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и поэтому все перечисленные эффекты отсутствуют.

8. Эффекты анизотропии относительно центра Галактики. В тех теориях гравитации, у которых параметр ξ_ω не равен нулю, возможны эффекты анизотропии, вызываемые влиянием гравитационного поля Галактики [35].

Если считать, что масса Галактики M сосредоточена в центре Галактики на расстоянии R от Солнечной системы, то гравитационное поле Галактики приведет к периодическим изменениям показаний гравиметра с периодом 12 ч:

$$\Delta G/G = \xi_\omega\,(1 - 3K/mr^2)\,(M/R)\,(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R),$$

где K — момент инерции; m — масса и r — радиус Земли; $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный от гравиметра к центру Земли, $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$.

Другим эффектом является аномальное смещение перигелиев планет, обусловленное анизотропией, вызываемой галактикой:

$$\delta\varphi_0 = (\pi\xi_\omega/2)(M/R)\cos^2\beta\cos^2(\omega - \lambda),$$

где λ и β — угловые координаты центра Галактики, ω — угол перигелия планеты в геоцентрических координатах.

Сравнение с наблюдениями дает в качестве верхнего предела для величины ξ_ω : $|\xi_\omega| < 10^{-2}$. В полевой теории гравитации, так же как и в ОТО Эйнштейна, $\xi_\omega = 0$, и все эффекты анизотропии, вызываемые гравитационным полем Галактики, отсутствуют.

Заканчивая обзор гравитационных экспериментов, приходим к выводу, что полевая теория гравитации при $B = 1$ позволяет описать всю совокупность экспериментальных фактов.

Следует отметить, что в постньютоновском пределе квадратичные члены в уравнении связи (102) неразличимы: никакой эксперимент в гравитационном поле Солнечной системы на постньютоновском уровне не позволяет определить коэффициенты b_1, b_2, b_3 и b_4 отдельно.

Как будет показано в разд. 12, измерение параметра замедления расширяющейся однородной Вселенной в окрестности настоящего момента времени позволит определить значение другой линейной комбинации этих коэффициентов: $b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 9b_4$. Определить коэффициенты b_1, b_2, b_3 и b_4, используя эксперименты в гравитационном поле Солнечной системы, можно будет лишь после увеличения точности измерений до постпостньютоновского уровня.

В заключение настоящего раздела отметим, что в полевой теории гравитации принцип эквивалентности справедлив лишь для точечных тел. Для протяженных тел, движущихся в слабом гравитационном поле, он выполняется приближенно, с той точностью, с какой гравитационное поле можно считать однородным в области, занимаемой телом. В этом случае мы можем «устранить» гравитационное поле, переходя к системе координат, в которой $g_{in} = \gamma_{in}$ в области, занимаемой веществом. Как следует из экспериментов Брагинского [33] с телами лабораторных размеров в достаточно однородном гравитационном поле, для сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий, принцип эквивалентности справедлив с точностью, какая достигнута в указанных опытах. Но для протяженных тел с учетом гравитационного поля этот принцип строго не справедлив ни в ОТО Эйнштейна, ни в полевой теории гравитации, хотя в постньютоновском приближении и выполняется.

9. СТАТИЧЕСКОЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

В случае статического источника радиуса a со сферически-симметричным распределением вещества уравнения гравитационного поля (56) и выражение для тензорного тока (51) существенно упрощаются.

Исходя из симметрии задачи, определим, какие компоненты тензоров I_{lm} и h^{lm} будут в этом случае отличными от нуля.

Поместим начало сферической системы координат в центр источника. При поворотах этой системы координат на произвольный угол физическая ситуация в силу сферической симметрии распределения вещества не должна меняться. Поэтому компоненты тензоров I_{lm} и h_{lm} должны после преобразования поворота быть теми же функциями от преобразованного аргумента, что и первоначальные функции от их первоначальных аргументов, т. е. эти тензоры должны быть форминвариантными при преобразовании поворота системы координат. Отсюда следует, что в сферической системе координат отличными от нуля компонентами тензоров I_{lm} и h_{lm} могут быть только компоненты:

$$I_{lm}=\{I_{00};\ I_{0r};\ I_{rr};\ I_{\theta\theta};\ I_{\varphi\varphi}=I_{\theta\theta}\sin^2\theta\};$$

$$h_{lm}=\{h_{00};\ h_{0r};\ h_{rr};\ h_{\theta\theta};\ h_{\varphi\varphi}=h_{\theta\theta}\sin^2\theta\},$$

так как только в этом случае тензоры I_{lm} и h_{lm} форминвариантны при преобразовании поворота.

Из выражений (51) и (40) следует

$$I_{0r}=0.$$

Поэтому для случая статического сферически-симметричного распределения вещества тензор I_{lm} имеет компоненты

$$I_{lm}=\{I_{00};\ I_{rr};\ I_{\theta\theta};\ I_{\varphi\varphi}=I_{\theta\theta}\sin^2\theta\}.$$

Уравнения гравитационного поля (56) при этом записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&f''_{00}+(2/r)\,f'_{00}=16\pi I_{00}\,(r);\\
&f''_{rr}+(2/r)\,f'_{rr}-(4/r^2)\,f_{rr}+(4/r^2)\,(f_{\theta\theta}/r^2)=16\pi I_{rr}\,(r);\\
&(f_{\theta\theta}/r^2)''+(2/r)\,(f_{\theta\theta}/r^2)'-(2/r^2)\,(f_{\theta\theta}/r^2)+\\
&+(2/r^2)\,f_{rr}=16\pi I_{\theta\theta}\,(r)/r^2.
\end{aligned}\right\}\qquad(138)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по r.

В качестве граничных условий для этих уравнений мы потребуем ограниченности функций f_{00}, f_{rr} и $(1/r^2)f_{\theta\theta}$ при $r=0$ и обращения в нуль при $r\to\infty$.

Тогда решение уравнений гравитационного поля (10.1) будет единственным

$$\left.\begin{aligned} f_{00} &= -16\pi\left\{\frac{1}{r}\int\limits_0^r r_0^2 I_{00}\,dr_0 + \int\limits_r^a r_0 I_{00}\,dr_0\right\};\\ f_{rr} &= -(16\pi/3)\,[A+(2/5)\,B];\\ f_{\theta\theta}/r^2 &= -(16\pi/3)\,[A-(1/5)\,B], \end{aligned}\right\} \quad (139)$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{r}\int\limits_0^r r_0^2\,dr_0\left(I_{rr}+\frac{2}{r_0^2}I_{\theta\theta}\right)+\int\limits_r^a r_0\,dr_0\left(I_{rr}+\frac{2}{r_0^2}I_{\theta\theta}\right);\\ B &= \frac{1}{r^3}\int\limits_0^r r_0^4\,dr_0\left(I_{rr}-\frac{I_{\theta\theta}}{r_0^2}\right)+r^2\int\limits_r^a \frac{dr_0}{r_0}\left(I_{rr}-\frac{I_{\theta\theta}}{r_0^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (140)$$

Однако входящие в (140) компоненты тензорного тока не являются независимыми в силу условий $D^n I_{nm} = 0$. В нашем случае эти условия принимают вид

$$I'_{rr}+\frac{2}{r}\left(I_{rr}-\frac{1}{r^2}I_{\theta\theta}\right)=0. \quad (141)$$

Выразим из уравнения (141) компоненту $I_{\theta\theta}$ и подставим в (140). Интегрируя полученные выражения по частям и учитывая, что вне источника $I_{rr} = 0$, компоненты гравитационного поля запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} f_{00} &= -16\pi\left\{\frac{1}{r}\int\limits_0^r r_0^2\,dr_0\,I_{00}+\int\limits_r^a r_0\,dr_0\,I_{00}\right\};\\ f_{rr} &= -\frac{16\pi}{3}\left\{\frac{1}{r^3}\int\limits_0^r r_0^4\,dr_0\,I_{rr}+\int\limits_r^a r_0\,dr_0\,I_{rr}\right\};\\ \frac{f_{\theta\theta}}{r^2} &= -\frac{16\pi}{3}\left\{-\frac{1}{2r^3}\int\limits_0^r r_0^4\,dr_0\,I_{rr}+\int\limits_r^a r_0\,dr_0\,I_{rr}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (142)$$

Рассмотрим внешнее ($r > a$) решение. Вводя величины

$$M=4\pi\int\limits_0^a r_0^2\,dr_0 I_{00};\quad \mu=\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^a r_0^4\,dr_0 I_{rr}, \quad (143)$$

получаем для внешнего решения следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &f_{00}=-4M/r;\quad f_{rr}=-4\mu/r^3;\\ &(1/r^2)\,f_{\theta\theta}=2\mu/r^3;\quad f_{\varphi\varphi}=f_{\theta\theta}\sin^2\theta. \end{aligned}\right\} \quad (144)$$

Как уже отмечалось в разд. 4, поля f_{lm} можно подвергнуть калибровочному преобразованию:

$$f_{lm} = \bar{f}_{lm} + D_l a_m + D_m a_l - \gamma_{lm} D_n a^n \tag{145}$$

с калибровочным вектором a_n, удовлетворяющим уравнению $D_m D^m a_n = 0$. При этом преобразовании плотность лагранжиана гравитационного поля изменяется лишь на четырехмерную дивергенцию, которая является несущественной для теории, а изменение метрического тензора риманова пространства — времени g_{ik}, возникающее при преобразовании (145), соответствует преобразованиям координат риманова пространства — времени и всегда может быть устранено подходящим выбором координат.

Воспользуемся калибровочным преобразованием (145) для того, чтобы упростить внешнее решение (144). В силу симметрии задачи калибровочный вектор a_n, удовлетворяющий условию $D_m D^m a_n = 0$, выбираем в виде: $a_r = -\mu/r^2$; $a_0 = a_\theta = a_\varphi = 0$. Тогда в результате этого калибровочного преобразования получим для внешнего решения:

$$f_{00} = -4M/r; \quad f_{rr} = f_{\theta\theta} = f_{\varphi\varphi} = 0. \tag{146}$$

Для получения метрического тензора в случае статического сферически-симметричного источника осталось подставить компоненты гравитационного поля f_{lm} в уравнение связи $g_{ni} = g_{ni}(\gamma_{lm}, f_{lm})$. Однако в полевой теории гравитации уравнение связи известно лишь в приближении слабого поля (102), в общем же случае структура этого уравнения нами пока не определена. По указанной причине в полевой теории гравитации нельзя ничего сказать о возможности существования таких объектов, как «черные дыры», так как это относится к области сильных полей.

Поэтому рассмотрим метрику статического сферически-симметричного источника для слабого поля. Подставляя (146) в постньютоновское уравнение связи (102), получаем для внешнего решения:

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= 1 - 2M/r + 2BM^2/r^2 + O(M^3/r^3); \\ g_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}(1 + 2M/r) + O(M^2/r^2). \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Из соотношений (143) и (51) имеем

$$M = 8\pi \int_0^a r_0^2\, dr_0 \left[I_{00} - \frac{1}{2} I_n^n\right] = 8\pi \int_0^a r_0^2\, dr_0 \left(h_{00} - \frac{1}{2} h_n^n\right).$$

Для получения постньютоновского разложения величины M необходимо, как обычно, проводить вычисления последовательными этапами: сначала получить выражение для M в ньютоновском приближении, когда полностью пренебрегаем влиянием гравитации на тензор энергии — импульса вещества, а затем, используя ньютоновское приближение, найдем постньютоновское выражение. В результате получим:

$$M = 4\pi \int_0^a r_0^2 dr_0 \rho_0 \left[1 + \Pi + 2(2 - B)U + 3\frac{p}{\rho_0} + O(\varepsilon^4)\right]. \quad (148)$$

Как и следовало ожидать, для статического сферически-симметричного тела постньютоновское разложение полной массы совпадает с выражением (131), а метрика (147) совпадает с метрикой (130).

10. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ НЕСТАТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ИСТОЧНИКА

В теории Эйнштейна гравитационное поле нестатического сферически-симметричного источника в силу теоремы Биркгофа вне вещества является статическим полем с метрикой, соответствующей решению Шварцшильда.

Покажем, что в полевой теории гравитации в случае нестатического сферически-симметричного источника гравитационное поле вне вещества также является статическим полем, компоненты которого выражаются формулами (143) и (144). Рассмотрим случай, когда вещество распределено в некотором шаре радиуса a сферически-симметрично и его движение происходит также сферически-симметрично в радиальных направлениях.

В силу симметрии задачи отличными от нуля компонентами тензоров T^{lm}, h^{lm}, I_{lm} и f_{lm} будут диагональные компоненты, а также компоненты T^{0r}, h^{0r}, I_{0r} и f_{0r}.

Все компоненты этих тензоров, кроме компонент $(\varphi\varphi)$, будут зависеть от r и t. Для компонент $(\varphi\varphi)$ имеем:

$$I_{\varphi\varphi} = I_{\theta\theta}\sin^2\theta; \quad f_{\varphi\varphi} = f_{\theta\theta}\sin^2\theta; \quad h^{\varphi\varphi} = h^{\theta\theta}/\sin^2\theta; \quad T^{\varphi\varphi} = T^{\theta\theta}/\sin^2\theta.$$

4-Вектор скорости вещества имеет вид

$$u^i = \{u^0(r, t),\ u^r(r, t),\ 0,\ 0\}.$$

Разложим компоненты тензорного тока I_{lm} и гравитационного поля f_{lm} в интегралы Фурье по времени:

$$f_{lm}(r, t) = \int \exp(-i\omega t)\, f_{lm}(\omega, r)\, d\omega;$$

$$I_{lm}(r, t) = \int \exp(-i\omega t)\, I_{lm}(\omega, r)\, d\omega.$$

Выделим в спектре $I_{lm}(\omega, r)$ статическую часть $I_{lm}(\mathbf{r})$. Очевидно, что статическая часть будет давать статические решения, рассмотренные в предыдущем разделе. Поэтому в дальнейшем под $I_{lm}(\omega, r)$ будем понимать нестатическую часть.

Уравнения поля (56) для рассматриваемого случая будут иметь вид обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&f''_{00}+(2/r)\,f'_{00}+\omega^2 f_{00}=16\pi I_{00}\,(\omega,\ r);\\
&f''_{0r}+(2/r)\,f'_{0r}+(\omega^2-2/r^2)\,f_{0r}=16\pi I_{0r}\,(\omega,\ r);\\
&f''_{rr}+(2/r)\,f'_{rr}-(4/r^2)\,f_{rr}+(4/r^2)\,(f_{\theta\theta}/r^2)+\omega^2 f_{rr}=\\
&=16\pi I_{rr}\,(\omega,\ r);\\
&(f_{\theta\theta}/r^2)''+(2/r)\,(f_{\theta\theta}/r^2)'-(2/r^2)\,(f_{\theta\theta}/r^2)+(2/r^2)\,f_{rr}+\\
&+\omega^2 f_{\theta\theta}/r^2=(16\pi/r^2)\,I_{\theta\theta}.
\end{aligned}\right\}\quad(149)$$

В качестве граничных условий для этих уравнений естественно потребовать ограниченности функций f_{00}, f_{0r}, f_{rr} и $(1/r^2)\,f_{\theta\theta}$ при $r=0$ и выполнения условий излучения при $r\to\infty$. Из условий сохранения тензорного тока $D^l I_{lm}=0$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
&i\omega I_{00}+I'_{0r}+(2/r)\,I_{0r}=0;\\
&i\omega I_{0r}+I'_{rr}+(2/r)\,I_{rr}-(2/r^3)\,I_{\theta\theta}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(150)$$

Решая уравнения (149) с учетом соотношений (150), получаем:

$$f_{rr}=(1/3)\,(A_2+2B_2);$$

$$f_{\theta\theta}/r^2=(1/3)\,(A_2-B_3);$$

$$f_{00}=-\frac{8\pi^2}{\sqrt{r}}\left\{H^{(1)}_{1/2}(\omega r)\int\limits_0^r r_0^{3/2}\,dr_0 I_{0r}J_{3/2}(\omega r_0)+\right.$$

$$\left.+J_{1/2}(\omega r)\int\limits_r^a r_0^{3/2}\,dr_0 I_{0r}H^{(1)}_{3/2}(\omega r_0)\right\};$$

$$f_{0r}=-\frac{8\pi^2 i}{\sqrt{r}}\left\{H^{(1)}_{3/2}(\omega r)\int\limits_0^r r_0^{3/2}\,dr_0 I_{0r}J_{3/2}(\omega r_0)+\right.$$

$$\left.+J_{3/2}(\omega r)\int\limits_r^a r_0^{3/2}\,dr_0 I_{0r}H^{(1)}_{3/2}(\omega r_0)\right\},$$

где введены обозначения

$$A_2=-\frac{8\pi^2 i\omega}{\sqrt{r}}\left\{H^{(1)}_{1/2}(\omega r)\int\limits_0^r r_0^{5/2}\,[iI_{0r}J_{1/2}(\omega r_0)+I_{rr}J_{3/2}(\omega r_0)]\,dr_0+\right.$$

$$\left.+J_{1/2}(\omega r)\int\limits_r^a r_0^{5/2}\,[iI_{0r}H^{(1)}_{1/2}(\omega r_0)+I_{rr}H^{(1)}_{3/2}(\omega r_0)]\,dr_0\right\};$$

$$B_2 = \frac{4\pi^2 i\omega}{\sqrt{r}}\left\{H^{(1)}_{5/2}(\omega r)\int\limits_0^r r_0^{5/2}\,[iI_{0r}J_{5/2}(\omega r_0) - I_{rr}J_{3/2}(\omega r_0)]\,dr_0 + \right.$$

$$\left. + J_{5/2}(\omega r)\int\limits_r^a r_0^{5/2}\,[iI_{0r}H^{(1)}_{5/2}(\omega r_0) - I_{rr}H^{(1)}_{3/2}(\omega r_0)]\,dr_0\right\}.$$

Используя вне вещества калибровочное преобразование

$$f'_{in} = f_{in} - D_i a_n - D_n a_i + \gamma_{in} D_l a^l,$$

наложим на компоненты гравитационного поля два условия:

$$f'^{n}_{a} = 0;\; f'^{00} = 0.$$

Чтобы калибровочное преобразование не нарушало условия $D^l f_{lm} = 0$, калибровочный 4-вектор должен удовлетворять вне вещества уравнению: $\Box a_l = 0$. Выбирая калибровочные векторы в виде:

$$a_0 = \frac{2\pi^2 i}{\omega\sqrt{r}}\,H^{(1)}_{1/2}(\omega r)\int\limits_0^a r_0^{3/2}\,dr_0\,\{I_{0r}\,[J_{3/2}(\omega r_0) +$$

$$+ \omega r_0 J_{1/2}(\omega r_0)] - i\omega r_0 I_{rr} J_{3/2}(\omega r_0)\};$$

$$a_r = \frac{2\pi^2}{\sqrt{r}}\,H^{(1)}_{3/2}(\omega r)\int\limits_0^a r_0^{5/2}\,dr_0\,[I_{0r}J_{5/2}(\omega r_0) + iI_{rr}J_{3/2}(\omega r_0)];$$

$$a_\theta = a_\varphi = 0,$$

легко убедиться, что все компоненты нестатического гравитационного поля вне вещества обращаются в нуль:

$$f'_{in} = 0.$$

Таким образом, в случае нестатического источника со сферически-симметричным распределением и движением вещества гравитационное поле вне вещества будет являться статическим полем, компоненты которого будут определяться формулами (143) и (144).

11. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ПОСТНЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В полевой теории гравитации гравитационное поле, рассматриваемое в псевдоевклидовом пространстве — времени, ведет себя аналогично всем другим физическим полям. Оно обладает энергией—импульсом и вносит вклад в плотность полного тензора энергии — импульса системы. Ковариантный закон сохранения плотности полного тензора энергии — импульса в псевдоевклидовом пространстве — времени, записанный в декартовой системе координат, имеет обычный смысл:

$$\partial_i (t_g^{ni} + t_M^{ni}) = 0, \tag{151}$$

где t_g^{ni} — плотность симметрического тензора энергии — импульса гравитационного поля (66); t_M^{ni} — плотность симметрического тензора энергии — импульса вещества (74).

Используя дифференциальный закон сохранения (151), можно получить соответствующий интегральный закон сохранения:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int dV (t_g^{0n} + t_M^{0n}) = \int dS_\alpha (t_g^{\alpha n} + t_M^{\alpha n}).$$

Если поток энергии вещества и гравитационного поля через поверхность, ограничивающую объем, отсутствует

$$\int dS_\alpha (t_g^{\alpha n} + t_M^{\alpha n}) = 0, \tag{152}$$

то мы приходим к закону сохранения полного 4-импульса изолированной системы

$$dP^n/dt = 0,$$

где

$$P^n = \int dV (t_g^{0n} + t_M^{0n}). \tag{153}$$

В этом случае в силу симметрии плотности полного тензора энергии — импульса сохраняется также и тензор момента импульса системы:

$$dM^{in}/dt = 0,$$

где

$$M^{in} = \int dV [x^i (t_g^{0n} + t_M^{0n}) - x^n (t_g^{0i} + t_M^{0i})]. \tag{154}$$

В силу сохранения компонент

$$M^{0\alpha} = x^0 \int dV (t_g^{0\alpha} + t_M^{0\alpha}) - \int dV x^\alpha (t_g^{00} + t_M^{00})$$

центр масс изолированной системы, определяемый формулой:

$$X^\alpha = \int dV x^\alpha (t_g^{00} + t_M^{00}) / \int dV (t_g^{00} + t_M^{00}) = (P^\alpha t - M^{0\alpha})/P^0, \tag{155}$$

совершает равномерное прямолинейное движение со скоростью

$$dX^\alpha/dt = P^\alpha/P^0.$$

Таким образом, для описания движения изолированной системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, достаточно определить 4-импульс P^i (153). Следует отметить, что в любой реальной системе из-за движения ее составных частей, теплового движения вещества и т. п. может происходить излучение гравитационных волн; любая реальная система обменивается с другими системами веществом как в форме электромагнитного излучения, так и в форме частиц, атомов и т. п. Поэтому в самом общем случае пренебрегать потоками энергии вещества и гравитационного поля нельзя: существует большое количество астрофизических процессов, в которых эти потоки энергии играют ведущую роль, именно их учет и позволяет понять и предсказать многие астрофизические процессы. Но вместе с тем для систем, у которых потоки энергии вещества и гравитационного поля малы, условие изолированности (152) выполняется с некоторой степенью точности. Тогда с той же степенью точности мы можем утверждать о сохранении 4-импульса этой системы. Именно такая ситуация имеет место для системы, к которой применим постньютоновский формализм. В этом случае условие изолированности системы (152) в постньютоновском приближении выполняется и мы можем определить сохраняющийся 4-импульс системы.

Найдем постньютоновское выражение для 4-импульса изолированной системы в полевой теории гравитации. Плотность полного симметрического тензора энергии—импульса в плоском пространстве — времени имеет вид

$$t^{ik}=t_g^{ik}+t_M^{ik}=\frac{1}{64\pi}\Big\{-\gamma^{ik}\Big(\partial_l f_{np}\partial^l f^{np}-\frac{1}{2}\partial_l f\partial^l f\Big)-$$
$$-\partial^i f\partial^k f+2\partial^i f_{np}\partial^k f^{np}\Big\}-$$
$$-\frac{1}{32\pi}\{f^{in}\,\Box\, f_n^k+f_n^k\,\Box\, f^{in}-f^{ik}\,\Box\, f\}-$$
$$-\frac{1}{32\pi}\{\partial_l\,[f_n^i\partial^k f^{ln}+f_n^k\partial^i f^{ln}-f_n^l(\partial^i f^{kn}+\partial^k f^{in})]\}-$$
$$-2\Lambda^{(ik)}+T^{np}A_{np}^{ik}, \qquad (156)$$

где A_{np}^{ik} определяется выражением (75), а Λ^{ik} — выражением (65), причем тензор A^{ln} в этом случае имеет вид

$$A^{ln}=-\frac{1}{32\pi}\Big\{\Box\Big(f^{ln}-\frac{1}{2}\gamma^{ln}f\Big)+16\pi\Big(h^{ln}-\frac{1}{2}\gamma^{ln}h_m^m\Big)\Big\}. \qquad (157)$$

Так как в постньютоновском приближении

$$A_{np}^{ik}=\frac{1}{2}(\delta_n^i\delta_p^k+\delta_n^k\delta_p^i)\Big(1-\frac{1}{2}f_m^m\Big)+\frac{1}{2}\gamma_{np}f^{ik}+O(\varepsilon^4),$$

из выражений (126), (156) и (157) следует, что компоненты t^{00} и $t^{0\alpha}$ полного симметрического тензора энергии — импульса системы можно определить с точностью до членов $t^{00}\sim\rho O(\varepsilon^2)$,

$t^{0\alpha} \sim \rho O(\varepsilon^3)$ включительно. Поэтому мы будем опускать все величины большего порядка малости, например Λ^{00} и $\Lambda^{0\alpha}$, так, как $\Lambda^{00} \sim \rho O(\varepsilon^4)$, $\Lambda^{0\alpha} \sim \rho O(\varepsilon^5)$.

Учитывая, что

$$\partial_\alpha \partial^\alpha U = 4\pi\rho; \quad \partial V^\beta/\partial x^\beta = \partial U/\partial t,$$

из (156), (119) получаем:

$$\left.\begin{aligned} t^{00} &= \rho(1+v^2/2+\Pi-U/2)-(1/8\pi)\,\partial_\alpha(U\partial^\alpha U)+\rho O(\varepsilon^4);\\ t^{0\alpha} &= \rho v^\alpha(1+v^2/2+\Pi+U)+pv^\alpha+2\rho V^\alpha+\\ &+\frac{1}{4\pi}\{(\partial U/\partial t)\,\partial^\alpha U+2\partial_\beta(U\partial^\alpha V^\beta-V^\beta\partial^\alpha U)\}+\rho O(\varepsilon^5). \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

Для нахождения 4-импульса системы в постньютоновском приближении проинтегрируем выражения (158) по всему пространству. Воспользовавшись равенствами:

$$\int \frac{\partial U}{\partial t}\,\partial^\alpha U\,dV = 2\pi\int \rho\,(Uv^\alpha+N^\alpha)\,dU;$$

$$\int \rho V^\alpha\,dV = -\int \rho U v^\alpha\,dV;$$

$$\int \partial_\alpha(U\partial^\alpha U)\,dV = \int dS_\alpha U\partial^\alpha U = 0,$$

получим окончательно:

$$\begin{gathered} P^0 = \int dV\rho\left(1+\Pi+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U\right);\\ P^\alpha = \int dV\left\{\rho v^\alpha\left(1+\Pi+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U\right)+Pv^\alpha+\frac{1}{2}\rho N^\alpha\right\}. \end{gathered} \tag{159}$$

Используя (159) и (154), легко получить в постньютоновском приближении сохраняющийся тензор момента импульса системы:

$$\left.\begin{aligned} M^{0\alpha} &= \int dV\,\rho x^\alpha\left(1+\Pi+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U\right)-P^\alpha t;\\ M^{\alpha\beta} &= \int dV\,\rho\left\{x^\alpha\left[v^\beta\left(1+\Pi+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U+\frac{P}{\rho}\right)+\frac{1}{2}N^\beta\right]-\right.\\ &\left.-x^\beta\left(v^\alpha\left(1+\Pi+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U+\frac{P}{\rho}\right)+\frac{1}{2}N^\alpha\right]\right\} \end{aligned}\right\} \tag{160}$$

и координаты центра масс системы

$$X^\alpha = \frac{1}{P^0}\int dV\,x^\alpha\rho\left(1+\Pi+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U\right). \tag{161}$$

В противоположность закону сохранения (151) ковариантное уравнение сохранения плотности тензора энергии — импульса вещества в римановом пространстве — времени

$$\nabla_n T^{ni} = \partial_n T^{ni} + \Gamma^i_{mn} T^{mn} = 0 \qquad (162)$$

не выражает в явном виде сохранения какой-либо величины, а просто отображает тот факт, что плотность тензора энергии — импульса вещества не сохраняется:

$$\partial_n T^{ni} \neq 0.$$

Однако, как показано в разд. 2 настоящей работы, законы сохранения (151) и уравнение сохранения (162) — просто разные формы записи одного и того же закона сохранения в полевой теории гравитации. Этот общий результат, полученный в разд. 2, можно подтвердить и на любом этапе приближенных вычислений. Поэтому в полевой теории гравитации интегралы движения (159)—(161) в постньютоновском приближении можно получить и из уравнения сохранения (162).

Покажем, например, что постньютоновские интегралы движения, получаемые в полевой теории гравитации из ковариантного уравнения (162) в римановом пространстве—времени, совпадают с интегралами движения (159)—(161), получаемыми в псевдоевклидовом пространстве—времени из закона сохранения (151). Следует подчеркнуть, что для сопоставления интегралов движения, вычисления в обоих случаях необходимо производить в одной и той же координатной системе, поскольку разным координатным системам соответствуют различные выражения для интегралов движения.

Поэтому вычисления будем производить в «неканонической» координатной системе риманова пространства—времени, в которой метрический тензор имеет вид (126). Эта координатная система риманова пространства—времени соответствует координатной системе псевдоевклидова пространства—времени, в которой мы находили интегралы движения (159)—(161).

Отметим также, что переход к канонической системе координат, в которой метрический тензор g_{ni} имеет вид (129), как можно показать, не изменяет постньютоновских выражений для интегралов движения в полевой теории гравитации. В общем же случае разным системам координат будут соответствовать различные выражения для интегралов движения.

Используя постньютоновское разложение метрического тензора (126) и определение (105), найдем компоненты плотности тензора энергии-импульса вещества с постньютоновской степенью точности:

$$\left.\begin{aligned} &T^{00} = \rho\,[1 + \Pi + v^2/2 + U] + \rho O(\varepsilon^4);\\ &T^{0\alpha} = \rho v^\alpha\,[1 + \Pi + v^2/2 + U] + P v^\alpha + \rho O(\varepsilon^5);\\ &T^{\alpha\beta} = \rho v^\alpha v^\beta\,[1 + \Pi + v^2/2 + U] +\\ &\quad + P v^\alpha v^\beta - P\gamma^{\alpha\beta} + \rho O(\varepsilon^6). \end{aligned}\right\} \qquad (163)$$

Запишем покомпонентно уравнения (162):

$$\left.\begin{aligned} &\partial_0 T^{00}+\partial_\alpha T^{0\alpha}+\Gamma^0_{00}T^{00}+2\Gamma^0_{0\alpha}T^{0\alpha}+\Gamma^0_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}=0;\\ &\partial_0 T^{0\alpha}+\partial_\beta T^{\alpha\beta}+\Gamma^\alpha_{00}T^{00}+2\Gamma^\alpha_{0\beta}T^{0\beta}+\Gamma^\alpha_{\beta\tau}T^{\beta\tau}=0.\end{aligned}\right\} \quad (164)$$

Так как компоненты плотности тензора энергии-импульса вещества известны с точностью

$$T^{00}\sim\rho O(\varepsilon^4);\quad T^{0\alpha}\sim\rho O(\varepsilon^5);\quad T^{\alpha\beta}\sim\rho O(\varepsilon^6),$$

связности риманова пространства — времени следует определить с точностью:

$$\begin{gathered}\Gamma^0_{00}\sim O(\varepsilon^5);\quad \Gamma^0_{0\alpha}\sim O(\varepsilon^4);\quad \Gamma^0_{\alpha\beta}\sim O(\varepsilon^3);\\ \Gamma^\alpha_{00}\sim O(\varepsilon^6);\quad \Gamma^\alpha_{0\beta}\sim O(\varepsilon^5);\quad \Gamma^\alpha_{\beta\tau}\sim O(\varepsilon^4).\end{gathered}$$

Используя постньютоновское разложение метрики (126), определим связности риманова пространства—времени с требуемой точностью:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^0_{00}=-\partial U/\partial t+O(\varepsilon^5);\\ &\Gamma^0_{0\alpha}=-\partial U/\partial x^\alpha+O(\varepsilon^4);\\ &\Gamma^\alpha_{\beta\tau}=\delta^\alpha_\tau\,\partial U/\partial x^\beta+\delta^\alpha_\beta\,\partial U/\partial x^\tau-\gamma_{\beta\tau}\gamma^{\alpha\eta}\,\partial U/\partial x^\eta+O(\varepsilon^4);\\ &\Gamma^\alpha_{0\beta}=\delta^\alpha_\beta\,\partial U/\partial t+2\gamma^{\alpha\tau}(\partial V_\tau/\partial x^\beta-\partial V_\beta/\partial x^\tau)+O(\varepsilon^5);\\ &\Gamma^0_{\alpha\beta}=O(\varepsilon^3);\\ &\Gamma^\alpha_{00}=4\frac{\partial V^\alpha}{\partial t}+\gamma^{\alpha\beta}(1-2U)\frac{\partial U}{\partial x^\beta}-\\ &-\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}[2BU^2-4\Phi_1+4(B-2)\Phi_2-\\ &-2\Phi_3-6\Phi_4-\omega]+O(\varepsilon^6),\end{aligned}\right\} \quad (165)$$

где введены обозначения

$$\omega=\partial^2 Q/\partial t^2;\quad Q=\int\rho R\,dV.$$

Подставляя (163) и (165) в первое уравнение (164), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(1+\Pi+U+\frac{1}{2}v^2\right)\right]+\partial_\alpha\left[\rho v^\alpha\left(1+\Pi+U+\frac{1}{2}v^2\right)+Pv^\alpha\right]-$$
$$-\rho\frac{\partial U}{\partial t}-2\rho v^\alpha\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}+\rho O(\varepsilon^5)=0. \quad (166)$$

Второе уравнение (164) с учетом (163) и (165) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho v^{\alpha}\left(1+\Pi+U+\frac{1}{2}v^{2}\right)+Pv^{\alpha}\right]+4\rho\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial t}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\rho v^{\alpha}v^{\beta}\left(1+\Pi+U+\frac{1}{2}v^{2}\right)+Pv^{\alpha}v^{\beta}-P\gamma^{\alpha\beta}\right]+$$
$$+\rho\left(1+\Pi+U+\frac{1}{2}v^{2}\right)\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}-(2+2B)\,\rho U\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+$$
$$+\gamma^{\alpha\beta}\rho\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[2\Phi_{1}-2(B-2)\Phi_{2}+\Phi_{3}+3\Phi_{4}+\frac{1}{2}\omega\right]+$$
$$+2\rho v^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial t}+4\rho v^{\beta}\gamma^{\alpha\tau}\left(\frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial V_{\beta}}{\partial x^{\tau}}\right)+$$
$$+P\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+2\rho v^{\alpha}v^{\beta}\frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+\rho v^{2}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+\rho O(\varepsilon^{6})=0. \qquad (167)$$

Для упрощения этих выражений воспользуемся уравнением неразрывности идеальной жидкости

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\rho v^{\alpha})=0,$$
$$\rho=\rho_{0}\left[1+3U+v^{2}/2+O(\varepsilon^{4})\right],$$

ньютоновыми уравнениями движения упругого тела:

$$\rho\, dv^{\alpha}/dt=\gamma^{\alpha\beta}(-\rho\,\partial U/\partial x^{\beta}+\partial P/\partial x^{\beta});$$
$$\rho\, d\Pi/\partial t=-P\,\partial v^{\alpha}/\partial x^{\alpha};$$
$$d/dt=\partial/\partial t+v^{\beta}\partial/\partial x^{\beta},$$

а также соотношениями:

$$\partial V_{\alpha}/\partial x^{\beta}-\partial V_{\beta}/\partial x^{\alpha}=\partial N_{\alpha}/\partial x^{\beta}-\partial N_{\beta}/\partial x^{\alpha};$$
$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}U=4\pi\rho_{0};$$
$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho U)+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}-\gamma^{\alpha\beta}U\frac{\partial^{2}U}{\partial t\,\partial x^{\beta}}\right).$$

В результате этих преобразований из (166) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(1+\Pi-\frac{1}{2}U+\frac{1}{2}v^{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\rho v^{\alpha}\left(1+\Pi+U+\frac{1}{2}v^{2}\right)+\right.$$
$$\left.+Pv^{\alpha}-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial U}{\partial t}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x^{\beta}}+\frac{1}{8\pi}\gamma^{\alpha\beta}U\frac{\partial^{2}U}{\partial t\,\partial x^{\beta}}\right]=\rho O(\varepsilon^{4}). \qquad (168)$$

Выражение (167) приводим к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho v^\alpha\left(1+\Pi+U+\frac{1}{2}v^2\right)+Pv^\alpha\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\rho v^\alpha v^\beta\left(1+\Pi+U+\frac{1}{2}v^2\right)+Pv^\alpha v^\beta-P\gamma^{\alpha\beta}-2\gamma^{\alpha\beta}PU\right]+$$
$$+4\rho\frac{dV^\alpha}{dt}+2\rho\frac{d}{dt}(Uv^\alpha)+\rho_0\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x^\beta}+\rho(4-2B)U\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x^\beta}+$$
$$+\rho(\Pi+2v^2)\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x^\beta}+3P\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x^\beta}+$$
$$+3\rho\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi_4}{\partial x^\beta}-4\rho v^\beta\gamma^{\alpha\tau}\frac{\partial V_\beta}{\partial x^\tau}+$$
$$+\rho\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(2\Phi_1+\Phi_3-2(B-2)\Phi_2+\frac{1}{2}\omega\right)=\rho O(\varepsilon^6). \qquad (169)$$

Проинтегрируем эти выражения по всему пространству. Заметим прежде всего, что

$$\left.\begin{aligned}
&\int dV\rho_0\left(\Pi\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial x^\alpha}\right)=0;\\
&\int dV\rho_0\left(U\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x^\alpha}\right)=0;\\
&\int dV\left(P\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}+\rho_0\frac{\partial\Phi_4}{\partial x^\alpha}\right)=0;\\
&\int dV\rho_0\left(v^2\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial x^\alpha}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (170)$$

Действительно, рассмотрим, например, первое соотношение. Используя выражение (98), имеем

$$\int dV\,dV'\,\rho_0\rho_0'\left[\frac{\Pi(x_\alpha-x_\alpha')}{|x-x'|^3}+\frac{\Pi'(x_\alpha-x_\alpha')}{|x-x'|^3}\right].$$

Так как подынтегральное выражение антисимметрично относительно замены $\rho_0\leftrightarrow\rho_0'$; $x_\alpha\leftrightarrow x'_\alpha$, интеграл равен нулю. Аналогично доказываются и остальные соотношения (170).

Кроме того, используем очевидные равенства:

$$\int\rho_0 v^\alpha\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta}dV=\int\rho_0 v^\alpha\frac{\partial N_\alpha}{\partial x^\beta}dV=0;$$
$$\int\rho_0\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}dV=0;$$
$$\int\rho v^\beta\frac{\partial^3 Q}{\partial t\,\partial x^\alpha\partial x^\beta}dV=0;$$
$$\frac{d}{dt}\int\rho f(U,V^\alpha,v^\alpha)dV=\int dV\rho\left[\frac{d}{dt}f(U,V^\alpha,v^\alpha)+fO(\varepsilon^2)\right].$$

Воспользуемся также тем обстоятельством, что интегралы по объему от пространственной дивергенции после преобразования их в поверхностные, исчезают.

В результате из (168) в постньютоновском приближении полевой теории гравитации получаем интеграл энергии $dP^0/dt = 0$, где

$$P^0 = \int dV \rho(x, t)\left[1 + \Pi - \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}v^2\right] = \text{const}. \quad (171)$$

Учитывая, что

$$\rho\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x^\beta}Q\right) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\rho v^\beta\gamma^{\alpha\tau}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x^\tau}Q\right) - \rho v^\beta\gamma^{\alpha\tau}\frac{\partial^3 Q}{\partial t\,\partial x^\tau\,\partial x^\beta},$$

из (169) получим $dP^\alpha/dt = 0$, откуда следует, что

$$P^\alpha = \int dV\left[\rho v^\alpha\left(1 + \Pi + 3U + \frac{1}{2}v_2\right) + Pv^\alpha + 4\rho V^\alpha + \frac{1}{2}\rho\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^\beta\,\partial t}\right] = \text{const}. \quad (172)$$

Поскольку имеют место соотношения:

$$\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^\beta\,\partial t} = N^\alpha - V^\alpha;$$

$$\int dV\rho V^\alpha = -\int dV\rho U v^\alpha,$$

выражение (172) можно привести к виду

$$P^\alpha = \int dV\rho\left[v^\alpha\left(1 + \Pi - \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho}\right) + \frac{1}{2}N^\alpha\right] = \text{const}. \quad (173)$$

Таким образом, в полевой теории гравитации постньютоновские интегралы движения, получаемые из закона сохранения (151) в псевдоевклидовом пространстве — времени и из ковариантного уравнения (162) в римановом пространстве — времени, совпадают. Это является прямым следствием того, что в полевой теории гравитации закон сохранения (151) и уравнение (162) представляют собой разные формы записи одного и того же закона сохранения. В полевой теории гравитации гравитационное поле является физическим полем, которое обладает плотностью энергии — импульса и вносит свой вклад в полный тензор энергии — импульса системы. Именно наличие в полевой теории гравитации обычных законов сохранения и дает нам возможность проводить различные энергетические расчеты, в том числе находить постньютоновские выражения для интегралов движения.

В ОТО гравитационное поле не является полем в духе Фарадея — Максвелла, в результате чего в теории Эйнштейна отсутствует возможность производить расчеты энергии гравитационного поля. Однако в ОТО постньютоновские интегралы движения изолированной системы обычно получают из ковариантного уравнения (162) и приходят к выражениям (159), (160).

Но, как показано в работе [5], из ковариантного уравнения (162) в ОТО Эйнштейна не следует никакого иного интеграла движения, кроме самих уравнений Эйнштейна. Поэтому в ОТО интегралы движения тождественно равны нулю. Этот общий результат, полученный в работе [5], может быть подтвержден и на любом этапе приближенных вычислений с любым способом специализации координатной системы.

Подробный анализ показывает, что традиционный путь получения ненулевых «интегралов энергии — импульса» в теории Эйнштейна приводит не к интегралам движения, а лишь к получению не зависящих в постньютоновском приближении от времени величин, которые в ОТО не имеют физического смысла. Поэтому общепринятая в теории Эйнштейна интерпретация их в качестве энергии — импульса изолированной системы является неправильной.

В заключение настоящего раздела отметим, что в ньютоновском приближении энергия статического поля в полевой теории гравитации, рассчитываемая с использованием канонического тензора энергии — импульса (62), положительна:

$$\int \tilde{t}_g^{00}\, dV = -\frac{1}{8\pi} \int dV\, \partial_\alpha U \partial^\alpha U > 0,$$

а с использованием симметрического тензора энергии — импульса (66) отрицательна:

$$\int t_g^{00} dV = \frac{3}{8\pi} \int dV\, \partial_\alpha U \partial^\alpha U < 0.$$

Как известно, в электродинамике имеет место противоположная ситуация: энергия электростатического поля, рассчитываемая по каноническому тензору энергии — импульса, отрицательна, а по симметрическому тензору положительна. Из этой аналогии можно сделать вывод, что статическое гравитационное поле является полем сил притяжения, так как в электродинамике заряды одного знака создают поле сил отталкивания.

Расчет суммарной энергии вещества и статического гравитационного поля в ньютоновском приближении дает один и тот же результат как в случае использования канонического, так и симметрического тензоров энергии — импульса:

$$P^0 = \int dV \left(\tilde{t}^{00}_{g} + \tilde{t}^{00}_{M}\right) = \int dV \left(t^{00}_{g} + t^{00}_{M}\right) =$$
$$= \int dV \rho \left(1 + \Pi - \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} v^2\right).$$

Из последнего выражения следует, что энергия двух покоящихся частиц возрастает с ростом расстояния между ними, что также свидетельствует о действии сил притяжения между частицами.

12. НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ОДНОРОДНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Полевая теория гравитации позволяет построить нестационарные модели Вселенной, способные описать эффект космологического красного смещения и свободные от расходимостей ньютоновского типа. Эти модели соответствуют плоской Вселенной.

Астрономические наблюдения показывают, что вещество во Вселенной распределено весьма неоднородно: основная масса вещества заключена в планетах и звездах, на долю же межзвездного газа и излучения приходится лишь малая часть общей массы.

Однако при усреднении по областям пространства, линейные размеры которых значительно больше расстояний между скоплениями галактик, плотность вещества той части Вселенной, которая доступна наблюдению, оказывается величиной постоянной, не зависящей от положения центра области усреднения. Поэтому естественно с физической точки зрения в качестве первого шага рассмотреть модель однородной изотропной Вселенной.

При таком подходе неоднородность распределения вещества, проявляющуюся при усреднении по меньшим областям пространства (скопления галактик, галактики и т. п.), можно учесть введением малых неоднородных возмущений в фоновое космологическое поле однородной Вселенной.

Однородная модель Вселенной в полевой теории гравитации допускает как монотонное, так и немонотонное поведение. Характер поведения модели, возраст Вселенной и другие характеристики существенно зависят от уравнения связи $g_{in} = g_{in}(\gamma_{lm}, f_{lm})$.

Если же нас интересует эволюция Вселенной и возникающие при этом эффекты в малой окрестности ($\Delta\tau \sim 10^8$ лет) настоящего момента собственного времени Вселенной, знание точного уравнения связи не требуется. В таком случае вполне достаточно разложения метрического тензора риманова пространства — времени по слабому полю с точностью до квадратичных членов.

Однородная изотропная Вселенная описывается интервалом

$$ds^2 = U dt^2 - V(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{174}$$

причем функции U и V зависят только от временной переменной t:

$$U = U(t); \quad V = V(t).$$

Вещество во Вселенной будем рассматривать как идеальную жидкость с плотностью тензора энергии — импульса

$$T^{in} = \sqrt{-g}\,[(\varepsilon + P)\, u^i u^n - P g^{in})].$$

В силу однородности и изотропности Вселенной имеем:

$$\varepsilon = \varepsilon(t); \quad P = P(t);$$
$$u^\alpha = 0; \quad u^0 \neq 0;$$
$$u^0 u^0 g_{00} = 1.$$

Тогда компоненты плотности тензора энергии — импульса вещества примут вид:

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \varepsilon \sqrt{V^3/U}; \\ T^{\alpha\beta} &= -P\sqrt{UV}\,\gamma^{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{175}$$

Используя (174) для интервала, определим связности раманова пространства — времени:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^0_{00} = \dot{U}/2U; \quad \Gamma^0_{0\alpha} = 0; \\ &\Gamma^0_{\alpha\beta} = -(\dot{V}/2U)\,\gamma_{\alpha\beta}; \quad \Gamma^\alpha_{00} = 0; \\ &\Gamma^\alpha_{0\beta} = (\dot{V}/2V)\,\delta^\alpha_\beta; \quad \Gamma^\alpha_{\beta\varepsilon} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{176}$$

где точка обозначает простое дифференцирование по t.

Ковариантное уравнение сохранения плотности тензора энергии — импульса вещества (162) в нашем случае имеет вид

$$\dot{T}^{00} + \Gamma^0_{00} T^{00} + \Gamma^0_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0.$$

Подставляя в это уравнение (175) и (176), получаем

$$d(\varepsilon\sqrt{V^3})/dt + P d\sqrt{V^3}/dt = 0. \tag{177}$$

Решение уравнения (177) имеет вид

$$\ln V = -\frac{2}{3}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' + P(\varepsilon')}. \tag{178}$$

Уравнение связи в самом общем виде может быть записано следующим образом:

$$g_{in} = \gamma_{in} f_1 + f_{in} f_2 + f_{im} f_{nl} A^{lm}, \tag{179}$$

где f_1 и f_2 некоторые скалярные функции от инвариантов $I_1 = f_m^m$; $I_2 = f_{nm}f^{nm}$ и т. д., а тензор A^{lm} строится из тензоров γ^{lm}, f^{lm}, $f^{ln}f_n^m$ ... и инвариантов.

Для слабого поля точное уравнение связи (179) должно переходить в выражение (102). Это дает возможность определить разложения функций f_1, f_2 и тензора A^{lm}в случае слабого поля:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 1-(1/2)\,I_1+(b_3/4)\,I_2+(b_4/4)\,(I_1)^2+O\,(f_{lm}^3); \\ f_2 &= 1+(b_2/4)\,I_1+O\,(f_{lm}^2); \\ A^{ln} &= (b_1/4)\,\gamma^{ln}+O\,(f^{ln}). \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

Дальнейшее рассмотрение будем проводить в самом общем виде, основываясь на уравнении связи (179).

Для однородной Вселенной уравнения гравитационного поля (5.21) примут вид:

$$\ddot{H}_{in}=h_{in};\quad \ddot{f}_{00}=\ddot{f}_{0\alpha}=0;\quad \ddot{f}_{\alpha\beta}=-16\pi\,(h_{\alpha\beta}+\gamma_{\alpha\beta}h_{00}). \tag{181}$$

Дополнительные условия $\partial^l f_{ln} = 0$ дают

$$\dot{f}_{00}=\dot{f}_{0\alpha}=0.$$

Из выражения (9) следует, что компоненты гравитационного поля f_{00} и $f_{0\alpha}$ равны нулю:

$$f_{00} = f_{0\alpha} = 0.$$

В силу изотропности Вселенной остальные компоненты гравитационного поля должны иметь вид

$$f_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}F\,(t).$$

Тогда

$$g_{00}=U=f_1;\qquad A^{\alpha\beta}=\gamma^{\alpha\beta}f_3;$$
$$g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}V;\qquad V=f_1+Ff_2+F^2f_3;$$
$$I_1=3F;\quad I_2=3F^2;\ \ldots;\quad I_n=3F^n.$$

Можно показать, что

$$\partial g_{00}/\partial f_{\alpha\beta}=(1/3)\,\gamma^{\alpha\beta}\,dU/dF;$$
$$\gamma^{\varepsilon\tau}\,\partial g_{\varepsilon\tau}/\partial f_{\alpha\beta}=\gamma^{\alpha\beta}\,dV/dF.$$

Поэтому уравнения поля (181) примут вид

$$\ddot{F}=\frac{64\pi}{3}\left\{\varepsilon\sqrt{V^3}\,\frac{d}{dF}\sqrt{U}-P\sqrt{U}\,\frac{d}{dF}\sqrt{V^3}\right\}. \tag{182}$$

В качестве начальных условий для уравнения (182) возьмем условия в настоящий момент $t = 0$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0;\ U = V = 1,\ dV/dt = 2H, \tag{183}$$

где H — постоянная Хаббла. Из экспериментов следует [57], что $20\cdot 10^9$ лет $> 1/H >7{,}5.10^5$ лет. При таком выборе начальных условий космологическое поле в настоящий момент будет являться тем псевдоевклидовым фоном, на котором мы рассматриваем все другие физические процессы.

Из условий (183) следует:

$$F(0)=0;\quad dF/dt|_{t=0}=2H/(dV/dF).$$

Уравнение (182) приведем к виду

$$\frac{d}{dt}(\dot{F}^2+C_1)=\frac{128\pi}{3}\left(\varepsilon\sqrt{V^3}\frac{d}{dt}\sqrt{U}-P\sqrt{U}\frac{d}{dt}\sqrt{V^3}\right).$$

Учитывая уравнение сохранения (177), получаем

$$\dot{F}^2+C_1=(128\pi/3)\,\varepsilon\sqrt{UV^3}.$$

Интересно отметить, что данное уравнение, полученное из уравнений гравитационного поля (181), представляет собой видоизмененную запись закона сохранения плотности энергии вещества и гравитационного поля Вселенной в плоском пространстве — времени. Действительно, если использовать определения (156) и (157), уравнение связи (179), компоненты плотности тензора энергии — импульса вещества в римановом пространстве — времени (175), а также учесть, что $f_{00}=f_{0\alpha}=0$, $f_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}F$, то получим:

$$t_M^{0\alpha}=t_g^{0\alpha}=0;\quad t_M^{00}=\varepsilon\sqrt{V^3U};\quad t_g^{00}=-(3/128\pi)\,\dot{F}^2.$$

Поэтому закон сохранения плотности тензора энергии — импульса вещества и гравитационного поля в плоском пространстве— времени (151) при $n=0$ будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(t_M^{00}+t_g^{00})=0.$$

Отсюда следует, что

$$t_M^{00}+t_g^{00}=\mathrm{const}.$$

Используя начальные условия (183), имеем

$$\varepsilon\sqrt{V^3U}-(3/128\pi)\,\dot{F}^2=(3/128\pi)\,C_1,$$

где $C_1=16H^2(1-\alpha)$.

Таким образом, полная плотность энергии вещества и гравитационного поля Вселенной в плоском пространстве — времени постоянна на всех этапах ее эволюции. Это означает, что энергия Вселенной в ходе ее эволюции не изменяется, а лишь перераспределяется между веществом и гравитационным полем.

Используя начальные условия, решение этого уравнения запишем в виде

$$t=-\frac{1}{4H}\int\limits_0^F\frac{dF'}{\sqrt{1-\alpha+(\alpha\varepsilon/\varepsilon_0)}\sqrt{V^3(F')\,U(F')}}, \qquad (184)$$

где введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=8\pi\varepsilon_0/3H^2;\quad U=f_1(F);\\&V(F)=f_1(F)+Ff_2(F)+F^2f_3(F).\end{aligned}\right\} \qquad (185)$$

Выражения (178), (184) и (185) определяют параметрически всю эволюцию однородной изотропной Вселенной, включая сингулярное состояние (или горячую Вселенную) при произвольном уравнении состояния вещества $P=P(\varepsilon)$ и уравнении связи (179), заданном в самом общем виде.

Перейдем в (184) и (174) к собственному времени. В том временном промежутке, где $U(t)$ отлична от нуля, можно перейти к собственному времени $\tau(t)$, такому, что:

$$\sqrt{U(t)}\,dt=d\tau.$$

Интервал при этом будет иметь вид

$$ds^2=d\tau^2-V(\tau)\,[dx^2+dy^2+dz^2].$$

Считая настоящий момент $\tau(0)=0$, получаем выражения, определяющие эволюцию Вселенной, заданными параметрически:

$$\tau=-\frac{1}{4H}\int\limits_0^F\frac{\sqrt{U(F')}\,dF'}{\sqrt{1-\alpha+\dfrac{\alpha\varepsilon(F')}{\varepsilon_0}}\sqrt{U(F')\,V^3(F')}}; \qquad (187)$$

$$U=f_1(F);\ V=f_1(F)+Ff_2(F)+F^2f_3(F); \qquad (188)$$

$$\ln V(F)=-\frac{2}{3}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon(F)}\frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'+P(\varepsilon')}. \qquad (189)$$

Исследуем полученные решения в окрестности настоящего момента ($|\tau|\ll 1/4H$) собственного времени. Случай $|\tau|\ll 1/4H$ соответствует малым значениям F, таким, что функции $U(F)$ и $V(F)$ мало отличаются от единицы, и поэтому справедливо разложение метрики в приближении слабого поля (180). В нашем случае ($F\ll 1$) эти разложения принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}&f_1=1-(3/2)\,F+(1/4)\,(9b_4+3b_3)\,F^2+O(F^3);\\&f_2=1+(3/4)\,b_2F+O(F^2);\\&A^{\alpha\beta}=(1/4)\,b_1\gamma^{\alpha\beta}+\gamma^{\alpha\beta}O(F);\\&f_3=(1/4)\,b_1+O(F).\end{aligned}\right\} \qquad (190)$$

Кроме того, считаем, что в окрестности настоящего момента собственного времени давление пренебрежимо мало по сравнению с плотностью энергии $p \ll \varepsilon$. Поэтому из (189) получим

$$\varepsilon(F) = \varepsilon_0/\sqrt{V^3(F)}.$$

Из разложений (190) и (188) имеем:

$$U = 1 - (3/2)F + (1/4)(9b_4 + 3b_3)F^2 + O(F^3);$$
$$V = 1 - (1/2)F + (1/4)(b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 9b_4)F^2 + O(F^3).$$

Подставляя выражения для U, V, ε в интеграл (187) и интегрируя, получаем

$$\tau = -(1/4H)\{F - (3/8)(1 - \alpha/2)F^2 + O(F^3)\}.$$

Определяя из этого соотношения F и подставляя в выражение для $V(F)$, получаем

$$V(\tau) = 1 + 2H\tau + H^2\tau^2[(3/2)\alpha - 3 + $$
$$+ 4(b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 9b_4)] + O(H^3\tau^3).$$

Метрика (186) с космологическим масштабным фактором $V(\tau)$ приводит к наблюдаемым на эксперименте эффектам. Одним из них является космологическое красное смещение, открытое в 1929 г. Хабблом [53]. Этот эффект заключается в красном смещении спектральных линий, излучаемых делекими галактиками, причем величина смещения прямо пропорциональна расстоянию от галактики до Земли. В общей теории относительности этот эффект был предсказан советским ученым А. А. Фридманом в 1922 г. [59].

Покажем, что модель однородной Вселенной в полевой теории гравитации в окрестности настоящего момента времени (при $H\tau \ll 1$ или при $\tau \ll 10^{10}$ лет) также описывает линейный характер космологического красного смещения. Пусть наблюдатель находится в точке с координатами (x_1; 0; 0). Предположим, что в точке ($x_0 < x_1$, 0, 0) при $\tau_0 < 0$ происходят два события, разделенные промежутком времени $\Delta\tau_0$ (например, излучение электромагнитной волны с периодом $\Delta\tau_0$). Из выражения для интервала $ds^2 = d\tau^2 - V(\tau)[dx^2 + dy^2 + dz^2]$ найдем уравнение движения фронта волны вдоль оси x: $d\tau = dx\sqrt{V(\tau)}$. Следовательно, первый сигнал достигает наблюдателя в момент времени τ_1, который определяется из равенства

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{V(\tau)}} = x_1 - x_0.$$

Второй сигнал достигает наблюдателя через промежуток $\Delta\tau_1$ после первого

$$\int\limits_{\tau_0+\Delta\tau_0}^{\tau_1+\Delta\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{V(\tau)}} = x_1 - x_0.$$

Вычитая из первого выражения второе, получаем

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{V(\tau)}} - \int\limits_{\tau_1}^{\tau_1+\Delta\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{V(\tau)}} = 0.$$

Воспользовавшись приближенным равенством $1/\sqrt{V(\tau)} \approx 1 - H\tau$, справедливым при $H\tau \ll 1$, получим:

$$\Delta\tau_0\,[1 - H\tau_0 - (1/2)H\Delta\tau_0] = \Delta\tau_1\,[1 - H\tau_1 - (1/2)H\Delta\tau_1].$$

Если $\Delta\tau_0 \ll \tau_0$; $\Delta\tau_1 \ll \tau_1$, то

$$\Delta\tau_1 = \Delta\tau_0\,(1 - H\tau_0)/\,(1 - H\tau_1) \approx \Delta\tau_1\,(1 - H\,(\tau_0 - \tau_1)).$$

Так как $\tau_0 < \tau_1$, имеем $\Delta\tau_1 > \Delta\tau_0$, т. е. промежуток времени между двумя сигналами, воспринимаемыми наблюдателем в точке x_1, будет больше, чем промежуток времени между этими сигналами в точке их испускания x_0. Поэтому при движении электромагнитных волн от какой-нибудь галактики их частота убывает вследствие космологического красного смещения:

$$\omega = \omega_0\,[1 + H\,(\tau_0 - \tau_1)].$$

При этом для не очень далеких от наблюдателя галактик ($r \ll 1/H \sim 10^{10}$ световых лет) указанное красное смещение будет линейно зависеть от расстояния L между наблюдателем и галактикой $\omega_1 = \omega_0\,(1 - HL)$.

Параметр замедления «расширяющейся» Вселенной $q_0 = 1 - 2\,V\ddot{V}/\dot{V}^2$ в окрестности настоящего момента времени $\tau=0$ равен

$$q_0 = 2 - 8\,(b_2 + b_3 + 4b_4) - (3/2)\,\alpha + 2\,(1 - B).$$

Для сравнения укажем, что в теории Эйнштейна параметр замедления однородной Вселенной равен $q_0 = \alpha/2$. В теории гравитации Эйнштейна параметр замедления является одной из важнейших величин, характеризующих однородную Вселенную в целом: при параметре замедления $q_0 < 1/2$ $(\alpha < 1)$ Вселенная открытая, а при $q_0 > 1/2$ $(\alpha > 1)$ Вселенная закрытая, имеющая конечный объем, но не имеющая границ. В полевой теории гравитации такой взаимосвязи нет — Вселенная имеет бесконечный объем при любых значениях величин α и q_0.

Из оценок массы вещества в галактиках [60] следует $\varepsilon_0 = 3 \times 10^{-31}$ г/см³. В этом случае $\alpha = 0{,}06$. Тогда параметр замедления в теории Эйнштейна должен быть равен $q_0 = 0{,}03$, и Вселенная будет открытой, расширяющейся неограниченно. Однако измерения параметра замедления дали иной результат.

Так, например, в работе [61] сделан вывод, что значение q_0 находится в диапазоне от 2 до 32, наиболее вероятно значение $q_0 = 5$. Таким образом, в теории Эйнштейна получаемое из наблюдений значение параметра замедления вступает в противоречие с наблюдаемой плотностью вещества в галактиках, которая значительно меньше, чем требуется для соответствия. Для устранения этого несоответствия между характеристиками космологического решения теории Эйнштейна и значениями их, получаемыми из наблюдений, в настоящее время предпринимаются попытки как по увеличению значения ε_0 (поиск недостающего вещества в галактиках, «тайна скрытого вещества»), так и по уменьшению значения q_0, получаемого из эксперимента (предположение о наличии сильной эволюции функции светимости галактик от красного смещения). Эти попытки не внесли пока определенности в решение данного вопроса.

В полевой теории гравитации в отличие от ОТО Эйнштейна параметр замедления определяется не только средней плотностью вещества ε_0 (параметр $\alpha = 8\pi\varepsilon_0/3H^2$), но и постньютоновскими коэффициентами b_1, b_2, b_3 и b_4, поэтому измерение параметра замедления q_0 позволяет, не обращаясь к постпостньютоновским экспериментам в Солнечной системе, измерить величину $8\,(b_2 + b_3 + 4b_4)$:

$$8\,(b_2 + b_3 + 4b_4) = q_0 + 2 - (3/2)\alpha + 2\,(1 - B).$$

Характер поведения модели однородной Вселенной в отдаленном прошлом существенно зависит от вида уравнения связи при сильных гравитационных полях. Поскольку нами еще не сделан выбор какого-либо конкретного уравнения связи, рассмотрим характер поведения модели в отдаленном прошлом чисто качественно.

Если уравнение $V\,(F) = 0$ имеет решение, то при $F = F_1$ определитель метрического тензора, а также его пространственные компоненты обращаются в нуль. Поэтому естественно предположить, что при $F = F_1$ реализуется сингулярное состояние Вселенной. Вблизи сингулярного состояния во Вселенной доминируют ультрарелятивистские частицы, уравнение состояния которых имеет вид $P = \varepsilon/3$. Подставляя это уравнение в (189), получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0/V^2. \qquad (192)$$

Отсюда следует, что при обращении функции $V\,(F)$ в нуль, плотность полной энергии Вселенной обращается в бесконечность, и при $F = F_1$ действительно реализуется сингулярное состояние Вселенной.

Некоторый момент времени в прошлом $\tau = \tau_m$ отвечает наименьшему положительному корню F^* уравнения $V(F) = 0$. Время $T = -\tau_m$ естественно назвать возрастом Вселенной. Он равен

$$T = \frac{1}{4H} \int\limits_0^{F^*} \frac{\sqrt{U(F)}\, dF}{\sqrt{1-\alpha+\alpha(\varepsilon/\varepsilon_0)\sqrt{UV^3}}}.$$

Вполне очевидно, что возраст Вселенной, а также особенности ее эволюции существенно зависят от уравнения связи (179).

Введем время $\tau_0 = T + \tau$, отсчитываемое от сингулярного состояния:

$$\tau_0 = \frac{1}{4H} \int\limits_F^{F^*} \frac{\sqrt{U(F')}\, dF'}{\sqrt{1-\alpha+\alpha(\varepsilon/\varepsilon_0)\sqrt{UV^3}}}.$$

В окрестности сингулярного состояния (при $F \sim F^*$) справедливо соотношение (192), поэтому мы получим

$$\tau_0 = \frac{1}{4H} \int\limits_F^{F^*} \frac{\sqrt{U(F')}\, dF'}{\sqrt{1-\alpha+\alpha\sqrt{U/V}}}. \qquad (193)$$

Выражение (193) определяет зависимость собственного времени в окрестности сингулярного состояния от гравитационного поля F и, таким образом, позволяет определить поведение функции $V(\tau)$ в данной окрестности.

Следует отметить, что если уравнение $V(F) = 0$ не имеет решения, то модель Вселенной не имеет сингулярного состояния.

Характер поведения функций U и V в окрестности сингулярного состояния существенно определяет плотности потоков и спектральные характеристики реликтовых электромагнитного, нейтринного и гравитационного излучений. Поэтому измерение плотности потоков и спектральных характеристик этих реликтовых излучений дает возможность определить поведение уравнения связи при сильных гравитационных полях. Необходимо заметить, что в тех космологических моделях, в которых уравнение $V(F) = 0$ не имеет решения, возникает парадокс Ольберса — расходимость интеграла светимости всех звезд. Действительно, полная энергия звездного света в настоящий момент $\tau = 0$ равна [57]

$$\rho = \int\limits_{-\infty}^{0} Z(\tau)[V(\tau)]^2\, d\tau. \qquad (194)$$

Здесь $Z(\tau)$ — собственная плотность светимости звезд:

$$Z(\tau) = \int n(\tau, L)\, dL$$

($n(\tau, L)$ — плотность звезд с абсолютной светимостью L в момент τ). Для сходимости интеграла (194) необходимо либо существование сингулярного состояния Вселенной ($V(F_1) = 0$) при конечном F_1, в результате чего интеграл (194) эффективно обрезается на нижнем пределе при некотором $\tau = \tau(F_1)$, либо достаточно быстрое убывание к нулю величины $V(F(\tau))$ с ростом $|\tau|$:

$$\tau V(F(\tau)) Z(\tau) \to 0$$
$$|\tau| \to 0 \; (F \to \infty).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели формулировку теории гравитации как теории симметрического тензорного поля второго ранга в плоском пространстве — времени. При этом в теории имеют строгий смысл обычные представления о переносе энергии физическими полями, и гравитационное поле, так же как и все другие физические поля, переносит положительно определенную энергию — импульс. Уравнения движения материи формулируются в терминах эффективного риманова пространства — времени с метрическим тензором g_{ni}, что обеспечивает теории равенство инертной и гравитационной масс точечного тела. Объединение представлений о гравитационном поле как о физическом поле, переносящем энергию и аналогичном другим физическим полям, с принципом тождественности приводит к новым уравнениям гравитационного поля и изменяет наши представления о пространстве — времени. Уравнения гравитационного поля в веществе являются нелинейными из-за нелинейной зависимости источника от компонент гравитационного поля. Источником в уравнениях гравитационного поля является вещество, само гравитационное поле является источником лишь постольку, поскольку выражение $T^{ni}\partial g_{ni}/\partial f_{lm}$ зависит от компонент гравитационного поля. Вне вещества уравнения поля являются линейными. При этом из-за калибровочной инвариантности уравнения гравитационного поля, являющиеся уравнениями в частных производных четвертого порядка, вне вещества переходят в уравнения второго порядка. Постньютоновское приближение полевой теории гравитации показывает, что все параметры теории, за исключением параметра β, совпадают с параметрами теории Эйнштейна. На величину β в полевой теории гравитации не накладывается никаких ограничений, поэтому из соответствия предсказаний теории результатам экспериментов было найдено, что $\beta = 1$.

Таким образом, полевая теория гравитации и теория Эйнштейна неразличимы с точки зрения любых гравитационных экспериментов, выполненных с постньютоновской точностью в гравитационном поле Солнечной системы. В полевой теории гравитации отсутствует предпочтительная система покоя, поскольку геометрия псевдоевклидова пространства — времени является не априорной, а естественной геометрией для всех физических полей, в том числе и для гравитационного поля. Риманово же пространство — время для движения вещества является эффективным пространством — временем, отражающим лишь воздействие гравитационного поля на вещество в псевдоевклидовом пространстве — времени. Поэтому полевая теория гравитации ни по смыслу, ни по уравнениям поля не попадает в класс так называемых двуметрических теорий гравитации.

В полевой теории гравитации понятие тензора энергии — импульса является общим для всех физических полей, поэтому существование волн кривизны в римановом пространстве — времени отражает перенос энергии — импульса гравитационными волнами в псевдоевклидовом пространстве — времени. Поэтому в полевой теории гравитации имеется возможность проводить различные энергетические расчеты. В полевой теории гравитации интегралы движения изолированной системы в постньютоновском приближении совпадают с интегралами движения Ньютона; при излучении слабых гравитационных волн медленно движущимся источником его энергия уменьшается в соответствии с формулой

$$-dE/dt = (G/45c^5)\,\dddot{D}^2_{\alpha\beta}. \qquad (195)$$

В отличие от полевой теории гравитации, в ОТО законы сохранения в их обычном смысле отсутствуют, в результате чего теория Эйнштейна имеет только нулевые интегралы движения. В ОТО подсчет потерь энергии источником, а также определение потоков энергии гравитационных волн оказывается невозможным, так как в теории Эйнштейна нет каких-либо законов сохранения, связывающих изменение тензора энергии — импульса вещества с существованием волн кривизны. Поэтому и формула (195) в принципе не следует из ОТО.

Уравнения поля полевой теории гравитации отличаются от уравнений теории Эйнштейна, что приводит к существенно различным описаниям в указанных теориях эффектов в сильных гравитационных полях, а также свойств гравитационного поля. К числу этих отличий относится отсутствие в полевой теории искривления гравитационного луча, проходящего возле массивных тел, в результате чего массивные тела не оказывают фокусирующего действия на гравитационные волны. Кроме того, в отличие от теории Эйнштейна, в полевой теории изменение частоты свободных гравитационных волн, излучаемых каким-либо источником, происходит только вследствие относительного движения источника и наблюдателя (доплер-эффект), так как гравитационное красное смещение свободных гравитационных волн в вакууме отсутствует.

Как и в теории Эйнштейна, в полевой теории гравитации гравитационное поле нестатического сферически-симметричного источника вне вещества является статическим полем. Нестационарные однородные модели Вселенной в полевой теории гравитации описывают космологическое красное смещение и допускают как монотонное, так и не монотонное поведение. В отличие от теории Эйнштейна, параметр замедления определяется не только средней плотностью вещества во Вселенной, но и постньютоновскими коэффициентами, поэтому в полевой теории гравитации не возникает тех трудностей, которые имеют место в ОТО Эйнштейна, связанных с недостаточной средней плотностью вещества для получения наблюдаемого параметра замедления.

Проделанный обзор различных гравитационных экспериментов показывает, что полевая теория гравитации позволяет описать всю имеющуюся совокупность экспериментальных фактов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Синг Дж.** Общая теория относительности. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. **Synge J. L., Schild A.** Tensor Calculus. Toronto, 1952.
3. **Эйнштейн А.** Собрание научных трудов. Т. I, М., Наука, 1965.
4. **Einstein A.**— Z. Phys., 1914, Bd 15, S. 108.
5. **Денисов В. И., Логунов А. А.**— Теорет. и мат. физ., 1980, т. 43, с. 187.
6. **Ehlers J. e.a.**— Astrophys. J. Lett., 1976, v. 208, p. 77.
7. **Burke W. L.**— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 401.
8. **Thorne K.** Preprint OAP-575, 1979.
9. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Наука, 1967.
10. **Логунов А. А. и др.**— Теорет. и мат. физ., 1979, т. 40, с. 291.
11. **Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.**— Там же, 1977, т. 32, с. 291.
12. **Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.**— Там же, 1977, т. 32, с. 147.
13. **Власов А. А. и др.**— Теорет. и мат. физ., 1980, т. 43, с. 147.
14. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.**— Теория поля. М., Наука, 1973.
15. **Петров А. З.** Новые методы в общей теории относительности. М., Наука, 1966.
16. **Lorentz H. A.** Collected Papers. V. 5. The Hague, 1937, p. 363.
17. **Minkowski H.**— Z. Phys., 1909, Bd 10, S. 104.
18. **Poincare H.**— Bull Sciences Math. 28, ser. 2, 303, 1904; Compt. rend. Acad. Scie. Cobon., 1905, v. 140, p. 1504; Rend Circolo mat. Palermo, 1906, v. XXI, p. 129; Einstein A.— Ann. phys., 1905, v. 17, p. 891.
19. **Rosen N.**— Gen. Rel. and Grav., 1973, v. 4, p. 435; Ann. Phys., 1974, v. 84, p. 455.
20. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1973.
21. **Deser S.**— Gen. Rel and. Grav., 1970, v. 1, p. 9.
22. **Ogievetsky V. I., Polubarinov I. V.**— Ann. Phys., 1965, v. 35, p. 167.
23. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация. Т. 2. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
24. **Fronsdal C.**— Sup. Nuovo cimento, 1958, v. 9, p. 416.
25. **Barnes K. J.**— J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 788.
26. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., Наука, 1971.
27. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. М., ГИФМЛ, 1961.

28. **Hulse R. A., Taylor J. H.** Astrophys. J. Lett., 1975, v. 195, p. 51.
29. **Taylor J. H., Fowler L. A., Mc Culloch P. M.**—Nature, 1975, v. 277, p. 437.
30. **Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.**— Теорет. и мат. физ., 1977, т. 32, с. 167; т. 33, с. 174.
31. **Nordtvedt K. (Jr.)** — Phys. Rev., 1968, v. 169, p. 1014.
32. **Roll P. G., Krotkov R., Dicke R. H.**— Ann. Phys., 1964, v. 26, p. 442.
33. **Брагинский В. Б., Панов В. И.**— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 61, с. 873.
34. **Will C. M., Nordtvedt K.**— Astrophys. J., 1972, v. 177, p. 757.
35. **Will C. M.**— Ibid., 1973, v. 185, p. 31.
36. **Will C. M.**— Ibid., 1971, v. 169, p. 125.
37. **Lee D. L., Lightman A. P., Ni W.—T.**— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 1685.
38. **Иваницкая О. С.** Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновой теории тяготения. Минск, Наука и техника, 1979.
39. **Shapiro I.**— Science, 1967, v. 157, p. 806.
40. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация. Т. 3. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
41. **Shapiro I.**— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 789.
42. **Will C. M.**— In: Proc. IX Texas Sump. on Relativistic Astrophysics. Munich, 1978.
43. **O'Conell R. F.**— Gen. Rel and Grav., 1972, v. 3, p. 123.
44. **Коноплева Н. П.**— Успехи физ. наук, 1977, т. 123, с. 537.
45. **Dicke R. H., Goldenberg H. M.**— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 18, p. 313.
46. **Shapiro I. e.a.**— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1594; Gen. Rel and Grav., 1972, v. 3, p. 135.
47. **Bondi H.**— Rev. Mod. Phys., 1957, v. 29, p. 423.
48. **Nordtvedt K. (Jr.)** — Phys. Rev., 1968, v. 169, p. 1017; 1969, v. 180, p. 1293; Phys. Rev. D, 1973, v. 7, p. 2347.
49. **Will C. M.**— Astrophys. J., 1971, v. 163, p. 611.
50. **Williams e.a.**— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 551.
51. **Shapiro I. e.a.**— Ibid., 1976, v. 36, p. 555.
52. **Nordtvedt K. (Jr.)** — Phys. Rev., 1969, v. 180, p. 1293.
53. **Kreuzer L. B.**— Ibid., 1968, v. 169, p. 1007.
54. **Ni W.-T.**— Astrophys. J., 1972, v. 176, p. 769.
55. **Nordtvedt K. (Jr.), Will C. M.**— Ibid., 1972, v. 177, p. 775.
56. **Will C. M.**— Ibid., 1971, v. 169, p. 141.
57. **Вейнберг С.** Гравитация и космология. Пер. с англ. М., Мир, 1975.
58. **Hubble E. P.**— Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1929, v. 15, p. 169.
59. **Friedman A.**— Z. Phys., 1922, Bd 10, S. 377.
60. **Oort J.** In: Distribution of Galaxies and Density in the Universe, Solvay Conf., 1958; Brussels, 1959.
61. **Turner E. L.**— Astrophys. J., 1979, v. 230, p. 291.