

## КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ БЫСТРОГО ВРАЩЕНИЯ

*Л. Мюнхов и Х. Шульц*

Центральный институт ядерных исследований, Россендорф, ГДР

В обзоре рассматриваются вопросы квазиклассической теории вращения ядра. С помощью обобщения известного метода Киржняца проводится изучение гладких характеристик вращающегося ядра, в особенности изменения в распределении плотности и формы при больших спинах. Прямым суммированием с использованием формулы Пуассона учитываются также оболочечные эффекты.

The review covers some aspects of the quasiclassical treatment of nuclear rotation. Generalizing the well known Kiršniž method expressions for smooth properties are derived, including the density and shape at high spins. With the help of direct summation applying the Poisson formula it is possible to treat as well fluctuating shell effects semiclassically.

### ВВЕДЕНИЕ

Высокоспиновые состояния представляют собой новую область изучения структуры ядра. Большой интерес привлекают при этом эволюция формы с ростом углового момента, поведение гладкой части деформационной энергии и роль оболочечных флуктуаций, влияние вращения на среднее поле. Как и в других областях ядерной физики, квазиклассический подход адекватно отражает физическую сущность этих явлений. Метод оболочечной поправки — типичный пример квазиклассического рассмотрения, в котором происходит разделение физических характеристик на усредненные и флуктуирующие.

В последние годы появились несколько работ по квазиклассической теории вращения. Рассмотрению гладкой части энергии вращения в рамках обобщенного метода Томаса — Ферми посвящена работа Брака и Деннингса [1], многие аспекты оболочечных флуктуаций изучены в работах [2] методом суммирования классических траекторий. Некоторые вопросы квазиклассической теории вращения, включающие анализ гладкой части деформационной энергии и углового момента, а также оболочечные поправки к угловому моменту, разобраны в [3, 4]. Основные результаты этих исследований включены в настоящий обзор.

Для описания усредненной части энергии и углового момента обобщим метод Киржница [4], первоначально разработанный для расчета плотности в атомной физике. Гладкие части можно представить в виде разложения по параметру квазиклассичности  $\xi = \hbar/(P_F L) \ll 1$ , где  $L$  — характерная длина изменения потенциала. В нулевом порядке по  $\xi$  получаются результаты метода Томаса — Ферми, следующий порядок ( $\xi^2$ ) приводит к квантовым эффектам типа диамагнетизма Ландау и парамагнетизма Паули. Эти поправки существенны для корректного описания плотности в поверхностной области ядра.

С помощью вариационного метода для функционала плотности нами подробно изучены эффекты перераспределения плотности в результате вращения. Оказывается, что для ядер с  $A > 100$  предположение капельной модели с аддитивностью капельной энергии и вращательной энергии [5] хорошо выполняется. Однако для легких ядер ( $40 \leq A \leq 80$ ) эффекты перераспределения плотности, не включенные в капельную модель, начинают сказываться. Из-за сжимаемости ядерной материи плотность в центре ядра уменьшается, а поверхностный слой становится неоднородным по толщине.

Для рассмотрения оболочечной поправки к полному угловому моменту вращающегося ядра обобщим метод Киржница и сотр. [6] на задачу вращения сферического ядра, т. е. на задачу выстраивания угловых моментов нуклонов. При этом используем формулу Пуассона для вычисления суммы по главному квантовому числу и проведем квазиклассическое квантование. Мы доказали, что эта процедура приводит к точному квантовомеханическому результату, причем явно видно происхождение гладкой части и оболочечной флуктуации, связанной с пересечением уровней.

## 1. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРТРИ — ФОКА (ХФ)

Для построения квазиклассической теории вращения атомных ядер воспользуемся методом Киржница [4], с помощью которого можно последовательно получить квазиклассическое приближение метода ХФ. Приведем здесь основные соотношения этого метода без учета вращения.

Центральную роль в подходе Киржница играет квантовая функция распределения Вигнера, которую можно представить в следующем виде:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \exp(-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{r}) \hat{\rho} \exp(i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{r}), \quad \hbar = 1, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}$  — классический импульс;  $\hat{\mathbf{p}}$  — оператор импульса; величина

$$\hat{\rho} = \Theta(\epsilon_F - \hat{h}) \quad (2)$$

— оператор плотности, определенный по методу ХФ; соответственно  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми;  $\hat{h}$  — одночастичный самосогласованный гамильтониан

$$\hat{h} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \hat{V}_{\text{HF}}, \quad \hat{V}_{\text{HF}}(1) = \text{tr}_2(\hat{\rho}^{(2)} \hat{V}(12)(1 - \hat{P}^{12})). \quad (3)$$

Зная функцию распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , найдем среднее значение по основному состоянию от одночастичного оператора  $\hat{a} = \hat{a}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}})$ , которое равно

$$\langle \hat{a} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{a}) = \int d^3r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{a}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \hat{\mathbf{p}}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (4)$$

Также непосредственно вычисляется смешанная плотность

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_V \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon_V) \Phi_V^*(\mathbf{r}) \Phi_V(\mathbf{r}') = \\ &= 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{p} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (5)$$

где фактор 2 учитывает спин и рассматривается только один вид частиц. В частности, для плотности получаем, полагая в (5)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ :

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (6)$$

Квазиклассическое приближение вводится разложением функции  $f(r, p)$  по параметру  $\xi$  (см. введение). Согласно (1) нужно знать действие операторной функции  $\hat{\rho} = \Theta(\varepsilon_F - \hat{h})$  на плоскую волну  $\exp(i p r)$ . Целесообразно представить оператор плотности в виде

$$\hat{\rho} = \Theta(p_0^2 - p^2), \quad (7)$$

где

$$p_0^2 = 2\mu(\varepsilon_F - \hat{V}_{\text{HF}}) \quad (8)$$

— квадрат локального импульса Ферми. Поскольку потенциал  $\hat{V}_{\text{HF}}$  сам функционально зависит от  $\hat{p}_0$  или, что эквивалентно, от плотностей  $\rho(r)$ ,  $\rho(r, r')$ , формула (8) представляет собой интегральное уравнение для самосогласованного расчета  $p_0$ .

Чтобы определить действие  $\Theta(p_0^2 - \hat{p}^2)$  на  $\exp(i p r)$ , будем пользоваться операторным разложением Тейлора при действии на собственную функцию оператора  $\hat{a}$  [4]:

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{a} + \hat{b}) &= \varphi(a + \hat{b}) - \varphi''(a + \hat{b}) [\hat{b}, \hat{a}]/2 + \\ &+ \varphi'''(a + \hat{b}) \{[\hat{b}, [\hat{b}, \hat{a}]] - [\hat{a}, [\hat{b}, \hat{a}]]\}/6 + \\ &+ \varphi''''(a + \hat{b}) [\hat{b}, \hat{a}]^2/8 + O(\xi^4), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $a$  — собственное значение оператора  $\hat{a}$ .

Полагая  $\hat{a} = -\hat{p}^2$ ,  $\hat{b} = p_0^2$ , можно убедиться, что (9) действительно дает разложение по степеням, причем первый член представляет нулевую степень, а следующие — вторую степень по  $\xi$ . С помощью определения (1) получим из (9):

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \Theta(p_0^2 - p^2) + (\Delta p_0^2 + 2ip\nabla p_0^2) \delta'(p_0^2 - p^2)/2 + \\ + [(\nabla p_0^2)^2 - 2(p\nabla)^2 p_0^2] \delta''(p_0^2 - p^2)/3 - \\ - (p\nabla p_0^2)^2 \delta'''(p_0^2 - p^2)/2. \quad (10)$$

Первый член формулы (10) дает гладкую, квазиклассическую часть средних значений (4), и, в частности, плотности (6). Члены порядка  $\hbar^2$ ,  $\hbar^4$ , ... учитывают гладкие квантовые поправки, связанные с неоднородностью плотности у поверхности ядра. Помимо гладких квантовых поправок нужно также еще включить флуктуирующие оболочечные эффекты. Последние рассматриваются в разд. 5.

## 2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВРАЩЕНИЯ С ВКЛЮЧЕНИЕМ ГЛАДКИХ КВАНТОВЫХ ПОПРАВКИ

Рассмотрим здесь задачу о вращении сферического ядра вокруг оси  $z$  с угловой частотой  $\omega$ . Квантовомеханически имеем дело с выстраиванием угловых моментов отдельных нуклонов, однако после усреднения по одночастичным уровням появляется классическая картина вращения (см. также разд. 5). Для нахождения гладкой части полного углового момента  $M$  обобщаем метод Киржница, однако ради простоты оставим в стороне вопросы самосогласования и заменим потенциал ХФ локальным потенциалом среднего поля  $V$ . Некоторые вопросы самосогласования обсуждаются в разд. 3.

Для включения вращения пользуемся гамильтонианом

$$\hat{h}' = \hat{h} - \omega \hat{l}_z, \quad (11)$$

где

$$\hat{l}_z = -i[\mathbf{r} \times \nabla]_z.$$

Соответствующий оператор плотности

$$\hat{\rho} = \Theta(\epsilon_F - \hat{h}'), \quad (12)$$

и для определения функции распределения (1) положим в (9)  $\hat{a} = -\hat{p}^2$ ,  $\hat{b} = 2\mu(\epsilon_F - V + \omega \hat{l}_z) = \hat{b}_0 + 2\mu\omega \hat{l}_z$ , поскольку  $[\hat{l}_z, V] = 0$  и  $[\hat{l}_z, \hat{a}] = 0$ . Во всех коммутаторах  $[\hat{b}, \hat{a}]$  и т. п. в (9) оператор  $\hat{b}$  можно заменить на  $\hat{b}_0$ , что соответствует случаю без вращения. Имея в виду, что в линейном относительно  $\omega$  порядке:

$$\delta'(b' + a) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}) i\mathbf{p}\nabla p_0^2 = \delta'(b + a) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}) i\mathbf{p}\nabla p_0^2 + \\ + \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}) \delta''(b + a) 2\mu\omega \hat{l}_z i\mathbf{p}\nabla p_0^2,$$

и учитывая, что  $\hat{l}_z \exp i\mathbf{p}\mathbf{r} = l_z \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r})$ , где  $l_z = xp_y - yp_x$  является классической проекцией углового момента на ось  $\mathbf{z}$ , получаем для функции распределения в ведущем порядке по  $\omega$ :

$$f_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \Theta(\tilde{p}_0^2 - p^2) + (\Delta p_0^2 + 2i\mathbf{p}\nabla p_0^2) \delta'(\tilde{p}_0^2 - p^2)/2 + \\ + [(\nabla p_0^2)^2 - 2(\mathbf{p}\nabla)^2 p_0^2] \delta''(\tilde{p}_0^2 - p^2)/3 - \\ - (\mathbf{p}\nabla p_0^2)^2 \delta''(\tilde{p}_0^2 - p^2)/2 + i\delta''(p_0^2 - p^2) 2\mu\omega \hat{l}_z \mathbf{p}\nabla p_0^2. \quad (13)$$

В это выражение входит смещенный благодаря вращению локальный импульс Ферми:

$$\tilde{p}_0^2 = 2\mu(\epsilon_F(\omega) - V(r) + \omega l_z). \quad (14)$$

Зная функцию распределения  $f_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , можно вычислить полный угловой момент  $M$ , пользуясь соотношением (4):

$$M = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{l}_z) = 2 \int d^3r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (l_z + \hat{l}_z) f_\omega(\mathbf{r}\mathbf{p}). \quad (15)$$

Очевидно, только при  $\omega \neq 0$  появляется угловой момент  $M \neq 0$ ; для сферически-симметричной функции распределения

$$\int d^3p l_z f_\omega = 0$$

и

$$l_z \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3p = 0.$$

Вычислим сначала плотность с помощью формулы (6). Соответствующий результат потребуется для расчета углового момента, а также представляет самостоятельный интерес. Чтобы вычислить интегралы по импульсу в (6) с функцией распределения (13), удобно ввести новые переменные  $\mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{r}'$  согласно соотношениям:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mu[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'], \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}. \quad (16)$$

Тогда аргументы в (13) преобразуются следующим образом:

$$\tilde{p}_0^2 - p^2 = 2\mu(\epsilon_F - V + \mu\omega^2(x^2 + y^2)/2) - p'^2 \equiv p_0'^2 - p'^2. \quad (17)$$

В  $p'$ -пространстве получим сферу Ферми с радиусом

$$p_0' = \{2\mu(\epsilon_F - V + [\lambda\omega^2(x^2 + y^2)/2])\}^{1/2}. \quad (18)$$

Очевидно, формулу (16) можно понимать как переход к внутренней системе отсчета, причем вследствие вращения к потенциальной энергии добавляется центробежный потенциал  $-\mu\omega^2(x^2 + y^2)/2$ .

Проводя преобразование (16) в формуле (6), получаем для плотности  $\rho_\omega(r)$  следующий результат:

$$\rho_\omega(r) = \frac{1}{3\pi^2} (2\mu)^{3/2} (\epsilon_F - V_{\text{эф}})^{3/2} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{1}{16\mu} \left( \frac{\nabla^2 V}{(\epsilon_F - V_{\text{эф}})^2} + \frac{(\nabla V)^2}{4(\epsilon_F - V_{\text{эф}})^3} \right) \right], \quad (19)$$

где введен эффективный потенциал  $V_{эф} = V(r) - \mu\omega^2(x^2 + y^2)/2$ . Это выражение для плотности  $\rho_\omega$  содержит объемный эффект перераспределения плотности, обязанный появлением потенциала  $V_{эф}$  и зависимостью энергии Ферми от частоты вращения, а также гладкие квантовые эффекты, возникающие вследствие градиентных членов в (13). Такое же соотношение было получено в [1] методом Кирквуда.

Качественно влияние вращения на распределение плотности легко понять в приближении Томаса — Ферми, когда опускаются градиентные члены (рис. 1). В этом приближении появляется центробежный барьер, а энергия Ферми опускается:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_F &= \varepsilon_F(\omega) - \varepsilon_F(0) = \\ &= -\frac{1}{2} \mu\omega^2 \int \rho_0^{1/3} (x^2 + \\ &\quad + y^2) d^3r / \int \rho_0^{1/3} d^3r, \end{aligned}$$

что приводит к уменьшению плотности в центре и к увеличению на краю ядра. Однако в этой модели неправильно описывается поведение плотности в окрестности точки поворота, и необходимо учесть квантовые поправки (см. разд. 3). Результаты численного

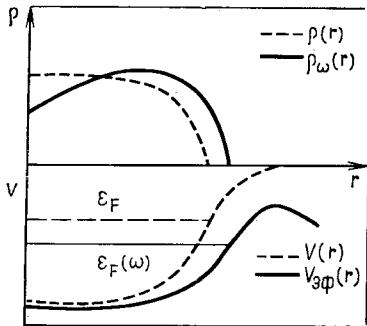


Рис. 1. Зависимость поведения плотности и потенциала от частоты вращения  $\omega$  в приближении Томаса — Ферми

исследования перераспределения плотности приводятся в разд. 4.

Вернемся к вычислению полного момента  $M$ , заданного (15), в линейном по  $\omega$  порядке. Члены, содержащие оператор  $\hat{l}_z$ , можно опустить при этом сразу, поскольку

$$\hat{l}_z \int d^3p' f_\omega(\mathbf{r}\mathbf{p}') = O(\omega^2)$$

согласно формуле (19).

Применяя преобразование (16), имеем

$$l_z = l'_z + \mu\omega(x^2 + y^2); \quad l'_z = x'p'_y - y'p'_x. \quad (20)$$

Одночастичный угловой момент представим в виде суммы внутренней и коллективной частей. Из последнего получим

$$M^{(0)} = \mu\omega \int (x^2 + y^2) \rho_\omega(r) d^3r = \omega J, \quad (21)$$

т. е. обобщение известного результата о том, что главная часть полного момента определяется классической формулой с моментом

инерции  $J$ , который определяется плотностью  $\rho_\omega$  (и тем самым содержит поправки на неоднородность). Пренебрегая зависимостью плотности от частоты  $\omega$ , получаем результат приближения Томаса — Ферми.

Интересно рассмотреть теперь квантовые поправки, связанные с членом  $l'_z$  в (15):

$$\delta M = 2 \int d^3r \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} l'_z f_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p}'). \quad (22)$$

Очевидно, что члены в  $f_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p}')$ , которые не содержат импульса  $p$ , не вносят вклад в поправки  $\delta M$  в линейном по  $\omega$  порядке. В остальных членах импульс входит везде в комбинации  $\mathbf{p}\nabla$ , которая после преобразования (16) дает

$$\mathbf{p}\nabla = \mathbf{p}'\nabla + i\mu\omega\hat{l}_z.$$

Имея для аксиально-симметричного потенциала  $\hat{l}_z p_0^2 = 0$ , сразу приходим к выводу, что только третий и последний члены выражения для функции распределения (13) вносят вклад в  $\delta M$ . От третьего члена получаем

$$\begin{aligned} \delta M^{(3)} = 2 \int d^3r \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} l'_z \left( -\frac{2}{3} \right) \times \\ \times (\mathbf{p}'\nabla + i\mu\omega\hat{l}_z) \mathbf{p}'\nabla p_0^2 \delta''(p_0'^2 - p'^2). \end{aligned}$$

При вычислении нужно учесть, что должны соблюдаться коммутационные соотношения, следующие из формулы (16):  $[\Delta_y, p'_x] = \mu\omega$ ,  $[\Delta_x, p'_y] = -\mu\omega$ , тогда

$$\delta M^{(3)} = \frac{2}{3} \frac{\mu\omega}{\pi^2} \int p_0(r) d^3r,$$

или, вводя плотность уровней у поверхности Ферми:

$$g(\varepsilon_F) = \frac{\mu}{\pi^2} \int p_0(r) d^3r,$$

имеем

$$\delta M^{(3)} = \frac{2}{3} g(\varepsilon_F) \omega. \quad (23)$$

Подобным образом вычисляется вклад последнего члена в (13):

$$\delta M^{(5)} = 2 \int d^3r \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} l'_z i \delta''(p_0'^2 - p'^2) 2\mu\omega \hat{l}_z \mathbf{p}\nabla p_0^2 = -g(\varepsilon_F) \omega.$$

В результате получаем

$$\delta M = \delta M^{(3)} + \delta M^{(5)} = -g(\varepsilon_F) \omega/3. \quad (24)$$

Интересно отметить, что в окончательной формуле для  $\delta M$  градиентная зависимость отсутствует. Непосредственно видно, что

$$\delta M \propto \int \frac{r^3 dp_0}{dr} dr.$$

Отсюда следует, что поправка  $\delta M$  обязана градиентным членам плотности и тем самым представляет собой поверхностный эффект. Только после интегрирования по частям возникает зависимость от плотности уровней.

Формула (24) напоминает хорошо известное выражение диамагнетизма Ландау. Эта аналогия на самом деле более глубокая, как было доказано Дабровским [7].

Помимо квантовой поправки от орбитального движения необходимо также учесть спиновую поляризацию. Включим для этой цели член  $-\omega \hat{S}_z$  в гамильтониан и вычислим среднее значение полного спина:

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \text{tr} (\delta \hat{\rho} \hat{S}_z) = \sum_{\nu} (\delta \rho)_{\nu\nu} (S_z)_{\nu\nu},$$

поскольку [12]

$$(\delta \rho)_{\nu\nu} = \frac{d\Theta(\epsilon_F - \epsilon_\nu)}{d\epsilon_F} \omega (S_z)_{\nu\nu},$$

имеем

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \delta M_S = \frac{\omega}{4} \frac{d}{d\epsilon_F} \int \rho(\epsilon_F, r) d^3r.$$

Пользуясь квазиклассическим выражением для плотности (19), получаем

$$\delta M_S = g(\epsilon_F) \omega / 4$$

в полной аналогии к парамагнетизму Паули. Учитывая (21), (24) и (25), приходим к полному выражению для членов первого порядка по  $\omega$ :

$$M = \omega (J - g(\epsilon_F)) / 12. \tag{26}$$

Для оценки роли квантовой поправки к полному моменту воспользуемся соотношениями:

$$J \sim (2/5) \mu R^2 A; \quad g(\epsilon_F) \sim 2\mu (8/3\pi^2)^{1/3} R^2 A^{1/3}.$$

Таким образом, находим  $\delta M/M \sim A^{-2/3}$ . Как следует из расчетов, приведенных в разд. 4, квантовые поправки составляют несколько процентов от полного момента. Однако, как обсуждается в следующем разделе, они существенны для правильного описания плотности в поверхностной области.

В заключение заметим, что описанную процедуру вычисления плотности можно также использовать при определении потока:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2\mu i} (\nabla - \nabla') \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}$$

Из выражения для смешанной плотности (6) следует

$$\mathbf{j} = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \frac{\mathbf{p}}{\mu} + \frac{\hat{\mathbf{p}}}{\mu} \right) f_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \tag{27}$$



После преобразования (16) получим для коллективной части тока  $\mathbf{j}_{\text{coll}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \rho_{\omega}(\mathbf{r})$ . Выражение для квантовой поправки довольно громоздкое. Оно приведено в [8], где авторы используют квазиклассический подход, подобный методу Киржница.

### 3. САМОСОГЛАСОВАНИЕ

До сих пор при рассмотрении вращения мы пренебрегали самосогласованием, пользуясь приближением внешнего потенциала. Формально соотношения для функции распределения  $f_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  остаются в силе, однако появление самосогласованного потенциала  $V_{\text{HF}}$  приводит к дополнительной зависимости от частоты  $\omega$ . Рассмотрим для простоты только прямую часть потенциала  $V_{\text{H}}$ , для которой можно написать

$$V_{\text{H}} = \frac{\delta}{\delta \rho_{\omega}^{\text{cl}}} (\text{tr } \hat{\rho}^{(1)} \hat{\rho}^{(2)} \hat{V} (12)), \quad (28)$$

при этом воспользуемся схематическим потенциалом, зависящим от импульса:

$$\hat{V} (12) = \alpha g(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) (\hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_2)^2. \quad (29)$$

Ввиду зависимости от импульса при вращении в потенциале  $V_{\text{H}}$  появляется член, пропорциональный  $\omega^2$ . Для следа в (28) имеем согласно определению функции распределения:

$$\begin{aligned} & \text{tr } (\hat{\rho}^{(1)} \hat{\rho}^{(2)} \hat{V} (12)) = \\ & = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} d^3 r_1 d^3 r_2 \alpha g(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) [(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 + \\ & \quad + (\hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_2)^2] f_{\omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) f_{\omega}(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2). \end{aligned} \quad (30)$$

Для интегрирования по импульсам пользуемся опять преобразованием (16), тогда

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 + \mu (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) \quad (31)$$

и в (30), очевидно, появляется член

$$\begin{aligned} & \alpha \mu^2 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} d^3 r_1 d^3 r_2 g(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2|) \times \\ & \quad \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))^2 f_{\omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) f_{\omega}(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2), \end{aligned} \quad (32)$$

который согласно (28) вносит вклад в  $V_{\text{H}}$ . Однако для  $\delta$ -образного взаимодействия  $g(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  вклад члена, прямо зависящего от  $\omega^2$ , обращается в нуль. Ситуация здесь аналогична влиянию магнитного поля на спин-орбитальную связь [9]. Полагая для простоты  $f_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \Theta(p_0^2 - p^2)$ , для  $\delta$ -силы получаем

из формул (28) и (30):

$$V_H = (8\alpha/15\pi^2) (3\pi^2)^{5/3} \rho_\omega^{5/3}(r) - 2\alpha\nabla^2\rho_\omega(r). \quad (33)$$

Таким образом, самосогласованный потенциал содержит зависимость от частоты  $\omega$  через плотность  $\rho_\omega(r)$ . Второй член в (36) приводит к тому, что уравнение для определения энергии Ферми (8) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\mu} (3\pi^2)^{2/3} \rho_\omega^{2/3} + \frac{8\alpha}{15\pi^2} (3\pi^2)^{5/3} \rho_\omega^{5/3} - 2\alpha\nabla^2\rho_\omega - \frac{1}{2} \mu\omega^2 (x^2 + y^2) = \varepsilon_F(\omega), \quad (34)$$

что представляет собой закон сохранения энергии. При последовательной записи необходимо включить все градиентные члены в функцию распределения  $f_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , учитывая формулу (13). В таком случае появляются дополнительные градиентные члены в кинетической энергии, которые мы не выписывали. Уравнение самосогласования (34) тем самым приобретает вид нелинейного дифференциального уравнения второго порядка для определения плотности  $\rho_\omega(r)$ . Существенно отметить, что при этом из рассмотрения выпадает локальный импульс Ферми  $\rho'_0$ , который обращается в нуль в классической точке оборота. Обыкновенная трудность метода Томаса — Ферми, связанная с расходимостью квантовых поправок в точке оборота, тем самым устранена. Однако уравнение (34) еще содержит центробежный член  $-\mu\omega^2(x^2 + y^2)/2$ , который, как обсуждалось в разд. 2, приводит к появлению нефизического барьера. Квантовая поправка  $\delta M$  (24), (25) компенсирует этот член в поверхностной области. Чтобы убедиться в этом, вводим функционал энергии:

$$E' = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{h}'). \quad (35)$$

Тогда, учитывая соотношения (11) и (15):

$$M = -\partial E'/\partial\omega. \quad (36)$$

Следовательно, в квадратичном по  $\omega$  порядке

$$E'(\omega) = E'(0) - \frac{1}{2} \mu\omega^2 \int ((x^2 + y^2)\rho - \frac{1}{6\pi^2} (3\pi^2)^{1/3} \rho^{1/3}) d^3r, \quad (37)$$

где для полного момента  $M(\omega)$  будем пользоваться выражением (26), включающим квантовую поправку. Заметим теперь, что условие самосогласования (34) представляет собой уравнение Эйлера — Лагранжа для вариационного принципа  $\delta E' = 0$  с дополнительным условием  $A = \int \rho_\omega(r) d^3r$ .

Легко видеть, что из-за квантовой поправки в (37) в уравнении самосогласования (34) появляется ротационный член:

$$-\mu\omega^2[(x^2 + y^2) - (3\pi^2)^{1/3} \rho_\omega^{-2/3}/18\pi^2]/2. \quad (38)$$

Квантовая поправка, пропорциональная  $\rho_\omega^{-2/3}$ , компенсирует в поверхностной области, где  $\rho_\omega \rightarrow 0$ , классическую центробежную энергию, и вследствие этого барьер исчезает.

В заключение заметим, что ввиду сложности прямого решения вариационного уравнения (34), где последовательно нужно включить квантовые поправки и пользоваться реалистическим взаимодействием, проведем приближенное решение вариационной задачи. Соответствующие результаты будут изложены ниже.

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ

Для исследования эффектов перераспределения плотности воспользуемся выражением для энергии, определенным как функционал плотности [3]. Подобный подход в случае без вращения [10] показал, что простой вид функционала позволяет с хорошей точностью восстановить усредненные результаты расчета по методу ХФ. Обобщая этот подход на случай вращения, примем

$$E[\rho] = |W_0| \int \left( -\frac{2\rho}{\rho} + \frac{\rho^2}{\rho^2} \right) \rho d^3r + \eta \int (\nabla\rho)^2 d^3r + \frac{1}{2F[\rho]} I^2, \quad (39)$$

где

$$W_0 = -16,44 \text{ МэВ}; \quad \bar{\rho} = 0,159 \text{ фм}^{-3}; \quad \eta = 78 \cdot 174 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^{-5}.$$

Функционал (39) можно понимать как аппроксимацию к энергии в лабораторной системе  $E = E' + \omega M$ , где  $E'$  дано выражением (35);  $M = \sqrt{I(I+1)} \approx I$ . Чтобы решить вариационную задачу  $\delta E = 0$  с дополнительным условием  $A = \int \rho d^3r$ , примем параметризованную форму плотности, определяя набор параметров из требования минимума  $E[\rho]$ . Подобная процедура для случая без вращения была обсуждена в [10, 11]. Используем следующие аналитические формы плотности:

$$\rho_I = \rho_0 / \{1 + \exp[(r-R)/a]\}; \quad (40)$$

$$\rho_{II} = \rho_0 \text{ sh}(R/a) / \{ \text{ch}(R/a) + \text{ch}(r/a) \}; \quad (41)$$

$$\rho_{III} = \rho_1 (1 + (9/2)(\mu\omega^2/K)(r^2 - r_1^2));$$

$$r_1^2 = (1/A) \int \rho(x^2 + y^2) d^3r. \quad (42)$$

Форму плотности  $\rho_{III}$  введем, чтобы явно учесть объемный эффект перераспределения плотности, причем  $K$  — коэффициент сжимаемости.

Ясно, что основное влияние вращения на плотность состоит в деформации формы ядра. В соответствии с этим примем

$$R = R_0 (1 - \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta)); \quad \beta_2 > 0.$$

Помимо параметра центральной плотности  $\rho_0$ , параметров деформации  $\beta_2, \beta_4$  учтем еще возможность анизотропного изменения параметра размытости  $a$ , принимая  $a = a_0 + a_2 \sin^2 \theta$ . Таким обра-

Таблица 1  
Зависимость распределения плотности и формы от спина  $I$   
для ядер в области  $40 \leq A \leq 100$  [3]

Параметры	$\beta_2$	$\beta_4$	$a_2$ , фм	$R_0$ , фм	$V(\overline{r^2})$ , фм	$\rho_{0,z}$ , фм <sup>-3</sup>	$E$ , МэВ	$I$ [h]
$A=40$ $a_0=0,42$ фм	—	—	—	3,91	3,41	0,144	-395,01	0
	—	—	—	4,07	3,52	0,128	-283,31	40
	—	—	0,11	3,93	3,55	0,136	-290,07	40
	0,52	—	0	4,00	3,64	0,128	-303,28	40
	0,53	—	0,06	3,92	3,66	0,132	-304,20	40
	0,54	0,06	—	3,99	3,65	0,127	-303,85	40
	0,56	0,08	0,07	3,90	3,69	0,132	-304,97	40
	0,57	0,08	0,07	3,90	3,70	0,132	-303,27	40
$A=60$ $a_0=0,43$ фм	—	—	—	4,46	3,80	0,148	-640,65	0
	—	—	—	4,59	3,89	0,137	-512,35	60
	—	—	0,06	4,52	3,91	0,141	-513,36	60
	0,48	—	—	4,52	4,01	0,136	-529,28	60
	0,49	—	0,05	4,46	4,03	0,139	-530,02	60
	0,49	0,05	—	4,51	4,02	0,136	-529,84	60
	0,50	0,06	0,05	4,45	4,05	0,139	-530,77	60
	0,52	0,07	0,05	4,45	4,06	0,139	-529,22	60
$A=80$ $a_0=0,43$ фм	—	—	—	4,90	4,13	0,151	-895,66	0
	—	—	—	5,01	4,20	0,141	-750,26	80
	—	—	0,04	4,97	4,21	0,144	-750,93	80
	0,45	—	—	4,94	4,32	0,140	-768,63	80
	0,46	—	0,04	4,90	4,33	0,143	-769,26	80
	0,46	0,05	—	4,94	4,33	0,141	-769,19	80
	0,47	0,06	0,04	4,89	4,35	0,143	-769,99	80
	0,48	0,06	0,04	4,89	4,36	0,143	-768,56	80
$A=100$ $a_0=0,44$ фм	—	—	—	5,28	4,40	0,152	-1156,93	0
	—	—	—	5,38	4,47	0,144	-997,15	100
	—	—	0,03	5,34	4,48	0,146	-997,63	100
	0,43	—	—	5,31	4,59	0,144	-1016,66	100
	0,44	—	0,03	5,27	4,60	0,146	-1017,21	100
	0,44	0,04	—	5,31	4,60	0,144	-1017,22	100
	0,45	0,05	0,04	5,26	4,61	0,146	-1017,92	100
	0,46	0,05	0,04	5,26	4,62	0,146	-1016,58	100

зом, полный вариационный расчет содержит четыре параметра  $\rho_0, \beta_2, \beta_4, a_2$ .

В целях качественных оценок удобно разлагать энергию  $E[\rho]$  (39) по степеням  $a_0/R_0$ , что соответствует капельной модели (угловую зависимость для простоты не учитываем). Пользуясь параметр-

ризации (40), имеем

$$E/A = -|W_0| + |W_0|(1,5 + \eta\rho_0/2a_0^2)(a_0/R_0) + 3|W_0|(a_0^2/R_0^2) + 5I^2/\{4\mu A^2 R_0^2[1 + (7/3)(\pi a_0/R_0)^2]\}. \quad (43)$$

Из соотношения (43) получаем оценку уменьшения центральной плотности благодаря вращению со спином  $I$ :

$$\delta\rho/\rho = (\rho_0 - \bar{\rho})/\bar{\rho} = -(1/3) E_{\text{rot}}/|E_{\text{v01}}| \sim I^2 A^{-8/3}. \quad (44)$$

Соответственно имеем увеличение радиуса  $\delta R/R \sim (1/9) E_{\text{rot}}/|E_{\text{v01}}|$ . Подобным образом, фиксируя  $\rho_0 = \bar{\rho}$ , получаем максимальную оценку увеличения толщины поверхностного слоя:

$$\frac{\delta a}{a_0} \sim \frac{14\pi^2}{3} \frac{E_{\text{rot}}}{E_{\text{surf}}} \left(\frac{a_0^3}{R_0^3}\right) \sim I^2 A^{-3}. \quad (45)$$

Включая также деформацию, можно видеть [3], что

$$(5/4\pi)^{1/2} \beta_2 \sim E_{\text{rot}}/E_{\text{surf}}. \quad (46)$$

Из оценок следует ожидаемый порядок эффектов перераспределения плотности и деформации при вращении. Очевидно, что только в легких ядрах и при максимальных спинах  $I \sim A$  имеется заметное влияние вращения на распределение плотности.

Результат численных расчетов с вариацией параметров  $\rho_0$ ,  $a_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_4$  приведен в табл. 1. Видно, что без включения деформации получается заметное уменьшение центральной плотности, которое соответствует (44). При учете вариации параметра  $a_2$  возникает прирост толщины поверхностного слоя, который для  $A = 40$ ,  $I = 40$  составляет на экваторе 25%. При этом центральная плотность увеличится. Включение деформации уменьшает анизотропию размытости, а центральная плотность снова падает.

Все результаты, приведенные в табл. 1, были получены для параметризации плотности (41). Для плотности  $\rho_{\text{I}}$  в соответствии с (40) получают близкие данные. Однако плотность  $\rho_{\text{II}}$  (42) в некоторых случаях при  $I = A$  дает уменьшение энергии связи на 10 — 15 МэВ, при этом вариации параметров примерно такие же, как для плотности  $\rho_{\text{II}}$ .

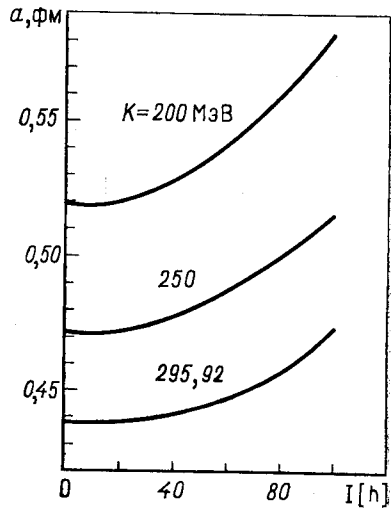


Рис. 2. Зависимость параметра размытости на экваторе  $a = a + a_2$  от углового момента  $I$  при различных значениях коэффициента сжимаемости  $K$

Зависимость распределения плотности и деформации от спина  $I$  при учете кулоновской энергии [3]

Параметры	$\beta_2$	$\beta_4$	$a_2$ , фм	$R_L$ , фм	$\sqrt{\frac{r^2}{\text{фм}}}$	$\rho_0$ , фм <sup>-3</sup>	$E$ , МэВ	$E_{\text{сoul}}$ , МэВ	$E_{\text{tot}}$ , МэВ	$I$ , [h]
$A=40$	—	—	—	3,96	3,45	0,138	-315,94	78,52	—	0
$a_0=0,42$ фм	0,61	0,08	—	4,04	3,74	0,121	-229,41	74,40	72,29	40
	0,63	0,40	0,08	3,93	3,79	0,127	-230,47	73,66	70,06	40
$A=60$	—	—	—	4,54	3,86	0,140	-482,19	157,19	—	0
$a_0=0,43$ фм	0,58	0,08	—	4,58	4,14	0,128	-477,90	150,40	87,89	60
	0,61	0,09	0,07	4,49	4,18	0,132	-379,45	149,25	85,43	60
$A=80$	—	—	—	5,01	4,21	0,141	-636,48	256,33	—	—
$a_0=0,44$ фм	0,56	0,06	—	5,02	4,47	0,132	-519,93	246,25	104,84	80
	0,61	0,09	0,07	4,93	4,53	0,135	-521,31	244,53	96,60	80
$A=100$	—	—	—	5,36	4,48	0,145	-777,63	375,90	—	0
$a_0=0,45$ фм	0,60	0,07	—	5,37	4,81	0,133	-652,43	358,56	108,68	100
	0,65	0,4	0,07	5,28	4,87	0,137	-653,56	355,65	103,28	100

Естественно, что приведенные результаты чувствительны к выбору коэффициента сжимаемости. Параметризации функционала энергии в виде (39) соответствует  $K = 295,92$  МэВ. Чтобы показать влияние сжимаемости, на рис. 2 приведена спиновая зависимость толщины размытости на экваторе  $a = a_0 + a_2$  для различных значений коэффициента сжимаемости. Наконец, коротко обсудим влияние кулоновской энергии. Принимая  $\rho_p = \rho_n$ , включим [3]

$$E_{\text{coul}} = \frac{e^2}{2} \int \frac{\rho_p(r) \rho_p(r')}{|r-r'|} d^3r d^3r'$$

в функционал энергии (39). Не только деформация, но и эффекты перераспределения плотности при этом увеличиваются, как видно из табл. 2. Таким образом, для ядер с  $A < 100$  уменьшение центральной плотности и увеличение плотности на экваторе могут привести к интересным последствиям. Для более тяжелых ядер предположение аддитивности капельной и деформационной энергий, принятое в [4], вполне оправдано.

### 5. УЧЕТ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЭФФЕКТОВ

До сих пор была рассмотрена только гладкая часть  $M(\omega)$  в пренебрежении оболочечными эффектами. Однако для случая вращения сферического ядра на самом деле появление углового момента  $M(\omega)$  — чисто квантовый эффект, обязанный пересечению уровней с ростом частоты  $\omega$ . Сферические оболочки  $(nlm)$  при включении члена  $-\omega \hat{l}_z$  в одночастичный гамильтониан расщепляются по квантовому числу  $m$  (рис. 3).

Пока нет пересечений ( $\omega < \omega_1$ ), полный угловой момент равен нулю. Когда при  $\omega = \omega_1$  нижний незанятый уровень пересечет границу Ферми скачком, появится угловой момент, соответ-

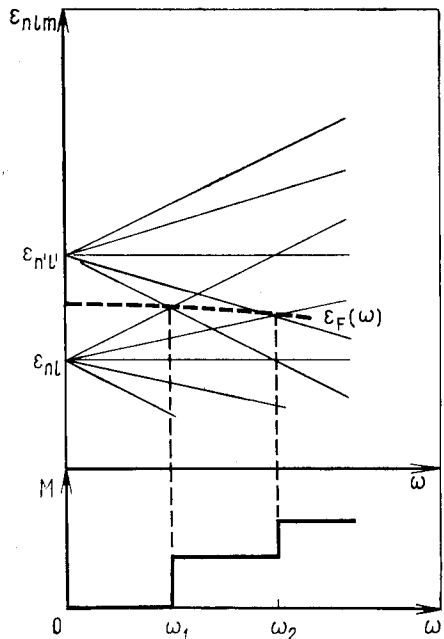


Рис. 3. Пересечение различных одночастичных уровней с включением вращения

вующий возбуждению состояния частица — дырка. При дальнейшем увеличении частоты имеются новые скачки, которые прямо отражают оболочечную структуру. Только после усреднения с масштабом расщепления оболочки появляется гладкая зависимость полного момента от частоты. Недостаток нашего описания — введение усреднения с самого начала. Оказывается, что можно провести квазиклассическое рассмотрение с включением оболочечных эффектов [3], обобщая метод, разработанный для расчета оболочечных эффектов плотности [6]. При этом необходимо учесть квантование в рамках метода Бора — Зоммерфельда.

Определим сначала полный момент по квантовомеханической формуле:

$$M(\omega) = 2 \sum_{\nu, m} \Theta(\epsilon_F - \epsilon_\nu + m\omega) m \int |\psi_{\nu m}|^2 d^3r. \quad (47)$$

Здесь  $\nu \equiv (n, l)$ , а пределы суммирования видны из рис. 3. Чтобы вычислить волновую функцию, необходимо воспользоваться приближением ВКБ:

$$\psi_{\nu m} = (C_\nu/r \sqrt{p_\nu}) \sin(S_\nu + \pi/4) Y_{lm}, \quad (48)$$

где  $S_\nu$  — укороченное действие;  $S_\nu = \int_1^r p_\nu(r') dr'$ ;  $p_\nu$  — классический радиальный импульс  $p_\nu = (2\mu(\epsilon_\nu - V) - (l + 1/2)^2/r^2)^{1/2}$  и  $r_1$  определяется левой точкой поворота для движения в потенциальной яме с орбитальным моментом  $l$ . Наконец, коэффициент нормировки  $c_\nu$  в (48) находится соотношением  $C_\nu^2 = 2\mu/\tau_{0\nu}$ , где  $\tau_{0\nu}$  — время прохождения частицы от левой точки поворота ( $r_1$ ) до правой точки поворота ( $r_2$ ), т. е.

$$\tau_{0\nu} = \int_{r_1}^{r_2} \mu dr/p_\nu; \quad (49)$$

сумму по главному квантовому числу  $n$  в (47) теперь заменим интегралом, пользуясь формулой Пуассона:

$$\sum_{n=a}^b f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_a^b f(n) \cos(2k\pi n) dn. \quad (50)$$

С помощью условия квантования Бора — Зоммерфельда

$$S_{0\nu} = \int_{r_1}^{r_2} p_\nu(r) dr = \omega(n + 1/2), \quad (51)$$



тогда следует для полного момента  $M$  из (47) — (49):

$$M(\omega) = 2\mu \sum_{lm} m \sum_{h=-\infty}^{\infty} \int dr d\Omega \int \frac{dn}{\tau_{0v} p_v} \cos(2k\pi n) \times \\ \times (1 + \sin 2S_v) |Y_{lm}|^2. \quad (52)$$

В дальнейшем вкладом члена, содержащего  $\sin 2S_v$ , пренебрегаем, поскольку он описывает оболочечные флуктуации плотности, которые после интегрирования по радиусу несущественны.

В (50) проводим интегрирование, заменяя переменную  $n$  энергией  $\varepsilon$ , причем верхний предел определяем соотношением

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_F(\omega) + m\omega, \quad (53)$$

а нижний предел  $\varepsilon_{\text{МИН}}$  находим из требования  $p_l(\varepsilon_{\text{МИН}}) = 0$ . Учитывая, что  $\partial S_{0v} / \partial \varepsilon_v = \tau_{0v} = \pi dn / d\varepsilon_v$ , получаем

$$M(\omega) = \frac{2\mu}{\pi} \sum_{lm} m \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-)^h \int dr \int_{\varepsilon_{\text{МИН}}}^{\tilde{\varepsilon}} \frac{d\varepsilon}{p_l(\varepsilon)} \cos(2kS_{0l}(\varepsilon)). \quad (54)$$

Сумму по  $k$  разделим на две части. В первой положим  $k = 0$ . Тогда, обозначая соответствующую долю полного момента  $M^{(0)}$ , имеем после интегрирования:

$$M^{(0)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{lm} m S_{0lm}, \quad (55)$$

где  $S_{0lm}$  — зависящее от проекции  $m$  действие

$$S_{0lm} = \int_{r_1}^{r_2} (2\mu(\tilde{\varepsilon} - V) - (l + 1/2)^2 / r^2)^{1/2} dr. \quad (56)$$

Оказывается, что  $M^{(0)}$  — гладкая часть полного момента  $M$  и приблизительно равняется  $M_{\text{ТФ}}$  [см. ниже, формулу (66)]. Это можно было ожидать, поскольку при  $k = 0$  имеем

$$\sum_n f_n = \int f(\varepsilon) \rho(\varepsilon) d\varepsilon,$$

что приводит к пренебрежению оболочечных флуктуаций. Чтобы вычислить остаток в (52), соответствующий  $k \neq 0$ , необходимо только учесть первый член после интегрирования по частям. Тогда

$$\int_{\varepsilon_{\text{МИН}}}^{\tilde{\varepsilon}} \frac{d\varepsilon}{p_l(\varepsilon)} \cos(2kS_{0lm}) = \frac{1}{2k\tau_{0l}p_l(\tilde{\varepsilon})} \sin(2kS_{0lm}).$$

Принимая во внимание соотношение (49), получаем

$$M^{(1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{lm} m \sum'_{k=-\infty}^{\infty} (-)^k \frac{\sin(2kS_{0lm})}{2k}. \quad (57)$$

Для вычисления суммы по  $k$  заметим, что аргумент  $\tilde{\epsilon}$  при определенных значениях проекции  $m$  и частоты  $\omega$  может равняться одному из собственных значений  $\epsilon_n$ . Поэтому с учетом правила квантования (57) для интервала  $\epsilon_{n1} \leq \tilde{\epsilon} \leq \epsilon_{n+1,1}$  можно писать

$$S_{0lm} = [S_{0lm}] + (n+1)\pi, \quad (58)$$

где  $[S_{0lm}]$  изменяется в пределах  $-\pi/2 < [S_{0lm}] < \pi/2$ . Пользуясь определением функции  $[S_{0lm}]$ , из (57) получаем

$$\sum'_{-\infty}^{\infty} \frac{(-)^k \sin(2kS_{0lm})}{2k} = \sum'_{-\infty}^{\infty} (-)^k \frac{\sin(2k[S_{0lm}])}{2k} = -[S_{0lm}], \quad (59)$$

откуда следует оболочечная поправка в виде

$$M^{(1)} = -\frac{2}{\pi} \sum_{lm} m [S_{0lm}]. \quad (60)$$

Вместе с гладкой частью (55) имеем

$$M = \frac{2}{\pi} \sum_{lm} m (S_{0lm} - [S_{0lm}]). \quad (61)$$

Чтобы понять смысл этой формулы, рассмотрим коротко определение числа частиц таким же методом. Имеем по аналогии с (61) для одномерного случая без вращения:

$$N = \frac{2}{\pi} (S_0(\epsilon_F) - [S_0'(\epsilon_F)]) \equiv N^{(0)} + N^{(1)}. \quad (62)$$

Это соотношение позволяет определить число частиц в зависимости от положения энергии Ферми. Как функция от  $\epsilon_F$ , выражение  $[S_0(\epsilon_F)]$  имеет скачки при прохождении через собственное значение  $\epsilon_F = \epsilon_n$ , а действие  $S_0$  непрерывно растет. Совместное поведение обеих частей функции  $N(\epsilon_F)$  видно из рис. 4. Каждый раз, когда новый уровень проходит через энергию Ферми, скачкообразно растет число частиц.

Для углового момента, заданного формулой (61), поведение подобно. Рассмотрим сначала такие значения частоты  $\omega$ , когда еще нет пересечений оболочек (см. рис. 3,  $\omega < \omega_1$ ). Для всех возможных значений  $m$  аргумент  $\tilde{\epsilon} = \epsilon_F + m\omega$  тогда принимает значения в интервале  $\epsilon_{n1} < \tilde{\epsilon} < \epsilon_{n+1,1}$  ( $\epsilon_{n1}$  — последняя занятая,

$\epsilon_{n,l'}$  — первая незанятая оболочка), и по формулам (58) и (61):

$$M = \frac{2}{\pi} \sum_{lm} m(n+1)\pi = 0$$

в согласии с квантовомеханическим результатом. Напомним, что для замкнутой оболочки без пересечений гладкая часть  $M^{(0)} \neq 0$ , так что имеем случай, когда оболочечная поправка полностью компенсирует гладкую часть. В общем случае

$$\partial M^{(0)}/\partial \omega = -\partial M^{(1)}/\partial \omega, \quad \tilde{\epsilon} \neq \epsilon_v, \quad (63)$$

из чего следует  $M = \text{const}$ ,  $\tilde{\epsilon} \neq \epsilon_v$ . Рассмотрим теперь первое пересечение уровней при  $\omega = \omega_1 (\epsilon_{n,l'} - \epsilon_n)/(l' + l)$  (см. рис. 3). Тогда нижнее значение аргумента  $\epsilon$ :  $\tilde{\epsilon}_{\text{мин}} = \epsilon_F - \omega l$  ( $m = -l$ ) проходит через точку  $\epsilon_{nl}$ , а одновременно  $\epsilon_{\text{макс}} = \epsilon_F + \omega l'$  ( $m' = l'$ ) пересекает  $\epsilon_{n,l'}$ . Эти пересечения сопровождаются скачками функций  $[S_{0lm}] = \pm \pi$  при  $m = -l$  и  $m' = l'$ , в то время

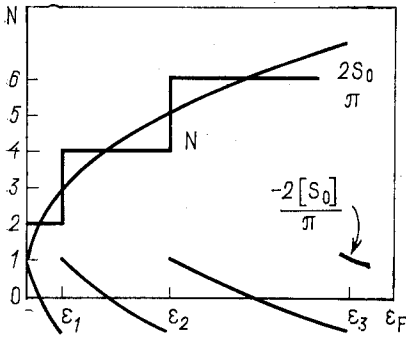


Рис. 4. Зависимость числа частиц  $N$  и функций  $S_0$  и  $[S_0]$  от энергии Ферми  $\epsilon_F$  для одномерного движения

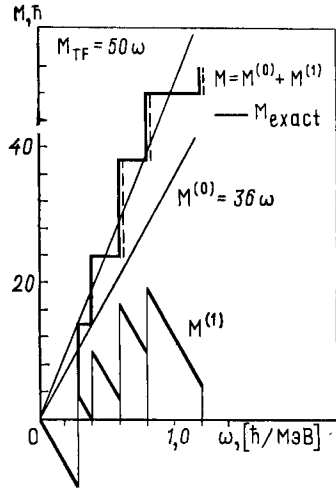


Рис. 5. Зависимость полного углового момента  $M$  от частоты  $\omega$ . Точный квантовомеханический результат совпадает с  $M = M^{(0)} + M^{(1)}$  для  $\omega \leq 0,6$  МэВ. Массовое число  $A = 208$ . Показан только вклад нейтронов

как  $S_{0lm}$  остается непрерывной функцией в окрестности  $\epsilon_{nl}$ ,  $\epsilon_{n,l'}$ . С учетом формулы (61) возникает полный угловой момент  $M = 2(l + l')$  в согласии с квантовомеханическим результатом.

Общий случай удобно исследовать численно [3]. Результат такого расчета для  $A = 208$  показан на рис. 5. Для потенциала  $V(r)$  мы воспользовались формулой Вудса — Саксона с парамет-

рами, взятыми из [12]. Энергия Ферми фиксировалась заданием  $A$ . На рис. 5 показан только полный момент нейтронов, спин-орбитальную связь не учитывали. При расчете сумма по  $(l, m)$  берется по всем значениям, для которых существуют уровни. Максимальное значение  $l$  имеет порядок  $R\rho_F$ . До значений частот  $\omega \leq 0,6$  МэВ/ $\hbar$  квазиклассический расчет по (64) совпадает с точным квантовомеханическим выражением. Интересно отметить, что гладкая часть  $M^{(0)}$ , несмотря на то, что она еще содержит сумму по  $(l, m)$  [см. (55)], численно оказалась точно прямой, однако  $M^{(0)} < M_{TF}$ . Это обстоятельство можно понять, если проследить, как получается  $M_{TF}$  в настоящем подходе.

С помощью формулы (61) легко вывести приближенные выражения для  $M^{(0)}$  и  $M^{(1)}$ . Чтобы вычислить  $M^{(0)}$ , достаточно разложить действие  $S_{0lm}$  по  $\omega$  при условии, что эта функция везде непрерывна. Из уравнения

$$S_{0lm} = S_{0l}(\epsilon_F) + \mu m \omega \int \frac{dr}{p_l(\epsilon_F)} \quad (64)$$

имеем, оставляя для удобства в (54) множитель  $\int |Y_{lm}|^2 d\Omega$ :

$$M^{(0)} = \frac{2}{\pi} \mu \omega \int dr d\Omega \sum_{lm} m^2 |Y_{lm}|^2 \frac{1}{p_e(\epsilon_F)}. \quad (65)$$

С помощью квазиклассического выражения [13]:

$$\sum_{m=-l}^l m^2 |Y_{lm}|^2 = \frac{(l+1/2)^3}{2\pi^2} \frac{\pi}{2} \sin^2 \theta \quad (66)$$

после замены суммы по  $l$  интегралом в пределах от  $l=0$  до  $l=R\rho_F$  имеем

$$M^{(0)} = \frac{\mu\omega}{3\pi^2} \int r^4 \sin^2 \theta dr d\Omega (2\mu(\epsilon_F - V))^{3/2} = M_{TF}, \quad (67)$$

что совпадает с результатом метода Томаса — Ферми (21). Заметим, что верхний предел интегрирования выбран так, чтобы вкладом соответствующего уровня можно было пренебречь. С этим обстоятельством связано различие между численным значением  $M_{TF}$  и  $M^{(0)}$  (см. рис. 5).

Для приближенного вычисления поправки  $M^{(1)}$  пользуемся выражением (59) и раскладываем опять  $S_{0lm}$  вокруг  $\epsilon_F$  (см. 64). Из (60) следует

$$M^{(1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{lm} m \int |Y_{lm}|^2 dr d\Omega \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2kS_{0l}(-)^k \frac{\sin(2k\omega m \tau_{0l})}{k}. \quad (68)$$

Аналогично соотношению (65) можно теперь вычислить сумму по

$m$  в квазиклассическом приближении:

$$\sum_{m=-l}^l m \sin(2k\omega m\tau_{0l}) |Y_{lm}|^2 = \frac{(l+1/2)^2}{2\pi} \sin\theta J_1(2k\omega\tau_{0l} \sin\theta (l+1/2)) \quad (69)$$

и окончательно провести интегрирование по  $\theta$ , что даст

$$M^{(1)} = \frac{2}{\pi} \sum_l \sum_{k=1}^{\infty} (-)^k \int dr (l+1/2)^2 \cos 2kS_{0l} \frac{2j_1(2k\omega\tau_{0l}(l+1/2))}{k}. \quad (70)$$

Этим выражением можно пользоваться для асимптотических оценок. По своей структуре оно подобно выражению, полученному в работе [2] суммированием классических траекторий.

Для маленьких частот  $\omega \rightarrow 0$  из (69) следует после суммирования и интеграции по  $l$ , что  $M^{(1)} = -M^{(0)}$  в соответствии с общим результатом (63). Для оценок можно в (70) ограничиться только вкладом последней занятой ( $nl$ ) и первой незанятой оболочки ( $n'l'$ ) и учесть только первый член суммы по  $k$ . Тогда, принимая  $l' = l$ , получаем для амплитуды оболочечной поправки  $M^{(1)} \sim (4/\pi) l^2 j_1(2\omega\tau_{0l}l)$ . Первый минимум этого выражения достигается при  $\omega = \omega_{\min}$ , причем  $\omega_{\min} = 0,8\pi/(2\tau_{0l}l)$ . Учитывая, что  $\tau_{0l} \sim \pi\Delta r/\Delta\varepsilon$ , где  $\Delta\varepsilon$  — средняя разность уровней вблизи поверхности Ферми  $\Delta\varepsilon = 2\varepsilon_F/(3A)$  МэВ, имеем  $\omega_{\min} = 0,8\Delta\varepsilon/\alpha l \sim \omega_1$ , где  $\omega_1$  определяется первым пересечением уровней  $\omega_1 = (\varepsilon_{n'l'} - \varepsilon_{nl})/(l+l')$ . Для растущих значений частот  $M^{(1)}$  затухает, отражая уменьшение квантовых флуктуаций при больших спинах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brack M., Jennings B. K.— Nucl. Phys. A., 1976, v. 258, p. 264.
2. Коломиец В. М., Магнер А. Г., Струтинский В. М.— Ядерная физика, 1979, т. 29, с. 1479.
3. Münchow L., Schulz H.— Phys. Lett. B, 1977, v. 71, p. 27; Preprint NBI 78-7; J. Phys. G: Nucl. Phys., 1979, v. 5, p. 527; Phys. Lett. B, 1980, v. 90, p. 9; J. Phys. G: Nucl. Phys., 1980, v. 6, p. 193.
4. Киржниц Д. А. Полевые методы теории многих частиц. М., Госатомиздат, 1963.
5. Cohen S., Plasil F., Swiatecki W.— Ann. Phys., 1974, v. 82, p. 557.
6. Киржниц Д. А., Шпатаковская Г. В.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 2083.
7. Dabrowski J.— Phys. Lett. B, 1976, v. 59, p. 132.
8. Grammaticos B., Voros A.— Ann. Phys., 1979, v. 123, p. 359.
9. Мигдал А. Б. Теория конечных Ферми-систем и свойства атомных ядер. М., Наука, 1965.
10. Dworzecka M., Moszkowski S. A.— Phys. Rev. C, 1975, v. 12, p. 619.
11. Brueckner K. A. e.a.— Phys. Rev., 1979, v. 181, p. 1543.
12. Dessing T., Frauendorf S., Schulz H.— Nucl. Phys. A, 1977, v. 287, p. 137.
13. Мигдал А. Б. Качественные методы в квантовой теории. М., Наука, 1975.