

## МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗОНАНСОВ В ФАЗОВОМ АНАЛИЗЕ

*Ф. Никитиу*

Институт физики и ядерной технологии, Бухарест

В физике элементарных частиц и в ядерной физике двухчастичные реакции с образованием резонансов принято исследовать с помощью фазового анализа. Главной проблемой такого подхода является проблема существования резонанса в данной парциальной волне. Для того чтобы решить эту задачу, необходимо детально рассмотреть энергетическое поведение парциальной амплитуды.

В данном обзоре обсуждаются методы выполнения фазового анализа и проблемы, связанные с существованием резонанса и нахождением его параметров. Рассмотрим разные примеры резонансного поведения из ядерной физики и физики элементарных частиц. Особое внимание уделим проблеме существования резонансов в системе пион — ядро.

Both in elementary particle physics and in nuclear physics two particle reactions leading to the production of resonances are usually examined with the help of phase shift analysis. The main problem in such an approach concerns the existence of the resonance in the given partial wave of interest.

In this review a discussion is presented of methods for performing phase shift analysis and of problems connected to the existence of resonances and the determination of their parameters. Various examples of resonance behaviour from nuclear physics and elementary particle physics are examined. Particular attention is given to the problem of the existence of resonances in the pion-nucleus system.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов рассеяния с помощью фазового анализа позволяет прояснить многие важные аспекты во взаимодействии частиц. Фазовый анализ основан лишь на самых общих законах сохранения и тесно связан с экспериментальными данными, позволяет получить дополнительную информацию, которая поможет лучше выбрать ту или иную модель для описания процессов взаимодействия. Фазовый анализ приобретает определенное значение в поиске резонансов и нахождении их квантовых чисел.

В последнее время резко вырос интерес к фазовому анализу и появился целый ряд новых методов (например, метод разложения с ускоренной сходимостью, анализ нулей амплитуды рассеяния, анализ при фиксированном переданном импульсе и т. п.), в которых максимально используются общие принципы аналитичности и унитарности для парциальных амплитуд.

В этом обзоре обсудим проблемы, возникающие при выполнении фазового анализа. Особое внимание уделим вопросам нахождения резонансов с помощью фазового анализа и определения их параметров. Сначала рассмотрим методику фазового анализа, затем дадим разбор очень важной для фазового анализа проблемы неоднозначностей. Далее остановимся на критериях существования резонансов и влиянии нерезонансного фона на определение параметров резонансов и рассмотрим некоторые аспекты применения фазового анализа в относительно новой области — для исследования рассеяния пионов на ядрах при промежуточных энергиях. Кроме того, представим некоторые интересные результаты о существовании новых типов возбужденных состояний в системах  $\pi A$ .

## 1. МЕТОДЫ ФАЗОВОГО АНАЛИЗА

**1.1. Формализм фазового анализа.** Исходя из асимптотической формы волновой функции после рассеяния:

$$\Psi \approx \exp(ikz) + f(\theta) \exp(ikr)/r \quad (1)$$

и разлагая ее в падающую плоскую волну по полиномам Лежандра

$$\exp(ikz) = \frac{1}{kr} \sum i^l (2l+1) \sin(kr - l\pi/2) P_l(\cos\theta), \quad (2)$$

имеем выражение амплитуды рассеяния двух частиц с нулевым спином:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum (2l+1) f_l P_l(\cos\theta), \quad (3)$$

где  $k$  — импульс в системе центра масс;  $f_l$  — парциальная амплитуда, которую можно выразить через фазовый сдвиг  $\delta_l$  и параметр неупругости  $\eta_l$ :

$$f_l = [\eta_l \exp(2i\delta_l) - 1]/2i. \quad (4)$$

Независимые наблюдаемые величины для упругого рассеяния двух частиц с нулевыми спинами — дифференциальное и полное сечения рассеяния:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma/d\Omega &= |f(\theta)|^2; \\ d_{\text{tot}} &= (4\pi/k) \operatorname{Im} f(\theta=0). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Полное упругое сечение  $\sigma_{el}$  и сечение реакций  $\sigma_r$  выражаются через фазы  $\delta_l$  и  $\eta_l$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{el} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum (2l+1) |f_l|^2 = \int \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega; \\ \sigma_r &= \frac{4\pi}{k^2} \sum (2l+1) (1 - \eta_l^2) = \sigma_{tot} - \sigma_{el}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При столкновении двух частиц с ненулевыми спинами в конечном состоянии не сохраняется аксиальная симметрия относительно направления налетающей частицы. Волновая функция в асимптотической области теперь будет иметь и часть, зависящую от спина. Напишем выражения, подобные (1) и (3), для столкновения двух частиц со спинами 0 и 1/2:

$$\Psi_{\pm 1/2} = \Psi_{\pm 1/2}^{inc} + \frac{\exp(ikr)}{r} [f_{-+}^{++}(\theta, \varphi) \chi_{1/2 \pm 1/2} + f_{-+}^{+-}(\theta, \varphi) \chi_{1/2 \mp 1/2}], \quad (7)$$

здесь амплитуды  $f^{++}(\theta, \varphi)$  и  $f_{--}(\theta, \varphi)$  описывают рассеяние без переворота спина, а амплитуды  $f^{+-}(\theta, \varphi)$  и  $f_{-+}(\theta, \varphi)$  соответствуют рассеянию с изменением проекции спина. Они имеют следующий вид:

$$f^{++}(\theta, \varphi) = f_{--}(\theta, \varphi) = \frac{1}{k} \sum_l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} [(l+1) f_{l+} + l f_{l-}] Y_{l,0}(\theta, \varphi); \quad (8)$$

$$f_{-+}^{+-}(\theta, \varphi) = \pm \frac{1}{k} \sum_l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} [f_{l+} - f_{l-}] Y_{l \pm 1}(\theta, \varphi), \quad (9)$$

где

$$f_{l \pm} = [\eta_{l \pm} \exp(2i\delta_{l \pm}) - 1]/2i$$

— парциальная амплитуда в состоянии с полным моментом  $j = l \pm 1/2$ .

Независимые наблюдаемые величины для рассеяния двух частиц со спином 0 и 1/2 выражаются через амплитуду рассеяния:

$$F(\cos \theta, \varphi) = f(\cos \theta) + i\sigma \cdot \mathbf{n} g(\cos \theta), \quad (10)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f / |\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f|$ ;  $\sigma$  — матрицы Паули;

$$f(\cos \theta) = \frac{1}{k} \sum_l [(l+1) f_{l+} + l f_{l-}] P_l(\cos \theta); \quad (11)$$

$$g(\cos \theta) = \frac{1}{k} \sum_l (f_{l+} - f_{l-}) P_l^1(\cos \theta),$$

так что

$$d\sigma/d\Omega = |f|^2 + |g|^2 + 2 \operatorname{Im}(fg^*) \mathbf{P}_i \mathbf{n}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{P}_i$  — поляризация начального состояния частицы со спином 1/2. Ясно, что дифференциальное сечение рассеяния без первоначального

чальной поляризации содержит только первые два члена выражения (12):

$$(d\sigma/d\Omega)_0 = |f|^2 + |g|^2. \quad (13)$$

Полное сечение получается по оптической теореме и зависит от  $\text{Im } f(0)$ , поскольку  $g(0) = 0$ , а полное упругое сечение имеет следующую форму:

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2} \sum [(l+1) |f_{l+}|^2 + l |f_{l-}|^2]. \quad (14)$$

Вектор поляризации конечного состояния зависит от 16 физических величин, из которых, однако, не все являются независимыми. Выражение для поляризации конечного состояния таково:  $(d\sigma/d\Omega) \mathbf{P}_f = 2 \text{Im } (fg^*) \mathbf{n} + 2 \text{Re } (fg^*) [\mathbf{P}_i \times \mathbf{n}] +$

$$+ 2 |g|^2 (\mathbf{P}_i \mathbf{n}) \mathbf{n} + (|f|^2 - |g|^2) \mathbf{P}_i. \quad (15)$$

Определим параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (d\sigma/d\Omega)_0 \alpha &= 2 \text{Im } (fg^*); & (d\sigma/d\Omega)_0 \beta &= 2 \text{Re } (fg^*); \\ (d\sigma/d\Omega)_0 \gamma &= |f|^2 - |g|^2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Можно показать, что между величинами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  существует такая связь:  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ . Параметры поляризации  $\beta$  и  $\gamma$  можно связать с параметрами поляризации Вольфенштейна  $A$  и  $R$ .

При рассмотрении рассеяния частиц, спин которых не равен нулю или  $1/2$ , приходится вводить большое число независимых амплитуд и выражать их через различные виды дифференциальных сечений и параметров поляризации. Для таких случаев в практике фазового анализа чаще всего пользуются подходом Блатта — Биденхарна [1] (иногда его называют  $ls$ -формализмом). Однако, несмотря на принципиальную простоту этого метода, его недостатком является большое количество расчетов, которое возникает сразу же, как только спин частиц становится отличным от  $1/2$ . Более элегантный подход разработан Якобом и Виком [2].

**Изотопический спин и кулоновские поправки.** В сильных взаимодействиях сохраняется полный изоспин системы  $I$ , сильные взаимодействия не зависят от заряда, который связан с проекцией изоспина  $I_3$ . Это приводит к тому, что каждая парциальная амплитуда в разложении типа (11) становится суперпозицией амплитуд рассеяния с определенным значением полного изоспина. Например, для рассеяния пион — нуклон или пион —  ${}^3\text{He}$  ( $I_\pi = 1$ ,  $I_{N({}^3\text{He})} = 1/2$ ) получаются следующие разложения парциальных

амплитуд по состояниям с полным изоспином 1/2 и 3/2:

$$\left. \begin{aligned} f_{l\pm}^{(-)} &= \frac{1}{3} (f_{l\pm}^{3/2} + 2f_{l\pm}^{1/2}) && \text{для } \pi^- p \rightarrow \pi^- p; \\ f_{l\pm}^{(+)} &= f_{l\pm}^{3/2} && \text{для } \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p; \\ f_{l\pm}^{\text{CEX}} &= \frac{\sqrt{2}}{3} (f_{l\pm}^{3/2} - f_{l\pm}^{1/2}) && \text{для } \pi^- p \rightarrow \pi^0 n, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

а для  $\pi\pi$ -рассеяния по состояниям с полным изоспином 0, 1 и 2:

$$\left. \begin{aligned} f_l &= f_l^2, && \pi^\pm \pi^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^\pm; \\ f_l &= (f_l^2 + f_l^0)/2, && \pi^\pm \pi^0 \rightarrow \pi^\pm \pi^0; \\ f_l &= f_l^2/6 + f_l^0/2 + f_l^1/3, && \pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-; \\ f_l &= (f_l^2 - f_l^0)/3 && \pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

При анализе рассеяния двух тождественных частиц необходимо соблюдать некоторую осторожность, чтобы правильно учесть симметрию волновой функции. Так, суммирование по орбитальному моменту  $l$  для системы двух пионов проводится по нечетным  $l$  в состоянии с  $I = 1$  и по четным  $l$  в состояниях с  $I = 0$ , и 2, т. е.

$$f^I = \frac{1}{2k} \sum (1 + (-1)^{I+l}) (2l+1) f_l^I P_l(\cos \theta). \quad (19)$$

Для рассеяния  $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$  получаем

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{6} \sum_{0,2} (2l+1) f_l^2 P_l(\cos \theta) + \frac{1}{2} \sum_{1,3} (2l+1) f_l^1 P_l(\cos \theta) + \frac{1}{3} \sum_{0,2} (2l+1) f_l^0 P_l(\cos \theta) \right]. \quad (20)$$

При рассеянии заряженных частиц необходимо учитывать наряду с короткодействующим ядерным и дальнодействующий кулоновский потенциал. В этом случае амплитуда рассеяния запишется в виде

$$f(\theta) = f_c(\theta) + \frac{1}{k} \sum (2l+1) \exp(2i\sigma_l) f_l P_l(\cos \theta), \quad (21)$$

где  $f_c(\theta)$  — кулоновская амплитуда;  $\sigma_l$  — кулоновская фаза:

$$f_c(\theta) = -\frac{\eta}{2k \sin^2 \theta/2} \exp[2i\sigma_0 - i\eta \ln \sin^2 \theta/2]; \quad (22)$$

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l+1 - i\eta); \quad (23)$$

$\eta$  — кулоновский параметр;

$$\eta = z_1 z_2 \alpha / v. \quad (24)$$

Представленные соотношения получены в нерелятивистском пределе, а уравнение (21) справедливо для столкновения двух точечных зарядов. Учет того, что частицы имеют некоторые характерные размеры распределения заряда, и учет правильной релятивистской кинематики приводят к некоторым поправкам, которые становятся очень важными, когда экспериментальные данные достаточно точны. Более детальное рассмотрение процесса ядерного рассеяния в присутствии кулоновского потенциала требует введения дополнительных поправок к ядерным фазам. Обсуждение так называемых *outer* и *inner* кулоновских коррекций можно найти в [3], где рассматриваются кулоновские поправки для фазового анализа взаимодействия пион — нуклон при низких энергиях [4]. Вместе с улучшением точности экспериментальных данных и особенно благодаря идее Штернхайма и Хофштадера о возможности определения электромагнитного радиуса пиона в результате исследования упругого  $\pi^{\pm}{}^4\text{He}$ -рассеяния [5] и проблема кулоновских коррекций стала очень важной в фазовом анализе. Этот вопрос много обсуждался в экспериментальных и теоретических работах [6—9]. В группу кулоновских поправок, необходимых для фазового анализа, входят и релятивистские коррекции кулоновских факторов [10—12], а также учет разницы масс частиц, принадлежащих одному изотопическому мультиплету. Последние поправки особенно необходимы в многоканальном анализе [13—17].

**Классические методы фазового анализа.** Не только в физике элементарных частиц, но и во многих областях ядерной физики фазовый анализ широко используется для получения информации об амплитуде рассеяния и особенно для определения энергетической зависимости парциальных амплитуд. На практике амплитуды рассеяния, которые воспроизводят физические наблюдаемые величины, разлагают по парциальным волнам до определенного максимального  $l$ . Вопрос состоит в том, чтобы определить парциальные амплитуды, получая оптимальное согласие с экспериментальными данными. Для осуществления этой цели фазового анализа, т. е. для определения амплитуды рассеяния как комплексной функции двух переменных (угол и энергия), имеется два общих метода: независимый и зависящий от энергии фазовый анализ.

Чтобы провести независящий от энергии фазовый анализ (НФА), необходимо иметь несколько полных наборов экспериментальных данных (дифференциальных и полных сечений, параметров поляризации и т. п.) при разных, близких друг к другу энергиях. В этом случае при каждой данной энергии находятся такие наборы параметров, для которых функционал

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{E_i - F(f(x_i, \sqrt{s}))}{\Delta(E)_i} \right]^2 \quad (25)$$

имеет минимальное значение. Здесь  $E_i$  — значение экспериментальной величины с погрешностью  $\Delta(E)_i$  в точке  $i$  с координатой  $x_i$  при фиксированной энергии  $\sqrt{s}$ ;  $F(f(x_i, \sqrt{s}))$  — выражение  $E$  через амплитуду рассеяния  $f(x, \sqrt{s})$  в точке  $x_i$ ;  $N$  — число экспериментальных данных. Чаще всего при каждой энергии получается несколько наборов парциальных амплитуд (см. разд. 2). Предполагается, что среди них находится и искомый, «физический» набор. Для того чтобы его найти и определить энергетическую зависимость парциальных амплитуд, используют ряд методов. Самый распространенный из них — метод *минимального пути*. Рассматривают все возможные траектории парциальных амплитуд в комплексной плоскости, которые соединяют решения при разных энергиях. Минимальный путь определяется как минимум некоторого функционала, зависящего от этих кривых [18]. В качестве примера для «функции пути» можно взять следующее выражение, используемое в [19]:

$$d_{m,n} = \sum_{k=h_0}^{h_N-1} \left\{ \sum_{l,j,I} W_{l,j} |f_{l,j,I}(m, k+1) - f_{l,j,I}(n, k)|^2 \right\}^{1/2}, \quad (26)$$

где  $W_{l,j}$  — вес, равный  $j + 1/2$  или, подчеркивая эффект центростремительного барьера,  $(l + j + 1/2)/2$ . Выражение (26) представляет собой сумму расстояний для решений  $m$  и  $n$ , полученных в результате фазового анализа. Суммирование проводится по всем энергиям и по всем парциальным волнам (по  $k$  и  $l, j, I$ ). Единственное решение, а значит и единственная энергетическая зависимость устанавливается поиском минимума выражения (26) между всеми возможными сочетаниями решений  $m$  и  $n$ :

$$d_{\min} = \min_{m,n} (d_{m,n}). \quad (27)$$

Другой способ получения минимального пути основывается на самом математическом методе определения минимума функционала в процессе подгонки экспериментальных данных [10]. Для этого начинают фазовый анализ при относительно малой энергии, где существует только одно решение, затем продолжают его при следующей энергии, используя ранее полученные параметры в качестве начальных для следующей энергии. Тем самым обеспечивается то, что значения параметров для нового решения будут находиться в пространстве параметров «поблизости» от предыдущих. В этом смысле мы как бы прокладываем минимальный путь по гиперповерхности  $\chi^2$ , тогда как ранее [см. (26), (27)] мы искали минимальный путь в пространстве размерностью  $2L$ , где  $L$  — число парциальных амплитуд.

В других, более сложных методах, непрерывность по энергии параметров для разных решений обеспечивается с помощью дисперсионных соотношений для парциальных амплитуд [21, 22]

или с помощью анализа траекторий нулей амплитуды рассеяния [23, 24]. Последний способ очень эффективен для определения однозначного решения, даже когда соответствующие парциальные амплитуды мало отличаются друг от друга [25, 26].

Для второго типа фазового анализа характерно то, что с самого начала задается определенная энергетическая зависимость парциальных амплитуд (или фазовых сдвигов и параметров неупругости). Затем проводится одновременная подгонка всех существующих данных при всех энергиях. Зависящий от энергии фазовый анализ (ЗФА) хорошо работает в области низких энергий, где энергетическая зависимость парциальных амплитуд определяется несколькими членами в разложении по эффективному радиусу. Это разложение при более высоких энергиях перестает быть справедливым. Поэтому в качестве энергетической зависимости используют или какую-нибудь «нейтральную» параметризацию, или выбирают ее согласно модели. К первой группе относится полиномиальная параметризация для фаз и параметров неупругости [7, 11]. В этом случае параметры резонансов определяются не прямо из экспериментальных данных, а из последующего анализа энергетического поведения  $\delta_l(E)$  и  $\eta_l(E)$ . Другим примером является параметризация типа [12, 27]:

$$\operatorname{ctg} \delta_l = \frac{1}{k^{2l+1}} \sum_0^N \alpha_n T^n, \quad (28)$$

где  $\alpha_n$  — комплексные величины. Эта параметризация сохраняет унитарность парциальной амплитуды и имеет правильное поведение у порога.

Из-за особых свойств аппроксимантов Паде можно предложить их для параметризации энергетической зависимости парциальной  $S$ -матрицы. Это приведет к уменьшению числа свободных параметров и к более правильному учету аналитических свойств парциальных амплитуд.

Для второго метода энергетической параметризации, зависящей от модели, характерно введение членов типа Брейта — Вигнера и нерезонансного фона [28]. Используются также дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд с зависящими от энергий скачками на нефизических разрезах. Во всех этих методах предполагается, что парциальные амплитуды с большим  $l$  равны нулю. Информация о больших парциальных волнах обычно берется из какой-нибудь модели. В этом случае амплитуда рассеяния запишется так:

$$f(x, E) = [f^{(M)}(x, E) - \sum f_l^{(M)}(E) P_l(x)] + \sum_{l=0}^L f_l(E) P_l(x),$$



где  $f^{(M)}$  — вклад модели (например, модель ОВЕР для взаимодействия нуклон — нуклон). Энергетическая зависимость амплитуд с малым  $l$  определяется суммой модельного члена с некоторым феноменологическим выражением:  $f_l(E) = f_l^{(M)} + F(E)$ . Конечно, введение моделей динамики взаимодействия уменьшает субъективизм в выборе функций для энергетической зависимости, но результат фазового анализа становится зависящим от модели.

В обоих видах фазового анализа для нахождения резонансов используются одни и те же общие критерии (см. разд. 3). Параметры резонансов и нерезонансного фона определяются или непосредственно из экспериментальных данных (в случае ЗФА), или дополнительным анализом энергетического поведения парциальных амплитуд (в случае НФА). Дополнительный анализ необходим также и для того, чтобы найти параметры полюсов, характеризующие резонансы.

**Современные методы фазового анализа.** Основная задача феноменологического анализа состоит в том, чтобы, используя лишь только самые общие теоретические принципы: аналитичность, кросс-симметрию и унитарность амплитуды рассеяния, извлечь с минимальным числом параметров максимальную информацию из экспериментальных данных. Этим требованиям удовлетворяет метод оптимальных конформных отображений, в котором полиномиальное разложение очень быстро сходится [30, 31]. Отсюда и название метода — разложение с ускоренной сходимостью РУС. Для контроля и оценки ошибки, возникающей при использовании конечного числа членов в разложении амплитуды рассеяния, употребляется функция-тест Катковского [32].

Самое стабильное и быстро сходящееся полиномиальное разложение для амплитуды рассеяния получается при конформном отображении комплексной плоскости  $x = \cos \theta$  внутрь эллипса с фокусами  $\pm 1$ . При этом физическая область  $x \in (-1, +1)$  преобразуется в тот же самый отрезок  $(-1, +1)$ , а разрезы в  $x$ -плоскости отображаются на границы эллипса. Амплитуда рассеяния

$$kf(x) = \sum_{l=0}^L a_l P_l(x) \quad (29)$$

разлагается в плоскости  $z = z(x)$  таким образом:

$$kf(z(x)) = \sum_{l=0}^L a_l P_l(z(x)),$$

где всегда справедливо неравенство  $N \leq L$ . Однако оно становится более заметным, когда  $L$  большое. Парциальные амплитуды  $a_l$  в (30) определяются из выражения

$$a_l = \sum_{j=0}^N C_{l,n} C_{j,n}^{-1} a_j, \quad (30)$$

где

$$C_{l, n} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l(x) P_n(z(x)) dx.$$

Из (30) видно, что парциальные амплитуды не являются независимыми, так как высшие парциальные волны определяются линейной комбинацией низших. Этот факт в принципе помогает разрешить неоднозначность фазового анализа [8, 33].

Из-за использования аналитичности амплитуд рассеяния в методе РУС значительно улучшается сходимость. Если из других источников известны выражения для вкладов некоторых сингулярностей (например, вклады от диаграмм с обменом частиц), то можно их точно ввести в фазовый анализ типа РУС, еще более улучшая сходимость разложения. Однако в то же время усиливается зависимость фазового анализа от модели. Метод РУС был использован в фазовом анализе некоторых процессов, таких, как  $K^+p$ - [34—37],  $\pi N$ -[38, 39] или  $\pi^{\pm 4}\text{He}$ -рассеяния [33].

В следующем разделе будет показано, что удобно представить разные наборы решений через положение нулей амплитуды рассеяния в комплексной плоскости  $x = \cos \theta$ . Кроме того, изучение поведения траекторий нулей амплитуды в зависимости от энергии может дать сведения о динамике процесса [40], например, информацию о существовании резонансов [41]. Эти обстоятельства сильно стимулировали развитие анализа нулей амплитуды рассеяния. Преимущества такого метода состоят в том, что в нем не используется какая-либо энергетическая параметризация и можно быстро получить все возможные решения. Такой вид анализа был сделан для взаимодействия  $K^-p \rightarrow \Lambda \pi^0$  [25].

Другой современный метод — это фазовый анализ при фиксированной передаче импульса. В сущности, он является анализом амплитуды, при котором кроме совпадения с экспериментом и соблюдения условия унитарности амплитуда рассеяния должна удовлетворять требованию аналитичности по  $s$  и  $t$ . Название «при фиксированной передаче» появилось из-за того, что аналитичность амплитуды рассеяния контролируется с помощью дисперсионных соотношений при фиксированном  $t$  или  $u$  [42], либо при разложении амплитуды в ряд, тоже при фиксированном  $t$  или  $u$  [43—47]. В этом методе фазового анализа используются одновременно все наборы экспериментальных данных по  $s$  и  $t$  (как и в ЗФА). Поведение при высоких энергиях берется из разных теоретических моделей.

В обоих вариантах фазового анализа при фиксированной передаче импульса для соблюдения правильной аналитической структуры амплитуды, необходимо дополнять экспериментальную информацию модельно зависимыми величинами. В первом вариан-

те полная амплитуда «принуждается» быть аналитической с помощью дисперсионных соотношений при фиксированном  $t$ . Во втором варианте это происходит с помощью подобного представления только одной части полной амплитуды, той, которая аналитична в плоскости с одним разрезом и имеет правильное поведение у порога и на бесконечности. Промежуточный результат для обоих подходов один и тот же, т. е. получается некоторый конечный набор амплитуд как функций от  $s$  для разных значений  $\cos \theta$ . Следующий этап состоит в получении оценок парциальных волн. Он выполняется как в обычном фазовом анализе с наложением дополнительных связей, полученных из дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния при фиксированном  $t$ .

Зная особые свойства аппроксимантов Паде для представления аналитических функций, можно предложить их использование вместо полиномиального разложения амплитуды. При этом ожидается, что число параметров, необходимое для описания амплитуды, уменьшится.

## 2. НЕОДНОЗНАЧНОСТИ В ФАЗОВОМ АНАЛИЗЕ

**Классические неоднозначности.** Характерная особенность фазового анализа — его неоднозначность, т. е. найденный каким-либо способом набор параметров для парциальных амплитуд не является единственным. Всегда существуют некоторые преобразования, которые дают другой набор параметров, оставляя при этом без изменения рассчитываемые значения сечений рассеяния. Изучение этих преобразований и нахождение методов уменьшения числа приемлемых решений представляет собой важный вопрос фазового анализа.

Самый простой тип неоднозначности — это так называемая *тривиальная неоднозначность*:

$$f(\theta) \rightarrow -f^*(\theta) \quad (R), \tag{31}$$

т. е.  $f_l \rightarrow -f_l^*$ . Это преобразование не изменяет рассчитываемых сечений (5), меняется только знак реальной части амплитуды рассеяния вперед. Для рассеяния частиц со спином 0 и 1/2 тривиальная неоднозначность выглядит так:

$$\left. \begin{aligned} f(\theta) &\rightarrow -f^*(\theta); \\ g(\theta) &\rightarrow -g^*(\theta); \\ f_{l\pm} &\rightarrow -f_{l\pm}^*. \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

Однако, как видно из (16), это преобразование меняет знак поляризации  $P$ .

К классическим неоднозначностям для рассеяния частиц со спинами 0 и 1/2 принадлежит и преобразование Минами [48]:

$$f_{l\pm} \rightarrow f_{(l\pm)^\mp} \quad (M) \quad (33)$$

или

$$\begin{aligned} f(\theta) &\rightarrow f(\theta) \cos \theta - g(\theta) \sin \theta; \\ g(\theta) &\rightarrow -f(\theta) \sin \theta - g(\theta) \cos \theta, \end{aligned}$$

которое меняет только знак поляризации  $P$ . При этом параметры поляризации  $\beta$  и  $\gamma$  из (16) становятся линейными комбинациями их начальных значений. В отличие от преобразований (R), (M) или их комбинаций, которые сохраняют унитарность парциальных амплитуд, преобразования Ферми — Янга (или неоднозначность Янга) [49] может приводить к неунитарным парциальным амплитудам:

$$f_{l+} \rightarrow \frac{1}{2l+1} [f_{l+} + 2lf_{l-}]; \quad f_{l-} \rightarrow \frac{1}{2l+1} [2(l+1)f_{l+} - f_{l-}] \quad (Y) \quad (34)$$

или

$$f(\theta) \rightarrow f(\theta); \quad g(\theta) \rightarrow -g(\theta).$$

Преобразование (Y) оставляет неизменными дифференциальное сечение, параметр  $\gamma$  и  $\text{Re } f(0)$ , меняя только знак поляризации и параметра  $\beta$ . Мало вероятно, что преобразование (Y) даст унитарные решения в области энергий до порога неупругих процессов.

**Неоднозначности в области энергий до порога неупругих процессов.** Первый пример нетривиальной неоднозначности в этой области энергий, который инициировал интенсивное изучение проблем неоднозначностей в фазовом анализе, был дан Кричтоном в 1966 г. [50]. Чтобы обсудить необходимые и достаточные условия существования и единственности амплитуды рассеяния, надо использовать соотношения унитарности в интегральной форме. В чисто упругом случае ( $\eta_l = 1$ ) имеем

$$\text{Im } F(x_{12}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_3 F^*(x_{13}) F(x_{23}), \quad (35)$$

где  $F(x_{12})$  — амплитуда рассеяния на направления  $1$  в направлении  $2$ . Модуль амплитуды рассеяния определяется из дифференциального сечения, тогда, используя (35) для

$$F(x) = |F(x)| \exp(i\varphi(x)), \quad (36)$$

получаем нелинейное интегральное уравнение для фазы амплитуды

$$\begin{aligned} \sin \varphi(x_{12}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \int d\Omega_3 |F(x_{13})| |F(x_{23})| \times \right. \\ \left. \times \cos [\varphi(x_{13}) - \varphi(x_{23})] / |F(x_{12})| \right]. \quad (37) \end{aligned}$$

Достаточное условие существования решения этого уравнения было определено в работе [51]

$$\sin \mu = \max \int \frac{d\Omega_3}{4\pi} \frac{|F(x_{13})| |F(x_{32})|}{|F(x_{12})|} < 1, \quad (38)$$

где максимум берется по всем возможным значениям  $x_{12} = \cos \theta_{12}$ . Из существования решения для  $\varphi(x)$  следует существование унитарного решения фазового анализа в упругой области.

Единственность решения обеспечивается более сильным условием

$$\sin \mu < 0,79. \quad (39)$$

Вследствие этого фазовый анализ упругого рассеяния имеет только одно единственное унитарное решение для амплитуды рассеяния, если выполняется условие (39). Однако в противоположном случае нельзя ничего сказать о неоднозначности решения. Если  $\sin \mu < 1$ , то существует лишь одно решение [52].

В частности, из условия (38) автоматически следует ограничение на значения фазовых сдвигов для всех парциальных амплитуд, кроме амплитуды в  $S$ -волне [52, 53], т. е.  $|\delta_l| < \pi/6$ . Это приводит к тому, что условие (38) никогда не выполняется для резонансных амплитуд, у которых  $l \neq 0$ , т. е. надо быть осторожным с упругими резонансами.

Для амплитуд, которые отличаются на один полином, в работе [54] было показано, что существует условие однозначности фазового анализа, фундаментально отличающееся от (38) или (39). Оно состоит в том, что если  $k^2 \sigma_{\text{tot}}/4\pi < 1,388$ , то амплитуду рассеяния можно определить однозначно.

Если амплитуды рассеяния имеют нормальное поведение у порога, то при достаточно близких к порогу энергиях, условие (38) будет всегда выполнено. Поскольку вблизи порога  $\delta_l \sim a_l k^{2l+1}$ , с уверенностью можно считать, что существует область, в которой амплитуда  $S$ -волны доминирует и можно пренебречь амплитудами с  $l \neq 0$ . Тогда  $\sin \mu < 1$  и решение единственно. Этот факт имеет важные следствия для фазового анализа. Поскольку амплитуда рассеяния — аналитическая функция от энергии, единственное решение у порога можно продолжить на всю область энергий. Значит, существует единственное унитарное решение для фазового анализа — так называемое *физическое решение* во всей энергетической области.

**Дискретные неоднозначности.** Если записать амплитуду рассеяния в виде [55]

$$F(x) = F(1) \prod_{i=1}^L \frac{x - x_i}{1 - x_i}, \quad x = \cos \theta, \quad (40)$$

где  $x_i$  — нули амплитуды, то можно сразу видеть, что при замене  $x_i$  на  $x_i^*$  дифференциальное и полное сечения остаются теми же самыми:

$$\left. \begin{aligned} k^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |F(1)|^2 \prod \frac{(x-x_i)(x-x_i^*)}{(1-x_i)(1-x_i^*)}; \\ \frac{k^2}{4\pi} \sigma_{\text{tot}} &= \text{Im } F(1). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Таким образом, можно получить  $2L$  решений, не считая тривиальной неоднозначности. Эти же решения получаются, если проектировать на парциальные волны амплитуду рассеяния со всеми возможными комбинациями  $x_i \leftrightarrow x_i^*$ . Из всех  $2L$  решений можно исключить те, которые не удовлетворяют условию унитарности. В неупругой области, т. е. там, где открыты неупругие каналы, невозможно заранее определить число унитарных решений.

Анализ дискретных неоднозначностей для рассеяния частиц со спинами 0 и  $1/2$  был выполнен Герштейном [55] и Барреле [23]. В формализме Герштейна вводится переменная  $t = \text{tg}(\theta/2)$ , причем дифференциальное сечение и поляризацию можно выразить через функцию  $G(t)$ :

$$G(t) = \frac{f(0)}{[1+t^2]^L} \prod_{i=1}^{2L} \frac{t_i-t}{t_i}, \quad (42)$$

где  $t_i$  — нули функции  $G(t)$  в комплексной плоскости  $\text{tg}(\theta/2)$ . Итак,

$$\left. \begin{aligned} d\sigma/d\Omega &= (|G(t)|^2 + |G(-t)|^2)/2; \\ P d\sigma/d\Omega &= (|G(t)|^2 - |G(-t)|^2)/2. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Подобно случаю рассеяния бесспиновых частиц, замена одного или нескольких нулей  $t_i$  их комплексно-сопряженными значениями  $t_i^*$  в (42) приведет к различным амплитудам, оставляя при этом неизменными дифференциальное, полное сечения и поляризацию.

Классические неоднозначности получаются при замене  $G(t) \rightarrow -G^*(-t)$  — тривиальная неоднозначность (R);  $G(t) \rightarrow \frac{1-it}{1+it} G(-t)$  — неоднозначность Минами (M). Используя этот формализм, Берендс [56] проверял единственность решения в фазовом анализе упругого протон-нуклонного рассеяния. Конечный вывод состоит в том, что такое решение существует лишь до  $\sqrt{s} = 2,025$  ГэВ.

В формализме Барреле используется конформное отображение комплексной плоскости  $x = \cos \theta$  в новую плоскость  $z$ :

$$x \rightarrow z = x + (x^2 - 1)^{1/2}, \quad (44)$$

которое переводит эллипс Лемана — Мартина — эллипс аналитичности амплитуды рассеяния в кольцо  $r(z_0)$ , где  $z_0$  — образ ближайшей особой точки в плоскости  $x$ . Амплитуды  $f(x)$  и  $g(x) = (1 - x^2)^{1/2} \tilde{g}(x)$  аналитичны в комплексной плоскости  $x$ , т. е. в эллипсе, определенном положением ближайшей особой точки и имеющем фокусы  $\pm 1$ . Поэтому функция

$$\tilde{F}(x) = f(x) + (x^2 - 1)^{1/2} \tilde{g}(x),$$

тоже аналитическая в данной области с разрезом между  $x = 1$  и  $x = -1$ . Выше и ниже этого разреза функция  $\tilde{F}(x)$  имеет значения  $f(x) \pm ig(x)$ . Соотношение (44) преобразует физическую область  $(-1 \leq x \leq 1)$  в единичный круг  $r(1)$ , следовательно, в новой плоскости верхняя граница разреза  $-1 \leq x \leq 1$  переходит в  $z = \exp(i\theta)$  с  $0 \leq \theta \leq \pi$ , а нижняя граница — в  $z = \exp(i\theta)$  с  $-\pi \leq \theta \leq 0$ . Значит, функция аналитична в кольце  $r(z_0)$ . Функция  $\varphi(z) = F(z) F^*(1/z^*)$  тоже аналитична в  $r(z_0)$ . В единичном круге она имеет следующие значения:

$$\xi(\exp[+i\theta]) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(x) [1 \mp P(x)]; \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (45)$$

Как и в методе Герштейна, получается компактное представление физических наблюдаемых при помощи единственной функции. Однако у этой функции более простые аналитические свойства и ее разложение по парциальным амплитудам легко найти:

$$kF(z) = \sum_l \left( j_{l\pm} + \frac{1}{2} \right) F_{l\pm} P_{l\pm}(z), \quad j_{l\pm} = l \pm 1/2,$$

где  $P_{l\pm}(z)$  называются полиномами Барреле:

$$\left. \begin{aligned} P_{l\pm}(z) &= P_l(z) \pm \frac{2(z^2 - 1)^{1/2}}{2l + 1 \pm 1} P'_l(z); \\ Q_{l\pm}(z) &= Q_l(z) \mp \frac{2(z^2 - 1)^{1/2}}{2l + 1 \pm 1} Q'_l(z); \\ F_{l\pm} &= \frac{1}{8\pi i k} \int dz (1 - z^{-2}) Q_{l\pm} F(z). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Обобщенная неоднозначность Минами получается заменой

$$F(z) \rightarrow \frac{1}{z} F^*(1/z^*), \quad (M)$$

а неоднозначность Янга и все комбинации между (M), (Y) и (R) возникают при замене  $F(z) \rightarrow z^n F(z)$ , где  $n = \pm 1, \pm 2$ . Для анализа дискретных неоднозначностей удобно представить амплитуду  $F(z)$  в виде

$$F(z) = \frac{F(1)}{z^L} \prod_{z_i}^N \frac{z - z_i}{1 - z_i}, \quad (47)$$

где  $N = L + j_{\text{макс}} - 1/2$ . Как показано в [57—60], при рассеянии бесспиновых частиц ниже порога фазовый анализ имеет максимум два унитарных дискретных решения. При энергиях выше порога неупругого канала ограничения, налагаемые условием унитарности, становятся более слабыми, так как вместо строгого равенства  $\eta_l = 1$ , в этой области энергий имеем лишь неравенство  $0 \leq \eta_l < 1$ . Из-за этого возникает так называемая непрерывная неоднозначность. Оказывается, что число унитарных решений, получаемых при комплексном сопряжении нулей амплитуды, растет с увеличением числа парциальных волн. Такое поведение характерно, например, для упругого рассеяния  ${}^4\text{He} - {}^4\text{He}$ ,  ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$  и  $\pi^4\text{He}$  [62].

**Непрерывная неоднозначность.** Непрерывную неоднозначность фазового анализа можно получить преобразованием

$$F'(x) \rightarrow F(x) \exp [i\varphi(x)], \quad (48)$$

где  $\varphi(x)$  — зависящая от угла фазы. Если  $\varphi(x=1) = 0$ , то преобразование (48) оставляет неизменным дифференциальное и полное сечения. При этом возможно бесконечное число разложений амплитуды рассеяния по парциальным волнам, которое возникает из-за бесконечного числа возможных форм угловой зависимости фазы  $\varphi(x)$ . Естественное дополнительное условие — выполнение унитарности при любом возможном преобразовании (48). Следовательно, непрерывная неоднозначность соответствует маленькой зоне (или зонам) на диаграмме Аргана, для которой каждая точка связана с определенной точкой подобной зоны на другой диаграмме Аргана. Однако из соотношения (48) ясно, что непрерывная неоднозначность появляется только в том случае, когда в разложении амплитуды рассеяния по парциальным волнам берется бесконечное число волн. Так как парциальные амплитуды экспоненциально падают с ростом  $l$ , зоны непрерывной неоднозначности уменьшаются, стремясь к точке, когда  $l$  стремится к бесконечности. Для больших значений  $l$  неопределенность в парциальных амплитудах становится значительной, поэтому в практическом фазовом анализе не имеет смысла прямое определение амплитуд из экспериментальных данных.

Первая работа по изучению непрерывных неоднозначностей была [63]. В дальнейшем сильно развивали это направление и были проанализированы разные конкретные случаи [59, 61, 64—66].

**Методы решения проблемы неоднозначностей.** Цель фазового анализа — определение амплитуды рассеяния, которая описывала бы экспериментальные данные и удовлетворяла бы общим условиям лоренц-инвариантности, унитарности и аналитичности. Другими словами, это означает, что необходимо найти функции от двух переменных  $s$  и  $t$ , которые можно разложить по унитарным парциальным амплитудам. Однозначная амплитуда рассеяния



позволяет правильно определить параметры резонансов. Это является одним из важных результатов фазового анализа. Известно, что если аналитическая функция задана в некотором интервале области аналитичности, то она известна во всей области ее определения. Это свойство аналитических функций позволяет найти одно-единственное решение для амплитуды рассеяния, пользуясь тем, что вблизи упругого порога существует единственное решение. Аналитическое продолжение этого решения из области около порога, где условие Мартина  $\sin \mu < 0,79$  может быть выполнено, обеспечивает существование так называемого физического решения при всех энергиях.

Из этих соображений в фазовом анализе возникает идея непрерывного или гладкого продолжения по энергии парциальных амплитуд, как метода получения единственного решения. Из множества найденных при одной энергии решений самое близкое к физическому будет то, которое вместе с соответствующими решениями при других энергиях определяет гладкую функцию от энергии, т. е. обеспечивает минимальный путь между энергиями. Кроме этого метода, характерного для НФА, используется и метод специфических параметризаций парциальных амплитуд (ЗФА), а также разные варианты дисперсионных соотношений, применяемых в обоих типах фазового анализа.

Для уменьшения числа неоднозначностей полезно использовать метод РУС или аппроксиманты Паде, поскольку они чувствительны к аналитической структуре амплитуды рассеяния. Можно также для этой цели брать высшие парциальные волны из модели.

В некотором смысле, это — косвенное следствие теоремы Буркхарта [67] об однозначности фазового анализа. Теорема звучит так: знание дифференциального сечения в физической области  $-1 \leq x \leq 1$  и аналитической структуры амплитуды рассеяния недостаточно для нахождения единственного представления амплитуды. Однако, определяя скачок амплитуды на конечном сегменте разреза комплексной плоскости  $x$ , можно добиться единственности. Но этот результат практически трудно использовать для получения однозначного решения.

### 3. КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕЗОНАНСА

**Резонансные состояния.** Резонанс представляет собой одно из самых интересных явлений в экспериментах по рассеянию. В качестве первого указания на образование резонансного состояния двух столкнувшихся частиц (ядер или элементарных частиц) служит появление максимума в сечении взаимодействия. Положение и ширина пика в сечении связана с массой и временем жизни резонанса. Подобно связанным и виртуальным состояниям, резо-

нансы связаны с нулями функции Йоста. Напишем решение уравнения Шредингера для нуля функции Йоста ( $k_R = k_0 + ik_1$ ):  $\Psi(r, t) = \Phi(r) \exp(-iEt) \sim \exp(ik_0 r) \exp(-k_1 r) \exp(iE_R t)$ .

Получим выражение для числа частиц, выходящих из сферы радиуса  $r = A$  в единицу времени:

$$N \sim \exp(2k_1 A) \exp(2k_0 k_1 t).$$

Это выражение будет описывать некоторый распад, если нуль функции Йоста находится в отрицательной полуплоскости ( $k_1 < 0$  и  $k_0 > 0$  потому, что изучаются процессы рассеяния). В области вокруг этой точки (для не очень больших  $k_1$ )  $f(k)$  можно написать таким образом:

$$f(k) \approx \left( \frac{df}{dk} \right)_{k_R} (k - k_R),$$

откуда следует, что фаза функции Йоста, т. е. обычный фазовый сдвиг в фазовом анализе, определяется таким выражением:

$$\delta(k) \approx -\arg(df/dk)_R - \arg(k - k_R) \equiv \delta_F + \delta_R.$$

Здесь  $\delta_F$  — фоновый фазовый сдвиг;  $\delta_R$  — резонансная фаза. Имея ввиду выражение для  $S$ -матрицы через функции Йоста:

$$S(k) = f(-k)/f(k)$$

и аналитические свойства функции Йоста (в данном случае свойство  $f(-k) = f^*(k)$ ), получаем, что

$$S(k) = S_F(k) \frac{k - k_R^*}{k - k_R} = S_F S_R. \quad (49)$$

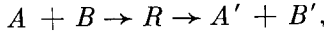
Отсюда видно, что каждому полюсу  $S$ -матрицы в нижней полуплоскости ( $\text{Im } k < 0$ ) соответствует нуль в верхней полуплоскости, расположенный симметрично данному полюсу. Это явление называется *унитарной униполярной аппроксимацией резонанса*. Оно почти полностью определяет поведение  $S$ -матрицы, когда  $k_0$  достаточно велико или, иными словами, когда  $\text{Im } k_R = k_1 \ll \ll 1/r_0$ , где  $r$  — радиус действия ядерных сил.

Далее, из свойства симметричности матрицы  $S$ :  $S(k) S^*(k^*) = 1$ ;  $S(k) S(-k) = 1$ , следует, что  $S(k) = S^*(-k^*) \sim (k + k_R)/(k + k_R^*)$ . Это соответствует паре нуль — полюс при отрицательных значениях импульса (при  $k_0 < 0$ ), значит, далеко от физической области.

Обе пары полюс — нуль вместе с фоном дают так называемую биполярную аппроксимацию резонанса в комплексной плоскости  $k$ :

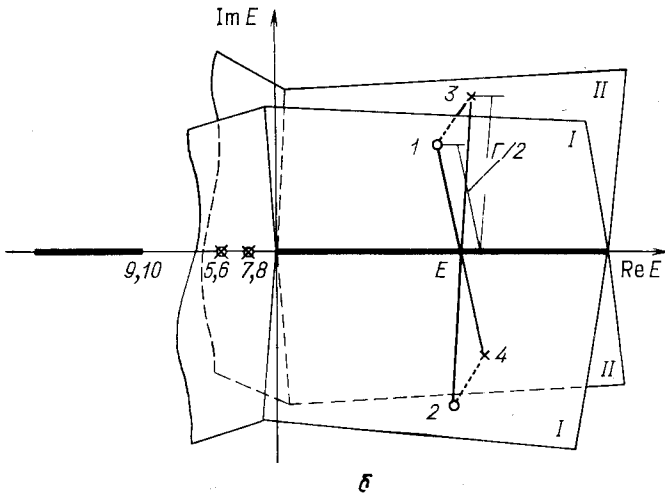
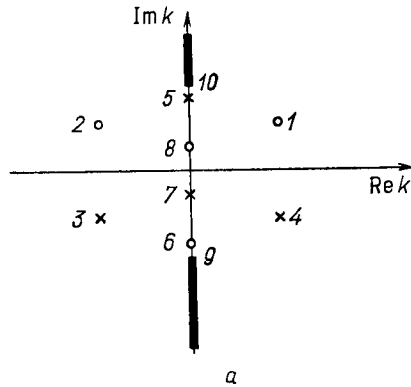
$$S(k) = S_F(k) \frac{(k - k_R^*)(k + k_R)}{(k - k_R)(k + k_R^*)} = S_F S_R. \quad (50)$$

В реакциях формирования, т. е.



где  $A, B, A', B'$  — элементарные частицы или ядра;  $R$  — резонанс (или составное ядро), его масса определяется полной энергией в системе центра масс. Из-за этого парциальные амплитуды или элементы  $S$ -матрицы обычно выражаются в зависимости от

Рис. 1. Схематическое представление области аналитичности матриц  $S_l(k)$  и  $S_l(E)$ . Через I и II обозначены листы Римана, на них показаны нули (O) и полюсы (X). Положения 1-4 соответствуют резонансному состоянию; 5 и 6 — связанному; 7 и 8 — виртуальному; 9 и 10 — началу динамического разреза



энергии. Вследствие связи между  $E$  и  $k$  получается, что  $S$ -матрица в  $E$ -плоскости имеет точку ветвления типа корня при  $E = 0$ . Каждому резонансу соответствует пара нуль — полюс  $S$ -матрицы в комплексной плоскости  $k$  или две пары нуль — полюс в плоскости  $E$ . В последнем случае нули будут на первом листе, а полюсы — на втором. Связанным состояниям соответствуют полюсы

на первом листе и нули на втором, обе точки расположены на реальной оси ниже порога упругого канала. На рис. 1, *a* и *b* показаны особенности  $S$ -матрицы в комплексных плоскостях  $E$  и  $k$ .

Полярное приближение  $S$ -матрицы в комплексной плоскости  $E$  запишется в виде

$$S(E) = (E_R^* - E)/(E_R - E) = (E_0 - E + i\Gamma/2)/(E_0 - E - i\Gamma/2) \quad (51)$$

(здесь для простоты взят нулевой фон  $\delta_F = 0$ ). В отличие от комплексной плоскости  $k$  в комплексной плоскости  $E$  можно писать только униполярное приближение.

Реальная часть положения полюса  $E_0$  связана с массой резонанса и представляет полную энергию в с. ц. м., а полуширина  $\Gamma/2$  соответствует расстоянию полюса до реальной оси. Такая форма  $S$ -матрицы называется *формой Брейта — Вигнера*.

Следствие приближения Брейта — Вигнера. Парциальная амплитуда в приближении Брейта — Вигнера [68] пишется в виде

$$f_l = (\Gamma/2)/(E_0 - E - i\Gamma/2) = 1/(\text{ctg } \delta - i). \quad (52)$$

Парциальное сечение, соответствующее резонансной парциальной волне имеет четко выраженный максимум при  $E = E_0$ :

$$\sigma_{lR} = \frac{4\pi}{k^2} \frac{\Gamma^2/4}{(E_0 - E)^2 + \Gamma^2/4} (2l_R + 1). \quad (53)$$

В том случае, когда изучается столкновение между двумя частицами при энергиях, близких к резонансной, а остальные парциальные волны относительно малы, значительный вклад в полное сечение дает только резонансная парциальная волна. Следовательно, наблюдается четкий максимум и в экспериментальном сечении. Этот максимум приблизительно симметричен и, как уже было сказано, является первым признаком существования резонанса.

Энергетическая зависимость реальной и мнимой частей амплитуды для чистого бесфонового, упругого резонанса характеризуется нулем у  $\text{Re } f_l$  и максимумом  $\text{Im } f_l$  при энергии, соответствующей массе резонанса:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } f_l &= \frac{\Gamma/2}{(E_0 - E)^2 + \Gamma^2/4} (E_0 - E); \\ \text{Im } f_l &= \frac{\Gamma/2}{(E_0 - E)^2 + \Gamma^2/4}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Обозначим зависящий от энергии фактор из (52)  $\varepsilon = \text{ctg } \delta$ . Сразу видно, что парциальная амплитуда в комплексной плоскости, т. е. на диаграмме Аргана, описывает круг с центром в  $(0, 1/2)$

и радиусом  $1/2$ , так называемый *унитарный круг* (рис. 2):

$$x^2 + (y^2 - 1/2)^2 = 1/4,$$

где  $x = \text{Re } f_l = \varepsilon/(\varepsilon^2 + 1)$ ;  $y = \text{Im } f_l = 1/(\varepsilon^2 + 1)$ .

Для резонансной амплитуды фазовый сдвиг, соответствующий орбитальному моменту  $l_R$ :

$$\delta_{l_R}(k) = \text{arctg} \{ \Gamma/[2(E_0 - E)] \}. \quad (55)$$

При резонансе, когда  $E = E_0$ , фаза проходит через  $\pi/2$ , а эффективное сечение достигает своего максимального значения. Фаза

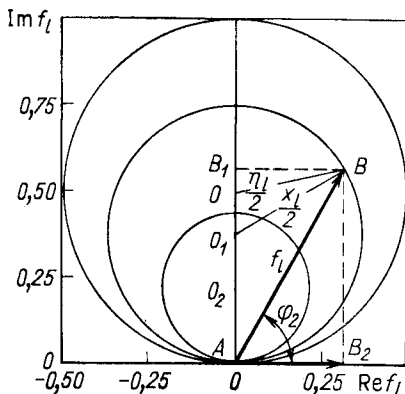


Рис. 2. Диаграмма Аргана для парциальной амплитуды упругого рассеяния в присутствии открытых неупругих каналов и в предположении о постоянной парциальной упругости  $x_l = \text{const}$

$\delta_l = 45$  и  $135^\circ$  получается при энергиях  $E = E_0 \mp \Gamma/2$ , где полное сечение  $\text{Im } f_l$  достигает половины максимума, а  $\text{Re } f_l$  принимает максимальное и минимальное значение, позволяемое унитарным кругом.

Другим, используемым в фазовом анализе тестом для определения резонансов, является изучение скорости изменения парциальных амплитуд на диаграмме Аргана.

Пусть резонанс по-прежнему описывается простой формой типа Брейта — Вигнера. Тогда скорость изменения амплитуды, т. е. производная по энергии

$$v = |df_l(k)/d\varepsilon| = 1/(\varepsilon^2 + 1)$$

имеет ясный максимум при  $E = E_0$ . Практически в фазовом анализе скорость изменения амплитуды в точке  $i$  диаграммы Аргана вычисляется с помощью выражения

$$v(i) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{|f(i+1) - f(i)|}{E_{i+1} - E_i} + \frac{|f(i) - f(i-1)|}{E_i - E_{i-1}} \right\}.$$

Непосредственное применение описанных выше тестов позволяет легко определить параметры резонанса только в очень редком

случае чисто упругих и бесфоновых резонансов. Таким является знаменитый резонанс  $\Delta_{33}$  в упругом рассеянии  $p\bar{p}$ , показанный на рис. 3. В общем случае следует учитывать влияние распадов в другие каналы и нерезонансный фон.

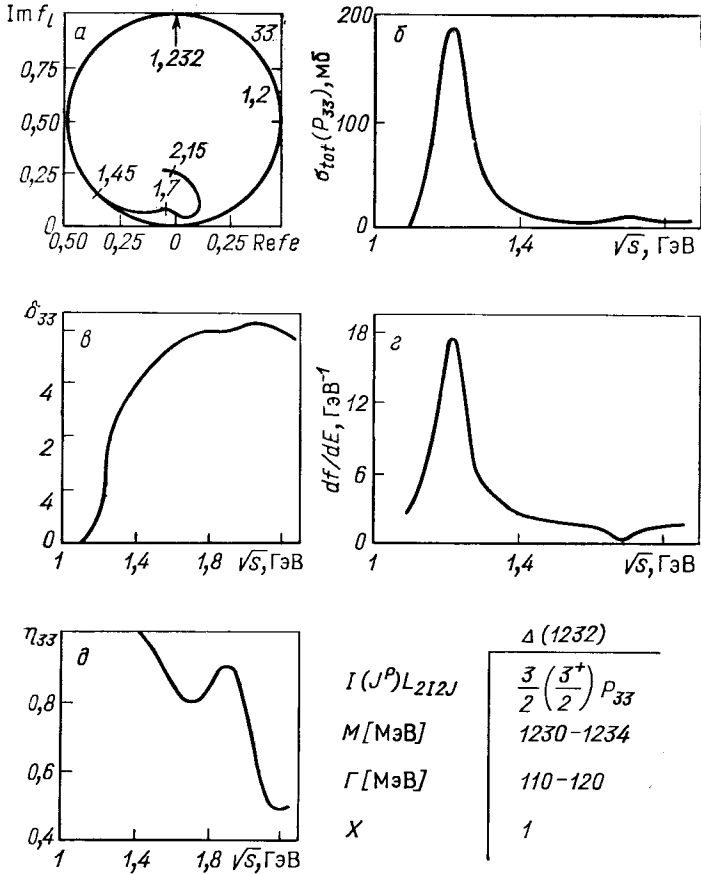


Рис. 3. Парциальная амплитуда  $P_{33}$  для упругого рассеяния в области первого барионного резонанса  $\Delta_{33}$  (1232):

$a$  — диаграмма Аргана;  $b$  — вклад парциальной амплитуды  $P_{33}$  в полное сечение;  $c$  — фазового сдвига;  $d$  — энергетическая зависимость скорости изменения парциальной амплитуды;  $e$  — параметра неупругости  $\eta_{33}$ .

**Нерезонансное рассеяние в неупругом случае.** В неупругом случае, т. е. при энергиях выше порога неупругого канала, образующееся промежуточное состояние может распадаться или в первоначальное состояние, или в какой-нибудь из открытых каналов. Отношение вероятностей распада в разные конечные состояния —

характерные свойства данного резонанса. Например, резонанс  $\Lambda$  (1520) [69], наблюдаемый в  $K^-p$ -рассеянии, с вероятностью 45% распадается в упругий канал  $K^-p$ , с вероятностью 45% — в канал  $\pi\Sigma$  и 10% распадов идет в  $\pi\Lambda$ .

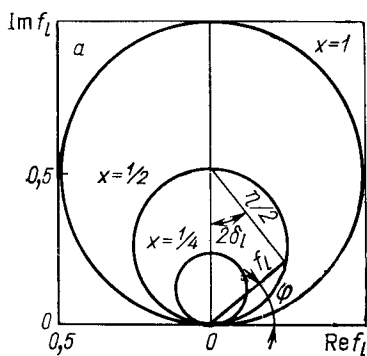
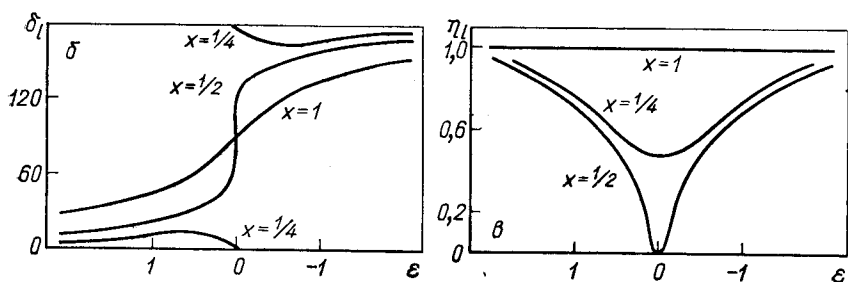


Рис. 4. Диаграмма Аргана для частичной амплитуды (а), энергетическая зависимость фазового сдвига (б) и энергетическая зависимость неупругости для трех значений частичных упругостей  $x$  (в)



Если пренебречь влиянием фона, то из постоянства отношений вероятностей распадов в различные каналы следует, что упругости  $x_l = \sigma_{el, l} / \sigma_{tot, l}$  не зависят от энергии. Этот факт наблюдается экспериментально. Кривые постоянной упругости в диаграммах Аргана — круги диаметром  $x_l$ :

$$\text{Re } f_l^2 + (\text{Im } f_l - x_l/2)^2 = x_l^2/4. \tag{56}$$

Эти круги касаются реальной оси в начале координат. Подобно упругому случаю при резонансной энергии  $E_R$  фазовый сдвиг проходит через  $\pi/2$  для  $x_l > 1/2$  или 0 для  $x_l < 1/2$ . Энергетическая зависимость параметра имеет минимум при  $E = E_R$ . Связь между  $\eta$ ,  $\delta$  и частичной амплитудой на диаграмме Аргана показана на рис. 4.

Для неупругого резонансного рассеяния вводим полную ширину  $\Gamma$  и частичную ширину, соответствующие каждому каналу распада. Ясно, что вероятность распада в каждый канал пропорциональна отношению между частичными и полной шириной

резонанса. Упругая амплитуда в области открытых неупругих каналов пропорциональна  $\Gamma_{el}/\Gamma$ . Следовательно, резонансную амплитуду можно записать так:

$$f_l = (\Gamma_{el}/\Gamma)/(\varepsilon - i) = 0,5\Gamma_{el}/(E_0 - E - i0,5\Gamma), \quad (57)$$

где  $\Gamma = \Gamma_{el} + \Gamma_r$ .

Как и для упругого рассеяния, амплитуду неупругого канала можно написать в виде

$$f_{r,l} = \eta_{r,l} \exp(2i\delta_{r,l})/(2i), \quad (58)$$

где  $\eta_{r,l}^2 + \eta_{el,l}^2 = 1$ .

Центр унитарности круга для амплитуды неупругого рассеяния находится в начале координат, а его радиус равен  $1/2$  ( $\eta_{r,l} = 1$ ). Резонансная амплитуда неупругого канала

$$f_{r,l} = \frac{\sqrt{\Gamma_{el}\Gamma_r/\Gamma^2}}{\varepsilon - i} = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\varepsilon - i} = \frac{0,5\sqrt{\Gamma_{el}\Gamma_r}}{E_0 - E - i0,5\Gamma}, \quad (59)$$

где  $x_r = \Gamma_r/\Gamma = 1 - x$ .

Скорость изменения парциальной амплитуды максимальна вблизи резонанса:  $v_{\max} |_{E=E_R} = 2\sqrt{xx_r}/\Gamma$ . Хорошим приближением для резонанса при слабом фоне является постоянство вероятностей распада  $x_{r,l} \approx \text{const}$ . В этом случае для траектории резонансной амплитуды получается такой же круг, как и в (56):

$$\text{Re } f_{r,l}^2 + (\text{Im } f_{r,l} - \sqrt{x_l x_{r,l}/2})^2 = x_l x_{r,l}/4. \quad (60)$$

С учетом корня круг (60) можно расположить или в верхней, или в нижней полуплоскости. Знак  $\sqrt{xx_r}$  зависит от квантовых чисел налетающей частицы и резонанса (см., например, общепринятую конвенцию, установленную Леви — Сетти [71] для  $\Lambda$ - и  $\Sigma$ -резонансов, которые появляются в неупругих каналах  $K^-p \rightarrow \Sigma\pi$  и  $K^-p \rightarrow \Lambda\pi$ ). Примеры таких неупругих резонансов показаны на рис. 5, а и б. Используя выражение для упругих и неупругих парциальных амплитуд, можно получить формулы Брейта — Вигнера для упругих, неупругих и полных сечений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{el} &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) |f_{el}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{x^2}{\varepsilon^2+1} = \\ &= \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma_{el}^2}{(E_0 - E)^2 + \Gamma^2/4}; \\ \sigma_p &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) |f_r|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{x(1-x)}{\varepsilon^2+1} = \\ &= \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma_{el}\Gamma_r}{(E_0 - E)^2 + \Gamma^2/4}; \\ \sigma_{\text{tot}} &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) (|f_{el}|^2 + |f_r|^2) = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{x}{\varepsilon^2+1} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_{el}\Gamma}{(E_0 - E)^2 + \Gamma^2/4}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$



Значения этих сечений относятся друг к другу как  $x^2 : x(1-x) : x$ . Поскольку  $x < 1$ , то резонансный максимум в сечении упругого рассеяния менее выражен, чем максимум в полном сечении. Все соотношения для амплитуды неупругого

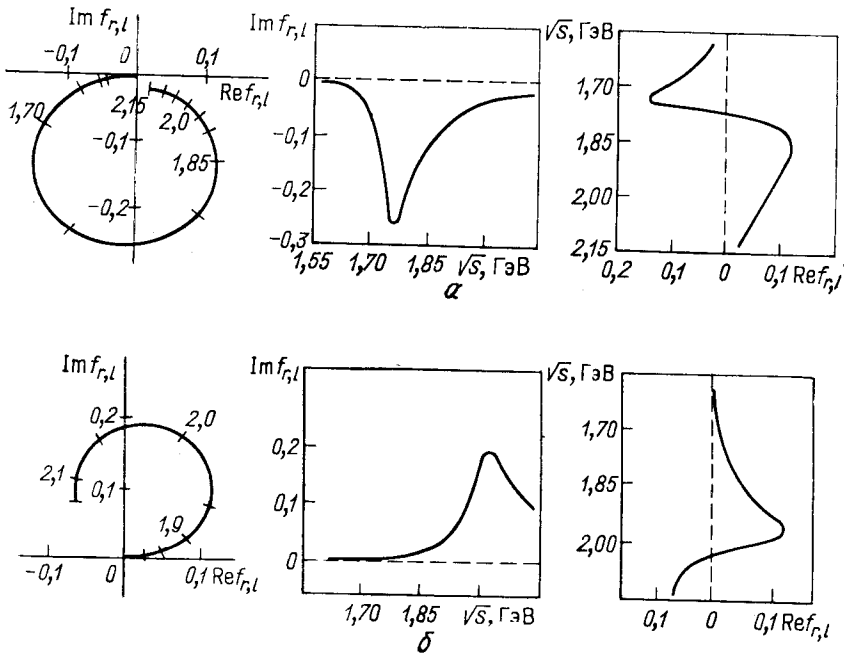


Рис. 5. Диаграмма Аргана для частичной амплитуды неупругого рассеяния  $\bar{K}N \rightarrow \Lambda\pi$ :

a —  $l = 2$  (D15); б —  $l = 3$  (F17)

рассеяния, полученные выше, справедливы и для нескольких каналов взаимодействия, когда каждый канал описывается своей амплитудой:

$$\begin{aligned}
 a + b &\rightarrow a + b & f_{e1}, \\
 a + b &\rightarrow c + d & f_{r(1)}, \\
 a + b &\rightarrow e + f & f_{r(2)}, \\
 &\dots & \dots
 \end{aligned}$$

Пусть  $\alpha$  — первоначальное;  $\beta, \gamma$  — конечные состояния, тогда полная ширина  $\Gamma = \Gamma_\alpha + \Gamma_\beta + \Gamma_\gamma + \dots$ , а упругость каждого канала  $x_i = \Gamma_i/\Gamma$ , где  $i = \alpha, \beta, \gamma \dots$

В качестве примера рассмотрим резонанс  $\Sigma$  (2030) (см. рис. 5,6)

$$K^-p \rightarrow \Sigma(2030) \rightarrow \begin{cases} K^-p & x_{el} = 0,2; & \Gamma = 160 \text{ МэВ}; \\ \pi\Lambda & \sqrt{x_{el}x_{\Lambda}} = 0,2; & \Gamma_{\Lambda}/\Gamma = 0,2; \\ \pi\Sigma & \sqrt{x_{el}x_{\Sigma}} = -0,1; & \Gamma_{\Sigma}/\Gamma = 0,04. \end{cases}$$

Важным свойством приближения Брейта — Вигнера для амплитуды резонансного рассеяния является то, что на диаграмме Аргана траектория амплитуды с увеличением энергии описывает круг против часовой стрелки. Это свойство названо условием Вигнера, оно вытекает из принципа причинности и приводит к тому, что амплитуда имеет форму  $f \sim 1/(E_0 - E - i\Gamma/2)$ . При этом исключается комплексно-сопряженная амплитуда  $f^* \sim 1/(E_0 - E + i\Gamma/2)$ , хотя она давала бы тоже самое сечение, но проходила бы на диаграмме Аргана по часовой стрелке.

В [72] доказано, что запаздывание рассеянной волны относительно падающего волнового пакета приводит к тому, что амплитуда рассеяния будет иметь форму Брейта — Вигнера. Однако

Таблица критериев существования «чистых» резонансов

Характеристика	Упругий канал $ab \rightarrow ab$	Неупругий канал $ab \rightarrow cd$
Унитарность	$0 \leq \eta_{el} \leq 1$ $0 \leq x_{el} \leq 1$	$0 \leq \eta_r \leq 1$ $0 \leq x_{el}x_r \leq 0,25$
При резонансе	$\delta_{el} = \pi/2$ для $x_{el} > 0,5$ $\delta_{el} = 0$ для $x_{el} < 0,5$	$\delta_r = \pi/2$
При резонансе	Минимум $\eta_{el} =  2 - 2x_{el} $	Максимум $\eta_r = 2\sqrt{x_{el}x_r}$
Условие Вигнера	Движение против часовой стрелки	
Скорость изменения амплитуды на диаграмме Аргана	Максимальна при резонансе	

связь между максимумом времени задержки и существованием резонанса, определенным через полюс  $S$ -матрицы при  $E = E_0 - i\Gamma/2$ , неоднозначна. Доказательство этого приведено в [73, 74], где показано, что можно построить несколько моделей  $S$ -матрицы, имеющих все общие свойства, т. е. унитарность, аналитичность, правильное поведение у порога и т. д., для которых фазовый сдвиг  $\delta$  проходит через  $\pi/2 + n\pi$  при  $E = E_0$ , но без одновремен-

ного появления полюса  $S$ -матрицы на втором энергетическом листе. В то же время некоторые пороговые эффекты могут вызвать резкое возрастание фазового сдвига в зависимости от энергии. Однако причиной этого поведения не является существование резонансов.

Важный вывод из сказанного выше состоит в том, что относительно узкие резонансы приводят к максимумам времени задержки. Но обратное утверждение не всегда верно. Значит, условие Вигнера является только необходимым, но недостаточным критерием существования резонанса.

Некоторые характеристики парциальных амплитуд для «чистых» резонансов даны в таблице. В фазовом анализе эти характеристики играют роль указателей на существование резонансов.

#### 4. ВЛИЯНИЕ ФОНА НА РЕЗОНАНСНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПАРЦИАЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКУЮ ЗАВИСИМОСТЬ ШИРИНЫ РЕЗОНАНСА

**Нерезонансный фон.** Задача определения резонансных состояний была поставлена одновременно с появлением модели составного ядра для описания взаимодействия нейтронов с ядрами при малых энергиях [75]. Резонансы составного ядра проявляются в виде острых пиков в полных сечениях. Такое поведение можно описать выражением

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum (2l + 1) |f_{l.P} + f_{l.R}|^2, \quad (62)$$

где  $f_{l.R}$  — брейт-вигнеровская резонансная амплитуда канала:  $f_{l.R} = 0,5\Gamma_{\alpha}/(E_0 - E - i0,5\Gamma)$ ;  $f_{l.P}$  — амплитуда, полученная из нерезонансного потенциала. Обычно при малых энергиях выбирают потенциал типа «твердой сферы», т. е.  $f_{l.P} = [\exp(2ikR_0) - 1]/2i$ .

При более высоких энергиях и особенно в случае взаимодействия между элементарными частицами выделение резонансных состояний становится сложной задачей и требует особого анализа. Соответствующие фону и резонансу парциальные амплитуды необходимо суммировать таким образом, чтобы полная амплитуда была унитарной. Такую амплитуду можно получить, если написать  $S$ -матрицу как произведение

$$S = S_F S_R. \quad (63)$$

Поскольку  $S_F$  и  $S_R$  в отдельности унитарны, то и  $S$  будет унитарна. В этом случае парциальная амплитуда запишется в виде

$$f = f_F + \eta_F \exp(2i\delta_F) f_R. \quad (64)$$

Идея факторизации  $S$ -матрицы вытекает из гипотезы суммирования фонового и резонансного фазовых сдвигов, т. е.  $\delta = \delta_F + \delta_R$ ,  $\eta = \eta_F \eta_R$ . Такая гипотеза верна с физической точки зрения, только если фоновое и резонансное взаимодействие происходят в разных пространственных областях, что довольно неправдоподобно, метод факторизации  $S$ -матрицы достаточно распространен в анализе резонансов, даже имеются некоторые успехи при его применении особенно для упругого фона [21, 76].

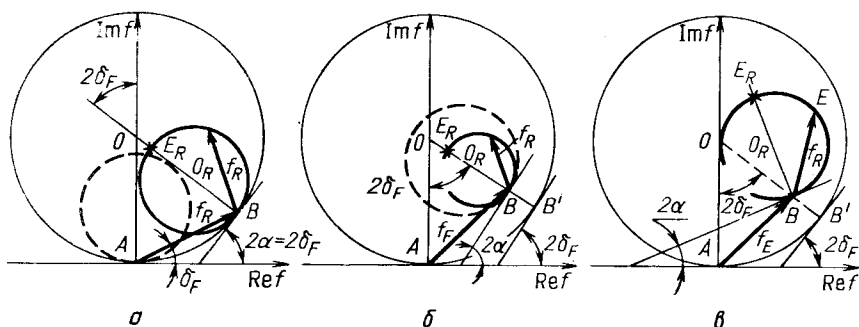


Рис. 6. Влияние постоянного нерезонансного фона на резонансный круг в диаграмме Аргана:

$a$  — неупругий фон;  $b$  — неупругий фон с вращением резонансного круга на угол  $\alpha = \delta_F$ ;  $c$  — тот же случай, но  $\alpha \neq \delta_F$

В идеальном случае, когда имеется независящий от энергии и чисто упругий фон, центр резонансного круга смещается на диаграмме Аргана на угол  $2\delta_F$  таким образом, чтобы сам резонансный круг касался в одной точке унитарного круга. При резонансной энергии параметр неупругости достигает минимума  $\eta_{\text{мин}}$ . Однако это уже не справедливо для неупругого фона потому, что тогда резонансный круг уже не касается унитарного и его угол вращения может отличаться от  $2\delta_F$  (см. рис. 6).

Типичный пример такой ситуации — волна  $^4P$  в упругом  $pd$ -рассеянии [77]. Несмотря на то что в любой реальной ситуации нерезонансный фон непостоянен, часто вблизи нерезонансной энергии можно его считать мало меняющимся. Таким образом, резонансное поведение волны  $^4P$ , показанное на рис. 7, можно считать результатом наложения резонансного фона относительно постоянного в области энергий от 8 до 25 МэВ на резонанс (возбужденное состояние  $^3\text{He}$ ) при энергии примерно 13 МэВ (область, где вектор амплитуды на диаграмме Аргана быстро меняется). Получается резонансный круг с  $\Gamma_{e1}/\Gamma \approx 0,13$ , повернутый на угол  $2\varphi \neq 2\delta_F$ . Таким образом, можно считать, что только для упругого нерезонансного фона метод факторизации (63) имеет смысл.

В общем случае, когда в одном состоянии по орбитальному моменту есть и резонанс и неупругий фон, хорошим методом является обобщение приближения полюс — нуль из упругого рассеяния. Тогда факторизация  $S$ -матрицы производится так:

$$S = S_F [(E_z - E)/(E_p - E)], \quad (65)$$

где  $E_p = E_0 - i\Gamma/2$ ;  $E_z$  и  $E_p$  расположены таким образом, чтобы вместе с  $S_F$  обеспечивали унитарность полной  $S$ -матрицы. Своим

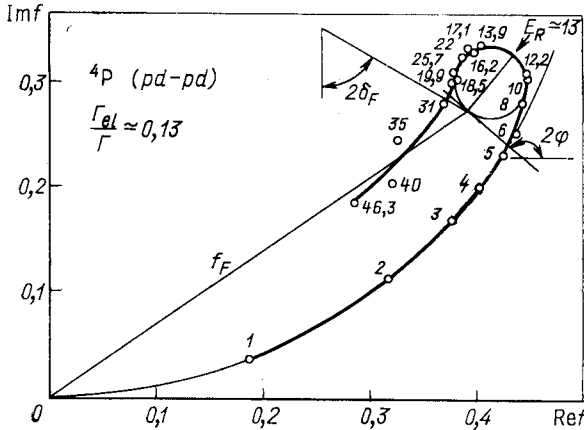


Рис. 7. Резонансное поведение частичной волны  $l = 1$  и  $s = 3$  ( $^4P$ ) из упругого рассеяния  $pd$

положением нуля определяет угол вращения резонансного круга на диаграмме Аргана [78, 79].

Обозначим  $i\gamma_{el} = E_z - E_p$ ;  $i\gamma_r = E_p^* - E_z$ , где  $\gamma$  — комплексная величина. Тогда выражение (65) будет иметь следующий вид:

$$S = S_F [1 - (E_p - E_z)/(E_p - E)] = S_F + i \exp(2i\alpha_{el}) R_{el}/(E_p - E). \quad (66)$$

Здесь  $\alpha$  — угол вращения, а вычет в полюсе соответствует ширине резонанса. Парциальная амплитуда

$$f = f_F + 0,5\Gamma_{el} \exp(2i\alpha_{el})/(E_p - E). \quad (67)$$

Если  $\text{Re } E_z = \text{Re } E_p$ , то  $\gamma_{el}$  и  $\gamma_r$  перейдут в  $\Gamma_{el}$  и  $\Gamma_r$  и снова получится выражение (64). Считаем, что относительная фаза между фоном и резонансом равна нулю,  $\alpha = \delta_F$ . Если же  $E_z = E_p^*$ , то получится случай чисто упругого рассеяния (рис. 8, где  $\alpha = \varphi + \delta_F$ ).  $S$ -матрица, соответствующая неупругому рас-

сеянию, имеет вид

$$S_r = S_F [(E_p^* - E_z)(E_z - E_p)]^{1/2} / (E_p - E) = \\ = i \exp(2i\alpha_r) R_r / (E_p - E),$$

где  $\alpha_r$  — угол вращения резонансного круга, который должен отличаться от фазового сдвига фона, а вычет в полюсе соответствует  $\sqrt{\Gamma_{e1}\Gamma_r}$ . Тогда парциальная амплитуда будет такой:

$$f = \exp(2i\alpha_r) 0,5 \sqrt{\Gamma_{e1}\Gamma_r} / (E_p - E).$$

Обобщение этих результатов для многоканального случая [79, 80] сохраняет основные черты, указанные выше, т. е. фоновая амплитуда (упругая или неупругая) суммируется с резонансной амплитудой типа Брейта — Вигнера, сдвинутой относительно

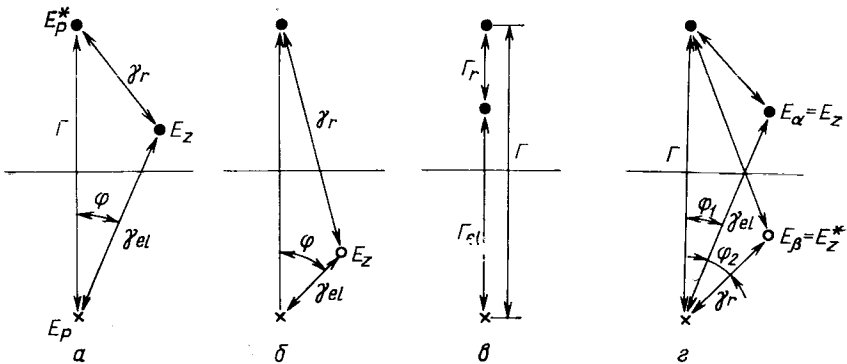


Рис. 8. Положение нуля и полюса  $S$ -матрицы в  $E$ -плоскости в присутствии нерезонансного фона:

$a - x_l < 0,5$ ;  $б - x_l > 0,5$ ;  $в - x_l = 1$ ;  $г -$  для двух каналов рассеяния

фона на некоторый угол. В многоканальном случае унитарность налагает прямые связи между параметрами резонанса, фона и углами сдвига [28]. Однако практически нельзя проверить эти соотношения из-за отсутствия полной информации обо всех каналах взаимодействия. Так что в конкретном фазовом анализе параметры фона, резонанса и углов сдвига определяются из экспериментальных данных.

Из сказанного выше можно заключить, что в присутствии нерезонансного фона в упругом канале, резонанс не обязан давать фазовые сдвиги, проходящие через  $\pi/2$  или  $0$ , минимум параметра неупругости тоже не обязателен. Таким образом, эти критерии являются приближенными. Красивые окружности на диаграмме Аргана можно получить только в идеальном случае, когда фон не зависит от энергии. Однако в реальности траектория парциаль-

ных амплитуд на диаграммах Аргана всегда искривлена (рис. 9), так что определение параметров резонансов становится объектом достаточно сложного анализа.

**Энергетическая зависимость ширины  $\Gamma$ .** Каждая частичная ширина, а значит, и полная ширина резонанса, зависят от

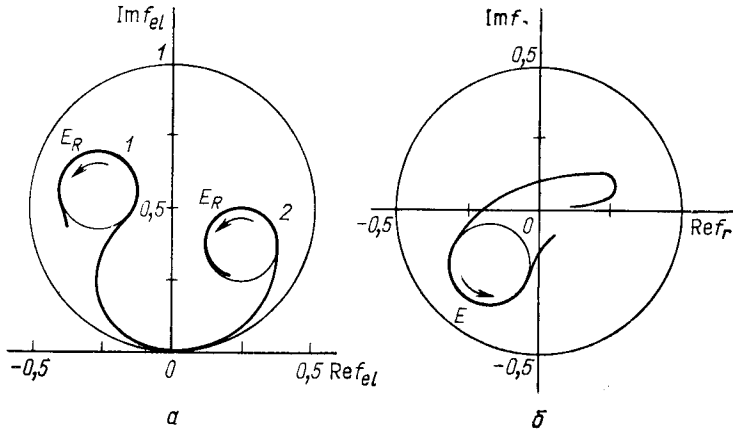


Рис. 9. Траектории частичных резонансных амплитуд при наличии зависящего от энергии нерезонансного фона: *а* — для упругого рассеяния; 1 соответствует отталкивающему фону; 2 — притягивающему; *б* — для неупругого взаимодействия

внутренней динамики резонансного состояния и различных кинематических факторов. Самый главный из них — эффект центробежного барьера. Кроме того, необходимо учитывать поверхностные и кулоновские эффекты. Например, в составном ядре на вероятность перехода  $T$  (коэффициент передачи) одного или группы нуклонов через поверхность ядра влияет центробежный барьер  $B$ :  $T = QB$ , где  $Q$  — поверхностный эффект. Вероятность  $P$ , равномерно распределенная на элементах составного ядра (энергия внутри резонанса была сконцентрирована на одном нуклоне или на группе нуклонов и вызвала распад), зависит от динамики резонанса. Скорость распада, т. е. ширина резонанса в одном канале распада, станет пропорциональной этим двум факторам  $\Gamma_i \sim TP$ . Чтобы определить  $T$ , проанализируем решение уравнения Шредингера для  $r < r_0$  и  $r > r_0$ , где  $r_0$  — радиус составного ядра или радиус потенциала взаимодействия. При этом  $T \approx \approx 4kV_l(Rr_0)/\epsilon$ , где  $v_l = [F_l^2(Rr_0) + G_l^2(Rr_0)]^{-1}$ . Здесь  $F_l(Rr_0)$  и  $G_l(Rr_0)$  — регулярное и нерегулярное решения уравнения Шредингера;  $\epsilon^2 = k^2 - V(r_0)$ .

Для резонансов в  $S$ -волне центробежный барьер отсутствует, т. е.  $B_0 = 1$ . Поскольку  $T = BQ$  и  $v_0 = 1$ , то  $Q_0 \approx 4k/\epsilon$ . Рас-

сматривая написанные выше отношения, можно получить, что эффект центробежного барьера пропорционален  $v_l$ , а поверхностный эффект пропорционален импульсу  $k$ :  $B_l \sim v_l$ ,  $Q_l \sim k$ . Все динамические и структурные эффекты включены в один коэффициент, названный приведенной шириной распада  $\gamma_i^2$ . Именно эту величину на самом деле и определяют из экспериментальных данных. Она связана с шириной брейт-вигнеровского резонанса в  $l$ -волне таким соотношением:

$$\Gamma_i(k) = kv_l(kr_{0i}) \gamma_i^2, \quad (68)$$

где  $r_{0i}$  — радиус распада канала  $i$  и подобно  $\gamma_i^2$  является свободным параметром.

Фактор центробежного барьера для малых  $l = 0, 1, 2$  имеет такое выражение:

$$\left. \begin{aligned} v_0(kr_0) &= 1; v_1(kr_0) = (kr_0)^2 [1 + (kr_0)^2]^{-1}; \\ v_2(kr_0) &= (kr_0)^4 [9 + 3(kr_0)^2 + (kr_0)^4]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Следовательно, отношение, выражающее энергетическую зависимость ширины  $\Gamma$ , является произведением фактора центробежного барьера на некоторый множитель, зависящий от чисто ядерных эффектов. Так же, как и в ядерной физике, в физике элементарных частиц принимается эта энергетическая зависимость (несмотря на то, что определение фактора центробежного барьера неоднозначно [81]), отношение (68) общепринято. При анализе экспериментальных данных используется следующее выражение для ширины  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \Gamma_R \frac{(kr_0)^{2l+1}}{B_l(k)} \left[ \frac{B_l(k)}{(kr_0)^{2l+1}} \right]_{k=k_R}, \quad (70)$$

где  $B_l(k) = (kr_0)^{2l} [v_l(kr_0)]^{-1}$ ,  $k_R$  — импульс в точке резонанса. При высоких энергиях, где существенны эффекты релятивистской кинематики, Лайсон [82] предлагает сделать коррекцию введением множителя  $2E_R/(E_R + E)$ . Тогда конечное выражение для ширины резонанса станет следующим:

$$\Gamma(E) = \Gamma_r \left( \frac{k}{k_R} \right)^{2l+1} \frac{2E_R}{E_R + E} \frac{B_l(k_R)}{B_l(k)}. \quad (71)$$

Такая форма для  $\Gamma(E)$  делает асимметричной энергетическую зависимость парциальных сечений, реальной и мнимой части парциальной амплитуды. Причем  $\Gamma(E_2) > \Gamma_R > \Gamma(E_1)$ , где  $E_1 < E_R < E_2$ . Эта асимметричность сильно зависит от радиуса взаимодействия. Как видно из энергетической зависимости ширины  $\Gamma(E)$ , фактор центробежного барьера дает правильное поведение у порога  $\Gamma \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \Gamma_0 k^{2l+1}$ . Кроме эффекта центробежного барьера, который главным образом и определяет энергетическую зависимость величины  $\Gamma$ , ширина резонанса чувствительна и к куло-



новскому взаимодействию между сталкивающимися частицами. Например, для резонанса  $\Delta_{33}$  (1232) кулоновские коррекции в первом порядке по кулоновскому параметру [44] имеют следующий вид:

$$\Gamma(E, \eta) = \Gamma(E, \eta = 0) \times \\ \times \{1 - \eta\pi + 2\eta kr_0 [1 - (2/3)(kr_0)^2 \ln(kr_0)] + \dots\}$$

для  $kr_0 \ll 1$  и

$$\Gamma(E, \eta) = \Gamma(E, \eta = 0) [1 - \eta/(kr_0)]$$

для  $kr_0 \gg 1$ .

Кулоновские коррекции выражаются через  $\eta$  и сильно зависят от  $r_0$ . Например, для  $\Delta_{33}$  получим

$$\Gamma(\Delta^0) - \Gamma(\Delta^{++}) \approx 3,6 \text{ МэВ при } r_0 = 0 \text{ фм};$$

$$\Gamma(\Delta^0) - \Gamma(\Delta^{++}) \approx 1,5 \text{ МэВ для } r_0 = 0,75 \text{ фм}.$$

Эта разница между ширинами и массами резонансов, принадлежащих к одному изомультиплету, очень важна при проверке сохранения изоспина или разных моделей взаимодействия. Ее можно получить только при проведении фазового анализа с учетом многих кулоновских коррекций.

В заключение этого раздела напомним, что обсуждение теории резонансов можно проводить и с помощью релятивистской кинематики, используя инвариантную переменную  $s$ , квадрат полной энергии в с. ц. м. В этом случае получаем релятивистские формулы Брейта — Вигнера [83, 84]:

$$T_{el} = 0,5m_R \Gamma_{el}(s) / [m_R^2 - s - i0,5\Gamma(s)m_R];$$

$$f_{el} = 0,5\Gamma_{el}(V\bar{s}) / [m_R - V\bar{s} - i0,5\Gamma(V\bar{s})].$$

**Полюса и резонансы.** Общепринято, что резонансы можно ассоциировать с некоторыми эффектами, которые уже обсудили выше ( $\delta_l = \pi/2$  или 0, максимум в  $\sigma$  и т. п.). Однако физическое существование резонанса тесно связано с существованием полюса  $S$ -матрицы на нефизическом листе  $E$ -плоскости (или в многоканальном случае на нескольких нефизических листах). Как уже было показано, можно привести примеры парциальных амплитуд, которые удовлетворяют критериям резонансного поведения, представленными выше. Однако у этих парциальных амплитуд может и не быть полюса на втором листе  $E$ -плоскости. Такие случаи бывают в упругом [74], в неупругом и многоканальном рассеянии [85].

Определение положения полюса на одном или нескольких нефизических листах  $E$ -плоскости у парциальной амплитуды — самый важный тест существования резонансов. Эта задача выполняется при помощи экстраполяции амплитуды рассеяния, задан-

ной на реальной оси (экспериментально доступной), в нефизическую область  $E$ -плоскости, т. е. к комплексным значениям энергии. Однако из-за существования коридора ошибок, в котором могут находиться несколько одинаково хорошо описывающих экспериментальные данные аналитических функций, экстраполяция становится ненадежной. Степень неустойчивости возрастает с удалением от экспериментально изучаемой зоны. В последнее время разработан целый ряд точных математических методов [30, 31, 86—88] уменьшения неопределенностей в задачах экстраполяции. Эти методы широко применяли в фазовом анализе, особенно для определения полюсов, соответствующих резонансам.

Чаще всего в феноменологическом фазовом анализе использована параметризация типа Брейта — Вигнера или полиномиальные выражения с правильным поведением у порога. Эти формулы известны под следующими названиями [69]:

*Стандарт*

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt{s_R} \Gamma(k)/(s_R - s), \quad (72)$$

где  $\Gamma$  для  $\Delta_{33}$

$$\Gamma(k) = \Gamma_R (k/k)^3 [1 + (k_R r)^2]/[1 + (kr)^2];$$

«Лайсон»

$$\operatorname{tg} \delta = \Gamma(w)/[2(w_R - w)] \quad (73)$$

с  $\Gamma(w) = \gamma^2 \frac{4m_p (kr)^3}{(w + w_F)(1 + (kr)^2)}$ ;  $w = (s + m_\pi^2 - m_p^2)/2\bar{s}$ , где  $m_p$  — масса протона;  $\gamma^2$  — приведенная ширина; а также «Чью-Лоу»

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt{s_R} \Gamma(k)/[2\sqrt{s}(\sqrt{s_R} - \sqrt{s})] \quad (74)$$

с  $\Gamma(k) = \lambda k (kr)^2/[1 + (kr)^2]$ . В выражениях (72) — (74)  $r$  — радиус канала.

Формулы типа *полином* представляют собой разложение по эффективному радиусу

$$k^3 \operatorname{ctg} \delta = \sum_{n=1}^N a_n k^{2n-2}. \quad (75)$$

Выражения (72) — (74) содержат только три подгоночные параметра. Применяя их для анализа резонанса  $\Delta_{33}$  в  $p$ -рассеянии, можно получить хорошее согласие с экспериментальными данными, если ввести четвертый параметр, характеризующий нерезонансный фон ( $\operatorname{tg} \delta_F = ak^3$ ) [69, 89]. Масса и ширина резонанса  $\Delta_{33}$ , определенные с помощью выражений (72) — (74), зависят от вида используемой параметризации. Неоднозначность естественно возрастает с увеличением числа параметров. Средние значения для полученных таким образом массы и ширины резонанса  $\Delta_{33}$  таковы:  $M_{\Delta_{33}} = 1232,4 + 2,2$  МэВ;  $\Gamma = 116,4 + 7,2$  МэВ.

В отличие от этих феноменологических параметров позиция полюса парциальной амплитуды на втором листе  $E$ -плоскости намного более стабильнее [90]. Положение полюса слабо зависит от используемой параметризации и от метода экстраполяции.

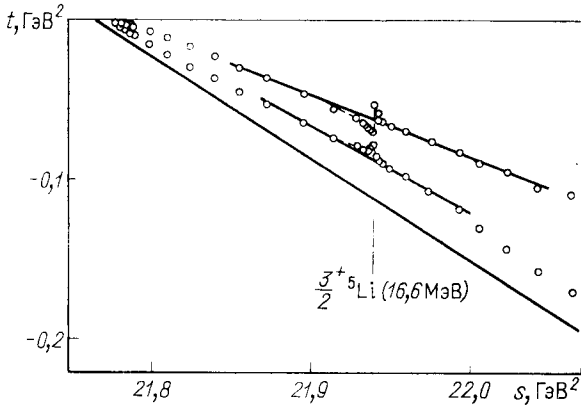


Рис. 10. Проекция двух траекторий нулей амплитуды упругого рассеяния  $p^4\text{He}$  на плоскость  $s - z$ :

сплошная линия, которая не проходит через точки, показывает границы физической области

Если парциальная амплитуда является аналитической функцией от энергии и она определена на нефизическом листе следующим образом:

$$f^I(s) = \{\eta(s) \exp [2i \delta(s)] - 1\} / [2i k(s)] = [k(s) (\text{ctg } \Delta(s) - i)]^{-1}$$

с  $\Delta = \delta - i (\ln \eta) / 2$ , то ее экстраполяция на нефизический лист будет

$$f^{II}(s) = f^I(s) / [1 + 2ik(s) f^I(s)].$$

Парциальная амплитуда на нефизическом листе  $f^{II}(s)$  имеет такие же аналитические свойства, как и  $f^I(s)$ , за исключением возможных полюсов, связанных с резонансами. Таким образом, определение полюса означает решение уравнения  $\text{ctg } \Delta(s) = i$ .

Косвенный метод определения позиции полюса — параметризация полиномом траекторий нулей амплитуды в плоскости  $x = \cos \theta$  [41]. Это дает аналитическое продолжение функции, связанной с траекторией нуля, в комплексную  $E$ -плоскость. Интересным примером влияния резонанса на траекторию нулей является фазовый анализ упругого взаимодействия  $p^4\text{He}$  в области энергий ниже 45 МэВ. Резонанс  $3/2^+ \ ^5\text{Li}$  при  $\sqrt{s} = 21,94$  ГэВ<sup>2</sup> (энергия возбуждения 16,66 МэВ) проявляется в траектории

нулей амплитуд рассеяния тем, что она становится линейно зависящей от энергии [91]. Этот эффект показан на рис. 10, где представлена траектория реальной части нулей амплитуды рассеяния в переменных  $s$  и  $t$ .

Другой простой и быстрый метод определения позиции полюса — применение диагональных аппроксимантов Паде второго рода, построенных прямо из значений функции, к получаемой из фазового анализа  $S$ -матрице. Напомним, что почти все полученные результаты для положения полюса резонанса  $\Delta_{33}$  при помощи разных методов параметризации парциальных амплитуд и экстраполяции в полюс [88—90, 92] лежат в интервале значений:

$$M_{\text{пол}} = (1212 \pm 0,5) - i(49,0 \pm 1,5) \text{ МэВ.}$$

Вычет в полюсе амплитуды, который содержит всю динамическую информацию, кинематические пороговые эффекты и влияние фона, также не сильно изменяются в разных подходах,

$$R = (36 \pm 1) - i(38 \pm 1,5) \text{ МэВ.}$$

## 5. ВОЗМОЖНОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕЗОНАНСОВ В СИСТЕМЕ ПИОН — ЯДРО

**Фазовый анализ  $\pi A$ -рассеяния.** В последнее время была выполнена обширная программа экспериментальных и теоретических исследований пион-ядерного взаимодействия. Большинство современных теорий пион-ядерного рассеяния используют в качестве исходной информацию о пион-нуклонном взаимодействии и сравнивают свои результаты с экспериментальными сечениями. Однако, как было показано в работе [93], наиболее сильно разница между предсказаниями разных теорий проявляется при сравнении их с поведением парциальных амплитуд, полученных из фазового анализа.

Так, анализ, выполненный в [93], показал, что оптическая модель с потенциалом типа лапласиана несостоятельна для описания  $\pi^4\text{He}$  упругого рассеяния. Хотя, если сравнивать результаты расчетов по оптической модели с кисслингеровским потенциалом и с потенциалом с лапласианом, то оба подхода имеют одинаковую степень согласия с экспериментальными дифференциальными сечениями, но кисслингеровский потенциал дает правильный знак фазы  $S$ -волны.

Другой аспект пион-ядерного фазового анализа состоит в том, что можно использовать полученные фазы в качестве исходных для построения амплитуды рассеяния для других ядер. Такая попытка была предпринята в работе [94], где фазы  $\pi^4\text{He}$  рассеяния брались вместо  $\pi N$ -фаз в качестве исходных для построения амплитуды рассеяния  $\pi^{12}\text{C}$ . Преимущество такого подхода в том,

что такие чисто ядерные эффекты, как истинное поглощение пионов, перезарядка, ферми-движение нуклонов в ядре, учтены уже во входных фазах.

Наконец, самым интересным вопросом в фазовом анализе пион-ядерного рассеяния при промежуточных энергиях является влияние первого барионного резонанса  $\Delta_{33}$  на характеристики системы пион — ядро. Он будет рассмотрен отдельно в следующем разделе.

Интересна также возможность получения информации о свойствах элементарных частиц при изучении взаимодействий их с ядрами. Например, были попытки определить зарядовый радиус пиона в  $\pi^4\text{He}$ -рассеянии [5] или извлечь константу связи пион — ядро [95—98]. Первый фазовый анализ пион-ядерного рассеяния был инициирован именно возможностью определить зарядовый радиус пиона [99—101, 12, 10, 93]. Предполагалось, что амплитуда  $\pi^4\text{He}$ -рассеяния — сумма ядерной и кулоновской амплитуды, модифицированной форм-факторами пиона и ядра:

$$f^{\pm} = f_N \pm f_c F_{\alpha} F_{\pi}. \quad (76)$$

Тогда среднее для дифференциальных сечений  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -рассеяния должно зависеть только от ядерной амплитуды, а разность сечений должна линейно зависеть от электромагнитного форм-фактора пиона:

$$\left. \begin{aligned} (d\sigma^+/d\Omega + d\sigma^-/d\Omega)/2 &= |f_N|^2; \\ (d\sigma^+/d\Omega - d\sigma^-/d\Omega)/2 &= -2 \operatorname{Re} (f_c^* f_N F_{\alpha} F_{\pi}). \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Проблема состояла в том, чтобы найти правильную ядерную амплитуду и учесть все возможные кулоновские поправки. Первый анализ экспериментов  $\pi^{\pm}{}^4\text{He}$ -упругого рассеяния сделан в [99—101]. Ядерная амплитуда взята или из оптической модели, или просто из фазового анализа. Однако оказалось, что все кулоновские поправки малы и их введение не может объяснить то, что для радиуса пиона получено значение, превышающее 2 фм [101, 102]. В то же время анализ с учетом релятивистских эффектов, сделанный в [103], показал, что радиус пиона  $r_{\pi} < 1$  фм, что сравнимо с теоретическими предсказаниями. Но, как было показано в [8—10, 26], этот хороший результат возник не из-за учета релятивистских эффектов, а из-за того, что автор [103] нашел правильное из двух, имеющихся в  $\pi^4\text{He}$ -рассеянии, решений фазового анализа. Первое из них приводит к радиусу пиона  $r_{\pi} \approx 2$  фм, а второе всегда дает  $r_{\pi} < 1$  фм. Таким образом, учет неоднозначностей фазового анализа приводит к гораздо более сильным эффектам для определения  $r_{\pi}$ , чем все другие кулоновские и реляти-

вистские коррекции. В [10, 12] на основе анализа всех имеющихся экспериментальных данных по  $\pi^{\pm 4}\text{He}$ -рассеянию с помощью ЗФА получено следующее значение для  $\langle r_{\pi}^2 \rangle^{112} = 0,83 + 0,17$  фм. Сейчас имеется фазовый анализ и для взаимодействия пионов с другими ядрами:  $^{12}\text{C}$  [104] и  $^{16}\text{O}$  [105, 106].

**Резонансы в пион-ядерном рассеянии.** Хорошо известно, что характеристики пион-ядерного рассеяния в области средних энергий во многом определяются существованием  $\Delta_{33}$ -резонанса. В этой области полные сечения рассеяния имеют четко выраженный максимум при меньшей энергии, чем в  $\pi N$ -рассеянии. Естественно поставить вопрос: не связано ли появление этого пика в сечениях с существованием резонансов в  $\pi A$ -системе?

Эта проблема неоднократно обсуждалась в литературе [107—110], причем высказывали самые различные мнения. В нашу задачу не входит дать оценку всем этим подходам. Рассмотрим эту проблему чисто феноменологически, т. е. с точки зрения фазового анализа.

Интересной особенностью в фазовом анализе упругого  $\pi A$ -рассеяния было обнаружение резонансного характера парциальных амплитуд. В [20] было впервые показано, что парциальные амплитуды, полученные из фазового анализа  $\pi^4\text{He}$ -рассеяния, описывают круги против часовой стрелки на диаграмме Аргана. Причем, судя по энергетической зависимости фаз в  $S$ -,  $P$ - и  $D$ -волнах, резонансы в  $\pi^4\text{He}$ -системе должны быть расположены близко друг от друга. Кроме того, было видно, что имеется довольно сильный фон, к тому же зависящий от энергии. Такой же резонансный характер парциальных амплитуд был обнаружен в упругом  $\pi^{12}\text{C}$ - и  $\pi^{16}\text{O}$ -рассеянии [104, 106].

Существование возбужденных состояний в  $\pi A$ -системе (изобарическое ядро [111], коллективный резонанс [110], резонанс [112]) объясняется в рамках моделей, разработанных в работах [109, 110].

По нашему мнению, единственный корректный ответ на вопрос о резонансах в  $\pi A$ -системе можно получить через аккуратное исследование энергетического поведения парциальной амплитуды. Трудность заключается в том, что, как отмечалось выше, пион-ядерные резонансы должны сильно перекрываться, так как  $\Gamma$  — большое и превышает расстояние между резонансами. Поэтому в некоторых работах были попытки трактовать этот вопрос как существование «псевдорезонансов» или как эффект распространения  $\Delta_{33}$ -резонанса [113, 114].

Мы исходили из того, что для анализа сильно перекрывающихся резонансов с большим фоном нельзя использовать простую параметризацию типа Брейта — Вигнера, и поэтому провели для упругого  $\pi^4\text{He}$ -рассеяния анализ положения полюсов и нулей  $S$ -матрицы с помощью паде-аппроксимантов.

Сначала выполним ЗФА, в котором парциальная  $S$ -матрица имела вид:

$$S_l = \frac{1 - 2iak^{2l+1}}{1 + 2iak^{2l+1}} \frac{1 + b_1 k^{2l+2} + ck^{2l+4} \exp(-2id)(1 + 2iak^{2l+1})}{1 + b_2 k^{2l+2} + ck^{2l+4}(1 - 2iak^{2l+1})}; \quad (78)$$

$$S_l \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1;$$

$S_l \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \eta_\infty \exp(2i\delta_\infty)$ , где  $\eta_\infty = \exp(-2 \operatorname{Im} d)$ ,  $\operatorname{Im} d > 0$ ,  $\delta_\infty = \operatorname{Re} d$ ,

который обеспечивал правильное поведение парциальной амплитуды у порога и на бесконечности. Выражение (78) — диагональный паде-аппроксимант, поэтому можно легко получить положение нулей и полюсов в комплексной  $k$ -плоскости.

Анализ  $S$ -матрицы, записанной в виде (78), привел нас к выводу, что в  $\pi^4\text{He}$ -системе действительно имеется резонанс. Расположение нулей и полюсов для  $S$ - и  $P$ -волн показано на рис. 11

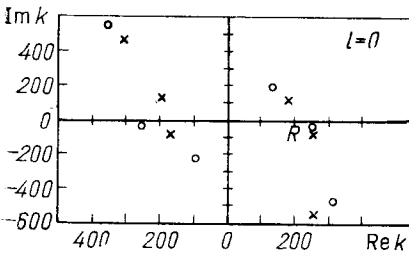


Рис. 11. Положение нулей (○) и полюсов (×)  $S$ -матрицы в комплексной  $k$ -плоскости для  $S$ -волны в упругом  $\pi^4\text{He}$ -рассеянии.

Полюс и нуль, связанные с резонансом, обозначены  $R$

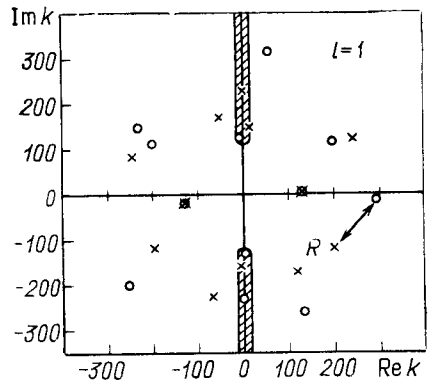


Рис. 12. То же, что и на рис. 11, только для  $P$ -волны

и 12. На этих рисунках легко наблюдать пару нуль — полюс, которую будем интерпретировать как проявление резонанса. Затем посмотрим нули и полюсы  $S$ -матрицы в  $E$ -плоскости и обнаружим аналогичную картину. Положение нулей и полюсов в  $E$ -плоскости для  $S$ -волны приведено на рис. 13.

Чтобы исследовать стабильность этих пар нуль — полюс относительно разных параметризаций, используем аппроксиманты Паде второго рода для представления  $S$ -матрицы. Результаты этого анализа показали, что пары нуль — полюс для  $S$ -волны действительно очень стабильны и не меняют своего положения при увеличении степени аппроксимантов Паде от [3/3] до [5/5]. Для  $P$ -волны можно сказать, что стабилен лишь только полюс,

но не нуль. Это происходит из-за сильной энергетической зависимости фона.

Для большей уверенности проверили методику нахождения пары нуль — полюс в  $S$ -матрице с помощью апроксимантов Паде для  $\Delta_{33}$ -резонанса в  $\pi N$ -рассеянии и для разных функций

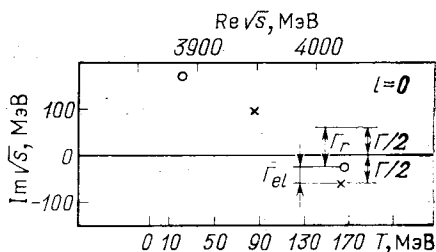


Рис. 13. Положение нулей (○) и полюсов (×)  $S$ -матрицы в комплексной плоскости энергий для  $S$ -волны во взаимодействии  $\pi^4\text{He}$ . Показаны также ширины резонанса

с заранее известным положением нулей и полюсов. Во всех случаях удалось с высокой точностью найти ожидаемое положение пары полюс — нуль.

Поэтому полагаем, что можно считать доказанным существование в  $\pi^4\text{He}$ -системе, по крайней мере, одного резонанса, который имеет следующие параметры:

$$M_{(\pi^4\text{He})^*S} = 4020 + 2 \text{ МэВ}; \quad \Gamma_{\text{tot}} = 123 + 10 \text{ МэВ};$$

$$\Gamma_{el} = 40,5 + 3 \text{ МэВ}; \quad x_{el} = 0,33.$$

Положение полюса в  $P$ -волне таково:  $M_{(P)} \approx 3965 + 8 \text{ МэВ}$ , а в  $D$ -волне  $M_{(D)} \approx 3980 + 10 \text{ МэВ}$ ;  $\Gamma_{(P)} = 120 \text{ МэВ}$ ,  $\Gamma_{(D)} = 140 \text{ МэВ}$ . Итак, анализ экспериментальных данных в рамках формализма, в котором имеется связь между появлением пары полюс — нуль в  $S$ -матрице и существованием резонанса, не противоречит возможности наличия у  $\pi^4\text{He}$ -системы целого спектра широких, перекрывающихся резонансов в области энергий налетающего пиона от 100 до 170 МэВ.

Хотелось бы выразить искреннюю благодарность А. Никитиу и М. Г. Сапожникову за большую помощь, оказанную в приготовлении этого обзора. Приятно поблагодарить В. Б. Беляева за плодотворные дискуссии и проф. Ю. А. Щербакова, И. В. Фаломкина и Д. Б. Понтекорво за гостеприимство.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blatt J. M., Biedenharn L. C.— Rev. Mod. Phys., 1952, v. 24, p. 258.
2. Jacob M., Wick G. C.— Ann. Phys., 1959, v. 7, p. 404.
3. Hamilton J., Woolecock W. S.— Phys. Rev., 1960, v. 118, p. 291.
4. Van Hove L.— Phys. Rev., 1952, v. 88, p. 1358.
5. Sternheim M. M., Hofstadter R.— Nuovo cimento, 1965, v. 38, p. 1854.
6. Rae S., Thurnauer P.— Phys. Rev., 1969, v. 180, p. 1387.
7. Mottershead C. T.— Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 780.



8. Nichitiu F. In: 5 Intern. Conf. on High Energy Physics and Nuclear Structure. Uppsala, 1973, p. 178.
9. Rasche G., Woolcock W. S.— Helv. phys. acta, 1976, v. 49, p. 435.
10. Nishitiu F., Shcherbakov Yu. A.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 61, p. 429.
11. Roper L. D., Wright R. M., Feld B. T.— Phys. Rev. B, 1965, v. 138, p. 190.
12. Alexandrov L. e.a. In: Intern. Conf. on Few Body Problems in Nucl. and Particle Physics. Quebec, 1974, p. 348; **препринт** ОИЯИ PI-8328, Дубна, 1974.
13. Oades G. C., Rasche G., Zimmermann H.— Nuovo cimento A, 1971, v. 2, p. 438.
14. Oades G. C., Rasche G.— Helv. phys. acta, 1971, v. 44, p. 160.
15. Carter J. R., Bugg D. V., Carter A. A.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 58, p. 378.
16. Bystricky J. e.a.— Nucl. Phys. A, 1977, v. 285, p. 469.
17. Rasche G., Woolcock W. S.— Helv. phys. acta, 1977, v. 50, p. 407.
18. Johnson C. H., Steiner H. M. Preprint UCRL-18001, 1967.
19. Donnachie A.— Repts Prog. Phys., 1973, v. 36, p. 695.
20. Falomkin I. V. e.a.— Lett. Nuovo cimento, 1972, v. 5, p. 1125.
21. Lovelace C. In: Proc. on the Heidelberg Intern. Conf. on Elementary Particles. 1967.
22. Donnachie A., Kirsopp R. G., Lovelace C.— Phys. Lett. B, 1968, v. 26, p. 161.
23. Barrelet R.— Nuovo cimento A, 1972, v. 8, p. 331.
24. Hohler G., Sabba Stefanescu I.— Z. Physik C, 1979, Bd 2, S. 253.
25. Bellefon A., Berthon A.— Nucl. Phys. B, 1976, v. 109, p. 129.
26. Nichitiu F.— Lett. Nuovo cimento, 1973, v. 6, p. 597.
27. Arndt R. A., Roper L. D.— Nucl. Phys. A, 1973, v. 209, p. 447.
28. Dalitz R. H., Moorhouse R. G.— Proc. Roy. Soc. A, 1970, v. 318, p. 279.
29. Bransden B. H. e.a.— Phys. Lett., 1965, v. 19, p. 420.
30. Cutkosky R. E., Deo B. B.— Phys. Rev. Lett., 1968, v. 22, p. 1272; Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 1859.
31. Ciulli S.— Nuovo cimento A, 1969, v. 61, p. 787; 1969, v. 62, p. 301.
32. Cutkosky R. E.— Ann. Phys., 1969, v. 54, p. 350.
33. Dumbrajs O. V., Nichitiu F., Shcherbakov Yu. A.— Rev. Roum. Phys., 1973, v. 18, p. 1249.
34. Cutkosky R. E., Deo B. B.— Phys. Rev. D, 1970, v. 1, p. 2547.
35. Roo M., Wagner F. Preprint RHEL/R 245, 1971, p. 115.
36. Miller R. C. e.a.— Nucl. Phys. B, 1972, v. 37, p. 401.
37. Cutkosky R. E. e.a.— Nucl. Phys. B, 1976, v. 102, p. 139.
38. Johnson R. W. e.a. In: 16 Intern. Conf. on High Energy Physics. Chicago, 1972.
39. Cutkosky R. E. e.a.— Phys. Rev. D, 1979, v. 20, p. 2782; p. 2804; p. 2839.
40. Hohler G. e.a. In: Handbook of Pion-Nucleon Scattering. Zaed Physics Data 12—1, 1979.
41. Spearman T. D.— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 1668.
42. Martin A. D., Pennington M. R. Preprint CERN, TH-2353, 1977.
43. Pietarinen E.— Nuovo cimento A, 1972, v. 12, p. 522.
44. Pietarinen E.— Nucl. Phys. B, 1972, v. 49, p. 315.
45. Petersen J. L. Preprint CERN 77-04, 1977.
46. Froggatt C. D., Petersen J. L. Preprint NBI-HE-77-7, 1977.
47. Koch R., Pietarinen E.— Nucl. Phys. A, 1980, v. 336, p. 331.
48. Minami S.— Progr. Theor. Phys., 1954, v. 11, p. 213.
49. Bethe H. A., Hoffman F. Mesons and Fields. Evanston, Row, Peterson and Co., 1955.
50. Crichton J. H.— Nuovo cimento A, 1966, v. 45, p. 256.
51. Martin A. D.— Nuovo cimento A, 1969, v. 59, p. 131.

52. Martin A. D. Particle Physics. North-Holland, 1974.
53. Bowcock J. E., Noj P. H.— Phys. Lett. B, 1970, v. 31, p. 541.
54. Itzykson C., Martin A.— Nuovo cimento A, 1973, v. 17, p. 245.
55. Gersten A.— Nucl. Phys. B, 1969, v. 12, p. 531.
56. Berends F. A.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 64, p. 236.
57. Berends F. A., Ruijsenaars S. M.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 56, p. 507.
58. Cornille H., Drouffe J. M.— Nuovo cimento A, 1974, v. 20, p. 401.
59. Atkinson D., Kok L. P.— Z. Phys., 1974, Bd 266, S. 373.
60. Atkinson D., Kok L. P., Roo M. Preprint CERN, TH-2289, 1977.
61. Heemskerck A. C., Kok L. P., Roo M.— Nucl. Phys. A, 1975, v. 244, p. 15.
62. Falomkin I. V. e.a.— Nuovo cimento A, 1978, v. 43, p. 604.
63. Bowcock J. E., Cottingham W. N., Noj P. H. In: Intern. Conf. on Elementary Particles. Amsterdam, 1971.
64. Atkinson D. e.a.— Nucl. Phys. B, 1974, v. 77, p. 109.
65. Roo M. Thesis. University of Groningen, 1974.
66. Atkinson D. e.a.— Nucl. Phys. B, 1976, v. 109, p. 322.
67. Burkhardt H.— Nuovo cimento A, 1972, v. 10, p. 379.
68. Breit G., Wigner E. P.— Phys. Rev., 1936, v. 49, p. 519.
69. Particle Data Group, Rev. of Particle Properties.— Rev. Mod. Phys., 1980, v. 52, part 2.
70. Levi Setti R. In: Intern. Conf. on Particle Physics. Lund, 1969.
71. Wigner E. P.— Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 145; J. Phys., 1955, v. 23, p. 371.
72. Goldhaber M. L., Watson K. M. Collision Theory. N.Y., J. Wiley, 1964.
73. Calucci G., Fonda L., Ghirlandi G. C.— Phys. Rev., 1968, v. 166, p. 1719.
74. Fonda L.— Fort. Phys., 1972, v. 20, p. 135.
75. Bohr N.— Nature, 1936, v. 137, p. 344.
76. Lichenberg D. B.— Lett. Nuovo cimento, 1973, v. 7, p. 727.
77. Arvieux J.— Nucl. Phys. A, 1974, v. 221, p. 253.
78. Goebel C. J., McVoy K. W.— Phys. Rev., 1967, v. 164, p. 1932.
79. McVoy K. W. Fundamentals in Nuclear Theory. Vienna, 1967, p. 419.
80. Dalitz R. H.— Ann. Rev. Nucl. Sci., 1963, v. 13, p. 339.
81. Humblet J. Fundamentals in Nuclear Theory. Vienna, 1967, p. 369.
82. Layson W. M.— Nuovo cimento, 1963, v. 27, p. 723.
83. Pilkuhn H. The Interaction of Hadrons. North-Holland, 1967.
84. Burkhardt H. Dispersion Relation Dynamics. North. Holl. Publ. Co., 1969.
85. Cerrada M. e.a.— Phys. Lett. B, 1976, v. 62, p. 353.
86. Caprini I. e.a.— Phys. Rev. D, 1972, v. 5, p. 1658.
87. Kanazawa A., Miyakoshi T.— Progr. Theor. Phys., 1977, v. 57, p. 295.
88. Nagova A. e.a.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 61, p. 438.
89. Vasan S. S.— Nucl. Phys. B, 1976, v. 106, p. 535.
90. Ball J. S. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1143.
91. Barrelet E. Preprint Ecole Polytechnique, LPMHE/X/76; In: Topical Conf. on Baryon Resonance. Oxford, 1976.
92. Ball J. S., Goble R. L.— Phys. Rev. D, 1975, v. 11, p. 1171.
93. Shcherbakov Yu. A. e.a.— Nuovo cimento A, 1976, v. 31, p. 249.
94. Germond J. F., Wilkin C.— Nucl. Phys. A, 1975, v. 237, p. 447.
95. Squier G. T. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 389.
96. Osland P.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 56, p. 308.
97. Mach R., Nichitiu F.— Rev. Roum. Phys., 1976, v. 21, p. 633.
98. Nichitiu F., Sapozhnikov M. G.— J. Phys. G, 1978, v. 4, p. 805.
99. Nordberg M. E., Kinsey K. F.— Phys. Lett., 1966, v. 20, p. 692.
100. Block M. M. e.a.— Phys. Rev., 1968, v. 169, p. 1074.
101. Crowe K. M. e.a.— Phys. Rev., 1969, v. 180, p. 1349.
102. Oades G., Rasche C.— Nucl. Phys. B, 1970, v. 20, p. 330.
103. Christensen R. A.— Phys. Rev. D, 1970, v. 1, p. 1469.

104. **Beiner J.**— Nucl. Phys. B, 1973, v. 53, p. 349.
105. **Malbrough D. J. e.a.**— Phys. Rev. C, 1978, v. 17, p. 1397.
106. **Arvieux J.** In: 8 Intern. Conf. on High Energy Physics and Nuclear Structure. Vancouver, 1979, p. 353.
107. **Ericson M., Krell M.**— Phys. Lett. B, 1972, v. 38, p. 359.
108. **Hufner J.**— Phys. Rep. C, 1975, v. 21, p. 1.
109. **Hirata M. e.a.**— Ann. Phys., 1977, v. 108, p. 116.
110. **Klingenberg R., Dillig M., Huber M. G.**— Phys. Rev. Lett., 1978, v. 41, p. 387.
111. **Nichitiu F.** Meson-Nuclear Physics. Carnegie-Mellon Conf., 1976, p. 460.
112. **McVoy K. W.**— Nucl. Phys. A, 1977, v. 276, p. 491.
113. **Bakker B. L. G., Narodetsky I. M., Simonov Yu. A.**— Lett. Nuovo cimento, 1977, v. 19, p. 265.
114. **Sakai K., Yasuno M.**— Progr. Theor. Phys., 1976, v. 56, p. 991.