

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ТЕРМИНАХ БЫСТРОТ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕЛЯТИВИСТСКИМ ПРОБЛЕМАМ РАССЕЯНИЯ И СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

И. В. Амирханов, Г. В. Груша, Р. М. Мир-Касимов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен подходу к релятивистской проблеме двух тел, в котором ключевую роль играет быстрота — переменная, канонически сопряженная релятивистскому относительному расстоянию. Для широкого класса квазипотенциалов полностью исследованы аналитические свойства амплитуды и волновой функции по быстроте (энергии) и орбитальному моменту. Дано обобщение ряда квантовомеханических методов: релятивистский метод фазовых функций, метод вычисления релятивистских поправок, уравнения для релятивистских аналогов длины рассеяния и эффективного радиуса, высокоэнергетическое представление для амплитуды рассеяния и др.

This review is devoted to the approach to the relativistic two body problem in which the rapidity being the variable canonically conjugated to the relativistic relative distance plays the key role. The analytic properties of the amplitude and wave function as functions of rapidity (energy) and angular momentum are investigated in detail. The generalization for a number of quantum-mechanical methods is given: the relativistic variable phase method; the method of evaluation of relativistic corrections; the equations for the relativistic analogs of the scattering length and effective radius, the high-energies representation for scattering amplitude etc.

ВВЕДЕНИЕ

Квазипотенциальное описание двухчастичной релятивистской системы — один из наиболее эффективных методов квантовой теории поля КТП. Это описание было впервые предложено [1] на основе одновременной формулировки проблемы двух тел в КТП. В данной формулировке проявились преимущества квазипотенциального подхода КПП: ясный физический смысл всех рассматриваемых величин, аналогия с нерелятивистской квантовой механикой, вероятностная интерпретация и др.

КПП [1—15] с успехом применен при решении некоторых релятивистских задач*. Были вычислены поправки к уровням энер-

* В работах [1—15] можно найти ссылки на последующие работы в данном направлении.

гии связанных состояний в квантовой электродинамике, исследовано асимптотическое поведение амплитуды рассеяния при высоких энергиях, вычислены инклюзивные распределения в модели составных частиц.

Среди бесконечного многообразия уравнений квазипотенциального типа [13] следует особо выделить уравнения, полученные в рамках диаграммной техники ковариантного гамильтонова подхода [14]. Эти уравнения для релятивистской двухчастичной амплитуды $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и волновой функции $\Psi_q(\mathbf{p})$ имеют вид [2]:

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{m}{4\pi} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) G_q(k) A(\mathbf{k}, \mathbf{q}) d\Omega_k, \quad (1)$$

$$\Psi_q(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}(-)\mathbf{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} G_q(p) \int V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k}) d\Omega_k, \quad (2)$$

где

$$G_q(k) = \frac{1}{2E_q - 2E_k + i\epsilon}, \quad \delta(\mathbf{p}(-)\mathbf{q}) = \sqrt{1 + \frac{q^2}{m^2}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (3)$$

Эти уравнения имеют абсолютный характер по отношению к геометрии импульсного пространства [15], т. е. внешне не отличаются от нерелятивистских уравнений Липпмана — Швингера. Данные квазипотенциальные уравнения КПУ можно получить из соответствующих нерелятивистских уравнений, если заменить в последних нерелятивистские (евклидовы) выражения для энергий, элемента объема на их неевклидовы аналоги:

$$\left. \begin{aligned} E_q &= \mathbf{q}^2/2m \rightarrow E_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}, \\ d\Omega_k &= d\mathbf{k} \rightarrow d\Omega_k = d\mathbf{k}/\sqrt{1 + \mathbf{k}^2/m^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Геометрическая трактовка уравнений (1) и (2) делает естественным применение аппарата преобразования Фурье на группе Лоренца [4, 5]. При этом возникает концепция релятивистского конфигурационного r -пространства.

Переход к релятивистскому конфигурационному представлению осуществляется с помощью разложения по матричным элементам главной серии бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца:

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = (p_0 - \mathbf{p}\mathbf{n}/m)^{-1 - i\mathbf{r}\mathbf{m}}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{r} = r\mathbf{n}, \quad (\mathbf{n}^2 = 1, 0 < r < \infty), \quad p_0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \quad \hbar = c = 1. \quad (6)$$

Величина r релятивистски инвариантна и выражается через собственные значения оператора Казимира группы Лоренца

[4, 5]. Группа Лоренца выступает здесь как группа движений релятивистского импульсного пространства, моделью которого служит верхняя половина гиперboloида:

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (7)$$

(массовой поверхности частицы с массой m).

В полисферических координатах на гиперboloиде (7) выражения для энергии и импульса имеют вид:

$$E_p = p_0 = m \operatorname{ch} \chi_p, \quad \mathbf{p} = m \operatorname{sh} \chi_p \mathbf{n}_p, \quad n_p^2 = 1. \quad (8)$$

Переменная χ_p является неевклидовым расстоянием точки с координатами \mathbf{p} от начала координат. В литературе эту величину принято называть быстротой.

В нерелятивистском пределе

$$|\mathbf{p}| \ll m, \quad r \gg m \quad (9)$$

величина $\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle$ переходит в обычную плоскую волну:

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \rightarrow \exp i \mathbf{p} \mathbf{r}, \quad (10)$$

где \mathbf{r} играет роль относительной координаты. В работах [4, 5, 17—30] развита динамическая схема в релятивистском \mathbf{r} -пространстве, во многом аналогичная квантовой механике.

Например, в случае локальных квазипотенциалов [4, 5] волновая функция относительного движения двух бесспиновых частиц равной массы удовлетворяет уравнению [5]:

$$(H_0 - 2E_q + V(r, E_q)) \Psi_q(r) = 0, \quad (11)$$

где H_0 — дифференциально-разностный оператор (свободный гамильтониан) с шагом, равным комптоновской длине волны частицы \hbar/mc^* :

$$H_0 = 2 \operatorname{ch} i \partial / \partial r + (2i/r) \operatorname{sh} i \partial / \partial r - \Delta_{0, \mathbf{q}} \exp(i \partial / \partial r / r^2). \quad (12)$$

Дифференциально-разностные уравнения для некоторых важных для приложений потенциалов решаются точно [5, 17—20]. Теория рассеяния в релятивистском конфигурационном пространстве также обладает формальным сходством с квантовомеханической теорией рассеяния. Следует заметить, что феноменологическое описание упругого рассеяния адронов высоких энергий основано на борновском приближении для амплитуды рассеяния, применении релятивистского уравнения (11) в составных моделях элементарных частиц^[22].

Однако своеобразие формулировки граничных условий для конечно-разностного уравнения усложняет построение конкрет-

* Здесь и далее принято $m = 1$.

ных приближенных решений, численные расчеты, исследование аналитических свойств волновой функции и амплитуды рассеяния.

В связи с этим возникла проблема сформулировать такой трехмерный динамический подход к релятивистской задаче двух тел, который приводит к дифференциальному уравнению второго порядка (типа Шредингера) в релятивистском конфигурационном r -пространстве.

Искомый вариант КПП был построен на пути детального анализа свойств релятивистского преобразования Фурье. При этом важным оказалось следующее. Быстрые являются естественными переменными в квазипотенциальном подходе, прежде всего потому, что релятивистское относительное расстояние r (6) и быстрота χ (8) — канонически сопряжены друг другу в смысле релятивистского преобразования Фурье [5]. В частности, справедливо соотношение неопределенностей:

$$\Delta r \Delta \chi \approx \hbar / mc. \quad (13)$$

Естественно искать вариант КПП, в котором быстрота играет ключевую роль при выходе за энергетическую поверхность. Получающиеся при этом уравнения обладают абсолютным характером по отношению к геометрии импульсного пространства и всеми другими преимуществами КПП. При этом оказывается решенной сформулированная выше проблема: соответствующее уравнение для волновой функции в конфигурационном представлении есть дифференциальное уравнение второго порядка. Граничные условия здесь формулируются в полной аналогии с нерелятивистской квантовой механикой (но с учетом релятивистского характера переменной r). На рассматриваемый случай легко можно обобщить вес приближения, справедливые в квантовой механике. Это дает данному КПП неопределимые преимущества.

Что касается аналитических свойств по энергии (быстроте) и орбитальному моменту, то здесь справедлива известная теорема Пуанкаре, позволяющая провести исследование этих свойств столь же детально, как это делается в квантовой механике [28, 29].

Следует отметить также, что успехи партонной модели стимулировали в последнее время некоторые исследования, в которых в качестве базисной переменной выступает быстрота. Здесь следует указать модель высокоэнергетического рассеяния адронов. В работе [30] было предложено изучать структуру адронов, используя в качестве исходного пункта форм-факторы частиц как функции быстрот. В работах [31, 32] аппарат, развитый в [4, 5, 17—20], был с успехом применен для изучения свойств волновой функции адрона в партонной модели. Инвариантные инклюзивные сечения многочастичных процессов при высоких энергиях являются простыми функциями быстроты. Интересная попытка анализа этого

факта на базе релятивистского анализа Фурье предпринята недавно в работе [33].

Итак, существует ряд указаний на то, что быстрота является адекватной переменной в релятивистской области.

1. ТРЕХМЕРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ ДВУХ ТЕЛ В ТЕРМИНАХ БЫСТРОТ

Квазипотенциальные уравнения в терминах быстрот. Рассмотрим вначале уравнение Липпмана — Швингера

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{k}) A(\mathbf{k}, \mathbf{q}) d\Omega_k}{s^2(q, 0) - s^2(k, 0) + i\epsilon}, \quad (14)$$

где $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — нерелятивистская амплитуда рассеяния, а энергия выражена через расстояние $s(q, 0)$ от точки с координатами \mathbf{q} до начала координат в нерелятивистском трехмерном евклидовом импульсном пространстве:

$$E_q = \mathbf{q}^2/2 = s^2(q, 0)/2. \quad (15)$$

Перейдем теперь от (1) к релятивистскому уравнению, заменяя нерелятивистские (евклидовы) величины на релятивистские (неевклидовы) (II.4). Выражение для расстояния $s(q, 0)$ при этом перейдет в соответствующее неевклидово выражение

$$s(q, 0) = \sqrt{\mathbf{q}^2} \rightarrow \chi_q = \ln(E_q + \sqrt{E_q^2 - 1}). \quad (16)$$

Сохраняя для релятивистской амплитуды обозначение $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, приходим к уравнению

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi} \hat{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\chi_q}{\text{sh } \chi_q} \int \frac{\hat{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) A(\mathbf{k}, \mathbf{q}) d\Omega_k}{\chi_q^2 - \chi_k^2 + i\epsilon}. \quad (17)$$

Новая квазипотенциальная функция Грина

$$g_q(k) = \frac{\chi_q}{\text{sh } \chi_q} \frac{1}{\chi_q^2 - \chi_k^2 + i\epsilon} \quad (18)$$

имеет полюс на энергетической поверхности $E_k = E_q$, как и другие квазипотенциальные функции Грина, а вычет ее обеспечивает выполнение условия двухчастичной унитарности для вещественных потенциалов \hat{V} :

$$\text{Im } A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{|\mathbf{q}|}{4\pi} \int A(\mathbf{p}, \mathbf{k}) A(\mathbf{k}, \mathbf{q}) d\omega_k. \quad (19)$$

Связь квазипотенциальной амплитуды $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ с дифференциальным сечением упругого рассеяния имеет вид

$$d\sigma/d\omega = |A(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2. \quad (20)$$

Рассмотрим комплексную плоскость переменной χ_q . Энергия и импульс (П.54) — функции быстроты, периодические вдоль чисто мнимого направления в χ_q -плоскости с периодом $2\pi i$. Ядро релятивистского преобразования Фурье, однако, свойством периодичности не обладает. Работая с этим преобразованием, приходится рассматривать различные величины как функции быстроты во всей комплексной χ_q -плоскости. Например, для вычисления интеграла следует пользоваться леммой Жордана, замыкая контур бесконечного радиуса в верхней или нижней полуплоскости χ_q , в зависимости от знака разности $r - r'$.

Отображение (8) является бесконечнолистным. Только два листа бесконечнолистной римановой поверхности, отвечающие полосам $0 < \text{Im } \chi_q < \pi$ и $-\pi < \text{Im } \chi_q < 0$, имеют нерелятивистские аналоги: физический $\text{Im } \sqrt{E} > 0$ и нефизический $\text{Im } \sqrt{E} < 0$ листы.

Уравнения Бете—Солпитера и бесконечные совокупности квазипотенциальных уравнений содержат зависимость только от $\text{ch } \chi_q$ и $\text{sh } \chi_q$. С точки зрения комплексных быстрот для их изучения достаточно главной ветви логарифма. Нет, однако, никаких оснований требовать, чтобы функция Грина КПУ была $2\pi i$ -периодической функцией быстроты. Чтобы удовлетворить основному требованию двухчастичной релятивистской унитарности, достаточно, чтобы функция Грина имела один полюс в верхней полуплоскости χ_q . Бесконечная цепочка полюсов, отвечающая периодической зависимости, не дает вклада в условие унитарности.

Связь с другими релятивистскими уравнениями. Исследуем связь между уравнениями (П.47) и (4). Воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} G_q(k) &= \frac{1}{2(\text{ch } \chi_q - \text{ch } \chi_k + i\epsilon)} = \\ &= -\frac{1}{\text{sh } \chi_q} \left\{ \text{cth} \left(\frac{\chi_k - \chi_q - i\epsilon}{2} \right) - \text{cth} \left(\frac{\chi_k - \chi_q + i\epsilon}{2} \right) \right\} = g_q(k) + \Omega_q(k), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\Omega_q(k) = -\frac{1}{\text{sh } \chi_q} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\chi_k - \chi_q}{(\chi_k - \chi_q)^2 + (2\pi n)^2} - \frac{\chi_k + \chi_q}{(\chi_k + \chi_q)^2 + (2\pi n)^2} \right]. \quad (22)$$

Таким образом, мы представили функцию Грина $G_q(k)$ уравнения (П.47) в виде суммы двух членов — функции Грина $g_q(k)$

уравнения (17) и величины $\Omega_q(k)$. Последняя содержит всю бесконечную цепочку «лишних» (т. е. не дающих вклада в упругую унитарность) полюсов в комплексной χ_q -плоскости.

Установим теперь связь между квазипотенциалами $V(p, q; E_q)$ и $\hat{V}(p, q; E_q)$, входящими в (П.47) и (17). Запишем оба уравнения в символической форме:

$$A = -\frac{1}{4\pi} V + \frac{1}{(2\pi)^3} V G A, \tag{23}$$

$$A = -\frac{1}{4\pi} \hat{V} + \frac{1}{(2\pi)^3} \hat{V} g A. \tag{24}$$

Преобразуя (23) к виду

$$A = -\frac{1}{4\pi} V + \frac{1}{(2\pi)^3} V g A + \frac{1}{(2\pi)^3} V \Omega A,$$

переходим к заключению, что (23) и (24) эквивалентны, если V и \hat{V} связаны соотношением

$$\hat{V} = V + \frac{1}{(2\pi)^3} V \Omega \hat{V}.$$

Очевидно, что борновские приближения в (23) и (24) совпадают.

Перейдем к связи уравнения (17) с уравнением Бете — Солпитера

$$T(p_1, p_2; p'_1, p'_2) = K(p_1, p_2; p'_1, p'_2) + \int K(p_1, p_2; \frac{p}{2} + k, \frac{p}{2} - k) G(p, k) T(\frac{p}{2} + k, \frac{p}{2} - k; p'_1, p'_2) d^4k, \tag{25}$$

где $p = p_1 + p_2$. В системе центра масс $p = (2\text{ch } \chi_q, 0)$.

Двухчастичный пропагатор $G(p, k)$ имеет вид

$$G(p, k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \{[(p/2 + k)^2 - m^2 + i\epsilon] [(p/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon]\}^{-1}.$$

Один из способов перехода от четырехмерного уравнения (25) к трехмерному КПУ состоит в замене функции Грина $G(p, k)$ на интеграл «дисперсионного» типа $E(p, k)$, обеспечивающий двухчастичную унитарность [15]:

$$G(p, k) \rightarrow E(p, k) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} f(s, s') \times \\ \times D^{(+)}\left(\frac{p'}{2} + k\right) D^{(+)}\left(\frac{p'}{2} - k\right), \tag{26}$$

где

$$D^{(+)}(k) = \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2), \quad s = p^2, \quad s' = (p')^2, \quad p' = \sqrt{s'} p / 2\text{ch } \chi_q,$$

а величина $f(s, s')$ удовлетворяет единственному условию:

$$f(s, s) = 1.$$

Если вместо (2.6) использовать выражение

$$\hat{g}(p, k) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d(\chi')^2 D^{(+)}\left(\frac{p'}{2} + k\right) D^{(+)}\left(\frac{p'}{2} - k\right)}{(\chi')^2 - \chi_q^2 - i\epsilon}, \quad (27)$$

где $\chi' = \ln(\sqrt{s'/2} + \sqrt{s'/4 - 1})$, то в системе центра инерции получим:

$$\hat{g}(p, k) = \frac{1}{4(2\pi)^3} \frac{\delta(k^0)}{\text{ch}^2 \chi_q} g_q(k). \quad (28)$$

Подставляя (28) в уравнение (25) и переходя к амплитуде A [4, 5], получаем (17). Связь \hat{V} с ядром Бете — Солпитера K имеет вид

$$V = K + K(G - \hat{g})\hat{V}.$$

Дадим еще один вывод уравнения (17) (сравни с результатами [34]). Волновая функция $\Psi(p_1, p_2)$ системы двух свободных частиц с одинаковыми массами m в импульсном представлении подчиняется уравнениям:

$$(p_1^2 - m^2)\Psi(p_1, p_2) = 0, \quad (p_2^2 - m^2)\Psi(p_1, p_2) = 0. \quad (29)$$

Переходя к новым переменным Q и p по формулам

$$p_1 = p + Q/2, \quad p_2 = -p + Q/2, \quad (30)$$

запишем систему (29) в виде

$$\left[\left(\frac{Q}{2} + p\right)^2 - m^2\right]\Psi(Q, p) = 0, \quad \left[\left(\frac{Q}{2} - p\right)^2 - m^2\right]\Psi(Q, p) = 0. \quad (31)$$

Складывая и вычитая последние уравнения, приходим к эквивалентной паре уравнений

$$(Q^2/4 + p^2 - m^2)\Psi(Q, p) = 0, \quad (32a)$$

$$(Qp)\Psi(Q, p) = 0. \quad (32b)$$

В системе центра масс $Q = 0$, $p_1 = -p_2 = p$ в силу (32b) имеем

$$\Psi(Q, p) = \delta(p_0)\Psi_{Q_0}(p). \quad (33)$$

В классе решений с положительной энергией с учетом (33) уравнение (32a) приобретает вид

$$(E_q - E_p)\Psi_{Q_0}(p) = 0. \quad (34)$$

Переходя к быстротам по формуле (8), будем иметь

$$(\text{ch } \chi_q - \text{ch } \chi_p)\Psi_q(p) = 0, \quad (35)$$

или эквивалентно

$$2 \operatorname{sh} \left(\frac{\chi_q + \chi_p}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\chi_q - \chi_p}{2} \right) \Psi_q(\mathbf{p}) = 0. \quad (36)$$

Пользуясь соотношением

$$\operatorname{sh} z = \frac{z}{\Gamma(1 - iz/\pi) \Gamma(1 + iz/\pi)}, \quad (37)$$

запишем (36) в виде

$$A(\chi_q, \chi_p) (\chi_q^2 - \chi_p^2) \Psi_q(\mathbf{p}) = 0, \quad (38)$$

где

$$A(\chi_q, \chi_p) = 2 \left\{ \left| \Gamma \left(1 + i \frac{\chi_q - \chi_p}{\pi} \right) \Gamma \left(1 + i \frac{\chi_q + \chi_p}{\pi} \right) \right| \right\}^{-2}. \quad (39)$$

Поскольку $A(\chi_q, \chi_p)$ при вещественных быстротах в нуль не обращается, $\Psi_q(\mathbf{p})$ удовлетворяет уравнению

$$(\chi_q^2 - \chi_p^2) \Psi_q(\mathbf{p}) = 0. \quad (40)$$

Вводя в (40) взаимодействие (ср. [34]), приходим к уравнению

$$(\chi_q^2 - \chi_p^2) \Psi_q(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\chi_q}{\operatorname{sh} \chi_q} \int V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k}) d\Omega_k, \quad (41)$$

эквивалентному (17).

Уравнение для волновой функции в конфигурационном представлении. Введем волновую функцию $\Psi_q(p)$ в непрерывном спектре:

$$\Psi_q(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - 4\pi \frac{\chi_q}{\operatorname{sh} \chi_q} \frac{A(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\chi_q^2 - \chi_p^2 + i\varepsilon}. \quad (42)$$

Уравнение для $\Psi_q(\mathbf{p})$ имеет вид

$$\Psi_q(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\chi_q}{\operatorname{sh} \chi_q} \frac{\int \hat{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k}) d\Omega_k}{\chi_q^2 - \chi_p^2 + i\varepsilon}. \quad (43)$$

Проводя в (43) релятивистское преобразование Фурье, приходим к уравнению Шредингера для волновой функции $\Psi_q(\mathbf{r})$:

$$\Psi_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \Psi_q(\mathbf{p}) d\Omega_p \quad (44)$$

в релятивистском конфигурационном r -представлении

$$\Psi_q(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle + \int g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi_q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (45)$$

Функция Грина $g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ задается соотношениями

$$g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\chi_q}{\text{sh } \chi_q} \int \frac{\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \mathbf{r}' \rangle}{\chi_q^2 - \chi_k^2 + i\epsilon} d\Omega_k =$$

$$= \frac{1}{4\pi r r'} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_{ql}(r, r') P_l(\mathbf{nn}'), \quad (46)$$

где $g_{ql}(r, r')$ — парциальная функция Грина [24]

$$g_{ql}(r, r') = \frac{2}{\pi} \frac{\chi_q}{\text{sh } \chi_q} \int_0^{\infty} \frac{s_l(r, \chi_k) s_l^*(r', \chi_k)}{\chi_q^2 - \chi_k^2 + i\epsilon} d\chi_k =$$

$$= -\frac{\nu_l(r')}{\text{sh } \chi_q} \{ \theta(r-r') e_l^{(1)}(r, \chi_q) s_l(r', \chi_q) +$$

$$+ \theta(r'-r) e_l^{(2)}(r', \chi_q) s_l(r, \chi_q) \}, \quad (47)$$

$$\nu_l(r) = (-1)^{l+1} \frac{r^{(l+1)}}{(-r)^{(l+1)}}, \quad (48)$$

$r^{(l+1)}$ — так называемая обобщенная степень. Определение величин $r^{(\lambda)}$ и входящих в (48) релятивистских свободных волновых функций $e_l^{(1, 2)}(r, \chi_q)$, $s_l(r, \chi_q)$, $c_l(r, \chi_q)$ (аналогов функций Риккати — Бесселя и Риккати—Ханкеля) дано в приложении А.

Ниже будем всюду считать потенциал \hat{V} локальным [4, 5]

$$\hat{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = V[(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2]$$

и не будем обозначать явно зависимость от E_q :

$$V[(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2] = \int \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle V(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle d\mathbf{r}. \quad (49)$$

Связь амплитуды рассеяния с волновой функцией имеет вид

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi} \int \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle V(\mathbf{r}) \Psi_q(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (50)$$

$$\Psi_{ql}(r) = s_l(r, \chi_q) + \int_0^{\infty} g_{ql}(r, r') V(r') \Psi_{ql}(r') dr', \quad (51)$$

причем парциальная амплитуда рассеяния

$$A_l(\chi_q) = \{ \exp [2i\delta_l(\chi_q)] - 1 \} / 2i \quad (52)$$

связана с $\Psi_{ql}(r)$ соотношением

$$A_l(\chi_q) = -\frac{1}{\text{sh } \chi_q} \int_0^{\infty} s_l^*(r', \chi_q) V(r') \Psi_{ql}(r') dr', \quad (53)$$

$\delta_l(\chi_q)$ — фаза рассеяния.

Уравнение (50) эквивалентно дифференциальному

$$\hat{h}_0 \Psi_{ql}(r) = \gamma_l(r, \chi_q) V(r) \Psi_{ql}(r), \tag{54}$$

где оператор \hat{h}_0 имеет вид

$$\hat{h}_0 = d^2/dr^2 - U_l^{(1)}(r, \chi_q) - U_l^{(2)}(r, \chi_q) (d/dr), \tag{55}$$

причем введены следующие обозначения:

$$W_q(s_l, c_l) = c_l(r, \chi_q) \frac{d}{dr} s_l(r, \chi_q) - s_l(r, \chi_q) \frac{d}{dr} c_l(r, \chi_q), \tag{56a}$$

$$U_l^{(1)}(r, \chi_q) = \frac{1}{W_q(s_l, c_l)} \left[\frac{ds_l(r, \chi_q)}{dr} \frac{d^2 c_l(r, \chi_q)}{dr^2} - \frac{dc_l(r, \chi_q)}{dr} \frac{d^2 s_l(r, \chi_q)}{dr^2} \right], \tag{56б}$$

$$U_l^{(2)}(r, \chi_q) = -\frac{1}{W_q(s_l, c_l)} \frac{dW_r(s_l, c_l)}{dr}, \tag{56в}$$

$$\gamma_l(r, \chi_q) = (v_l(r) W(s_l, c_l)) / \text{sh } \chi_q. \tag{56г}$$

Отметим, что величины $U_l^{(1,2)}(r, \chi_q)$ и $\gamma_l(r, \chi_q)$ являются мероморфными функциями l и χ_q . Переходя к волновой функции

$$\Phi_{ql}(r) = \frac{\Psi_{ql}(r)}{\sqrt{W_q(s_l, c_l)}}, \tag{57}$$

исключим из (53) первую производную

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \chi_q^2 - R_l(r, \chi_q) \right] \Phi_{ql}(r) = \gamma_l(r, \chi_q) V(r) \Phi_{ql}(r), \tag{58}$$

где «центробежный потенциал» $R_l(r, \chi_q)$ задается соотношением

$$R_l(r, \chi_q) = U_l^{(1)}(r, \chi_q) - \frac{1}{2W_q(s_l, c_l)} \frac{d^2}{dr^2} W_q(s_l, c_l) + 3 \left[\frac{1}{2W_q(s_l, c_l)} \frac{d}{dr} W_q(s_l, c_l) \right]^2 + \chi_q^2, \tag{59}$$

$$R_0(r, \chi_q) = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} R_1(r, \chi_q) &= -(3 - 2\chi_q \text{cth } \chi_q) / \left(r^2 + \frac{\text{cth } \chi_q}{\chi_q} (\chi_q \text{cth}' \chi_q - 1) \right) + \\ &+ 3r^2 / \left(r^2 + \frac{\text{cth } \chi_q}{\chi_q} (\chi_q \text{cth } \chi_q - 1) \right). \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

В нерелятивистском пределе (59) «центробежный» потенциал $R_l(r, \chi_q)$ переходит в обычный $l(l+1)/r^2$.

Обратимся теперь к важной проблеме граничных условий. Парциальная функция Грина $g_{ql}(r, r')$ (48) внешне неотличима от

соответствующей функции Грина нерелятивистского уравнения Шредингера. Отличие состоит в том, что в (48) вместо нерелятивистских функций Риккати—Бесселя входят релятивистские свободные решения $e_l^{(1, 2)}(r, \chi_q)$ и $s_l(r, \chi_q)$. Подчеркнем, что функция Грина уравнений (П.47) и (П.48) содержит «размазанную» θ -функцию [4, 5], что в конечном счете и обуславливает конечноразностный характер оператора (12) и трудности с формулировкой граничных условий. В (48) входит обычная ступенчатая функция:

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & r > 0, \\ 0 & r < 0. \end{cases}$$

Здесь мы имеем дело с дифференциальным уравнением второго порядка (58). Решение, как и в квантовой механике, фиксируется заданием двух граничных условий (при $r = 0$ и при $r \rightarrow \infty$). Выпишем эти условия, учитывая, что $R_l(r, \chi_q) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, и предполагая, что потенциалы $V(r)$ короткодействующие.

В случае рассеяния ($\chi_q \geq 0$):

$$\varphi_{ql}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sin(\chi_q r - \pi l/2) + A_l(\chi_q) \exp(i\chi_q r - i\pi l/2). \quad (64)$$

В случае связанных состояний

$$\chi_q = i\zeta_q, \quad E_q = \cos \zeta_q \quad (0 < \zeta_q < \pi/2), \quad \varphi_{ql}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \exp(-\zeta_q r). \quad (62)$$

Граничное условие в нуле в обоих случаях выглядит одинаково:

$$\varphi_{ql}(0) = 0. \quad (63)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В КОМПЛЕКСНЫХ ПЛОСКОСТЯХ БЫСТРОТЫ И УГЛОВОГО МОМЕНТА

Аналитические свойства нерелятивистской волновой функции и амплитуды рассеяния как функции энергии и орбитального момента — полностью решенная задача [35, 36]. Решение ее опирается на известную теорему Пуанкаре об аналитических свойствах решений как функций параметра. После введения понятия релятивистского r -пространства и построения в нем релятивистской версии квантовой механики возникла заманчивая перспектива решить задачу об аналитических свойствах квазипотенциальной волновой функции и амплитуды*. Весьма существенно при этом, что свободные решения s_l , $e_l^{(1, 2)}$ и c_l выражаются через известные функции Лежандра, аналитические свойства которых хорошо из-

* Аналитические свойства КПУ в импульсном представлении изучались в [38—41].

вестны [37]. Однако конечно-разностный характер исходных уравнений [4, 5] не позволил обобщить методы теории потенциального рассеяния [35, 36] на релятивистский случай. Отметим, что «размазанные» $\hat{\theta}$ -функции, входящие в выражение для квазипотенциальной функции Грина и обуславливающие конечно-разностный характер уравнений, приводят к интегральным уравнениям фредгольмовского типа для волновой функции. В релятивистской теории при изучении аналитических свойств (доказательство теоремы Пуанкаре) существенно, что уравнение Шредингера в интегральной форме есть уравнение Вольтерра.

КПП в терминах быстрот, сформулированный в разд. 1, позволяет решить задачу об аналитических свойствах в комплексных плоскостях быстроты (энергии) и орбитального момента методами, являющимися, по сути дела, релятивистскими обобщениями теории потенциального рассеяния [35, 36].

Теория рассеяния. Определим для уравнения (54) регулярное в начале координат решение $\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q)$, решение $\Psi_l^{\pm}(r, \chi_q)$, и аналоги решений Йоста $\Psi^{(\pm J)}(r, \chi_q)$ с помощью граничных условий:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q)}{r} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{s_l(r, \chi_q)}{r} \right] = \exp(-i\pi l/2) Q_l(\text{cth } \chi_q), \tag{64a}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\exp[\pm i(r\chi_q - \pi l/2)] \Psi_l^{(\pm J)}(r, \chi_r)] = 1, \tag{64b}$$

$$\Psi_l^{(\pm)}(r, \chi_q) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sin(r\chi_q - \pi l/2) + A_l^{(\pm)}(\chi_q) \exp[\pm i(r\chi_q - \pi l/2)], \tag{64в}$$

где $A_l^{(\pm)}(\chi_q)$ — амплитуда рассеяния.

Согласно теореме Пуанкаре решение дифференциального уравнения с целыми коэффициентами является целой функцией параметра, если оно удовлетворяет граничному условию, не зависящему от этого параметра [35]. Однако в отличие от обычного уравнения Шредингера коэффициенты уравнения (54), выражающиеся через релятивистские аналоги функций Риккати—Бесселя $s_l(r, \chi_q)$, $c_l(r, \chi_q)$ и Риккати—Ханкеля $e_l^{(1, 2)}(r, \chi_q)$, — мероморфные функции l и χ_q [24]*. Следуя [35, 36], построим интегральные уравнения для волновых функций, отвечающих граничным условиям [64]:

$$\Psi_l^{(\pm, 0)}(r, \chi_q) = s_l(r, \chi_q) + \int_0^{\infty} g_l^{(\pm, 0)}(r, r'; \chi_q) V(r', \chi_q) \Psi_l^{(\pm, 0)}(r', \chi_q) dr', \tag{65}$$

* Определение и свойства этих свободных решений, в том числе аналитические и асимптотические, даны в приложении.

$$\Psi^{(\pm J)}(r, \chi_q) = e_l^{(1, 2)}(r, \chi_q) + \int_0^\infty g_l^J(r, r'; \chi_q) V(r', \chi_q) \Psi_l^{(\pm J)}(r', \chi_q) dr', \quad (66)$$

где

$$g_l^{(\pm)}(r, r'; \chi_q) = -\frac{v_l(r')}{\text{sh } \chi_q} [\theta(r-r') e_l^{(1, 2)}(r, \chi_q) s_l(r', \chi_q) + \theta(r'-r) s_l(r, \chi_q) e_l^{(1, 2)}(r', \chi_q)], \quad (67)$$

$$g_l^{(0)}(r, r'; \chi_q) = \theta(r-r') K_l(r, r'; \chi_q), \quad (68)$$

$$g_l^J(r, r'; \chi_q) = -\theta(r'-r) K_l(r, r'; \chi_q), \quad (68)$$

$$K_l(r, r'; \chi_q) = \frac{v_l(r)}{\text{sh } \chi_q} [s_l(r, \chi_q) e_l^{(1)}(r', \chi_q) - e_l^{(1)}(r, \chi_q) s_l(r', \chi_q)]. \quad (69)$$

Введем теперь релятивистские функции Йоста $f_l^{(\pm)}(\chi_q)$ так, чтобы асимптотическое поведение регулярного решения имело вид

$$\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q) \sim \frac{1}{2i} [f_l^{(-)}(\chi_q) \exp[i(r\chi_q - \pi l/2)] - f_l^{(+)}(\chi_q) \exp[-i(r\chi_q - \pi l/2)]]. \quad (70)$$

Из (65) — (69) следуют представления

$$f_l^{(\pm)}(\chi_q) = \Psi_l^{(0)}(r, \chi_q) / \Psi_l^{(\pm)}(r, \chi_q), \quad (71)$$

$$f_l^{(\pm)}(\chi_q) = 1 + \frac{1}{\text{sh } \chi_q} \int_0^\infty e_l^{(1, 2)}(r, \chi_q) V(r, \chi_q) \Psi_l^{(0)}(r, \chi_q) v_l(r) dr = \left[1 - \frac{1}{\text{sh } \chi_q} \int_0^\infty e_l^{(1, 2)}(r, \chi_q) V(r, \chi_q) \Psi_l^{(\pm)}(r, \chi_q) v_l(r) dr \right]^{-1}. \quad (72)$$

Далее имеем следующие выражения для парциальной амплитуды $A_l^{(\pm)}(\chi_q)$, фазы рассеяния $\delta_l(\chi_q)$ и элемента S_l -матрицы рассеяния*:

$$A_l^{(\pm)}(\chi_q) = -\frac{1}{\text{sh } \chi_q} \int_0^\infty s_l(r, \chi_q) V(r, \chi_q) \Psi_l^{(\pm)}(r, \chi_q) v_l(r) dr = \frac{f_l^{(-)}(\chi_q) - f_l^{(+)}(\chi_q)}{2if_l^{(\pm)}(\chi_q)}, \quad (73)$$

$$S_l(\chi_q) = \frac{f_l^{(-)}(\chi_q)}{f_l^{(+)}(\chi_q)}, \quad f_l^{(+)}(\chi_q) = \tau_l(\chi_q) \exp[\pm i\delta_l(\chi_q)]. \quad (74)$$

* Соотношения (64) — (73) аналогичны формулам теории потенциального рассеяния [35, 36]. Нормировка граничных условий (64) такова, что в нерелятивистском пределе (65) — (73) переходят в соответствующие выражения работы [36].

Рассмотрим вронскиан двух линейно независимых решений уравнения (54) $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$:

$$W(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}) = \Psi_l^{(1)}(r, \chi_q) \frac{d}{dr} \Psi_l^{(2)}(r, \chi_q) - \Psi_l^{(2)}(r, \chi_q) \frac{d}{dr} \Psi_l^{(1)}(r, \chi_q) = \frac{1}{\chi_q} W(s_l, c_l) W(\phi_l^{(1)}, \phi_l^{(2)}), \quad (75)$$

где $\phi_l^{(1, 2)}(r, \chi_q) = \Psi_l^{(1, 2)}(r, \chi_q) / \sqrt{W(s_l, c_l)}$. Вронскиан $W(\phi_l^{(1)}, \phi_l^{(2)})$ не зависит от r . Представим $\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q)$ в виде суперпозиции:

$$\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q) = \frac{1}{2i} [f_l^{(-)}(\chi_q) \Psi_l^{(+J)}(r, \chi_q) - f_l^{(+)}(\chi_q) \Psi_l^{(-J)}(r, \chi_q)], \quad (76)$$

тогда с учетом (75)

$$f_l^{(\pm)}(\chi_q) = \frac{W(\Psi_l^{(\pm J)}, \Psi_l^{(0)})}{W(s_l, c_l)} = \frac{1}{\chi_q} \lim_{r \rightarrow \infty} W[\Psi^{(\pm J)}, \Psi^{(0)}]. \quad (77)$$

Из (77) и (64) следует:

$$f_l^{(\pm)}(\chi_q) = \Psi_l^{(\pm J)}(0, \chi_q) \left[\frac{1}{W(s_l, c_l)} \frac{d}{dr} \Psi_l^{(0)}(r, \chi_q) \right]_{r=0}. \quad (78)$$

Переходя к комплексным быстрой и орбитальным моментам, предположим (ср. [38—41]), что: 1) квазипотенциал веществен на интервале вещественной оси в плоскости χ_q^2 , содержащей точку $\chi_q = 0$ (в области упругого рассеяния и связанных состояний); 2) квазипотенциал аналитичен в некоторой части χ_q -плоскости, за исключением точек ветвления, соответствующих порогам неупругих процессов. Справедливы следующие правила комплексного сопряжения, опирающиеся на (II.32):

$$\left. \begin{aligned} [\Psi_l^{(\pm J)}(r, \chi_q)]^* &= v_{l^*}(r) \Psi_{l^*}^{(\mp J)}(r, \chi_q^*), \\ [\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q)]^* &= v_{l^*}(r) \Psi_{l^*}^{(0)}(r, \chi_q^*), \\ [f_l^{(\pm)}(\chi_q)]^* &= f_{l^*}^{(\mp)}(\chi_q^*), \\ [\tau_l(\chi_q)]^* &= \tau_{l^*}(\chi_q^*), \quad [\delta_l(\chi_q)]^* = \delta_{l^*}(\chi_q^*) \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

и условие унитарности

$$[S_l(\chi_q)]^* = [S_{l^*}(\chi_q^*)]^{-1}. \quad (80)$$

Аналитические свойства парциальной амплитуды в плоскостях быстрой и углового момента. Пусть $\Omega(\chi_q)$ — полоса быстрой $|\text{Im } \chi_q| < \pi$, $|\chi_q| \geq \varepsilon > 0$, отвечающая всей плоскости импульса q , за исключением окрестности точки $q = 0$. Рассмотрим ту часть $\Omega'(\chi_q)$ области $\Omega(\chi_q)$, в которой аналитичен квазипотенциал, и полуплоскости $\text{Re}(l + 1) < \delta$ ($1 > \delta > 0$) комплексного орбитального момента.

Рассмотрим регулярные потенциалы, т. е. удовлетворяющие условиям:

$$\int_0^{\infty} r |V(r, \chi_q)| \exp(\nu r) dr < \infty, \quad (81)$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{r}{r+\delta} \right) \left| \frac{\partial}{\partial \chi_q} V(r, \chi_q) \right| \exp(\nu r) dr < \infty \quad (82)$$

при всех ν ($0 < \nu < \mu$) и δ ($0 < \delta < 1$), где μ — фиксированное положительное число.

Представим решение $\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q)$ в виде разложения

$$\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{l,n}^{(0)}(r, \chi_q), \quad (83)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{l,0}^{(0)}(r, \chi_q) &= s_l(r, \chi_q), \quad \Psi_{l,n+1}^{(0)}(r, \chi_q) = \\ &= \int_0^r K_l(r, r'; \chi_q) V(r', \chi_q) \Psi_{l,n}^{(0)}(r', \chi_q) dr'. \end{aligned} \quad (84)$$

Мажорируя функции $s_l(r, \chi_q)$ (П.41) и $K_l(r, r'; \chi_q)$ (П.41а), получаем следующую оценку сверху для ряда (83) (ср. [35]):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{l,n}^{(0)}(r, \chi_q) \right| &< C(l, \chi_q) \left(\frac{r}{r+\delta} \right) \exp(r |\operatorname{Im} \chi_q|) \times \\ &\times \exp(D(l, \chi_q) P(r, \chi_q)), \end{aligned} \quad (85)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P(r, \chi_q) &= \int_0^r \frac{r'}{r'+\delta} |V(r', \chi_q)| dr', \\ 0 < C(l, \chi_q) < \infty, \quad 0 < D(l, \chi_q) < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Поскольку в силу (81) и (82) квазипотенциал удовлетворяет условию $\lim_{r \rightarrow 0} [r^2 V(r, \chi_q)] = 0$, функция $P(r, \chi_q)$ равномерно ограничена по χ_q . Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (83).

Учитывая аналитические свойства свободных решений (приложение Б), убедимся, что при любых конечных r $\Psi_{l,n}^{(0)}(r, \chi_q)$ есть голоморфные функции l и χ_q . Отсюда по теореме Вейерштрасса следует, что регулярное решение $\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q)$ — также голоморфная функция l и χ_q .

Аналогичный результат получается для решений Йоста:

$$\Psi_l^{(+J)}(r, \chi_q) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{l,n}^{(+J)}(r, \chi_q),$$

$$\Psi_{l,0}^{(+J)}(r, \chi_q) = e^{i^{(1)}}(r, \chi_q),$$

$$\Psi_{l,n+1}^{(J)}(r, \chi_q) = - \int_0^{\infty} K_l(r, r'; \chi_q) V(r', \chi_q) \Psi_{l,n}^{(+J)}(r', \chi_q) dr'. \quad (87)$$

Мажорируя функции $e^{i^{(1)}}(r, \chi_q)$ и $K_l(r, r'; \chi_q)$ [см. (П.39), (П.41а), (П.41б)], получим оценку для ряда (5.7)

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{l,n}^{(+J)}(r, \chi_q) \right| < \bar{C}(l, \chi_q) \exp(-r \operatorname{Im} \chi_q) \times \\ \times \exp[\bar{D}(l, \chi_q) Q(r, \chi_q)], \quad (88)$$

где

$$Q(r, \chi_q) = \int_r^{\infty} \frac{r' |V(r', \chi_q)|}{r' + \delta} \exp[(|\operatorname{Im} \chi_q| - \operatorname{Im} \chi_q) r'] dr', \\ 0 < \bar{C}(l, \chi_q) < \infty, \quad 0 < \bar{D}(l, \chi_q) < \infty. \quad (89)$$

Для регулярных потенциалов функция $Q(r, \chi_q)$ равномерно ограничена по χ_q , если $(-\mu/2) < \operatorname{Im} \chi_q < \infty$. В результате ряд (87) абсолютно и равномерно сходится в полосе $(-\mu/2) < \operatorname{Im} \chi_q < \pi$. Поскольку члены ряда (87) задаются несобственными интегралами, необходимо показать, что их первые производные также задаются равномерно сходящимися интегралами. Доказательство вытекает из соотношений (П.42). Окончательно имеем, что $\Psi_l^{(+J)}(r, \chi_q)$ — голоморфная функция χ_q в области $(-\mu/2) < \operatorname{Im} \chi_q < \pi$.

Аналогично убеждаемся, что $\Psi_l^{(-J)}(r, \chi_q)$ — голоморфная функция χ_q в полосе $-\pi < \operatorname{Im} \chi_q < \mu/2$. Из неравенств (П.43) и аналитических свойств ядер K_l следует, что обе функции $\Psi_l^{\pm J}(r, \chi_q)$ голоморфны в полуплоскости $\operatorname{Re} l + 1 > \delta$. В нерелятивистском пределе решения $\Psi_l^{\pm J}(r, \chi_q)$ становятся целыми функциями l .

Поскольку решения Йоста $\Psi_l^{\pm J}(r, \chi_q)$ конечны в точке $r = 0$, выражения (73), (74), (78) определяют S_l -матрицу и амплитуду рассеяния A_l как мероморфную функцию l и χ_q в произведении полуплоскости $\operatorname{Re} l + 1 > \delta$ и полосы $|\operatorname{Im} \chi_q| < \mu/2 < \pi$. В случае финитных потенциалов доказательство справедливо для любой конечной частицы комплексной плоскости χ_q , за исключением точек $\chi_q = \pm i \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Из (64), (74) и (76) следует, что нули функции Йоста $f_l^{(+)}(\chi_q)$ [полюса $\hat{S}_l(\chi_q)$] при $\text{Im } \chi_q > 0$ совпадают с теми значениями быстроты χ_q , для которых регулярное решение $\Psi_l^{(0)}(r, \chi_q)$ квадратично интегрируемо, т. е. возникает связанное состояние. Положение связанных состояний определяется уравнением

$$\int_0^\infty dr |\Phi_l^{(0)}(r, \chi_q)|^2 \text{Im} \{ \chi_q^2 - R_l(r, \chi_q) - \gamma_l(r, \chi_q) V(r, \chi_q) \} = 0. \quad (90)$$

Используя явные выражения (56) и (59), убеждаемся, что для вещественных квазипотенциалов и целых l связанные состояния лежат на отрезке $\text{Re } \chi_q = 0, 0 < \text{Im } \chi_q < \pi$.

Обратимся теперь к свойствам симметрии волновых функций. В приложении Б показано, что ядро $K_l(r, r'; \chi_q)$ имеет точку ветвления $\chi_q = 0$. Данная особенность исчезает при целых l и в нерелятивистском пределе. При целых l функция $(\text{sh } \chi_q)^{-l-1} \Psi_l^{(0)}(r, \chi_q)$ является четной, а функции Йоста связаны аналитическим продолжением:

$$\begin{aligned} \Psi_l^{(\pm J)}(r, \chi_q \exp(\pm i\pi)) &= \Psi_l^{(\mp J)}(r, \chi_q), \\ f_l^{(\pm)}(\chi_q \exp(\pm i\pi)) &= f_l^{(\mp)}(\chi_q). \end{aligned} \quad (91)$$

Пусть теперь $\chi_q = i\xi, 0 < \xi < \pi$. Поскольку в общем случае $\{f_l^{(+)}(i\xi)\}^* = f_l^{(-)}(-i\xi) \neq f_l^{(+)}(i\xi)$,

то $f_l^{(+)}(i\xi)$ не является вещественной функцией l и траектории Редже $l(i\xi)$ в области связанных состояний могут быть комплексными.

Другая особенность нашего уравнения — отсутствие симметрии функций $\exp[\pm i\pi(l+2)/2] \Psi_l^{(\pm)}(r, \chi_q)$ относительно отражения $l \rightarrow -l-1$ [см. (П.46)].

Рассеяние на δ -потенциале. Для примера рассмотрим точно решаемую задачу рассеяния на δ -потенциале [29]:

$$V(r) = -g\delta(r-a), \quad g > 0. \quad (92)$$

Подставляя (92) в (65), (72), (73) и (74), получаем выражения для амплитуды рассеяния:

$$A_l^{(+)}(\chi_q) = \frac{g}{\text{sh } \chi_q} \frac{v_l(a) s_l^2(a, \chi_q)}{1 - \frac{g}{\text{sh } \chi_q} v_l(a) s_l(a, \chi_q) e_l^{(1)}(a, \chi_q)}, \quad (93)$$

$$S_l(\chi_q) = \frac{f_l^{(-)}(\chi_q)}{f_l^{(+)}(\chi_q)} = \frac{1 - \frac{g}{\text{sh } \chi_q} v_l(a) s_l(a, \chi_q) e_l^{(2)}(a, \chi_q)}{1 - \frac{g}{\text{sh } \chi_q} v_l(a) s_l(a, \chi_q) e_l^{(1)}(a, \chi_q)}. \quad (94)$$

В пределе $a \gg \hbar/mc, \text{sh } \chi_q = q/mc \ll 1$ выражения (93) и (94) совпадают с соответствующими нерелятивистскими формулами

[43]. Из результатов Приложения Б следует, что амплитуда рассеяния $A_l^{(+)}(\chi_q)$ и матрица рассеяния $S_l(\chi_q)$ являются мероморфными в прямом произведении областей $\text{Re } l + 1 > 0$ и $|\text{Im } \chi_q| < \pi$, $|\chi_q| \geq \varepsilon > 0$. Рассматривая преобразование аргумента $\chi_q \rightarrow \chi_q l^{\pm i\pi}$, можно убедиться, что

$$f_l^{(\pm)}(\chi_q \exp(\pm i\pi)) \neq f_l^{(\mp)}(\chi_q) \tag{94a}$$

и соответственно

$$[f_l^{(+)}(i\eta)]^* \neq f_l^{(+)}(i\eta), \tag{95}$$

если l не равно целому числу.

Уравнение движения для полюса $l(\chi_q)$ имеет вид

$$1 - \frac{g}{\text{sh } \chi_q} \nu_l(a) s_l(a, \chi_q) e_l^{(1)}(a, \chi_q) = 0, \tag{96}$$

или эквивалентно

$$1 + iag \exp(-i\pi l) P_{-1/2-ia}^{-l-1/2}(\text{ch } \chi_q) Q_{-1/2-ia}^{-l-1/2}(\text{ch } \chi_q) = 0. \tag{97}$$

Исследуем уравнение (97) в пределе $2a \text{sh}(\chi_q/2) \ll 1$. При $\text{Re } l > -1/2$ имеем

$$l = -\frac{1}{2} + \frac{ga}{2} \left\{ 1 - \frac{2 \text{sh}^2(\chi_q/2)}{1 - (l + 1/2)^2} \left(a^2 - \frac{1}{2} \right) + \dots \right. \\ \left. + \exp(-i\pi l) \frac{i\pi(l + 1/2)}{r^2(l + 3/2) \cos \pi l} (\text{th } \chi_q/2)^{2l+1} \frac{a^{(l+1)}}{a^{(-l)}} \right\}. \tag{98}$$

Из (98) легко найти пороговое поведение для полюсов амплитуды рассеяния:

$$l(0) = ga/2 - 1/2 > 0, \tag{99}$$

которое совпадает с нерелятивистским [43]. Корни нелинейного уравнения (98) в области рассеяния $\chi_q^2 > 0$ комплексны.

В полуплоскости $\text{Re } l + 1 \leq 0$ функция $f_l^{(-)}(\chi_q)$ имеет серию простых полюсов в точках

$$l = -n - 1 - iq, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{100}$$

Положение этих «кинематических» полюсов не зависит от χ_q . Данные особенности не имеют нерелятивистских аналогов. Кроме того, имеется цепочка нулей функции $f_l^{(-)}(\chi_q)$ в точках

$$l = -n - 1 + ia.$$

Наконец, приведем асимптотическое выражение для амплитуды $A_l^{(+)}(\chi_q)$ при $|l| \rightarrow \infty$, $|\arg l| < \pi/2$ и комплексных χ_q :

$$|A_{lqs}^{(+)}(\chi_q)| \approx \frac{\pi |\text{sh } \chi_q|}{2|l|} \left| \text{th } \frac{\chi_q}{2} \right|^{2 \text{Re } l} \left(1 - \frac{ag}{2|l|} \right)^{-1}, \tag{101}$$

т. е. амплитуда экспоненциально убывает при $|l| \rightarrow \infty$, $|\arg l| < \pi/2$, если χ_q лежит в полосе $\text{Re } E = \text{Re } \text{ch } \chi_q > 0$.

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

Данный метод квантовой механики обладает свойствами, которые делают его удобным при решении многих задач. Во-первых, уравнения в этом методе пишутся для величин, имеющих непосредственный физический смысл, например, для фазы рассеяния. Во-вторых, фазовые уравнения — уравнения первого порядка, процедура численного решения которых много проще процедуры решения уравнения Шредингера. В-третьих, прямая связь параметров рассеяния с потенциалом позволяет получать здесь общие теоремы и приближения более простым и естественным, чем обычно, образом.

Уравнение фазового типа для парциальной амплитуды рассеяния. Следуя методу фазовых функций [44, 45], будем искать волновую функцию $\Psi_l^{(+)}(r, \chi_q)$ (65) в виде комбинации свободных решений $s_l(r, \chi_q)$ и $e_l^{(1)}(r, \chi_q)$ с зависящими от r коэффициентами:

$$\Psi_l^{(+)}(r, \chi_q) = B_l(r, \chi_q) [s_l(r, \chi_q) + A_l(r, \chi_q) e_l^{(1)}(r, \chi_q)]. \quad (102)$$

Сравнивая (102) с (65) и (67), приходим к паре дифференциальных уравнений первого порядка для $A_l(r, \chi_q)$ и $B_l(r, \chi_q)$:

$$\frac{dA_l(r, \chi_q)}{dr} = -\frac{V(r)}{\text{sh } \chi_q} [s_l(r, \chi_q) + A_l(r, \chi_q) l_l^{(1)}(r, \chi_q)] \times \\ \times [s_l^*(r, \chi_q) + A_l(r, \chi_q) e_l^{*(r)}(r, \chi_q)], \quad (103)$$

$$A_l(0, \chi_q) = 0, \quad (104)$$

$$\frac{dB_l(r, \chi_q)}{dr} = \frac{V(r)}{\text{sh } \chi_q} e_l^{(2)*}(r, \chi_q) B_l(r, \chi_q) \times \\ \times [s_l(r, \chi_q) + A_l(r, \chi_q) e_l^{(1)}(r, \chi_q)], \quad (105)$$

$$B_l(\infty, \chi_q) = 1. \quad (106)$$

Если решение уравнения (103) известно, то решение (105) находится в квадратурах:

$$B_l(r, \chi_q) = \exp \left\{ \frac{1}{\text{sh } \chi_q} \int_r^\infty V(r') e_l^{(2)*}(r', \chi_q) \times \right. \\ \left. \times [s_l(r', \chi_q) + A_l(r', \chi_q) e_l^{(1)}(r', \chi_q)] dr' \right\}. \quad (107)$$

Аналогично нерелятивистскому случаю можно трактовать величины $A_l(r, \chi_q)$ и $B_l(r, \chi_q)$ как амплитуду рассеяния и нормировочную константу волновой функции $\Psi_l^{(+)}(r, \chi_q)$, отвечающие потенциалу $V(r, r')$, «усеченному» сферой радиуса r :

$$V(r, r') = V(r') \theta(r - r'). \quad (108)$$

Уравнения для элемента S -матрицы $S_l(r, \chi_q)$, фазовой функции $\delta_l(r, \chi_q)$ и тангенса фазы $t_l(r, \chi_q)$, отвечающих рассеянию на усеченном потенциале (108), получаются из (103) и соотношений, связывающих эти величины с парциальной амплитудой рассеяния:

$$S_l(r, \chi_q) = \exp[2i\delta_l(r, \chi_q)], \quad t_l(r, \chi_q) = \frac{A_l(r, \chi_q)}{1 + iA_l(r, \chi_q)},$$

$$A_l(r, \chi_q) = \exp[i\delta_l(r, \chi_q)] \sin \delta_l(r, \chi_q).$$

Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} S_l(r, \chi_q) &= i \frac{V(r)}{2 \operatorname{sh} \chi_q} [e_l^{(2)}(r, \chi_q) - S_l(r, \chi_q) e_l^{(1)}(r, \chi_q)] \times \\ &\times [e_l^{(1)*}(r, \chi_q) - S_l(r, \chi_q) e_l^{(2)*}(r, \chi_q)], \quad (109a) \\ S_l(0, \chi_q) &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} t_l(r, \chi_q) &= - \frac{V(r)}{\operatorname{sh} \chi_q} [s_l(r, \chi_q) + t_l(r, \chi_q) c_l(r, \chi_q)] \times \\ &\times [s_l^*(r, \chi_q) + t_l(r, \chi_q) c_l^*(r, \chi_q)], \quad (109b) \\ t_l(0, \chi_q) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \delta_l(r, \chi_q) &= - \frac{V(r)}{\operatorname{sh} \chi_q} [\cos \delta_l(r, \chi_q) s_l(r, \chi_q) + \sin \delta_l(r, \chi_q) c_l(r, \chi_q)] \times \\ &\times [\cos \delta_l(r, \chi_q) s_l^*(r, \chi_q) + \sin \delta_l(r, \chi_q) c_l^*(r, \chi_q)], \quad (109b) \\ \delta_l(0, \chi_q) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения фазового типа для полной амплитуды рассеяния.

Рассмотрим уравнения фазового типа для полной амплитуды рассеяния. При выводе этих уравнений не требуется предположения о сферической симметрии квазипотенциала. Вместо параметрической зависимости от радиуса обрезания r (108) рассмотрим произвольную вариацию потенциала $V(r)$, рассматриваемого, например, как функцию некоторого параметра. В квантовой механике аналогичный подход был развит в работе [46] и позволил разработать новый способ получения асимптотических представлений для амплитуды рассеяния частиц высоких энергий.

Запишем интегральные уравнения для амплитуды рассеяния, волновой функции и связь между волновой функцией и амплитудой вне энергетической поверхности в символической форме:

$$A = -V/4\pi + VgA, \quad (110)$$

$$\Psi^{(+)} = I + gV\Psi^{(+)}, \quad (111a)$$

$$\tilde{\Psi}^{(+)} = I + \tilde{\Psi}^+ gV, \quad (111b)$$

$$\Psi^{(+)} = I - 2(2\pi)^4 gA, \quad (112a)$$

$$\tilde{\Psi}^{(+)} = I - 2(2\pi)^4 Ag, \quad (112b)$$

где I — ядро единичного оператора. Предполагая теперь, что потенциал претерпевает некоторую вариацию δV , вычислим вариацию амплитуды δA . Поскольку $A = -[1/2 (2\pi)^4] V \Psi^{(+)}$, для δA получим:

$$\delta A = -\frac{1}{2(2\pi)^4} [\delta V \Psi^{(+)} + V \delta \Psi^{(+)}],$$

исключая $\delta \Psi^{(+)}$ с помощью (111а), приходим к соотношению

$$\delta A = -\frac{1}{2(2\pi)^7} \tilde{\Psi}^{(+)} V \Psi^{(+)}. \quad (113)$$

Учитывая (112а) и (112б), получаем нелинейное интегральное уравнение для A :

$$\delta A = -\frac{1}{2(2\pi)^7} (I - 2(2\pi)^4 Ag) \delta V (I - 2(2\pi)^4 gA). \quad (114)$$

Данное уравнение справедливо для любых вариаций потенциала, в частности, для случая, когда вариация связана с изменением радиуса обрезания в (108). Фиксируем именно этот вид вариаций и изучим уравнение (114) в конфигурационном представлении. Для амплитуды рассеяния на энергетической поверхности соотношение (113) в конфигурационном представлении задается выражением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} A(\chi_q, \mathbf{n}_p, r, \mathbf{n}_q) = & -\frac{r^2}{4\pi} \int \tilde{\Psi}^{(+)}(\chi_q, \mathbf{n}_p; r', \mathbf{n}_{r'}) V(\mathbf{r}') \times \\ & \times \Psi_r^{(+)}(\chi_q, \mathbf{n}_q; r'; \mathbf{n}_{r'}) |_{r'=r} d\mathbf{n}_{r'}, \end{aligned} \quad (115)$$

где волновые функции Ψ и $\tilde{\Psi}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Psi_r^{(+)}(\chi_q, \mathbf{n}_q; r', \mathbf{n}_{r'}) = & \langle r', \mathbf{n}_{r'} | \chi_q, \mathbf{n}_q \rangle + \\ & + \int g_q(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') V(\mathbf{r}'') \theta(r - r'') \Psi_r^{(+)}(\chi_q, \mathbf{n}_q; r'', \mathbf{n}_{r''}) d\mathbf{r}'', \end{aligned} \quad (116a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_r^{(+)}(\chi_q, \mathbf{n}_q; r', \mathbf{n}_{r'}) = & \langle \chi_q, \mathbf{n}_q | r', \mathbf{n}_{r'} \rangle + \\ & + \int \tilde{\Psi}_r^{(+)}(\chi_q, \mathbf{n}_q; r'', \mathbf{n}_{r''}) g_q(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') V(\mathbf{r}'') \theta(r - r'') d\mathbf{r}''. \end{aligned} \quad (116б)$$

Для большей ясности изложения зависимость всех величин от длин трехмерных векторов и соответствующих направлений обозначена отдельно. Индекс r отвечает радиусу обрезания.

Запишем функцию Грина (67) в виде

$$\begin{aligned} g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -\frac{\text{sh } \chi_q}{(4\pi)^2} \int d\mathbf{n}_3 \{ \theta(r - r') \langle \chi_q, \mathbf{n}' | r', \mathbf{n}' \rangle E^{(1)}(r, \chi_q; \mathbf{n}\mathbf{n}_3) + \\ & + \theta(r' - r) \langle r, \mathbf{n} | \chi_q, \mathbf{n}_3 \rangle E^{(2)*}(r', \chi_q, \mathbf{n}'\mathbf{n}_3) \}, \end{aligned} \quad (117)$$

где обобщенные функции $E^{(1,2)}(r, \chi_q, \mathbf{n}\mathbf{n}')$ формально задаются в виде парциальных разложений:

$$E^{(1,2)}(r, \chi_q; \mathbf{n}_q \mathbf{n}_r) = \frac{1}{r \operatorname{sh} \chi_q} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e_l^{(1,2)}(r, \chi_q) P_l(\mathbf{n}_q \mathbf{n}_r). \quad (118)$$

Учитывая (116) — (118), (II.26) — (II.28), а также соотношения

$$\begin{aligned} & A(\chi_q, \mathbf{n}_p; r, \mathbf{n}_q) = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \int \langle \chi_q, \mathbf{n}_p | r', \mathbf{n}_{r'} \rangle V(\mathbf{r}') \theta(r-r') \Psi_r^{(+)}(\chi_q, \mathbf{n}_q; r', \mathbf{n}_{r'}) d\mathbf{r}' = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \int \tilde{\Psi}_r^{(+)}(\chi_q, \mathbf{n}_q; r', \mathbf{n}_{r'}) V(\mathbf{r}') \theta(r-r') \langle r', \mathbf{n}_{r'} | \chi_q, \mathbf{n}_q \rangle d\mathbf{r}', \quad (119) \end{aligned}$$

получим из (115) искомое уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} A(\chi_q, \mathbf{n}_p; r, \mathbf{n}_q) = -\frac{r^2}{4\pi} \int d\mathbf{n}_r V(\mathbf{r}) \times \\ & \times \left\{ \left[\langle \chi_q; \mathbf{n}_p | r, \mathbf{n}_r \rangle + \frac{\operatorname{sh} \chi_q}{4\pi} \int A(\chi_q, \mathbf{n}_p; r, \mathbf{n}_1) E^{(2)*}(\chi_q, r; \mathbf{n}, \mathbf{n}_1) d\mathbf{n}_1 \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[\langle r, \mathbf{n}_r | \chi_q, \mathbf{n}_q \rangle + \frac{\operatorname{sh} \chi_q}{4\pi} \int A(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_2) E^{(1)}(\chi_q, r; \mathbf{n}, \mathbf{n}_2) d\mathbf{n}_2 \right] \right\} \quad (120) \end{aligned}$$

с граничным условием $A(\chi_q, \mathbf{n}_p; 0, \mathbf{n}_q) = 0$, вытекающим из (119).

Дадим также другой вывод уравнения (120). В духе метода фазовых функций рассмотрим волновую функцию как линейную суперпозицию решений свободного уравнения Шредингера $\langle r, \mathbf{n}_r | \chi_q, \mathbf{n}_q \rangle$ и $E^{(1)}(r, \chi_q; \mathbf{n}_r \mathbf{n}_q)$:

$$\begin{aligned} & \Psi_r(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_r) = \int B(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_1) d\mathbf{n}_1 \times \\ & \times \left[\langle r, \mathbf{n}_r | \chi_q, \mathbf{n}_q \rangle + \frac{\operatorname{sh} \chi_q}{4\pi} \int d\mathbf{n}_2 A(\chi_q, \mathbf{n}_2; r, \mathbf{n}_1) E^{(1)}(r, \chi_q; \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_r) \right], \quad (121) \end{aligned}$$

где амплитудная функция $B(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_1)$ является аналогом нормировочного множителя $B_l(r, \chi_q)$ (7.1.). Сравнивая (121) с (116а) и учитывая (117), находим

$$\begin{aligned} & B(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_r) = \delta(\mathbf{n}_q - \mathbf{n}_r) - \\ & - \frac{\operatorname{sh} \chi_q}{(4\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \theta(r'-r) E^{(2)*}(r', \chi_q; \mathbf{n}_r \mathbf{n}_r) V(\mathbf{r}') \Psi_r(\chi_q, \mathbf{n}_q; r', \mathbf{n}_{r'}), \quad (122) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{n}_r B(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_r) A(\chi_q, \mathbf{n}_q; r; \mathbf{n}_r) = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \theta(r-r') \langle \chi_q, \mathbf{n}_q | r', \mathbf{n}_r \rangle V(\mathbf{r}') \Psi_r(\chi_q, \mathbf{n}_q; r', \mathbf{n}_{r'}). \quad (123) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $B(\chi_q, \mathbf{n}_q; \infty, \mathbf{n}_r) = \delta(\mathbf{n}_q - \mathbf{n}_r)$ и $A(\chi_q, \mathbf{n}_q; \infty, \mathbf{n}_r)$ есть амплитуда рассеяния на потенциале $V(\mathbf{r})$. Исключая $B(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_r)$ из пары соотношений (122) и (123), вновь приходим к уравнению (121). Видно, что при любом конечном значении r величина $A(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_r)$ равна полной амплитуде рассеяния на усеченном потенциале (108), поскольку в этом случае $A(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_r) = A(\chi_q, \mathbf{n}_q; \infty, \mathbf{n}_r)$.

Легко установить, что решение уравнения (121) удовлетворяет соотношению взаимности:†

$$A(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_r) = A(\chi_q, -\mathbf{n}_r; r, -\mathbf{n}_q) \quad (124)$$

и для вещественных потенциалов условию унитарности:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A(\chi_q, \mathbf{n}_q; r, \mathbf{n}_r) &= \\ &= \frac{\operatorname{sh} \chi_q}{4\pi} \int A(\chi_q, \mathbf{n}; r, \mathbf{n}_r) A^*(\chi_q, \mathbf{n}; r, \mathbf{n}_q) d\mathbf{n}_r. \end{aligned} \quad (125)$$

Приведем также реализацию нелинейного уравнения для амплитуды рассеяния в импульсном представлении (сферически-симметричный случай), которая может оказаться полезной в конкретных расчетах:

$$\delta A_l(p, q) = -\frac{1}{\operatorname{sh} \chi_q} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{\Psi}_{pql}(k) \delta V_l(k, k') \Psi_{ql}(k') d\chi_k d\chi_{k'}, \quad (126)$$

$$\Psi_{ql}(k) = \delta(\chi_q - \chi_k) - \operatorname{sh} \chi_q g_q(k) A_l(k, q), \quad (127)$$

$$\tilde{\Psi}_{pql}(k) = \delta(\chi_q - \chi_k) - \operatorname{sh} \chi_q A_l(p, k) g_g(k), \quad (128)$$

$$V_l(p, k) = \int_0^\infty s_l^*(r, \chi_q) V(r) s_l'(r, \chi_k) dr, \quad (129)$$

$$A_l(p, q) = -\frac{1}{\operatorname{sh} \chi_q} \int_0^\infty dr s_l^*(r, \chi_p) V(r) \Psi_{ql}(r). \quad (130)$$

Приближение эффективного радиуса. Релятивистские поправки.

В нерелятивистском случае, разлагая тангенс фазы рассеяния на короткодействующем потенциале (с радиусом действия R) по степеням безразмерного параметра qR :

$$t_l(r, \chi_q) = \operatorname{tg} \delta_l(r, q) = -\frac{1}{(2l+1)!!(2l-1)!!} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ln}(r) q^{2n+2l+1} \quad (131)$$

и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, приходим к известному приближению эффективного радиуса.

В релятивистском случае, как показано в [48], следует пользоваться разложением

$$t_l(r, \chi_q) = - \frac{1}{(2l+1)!!(2l-1)!!} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ln}(r) \left(2 \operatorname{sh} \frac{\chi_q}{2}\right)^{2n+2l+1} \quad (132)$$

по степеням величины $2 \operatorname{sh}(\chi_q/2)$, которая является релятивистским обобщением импульса относительного движения. Разложение (112) справедливо, если радиус взаимодействия R меньше комптоновской длины волны λ взаимодействующей частицы $R/\lambda < 1$. Это условие выполнено, когда взаимодействие осуществляется в результате обмена квантами, масса которых больше массы каждой из сталкивающихся частиц. Подставляя разложение (112) в (109) и используя разложения свободных решений по степеням $2 \operatorname{sh}(\chi_q/2)$ [48], получаем дифференциальные уравнения для функций $a_{ln}(r)$. При $n = 0$ эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dr} a_{l0}(r) = \frac{V(r)(-1)^{l+1}}{2l+1} \frac{r^{(l+1)}}{(-r)^{(l+1)}} [(-r)^{(l+1)} + a_{l0}(r)(-r)^{(-l)}]^2 \quad (133)$$

с граничным условием $a_{l0}(0) = 0$. В частности, уравнение для длины рассеяния $a(r) = a_{00}(r)$ внешне неотличимо от соответствующего нерелятивистского уравнения

$$\frac{d}{dr} a(r) = V(r) [r - a(r)]^2. \quad (134)$$

Уравнения для функций $a_{ln}(r)$ при $n \geq 1$ линейны. Приведем уравнение для $a_{01}(r)$, определяющее эффективный радиус $r_{\text{эф}} = \lim_{r \rightarrow \infty} 2a_{01}(r)/a_{00}^2(r)$:

$$\frac{d}{dr} a_{01}(r) = X(r) a_{01}(r) + Y(r), \quad a_{01}(0) = 0, \quad (135)$$

причем $X(r) = 2V(r) [a(r) - r]$,

$$Y(r) = \frac{1}{8} \frac{da(r)}{dr} - V(r) (r - a(r)) \left(\frac{r^3}{3} - r^2 a(r) + \frac{r}{12} \right). \quad (136)$$

Решение уравнения (115)

$$a_{01}(\infty) = \int_0^{\infty} dr' Y(r') \exp \left[\int_{r'}^{\infty} X(r'') dr'' \right] \quad (137)$$

связывает эффективный радиус с длиной рассеяния.

Для нахождения релятивистских поправок к параметрам рассеяния воспользуемся разложениями свободных решений по степеням $\lambda = \hbar/mc$, приведенными в [48]. Подставляя разложение

$$t_l(r, \chi_q) = \sum_{h=0}^{\infty} t_l^{(h)}(r, q) \lambda^h \quad (138)$$

в уравнение (109б), получаем с учетом граничных условий:

$$t_l^{(1)}(r, q) = 0,$$

$$t_l^{(2)}(r, q) = - \int_0^{\infty} dr' \frac{V(r')}{2q} \varphi_l(r', q) \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{2}{q} \int_{r'}^{\infty} V(r'') c_l(qr'') M_l(q, r'') dr'' \right\}, \quad (139)$$

где

$$\varphi_l(r, q) = M_l(q, r) \left\{ \frac{l(l+1)}{2r^2} \left[\frac{l(l+1)}{2} - \frac{1}{3} \right] M_l(q, r) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \left[\frac{l(l+1)}{r} - g^2 r \right] \left(\frac{d}{dr} s_l(dr) - t_l^{(0)}(r, q) \frac{d}{dr} c_l(qr) \right) \right\}, \quad (140)$$

$$M_l(q, r) = s_l(qr) + t_l^{(0)}(r, q) c_l(qr). \quad (141)$$

Высокоэнергетическое представление для амплитуды рассеяния. Приближенное решение обратной задачи рассеяния. Рассмотрим сферически-симметричный потенциал $V(r)$, учитывая (П.26), перепишем (140) в виде:

$$\frac{d}{dr} A(\chi_q, r; \mathbf{n}_p \mathbf{n}_q) = - \frac{rV(r, E_q)}{\text{sh } \chi_{pq}} \sin r \chi_{pq} - \frac{rV(r, E_q) \text{sh } \chi_q}{4\pi} \times$$

$$\times \left[\int A(\chi_q, r; \mathbf{n}_p \mathbf{n}) \frac{\exp(ir\chi_{qn})}{\text{sh } \chi_{qn}} d\mathbf{n} + \int A(\chi_q, r; \mathbf{n}_q \mathbf{n}) \frac{\exp(ir\chi_{pn})}{\text{sh } \chi_{pn}} d\mathbf{n} \right] -$$

$$- \frac{r^2 \text{sh}^2 \chi_q}{(4\pi)^3} V(r, E_q) \int A(\chi_q, r; \mathbf{n}_p \mathbf{n}_1) A(\chi_q, r; \mathbf{n}_q \mathbf{n}_2) E^{(2)*}(\chi_q, r; \mathbf{n}_r \mathbf{n}_1) \times$$

$$\times E^{(1)}(\chi_q, r; \mathbf{n}_r \mathbf{n}_2) d\mathbf{n}_r d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2, \quad (142)$$

где

$$\text{ch } \chi_{pn} = \text{ch}^2 \chi_q - (\mathbf{n}_p \mathbf{n}) \text{sh}^2 \chi_q,$$

$$\text{ch } \chi_{qn} = \text{ch}^2 \chi_q - (\mathbf{n}_q \mathbf{n}) \text{sh}^2 \chi_q. \quad (143)$$

Амплитудная функция A в случае сферически-симметричного потенциала зависит от угла рассеяния между \mathbf{n}_p и \mathbf{n}_q .

Уравнения (142) и (143) точные. Однако их можно использовать для вывода приближенных уравнений, описывающих процессы при высоких энергиях. Используя (П.28) и выполняя интегрирование в квадратичном члене, приходим к выражению

$$\frac{V(r, E_q)}{4\pi} \exp(2ir\chi_q) \int A(\chi_q, r; -\mathbf{n}_p \mathbf{n}) A(\chi_q, r; \mathbf{n} \mathbf{n}_q) d\mathbf{n}. \quad (144)$$

Видно, что этой величиной можно пренебречь по сравнению с другими членами уравнения. Действительно, при высоких энергиях основной вклад дает рассеяние вперед, а рассеяние назад мало. Поэтому одна из амплитуд в (144) всегда мала. Кроме того,

для гладких потенциалов вклад этого члена дополнительно подавлен при интегрировании по r осциллирующим фактором $\exp(2ir\chi_q)$. Линейные по A члены в (122) также упрощаются, поскольку факторы $\exp(ir\chi_{pn})/\text{sh } \chi_{pn}$ и $\exp(ir\chi_{qn})/\text{sh } \chi_{qn}$ имеют ярко выраженные максимумы при $\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}$ и $\mathbf{n} \parallel \mathbf{q}$ соответственно. Мы вынесем поэтому величину A из-под знака интеграла. В результате придем к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} A(\chi_q, r, \mathbf{n}_p \mathbf{n}_q) = & -rV(r, E_q) \frac{\sin r\chi_{pq}}{\text{sh } \chi_{pq}} + \\ & + \frac{iV(r, E_q)}{\text{sh } \chi_q} (\exp(2ir\chi_q) - 1) A(\chi_q, r, \mathbf{n}_p \mathbf{n}_q), \end{aligned} \quad (145)$$

которое легко решается. Пренебрегая осциллирующей величиной $\exp(2ir\chi_q)$, в пределе $r \rightarrow \infty$ получаем

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi} \int \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle V(r, E_q) \Psi_q^{(e)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (146)$$

где

$$\Psi_q^{(e)}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \mathbf{q} \rangle \exp \left[-\frac{i}{\text{sh } \chi_q} \int_r^\infty V(r', E_q) dr' \right] \quad (147)$$

есть приближенная волновая функция, равная плоской волне $\langle \mathbf{r} | \mathbf{q} \rangle$, умноженной на медленно меняющийся сферически-симметричный фактор $\exp \left(-\frac{i}{\text{sh } \chi_q} \int_r^\infty V(r', E_q) dr' \right)$. Выражение (146) является аналогом известного эйконоального представления для амплитуды рассеяния.

Можно рассматривать приближенную амплитуду $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ как релятивистское фурье-преобразование (борновское приближение) модифицированного сферически-симметричного потенциала:

$$\tilde{A}(\chi_q, r) = V(r, E_q) \exp \left[-\frac{i}{\text{sh } \chi_q} \int_r^\infty dr' V(r', E_q) \right], \quad (148)$$

где

$$\tilde{A}(\chi_q, r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\sin r\chi_{pq}}{r} \text{sh } \chi_{pq} d\chi_{pq}. \quad (149)$$

Рассмотрим (148) как уравнение для V . Оно сводится к нелинейному дифференциальному уравнению типа Риккати, решение

которого имеет вид

$$V(r, E_q) = \tilde{A}(\chi_q, r)/1 - \frac{i}{q} \int_r^{\infty} dr' \tilde{A}(\chi_q, r'). \quad (150)$$

Будем восстанавливать квазипотенциал для упругого pp -рассеяния на основе соотношения (150). Используем следующее соотношение между амплитудой рассеяния и дифференциальным сечением $d\sigma/dt_{pq}$:

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = i \operatorname{Im} A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (1 - i\alpha(\chi_q)), \quad (151)$$

$$\operatorname{Im} A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{\frac{d\sigma}{dt_{pq}} \frac{\operatorname{sh}^2 \chi_q}{\pi (1 + \alpha^2(\chi_q))}}. \quad (152)$$

Здесь сделано предположение, что отношение α реальной части амплитуды к мнимой слабо зависит от угла рассеяния. Преобразование Фурье (149) величины $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, заданной с погрешностью, является некорректной задачей. Следовательно, здесь использованы экспериментальные данные в виде интерполирующих функций. В области первого дифракционного пика использовалась подгонка [49]. В области больших передач это решение спивалось функцией, описывающей экспериментальные данные для $d\sigma/dt$ [50] со средней относительной погрешностью меньше 8%. Значения полных сечений и $\alpha(\chi_q)$ взяты в [51].

Соотношение (150), выражающее квазипотенциал через амплитуду рассеяния неточно, прежде всего, потому, что величина $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ неизвестна в нефизической области ($\cos \theta_{pq} > 1$ или $\chi_{pq} > 2\chi_q$). Фактически экспериментальные данные доступны для еще меньших интервалов величины χ_{pq} :

$$\chi_{pq} \leq \chi < 2\chi_q. \quad (153)$$

Этих данных достаточно для восстановления квазипотенциала в интервале

$$r \geq r_{\min} = 1/\chi_{\max}. \quad (154)$$

Расчеты произведены при двух значениях энергии:

$$E_1 = 3,1 \text{ ГэВ} \quad (\chi_q = 1,79),$$

$$E_2 = 26,6 \text{ ГэВ} \quad (\chi_q = 3,97).$$

В обоих случаях $\chi_{\max} \approx 2,25$, что дает $r_{\min} = 0,1 f_m$. На рис. 1 и 2 показаны мнимые части квазипотенциала $\operatorname{Im} V(r)$ (кривые 1) и релятивистского фурье-образа амплитуды $\operatorname{Im} A(\chi_q, r)$ (кривые 2).

На рис. 1 и 2 изображены также кривые, соответствующие стандартной параметризации экспериментальных данных в обла-

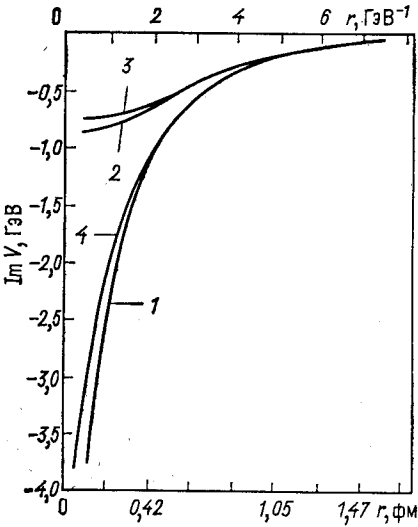


Рис. 1. Кривые мнимой части квазипотенциала при $E_1 = 3,1$ ГэВ

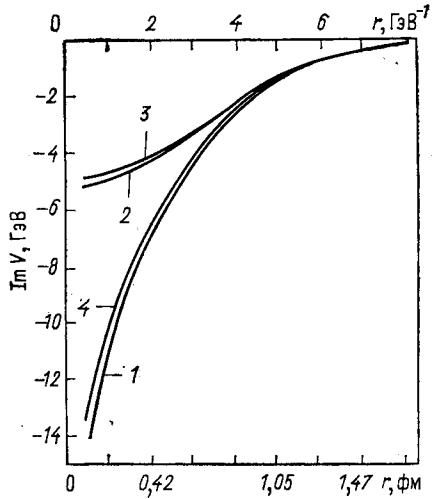


Рис. 2. Кривые мнимой части квазипотенциала при $E_2 = 26,6$ ГэВ

сти дифракционного пика:

$$\text{Im } A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = g(s) \exp [2B(s) t], \quad B = \left(\frac{d}{dt} \ln \frac{d\sigma}{dt} \right)_{t=0},$$

$$g = \exp(2B) \frac{\text{sh } \chi_q}{\pi B} \sqrt{\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{t=0} \frac{1}{\pi(1+\alpha^2)}}, \quad (155)$$

$$\tilde{A}(\chi_q, r) = -g K_{ir}(2B) \quad (\text{см. кривые 3}),$$

$$V_h(r, E_q) = - \frac{g K_{ir}(2B)}{1 - \frac{g}{\text{sh } \chi_q} \int_r^\infty dr' K_{ir'}(2B)} \quad (\text{см. кривые 4}). \quad (156)$$

В нерелятивистском пределе $\tilde{A}_h(\chi_q r)$ переходит в гауссову функцию:

$$\tilde{A}_h(\chi_q, r) \rightarrow -g \sqrt{\frac{\pi}{2B}} \exp(-2B) \exp(-r^2/4B). \quad (157)$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

Релятивистские аналоги функций Риккати — Бесселя $s_l(r, \chi_q)$, Риккати — Неемана $c_l(r, \chi_q)$ и Риккати — Ханкеля $e_l^{(1,2)}(r, \chi_q)$ определяются так:

$$s_l(r, \chi_q) = \sqrt{\frac{\pi \operatorname{sh} \chi_q}{2}} (-1)^{l+1} (-r)^{l+1} P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(\operatorname{ch} \chi_q), \quad (\text{П.1})$$

$$c_l(r, \chi_q) = (-1)^l s_{-l-1}(r, \chi_q) = \sqrt{\frac{\pi \operatorname{sh} \chi_q}{2}} (-r)^{(-l)} P_{ir-1/2}^{l+1/2}(\operatorname{ch} \chi_q), \quad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned} e_l^{1,2}(r, \chi_q) &= c_l(r, \chi_q) \pm i s_l(r, \chi_q) = \\ &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2 \operatorname{sh} \chi_q}{\pi}} (-1)^{l+1} (-r)^{(l+1)} Q_{\mp ir-1/2}^{-l-1/2}(\operatorname{ch} \chi_q), \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где

$$r^{(\lambda)} = i^\lambda r(-ir + \lambda)/r(-ir) \quad (\text{П.4})$$

— обобщенная степень, а $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ — функции Лежандра первого и второго рода [37]. Нерелятивистский предел величин (П.1)–(П.3) следующий:

$$s_l(r, \chi_q) \rightarrow s_l(rq) = \sqrt{\frac{\pi rq}{2}} J_{l+1/2}(rq), \quad (\text{П.5})$$

$$c_l(r, \chi_q) \rightarrow c_l(rq) = -\sqrt{\frac{\pi rq}{2}} Y_{l+1/2}(rq), \quad (\text{П.6})$$

$$e_l^{(1,2)}(r, \chi_q) \rightarrow e_l^{(1,2)}(r, q) = \pm i \sqrt{\frac{\pi rq}{2}} H_{l+1/2}^{(1,2)}(rq). \quad (\text{П.7})$$

Для функций s_l справедлива теорема сложения [4, 5, 37]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_0(r, \chi_{pq})}{\operatorname{sh} \chi_{pq}} &= \frac{1}{r \operatorname{sh} \chi_p \operatorname{sh} \chi_q} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) s_l^*(r, \chi_p) s_l(r, \chi_q) P_l(\cos \theta), \\ \operatorname{ch} \chi_{pq} &= \operatorname{ch} \chi_p \operatorname{ch} \chi_q - \operatorname{sh} \chi_p \operatorname{sh} \chi_q \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.8})$$

Для плоских волн $\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle$, связанных с s_l частичным разложением

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{r \operatorname{sh} \chi_p} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l s_l(r, \chi_p) P_l\left(\frac{\mathbf{pr}}{pr}\right), \quad (\text{П.9})$$

теорема сложения имеет вид

$$\int \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \mathbf{q} \rangle d\mathbf{n}_r = \frac{4\pi \sin r\chi_{pq}}{r \operatorname{sh} \chi_{pq}} = \frac{4\pi s_0(r, \chi_{pq})}{r \operatorname{sh} \chi_{pq}}, \quad (\text{П.10})$$

где

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle^*. \quad (\text{П.11})$$

Справедливы соотношения полноты и ортогональности для плоских волн:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{r}' \rangle d\Omega_p = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{П.12а})$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \mathbf{q} \rangle d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (\text{П.12б})$$

для релятивистских сферических функций:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty s_l(r, \chi_q) s_l^*(r', \chi_q) d\chi_q = \delta(r - r'), \quad (\text{П.13а})$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty s_l(r, \chi_q) s_l^*(r, \chi'_q) dr = \delta(\chi_q - \chi'_q). \quad (\text{П.13б})$$

Покажем, что имеют место теоремы сложения для s_l и $e_l^{(1,2)}$ -функций, аналогичные (П.8). Отметим, прежде всего, что теорема сложения (П.8) справедлива в более широкой области, чем «физическая» ($0 \leq \chi_q < \infty$), а именно, выполняется соотношение

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}} P_{ir-1/2}^{-1/2}(z) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{(z_1^2 - 1)^{1/2} (z_2^2 - 1)^{1/2}} \sum_{l=0}^\infty (2l+1) \left| \frac{r(ir+l+1)}{r(ir+1)} \right|^2 \times \\ \times P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(z_1) P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(z_2) P_l(\cos \theta), \quad (\text{П.14})$$

где

$$z = z_1 z_2 - (z_1^2 - 1)^{1/2} (z_2^2 - 1)^{1/2} \cos \theta. \quad (\text{П.15})$$

Соотношение (П.14) выполняется, если $0 < \theta < \pi$ и z_1 и z_2 удовлетворяют условию

$$\left| \frac{(z_1 + 1)(z_2 + 1)}{(z_1 - 1)(z_2 - 1)} \right| > 1. \quad (\text{П.16})$$

Заметим в (П.14) z_2 на $-z_2$. С учетом соотношений [37]

$$-z-1 = \exp(\mp i\pi) (z+1), \quad -z+1 = \exp(\mp i\pi) (z-1), \\ \text{где } (\pm) = \text{sgn Im } z, \quad (\text{П.17})$$

приходим к разложению

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}} P_{ir-1/2}^{-1/2}(-z) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{(z_1^2 - 1)^{1/2} (z_2^2 - 1)^{1/2}} \times \\ \times \sum_{l=0}^\infty (2l+1) \left| \frac{r(ir+l+1)}{r(ir+1)} \right|^2 P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(z_1) P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(-z_2) P_l(\cos \theta), \quad (\text{П.18})$$

справедливого в области

$$\left| \frac{(z_1 + 1)(z_2 - 1)}{(z_1 - 1)(z_2 + 1)} \right| > 1. \quad (\text{П.19})$$

Далее, пользуясь соотношением

$$\operatorname{sh} \pi r Q_{-ir-1/2}^{-l-1/2}(z) = -\frac{\pi}{2} [\mp i \exp(\mp \pi r) P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(z) + P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(-z)], \quad (\text{П.20})$$

приходим к теореме сложения для Q -функций

$$\frac{1}{(z^2-1)^{1/2}} Q_{-ir-1/2}^{-1/2}(z) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{(z_1^2-1)^{1/2} (z_2^2-1)^{1/2}} \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{r(ir+l+1)}{r(ir+1)} \right|^2 P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(z_1) Q_{-ir-1/2}^{-l-1/2}(z_2) P_l(\cos \theta), \quad (\text{П.21})$$

которая выполняется в области

$$\left| \frac{(z_1+1)(z_2 \pm 1)}{(z_1-1)(z_2 \mp 1)} \right| > 1. \quad (\text{П.22})$$

В «физической» области изменения аргументов $z_1 = \operatorname{ch} \chi_p$, $z_2 = \operatorname{ch} \chi_q$, пользуясь (П.2), (П.3), получаем

$$\frac{e^{(1,2)}(r, \chi_{pq})}{\operatorname{sh} \chi_{pq}} = \frac{1}{r \operatorname{sh} \chi_p \operatorname{sh} \chi_q} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) s_l^*(r, \chi_p) e_l^{(1,2)}(r, \chi_q) P_l(\cos \theta), \quad (\text{П.23})$$

$$\frac{c_0(r, \chi_{pq})}{\operatorname{sh} \chi_{pq}} = \frac{1}{r \operatorname{sh} \chi_p \operatorname{sh} \chi_q} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) s_l^*(r, \chi_p) c_l(r, \chi_q) P_l(\cos \theta). \quad (\text{П.24})$$

В «физической» области условие (П.22) имеет вид

$$\chi_p < \chi_q. \quad (\text{П.25})$$

В пределе $\chi_q \rightarrow \infty$ из (П.23) следует частичное разложение для плоской $(r|p)$ (П.9), подобно тому как разложение обычной плоской волны $\exp(ir \cos \theta)$ получается из теоремы сложения для $e_0^{(1,2)}(r|p-q)$.

С учетом (148) и (П.23) получаем теорему сложения для $E^{(1,2)}(r, \chi_q; \mathbf{n}_p \mathbf{n}_q)$ в интегральной форме:

$$\int \langle \chi_p \mathbf{n}_p | r, \mathbf{n}_r \rangle E^{(1,2)}(r, \chi_q; \mathbf{n}_q \mathbf{n}_r) d\mathbf{n}_r = 4\pi \frac{\exp(\pm ir \chi_{pq})}{r \operatorname{sh} \chi_{pq}}, \quad (\text{П.26})$$

где

$$\operatorname{ch} \chi_{pq} = \operatorname{ch} \chi_p \operatorname{ch} \chi_q - \operatorname{sh} \chi_p \operatorname{sh} \chi_q (\mathbf{n}_p \mathbf{n}_q), \quad \chi_p < \chi_q.$$

Справедливы также соотношения

$$\int E^{(1,2)}(r, \chi_q; \mathbf{n}_q \mathbf{n}_r) d\mathbf{n}_r = \frac{4\pi}{r \operatorname{sh} \chi_q} \exp(\pm ir \chi_q), \quad (\text{П.27})$$

$$E^{(1,2)}(r, \chi_q; \mathbf{n}_q \mathbf{n}_r) \xrightarrow{\chi_q r \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{r \operatorname{sh} \chi_q} \exp(\pm ir \chi_q) \delta(1 \mp \mathbf{n}_r \mathbf{n}_q). \quad (\text{П.28})$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е 2

При аналитическом продолжении свободных решений будем пользоваться следующими определениями:

$$s_l(r, \chi) = \sqrt{\frac{\pi \operatorname{sh} \chi}{2}} \frac{r(ir+l+1)}{r(ir)} \exp[-i\pi(l+1)/2] P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(\operatorname{ch} \chi), \quad (\text{П.29})$$

$$e_l^{(1, 2)}(r, \chi) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2 \operatorname{sh} \chi}{\pi}} \frac{r(1-ir)}{r(l+1-ir)} \times \\ \times \exp(-3i\pi l/2) Q_{-1/2+ir}^{l+1/2}(\operatorname{ch} \chi), \quad (\text{П.30})$$

$$[c_l(r, \chi) = \operatorname{ctg} \pi(l+1/2) \left[\frac{s_{-l-1}(r, \chi)}{\cos \pi(l+1/2)} \alpha_l(r) - s_l(r, \chi) \operatorname{cth} \pi r \right]]. \quad (\text{П.31})$$

При физических значениях переменных ($0 < \chi < \infty$, $0 < r < \infty$, $l = 0, 1, 2, \dots$) определения (П.29) — (П.31) совпадают с (П.1) — (П.3). Соотношение $l_l^{(1, 2)} = c_l(r, \chi) \pm is_l(r, \chi)$ выполняется при произвольных комплексных l . Фактор $\alpha_l(r) = \exp(-i\pi l) \sin \pi(ir-l)/\sin i\pi$ равен единице в физической области.

Выполняются следующие правила комплексного сопряжения:

$$[s_l(r, \chi)]^* = v_{l^*}(r) s_{l^*}(r, \chi^*), \quad (\text{П.32})$$

$$[e_l^{(1, 2)}(r, \chi)]^* = v_{l^*}(r) [e_{l^*}^{(2, 1)}(r, \chi^*)],$$

где

$$v_l(r) = \exp[i\pi(l+1)] \frac{r(l+1-ir)r(ir)}{r(l+1+ir)r(-ir)}. \quad (\text{П.33})$$

Рассмотрим комплексные плоскости энергии $E = \operatorname{ch} \chi$ и быстроты χ . Функции Лежандра $P_\nu^\mu(E)$ и $Q_\nu^\mu(E)$ однозначны и аналитичны в плоскости E , разрезанной вдоль отрезка $(-\infty, +1)$ [37]. При отображении $E = \operatorname{ch} \chi$ главному листу соответствует полуплоска $|\operatorname{Im} \chi| < \pi$, $\operatorname{Re} \chi > 0$. При обходе точки $E = \operatorname{ch} \chi = +1$ в отрицательном направлении получим новую ветвь функции Лежандра, например $Q_\nu^\mu(E, -1)$ [37]. Такому обходу соответствует преобразование $\sqrt{E^2-1} \rightarrow -\sqrt{E^2-1}$, $\chi \rightarrow \chi \exp(-i\pi)$, а новому листу плоскости — полуплоска $|\operatorname{Im} \chi| < \pi$, $\operatorname{Re} \chi < 0$. В дальнейшем рассмотрим полосу $|\operatorname{Im} \chi| < \pi$, $|\chi| \geq \varepsilon > 0$ (область $\Omega(\chi)$). В этой области $P_\nu^\mu(\operatorname{ch} \chi)$ и $Q_\nu^\mu(\operatorname{ch} \chi)$ являются аналитическими функциями переменных ν и μ с существенно особыми точками $\nu = \infty$, $\mu = \infty$. Функция $Q_\nu^\mu(\operatorname{ch} \chi)$ обладает, кроме того, простыми полюсами в точках, для которых $\nu + \mu = -k$, $k = 1, 2, \dots$. В силу определений (П.29), (П.30) получаем, что функции $e_l^{(1)}(r, \chi)$ и $v_l(r) e_l^{(2)}(r, \chi)$ голоморфны в области $\chi \in \Omega(\chi)$, $r \neq \mp i(n+1)$, l — произвольно; функция $s_l(r, \chi)$ голоморфна в области $\chi \in \Omega(\chi)$, $\operatorname{Re}(ir) > -\delta$, $\operatorname{Re} l + 1 > \delta$, причем $0 < \delta < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ($n \leq l+1$ при целых l).

Отметим, что бесконечная цепочка простых полюсов функций (П.29) — (П.31) в l -плоскости, подобная «лоренц-полюсам» в разложении полной амплитуды по представлениям основной серии $SO(3, 1)$ [42] при вещественных r , лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} l + 1 \leq 0$.

Легко убедиться, что

$$e_l^{(1)}(r, \chi) \sim \exp [i(r\chi - \pi l/2)] \text{ при } |r| \rightarrow \infty, \quad |\arg r| < \pi/2 \quad (\text{П.34})$$

$$v_l(r) e_l^{(2)}(r, \chi) \sim \exp [-i(r\chi - \pi l/2)] \quad \begin{matrix} l - \text{произвольны} \\ \chi \in \Omega(\chi). \end{matrix}$$

В начале координат $e_l^{(1, 2)}(r, \chi)$ конечны при произвольных l :

$$e_l^{(1, 2)}(0, \chi) = \exp(-i\pi l/2) P_l(\text{cth } \chi), \quad (\text{П.35})$$

а $s_l(r, \chi)$ линейно убывает

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{s_l(r, \chi)}{r} \right] = \exp(-i\pi l/2) Q_l(\text{cth } \chi). \quad (\text{П.36})$$

Получим теперь оценки для абсолютных величин свободных решений и ядер $K_l(r, r'; \chi)$ (69).

Рассмотрим функцию $e_l^{(1)}(r, \chi)$ в области C комплексной плоскости радиус-вектора (l и χ фиксированы в области голоморфности $e_l^{(1)}$), состоящей из круга C_1 , радиуса δ ($|r| \leq \delta, 0 < \delta < 1$) и полуплоскости C_2 ($\text{Re } r > \delta$):

$$C = C_1 \cup C_2. \quad (\text{П.37})$$

Поскольку $e_l^{(1)}(r, \chi)$ аналитична в C_2 и удовлетворяет (П.34), то существует положительная величина $A(l, \chi)$, такая, что для любых конечных l и χ имеем (см. [23])

$$|e_l^{(1)}(r, \chi) \exp(-ir\chi)| \leq A(l, \chi) < \infty, \quad r \in C_2. \quad (\text{П.38})$$

Для доказательства (П.38) можно воспользоваться принципом Фрагмена — Линделёфа.

В круге C_1 функция $e_l^{(1)}(r, \chi)$ также, очевидно, ограничена. Аналогично для $e_l^{(2)}$ имеем

$$|v_l(r) e_l^{(2)}(r, \chi) \exp(ir\chi)| \leq A'(l, \chi) < \infty, \quad r \in C = C_1 \cup C_2. \quad (\text{П.39})$$

Для целых l неравенства (П.38), (П.39) были получены в [23]. Величины $s_l(r, \chi)$ и $K_l(r, r'; \chi)$ во всей области C не являются равномерно ограниченными из-за особенностей $r(\pm ir + l + 1)$, входящей в $v_l(r)$. Однако для доказательства существования и аналитичности решений уравнений (65), (66) не требуется выход в комплексную область r^* .

Из (П.38), (П.39) следует

$$\begin{aligned} |s_l(r, \chi)| &\leq B(l, \chi) \exp[r |\text{Im } \chi|], \\ |e_l^{(1, 2)}(r, \chi)| &\leq A''(l, \chi) \exp[\mp r |\text{Im } \chi|]. \end{aligned} \quad (\text{П.40})$$

Внутри круга C_1 , применяя лемму Шварца и учитывая (П.36), имеем

$$|s_l(r, \chi)| \leq B'(l, \chi) \frac{|r|}{\delta} \exp[r |\text{Im } \chi|],$$

что дает с учетом (П.40) неравенство, справедливое для вещественных r :

$$|s_l(r, \chi)| \leq B''(l, \chi) \left(\frac{r}{r + \delta} \right) \exp[r |\text{Im } \chi|], \quad (\text{П.41})$$

* Здесь существенно отличие от разностных уравнений, для которых обязательно требуется выход в комплексную плоскость r .

а также равномерную ограниченность для ядер K_l :

$$|K_l(r, r', \chi)| \leq D(l, \chi) \left(\frac{r}{r+\delta} \right) \exp[|\operatorname{Im} \chi|(r-r')], \quad r > r', \quad (\text{П.41a})$$

$$(K_l(r, r', \chi)| \leq D(l, \chi) \left(\frac{r'}{r'+\delta} \right) \exp[|\operatorname{Im} \chi|r' - \operatorname{Im} \chi r], \quad r' > r. \quad (\text{П.41б})$$

Используя рекуррентные соотношения для функций Лежандра [37] получаем аналогичные оценки для производных по χ :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \chi} e_l^{(1)}(r, \chi) \right| \leq A''(l, \chi) \exp[-r \operatorname{Im} \chi (|l+1|(\operatorname{cth} \chi + 1) + r)], \quad (\text{П.42a})$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \chi} K_l(r, r', \chi) \right| \leq D'(l, \chi) \left(\frac{r'}{r'+\delta} \right) (|l+1|(\operatorname{cth} \chi + 1) + r') \times \\ \times \exp[|\operatorname{Im} \chi|r' - \operatorname{Im} \chi r], \quad r' > r \quad (\text{П.42б})$$

и производных по l :

$$\left| \frac{\partial}{\partial l} e_l^{(1)}(r, \chi) \right| \leq A'''(l, \chi) \exp[-r \operatorname{Im} \chi], \quad (\text{П.43a})$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial l} K_l(r, r'; \chi) \right| \leq D'(l, \chi) \left(\frac{r'}{r'+\delta} \right) \times \\ \times \exp[|\operatorname{Im} \chi|r' - \operatorname{Im} \chi r], \quad r' > r. \quad (\text{П.43б})$$

Выясним теперь, как ведут себя свободные решения при обходе точки $\chi = 0$. Используя выражение для ветви $\{Q_V^{\mu}(z, 1^{-})\}$ [37], будем иметь:

$$e_l^{(1)}(r, \chi \exp(-i\pi)) = i \sin \pi l (1 + \operatorname{cth} \pi r) e_l^{(1)}(r, \chi) + \\ + (\cos \pi l - i \operatorname{cth} \pi r \sin \pi l) e_l^{(2)}(r, \chi), \quad (\text{П.44a})$$

$$e_l^{(2)}(r, \chi \exp(-i\pi)) = i \sin \pi l (1 - \operatorname{cth} \pi r) e_l^{(2)}(r, \chi) + \\ + (\cos \pi l + i \operatorname{cth} \pi r \sin \pi l) e_l^{(1)}(r, \chi) \quad (\text{П.44б})$$

$$s_l(r, \chi \exp(-i\pi)) = \exp[-i\pi(l+1/2)] s_l(r, \chi). \quad (\text{П.44в})$$

Отсюда следует

$$K_l(r, r'; \chi \exp(-i\pi)) = K_l(r, r'; \chi) + \\ + 2 \sin \pi l s_l(r, \chi) s_l^*(r', \chi) (\operatorname{cth} \pi r - \operatorname{cth} \pi r'). \quad (\text{П.45})$$

Легко убедиться, что $(\operatorname{sh} \chi)^{-l-1} s_l(r, \chi)$ — голоморфная функция в окрестности χ , а для $K_l(r, r'; \chi)$ $\chi = 0$ является точкой ветвления.

Рассмотрим теперь преобразование $l \rightarrow -l-1$. Из (П.2) и (П.33) следует:

$$e_{-l-1}^{(1)}(r, \chi) = \exp[i\pi(l+1/2)] e_l^{(1)}(r, \chi); \quad (\text{П.46a})$$

$$v_{-l-1} e_{-l-1}^{(2)}(r, \chi) = \exp[-i\pi(l+1/2)] v_l(r) e_l^{(2)}(r, \chi). \quad (\text{П.46б})$$

Таким образом, $K_{-l-1}(r, r'; \chi) \neq K_l(r, r'; \chi)$, если l не равно целому числу.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

В данном приложении изложены результаты работы [25].
 Применим уравнение (58) к построению составной кварковой модели мезонов. Отметим, что КПУ в конфигурационном представлении применялись к описанию Ψ ($E = 3,095$ ГэВ) и Ψ' ($E = 3,095$) [22]. В этой работе использовалось дифференциально-разностное уравнение Шредингера [4, 5], которое решалось с помощью преобразования Лапласа. Анализ разностного уравнения наталкивался на некоторые трудности, главная из которых связана со сложностью граничных условий.
 При конкретных расчетах радиальных и орбитальных возбуждений в системе кварк — антикварк, а также при вычислении ширины распадов дифференциальное уравнение (58) оказалось более удобным. Оно имеет вид (восстановлена масса частицы):

$$\left[\frac{1}{m} \frac{d^2}{dr^2} + m\chi_q^2 - mR_l(r, \chi_q) \right] \varphi_{ql}(r) = \gamma_l(r, \chi_q) V(r) \varphi_{ql}(r), \tag{П.47}$$

где $2E_q = \sqrt{S} = 2m \operatorname{ch} \chi_q = \mu$ (μ — масса связанного состояния, $\hbar = c = 1$). Граничные условия для волновой функции имеют вид

$$\varphi_{ql}(0) = \varphi_{ql}(\infty) = 0. \tag{П.48}$$

В качестве потенциала V выберем функцию (детали см. в [25]):

$$V(r) = -V_0 + gr. \tag{П.49}$$

Рассмотрим состояние с нулевым орбитальным моментом. В этом случае

$$R_0(r, \chi_q) = 0, \quad \gamma_0(r, \chi_q) = \frac{\chi_q}{\operatorname{sh} \chi_q}. \tag{П.50}$$

Таблица 1

n	Резонанс	Γ_L , кэВ	$\Gamma_L^{\text{эксп}}$, кэВ	$\chi_n / \operatorname{sh} \chi_n$
1	$\rho(0,77)$	6,31	6,5±0,5	1,02
2	$\rho'(1,25)$	2,01		0,83
3	$\rho''(1,6)$	1,07	1,0±2,65	0,76
1	$\omega(0,78)$	0,42	0,76±0,17	0,74
1	$\Phi(1,02)$	1,51	1,34±0,08	1,1
1	$\psi(3,095)$	4,6	4,8±0,6	1,05
2	$\psi'(3,684)$	3,07	2,2±0,6	0,99
3	$\psi''(4,15)$	2,31	4,0±1,2	0,95

Примечание. Фактор $\chi_n / \operatorname{sh} \chi_n$, характеризующий отклонение характера движения от нерелятивистского, для многих состояний существенно отличается от единицы.

Таблица 2

$m_p=0,41 \text{ ГэВ}, \quad g_p=0,084 \text{ ГэВ}^2, \quad V_0^p=0,65 \text{ ГэВ}$				
n	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
1	0,77* $\rho(0,77)$	1,03 $\delta(0,97)$ $A_1(1,1)$ $A_2(1,31)$	1,25 $\rho'(1,25)?$	1,43
2	1,25* $\rho'(1,25)$	1,44 $X(1,44)$ $F_1(1,54)$	1,61 $g(1,68)$	1,78
3	1,62 $\rho'(1,6)$	1,78 $X(1,795)$	1,96 $S(1,93)?$	2,08
4	1,94 $\rho(2,1)$	2,08	2,28 $U(2,36)?$	2,36
5	2,23 $\rho(2,275)$	2,36	2,51	2,62
6	2,49	2,61	2,81	2,86
7	2,74	2,85	2,98	3,09
8	2,97	3,08	3,20	3,30
9	3,19	3,30	3,40	
$m_\lambda=0,72 \text{ ГэВ}, \quad g_\lambda=0,084 \text{ ГэВ}^2, \quad V_0^\lambda=0,87 \text{ ГэВ}$				
n	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
1	1,02* $\Phi(1,019)$	1,26 $S^*(0,99)$ $D(1,28)$ $f'(1,51)$	1,34	1,55
2	1,43* $X(1,43)$	1,61	1,79	1,91 $S(1,93)?$
3	1,76	1,91 $S(1,93)?$	2,05	2,17
4	2,04	2,17	2,33	2,45
5	2,29	1,41	2,54	2,65
6	2,52	2,63	2,76	2,86
7	2,74	2,84	2,96	3,04
8	2,94	3,04	3,14	3,23
9	3,13	3,22	3,32	3,41
$m_c=1,81 \text{ ГэВ}, \quad g_c=0,24 \text{ ГэВ}^2, \quad V_0^c=1,25 \text{ ГэВ}$				
n	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
1	3,09* $\psi(3,095)$	3,43	3,74	3,97
2	3,68* $\psi'(3,684)$	3,94	4,19	4,39
3	4,16 $\psi''(4,15)$	4,36	4,58	4,77
4	4,57 $\psi'''(4,44)$	4,74	4,98	5,13
5	4,94	5,12	5,29	5,46
6	5,28	5,45	5,64	5,76
7	5,60	5,76	5,92	
8	5,91	6,06		
9	6,19	6,34		

Таблица 3

$m_c = M = 300 \text{ ГэВ}$ $g_c = 1,52 \text{ ГэВ}$ $V_0^c = 470,3 \text{ ГэВ}$			$m_p = M = 300 \text{ ГэВ}$	
			$g_p = 1,1 \text{ ГэВ}$ $V_0^p = 471,2 \text{ ГэВ}$	$g_p = 2,51 \text{ ГэВ}$ $V_0^p = 471,6 \text{ ГэВ}$
n	$l = 0$	$l = 1$	$l = 0$	$l = 0$
1	3,10* $\psi(3,1)$	3,49	0,77* $\rho(0,77)$	0,77* $\rho(0,77)$
2	3,70* $\psi'(3,7)$	4,00	1,25* $\rho'(1,25)$	1,60* $\rho'(1,6)$
3	4,17 $\psi''(4,15)$	4,44	1,64 $\rho'(1,6)$	2,28 $\rho(2,275)$
4	4,60 $\psi'''(4,44)$	4,84	1,99 $\rho(2,1)$	2,88
5	4,99	5,21	2,30 $\rho(2,275)$	3,42
6	5,35	5,56	2,60	3,93
7	5,69	5,89	2,88	4,41
8	6,02	6,21	3,14	4,87
9	6,33	6,51	3,39	5,31
10	6,63	6,80	3,64	5,73

Таблица 4

Масса резонанса, ГэВ	χ	\bar{r} , фм	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$, фм
3,09 $\psi(3,095)$	1,5656i	0,039	0,048
3,68 $\psi'(3,684)$	1,5647i	0,069	0,077
4,16 $\psi''(4,15)$	1,5639i	0,096	0,105
4,57 $\psi'''(4,44)$	1,5632i	0,132	0,142

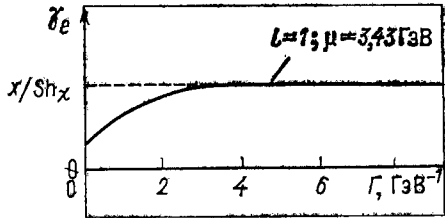
Таблица 5

Масса резонанса, ГэВ	χ	\bar{r} , фм	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$, фм
0,77 ($\rho(0,77)$)	0,35i	0,94	1,02
1,55 ($\rho'(1,25)$)	0,98	1,72	1,90
1,62 ($\rho'(1,6)$)	1,3	2,47	2,71
1,94 ($\rho(2,1)$)	1,51	3,10	3,41
1,02 ($\Phi(1,019)$)	0,78i	0,78	0,86
1,43 ($X(1,43)$)	0,059i	1,48	1,63
3,09 ($\psi(3,095)$)	0,55i	0,41	0,46
3,68 ($\psi'(3,684)$)	0,18	0,72	0,81
4,16 ($\psi''(4,15)$)	0,54	0,95	1,05
4,57 ($\psi'''(4,44)$)	0,71	1,20	1,32

Уравнение (П.47) сводится при $l=0$ к уравнению для функций Эйри. Волновая функция имеет вид

$$\varphi_n(r) = \left(\frac{gm\chi_n}{\text{sh } \chi_n} \right)^{1/3} Ai \left[\left(\frac{gm\chi_n}{\text{sh } \chi_n} \right)^{1/3} \left(r - \frac{V_0}{g} - \frac{m}{g} \chi_n \text{sh } \chi_n \right) \right], \quad (\text{П.51})$$

Рис. 3. Типичное поведение γ_l . Эта кривая мало чувствительна к вариациям l и χ



l — главное квантовое число; $A_i(x)$ — функция Эйри. Волновая функция нормирована условием

$$\int |\varphi_n(r)|^2 dr = 1. \quad (\text{П.52})$$

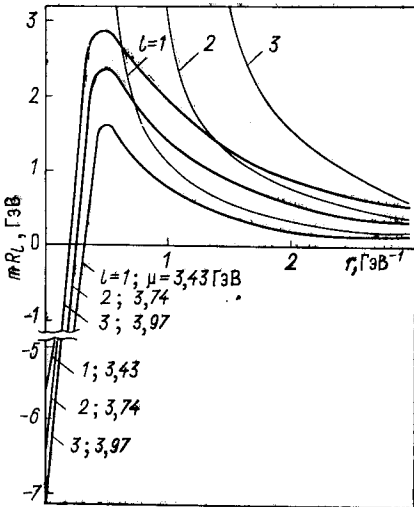


Рис. 4. Релятивистский центробежный барьер mR_l . Для сравнения приведен нерелятивистский барьер $l(l+1)/mr^2$ при тех же значениях l . Номера кривых равны l . Массы связанных состояний ваты следующие: $\mu_1 = 3,43$ ГэВ, $\mu_2 = 3,74$ ГэВ, $\mu_3 = 3,97$ ГэВ

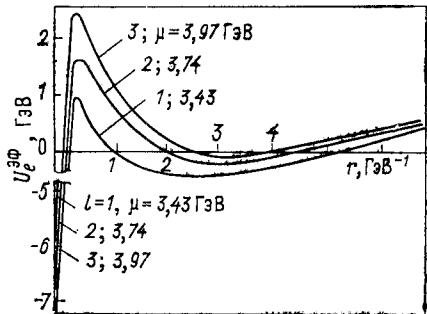


Рис. 5. Эффективный квазипотенциал $U_e^{\text{эф}}$. В модели сверхтяжелых кварков радиус первой ямы A порядка фундаментальной длины l . Обозначения кривых те же, что и на рис. 4

С учетом (II.48) получаем уравнение для спектра быстрот

$$z_n = - \left(\frac{m\chi_n}{g^2 \operatorname{sh} \chi_n} \right)^{1/3} (V_0 + m\chi_n \operatorname{sh} \chi_n), \quad (\text{II.53})$$

где z_n — нули функции Эйри.

Сопоставляя основное 1^3S -состояние и первое радиальное возбуждение 2^3S в системах $\bar{p}p$, $\bar{\lambda}\bar{\lambda}$ и $\bar{c}\bar{c}$ с векторными мезонами (см. табл. 2), находим массы кварков и параметры потенциала g и V_0 .

Дополнительным критерием для выбора параметров является требование удовлетворительного описания значений лептонной ширины распадов векторных мезонов, весьма чувствительных к изменениям наклона g . Результаты расчетов вместе с экспериментальными значениями ширины приведены в табл. 1.

В случае $l \neq 0$ уравнение (II.77) не имеет аналитического решения. Уровни энергий приведены в табл. 2. Точность вычисления уровней 0,01 ГэВ. Звездочкой отмечены уровни, масса которых использовалась в качестве входных параметров. В скобках указаны экспериментально наблюдавшиеся резонансы с подходящими массами, спинами и четностью.

Результаты численного расчета спектра радиальных и орбитальных возбуждений систем $\bar{c}\bar{c}$ и $\bar{p}p$ приведены в табл. 3. Значения среднего радиуса \bar{r} и среднего квадратического радиуса $(r^2)^{1/2}$ векторных мезонов в модели сверхтяжелых кварков и в модели легких кварков приведены в табл. 4 и 5.

На рис. 3—5 приведены кривые зависимости $\gamma_l(r, \chi)$, $mR_l(r, \chi)$ и эффективного квазипотенциала:

$$U_l^{\text{эф}}(r, \chi) = mR_l(r, \chi) + V(r) \gamma_l(r, \chi) \quad (\text{II.54})$$

от r для пары $\bar{c}\bar{c}$ при фиксированных быстротах и $l = 1, 2, 3$. Кривые $R_l(r, \chi)$ имеют узкий минимум при $r \leq 1/m$. Такая форма центробежного барьера приводит к специфическому поведению эффективного квазипотенциала $U_l^{\text{эф}}(r, \chi)$, не имеющему нерелятивистского аналога.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. — Nuovo cimento, 1963, v. 29, p. 380.
2. Kadyshevsky V. G. — Nucl. Phys. B, 1968, v. 6, p. 125; Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. — Nuovo cimento A, 1967, v. 55, p. 275.
3. Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н. В кн.: Проблемы теоретической физики. М., Наука, 1969.
4. Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. — Nuovo cimento A, 1968, v. 55, p. 233.
5. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. — ЭЧАЯ, 1972, т. 2, вып. 3.
6. Логунов А. А., Хрусталев О. А. — ЭЧАЯ, 1970, т. 1, вып. 1.
7. Фаустов Р. Н. — ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 3.
8. Гарсеванишвили В. Р., Матвеев В. А., Слепченко Л. А. — ЭЧАЯ, 1980, т. 1, вып. 1.
9. Квинихидзе А. Н., Сисакян А. Н., Слепченко Л. А., Тавхелидзе А. Н. — ЭЧАЯ, 1977, т. 8, вып. 3.
10. Скачков Н. Б., Соловцов И. Л. — ЭЧАЯ, 1977, т. 9, вып. 1.
11. Саврин В. И., Тюрин Н. Е., Хрусталев О. А. — ЭЧАЯ, 1976, т. 7, вып. 1.
12. Боголюбов П. Н. — ЭЧАЯ, 1973, т. 3, вып. 1.
13. Ризов В. А., Тодоров И. Т. — ЭЧАЯ, 1975, т. 6, вып. 3.
14. Мир-Касимов Р. М. В кн.: Труды XVIII Международной конференции по физике высоких энергий. Д1, 2-10400, Дубна, 1977.
15. Abraham Klein, Tsung-Shung Lee H. — Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 4308.

16. Кадышевский В. Г. — ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 654, 872.
17. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. — Ядерная физика, 1969, т. 9, с. 219.
18. Freeman M., Mateev M. D., Mir-Kasimov R. M. — Nucl. Phys. B, 1969, v. 12, p. 24.
19. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Фриман М. — Ядерная физика, 1969, т. 9, с. 646.
20. Кадышевский В. Г., Матеев М. Д., Мир-Касимов Р. М. — Ядерная физика, т. 11, с. 692.
21. Бабилов В. В., Груша Г. В., Мир-Касимов Р. М., Шульгина Н. Б. — ТМФ, т. 17, с. 391, 1973.
22. Jhung K. S., Chunk K. H., Willey R. S. — Phys. Rev. D, 1975, v. 12, p. 1999.
23. Bawin M. — Ann. Phys., 1973, v. 77, p. 431.
24. Амирханов И. В., Груша Г. В., Мир-Касимов Р. М. — ТМФ, 1977, т. 30, с. 333.
25. Амирханов И. В., Груша Г. В., Мир-Касимов Р. М. — Ядерная физика, 1977, т. 26, с. 207.
26. Амирханов И. В., Груша Г. В., Мир-Касимов Р. М. — ТМФ, 1978, т. 36, с. 42.
27. Amirkhanov I. V., Grusha G. V., Mir-Kasimov R. M. JINR, E2-10952, Dubna, 1977.
28. Амирханов И. В., Груша Г. В., Мир-Касимов Р. М. — ТМФ, 1979, т. 40, с. 384.
29. Amirkhanov I. V., Grusha G. V., Mir-Kasimov R. M. JINR, E2-11649, Dubna, 1978.
30. Скачков Н. Б. — ТМФ, 1975, т. 25, с. 313.
31. Шапиро И. С. — Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 650.
32. Смородинский Я. А. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 55.
33. Durand V., O'Raiartaigh L. O. — Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 99.
34. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н. Препринт ОИЯИ, E2-3498, Дубна, 1967.
35. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. Пер. с англ. М., Мир, 1966.
36. Brown L., Fivel D., Lee B., Sawyer R. — Ann. Phys., 1963, v. 23, p. 187.
37. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 1974.
38. Завьялов О. И., Поливанов М. К., Хоружий С. С. — ЖЭТФ, 1965, т. 45, с. 1654.
39. Поливанов М. К., Хоружий С. С. — ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 339.
40. Арбузов Б. А., Логунов А. А., Филиппов А. Т., Хрусталев О. А. — ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1266.
41. Скачков Н. Б. — ТМФ, 1970, т. 5, с. 57.
42. Toller M. — Nuovo cimento, 1965, v. 37, p. 631.
43. Barut A. O., Calogero F. — Phys. Rev., 1962, v. 128, p. 1383.
44. Бабилов В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М., Наука, 1976.
45. Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ. М., Мир, 1972.
46. Babikov V. V., Mir-Kasimov R. M. — Phys. Lett. B, 1970, v. 31B, p. 415.
47. Бабилов В. В., Ханхасаев М. Х. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1974, т. 38, с. 725.
48. Бабилов В. В., Груша Г. В., Мир-Касимов Р. М., Шульгина Н. Б. — ТМФ, 1973, т. 17, с. 391.
49. Barbiellini G. e.a. — Phys. Lett. B, 1972, v. 39B, p. 663.
50. Amaldi U. e.a. — Phys. Lett. B, 1973, v. 43, p. 231; Phys. Lett. B, 1973, v. 44, p. 112.
51. Allaby J. V. e.a. — Nucl. Phys. B, 52, 1973, v. 52, p. 316.