«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1981, том 12, вып. 1

УДК 519.4

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ. II

А. Н. Лезнов, М. В. Савельев

Институт физики высоких энергий, г. Серпухов

Дается конструктивное доказательство полной интегрируемости широкого класса двумерных нелинейных систем, содержащего, в частности, уравнения дуальности для полей Янга — Миллса при произвольном вложении подгруппы SU (2) в произвольную простую группу Ли. В явном виде построены общие решения для обобщенной двумерной цепочки Тода, отвечающей в случае закрепленных концов простым алгебрам Ли и бесконечномерным контрагредиентным алгебрам для соответствующей периодической задачи (многокомпонентные обобщения уравнения синус-Гордона). Кроме того, проинтегрирован ряд других двумерных нелинейных систем, в том числе уравнения Вольтерра (разностные КдФ) и суперсимметричное обобщение уравнения Лиувилля. В основе развитого метода интегрирования нелинейных уравнений лежит явная реализация для рассматриваемых систем представления типа Лакса операторами, принимающими значения в соответствующей алгебре, и теория представлений групп.

A constructive proof of complete integrability of a wide class of two-dimensional nonlinear systems of partial differential equations is given. This class contains in particular self-dual equations for Yang— Mills fields for an arbitrary embedding of SU(2) in arbitrary simple Lie group. General solutions for the generalized two-dimensional Toda lattice, which correspond to the simple Lie algebras for the case of fixed endpoints and to infinite-dimensional contragredient algebras for the relevant periodic boundary conditions (multi-component generalizations of sine-Gordon equation), are constructed in explicit form. Moreover some others two-dimensional nonlinear systems are integrated, in particular, Volterra equations (difference KdV) and supersymmetric generalization of the Liouville equation. The developed method of integration of nonlinear equations is based on the explicit realization of the Lax — type representation and representation theory of corresponding groups.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением нашего обзора [1], посвященного построению точных решений цилиндрически-симметричных уравнений калибровочных теорий, и содержит дальнейшее развитие теоретико-группового метода интегрирования широкого класса нелинейных двумерных уравнений математической физики.

Основной вывод конструктивного характера, вытекающий из результатов, представленных в первой части обзора, заключается в доказательстве полной интегрируемости системы цилиндрически-симметричных уравнений дуальности в 4-мерном евклидовом пространстве R_4 для классических полей Янга — Миллса при минимальном вложении подгруппы $SU(2)$ в произвольную простую калибровочную группу Ли G. При этом были получены общие решения нелинейной системы:

$$\partial^2 x_\alpha (z_+,\ z_-)/\partial z_+ \partial z_- = \exp \sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta} x_\beta (z_+,\ z_-),$$

$$1 \leqslant \alpha \leqslant r,\ x_0 = x_{r+1} = 0, \qquad (1)$$

(k — матрица Картана G ранга r), описывающие соответствующие конфигурации полей и определяющиеся $2r$ произвольными функциями, и выделены их r-параметрические подклассы, отвечающие инстантонам и несингулярным монополям.

За время, прошедшее с момента написания обзора [1], были решены [2—6, 44, 45] многие вопросы, перечисленные в его заключении в качестве перспектив дальнейших исследований, а именно:

построение инвариантного метода интегрирования системы (1) без привлечения информации о явном виде корневых систем каждого типа простых алгебр Ли в отдельности;

интегрирование системы (1) в случае неполупростых алгебр Ли, в том числе бесконечномерных контрагредиентных и супералгебр Ли;

нахождение преобразования Бэклунда для систем типа (1);

обобщение на случай произвольного вложения $SU(2)$ в произвольную группу Ли G (построение соответствующих уравнений дуальности калибровочных полей и их интегрирование) и т. д.

При этом возможность явной реализации для рассматриваемых уравнений пары операторов представления типа Лакса, принимающих значения в алгебре соответствующей группы, позволило переформулировать проблему интегрирования широкого класса нелинейных систем, в том числе (1), в терминах основных понятий теории представлений групп и построить их общие решения. В результате процедура интегрирования, изложенная в [1] и носившая полуинтуитивный характер, связанная с большими вычислительными трудностями для групп типа E_7, E_8, имеющих громоздкие корневые системы, приобрела значительную общность и простоту. Эти обстоятельства и побудили нас написать продолжение к обзору [1], окончательный текст которого составлен на основе докладов на семинарах ИФВЭ, ОИЯИ, ФИАН, ЛОМИ, МГУ, симпозиумах по теории солитонов (Киев, 1979 г.) и теоретико-групповым методам в физике (Звенигород, 1979 г.).

Рассматриваемые в обзоре уравнения калибровочных полей представляют собой существенно нелинейную систему, которая, в частности, обеспечивает единое описание для произвольной простой группы инстантонных, монопольных (дионных) и меронных конфигураций — основных нелинейных объектов теории калибровочных полей. Кроме того, в зависимости от выбора адекватной алгебраической структуры и градуировки в ней уравнения этого типа описывают широкий класс нелинейных эффектов и в других самых различных областях теоретической физики и механики.

Система (1), в частности, помимо теории калибровочных полей, встречается при том или ином выборе матрицы k в физике твердого тела и плазмы, теории электролитов, аэродинамике, нелинейной оптике, космологических моделях и т. д. В одномерном случае ($x_\alpha = x_\alpha\,(z_+ + z_-)$ для картановских матриц k простых алгебр Ли она эквивалентна обобщенной (конечной, непериодической) цепочке Тода (см., например, [7, 8]), изучению и построению точных решений которой в последние годы посвящены многочисленные работы [7—20] и др. Для обобщенных матриц Картана контрагредиентных бесконечномерных алгебр [21] система (1), которую можно рассматривать в этом случае как многокомпонентное обобщение уравнения синус-Гордона, описывает соответствующие цепочки Тода с периодическими граничными условиями. При рассмотрении в качестве k-матриц Картана Z_2-градуированных супералгебр Ли также возникают интересные системы, в частности, уравнения «N волн» нелинейной оптики. Большой класс нелинейных уравнений, в частности Кортевега — де Фриза, представляет собой специальный случай системы (1), отвечающий континуальному обобщению матрицы k на непрерывный спектр индексов α и β. Таким образом, многие известные двумерные уравнения математической физики (см. например, [22—25]), возникшие из разных областей физики и рассматриваемые в рамках различных математических методов, представляют собой частные случаи (1) при определенном выборе матрицы k или ее непрерывного аналога.

Как отмечалось выше, система (1) возникает как реализация условия дуальности калибровочного поля, принимающего значения в алгебре калибровочной группы G при минимальном вложении в нее 3-мерной подалгебры $su\,(2)$, входящей в определение диагональной группы [1]. В случае же произвольного вложения $su\,(2)$ в $\mathfrak{g}$ получается существенно более общая система, причем будет видно из дальнейшего, что развиваемый метод интегрирования применим не только к компактным, но и к некомпактным, неполупростым алгебрам Ли, а также к бесконечномерным контрагредиентным алгебрам и супералгебрам Ли.

Другой важной особенностью системы (1) является ее тесная связь с целым рядом нелинейных дифференциально-разностных уравнений первого порядка по производным. В частности, конечная система вида

$$\left.\begin{aligned} &\partial N_{2\alpha-1}/\partial z_+ = -N_{2\alpha-1}(N_{2\alpha}-N_{2\alpha-2});\\ &\partial N_{2\alpha}/\partial z_- = N_{2\alpha}(N_{2\alpha+1}-N_{2\alpha-1}),\\ &1\leqslant\alpha\leqslant r+1,\ N_0=N_{2r+2}=0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(функции N_a, $1\leqslant a\leqslant 2r+1$, зависят от двух независимых переменных z_+, z_-) представляет собой преобразование Бэклунда для системы (1) в случае картановской матрицы k серии A_r *. Благодаря этому удается построить общие решения системы (2), зависящие от $2r+1$ произвольных функций, зная явный вид общих решений уравнений (1) для серии A_r. Систему (2) в дальнейшем будем называть двумеризованными уравнениями Вольтерра, имея в виду, что в одномерном случае, $N_a = N_a(t)$, $t \equiv z_+ - z_-$, она представляет собой специальный вариант уравнений, введенных Вольтерра применительно к проблемам экологии [27] (в частности, для изучения динамики сосуществования видов). В физических приложениях эта система возникает при изучении тонкой структуры спектров ленгмюровских волн в плазме и описывает при граничных условиях $N_a \xrightarrow[a\to\pm\infty]{} \mathrm{const}$ распространение спектрального пакета ленгмюровских колебаний на фоне теплового шума [28]. Подробный обзор различных приложений цепочек бесконечной длины для $N_a(t)$ и связанных с ними других нелинейных дифференциально-разностных систем, в том числе нелинейных индукционно-емкостных цепей лестничного типа, используемых в радиотехнических схемах, содержится в сборнике [8]. (Там же приведены известные специальные решения этих уравнений, в частности, солитонного типа, полученные как с помощью преобразования Бэклунда, так и путем вычислений на ЭВМ.) Периодическая задача для одномерной цепочки Вольтерра (разностного уравнения Кортевега — де Фриза) рассмотрена в [24]. В работе [11] на основе метода обратной задачи рассеяния развита схема ее интегрирования для быстроубывающих начальных условий, найдена лаксовская пара операторов и интегралы движения.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения:

G — произвольная простая группа Ли ранга r;

$\mathscr{H}$ — картановская подгруппа G;

$Z^\pm$ — максимальные нильпотентные подгруппы G;

$\widetilde{G}$ ($\widetilde{Z}^\pm$, $\widetilde{\mathscr{H}}$) — комплексная оболочка группы G ($Z^\pm$, $\mathscr{H}$);

* В одномерном случае преобразование Бэклунда для цепочки Тода (бесконечной длины) получено в работах [11, 26] и др. (для подробных ссылок см. [8, 24]).

$\mathfrak{g}$ — алгебра Ли G;

$\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра $\mathfrak{g}$;

R_+ (R_-) — система положительных (отрицательных) корней $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$;

k — матрица Картана $\mathfrak{g}$; $\delta_\alpha \equiv 2 \sum_\beta k^{-1}_{\alpha\beta}$;

v_α — элементы диагональной матрицы V, симметризующей картановскую $Vk = k^T V$;

$X_{\pm j}$ — элементы корневого пространства j-го корня, $\pm j \in R_\pm$;

h_α — образующие $\mathfrak{h}$, отвечающие простым корням α.

Для рассматриваемых в обзоре, в связи с задачей интегрирования нелинейных систем, алгебр (в том числе и бесконечномерных контрагредиентных) градуировка задается некоторым картановским элементом h из алгебры (или элементом, не принадлежащим алгебре), по отношению к которому все генераторы алгебры разбиваются на подсистемы с фиксированным собственным значением их элементов при действии на h. Вложение 3-мерной подгруппы $SU(2)$ в группу G канонично и задается вектором вложения или своим картановским элементом h [31], который совместно с генераторами L^+ и L^- удовлетворяет обычным коммутационным соотношениям $[h, L^\pm]_- = \pm 2L^\pm$, $[L^+, L^-]_- = h$. При этом совокупность генераторов, отвечающих положительным и отрицательным корням $\mathfrak{g}$ и коммутативных с h, образуют вместе с элементами $\mathfrak{h}$ подалгебру $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, называемую инвариантной подалгеброй. Соответствующую группу G_0 назовем подгруппой инвариантности, она является калибровочной группой двумерного пространства [1] и в случае минимального вложения $SU(2)$ в G изоморфна $\prod_1^r \otimes U(1)$. Обозначим $\mathring{Z}^\pm$ — максимальные нильпотентные подгруппы G_0; $Z_0^\pm$ — фактор группы $Z^\pm/\mathring{Z}^\pm$ n — число положительных корней $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$.

Будем называть собственное значение λ операторнозначной величины A (принимающей значения в $\mathfrak{g}$) относительно h, т. е. $[h, A]_- = \lambda A$, порядком A. В соответствии с этим обозначим через $R_+^{(2)}$ ($R_-^{(2)}$) подсистему R_+ (R_-), которой отвечают генераторы $\mathfrak{g}$, имеющие порядок $+2$ (-2); $\widetilde{R}_+$ ($\widetilde{R}_-$) — остальные корни, т. е. $\widetilde{R}_\pm = R_\pm / R_\pm^{(2)}$; r_2 — число корней $R_+^{(2)}$. Очевидно, что в случае минимального вложения система $R_+^{(2)}$ ($R_-^{(2)}$) состоит из всех положительных (отрицательных) простых корней $\mathfrak{g}$, причем $r_2 = r$ [1].

Произвольный элемент g из $\widetilde{G}$ представим в виде модифицированного разложения Гаусса:

$$g = M^+ N^- g_0^- = M^- N^+ g_0^+$$

где $\{M^\pm\ N^\pm\} \in \widetilde{Z}_0^\pm$, $g_0^\pm \in G_0$.

которое совпадает с обычным при $G_0 = \prod_1^r \otimes U(1)$, когда $\widetilde{Z}_0^{\pm} \Rightarrow \widetilde{Z}^{\pm}$, $\widetilde{G}_0 \Rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$, причем $g_0^{\pm} \Rightarrow \exp H^{\pm} \in \widetilde{\mathcal{H}}$. (Это разложение в приведенной форме справедливо только для конечномерных групп.) Из (3) вытекает очевидное тождество

$$(M^-)^{-1} M^+ = N^+ g_0^+ (g_0^-)^{-1} (N^-)^{-1} \tag{4}$$

согласно которому групповые параметры (например, углы Эйлера 3-мерных подгрупп G) элементов $N^{\pm}$, $g_0^+ (g_0^-)^{-1}$ являются функциями групповых параметров элементов $M^{\pm}$.

Символом $A \cap \{R_0\} = 0$ будем обозначать отсутствие генераторов, отвечающих корням некоторого поднабора $R_0 \subset R_{\pm}$, в разложении операторнозначной величины A, натянутой на элементы $\mathfrak{g}$.

Все основные понятия теории алгебр и групп Ли, используемые в дальнейшем, содержатся, например, в монографиях [29, 30].

1. ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПОЛЕЙ ЯНГА-МИЛЛСА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВЛОЖЕНИИ $SU(2)$ В ПРОИЗВОЛЬНУЮ КАЛИБРОВОЧНУЮ ГРУППУ

1. Уравнения движения; действие и топологический заряд. Рассмотрим поле Янга — Миллса $A_\mu(x)$, $x \in R_4$, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, цилиндрически-симметричное относительно полного момента $\mathbf{J} = \mathbf{M} + \mathbf{L}$, где $\mathbf{M} = -i\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nabla}$ — операторы пространственных вращений, а $\mathbf{L}$ — генераторы некоторой подгруппы $SU(2)$ группы G, которая является, вообще говоря, произвольной (не обязательно полупростой). Тогда в соответствии с [1] компоненты поля $A_\mu(x)$ параметризуются четырьмя операторными структурами $W^\mu = W^\mu(r, t)$, $r \equiv \sqrt{\mathbf{x}^2}$, $t \equiv x_0$, являющимися скалярами относительно полного момента, $[\mathbf{J}, W^\mu]_- = 0$,

$$A_0 = W^0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{n} W^1 + \mathbf{M} W^2 + \mathbf{n} \times \mathbf{M} W^3, \tag{5}$$

где $\mathbf{n} \equiv \mathbf{x}/r$. (Величины W^μ представимы в виде линейной комбинации $W^\mu = \sum_{\{l\}} \varphi_l^\mu(r, t) W^l$ операторов W^l, инвариантных относительно полного момента, обладающего спектром l собственных значений, который фиксирован вложением $SU(2)$-подалгебры в простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ [1].)

Электрическая $\mathbf{E}$ и магнитная $\mathbf{H}$ напряженности калибровочного поля можно вычислить по обычным правилам, и в системе

$\mathbf{n} = (0,\ 0,\ 1)$ представить в виде

$$\left.\begin{aligned}&E_0 = (1/2)\,[D_{z_+},\ D_{z_-}]_-;\ H_0 = -(1/2)\,(z_+ + z_-)^{-2}\{[W^+,\ W^-]_- + h\};\\&E_\pm - H_\pm = -(z_+ + z_-)^{-1}\,(D_{z_\mp} W^\pm);\ E_\pm + H_\pm =\\&= (z_+ + z_-)^{-1}\,(D_{z_\pm} W^\pm).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\{E_0,\ E_\pm\} \equiv \{\mathrm{i}E_3,\ E_1 \pm \mathrm{i}E_2\};\ \{H_0,\ H_\pm\} \equiv \{\mathrm{i}H_3,\ H_1 \pm \mathrm{i}H_2\};$$
$$W_{z_\pm} \equiv -W^1 \mp \mathrm{i}W^0,\ W^\pm \equiv \mp (z_+ + z_-)\,\{[L^\pm,\ \pm\mathrm{i}W^2 - W^3]_- -$$
$$-(z_+ + z_-)^{-1} L^\pm\};$$

$(D_{z_\pm} W) \equiv W_{,z_\pm} + [W_{z_\pm},\ W]_-$ — ковариантные производные; $\{h,\ L^\pm\} \equiv \{\mathrm{i}L_3,\ L_1 \pm \mathrm{i}L_2\}$ — образующие $SU(2)$ подгруппы G, причем h — картановский элемент, определяющий вложение; $2z_\pm \equiv r \mp \mathrm{i}t$; $W_{,z} \equiv \partial W/\partial z$. Из (6) вытекает, что $F_{z_+z_-} \equiv 2E_0$ суть тензор калибровочного поля $W_{z_\pm}$ двумерного пространства $E_\pm$, $H_\pm$ — ковариантные производные в искривленном пространстве от источников поля $W^\pm$, а $V \equiv 2H_0$ играет роль взаимодействия источников между собой.

В соответствии с выражением (6) для напряженностей поля, плотности действия $S \equiv -\pi \int dz_+\, dz_- s$ и топологического заряда $Q \equiv -(1/16\pi) \int dz_+\, dz_- q$ имеют вид:

$$\begin{aligned}s = \mathrm{Sp}\,\{(1/2)\,(z_+ + z_-)^2\,(F^2_{z_+z_-} + V^2) - (D_{z_+}W^-)\,(D_{z_-}W^+) -\\- (D_{z_+}W^+)\,(D_{z_-}W^-)\};\end{aligned} \tag{7}$$

$$q = \mathrm{Sp}\,\{-(z_+ + z_-)^2\,F_{z_+z_-}V + (D_{z_+}W^-)\,(D_{z_-}W^+) - (D_{z_+}W^+)\,(D_{z_-}W^-)\} \tag{8}$$

(ср. с соответствующими формулами для минимального вложения [1]). Таким образом, лагранжиан системы описывает взаимодействие заряженных полей $W^\pm$ и калибровочного поля $F_{z_+z_-}$ с самодействием в двумерном искривленном пространстве.

Уравнения движения в терминах указанных полей можно получить варьированием функционала действия (7)

$$\begin{aligned}[D_{z_+},\ D_{z_-}]_+ W^\pm = \pm [W^\pm,\ V]_-,\ [D_{z_+},\ F_{z_+z_-}]_- = [W^+,\ (D_{z_+}W^-)]_- -\\- [W^-,\ (D_{z_+}W^+)]_-,\end{aligned} \tag{9}$$

где $[\ \ ,\ \ ]_+$ обозначает антикоммутатор.

Уравнения самодуальности представляют собой специальный подкласс этой общей системы:

$$(D_{z_-}W^+) = 0; \quad (D_{z_+}W^-) = 0; \quad [D_{z_+}, D_{z_-}]_- = [W^-, W^+]_-, \tag{10}$$

и вытекают из (6) в результате приравнивания компонент электрической и магнитной напряженностей поля *. При этом их запись в форме (10) требует дополнительной замены $W_{z_\pm} \Rightarrow W_{z_\pm} \pm h/2\,(z_+ + z_-)$, $W^\pm \Rightarrow (z_+ + z_-)\,W^\pm$, «выпрямляющей» пространство и сокращающей член $-1/2\,(z_+ + z_-)^{-2}\,h$ в выражении для H_0. Соответствующие уравнения для антисамодуальных полей получаются из (10) очевидной заменой $W^+ \rightleftarrows W^-$.

Систему (10) можно переписать в виде соотношения

$$[\partial/\partial z_+ + W_{z_+} + W^+, \ \partial/\partial z_- + W_{z_-} + W^-]_- = 0, \tag{11}$$

являющегося реализацией представления типа Лакса [32] для уравнений (10) (ср. с [33]), описывающих цилиндрически-симметричные поля Янга — Миллса для произвольного вложения $SU(2)$ в калибровочную группу. [Эквивалентность форм записи (10) и (11) уравнений самодуальности очевидна, так как члены $[D_{z_+}, D_{z_-}]_- - [W^-, W^+]_-$, $(D_{z_+}W^-)$ и $(D_{z_-}W^+)$ в левой части соотношения (11) имеют разный порядок (± 2 и 0) относительно картановского элемента h.*

Подчеркнем, что до сих пор не было сделано никаких предположений относительно свойств калибровочной группы, за исключением требований наличия у нее 3-мерной подгруппы $SU(2)$. Это обстоятельство благодаря возможности, как мы увидим в дальнейшем, полностью проинтегрировать рассматриваемую систему на основе представления (11) позволяет получить широкий класс вполне интегрируемых систем нелинейных уравнений в двумерном пространстве и в явном виде найти их решения.

2. Интегрирование уравнений дуальности для компактных групп. Представление (11) можно рассматривать как условие градиентности вектора $A_\pm \equiv W_\pm + W^\pm$, т. е.

$$A_{z_+} = g^{-1}g_{,z_+}; \quad A_{z_-} = g^{-1}g_{,z_-}, \tag{12}$$

где $g \in \widetilde{G}$. В параметризации (3) выражения (12) принимают вид:

$$A_{z_+} = (g_0^+)^{-1}(N^+)^{-1}(M^-)^{-1}M^-_{,z_+}N^+g_0^+ + \\ + (g_0^+)^{-1}(N^+)^{-1}N^+_{,z_+}g_0^+ + (g_0^+)^{-1}g^+_{0,z_+}; \tag{13}$$

$$A_{z_-} = (g_0^-)^{-1}(N^-)^{-1}(M^+)^{-1}M^+_{,z_-}N^-g_0^- + \\ + (g_0^-)^{-1}(N^-)^{-1}N^-_{,z_-}g_0^- + (g_0^-)^{-1}g^-_{0,z_-}. \tag{14}$$

---

* Отметим, что (10) являются дифференциальными уравнениями в двумерном пространстве для функций $u_\alpha^\pm(z_+, z_-)$ и $f_j^\pm(z_+, z_-)$, входящих в определение операторов $W_{z_\pm} = \sum u_\alpha^\pm \mathfrak{g}_\alpha^0$, $W^\pm = \sum f_j^\pm X_{\pm j}$, (*) где $\mathfrak{g}_\alpha^0$ суть образующие $\mathfrak{g}_0$, $[h, \mathfrak{g}_\alpha^0]_- = 0$, $X_{\pm j}$ — генераторы $\mathfrak{g}$, имеющие порядок ± 2 относительно h, $[h, X_{\pm j}]_- = \pm 2X_{\pm j}$.

Согласно определению в разложении величин A_{z_+} (A_{z_-}) по генераторам $\mathfrak{g}$ присутствуют, помимо элементов $\mathfrak{g}_0$, только положительные (отрицательные) корни $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ порядка $+2$ (-2), иначе говоря,

$$A_{z_+} \cap \{R_-, \tilde{R}_+\} = 0; \; A_{z_-} \cap \{R_+, \tilde{R}_-\} = 0. \tag{15}$$

С учетом этих условий из (13) и (14) получаем:

$$M^-_{,z_+} = 0; \; M^+_{,z_-} = 0, \text{ т. е. } M^+ = M^+(z_+), \; M^- = M^-(z_-); \tag{16}$$

$$(N^-)^{-1} N^-_{,z_-} \cap \{\tilde{R}_-\} = 0; \tag{17}$$

$$(N^+)^{-1} N^+_{,z_+} \cap \{\tilde{R}_+\} = 0. \tag{18}$$

Ввиду того что параметры элементов N^+, N^-, $g_0^+ (g_0^-)^{-1}$ выражаются благодаря (4) через параметры M^+ и M^-, условия (17) и (18) следует также переформулировать через эти элементы, сведя задачу к их определению. Покажем, что каждое из соотношений (17) и (18) представляет собой систему ($n - r_2$) уравнений, связывающих в соответствии с тождеством (4) первые производные групповых параметров элементов M^+ и M^-. Действительно, рассмотрим, например, (17). Ввиду того что M^+ зависит лишь от z_+, реализация условия (17) в (14) не зависит от вида элемента M^+, который можно положить равным единице. Тогда формула (4) перепишется в виде $M^- = N^- g_0^- (g_0^+)^{-1} (N^+)^{-1}$, вследствие чего элементы N^+ и $g_0^+ (g_0^-)^{-1}$ в ней становятся также единичными, и поэтому в соотношении (17) можно заменить N^- на M^-. Аналогично этому в формуле (18) элемент N^+ заменяется на M^+. В результате система (17), (18) эквивалентна условиям:

$$(M^+)^{-1} M^+_{,z_+} \cap \{\tilde{R}_+\} = 0; \; (M^-)^{-1} M^-_{,z_-} \cap \{\tilde{R}_-\} = 0, \tag{19}$$

благодаря чему n параметров M^+ (M^-) связаны ($n - r_2$) уравнениями, и, следовательно, каждый из элементов M^+ и M^- зависит от $n - (n - r_2) \equiv r_2$ произвольных параметров, являющихся функциями z_+ и z_- соответственно.

Обратимся теперь к решению системы (19), которую можно переписать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} M^+_{,z_+} &= M^+ \sum_{\alpha \in R_+^{(2)}} \varphi_{+\alpha}(z_+) X_{+\alpha}; \\ M^-_{,z_-} &= M^- \sum_{\alpha \in R_+^{(2)}} \varphi_{-\alpha}(z_-) X_{-\alpha}; \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где $X_{\pm\alpha}$ — элементы $\mathfrak{g}$, отвечающие корням $\pm\alpha \in R_\pm^{(2)}$; $\varphi_{\pm\alpha}(z_\pm)$ — произвольные функции своих аргументов. Решение уравнений (20) (аналогично S-матричному уравнению, см., например, [34]) представимо в виде анти-$\mathfrak{Z}_\pm$-упорядоченной экспоненты с лагранжианом $\hat{L}^{\pm} \equiv \sum\limits_{\alpha \in R_{+}^{2}} \varphi_{\pm\alpha}(z_{\pm}) X_{\pm\alpha}$:

$$M^{\pm} = \mathfrak{Z}_{\pm} \exp \int^{z_{\pm}} \hat{L}^{\pm}(z_{\pm})\, dz_{\pm}, \tag{21}$$

или, через повторные интегралы от запаздывающих коммутаторов (см., например, [35]);

$$\left.\begin{aligned}
&M^{\pm} = \exp \sum_{m=1} \frac{1}{m!} \int \cdots \int \prod_{i=1}^{m} dz_{\pm}^{(i)} \theta (z_{\pm}^{(i-1)} - z_{\pm}^{(i)}) \times \\
&\times R_{m}^{\pm}(z_{\pm}^{(1)}, \ldots, z_{\pm}^{(m)}); \\
&R_{1}^{\pm} = L_{1}^{\pm};\ R_{2}^{\pm} = [L_{1}^{\pm}, L_{2}^{\pm}]_{-}; \\
&R_{3}^{\pm} = [L_{1}^{\pm}, [L_{2}^{\pm}, L_{3}^{\pm}]_{-}]_{-} + [L_{3}^{\pm}, [L_{2}^{\pm}, L_{1}^{\pm}]_{-}]_{-}; \\
&R_{4}^{\pm} = 2\,[L_{1}^{\pm}, [L_{2}^{\pm}, [L_{3}^{\pm}, L_{4}^{\pm}]_{-}]_{-}]_{-} + 2[L_{3}^{\pm}, [L_{2}^{\pm}, [L_{4}^{\pm}, L_{1}^{\pm}]_{-}]_{-}]_{-} + \\
&+ 2[L_{4}^{\pm}, [L_{1}^{\pm}, [L_{3}^{\pm}, L_{2}^{\pm}]_{-}]_{-}]_{-} + 2[L_{4}^{\pm}, [L_{3}^{\pm}, [L_{1}^{\pm}, L_{2}^{\pm}]_{-}]_{-}]_{-}; \\
&R_{m}^{\pm} = \sum_{i_1, \ldots, i_m} [L_{i_1}^{\pm}, [L_{i_2}^{\pm}, [L_{i_3}^{\pm}, [\ldots [L_{i_{m-1}}^{\pm}, L_{i_m}^{\pm}]_{-}]_{-}]_{-}]_{-}]_{-},
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где $z_{\pm}^{(0)} \equiv z_{\pm}$; $\theta(z) \equiv \begin{cases} 1, & z \geqslant 0, \\ 0, & z < 0 \end{cases}$ $L_{i}^{\pm} \equiv \hat{L}^{\pm}(z_{\pm}^{(i)})$. При этом ввиду конечномерности рассматриваемых здесь групп ряд в экспоненте выражения (22) содержит конечное число членов.

Таким образом, формулы (21) или (22) решают задачу интегрирования системы (10), так как вследствие тождества (4) групповые параметры оставшихся неизвестных элементов $N^{\pm}$ и $g_0^{+}(g_0^{-})^{-1}$ выражаются через параметры $M^{\pm}$.

3. Монопольные конфигурации. Аналогично рассмотренному в [1] специальному случаю минимального вложения, проведенное выше построение общих решений уравнений дуальности в R_4 для произвольного вложения $SU(2)$ в G решает также задачу описания сферически-симметричных монополей (дионов) в пространстве Минковского (с полем Хиггса φ в присоединенном представлении G) в пределе БПЗ (Богомольного — Прасада — Зоммерфельда) [36]. При этом плотность гамильтониана $\hat{\mathscr{H}}$ для чисто магнитных, не зависящих от времени решений, задается выражением

$$\mathscr{H} = (1/2)\,\mathrm{Sp}\,\hat{\mathbf{H}}^2 + (1/2)\mathrm{Sp}\,(\mathbf{D}\varphi)^2 \equiv (1/2)\,\mathrm{Sp}\,(\hat{\mathbf{H}} \mp \mathbf{D}\varphi)^2 \pm \mathrm{Sp}\,(\hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{D}\varphi), \tag{23}$$

где $\hat{\mathbf{H}}$ — магнитная напряженность поля Янга — Миллса $\hat{A}_{\mu} = (0, \hat{\mathbf{A}})$, параметризованного структурами $\hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{W}}(r)$ [см. (5)]; $(\mathbf{D}\varphi) \equiv \mathbf{n}\varphi_{,r} - [\hat{\mathbf{A}}, \varphi]_{-}$.

В пределе БПЗ любое решение дифференциальных уравнений $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{D}\varphi$ ($\hat{\mathbf{H}} = -\mathbf{D}\varphi$) реализует минимум энергии $\mathbf{E} = \int d^3x \mathscr{H} \geqslant \int d^3x\, \mathbf{Sp}\,(\hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{D}\varphi)$, определяемый формулой

$$\left.\begin{aligned} &2\pi \int_0^{\mathfrak{r}} d\mathfrak{r}\, \mathrm{Sp}\,\{\mathfrak{r}^2 (D_{\mathfrak{r}}\varphi)^2 - [\hat{W}^+, \varphi]_- [\hat{W}^-, \varphi]_-\}, \\ &(D_{\mathfrak{r}}\varphi) \equiv \varphi_{,\mathfrak{r}} - [\hat{W}^1, \varphi]_-. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Сравнивая (24) с интегралом по $\mathfrak{r}$ от плотности действия s, задаваемой формулой (7), в которой структуры $W_{z_\pm}$ и $W^\pm$ удовлетворяют уравнениям самодуальности и осуществлен переход к статическому пределу, убеждаемся, что они совпадают при $W^0 = \varphi$ и $\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{W}$. Таким образом, прообразы $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ и $\varphi = A_0$ статических самодуальных полей (A_0, $\mathbf{A}$) в R_4 являются монопольными решениями в пространстве Минковского с полем Хиггса в присоединенном представлении G, содержащем произвольным образом вложенную подгруппу $SU\,(2)$.

Для описания несингулярных магнитных монополей следует перейти к статическому пределу в полученных выше выражениях для общих решений уравнений (10), определяемых $2r^{(2)}$ произвольными функциями, и обеспечить конечность энергетического функционала (24) путем наложения соответствующих граничных условий. При этом параметры (постоянные интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $u_\alpha^\pm$, $f_i^\pm$ (*), зависящих в статическом пределе от $z_+ + z_- \equiv \mathfrak{r}$) перестают быть независимыми и связаны алгебраическими соотношениями (ср. с [1]).

Энергия монопольной системы M и матрица ее магнитного заряда g_0 определяются асимптотикой при $\mathfrak{r} \to \infty$ магнитного поля $H_{\mathfrak{r}} \equiv \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{H}}$ и поля Хиггса φ согласно формулам [1]

$$M = \lim_{\mathfrak{r}\to\infty} 4\pi\mathfrak{r}^2\, \mathrm{Sp}\,(H_{\mathfrak{r}}\varphi) \quad \text{и} \quad H_{\mathfrak{r}} \underset{\mathfrak{r}\to\infty}{\Rightarrow} g_0/4\alpha\mathfrak{r}^2,$$

где

$$H_{\mathfrak{r}} = -(1/2)\,\{\sum_{i,j \in R^{(2)}} f_i^+ f_j^- [X_i, X_{-j}]_- - \mathfrak{r}^{-2} h\};$$

$$\varphi = (1/2) \sum_\alpha (u_\alpha^+ - u_\alpha^-)\, \mathfrak{g}_\alpha^0 + (1/2)\, \mathfrak{r}^{-1} h.$$

4. Топологический заряд дуальной конфигурации. Плотность топологического заряда (8) самодуальной системы в результате простых алгебраических преобразований можно записать через операторы $W^{\pm}$ и $W_{z_\pm}$:

$$q = \mathrm{Sp}\, h\, [W_{z-,z+} - W_{z+,z-} - (W^+W^-)_{,z+z-}]. \tag{25}$$

Последний член в формуле (25) с учетом равенства $E_0 = H_0$ и соотношения $W^+ = (1/2)\,[h,\, W^+]_-$ приводится к виду

$$-\mathrm{Sp}\, h\,(W^+W^-)_{,z+z-} = (1/2)\,\mathrm{Sp}\, h\,[(z_+ + z_-)^2 \times \\ \times (W_{z-,z+} - W_{z+,z-})]_{,z+z-},$$

откуда

$$q = \mathrm{Sp}\, h\,\{[(1/2)\,\partial^2/\partial z_+\partial z_-\,(z_+ + z_-)^2 + 1]\,(W_{z-,z+} - W_{z+,z-})\},$$

или, делая как при выводе уравнений (10) замену $W_{z_\pm} \Rightarrow W_{z_\pm} \pm \pm h/2\,(z_+ + z_-)$,

получаем

$$q = \mathrm{Sp}\, h\,\{[(1/2)\,\partial^2/\partial z_+\partial z_-\,(z_+ + z_-)^2 + 1] \times \\ \times [W_{z_-,z_+} - W_{z+,z-} + h(z_+ + z_-)^{-2}]\}. \tag{26}$$

Ввиду того что $\mathrm{Sp}\, hW^{\pm} \equiv 0$, в последней формуле можно тождественно заменить $W_{z_\pm}$ на $A_{z_\pm}$, определяемые выражением (12). Тогда используя разложение (13) и вводя обозначение $\mathcal{F}_0 \equiv \equiv g_0^-\,(g_0^+)^{-1}$, приходим к следующим равенствам:

$$\mathrm{Sp}\, h\,(W_{z-,z+} - W_{z+,z-}) = \mathrm{Sp}\, h\,(\mathcal{F}_0^{-1}\mathcal{F}_{0,z+})_{,z-} = \\ = \partial^2/\partial z_+\partial z_- \sum_\alpha \tau_\alpha\, \mathrm{Sp}\,(h_\alpha h), \tag{27}$$

где τ_α — параметры картановского элемента $\exp \sum\limits_\alpha h_\alpha \tau_\alpha$ в разложении Гаусса для $\mathcal{F}_0$, которые выражаются через старшие векторы $\xi^{\{1_\alpha\}}$ фундаментальных представлений G с весом $\{1_\alpha\} \equiv \equiv \{\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{\alpha-1},\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$ по формуле

$$\tau_\alpha = \ln \xi^{\{1_\alpha\}}\,((M^+)^{-1}M^-). \tag{28}$$

Действительно, беря матричный элемент обеих частей тождества (4) $(M^+)^{-1}\, M^- = N^-\mathcal{F}_0\,(N^+)^{-1}$, между состояниями старшего веса $\{l\} \equiv \{l_1,\ \ldots,\ l_r\}$, имеем

$$< l|(M^+)^{-1}M^-|\,l> \equiv \xi^{\{l\}}\,((M^+)^{-1}M^-) = \\ = < l|\,\exp \sum_\alpha h_\alpha\tau_\alpha\,|\,l> = \exp \sum_\alpha l_\alpha\tau_\alpha$$

($\xi^{\{l\}}$ — старший вектор неприводимого представления G со старшим весом $\{l\}$). Отсюда вытекает формула (26). Подставляя (27) и (28) в правую часть (26), получаем следующее окончательное выражение для плотности топологического заряда (или действия) самодуальной конфигурации:

$$q = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-}(z_+ + z_-)^2 + 1\right] \times$$
$$\times \frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-} \sum_{\alpha,\beta} t_\beta v_\alpha k_{\alpha\beta} \ln \frac{\xi^{(1_\alpha)}((M^+)^{-1}M^-)}{(z_+ + z_-)^{t_\alpha}}, \qquad (29)$$

где t_α — коэффициенты разложения картановского элемента h по образующим $\mathfrak{h}$ (компоненты вектора вложения); $\mathrm{Sp}(h_\alpha h_\beta) = (1/2) v_\alpha k_{\alpha\beta} \equiv (1/2) v_\beta k_{\beta\alpha}$. Напомним, что для минимального вложения $t_\alpha \equiv \delta_\alpha$, так как в этом случае все положительные простые корни имеют порядок $+2$ относительно картановского элемента вложения h: $[h, X_\alpha]_- = \sum_\beta t_\beta [h_\beta, X_\alpha]_- = \sum_\beta t_\beta k_{\alpha\beta} X_\alpha = 2X_\alpha$. Отметим, что заряд магнитного монополя также определяется статическим пределом формулы (29).

5. Заключительные замечания. Основным результатом настоящего раздела является построение общих решений уравнений самодуальности (10), обеспечивающих при наложении соответствующих граничных условий описание цилиндрически-симметричных инстантонов и несингулярных монополей для произвольного вложения $SU(2)$ в компактную калибровочную группу G. Предложенный инвариантный метод интегрирования уравнений (10) основывается на явной реализации представления типа Лакса парой операторов $A_{z_\pm}$ (12), принимающих значения в алгебре. Все приведенные в п. 2 построения полностью переносятся на более общий случай, когда операторнозначные структуры $W^\pm$, входящие в представление (11), содержат вклады генераторов алгебры до некоторого порядка $|s| \geqslant 2$, приводящие к следующей модификации уравнений (20):

$$M^{\pm}_{,z_\pm} = M^{\pm} \sum_{p=2}^{|s|} \sum_{\alpha \in R_+^{(p)}} \varphi_{\pm\alpha}(z_\pm)\, X_{\pm\alpha}.$$

Ввиду того что нам неизвестны какие-либо физические приложения для обобщений такого рода, ограничимся лишь констатацией возможности интегрирования указанных систем.

В последующих разделах, конкретизируя вид алгебр и выбор градуировки в них, мы рассмотрим ряд нелинейных систем математической физики, в частности, двумерную обобщенную цепочку Тода (как конечную, так и с периодическими граничными условиями), допускающие полное интегрирование на основе общих формул типа (11) и (21). При этом для того, чтобы «кинетическая» часть уравнений возникающей системы, связанной с теми или иными алгебраическими структурами, была двумерным лапласианом, необходима абелевость соответствующей подгруппы инвариантности.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С КОНЕЧНОМЕРНЫМИ АЛГЕБРАМИ

1. Обобщенная двумерная (конечная, непериодическая) цепочка Тода. Важным примером конкретной реализации общих результатов разд. 1, применение которых не ограничивается теорией калибровочных полей, является случай минимального вложения $SU(2)$ в простую компактную алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Для этого вложения картановский элемент h удовлетворяет коммутационным соотношениям $[h, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}$ с генераторами $X_{\pm\alpha}$ из $\mathfrak{g}$, отвечающими простым корням, подгруппа инвариантности $G_0 = \prod_1^r \otimes U(1)$ [1], а формулы (*) переписываются в виде $W_{z\pm} = \sum_\alpha u_\alpha^\pm h_\alpha$, $W^\pm = \sum_\alpha f_\alpha^\pm X_{\pm\alpha}$. Тогда представление типа Лакса (11) приводит с учетом соотношений

$$[h_\alpha, h_\beta]_- = 0;\quad [h_\alpha, X_{\pm\beta}]_- = \pm k_{\beta\alpha} X_{\pm\beta},$$
$$[X_\alpha, X_{-\beta}]_- = \delta_{\alpha\beta} h_\alpha \tag{30}$$

к следующей системе уравнений для $u_\alpha^\pm$ и $f_\alpha^\pm$:

$$\left.\begin{aligned}&(\ln f_\alpha^+)_{,z_-} = -(ku^-)_\alpha;\quad (\ln f_\alpha^-)_{,z_+} = (ku^+)_\alpha;\\ &u^+_{\alpha,z_-} - u^-_{\alpha,z_+} = f_\alpha^+ f_\alpha^-,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

откуда, вводя функции $\rho_\alpha \equiv \ln f_\alpha^+) f_\alpha^-$, инвариантные относительно G_0, имеем

$$\rho_{\alpha,z_+z_-} = \sum_{\beta=1}^r k_{\alpha\beta} \exp \rho_\beta,\quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{32}$$

Последняя система описывает обобщенную цепочку Тода с закрепленными концами ($\rho_0 = \rho_{r+1} = -\infty$) и переходит в систему (1) при замене $\rho_\alpha = \sum_{\beta=1}^r k_{\alpha\beta} x_\beta$ благодаря невырожденности матриц Картана k простых алгебр Ли.

Согласно общей схеме решение системы (32) определяется элементом

$$K \equiv (M^+)^{-1} M^- = N^- \exp(H)(N^+)^{-1}, \tag{33}$$

в котором элементы $M^\pm$ удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}&M^+_{,z_+} = M^+ \sum_\alpha \varphi_{+\alpha}(z_+) X_{+\alpha} \equiv M^+ \hat{L}^+;\\ &M^-_{,z_-} = M^- \sum_\alpha \varphi_{-\alpha}(z_-) X_{-\alpha} \equiv M^- \hat{L}^-,\quad M^\pm \in \tilde{Z}^\pm \equiv \tilde{Z}_0^\pm\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

и выражаются формулами (21).

Здесь $\exp H \equiv g_0^- (g_0^+)^{-1} = \exp \sum_\alpha H_\alpha h_\alpha$, $g_0^\pm \equiv \exp H^\pm \in \mathscr{H}$.

Разложение Гаусса (33) позволяет определить в явном виде $N^\pm$ и $\exp H$ и тем самым найти функции $f_\alpha^\pm$, через которые выражаются решения системы (32). Вычисление явных выражений для $N^\pm$ представляет собой достаточно трудоемкую задачу. Мы, однако, покажем, что решение системы (1) полностью определяется функциями H_α из (33).

С этой целью подставим разложение (33) в выражение для величин:

$$K^{-1}K_{,z_-} \equiv \hat{L}^-, \quad K_{,z_+}K^{-1} \equiv -\hat{L}^+, \tag{35}$$

получая

$$\exp(-H)(N^-)^{-1} N^-_{,z_-} \exp H + H_{,z_-} - (N^+)^{-1} N^+_{,z_-} = (N^+)^{-1} \hat{L}^- N^+,$$

$$-\exp H (N^+)^{-1} N^+_{,z_+} \exp(-H) + H_{,z_+} + (N^-)^{-1} N^-_{,z_+} = -(N^-)^{-1}\hat{L}^+ N^-.$$

Отсюда вытекают соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &(N^-)^{-1} N^-_{,z_-} = \exp H \hat{L}^- \exp(-H); \quad H_{,z_-} - (N^+)^{-1} N^+_{,z_-} = \\ &= (N^+)^{-1}\hat{L}^- N^+ - \hat{L}^-; \\ &(N^+)^{-1} N^+_{,z_+} = \exp(-H)\, \hat{L}^+ \exp H; \quad H_{,z_+} + (N^-)^{-1} N^-_{,z_+} = \\ &= -(N^-)^{-1}\hat{L}^+ N^- + \hat{L}^+ \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Тогда, вводя токоподобные операторы $J_{z_+} \equiv \exp(-H)\, \hat{L}^+ \exp H$ и $J_{z_-} \equiv H_{,z_-} + \hat{L}^- - (N^+)^{-1}\hat{L}^- N^+$, из условия их совместности в виде $[\partial/\partial z_+ + J_{z_+},\ \partial/\partial z_- + J_{z_-}]_- = 0$ находим

$$H_{,z_+z_-} = [\hat{L}^-,\ \exp(-H)\hat{L}^+ \exp H]_-. \tag{37}$$

Используя (34) для операторов $\hat{L}^\pm$, коммутационные соотношения (30) и разлагая элемент H по образующим h_α из $\mathfrak{h}$, из (37) имеем

$$\begin{aligned} H_{,z_+z_-} &= \sum_{\alpha,\beta} \varphi_{-\alpha}, \varphi_{+\beta} [X_{-\alpha}, \exp(-\sum_\gamma H_\gamma h_\gamma)\, X_{+\beta} \exp(\sum_\theta H_\theta h_\theta)] = \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \varphi_{-\alpha}\varphi_{+\beta} \exp[-(kH)_\beta]\, [X_{-\alpha}, X_{+\beta}]_- = \\ &= -\sum_\alpha \varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha} \exp[-(kH)_\alpha]\, h_\alpha, \end{aligned}$$

т. е.

$$H_{\alpha, z_+z_-} = -\varphi_{+\alpha}(z_+)\, \varphi_{-\alpha}(z_-) \exp[-(kH)_\alpha], \tag{38}$$

или, вводя функции,

$$\left.\begin{aligned} &x_\alpha \equiv -H_\alpha + \sum_{\beta=1}^{r} k^{-1}_{\alpha\beta} \ln [\varphi_{+\beta}\varphi'_{-\beta}];\\ &\exp(-x_\alpha) = \exp\Big\{-\sum_{\beta=1}^{r} k^{-1}_{\alpha\beta} \ln [\varphi_{+\beta}(z_+)\,\varphi_{-\beta}(z_-)]\Big\} \times\\ &\times \xi^{\{1_\alpha\}}((M^+)^{-1} M^-), \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

убеждаемся, что x_α удовлетворяют системе (1).

Плотность топологического заряда самодуальной конфигурации для минимального вложения su (2) в $\mathfrak{g}$ является прямым следствием общей формулы (29) при $t_\alpha \equiv \delta_\alpha$, которая в результате суммирования по индексам α и β с учетом равенства

$$\sum_\alpha v_\alpha \ln \xi^{\{1_\alpha\}} = -(vx),\ _{z_+z_-} = \partial^2/\partial z_+\,\partial z_- \ln \xi^{\{v\}},$$

представима через старшие векторы $\xi^{\{v\}}$ неприводимого представления G с весом $\{v\}$:

$$q = -\left[(1/2)\frac{\partial^2}{\partial z_+\,\partial z_-}(z_+ + z_-)^2 + 1\right]\frac{\partial^2}{\partial z_+\,\partial z_-}\ln\frac{\xi^{\{v\}}((M^+)^{-1}M^-)}{(z_+ + z_-)^{(v\delta)}}. \tag{40}$$

Приведем для решений системы (1) еще один вывод формулы (39), инвариантным образом обобщающий решения (1) для серии A_r [1]. Обозначим через $\hat{X}_i$ ($\hat{\hat{X}}_i$) элемент собственного подпространства i-го корня левого (правого) регулярного представления G, а через $\hat{h}_\alpha$ ($\hat{\hat{h}}_\alpha$) — генераторы соответствующих регулярных представлений картановской подгруппы $\mathscr{H}$. При этом $[\hat{Y},\ \hat{\hat{Y}}]_- \equiv 0\ \forall\ \hat{Y} \equiv \{\hat{X}_i,\ \hat{h}_\alpha\}$, $\hat{\hat{Y}} \equiv \{\hat{\hat{X}}_i,\ \hat{\hat{h}}_\alpha\}$. По определению старшего вектора $\xi^{\{l\}}(K) \equiv \langle l \mid K \mid l\rangle$ неприводимого представления G с весом $\{l\}$:

$$\begin{gathered} \hat{X}_{-i}\xi^{\{l\}} = \hat{\hat{X}}_{+i}\xi^{\{l\}} = 0\ \forall\ i \in R_+;\\ \hat{\hat{h}}_\alpha \xi^{\{l\}} = -\hat{h}_\alpha \xi^{\{l\}} = l_\alpha \xi^{\{l\}}. \end{gathered} \tag{41}$$

Нетрудно убедиться путем прямой проверки выполнения соотношений (41), что определитель второго порядка

$$\det\begin{pmatrix} \xi^{\{l\}} & \hat{X}_\alpha \xi^{\{l\}}\\ \hat{\hat{X}}_{-\alpha}\xi^{\{l\}} & \hat{X}_\alpha \hat{\hat{X}}_{-\alpha}\xi^{\{l\}} \end{pmatrix}$$

есть не что иное, как старший вектор $\xi^{\{L_{(\alpha)}\}}$ неприводимого представления G с весом $\{L_{(\alpha)}\} = \{2l_\beta - k_{\alpha\beta},\ 1 \leqslant \beta \leqslant r\}$ с множителем пропорциональности l_α, который определяется с учетом равенства $\xi^{\{l\}}(K)\,|=1$. Нам также потребуется формула, выражающая $\xi^{\{l\}}$ через старшие векторы фундаментальных представлений G (см., например, [29]):

$$\xi^{\{l\}}=\prod_{\alpha=1}^{r}[\xi^{\{1_\alpha\}}]^{l_\alpha}, \tag{42}$$

благодаря которой

$$\det\begin{pmatrix}\xi^{\{l\}}\hat{X}_\alpha\xi^{\{l\}} \\ \hat{\hat{X}}_{-\alpha}\xi^{\{l\}}\hat{X}_\alpha\hat{\hat{X}}_{-\alpha}\xi^{\{l\}}\end{pmatrix}\equiv l_\alpha\xi^{\{2l_\beta-k_{\alpha\beta}\}}=l_\alpha[\xi^{\{l\}}]^2\prod_\beta[\xi^{\{1_\beta\}}]^{-k_{\alpha\beta}}. \tag{43}$$

Выбирая в качестве K из $\widetilde{G}$ элемент $(M^+)^{-1}M^-$, в котором $M^\pm=M^\pm(z_\pm)$ удовлетворяют уравнениям (34), получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dz_+}\xi^{\{l\}}&=-\sum_\alpha\varphi_{+\alpha}\langle l|X_{+\alpha}(M^+)^{-1}M^-|l\rangle=-\sum_\alpha\varphi_{+\alpha}(z_+)\hat{X}_\alpha\xi^{\{l\}};\\ \frac{d}{dz_-}\xi^{\{l\}}&=\sum_\alpha\varphi_{-\alpha}(z_-)\hat{\hat{X}}_{-\alpha}\xi^{\{l\}}.\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Рассматривая в качестве $\xi^{\{l\}}$ в формулах (44) старший вектор фундаментального представления $\xi^{\{1_\alpha\}}$ и учитывая, что

$$\hat{\hat{X}}_{-\beta}\xi^{\{1_\alpha\}}=\hat{X}_\beta\xi^{\{1_\alpha\}}\equiv 0\ \forall\,\beta\neq\alpha,\ \text{получаем}$$

$$\frac{d}{dz_+}\xi^{\{1_\alpha\}}=-\varphi_{+\alpha}(z_+)\hat{X}_\alpha\xi^{\{1_\alpha\}};\quad \frac{d}{dz_-}\xi^{\{1_\alpha\}}=\varphi_{-\alpha}(z_-)\hat{\hat{X}}_{-\alpha}\xi^{\{1_\alpha\}}. \tag{45}$$

используя (43), находим:

$$\det\begin{pmatrix}\xi^{\{1_\alpha\}}\xi^{\{1_\alpha\}}_{,\,z_+} \\ \xi^{\{1_\alpha\}}_{,\,z_-}\xi^{\{1_\alpha\}}_{,\,z_+z_-}\end{pmatrix}=-\varphi_\alpha\varphi_{-\alpha}\begin{pmatrix}\xi^{\{1_\alpha\}}\hat{X}_\alpha\xi^{\{1_\alpha\}} \\ \hat{\hat{X}}_{-\alpha}\xi^{\{1_\alpha\}}\hat{X}_\alpha\hat{\hat{X}}_{-\alpha}\xi^{\{1_\alpha\}}\end{pmatrix}=$$

$$=-\varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha}\xi^{\{2\{1_\alpha\}-k_{\alpha\beta}\}}=-\varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha}\prod_{\beta\neq\alpha}[\xi^{\{1_\beta\}}]^{-k_{\alpha\beta}}. \tag{46}$$

Сравнивая (46) с системой (1), записанной для функций

$$\left.\begin{aligned}&X_\alpha\equiv\exp(-x_\alpha),\ 1\leqslant\alpha\leqslant r;\\ &\det\begin{pmatrix}X_\alpha X_{\alpha,\,z_+} \\ X_{\alpha,\,z_-}X_{\alpha,\,z_+z_-}\end{pmatrix}=-\prod_{\beta\neq\alpha}X_\beta^{-k_{\alpha\beta}},\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

приходим к выражению (39) для решений системы (1).

2. Примеры полностью интегрируемых уравнений самодуальности для неполупростых алгебр Ли. Здесь мы обратимся к нелинейным уравнениям, к которым, в соответствии с развитой в разд. 1 общей схемой приводит рассмотрение в качестве калибровочной группы связной группы Ли $\widehat{G}$, представимой согласно теореме Леви — Мальцева (см., например, [29]) в виде полупрямого произведения своих разрешимой и полупростой подгрупп. В дальнейшем ограничимся связными группами Ли, обладающими абелевыми подгруппами инвариантности и, следовательно, нелинейными системами вида

$$x_{a,\ z_+z_-} = \Phi_a(x). \tag{48}$$

Следует отметить, что задача выделения таких групп среди всех связных является достаточно сложной и до настоящего времени не существует общего критерия их выбора.

Поскольку алгебра Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ группы $\hat{G}$ разлагается в прямую сумму своего радикала $\mathfrak{R}$ и полупростой подалгебры $\mathfrak{g}$, причем

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_- \subset \mathfrak{g};\ [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]_- \subset \mathfrak{R};\ [\mathfrak{R}, \mathfrak{g}]_- \subset \mathfrak{R}, \tag{49}$$

естественно, что и структура системы возникающих нелинейных уравнений (48) носит такой же характер, именно, содержит в качестве подсистемы уравнения типа (1), отвечающие подгруппе G.

а) Рассмотрим в качестве $\hat{G}$ произвольную простую группу Ли G с коммутативным мультиплетом $\mathfrak{R}^{\{1\}}$, лежащим в ее присоединенном представлении. Тогда операторы $A_{z_\pm}$, реализующие представление типа Лакса для системы (10), представимы в виде

$$A_{z_\pm} = \sum_\alpha [u_\alpha^\pm h_\alpha + f_\alpha^\pm X_{\pm\alpha} + U_\alpha^\pm H_\alpha + F_\alpha^\pm Y_{\pm\alpha}] \tag{50}$$

где $u_\alpha^\pm$, $f_\alpha^\pm$, $U_\alpha^\pm$, $F_\alpha^\pm$ — функции z_+ и z_-; $\{X_{\pm\alpha}, h_\alpha;\ 1 \leqslant \alpha \leqslant r\}$ — образующие $\mathfrak{g}$, отвечающие простым корням; $\{Y_{\pm\alpha}, H_\alpha, 1 \leqslant \leqslant \alpha \leqslant r\}$ — генераторы $\mathfrak{R}^{\{1\}}$, удовлетворяющие согласно (49) соотношениям коммутации:

$$\left.\begin{aligned} &[H_\alpha, R_\beta]_- = 0;\ [H_\alpha, X_{\pm\beta}]_- = \pm k_{\beta\alpha} Y_{\pm\beta};\\ &[h_\alpha, Y_{\pm\beta}]_- = \pm k_{\beta\alpha} Y_{\pm\beta},\ [X_\alpha, Y_{-\beta}]_- = \delta_{\alpha\beta} H_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

С учетом (50) и (51) представление (11) в рассматриваемом случае приводит к уравнениям (31) для $u_\alpha^\pm$ и $f_\alpha^\pm$ и к системе:

$$(F_\alpha^-/f_\alpha^-)_{,\ z_+} = (kU^+)_\alpha;\ (F_\alpha^+/f_\alpha^+)_{,\ z_-} = -(kU^-)_\alpha;$$
$$U^+_{\alpha,\ z_-} - U^-_{\alpha,\ z_+} = (F_\alpha^- f_\alpha^+ + F_\alpha^+ f_\alpha^-),$$

откуда, вводя функции $\rho_\alpha \equiv \ln f_\alpha^+ f_\alpha^-$ и $\sigma_\alpha \equiv F_\alpha^-/f_\alpha^- + F_\alpha^+/f_\alpha^+$, получаем окончательно

$$\rho_{\alpha,\ z_+z_-} = \sum_\beta k_{\alpha\beta} \exp \rho_\beta;\quad \sigma_{\alpha,\ z_+z_-} = \sum_\beta k_{\alpha\beta}\sigma_\beta \exp \rho_\beta. \tag{52}$$

Мы не будем здесь приводить результатов интегрирования этой системы ввиду того, что их можно получить из рассмотрения в качестве калибровочной группы прямого произведения двух простых групп Ли $G \otimes G$ и последующей операции сжатия.

б) В качестве второго примера рассмотрим полупрямое произведение группы $SU(2)$ на коммутативный мультиплет $\mathfrak{R}^{\{l\}}$ размерности l по угловому моменту указанной группы, генераторы которого подчиняются следующим коммутационным соотношениям с образующими h, $X_\pm$ подалгебры $su(2)$:

$$[h, R_m]_- = 2mR_m; \quad [X_\pm, R_m]_- = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}\, R_{m\pm 1}. \tag{53}$$

В соответствии с общей схемой положим

$$A_{z_\pm} = u^\pm h + f^\pm X_\pm + f_0^\pm R_0 + f_1^\pm R_{\pm 1}. \tag{54}$$

Тогда представление (11) приводит к уравнениям вида (31) для $u^\pm$, $f^\pm$ и

$$f_{0,\,z_-}^+ - f_{0,\,z_+}^- = \sqrt{l(l+1)}\,(f^+ f_1^- - f^- f_1^+);$$

$$(f_1^+/f^+)_{,\,z_-} = \sqrt{l(l+1)}\, f_0^-; \quad (f_1^-/f^-)_{,\,z_+} = \sqrt{l(l+1)}\, f_0^+;$$

откуда для функций $\rho \equiv \ln(f^+ f^-)$ и $\sigma \equiv f_1^+/f^+ - f_1^-/f^-$ получаем

$$\rho_{,\,z_+z_-} = 2\exp\rho; \quad \sigma_{,\,z_+z_-} = l(l+1)\,\sigma\exp\rho. \tag{55}$$

Система (55) имеет, как нетрудно показать, следующие общие решения:

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \ln[\Phi_{+,\,z_+}\Phi_{-,\,z_-}(\Phi_+ + \Phi_-)^{-2}];\\ &\sigma = (\Phi_+ + \Phi_-)^{l+1}\left[\frac{d^l}{d\Phi_-^l}\frac{\varphi_-(\Phi_-)}{(\Phi_+ + \Phi_-)^{l+1}} + \frac{d^l}{d\Phi_+^l}\frac{\varphi_+(\Phi_+)}{(\Phi_+ + \Phi_-)^{l+1}}\right]\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

при целочисленных l. Здесь $\varphi_\pm(\Phi_\pm)$ и $\Phi_\pm(z_\pm)$ — произвольные функции своих аргументов.

3. Двумеризованная система уравнений Вольтерра (разностных КдФ) как преобразование Бэклунда цепочки Тода и их полное интегрирование. Здесь мы проведем интегрирование конечной системы уравнений типа Вольтерра (2). В основе предлагаемого метода построения общих решений этой системы, зависящих от $2r+1$ произвольных функций, лежит то обстоятельство, что указанная система может рассматриваться как преобразование Бэклунда для двумеризованной (конечной непериодической) цепочки Тода.

Непосредственно из системы (2) вытекает, что функции

$$\rho_\alpha \equiv \ln(N_{2\alpha-1}N_{2\alpha}); \quad \rho'_\alpha \equiv \ln(N_{2\alpha}N_{2\alpha+1}), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r,$$

удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_{\alpha,\,z_+z_-} = 2\exp\rho_\alpha - \exp\rho_{\alpha+1} - \exp\rho_{\alpha-1}, \quad \rho_0 = \rho_{r+1} = -\infty;\\ &\rho'_{\alpha,\,z_+z_-} = 2\exp\rho'_\alpha - \exp\rho'_{\alpha+1} - \exp\rho'_{\alpha-1}, \quad \rho'_0 = \rho'_{r+1} = -\infty,\\ &1 \leqslant \alpha \leqslant r,\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

описывающим двумеризованную (конечную непериодическую) цепочку Тода, связанную с серией A_r (32). Иначе говоря, систему (2) можно рассматривать как реализацию преобразования Бэклунда для уравнений (57). При этом, поскольку общие решения системы (57) содержат $2r$ произвольных функций, тогда как общие решения (2) определяются $2r+1$ произвольными функциями, преобразование Бэклунда (2) для системы (57) обладает функциональным произволом в одну произвольную функцию. Схема интегрирования системы (2) заключается в установлении связи между $2r$ произвольными функциями $\Phi_{+\alpha}(z_+)$ и $\Phi_{-\alpha}(z_-)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, определяющими в соответствии с результатами п. 2 общие решения системы (57) для ρ_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, и $2r$ функциями $\Phi'_{+\alpha}(z_+)$ и $\Phi'_{-\alpha}(z_-)$, определяющими решения (57) для ρ'_α. Решения системы (2) полностью определяются соотношениями:

$$N_{2\alpha-1}N_{2\alpha} = \exp\rho_\alpha; \quad N_{2\alpha}N_{2\alpha+1} = \exp\rho'_\alpha, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \tag{58}$$

и уравнением

$$N_{1,z_+} = -\exp\rho_1 \tag{59}$$

благодаря которому вводится недостающая произвольная функция.

Проиллюстрируем эту конструкцию на примере простейшего случая группы $SU(2)$ ($r=1$), для которого система (2) имеет вид

$$N_{1,z_+} = -N_1N_2; \quad N_{2,z_-} = N_2(N_3 - N_1); \quad N_{3,z_+} = N_2N_3. \tag{60}$$

Подставляя известное общее решение $\exp\rho\ (= N_1N_2) = \Phi_{+,z_+}\Phi_{-,z_-}/(1-\Phi_+\Phi_-)^2$ уравнения Лиувилля в первое из уравнений (60) и проводя последовательное их интегрирование, получаем:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= u^{-1}[1-\Phi_+(\Phi_- + u\Phi_{-,z_-})]/(1-\Phi_+\Phi_-); \\ N_2 &= u\Phi_{+,z_+}\Phi_{-,z_-}/(1-\Phi_+\Phi_-)[1-\Phi_+(\Phi_- + u\Phi_{-,z_-})]; \\ N_3 &= u^{-1}\frac{(\Phi_- + u\Phi_{-,z_-})_{,z_-}}{\Phi_{-,z_-}}\,\frac{1-\Phi_+\Phi_-}{[1-\Phi_+(\Phi_- + u\Phi_{-,z_-})]}, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

где $\Phi_+(z_+)$, $\Phi_-(z_-)$ и $u(z_-)$ — произвольные функции своих аргументов. Таким образом, преобразование Бэклунда, реализуемое системой (60) и связывающее решения ρ и ρ' уравнения Лиувилля, приводит к замене произвольной функции $\Phi_-(z_-)$ в $\exp\rho$ на произвольную функцию $\Phi_-(z_-) + u(z_-)\Phi_{-,z_-}$ в решении $\exp\rho'\ (= N_2N_3)$.

Нам потребуются явные решения уравнений (57) в полиномиальном виде, которые согласно редукционной схеме [1] для серии A_r удобно записать через функции $\exp(-x_\alpha) \equiv X_\alpha$,

$$X_\alpha \equiv \exp\left(-\sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta}^{-1}\rho_\beta\right), \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \tag{62}$$

удовлетворяющие системе [ср. с. (47)]:

$$X_{\alpha, z_+z_-}X_\alpha - X_{\alpha, z_+}X_{\alpha, z_-} = -X_{\alpha-1}X_{\alpha+1}, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \tag{63}$$
$$X_0 = X_{r+1} = 1.$$

Решения системы (63), зависящие от $2r$ произвольных функций $\Phi_{+\alpha}(z_+)$ и $\Phi_{-\alpha}(z_-)$, даются формулами:

$$X_\alpha = (-1)^{\alpha(\alpha-1)/2}\Delta_\alpha(X), \qquad 2 \leqslant \alpha \leqslant r; \tag{64}$$

$$X_1 \equiv X = [\Delta_r(\Phi_+)\,\Delta_r(\Phi_-)]^{-1/(r+1)}\left[1 + \sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^\alpha \Phi_{+\alpha}\Phi_{-\alpha}\right], \tag{65}$$

где $\Delta_\alpha(X)$ — главные миноры матрицы $X_{\alpha\beta} \equiv X_{,\underbrace{z_+\ldots z_+}_{\alpha-1}\underbrace{z_-\ldots z_-}_{\beta-1}}$, а $\Delta_r(\Phi_+)$ и $\Delta_r(\Phi_-)$ — определители матриц $\Phi_{\beta,+\alpha} \equiv \Phi_{+\alpha,\underbrace{z_+\ldots z_+}_{\beta}}$ и $\Phi_{\beta,-\alpha} \equiv \Phi_{-\alpha,\underbrace{z_-\ldots z_-}_{\beta}}$ соответственно. Поэтому в соответствии с (64) для X_2 приходим к следующему выражению для функции $\exp\rho_1 \equiv X_2X_1^{-2} \equiv -(\ln X)_{,z_+z_-}$:

$$\exp\rho_1 = \Big[-\sum_\alpha (-1)^\alpha \Phi_{+\alpha, z_+}\Phi_{-\alpha, z_-} +$$
$$+ \sum_{\alpha<\beta}(\Phi_{+\alpha}\Phi_{+\beta, z_+} - \Phi_{+\alpha, z_+}\Phi_{+\beta})(\Phi_{-\alpha}\Phi_{-\beta, z_-} - \Phi_{-\alpha, z_-}\Phi_{-\beta})\Big] \times$$
$$\times \Big[1 + \sum_\alpha (-1)^\alpha \Phi_{+\alpha}\Phi_{-\alpha}\Big]^{-2}, \tag{66}$$

необходимому для разрешения уравнения (59). Уравнение (59) позволяет найти с учетом равенства $N_1N_2 = \exp\rho_1 = -(\ln X)_{,z_+z_-}$ выражение для N_1, $N_1 = (\ln X)_{,z_-} + g(z_-)$, где $g(z_-)$ — произвольная функция, реализующая упомянутый выше функциональный произвол (в одну функцию) преобразования Бэклунда. Тогда для функции N_2 получаем $N_2 = \exp\rho_1[(\ln X)_{,z_-} + g(z_-)]^{-1}$, откуда, используя второе из уравнений (2) $N_{2,z_-} = N_2(N_3 - N_1) = \exp\rho_1' - \exp\rho_1$, имеем

$$\exp\rho_1' = \exp\rho_1 - Y^{-2}(Y')^{-2}\{[Y^2(uZ)_{,z_-} - Y^2_{,z_-}(uZ)] +$$
$$+ (1/2)\,u^2[Y^2_{,z_-}Z_{,z_-} - Y^2_{,z_-z_-}Z]\} =$$
$$= (Y')^{-2}\Big\{-\sum_\alpha (-1)^\alpha \Phi_{+\alpha, z_+}(\Phi_{-\alpha} + u\Phi_{-\alpha, z_-})_{,z_-} +$$
$$+ \sum_{\alpha<\beta}(\Phi_{+\alpha}\Phi_{+\beta, z_+} - \Phi_{+\alpha, z_+}\Phi_{+\beta})\,[(\Phi_{-\alpha} + u\Phi_{-\alpha, z_-}) \times$$
$$\times (\Phi_{-\beta} + u\Phi_{-\beta, z_-})_{,z_-} - (\Phi_{-\alpha} + u\Phi_{-\alpha, z_-})_{,z_-}(\Phi_{-\beta} + u\Phi_{-\beta, z_-})]\Big\}, \tag{67}$$

где $Z \equiv (1/2)\, Y_{,\, z_+ z_-} - 2Y_{,\, z_+}\, Y_{,\, z_-}$; $Y \equiv 1 + \sum\limits_{\alpha} (-1)^{\alpha} \Phi_{+\alpha} \Phi_{-\alpha}$; $Y' \equiv 1 + \sum\limits_{\alpha} (-1)^{\alpha}\, \Phi_{+\alpha} (\Phi_{-\alpha} + u\, \Phi_{-\alpha,\, z_-})$, а функции u и g, зависящие от одной переменной z_-, связаны соотношением

$$g - [1/(r+1)]\, [\ln \Delta_r (\Phi_-)]_{,z_-} = u^{-1}. \tag{68}$$

Выражение (67) позволяет в явном виде найти преобразование, связывающее функции $\Phi_{+\alpha}$, $\Phi_{-\alpha}$, определяющие решение цепочки Тода (57) для ρ_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, с функциями $\Phi'_{+\alpha}$ и $\Phi'_{-\alpha}$, определяющими решения ρ'_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, той же системы. К (67) проще всего прийти, если обратить внимание на то обстоятельство, что знаменатель выражения в правой части (67) содержит произведение квадратов двух полиномов $Y^2\, (Y')^2$, один из которых совпадает со знаменателем формулы (66) для $\exp \rho_1$, тогда как другой, Y', отвечает решению $\exp \rho'_1$. Таким образом, результат интегрирования преобразования Бэклунда для системы (57) представим в виде *

$$X_\alpha = X_\alpha (\Phi_+, \Phi_-), \quad X'_\alpha = X_\alpha (\Phi_+, \Phi_- + u\Phi_{-,\, z_-}). \tag{69}$$

Это позволяет с помощью соотношений (58):

$$N_{2\alpha-1} N_{2\alpha} = \exp \rho_\alpha (\Phi_+, \Phi_-);$$
$$N_{2\alpha} N_{2\alpha+1} = \exp \rho_\alpha (\Phi_+, \Phi_- + u\Phi_{-,\, z_-}),$$

зная общие решения X_α системы (63) и формулу (67), восстановить общие решения системы (2), зависящие от $2r + 1$ произвольных функций $\Phi_{+\alpha}$, $\Phi_{-\alpha}$ и $u\,(z_-)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$. Окончательные выражения для функций $N_{2\alpha-1}$ и $N_{2\alpha}$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} N_{2\alpha-1} &= u^{-1} \left[\frac{\Delta_r (\Phi_- + u\Phi_{-,\, z_-})}{\Delta_r (\Phi_-)}\right]^{\frac{1}{r+1}} X_{\alpha-1} X'_\alpha (X'_{\alpha-1} X_\alpha)^{-1}; \\ N_{2\alpha} &= u \left[\frac{\Delta_r (\Phi_-)}{\Delta_r (\Phi_- + u\Phi_{-,\, z_-})}\right]^{\frac{1}{r+1}} X'_{\alpha-1} X_{\alpha+1} (X_\alpha X'_\alpha)^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Отметим, что уравнения (2) могут рассматриваться также в случае четного числа функций N_a как преобразование Бэклунда, связывающее решения системы (57) алгебры A_r с решениями для

* В справедливости формулы (67), уже содержащей фактически результат преобразования $\Phi'_{+\alpha} = \Phi_{+\alpha}$ и $\Phi'_{-\alpha} = \Phi_{-\alpha} + u\Phi_{-\alpha,\, z_-}$, можно непосредственно убедиться, подставляя выражения $\exp \rho_1 = -(\ln Y)_{,z_+ z_-}$, $\exp \rho'_1 = -(\ln Y')_{,z_+ z_-}$ и $N_1 \equiv Y'/uY$ в проверяемое равенство $\exp \rho'_1 - \exp \rho_1 = N_{2,z_-} = [N_1^{-1} \exp \rho_1]_{,z_-}$, откуда имеем цепочку соотношений $\{(\ln Y'/Y)_{,z_+} - (\ln Y)_{,z_+ z_-} uY/Y'\}_{,z_-} = \{Y^{-1} Y'^{-1} [YY'_{,z_+} - Y_{,z_+} Y' - u\, (YY_{,z_+ z_-} - Y_{,z_+} Y_{,z_-})]\}_{,z_-} = 0$, завершая проводимую проверку.

A_{r-1}, что фактически соответствует замене граничных условий $N_0 = N_{2r+2} = 0$ на $N_0 = N_{2r+1} = 0$. С помощью полученных выше решений (70) эта процедура сводится к тривиальным операциям: условие $N_{2r+1} = 0$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению $\Delta_r(\Phi_- + u\Phi_{-,\,z_-}) = 0$, связывающему $2r+1$ функций $\Phi_{+\alpha}$, $\Phi_{-\alpha}$ и u, именно $u^{-1} = -[\ln(a_0 + \sum\limits_\alpha a_\alpha \Phi_{-\alpha})]_{,\,z_-}$, где a_0 и a_α — произвольные постоянные. Получаемые при этом решения системы (2) для чётного числа функций N_a зависят от $2r$ произвольных функций. (Подчеркнем, что равенство нулю $\Delta_r(\Phi'_{-\alpha})$, обеспечивающее выполнение граничного условия N_{2r+1}, отнюдь не влечет за собой обращения в нуль всех остальных функций, так как наличие в (70) общего множителя $\Delta_r(\Phi'_-)$ компенсируется у N_a, $1 \leqslant a \leqslant 2r$, соответствующей зависимостью от него функций X''_α.)

Решения системы (2) в одномерном случае получаются из построенных общих решений (70) двумеризованных уравнений Вольтерра подстановкой $\Phi_{+\alpha} = c_{+\alpha}\exp m_\alpha z_+$, $\Phi_{-\alpha} = c_{-\alpha}\exp(-m_\alpha z_-)$, $u(z_-) \Rightarrow u_0 = \mathrm{const}$. При этом функции X и X', определяющие согласно (65) решения X_α и X'_α, принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} X &= \Big[\prod_1^r d_\alpha m_\alpha^2 W^2 \exp\Big(t\sum_{\beta=1}^r m_\beta\Big)\Big]^{-1/(r+1)} \times \\ &\quad\times \Big[1 + \sum_{\gamma=1}^r (-1)^\gamma d_\gamma \exp(tm_\gamma)\Big]; \\ X' &= \Big[\prod_1^r d_\alpha m_\alpha^2 (1+u_0 m_\alpha) W^2 \exp\Big(t\sum_{\beta=1}^r m_\beta\Big]^{-1/(r+1)} \times \\ &\quad\times \Big[1 + \sum_{\gamma=1}^r (-1)^\gamma d_\gamma (1+u_0 m_\gamma)\exp(tm_\gamma)\Big], \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

где $d_\alpha \equiv c_{+\alpha}c_{-\alpha}$, $t \equiv z_+ - z_-$, $W \equiv W(m_1, \ldots, m_r)$ — определитель Вандермонда (ср. с [1]).

Таким образом, искомые решения одномерных уравнений Вольтерра характеризуются $2r+1$ произвольными параметрами d_α, m_α и u_0 и записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned} N_{2\alpha-1} &= u_0^{-1}\Big[\prod_{\beta=1}^r (1+u_0 m_\beta)\Big]^{1/(r+1)} \frac{\Delta_\alpha(X')\Delta_{\alpha-1}(X)}{\Delta_\alpha(X)\Delta_{\alpha-1}(X')}; \\ N_{2\alpha} &= u_0\Big[\prod_{\beta=1}^r (1+u_0 m_\beta)\Big]^{-1/(r+1)} \frac{\Delta_{\alpha+1}(X)\Delta_{\alpha-1}(X')}{\Delta_\alpha(X)\Delta_\alpha(X')}, \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

где $\Delta_\alpha(X)$ и $\Delta_\alpha(X')$ — главные миноры матриц $X_{\alpha\beta} \equiv d^{\alpha+\beta-2}X/dt^{\alpha+\beta-2}$ и $X'_{\alpha\beta} \equiv d^{\alpha+\beta-2}X'/dt^{\alpha+\beta-2}$. В случае четного числа функций N_a параметры d_α, m_α и u_0 перестают быть независимыми.

Одномерные уравнения Вольтерра рассмотренного выше типа тесно связаны с нелинейной дифференциально-разностной системой

$$M_{\alpha,t} = (1 + M_\alpha^2)(M_{\alpha+1} - M_{\alpha-1}), \tag{73}$$

которую при наложении граничных условий $M_{-1} = -M_{N+1} \equiv i$ можно сделать конечной:

$$R_{\alpha,t} = (1 - R_\alpha^2)(R_{\alpha+1} - R_{\alpha-1}), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant N, \tag{74}$$

где $R_\alpha \equiv -\mathrm{i}\ M_\alpha$, $R_{-1} = -R_{N+1} \equiv 1$.

Связь между решениями уравнений Вольтерра и системы (74) задается соотношениями (см., например, [8]):

$$N_\alpha = (1 + R_\alpha)(1 - R_{\alpha-1}), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant N, \tag{75}$$

представляющими собой конечный дискретный вариант преобразования Миура [37]. Зная решения уравнений Вольтерра, нетрудно по формулам (75) с учетом одного из уравнений (74) восстановить точные решения системы (74). Действительно, первое уравнение в (74) $R_{0,t} = (1 - R_0^2)(R_1 - 1)$ и соотношение $N_1 = (1 + R_1) \times (1 - R_0)$ позволяют исключить R_1 и свести задачу нахождения функции $R_0 \equiv f^{-1} - 1$ к интегрированию уравнения $f_{,t} + (N_1 - 4) f + 2 = 0$, решение которого имеет вид

$$f = -2\left[1 + \sum_\alpha (-1)^\alpha d_\alpha \exp(m_\alpha t)\right]^{-1} \left\{\lambda^{-1} + c_0 \exp(-\lambda t) + \sum_\alpha (-1)^\alpha \frac{d_\alpha}{m_\alpha + \lambda} \exp(m_\alpha t)\right\}, \quad \lambda \equiv u_0^{-1} - 4, \quad c_0 = \mathrm{const}. \tag{76}$$

После этого остальные неизвестные функции R_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, алгебраически выражаются согласно (75) через известные функции N_α и R_0. Окончательное выражение для решений представимо в виде непрерывных дробей:

$$1 + R_\alpha = \cfrac{N_\alpha}{2 - \cfrac{N_{\alpha-1}}{2 - \cfrac{N_{\alpha-2}}{2 - \cfrac{N_{\alpha-3}}{\cfrac{\cdots}{\cfrac{N_3}{2 - \cfrac{N_2}{2 - \cfrac{N_1}{1 - R_0}}}}}}}}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant N \tag{77}$$

В случае нечетного числа функций R_α общие формулы (77) изменений не претерпевают с точностью до возникновения между параметрами d_α, m_α и u_0 зависимости указанного выше вида.

Как мы убедились, определяющим для построения общих решений уравнений Вольтерра (и их двумерных обобщений) явилось знание общих решений соответствующей цепочки Тода, для которой первые служат преобразованием Бэклунда. В связи с этим было бы интересно построить аналог уравнений (2), играющий роль преобразований Бэклунда для обобщенной цепочки Тода (32), отвечающей произвольной простой алгебре Ли.

Отметим, что для уравнений двумерной цепочки Тода с периодическими граничными условиями преобразование Бэклунда в форме (2), очевидно, приводит к условиям $N_0 = N_{2r}$, $N_{2r+1} = N_1$, что, вообще говоря, позволяет проинтегрировать (2) в этом случае, исходя из решений периодической цепочки Тода (см. следующий раздел обзора).

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМИ ГРАДУИРОВАННЫМИ АЛГЕБРАМИ

В настоящем разделе рассмотрены системы уравнений с экспоненциальными нелинейностями вида:

$$\rho_{\alpha,\, z_+z_-} = (k \exp \rho)_\alpha; \tag{78а}$$

$$x_{\alpha,\, z_+z_-} = \exp (kx)_\alpha \tag{78б}$$

с произвольной числовой матрицей k, причем для вырожденных k связь между указанными системами не несет характер тождественной замены функций ($\rho_\alpha = (kx)_\alpha$). Представление типа Лакса в случае компактных алгебр (11) подсказывает способ построения пары операторов для систем (78).

Введем с этой целью систему $3r$ операторов $X_{\pm\alpha}, h_\alpha, 1 \leqslant \alpha \leqslant r$, подчинив их следующим коммутационным соотношениям:

$$\left[h_\alpha, \quad \begin{matrix} h_\beta \\ X_{\pm\beta} \end{matrix}\right]_- = \begin{matrix} 0 \\ \pm k_{\beta\alpha} X_{\pm\beta} \end{matrix}; \quad [X_{+\alpha},\ X_{-\beta}]_- = \delta_{\alpha\beta} h_\alpha, \tag{79}$$

где k совпадает с матрицей, входящей в системы (78).

Соотношения (79) изучались в ряде работ (см., например, [21]), в которых при некоторых ограничениях на матрицу k получена их классификация. Для придания (79) характера алгебры (конечно- или бесконечномерной) необходимо исследовать свойства m-кратных коммутаторов $[X_{\pm\alpha_1} [X_{\pm\alpha_2} [\ldots [X_{\pm\alpha_{m-1}},\ X_{\pm\alpha_m}]]]] \equiv X \pm \alpha_1 \ldots \alpha_m$, принадлежащих инвариантному подпространству $C_{\pm m}$ с градуировкой $\pm m$. Требование наличия инвариантной билинейной формы в пространстве представления позволяет определить норму элемента $X_{\pm\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ в виде $N_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} = (X_{-\alpha_m,\ldots,\alpha_1}, X_{+\alpha_1,\ldots,\alpha_m})$. $((X_{+\alpha}, X_{-\beta}) = \delta_{\alpha\beta})$ и с помощью тождества Якоби, соотношений (79) и определения $X_{\pm\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ (как кратного коммутатора) вычислить ее.

Классификация алгебр, возникающих таким образом, проводится на основе расчета размерности $D(m)$ инвариантного подпространства с градуировкой m (т. е. числа линейно-независимых элементов с отличной от нуля нормой). В качестве количественного критерия выбирается предел отношения

$$\lim_{m\to\infty} \ln\Bigl(\sum_{s=1}^{m} D(s)\Bigr)\Big/\ln m \equiv d. \tag{80}$$

При этом имеют место следующие три возможности:

1) $d = 0$, что соответствует конечномерным простым алгебрам Ли;

2) $0 < d = \mathrm{const} < \infty$; возникающие при этом алгебры являются бесконечномерными и называются алгебрами конечного роста;

3) $d = \infty$, что отвечает бесконечномерным неограниченным алгебрам.

В первых двух случаях удается провести полную классификацию матриц k (так называемых обобщенных матриц Картана), т. е. перечислить их все, сопоставив им обобщенные схемы Дынкина. Полупростые алгебры Ли, естественно, возникают как частный случай алгебр конечного роста, для которого определители матриц k отличны от нуля.

С помощью введенных генераторов (79) построим пару операторов $A_{z_\pm}$ в виде [ср. с (✳)]:

$$A_{z_+} = \sum_\alpha (u_\alpha^+ h_\alpha + f_\alpha^+ X_{+\alpha}); \quad A_{z_-} = \sum_\alpha (u_\alpha^- h_\alpha + f_\alpha^- X_{-\alpha}). \tag{81}$$

Тогда представление типа Лакса $[\partial/\partial z_+ + A_{z_+}, \partial/\partial z_- + A_{z_-}] = 0$ приводит к системе (78а) для величин $\rho_\alpha \equiv \ln f_\alpha^+ f_\alpha^-$.

Для нахождения решений системы (78б) введем, как и ранее, операторы $M^\pm$, определив их как решения уравнений S-матричного типа:

$$M^\pm_{,z_\pm} = M^\pm \hat{L}^\pm; \quad \hat{L}^\pm = \sum_\alpha \varphi_{\pm\alpha}(z_\pm)\, X_{\pm\alpha}, \tag{82}$$

где $\varphi_{\pm\alpha}(z_\pm)$ — произвольные функции своих аргументов, выражающиеся в виде анти-$\mathscr{L}_\pm$-упорядоченных экспонент (21). Подчеркнем, что в общем случае ряды в показателях экспонент (22) не являются, вообще говоря, ограниченными и содержат бесконечное число членов (исключение составляют полупростые алгебры Ли). Для бесконечномерных алгебр теряет смысл понятие группового элемента (вместе с тем нильпотентные бесконечномерные подалгебры могут быть экспоненциированы, и элементы $M^{\pm}$ существуют), и поэтому элементу $K \equiv (M^+)^{-1} M^-$ нельзя, вообще говоря, придать строго определенный смысл. По указанной причине будем рассматривать решения (82) в виде ряда последовательных приближений, в котором роль «параметра малости» играют операторы $\hat{L}^{\pm}$ или, в конечном счете, функции $\varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha}$. Тогда, подставляя в K выражения $M^{\pm}$ с точностью до некоторого p-го порядка малости и с той же точностью определяя элементы $N^{\pm}$ и $\exp H$ из соотношения

$$K \approx N^- \exp(H)\,(N^+)^{-1}, \tag{83}$$

приходим к заключению (дословно повторив рассуждения на с. 139), что $H \equiv \sum\limits_{\alpha} h_\alpha H_\alpha$ удовлетворяет системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} H_{,z_+z_-} &\approx [\hat{L}^-, \exp(-H)\,\hat{L}^+ \exp H];\\ H_{\alpha,\,z_+z_-} &\approx -\varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha} \exp[-(kH)_\alpha]. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Здесь символом «$\approx$» обозначено выполнение соответствующих равенств с точностью до членов p-го порядка по степеням $\varphi_{+\alpha_1} \cdots \varphi_{+\alpha_p}\varphi_{-\alpha_1} \cdots \varphi_{-\alpha_p}$. Для того чтобы осуществить переход от формулы (84) к (78б), следует учесть, что функции $\varphi_{+\alpha}$, $\varphi_{-\alpha}$ связаны соотношениями:

$$\sum_{\alpha} \ln \varphi_{+\alpha}\lambda_\alpha^{(s)} = 0, \quad \sum_{\alpha} \ln \varphi_{-\alpha}\lambda_\alpha^{(s)} = 0,$$

где $\lambda_\alpha^{(s)}$ — набор левых собственных векторов матрицы k с нулевыми собственными значениями $(\lambda^{(s)}k)_\alpha = 0$. В случае невырожденных матриц k все функции $\varphi_{\pm\alpha}$ являются функционально независимыми. Таким образом, центр тяжести задачи решения системы (78б) для бесконечномерных алгебр переносится в область исследования условий сходимости рядов теории возмущений.

Для получения замкнутых явных выражений для функций $\exp(-x_\alpha)$, дающих решения системы (78б), введем в рассмотрение «генераторы старших векторов» R_α^+ (R_α^-) фундаментальных представлений алгебры, задаваемой формулами (79), подчинив их следующим коммутационным соотношениям и условию ортонормированности:

$$\left.\begin{aligned} &[X_{\pm\alpha}, R_\beta^{\pm}]_- = 0; \quad [h_\alpha, R_\beta^{\pm}]_- = \pm\,\delta_{\alpha\beta}R_\beta^{\pm};\\ &(R_\beta^-, R_\alpha^+) = \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

С помощью этих генераторов из разложения (83) очевидным образом находим

$$\exp H_\alpha = (M^+ R_\alpha^- (M^+)^{-1},\quad M^- R_\alpha^+ (M^-)^{-1} = \\ = \sum_n (-1)^n (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_+ (\alpha_1\beta_2, \ldots, \beta_n)_- \times \\ \times \langle \alpha_1 \mid \alpha_1\beta_2 \ldots, \beta_n, \alpha_n \ldots \alpha_1 \mid \alpha_1\rangle, \alpha_1 \equiv \alpha \qquad (86)$$

[последнее равенство получено с учетом (85)]. Здесь приняты следующие обозначения:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_\pm \equiv \int^{z_\pm} \varphi_{\pm\alpha_1}\, dz_\pm^1 \int^{z_\pm^1} \varphi_{\pm\alpha_2}\, dz_\pm^2 \ldots \int^{z_\pm^{n-1}} \varphi_{\pm\alpha_n}\, dz_\pm^n$$

— кратный интеграл от указанной последовательности функций; скалярное произведение в (86) для векторов $\alpha_n \ldots \alpha_1 \mid \alpha_1\rangle \equiv \equiv [X_{-\alpha_n \ldots \alpha_1}, R_{\alpha_1}^+]$, $\langle \alpha_1 \mid \alpha_1\beta_2 \ldots \beta_n \equiv [X_{+\beta_n \ldots \beta_2\alpha_1}, R_{\alpha_1}^-]$ вычисляется с использованием тождеств Якоби и формул (79) и (85). Отметим, что выражение (86) для $\exp H_\alpha$ носит чисто алгебраический характер, определяя эту величину как скалярное произведение двух векторов $M^\pm R_\alpha^\mp (M^\pm)^{-1}$.

Для решений системы (78б) получаем с помощью формул (83), (84) и (86) следующее формальное окончательное выражение, определение области сходимости которого требует дополнительного исследования:

$$\exp(-x_\alpha) = \exp\Big(-\sum_{s=1}^{n} \mu_\alpha^s \ln f_{+s} f_{-s}\Big) \exp\Big(-\sum_{t=n+1}^{r} \lambda_\alpha^t \ln f_{+t} f_{-t}\Big) \times \\ \times (M^+ R_\alpha^- (M^+)^{-1},\ M^- R_\alpha^+ (M^-)^{-1}), \qquad (87)$$

где $(k\mu^s)_\alpha = 0$, $1 \leqslant s \leqslant n$; $(k\lambda^t)_\alpha = E_t \lambda_\alpha^t$, $n+1 \leqslant t \leqslant r$ $(E_t \neq 0)$, а функции $\varphi_{\pm\alpha}$, входящие в определение $\hat{L^\pm}$ из (82), связаны с $f_{\pm s}$ $(n+1 \leqslant s \leqslant r)$ соотношениями

$$\varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha} = \prod_{s=n+1}^{r} (f_{+s} f_{-s})^{\lambda_\alpha^s}. \qquad (88)$$

Из (87) можно получить формальное решение задачи Гурса для системы (78). Действительно, подчиним решения (82) начальным условиям $M^+ = 1$ при $z_+ = a_+$, $M^- = 1$ при $z_- = a_-$. Тогда как следует из (86) и (87),

$$\exp(-x_\alpha)\,|_{z_- = a_-} = c \exp\Big[-\sum_{s=1}^{n} \mu_\alpha^s \ln f_{+s}(z_+) - \sum_{t=n+1}^{r} \lambda_\alpha^t \ln f_{+t}(z_+)\Big],$$

т. е. функции f_{+s}, $1 \leqslant s \leqslant n$, определяются значениями $\exp(-x_\alpha)$ при фиксированном $z_- = a_-$. Аналогичным образом функции f_{-s},

$1 \leqslant s \leqslant n$, восстанавливаются по значениям $\exp(-x_\alpha)$ при $z_+ = a_+$. Тем самым дается решение задачи Гурса для системы (78б).

В случае алгебр конечного роста, когда k совпадает с их обобщенными матрицами Картана, для членов p-го приближения в (86) можно сделать общую оценку, показывающую, что для произвольных ограниченных на интервале $a_+ \leqslant z_+ \leqslant b_+$, $a_- \leqslant \leqslant z_- \leqslant b_-$ функций $\varphi_{\pm\alpha}$ ряд в (86) является абсолютно сходящимся. Для доказательства этого утверждения потребуются следующие два факта из теории представлений градуированных алгебр конечного роста, которые мы приведем без доказательства (см. [38]). Обобщенная матрица Картана такой алгебры является неотрицательно определенной и обладает ровно одним нулевым собственным значением. Взаимные скалярные произведения базисных векторов фундаментальных представлений, содержащих одинаковое число повышающих (понижающих) операторов $R^+_{\alpha_1\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \equiv [X_{-\alpha_n},\ldots,_{\alpha_1}, R^+_{\alpha_1}]_-$, $R^-_{\alpha_1\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \equiv [X_{+\alpha_n},\ldots,_{\alpha_1}, R^-_{\alpha_1}]$, сохраняют знак, будучи положительными при четных n и отрицательными при нечетных, $(-1)^n (R^-_{\alpha_1},\ldots, R^+_{\alpha_1},\ldots) > 0$. Обозначим через μ^0_α единственный собственный вектор матрицы k с нулевым собственным значением, $(k\mu^0)_\alpha = 0$. Для всех алгебр конечного роста $\mu^0_\alpha > 0$ [21], и мы нормируем его условием $\min \mu^0_\alpha = 1$. Система (84) заведомо имеет решение вида $H_\alpha = = \mu^0_\alpha H_0$ при условии $-\mu^0_\alpha (H_0)_{,z_+z_-} = \varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha}$ для всех α, т. е. $\varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha} \equiv \mu^0_\alpha \varphi_+\varphi_-$ или $\varphi_{+\alpha} = \mu^0_\alpha \varphi_+$, $\varphi_{-\alpha} = \varphi_-$. При этом $H_0 = = -\int \varphi_+ dz_+ \int \varphi_- dz_-$, а $\hat{L}^+ = \sum\limits_\alpha \mu^0_\alpha X_{+\alpha}\varphi_+$, $\hat{L}^- = \sum\limits_\alpha X_{-\alpha}\varphi_-$.

Тогда для $M^\pm$ получаем конечные выражения:

$$\left.\begin{aligned} M^+ &= \exp \sum_\alpha \mu^0_\alpha X_{+\alpha} \int dz_+\varphi_+ \equiv \exp \hat{X}_+(\varphi_+); \\ M^- &= \exp \sum_\alpha X_{-\alpha} \int dz_-\varphi_- \equiv \exp \hat{X}_-(\varphi_-). \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Из определения $\hat{X}_\pm$ имеем:

$$[\hat{X}_+, \hat{X}_-]_- = \sum_\alpha \mu^0_\alpha h_\alpha \equiv \hat{h}; \quad [\hat{h}, X_{\pm\beta}] \equiv \pm \sum_\alpha \mu^0_\alpha k_{\beta\alpha} X_{\pm\beta}.$$

Подставляя (89) в (86) и используя свойство кратного интеграла

$$\underbrace{\int \varphi\, dz_1 \int^{z_1} \varphi\, dz_2 \ldots \int^{z_{n-1}} \varphi\, dz_n}_{n} = \left(\int \varphi\, dz\right)^n \Big/ n!,$$

находим

$$\exp H_\alpha = (M^+ R_\alpha^- (M^+)^{-1},\ M^- R_\alpha^+ (M^-)^{-1}) =$$

$$= \exp\left(-\mu_\alpha^0 \int dz_+ \varphi_+ \int dz_- \varphi_-\right) =$$

$$= \sum_n (-1)^n \frac{(\int \varphi_+ dz_+)^n}{n!} \frac{(\int \varphi_- dz_-)^n}{n!} \times$$

$$\times \sum \mu_\alpha^0 \mu_\beta^0 \ldots \mu_\gamma^0 (R_{\alpha\beta}^-, \ldots, \gamma, R_{\alpha\eta}^+ \ldots \varkappa),$$

т. е. $\Sigma \mu_\alpha^0 \mu_\beta^0 \ldots \mu_\gamma^0 (R_{\alpha\beta}^- \ldots \gamma,\ R_{\alpha\eta}^+ \ldots \varkappa) \equiv (\mu_\alpha^0)^n n!$

Для оценки членов n-го приближения в (86) рассмотрим ограниченные на интервалах (a_+, z_+) и (a_-, z_-) функции $\varphi_{+\alpha}$ и $\varphi_{-\alpha}$, для которых $|\varphi_{-\alpha}| \leqslant M_-$, $|\varphi_{+\alpha}| \leqslant M_+ \leqslant \mu_\alpha^0 M_+$ (последнее неравенство вытекает из принятой нормировки для вектора $\mu_\alpha^0 \geqslant 1$). Для n-кратных интегралов, входящих в (86), имеют место очевидные оценки:

$$|(\alpha_1 \beta_2 \ldots \beta_n)_-| \leqslant M_-^n (z_- - a_-)^n / n!;$$

$$|(\alpha_1 \ldots \alpha_n)_+| \leqslant M_+^n \mu_{\alpha_1}^0 \ldots \mu_{\alpha n}^0 (z_+ - a_+)^n / n! \qquad (90)$$

Подставляя (90) в (86) и используя полученное выше правило сумм и упомянутую положительную определенность скалярных произведений базисных векторов, получаем следующее неравенство для n-го члена ряда S_n:

$$|S_n| \leqslant M_+^n M_-^n (z_+ - a_+)^n (z_- - a_-)^n / n!$$

Таким образом, ряд, определяющий выражения для решений системы (78б) в случае, когда k совпадает с матрицами Картана градуированных алгебр конечного роста, является абсолютно сходящимся и дает решения задачи Гурса для указанной системы, зависящие от нужного числа произвольных функций. Отметим, что формально ряд (86) дает решение системы (78б) и для произвольных матриц k, однако вопрос о его области сходимости требует дополнительного исследования.

Среди уравнений системы (78б), отвечающих бесконечномерным контраградиентным алгебрам конечного роста, наиболее известны уравнения синус-Гордона:

$$\varphi^{(1)}_{,z_+z_-} = 2\exp\varphi^{(1)} - 2\exp(-\varphi^{(1)}); \qquad (91)$$

$$\varphi^{(2)}_{,z_+z_-} = \exp 2\varphi^{(2)} - 2\exp(-\varphi^{(2)}). \qquad (92)$$

Эти уравнения вытекают из (78б) для матриц k вида $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, причем $\varphi^{(1)} \equiv 2x_1 - 2x_2$ и $\varphi^{(2)} \equiv x_1 - 2x_2$ соответственно. Решения этих уравнений, зависящие от двух произвольных функций, построены в [6] и являются непосредственным следствием общих формул настоящей главы:

$$\exp\varphi^{(1)}/2 = \varphi_{+1}^{1/2}(z_+)\,\varphi_{-1}^{1/2}(z_-)\,X_2^{(1)}\,(X_1^{(1)})^{-1}; \tag{93}$$

$$\exp(-\varphi^{(2)}) = \varphi_{+1}(z_+)\,\varphi_{-1}(z_-)\,X_2^{(2)}\,(X_1^{(2)})^{-2}; \tag{94}$$

$$X_\alpha^{(1)} = X_\alpha\,|_{\varphi_{\pm 2}=\varphi_{\pm 1}^{-1}};\quad X_\alpha^{(2)} = X_\alpha\,|_{\varphi_{\pm 2}=\varphi_{\pm 1}^{-2}};$$

$$X_\alpha = (M^+R_\alpha^-(M^+)^{-1},\ M^-R_\alpha^+(M^-)^{-1}),\quad \alpha=1,\ 2; \tag{95}$$

$$M^\pm(z_\pm) = \mathscr{Z}_\pm \exp\int^{z_\pm} dz'_\pm\,[\varphi_{\pm 1}(z'_\pm)\,X_{\pm 1} + \varphi_{\pm 2}(z'_\pm)\,X_{\pm 2}].$$

Бесконечные ряды, возникающие при расписывании выражений для X_α в рассматриваемом случае, являются, как было показано в общем случае алгебр конечного роста, абсолютно сходящимися. Выпишем для иллюстрации первые восемь членов разложения X_1 по степеням $\varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha}$ (X_2 получается из X_1 очевидной заменой $\varphi_{\pm 1} \rightleftarrows \varphi_{\pm 2}$):

$$\begin{aligned} X_1 = \sum_\beta [(-1)^\beta \sum_\alpha c_\alpha\,|\,X_\alpha^\beta\,|^2] = 1 - |\,X_1^1\,|^2 + 2\,|\,X_1^2\,|^2 - \\ -4\,|\,X_1^3\,|^2 - 2\,|\,X_2^3\,|^2 + 4\,|\,X_1^4\,|^2 + 8\,|\,X_2^4\,|^2 - \\ -8\,|\,X_1^5\,|^2 - 8\,|\,X_2^5\,|^2 - 16\,|\,X_3^5\,|^2 + 8\,|\,X_1^6\,|^2 + 16\,|\,X_2^6\,|^2 + \\ +16\,|\,X_3^6\,|^2 + 32\,|\,X_4^6\,|^2 - 16\,|\,X_1^7\,|^2 - 16\,|\,X_2^7\,|^2 - \\ -16\,|\,X_3^7\,|^2 - 32\,|\,X_4^7\,|^2 - 64\,|\,X_5^7\,|^2 + 32\,|\,X_1^8\,|^2 + \\ +32\,|\,X_2^8\,|^2 + 64\,|\,X_3^8\,|^2 + 64\,|\,X_4^8\,|^2 + 64\,|\,X_5^8\,|^2 + 128\,|\,X_6^8\,|^2 + \ldots \end{aligned}$$

Здесь $|\,X_\alpha^\beta\,|^2 \equiv X_{+\alpha}^\beta\,X_{-\alpha}^\beta$; верхний индекс указывает номер приближения, а нижний — порядковый номер члена приближения:

$$X_{\pm 1}^1 = (1)_\pm\quad X_{\pm 1}^2; = (12)_\pm;\quad X_{\pm 1}^3 = (122)_\pm;\quad X_{\pm 2}^3 = (121)_\pm;$$

$$X_{\pm 1}^4 = (1212)_\pm + (1221)_\pm;\quad X_{\pm 2}^4 = (1221)_\pm;\quad X_{\pm 1}^5 = (12122)_\pm +$$

$$+ (12212)_\pm;\quad X_{\pm 2}^5 = (12121)_\pm + 2\,(12211)_\pm;\quad X_{\pm 3}^5 = (12211)_\pm;$$

$$X_{\pm 1}^6 = (122121)_\pm + (121221)_\pm;\quad X_{\pm 2}^6 = (121211)_\pm + 3\,(122111)_\pm;$$

$$X_{\pm 3}^6 = 2\,(122112)_\pm + (121212)_\pm +$$

$$+ (122121)_\pm + (121221)_\pm;\quad X_{\pm 4}^6 = (122112)_\pm.$$

В заключение раздела укажем на еще один возможный подход к решению системы (78б), которую перепишем в виде

$$x_{\alpha,\,z_+z_-} = \varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha}\exp(kx)_\alpha;\quad \hat{x}_{,z_+z_-} = [\exp\hat{x}\hat{L}^+\exp(-\hat{x}),\ \hat{L}^-]_-, \tag{96}$$

где $\hat{x} \equiv \sum\limits_{\alpha} h_\alpha x_\alpha$, а операторы $\hat{L}^{\pm}$ определяются формулой (82).

Будем рассматривать функции $\varphi_{+\alpha}\varphi_{-\alpha}$ в (96) как малые величины, по отношению к которым будет проводиться итерационная процедура. Разлагая решения x_α системы (96) по величинам соответствующего порядка малости:

$$x_\alpha = \sum_{s=1}^{\infty} x_\alpha^{(s)}; \quad \hat{x} = \sum_{s=1}^{\infty} \hat{x}_{(s)},$$

для членов n-го приближения получаем из (96)

$$\hat{x}_{(n),\, z_+z_-} = \sum_{l_1, \ldots, l_n} \frac{1}{l_1!, \ldots, l_n!} [[\hat{x}_{(n-1)}^{l_{n-1}} \ldots \hat{x}_{(1)}^{l_1}, \hat{L}^+], \hat{L}^-], \tag{97}$$

где $l_1 + 2l_2 + \ldots + (n-1)\, l_{n-1} = n - 1$, а $[\hat{x}_{(n-1)}^{l_{n-1}} \ldots$ $\ldots \hat{x}_{(1)}^{l_1}, \hat{L}^+]_-$ суть последовательность l_1-, ..., l_{n-1}-кратных коммутаторов перестановочных между собой операторов $\hat{x}_{(1)}, \ldots$ $\ldots, \hat{x}_{(n-1)}$ с $\hat{L}^+$. Тогда, пользуясь стандартной техникой, после довольно громоздких расчетов приходим к следующему формальному ряду теории возмущений:

$$x_\alpha = \sum_{n} (-1)^n (\alpha\alpha_2, \ldots, \alpha_n)_+ (\alpha\beta_2, \ldots, \beta_n)_- \times$$
$$\times (R_\alpha^- X_{+\alpha_2}, \ldots, X_{+\alpha_n}, X_{-\beta_n}, \ldots, X_{-\beta_2} R_\alpha^+). \tag{98}$$

Переходя от функций x_α к экспонентам $\exp(-x_\alpha)$, приходим к полученным ранее выражениям для решений системы (78б). Отметим, что с физической точки зрения последний переход соответствует учету несвязных диаграмм при вычислении вакуумного среднего от S-матрицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в обзоре исследование уравнений самодуальности цилиндрически-симметричных полей Янга — Миллса полностью завершает задачу построения общих решений этих уравнений для произвольного вложения подгруппы $SU(2)$ в произвольную простую калибровочную группу Ли и обеспечивает единое описание инстантонных и монопольных конфигураций. В основе разработанного метода интегрирования возникающих нелинейных систем (10) лежит явная реализация представления типа Лакса (11) операторами (12), принимающими значения в алгебре соответствующей группы (не являющейся, вообще говоря, компактной, простой), и теория представлений групп. При этом оказывается, что в предложенную общую схему интегрирования уравнений самодуальности укладывается широкий класс нелинейных систем типа (1), (2), (52), (55), (74), (78), связанных с конечномерными алгебрами Ли (как простыми, так и неполупростыми) и бесконечномерными контрагредиентными алгебрами конечного роста, возникающих в целом ряде физических приложений. В частности, уравнения, описывающие обобщенную двумерную цепочку Тода с закрепленными концами и периодическими граничными условиями, содержатся среди перечисленных выше. Важным обстоятельством является то, что все приведенные уравнения, на первый взгляд, никак не связанные между собой, в рамках изложенного метода представлены как конкретные реализации единой алгебраической конструкции и возможность их полного интегрирования обусловлена именно алгебраической основой уравнений.

В заключение авторы выражают благодарность Б. А. Арбузову, А. А. Кириллову, Д. А. Лейтесу, Ю. И. Манину, М. А. Мествиришвили, С. П. Новикову, Я. Г. Синаю, О. А. Хрусталеву и А. Б. Шабату за многочисленные полезные обсуждения вопросов, затронутых в обзоре.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Методы интегрирования нелинейных динамических систем связанных с градуированными алгебрами, развитые выше, допускают обобщение на суперсимметричный случай. При этом нечетным элементам соответствующих супералгебр сопоставляются антикоммутирующие (спинорные) поля, принимающие значения в алгебре Грассмана. Здесь мы подробно остановимся на суперсимметричном обобщении уравнения Лиувилля, связанном с супералгеброй типа B (0, 1) (O Sp (2, 1)), чтобы детально проследить отличия, возникающие при интегрировании суперсимметричных уравнений, по сравнению с обычным случаем.

Суперсимметричное уравнение Лиувилля, отвечающее действию $\int dz_+dz_-d\theta_+d\theta_- \, [-1/2\hat{\Phi}\hat{D}_-\hat{D}_+^{\bullet}\hat{\Phi} + \exp\hat{\Phi}]$, имеет вид

$$\hat{D}_-\hat{D}_{\bullet}\hat{\Phi} = \exp\hat{\Phi}, \tag{П.1}$$

где

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(z_\pm, \theta_\pm) = \rho(z_\pm) -: \bar{\theta}\omega(z_\pm) -: 1/2\bar{\theta}\theta F(z_\pm)$$

— суперскалярное поле, состоящее из двух скалярных полей ρ, F и майорановского спинора $\omega^\pm$ функций с антикоммутирующими значениями, зависящее от координат $z_\pm$ двумерного пространства и грассмановых переменных $\theta \equiv \begin{pmatrix}\theta_+\\ \theta_-\end{pmatrix}$; $\bar{\theta} \equiv (-:\theta_-, \theta_+)$. Через $\hat{D}_\pm$ обозначены операторы супердифференцирования, $\hat{D}_\pm = \mp\partial/\partial\theta_\pm + \theta_\pm\partial/\partial z_\pm$; $\hat{D}_\pm^2 = \mp\partial/\partial z_\pm$, $\hat{D}_+\hat{D}_- = -\hat{D}_-\hat{D}_+$. В компонентах суперполя $\hat{\Phi}$ ($F = \exp\rho$) уравнение (П.1) имеет вид

$$\rho_{,z_+z_-} = \exp 2\rho + \exp\rho\omega^+\omega^-,$$

$$\omega^\pm_{,z_\mp} = \exp\rho\omega^\mp, \tag{П.2}$$

и в случае $\omega^\pm = 0$ естественно переходит в обычное уравнение Лиувилля и совпадает с полученным ранее в работе [40].

Супералгебра B (0, 1) (см., например, [41]) состоит из пяти элементов $h, X_\pm$, $Y_\pm$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$\left.\begin{array}{l}[h, X_\pm]_- = \pm 2X_\pm; \quad [h, Y_\pm]_- = \pm Y_\pm; \quad [X_+, X_-]_- = [Y_+, Y_-]_+ = h; \\ [X_\pm, Y_\pm]_- = 0; \quad [X_\pm, Y_\mp]_- = Y_\pm; \quad [Y_\pm, Y_\pm]_+ = \mp 2X_\pm,\end{array}\right\} \quad (\text{П.3})$$

Введем следующие операторы $A_\pm$, принимающие значения в алгебре B (0, 1):

$$A_\pm = u^\pm h + \varphi^\pm X_\pm + \psi^\pm Y_\pm, \quad (\text{П.4})$$

где $u^\pm$ (z_+, z_-) и $\phi^\pm$ (z_+, z_-) — обычные, а $\psi^\pm$ (z_+, z_-) — антикоммутирующие функции, $(\psi^\pm)^2 = \psi^+\psi^- + \psi^-\psi^+ = 0$. Тогда представление «нулевой кривизны» для операторов $A_\pm^*$

$$[\partial/\partial z_+ + A_+, \ \partial/\partial z_- + A_-]_- = 0, \quad (\text{П.5})$$

приводит к системе

$$\left.\begin{array}{l}u^-_{,z_+} - u^+_{,z_-} + \varphi^+\varphi^- + \psi^+\psi^- = 0; \\ \varphi^\mp_{,z_\pm} = \pm 2u^\pm\varphi^\mp, \ \psi^\mp_{,z_\pm} \mp u^\pm\psi^\mp = \varphi^\mp\psi^\pm,\end{array}\right\} \quad (\text{П.6})$$

которая после очевидной замены переменных $\psi^+\psi^- \equiv \exp 2\rho$, $\psi^\pm \equiv \omega^\pm(\varphi^\pm)^{1/2}$ сводится к уравнениям (П.2).

Представление (П.5) суть условие градиентности операторов $A_\pm$, т. е.

$$A_\pm = g^{-1} g_{,z_\pm}, \quad (\text{П.7})$$

где g — элемент комплексной оболочки супергруппы G [42] с генераторами (П.3), представимый в виде разложения Гаусса

$$g = M^+N^-\exp H = M^-N^+\exp H', \quad (\text{П.8})$$

в котором $M^\pm$ и $N^\pm$ — элементы комплексных оболочек максимальных нильпотентных подгрупп G, натянутых на $X_\pm$, $Y_\pm$, а H (H') принадлежат картановской подалгебре G. В дальнейшем для простоты примем калибровку $H' = 0$, в которой $u^+ = 0$, $\phi^-_{,z_+} = 0$. Их формул (П.4), (П.7), (П.8) следует, что элементы $M^\pm$ представимы в виде $M^\pm = \exp(m^\pm X_\pm + \varepsilon^\pm Y)$, где m^+ (z_+), m^- (z_-) и ε^+ (z_+), ε^- (z_-) — соответственно обычные и антикоммутирующие функции своих аргументов (ср. (21)). Тождество $(M^+)^{-1}M^- = N^-\exp H\,(N^+)^{-1}$, вытекающее из (П.8), позволяет определить групповые параметры элементов $N^\pm \equiv \exp(\tilde{m}^\pm X_\pm + \tilde{\varepsilon}_\pm Y_\pm)$ и $\exp H = \exp(rh)$ через произвольные функции $m^\pm$ и $\varepsilon^\pm$, параметризующие $M^\pm$, именно:

$$\left.\begin{array}{c}\exp(-r) = 1 - m^+m^- - \varepsilon^+\varepsilon^-, \quad \tilde{\varepsilon}^\pm = (\varepsilon^\pm + m^\pm\varepsilon^\mp)\exp r, \\ \tilde{m}^\pm = m^\pm \exp r.\end{array}\right\} \quad (\text{П.9})$$

Подставляя (П.8) с известными согласно (П.9) элементами $M^\pm$, $N^\pm$ и $\exp H$ в (П.7) и сравнивая (П.4), получаем следующую окончательную формулу

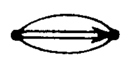
---

* Матричная реализация представления Лакса для (П.1), содержащаяся в работе [40], отвечает специальному представлению B (0, 1) в рамках нашего подхода.

для общих решений суперсимметричного уравнения Лиувилля:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi^{\pm} = (m^{\pm}_{,z_{\pm}} \pm \varepsilon^{\pm}\varepsilon^{\pm}_{,z_{\pm}}) \exp\left[(1 \pm 1)\, r\right];\\
&u = -(\varepsilon^{+}\varepsilon^{-}_{,z_{-}} + m^{+}m^{-}_{,z_{-}}) \exp r;\\
&\psi^{+} = \lambda^{-1}\varepsilon^{+}_{,z_{+}} + \lambda^{-2} m^{+}_{,z_{+}} (\varepsilon^{-} + \varepsilon^{+} m^{-});\\
&\lambda \equiv 1 - m^{+}m^{-};\\
&\psi^{-} = \varepsilon^{-}_{,z_{-}} (1 - \lambda^{-1}\varepsilon^{+}\varepsilon^{-}) + \lambda^{-1} m^{-}_{,z_{-}} (\varepsilon^{+} + \varepsilon^{-} m^{+});\\
&\exp 2\rho = (m^{+}_{,z_{+}} + \varepsilon^{+}\varepsilon^{+}_{,z_{+}})(m^{-}_{,z_{-}} - \varepsilon^{-}\varepsilon^{-}_{,z_{-}}) \exp 2r.
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{П}.10)$$

Использованный выше метод интегрирования суперсимметричного уравнения Лиувилля (П.1) обобщается естественным образом на произвольные градуированные супералгебры. При этом центр тяжести задачи лежит в построении элементов $N\pm$ и $\exp H$ из (П.8) по известным $M\pm$, удовлетворяющих, как и в случае «обычных» градуированных алгебр, уравнениям S-матричного типа. Для решения нелинейных уравнений, связанных с градуированными алгебрами, характеризующимися матрицей Картана (вообще говоря, обобщенной) [21], требуется знание элемента $\exp H$ из (П.8), параметры которого можно определить путем вычисления матричных элементов известного оператора $(M^{+})^{-1}M^{-}$ между старшими и младшими векторами базиса. Однако уже простейший пример суперсимметричного уравнения Лиувилля показывает, что вычисление старшего вектора элемента $(M^{+})^{-1}M^{-}$, равного $1 - m^{+}m^{-} - \varepsilon^{+}\varepsilon^{-}$, не достаточно для описания полного решения (П.10) системы (П. 1).

Отметим, что суперсимметричные обобщения уравнений синус Гордона (см., например, [40, 43]), $\tilde\rho_{,z_{+}z_{-}} = 2\exp\tilde\rho - 2\exp(-\tilde\rho)$ и $\tilde\rho_{,z_{+}z_{-}} = 2\exp\tilde\rho -$ $-\!: \exp(-2\tilde\rho)$, обладающих нетривиальной группой внутренних симметрий в обычном пространстве, связаны, по-видимому, с супералгебрами конечного роста со схемами Дынкина  и  и могут быть проинтегрированы аналогично им. Все эти вопросы требуют дальнейшего исследования.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для облегчения использования полученных выражений для решений (39) системы (1) в случае простых алгебр Ли приведем здесь явные формулы для старших векторов $\xi^{\{l\}}$ неприводимых представлений соответствующих групп. Как показано в [39], они полностью определяются системой старших корней группы, одна из возможных форм записи которых приведена в таблице. Тогда старшие векторы выражаются формулой $\xi^{\{l\}}(K) = \prod\limits_{1}^{r} [D_j(a)]^{\mu_j}$, где D_j — главные миноры матрицы $a_{ab} \equiv \mathrm{Sp}\,(X_{-a}KX_bK^{-1})$ присоединенного представления, отсчитываемые от максимального корня s системы старших корней: $\mu_j = \sum\limits_{1}^{r} l_i (\lambda^{-1})_{ji}$, $\lambda_{ij} \equiv \sum\limits_{a=s-j+1}^{s} a_i$. В интересующем нас случае $K = (M^{+})^{-1}M^{-}$, так что

$$a_{ab} \equiv \mathrm{Sp}\left\{[M^{+}X_{-a}(M^{+})^{-1}]\,[M^{-}X_b(M^{-})^{-1}]\right\}.$$

Таблица старших корней простых алгебр Ли *

A_r, $r \geqslant 1$	$\pi_1,\ \pi_1+\pi_2,\ \ldots,\ \pi \equiv \sum_{j=1}^{r} \pi_j$	B_r, $r > 1$	$\pi,\ \pi+\pi_r,\ \pi+\pi_{r-1}+\pi_r,\ \ldots,\ 2\pi-\pi_1$
C_r, $r > 1$	$\pi,\ \pi+\pi_{r-1},\ \pi+\pi_{r-1}+\pi_r,\ \ldots,\ 2\pi-\pi_r$	D_r, $r > 2$	$\pi-\pi_{r-1},\ \pi-\pi_r,\ \pi,\ \pi+\pi_{r-2},\ \pi+\pi_{r-3}+\pi_{r-2},\ \ldots,\ 2\pi-\pi_{r-1}-\pi_r-\pi_1$
G_2	(13), (23)	F_4	(1232), (1242), (1243), (2243)
E_6	(101212), (112211), (111212), (112212), (112312), (112322)	E_7	(1112322), (1212322), (1212313), (1212323), (1212423), (1213423), (1223423)
E_8	(12324524), (12323534), (12324534), (12324634), (12324635), (12424635), (13424635), (23424635)		

* Старшие корни расположены в порядке возрастания высоты. В целях упрощения записи старших корней особых картановских алгебр выписаны лишь коэффициенты разложения по простым корням π_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**— ЭЧАЯ, 1980, т. 11, вып. 1, с. 40.
2. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Lett. Math. Phys., 1979, v. 3, p. 489.
3. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** В кн.: Труды советско-американского симпозиума по теории солитонов. Киев, 1979 (в печати).
4. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Comm. Math. Phys., 1980, v. 74, p. 111.
5. **Лезнов А. Н., Савельев М. В., Смирнов В. Г.** Препринт ИФВЭ 80-13. Серпухов, 1980.
6. **Лезнов А. Н., Смирнов В. Г.** Препринт ИФВЭ 80-06. Серпухов, 1980.
7. **Toda M.**— Phys. Repts. C, 1975, v. 18, p. 1.
8. **Suppl.** Progr. Theor. Phys., 1976, v. 59.
9. **Hénon M.**— Phys. Rev. B, 1974, v. 9, p. 1921.
10. **Flaschka H.**— Ibid., 1974, v. 9, p. 1924.
11. **Манаков С. В.**— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 543.
12. **Bogoyavlensky O. I.**— Comm. Math. Phys., 1976, v. 51, p. 261.
13. **Olshanetzki M. A., Perelomov A. M.**— Invent. Math., 1979, v. 54, p. 261.
14. **Hermann R.** Interdisciplinary Math., 1974, v. 15A, 18B.
15. **Kostant B.** Preprint MIT, 1979.
16. **Moser J.**— Lecture Notes in Phys., 1976, v. 38, p. 97.
17. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Phys. Lett. B, 1979, v. 83, p. 314.
18. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Lett. Math. Phys., 1979, v. 3, p. 207.
19. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** Препринт ИФВЭ 78-177. Серпухов, 1978.
20. **Wilkinson D., Bais F. A.**— Phys. Rev. D, 1979, v. 19, p. 2410.
21. **Кац В. Г.**— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, т. 32, с. 1323; 1970, т. 34, с. 385; **Moody R. V.**— Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 217.
22. **Фаддеев Л. Д.**— Современные проблемы мат., 1974, т. 3, с. 93.
23. **Манин Ю. И.**— Там же, 1978, т. 11, с. 1.

24. **Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.**— Успехи мат. наук, 1976, т. 31, с. 55.
25. **Zakharov V. E.**— Lecture Notes in Math., 1978.
26. **Toda M., Wadati M.**— J. Phys. Soc. Japan, 1975, v. 39, p. 1204; **Wadati M.**— Ibid., 1975, v. 38, p. 673, 681; **Kac M., van Moerbeke P.**— Advances Math., 1975, v. 16, p. 160.
27. **Вольтерра В.** Математическая теория борьбы за существование. Пер. с англ. М., Наука, 1976.
28. **Захаров В. Е., Мушер С. Л., Рубенчик А. М.**— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 249.
29. **Желобенко Д. П.** Компактные группы Ли и их представления. М., Наука, 1972.
30. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Пер. с англ. М., Мир, 1972; **Джекобсон Н.** Алгебры Ли. Пер. с англ. М., Мир, 1964.
31. **Гантмахер Ф. Р.**— Мат. сб. 1939, т. 5 (47), с. 101; **Дынкин Е. Б.**— Там же, 1952, т. 30, с. 349; **Kostant B.**— Amer. J. Math., 1959, v. 81, p. 973.
32. **Lax P. L.**— Comm. Pure and Appl. Math., 1968, v. 21, p. 467.
33. **Белавин А. А., Захаров В. Е.**— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 603.
34. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1973.
35. **Киржниц Д. А.**— Журн. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 41, с. 551.
36. **Богомольный Е. Б.**— Ядерная физика, 1976, т. 24, с. 449; **Prasad M. K., Sommerfield C. M.**— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 760.
37. **Miura R. M.**— J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1202.
38. **Kac V. G.**— Journ. Algebra, 1968, v. 10, p. 211.
39. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**— ЭЧАЯ, 1976, т. 7, вып. 1, с. 55.
40. **Chaichian M., Kulish P. P.**— Phys. Lett. B., 1978, v. 78, p. 413.
41. **Kac V. G.**— Advances Math., 1977, v. 26, p. 8; **Kostant B.**— Lecture Notes in Math., 1977, v. 570, p. 177.
42. **Березин Ф. А.**— Ядерная физика, 1979, т. 29, с. 1670; **Березин Ф. А., Лейтес Д. А.**— Докл. АН СССР, 1975, т. 22, с. 505.
43. **Girardello L., Sciuto S.**— Phys. Lett. B., 1978, v. 77, p. 267.
44. **Лезнов А. Н., Лейтес Д. А., Савельев М. В.**— Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, с. 85.
45. **Лезнов А. Н., Савельев М. В., Смирнов В. Г.** Препринт ИФВЭ 80 — 51. Серпухов, 1980.