«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1982, том 13, вып. 3

УДК 539.12

КВАНТОВЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А. Г. Изергин

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

В. Е. Корепин

Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР

Обзор посвящен изложению схемы квантового метода обратной задачи и его применению к решению двумерных нелинейных моделей квантовой теории поля.

The general scheme of the quantum inverse scattering method is presentedf This method is applied for solving the two-dimensional nonlinear models of the quantum field theory.

ВВЕДЕНИЕ

В 1967 г. был открыт метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [1], который позволил найти обширный класс двумерных нелинейных эволюционных уравнений, допускающих явное решение. Дальнейшее развитие МОЗР основывалось на результатах работы [2], в которой выявлен алгебраический механизм метода, и на работе [3], в которой дана его гамильтонова интерпретация. Гамильтоновы системы, соответствующие этим уравнениям, являются вполне интегрируемыми и обладают бесконечным числом законов сохранения. Замечательно, что многие из этих уравнений описывают конкретные физические явления [4].

В последнее время возник [5—9] квантовый метод обратной задачи (КМОЗ). Его основные положения сформулированы Л. Д. Фаддеевым в работе [6]. С тех пор метод интенсивно развивается [10—16]; многие задачи, поставленные в [6], уже решены. По мере создания КМОЗ выяснилась его тесная связь со следующими методами современной математической физики. Во-первых, это метод построения явных формул для собственных функций некоторых квантовомеханических гамильтонианов (анзатц Бете) [17—19]. Существенным достижением КМОЗ явилось создание алгебраической схемы анзатца Бете. Во-вторых, это метод решения двумерных решеточных моделей классической статистической физики, развитый в работах [20—23]. КМОЗ позволяет по-новому взглянуть [8] на эти точно решаемые модели и дает изящную интерпретацию метода их решения, обобщая его и позволяя применить для решения других моделей статфизики. В таких моделях КМОЗ дает возможность вычислять физические величины, например статсумму, температуру фазового перехода и критические индексы. Следует отметить и связь КМОЗ с методом факторизованных S-матриц [24]. КМОЗ также позволяет решать физически интересные модели двумерной квантовой теории поля; в этих моделях с помощью КМОЗ удается построить физический вакуум как море Дирака, описать возбуждения (вычислить спектр ренормированного гамильтониана), получить структурные функции физических частиц (плотность шубы виртуальных частиц, окружающих затравочную частицу) и построить S-матрицу наблюдаемых частиц. Тем самым КМОЗ позволяет последовательно решать квантовополевые модели в рамках единого подхода, естественным образом объединяя многие результаты, полученные различными методами. Обратим внимание, что КМОЗ позволяет выйти за рамки теории возмущений, более того, он дает точные ответы.

В этом обзоре рассмотрено в основном применение КМОЗ к квантовополевым моделям. Материал распределен в обзоре так. В разд. 1 введено понятие классической, а разд. 2 — квантовой R-матрицы. Здесь описываются также модели теории поля, которые в дальнейшем решаются с помощью КМОЗ. В разд. 3 строится схема алгебраического анзатца Бете на примере нелинейного уравнения Шредингера. Разд. 4—7 посвящены решению квантовополевой модели синус-Гордон и эквивалентной ей массивной модели Тирринга. В разд. 8 рассматриваются соотношения Янга — Бакстера, на основе которых в разд. 9 формулируются фундаментальные решеточные модели статистической физики. Наконец, в разд. 10 рассматривается изотопическая модель Тирринга.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ r-МАТРИЦА

В настоящее время МОЗР является развитой областью математической физики (см. [4]). В этом разделе мы изложим общие сведения из МОЗР (здесь сформулированы лишь сведения, необходимые для квантования), которые проиллюстрированы на конкретных примерах в конце раздела.

Пусть мы имеем некоторое гамильтоново нелинейное эволюционное уравнение в двумерном пространстве — времени (x — пространственная, t — временная координаты). Гамильтониан обозначим H. Рассмотрим периодическую задачу на интервале длины $2L$ $(-L \leqslant x \leqslant L)$. Традиционным основанием для применения МОЗР к такому уравнению является представление его в форме Лакса:

$$[\partial_t - M(x \mid \lambda),\ \partial_x + Q(x \mid \lambda)] = 0. \tag{1}$$

Здесь M и Q — квадратные матрицы размерности $K \times K$ (K зависит от конкретного уравнения). Эти матрицы зависят от спектрального параметра λ и динамических переменных задачи. Зависимость от t в формулах мы не выписываем.

Уравнение (1) возникает естественным образом как требование совместности вспомогательных линейных уравнений:

$$(\partial_x + Q(x \mid \lambda))\, \Psi(x \mid \lambda) = 0; \quad \partial_t \Psi(x \mid \lambda) = M(x \mid \lambda)\, \Psi(x \mid \lambda).$$

При квантовании понадобится перенести представление Лакса (1) на периодическую решетку с N узлами и шагом Δ:

$$\partial_t L(n \mid \lambda) = M(n+1 \mid \lambda)\, L(n \mid \lambda) - L(n \mid \lambda)\, M(n \mid \lambda). \quad (2)$$

В дальнейшем удобно рассматривать непрерывные модели, вводя инфинитезимальную ($\Delta \to 0$) решетку. При этом координата n-го узла решетки есть $x_n = n\Delta - L$; $n = 1, \ldots, N$; $N = 2L/\Delta$. Переход на такую решетку осуществляется при следующем отождествлении:

$$L(n \mid \lambda) \approx I - Q(x_n \mid \lambda)\, \Delta + O(\Delta^2); \quad (3)$$

здесь I — единичная $K \times K$-матрица.

Важный объект в МОЗР — матрица монодромии T, которая для интервала $[x, y]$ определяется в непрерывном случае так:

$$[\partial_x + Q(x \mid \lambda)]\, T(x, y \mid \lambda) = 0; \quad T(y, y \mid \lambda) = I; \quad x \geqslant y. \quad (4)$$

Решеточная матрица монодромии от m-го до n-го узла есть $T(n, m \mid \lambda) = L(n \mid \lambda)\, L(n-1 \mid \lambda) \ldots L(m \mid \lambda)$; $n \geqslant m$. (5)

След матрицы монодромии на полном интервале в непрерывном и решеточном случаях:

$$\tau(\lambda) = \operatorname{tr} T(L, -L \mid \lambda); \quad \tau(\lambda) = \operatorname{tr} T(N, 1 \mid \lambda) \quad (6)$$

играет особенно важную роль. С помощью матрицы T легко построить переменные действие — угол для исходного гамильтониана H, если удастся вычислить скобки Пуассона (СП) между ее матричными элементами. В последнее время возник особенно эффективный способ вычисления таких СП, основанный на классической r-матрице [25]. Если удастся представить СП между элементами матрицы Q (1) в виде

$$\{Q(x \mid \lambda) \underset{,}{\otimes} Q(y \mid \mu)\} =$$
$$= \delta(x - y)\, [r(\lambda, \mu),\, Q(x \mid \lambda) \otimes I + I \otimes Q(x \mid \mu)], \quad (7)$$

то интересующие нас СП имеют вид:

$$\{T(x, y \mid \lambda) \underset{,}{\otimes} T(x, y \mid \mu)\} = [T(x, y \mid \lambda) \otimes T(x, y \mid \mu),\, r(\lambda, \mu)]. \quad (8)$$

Тензорные обозначения см. в Приложении 1. Квадратные скобки в правой части означают матричный коммутатор двух $K^2 \times K^2$-матриц; r — это числовая $K^2 \times K^2$-матрица с элементами, зависящими от λ и μ. Аналогом этих формул в дискретном случае являются следующие:

$$\{L(n \mid \lambda) \underset{,}{\otimes} L(m \mid \mu)\} = \delta_{mn} [L(n \mid \lambda) \otimes L(n \mid \mu), r(\lambda, \mu)]; \tag{9}$$

$$\{T(n, m \mid \lambda) \underset{,}{\otimes} T(n, m \mid \mu)\} = \\ = [T(n, m \mid \lambda) \otimes T(n, m \mid \mu), r(\lambda, \mu)]. \tag{10}$$

В Приложении 2 мы приводим простой вывод [14] формул (8), (10), причем в более общей ситуации, где r может зависеть от динамических переменных. Из (7) и (9) очевидно, что r-матрица определена с точностью до скалярного слагаемого fE. Хотя существование r-матриц *a priori* не очевидно, тем не менее они существуют для большинства моделей, решенных с помощью МОЗР.

Важным следствием существования r-матрицы является наличие бесконечного числа законов сохранения. Действительно, из (6), (8), (10) следует, что

$$\{\tau(\lambda), \tau(\mu)\} = 0. \tag{11}$$

В физических моделях H выражается через логарифмические производные $\tau(\lambda)$ [см. (15), (21) и (26)]; эти формулы являются примером тождеств следов [26]. Тем самым [11] показывает, что $\{H, \tau(\lambda)\} = 0$. Это и дает законы сохранения. Фундаментальность r-матрицы состоит в том, что она заменяет M-оператор. Можно показать [25], что если задан гамильтониан, существуют L-оператор, r-матрица и тождества следов, то исходное нелинейное уравнение представимо в лаксовом виде. Поэтому в дальнейшем мы не выписываем M-операторов. Приведем примеры.

1. Нелинейное уравнение Шредингера (НШ)

$$i\partial_t\psi = -\partial_x^2\psi + 2\varkappa\psi^*\psi\psi$$

решено с помощью МОЗР в [27]. Оно является гамильтоновым:

$$H = \int dx\, (\partial_x\psi^*\partial_x\psi + \varkappa\psi^*\psi^*\psi\psi); \tag{12}$$

$$\{\psi(x), \psi^*(y)\} = i\delta(x - y).$$

Операторы числа частиц q и импульса P

$$q = \int \psi^*\psi dx; \quad P = -i\int \psi^*\partial_x\psi dx \tag{13}$$

коммутируют с H. Это уравнение представимо в лаксовом виде (1), причем

$$Q(x \mid \lambda) = i\begin{pmatrix} \lambda/2; & \sqrt{\varkappa}\,\psi^*(x) \\ -\sqrt{\varkappa}\,\psi(x); & -\lambda/2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий L-оператор на инфинитезимальной решетке имеет вид:

$$L(n \mid \lambda) = \begin{pmatrix} 1 - i\lambda\Delta/2; & -i\sqrt{\varkappa}\,\psi_n^*\Delta \\ i\sqrt{\varkappa}\,\psi_n\Delta; & 1 + i\lambda\Delta/2 \end{pmatrix} + O(\Delta^2);$$

$$\psi_n = \frac{1}{\Delta}\int_{x_{n-1}}^{x_n} \psi(x)\,dx; \quad \{\psi_n,\ \psi_m^*\} = i\delta_{mn}\Delta^{-1}. \tag{14}$$

Соответствующая r-матрица [25] пропорциональна матрице перестановки [см. (П.2)] размерности 4×4: $r(\lambda, \mu) = \varkappa(\lambda - \mu)^{-1}\,\Pi$. Тождества следов получаются из асимптотического разложения

$$\ln(\tau(\lambda)\exp(i\lambda L)) \underset{\lambda \to +i\infty}{=\!=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k\lambda^{-k};$$

$$q = (i\varkappa)^{-1}c_1;\ P = (i\varkappa)^{-1}c_2;\ H = (i\varkappa)^{-1}c_3. \tag{15}$$

При решении обратной задачи существенны следующие сим метрии T:

$$\sigma_1 T^*(x, y \mid \lambda^*)\,\sigma_1 = T(x, y \mid \lambda);\ \det T(x, y \mid \lambda) = 1. \tag{16}$$

2. Модель синус-Гордон (СГ) решена с помощью МОЗР в [28]. Уравнение движения

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\,u + \frac{m^2}{\beta}\sin\beta u = 0$$

является гамильтоновым; гамильтониан, импульс и заряд модели имеют вид:

$$H = \int dx\left[\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos\beta u)\right];$$

$$P = \int dx\, p\partial_x u; \quad q = \frac{\beta}{2\pi}\int dx\,\partial_x u. \tag{17}$$

Здесь $p(x) = \partial_t u(x)$; $\{p(x), u(y)\} = \delta(x - y)$. Эта модель имеет много физических приложений. Для нас она интересна как нетривиальная модель релятивистского скалярного поля. Уравнения движения представимы в лаксовом виде, причем $Q(x \mid \lambda)$ и оператор L на инфинитезимальной решетке имеют вид:

$$Q(x \mid \lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i\beta}{4}\,p(x); & \frac{m}{4}\left(\lambda^{-1}\exp\left[\frac{i\beta u(x)}{2}\right] - \lambda\exp\left[-\frac{i\beta u(x)}{2}\right]\right) \\ \frac{m}{4}\left(\lambda\exp\left[\frac{i\beta u(x)}{2}\right] - \lambda^{-1}\exp\left[-\frac{i\beta u(x)}{2}\right]\right); & -\frac{i\beta}{4}\,p(x) \end{pmatrix};$$

$$L(n \mid \lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\beta}{4}p_n; & \frac{m\Delta}{4}(\lambda\chi_n^- - \lambda^{-1}\chi_n^+) \\ \frac{m\Delta}{4}(\lambda^{-1}\chi_n^- - \lambda\chi_n^+); & 1 + \frac{i\beta}{4}p_n \end{pmatrix} + O(\Delta^2); \tag{18}$$

$$u_n = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} u(x)\,dx; \quad p_n = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} p(x)\,dx; \tag{19}$$

$$\{p_m,\ u_n\} = \delta_{mn}; \quad \chi_n^{\pm} = \exp\{\pm\, \mathrm{i}\beta u_n/2\}.$$

Отличные от нуля матричные элементы r-матрицы суть [см. (П.1)]:

$$\begin{aligned} &r_{22}^{11}(\lambda,\ \mu) = r_{11}^{22}(\lambda,\ \mu) = \gamma \operatorname{cth} \alpha; \\ &r_{21}^{12}(\lambda,\ \mu) = r_{12}^{21}(\lambda,\ \mu) = -\gamma/\operatorname{sh} \alpha; \end{aligned} \tag{20}$$

здесь $\lambda/\mu \equiv \exp(\alpha)$; $\gamma \equiv \beta^2/8$. Тождества следов получаются из следующего асимптотического разложения:

$$\ln\left[\tau(\lambda) \exp\left\{\frac{\mathrm{i}mL}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right\}\right] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n c_n & \text{при} \quad \lambda \to +\mathrm{i}0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \tilde{c}_n & \text{при} \quad \lambda \to +\mathrm{i}\infty, \end{cases}$$

$$q = \frac{\mathrm{i}}{\pi}(c_0 - \tilde{c}_0); \quad H = \frac{m}{4\mathrm{i}\gamma}(c_1 - \tilde{c}_1); \quad P = \frac{m}{4\mathrm{i}\gamma}(c_1 + \tilde{c}_1). \tag{21}$$

Важную роль играют следующие свойства симметрии:

$$\sigma_2 T^*(x,\ y \mid \lambda^*)\,\sigma_2 = T(x,\ y \mid \lambda); \quad \det T(x,\ y \mid \lambda) = 1. \tag{22}$$

3. Решеточная модель синус-Гордон (РСГ) [29]. Для строгого решения проблемы ультрафиолетвой регуляризации, возникающей при квантовании модели СГ, недостаточно знать L-оператор с точностью до $O(\Delta^2)$ (18). Желательно знать его точно, т. е. иметь вполне интегрируемый решеточный вариант модели СГ. Это и есть модель РСГ. Как мы увидим, при квантовании удается обобщить тождества следов именно этой модели. Модель РСГ сформулируем в рамках МОЗР. L-оператор зададим следующим образом:

$$L(n \mid \lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi(u_n)\,\pi_n^-; & \sqrt{s}\,(\lambda\chi_n^- - \lambda^{-1}\chi_n^+) \\ \sqrt{s}\,(\lambda^{-1}\chi_n^- - \lambda\chi_n^+); & \varphi(u_n)\,\pi_n^+ \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Здесь $\pi_n^{\pm} = \exp\{\pm \mathrm{i}\beta p_n/4\}$; $\varphi(u) = (1 + 2s\cos\beta u)^{1/2}$; $s = (m\Delta/4)^2$. Остальные обозначения см. в (19). Число узлов N считаем четным. Матрица $r(\lambda,\ \mu)$ для этого оператора совпадает с r-матрицей (20) модели СГ. При этом соотношение (9) выполняется точно, а не с точностью $O(\Delta^2)$, как для оператора (18).

Матрица монодромии РСГ обладает свойствами симметрии

$$\sigma_2 T^* (n,\ m \mid \lambda^*)\, \sigma_2 = T\,(n,\ m \mid \lambda); \tag{24}$$

$$\det T\,(n,\ m \mid \lambda) = d_c^{n-m+1}(\lambda);\ d_c(\lambda) = \det L\,(n \mid \lambda) = \\ = 1 + (\lambda^2 + \lambda^{-2})\, s, \tag{25}$$

которые обобщают свойства (22). Гамильтониан и импульс модели РСГ зададим с помощью тождеств следов:

$$H \pm P = \frac{m^2\Delta}{4\gamma} \frac{\partial}{\partial\lambda^{\pm 2}} \ln\left(\tau(\lambda)\, \tau_0^{-1}(\lambda)\right) \Big|_{\lambda^2 = -b^{\pm 1}},$$

$$b = 2s\left(1 + \sqrt{1-4s^2}\right)^{-1}. \tag{26}$$

Здесь $\tau_0(\lambda)$ — след матрицы монодромии при $p_n = u_n = 0$. Поясним это определение. Инволюция (24) обеспечивает вещественность H и P. Как нетрудно видеть, $\tau(\lambda)$ является мероморфной функцией λ^2. Множитель $\tau_0^{-1}(\lambda)$ соответствует обычному сокращению плоской волны. При $\lambda^2 = -b^{\pm 1}$ определитель матрицы монодромии (25) обращается в нуль, а сама она пропорциональна одномерному проектору. Используя этот факт, нетрудно убедиться, что гамильтониан H описывает взаимодействие трех ближайших соседей на решетке. Явные выражения для H и P упрощаются после преобразования к новым переменным:

$$\psi_n^{\pm} = \sqrt{\frac{s}{b}}\, \varphi^{-1}(u_n)\left(\chi_n^{\pm} + b\chi_n^{\mp}\right)\pi_n^{-};\quad |\psi_n^{\pm}| = 1,$$

$$H \pm P = \frac{m^2\Delta}{4\gamma b\,(1-b^2)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{(\psi_{k\mp 1}^{+} - b\psi_{k\pm 1}^{-})(\psi_k^{-} - b\psi_k^{+})}{(1+\psi_{k\pm 1}^{-}\psi_k^{+})(1+\psi_{k\mp 1}^{+}\psi_k^{-})} - \frac{(1-b)^2}{4} \right].$$

Вывод этих формул приведен в Приложении 3. В непрерывном пределе ($\Delta \to 0$; $N\Delta = 2L$; $p_n \approx p\,(x_n)\,\Delta$; $u_n \approx u\,(x_n)$) величины H, P и $L\,(n \mid \lambda)$ превращаются в соответствующие величины непрерывной модели (17), (18). Можно определить и заряд q, аналогичный заряду (17):

$$q = \frac{\beta}{\pi} \sum_{n=1}^{N/2} (u_{2n} - u_{2n-1}). \tag{27}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\{q,\ T\,(N,\ 1 \mid \lambda)\} = \frac{i\gamma}{\pi}\,[\sigma_3,\ T\,(N,\ 1 \mid \lambda)],$$

откуда $\{q,\ \tau(\lambda)\} = \{q,\ H\} = 0$.

2. КВАНТОВАЯ R-МАТРИЦА

В основе КМОЗ также лежит представление Лакса (2) исходного нелинейного уравнения. Однако гамильтониан H и элементы матриц $L(n \mid \lambda)$ и $M(n \mid \lambda)$ являются теперь квантовыми операторами, зависящими от динамических переменных системы. Для релятивистских систем из-за ультрафиолетовых расходимостей необходима регуляризация. Поэтому мы будем рассматривать решеточную формулировку, где Δ^{-1} имеет смысл ультрафиолетового обрезания. Как и в классическом МОЗР, важную роль в КМОЗ играют матрица монодромии $T(n, m \mid \lambda)$ и трансфер-матрица $\tau(\lambda) = \operatorname{tr} T(N, 1 \mid \lambda)$, определяемые по-прежнему формулами (5), (6). С помощью матрицы монодромии удается построить собственные функции квантового гамильтониана. Поэтому важно выяснить коммутационные соотношения КС между всеми ее матричными элементами. Этот вопрос решается в КМОЗ с помощью метода R-матрицы [6, 23], который работает в том случае, если КС между элементами $L(n \mid \lambda)$ удается представить в виде

$$R(\lambda, \mu)(L(n \mid \lambda) \otimes L(n \mid \mu)) = (L(n \mid \mu) \otimes L(n \mid \lambda)) R(\lambda, \mu) \tag{28}$$

и выполняется требование ультралокальности, т. е. матричные элементы L-операторов в различных узлах решетки коммутируют как квантовые операторы:

$$[L_{ij}(n \mid \lambda), L_{kl}(m \mid \mu)] = 0 \text{ при } m \neq n.$$

Тогда

$$R(\lambda, \mu)(T(n, m \mid \lambda) \otimes T(n, m \mid \mu)) = \\ = (T(n, m \mid \mu) \otimes T(n, m \mid \lambda)) R(\lambda, \mu). \tag{29}$$

Здесь $R(\lambda, \mu)$ — числовая матрица размерности $K^2 \times K^2$, зависящая лишь от спектральных параметров λ, μ. Соотношения (28), (29) непосредственно обобщают на квантовый случай соотношения (9), (10). В Приложении 2 приведен вывод формулы (29), причем в более общем случае, когда R-матрица может зависеть от динамических переменных. Тривиальным следствием равенства (29) является то, что трансферматрицы при различных значениях спектрального параметра коммутируют

$$[\tau(\lambda), \tau(\mu)] = 0. \tag{30}$$

И в квантовом случае гамильтониан выражается через логарифмические производные $\tau(\lambda)$ в некоторых точках ν_a [см. (38), (44), (106), (108), (109)]:

$$H = \sum_k \sum_a c_{ka} \frac{d^k}{d\lambda^k} \ln \tau(\lambda) \big|_{\lambda=\nu_a}. \tag{31}$$

Из (30) следует при этом, как и в классическом случае, что при $N \to \infty$ имеется бесконечно большое число законов сохранения.

В квантовом случае из существования R-матрицы также следует, что исходные уравнения движения представимы [15] в лаксовом виде (2). Действительно, нетрудно получить следующее равенство:

$$\mathrm{i}\left[\frac{d}{d\mu}\ln\tau(\mu),\ L(n\mid\lambda)\right] = M(n+1\mid\lambda,\ \mu)\,L(n\mid\lambda) - \\ - L(n\mid\lambda)\,M(n\mid\lambda,\ \mu), \qquad (32)$$

где

$$M(n\mid\lambda,\ \mu) = \mathrm{i}\,\frac{d}{d\mu}\ln\tau(\mu)\,I - \mathrm{i}q^{-1}(n\mid\lambda,\ \mu)\,\frac{d}{d\mu}\,q(n\mid\lambda,\ \mu);$$

$$q(n\mid\lambda,\ \mu) = \mathrm{tr}_2\,[(I\otimes T(N,\ n\mid\mu))\,R(\mu,\ \lambda)\,\Pi\,(I\otimes \\ \otimes T(n-1,\ 1\mid\mu))]. \qquad (33)$$

Здесь tr_2 означает след во втором пространстве тензорного произведения, Π — матрица перестановки [см. (П.2)]. С помощью равенства (31) левую часть (32) легко превратить в $\partial_t L(n\mid\lambda) \equiv \equiv \mathrm{i}\,[H,\ L(n\mid\lambda)]$. В Приложении 4 приведен вывод этих формул. Отметим, что построенный M-оператор имеет правильный квазиклассический предел [25], а для спиновых моделей с локальным взаимодействием M-оператор также локален [см. (107)].

Сделаем несколько замечаний. Из (28) следует, что R-матрица определена с точностью до умножения на скаляр $f(\lambda,\ \mu)$. Можно выбрать этот множитель так, чтобы выполнялось соотношение

$$R(\lambda,\ \mu) = R^{-1}(\mu,\ \lambda);\quad R(\lambda,\ \lambda) = E. \qquad (34)$$

Для таких R-матриц квазиклассический предел особенно прост:

$$R \xrightarrow[\hbar\to 0]{} \Pi\,(E - \mathrm{i}\hbar r); \qquad (35)$$

здесь r — классическая r-матрица [(см. (7) — (10)].

Приведем примеры.

1. Квантовая модель НШ по-прежнему задается гамильтонианом H (12), где ψ, ψ^* — эрмитово-сопряженные квантовые операторы: $[\psi(x),\ \psi^*(y)] = \delta(x-y)$. Импульс P и число частиц q даются теми же формулами (13). Эта модель была решена в работах [30, 31]. Она послужила первой моделью, к которой был применен КМОЗ [5, 7]. L-оператор этой модели задается той же формулой (14), что и в классике, но теперь ψ_n, ψ_n^* — квантовые операторы: $[\psi_n,\ \psi_m^*] = \delta_{mn}\Delta^{-1}$. В модели НШ не возникает проблемы перенормировок и L-оператора (14) достаточно (хотя построен и точный решеточный L-оператор [15]). R-матрица

модели НШ имеет вид (см. обозначения Приложения 1):

$$R(\lambda, \mu) = \Pi - \frac{i\varkappa}{\lambda - \mu} E. \tag{36}$$

Свойства симметрии, обобщающие классические (16), следующие:

$$\sigma_1 T^* (n, m|\lambda^*) \sigma_1 = T(n, m|\lambda);$$
$$T(N, 1 \mid \lambda) \sigma_2 T^T (N, 1 \mid \lambda + i\varkappa) \sigma_2 = \exp\{-\varkappa L\} I.$$

Последнее свойство обобщает классическое соотношение $\det T = 1$. Отметим, что это соотношение помогает при решении собственно обратной задачи в квантовом случае, проанализированной Ф. А. Смирновым. Квантовые тождества следов получаются [32] из асимптотического разложения

$$\ln(\tau(\lambda) \exp\{i\lambda L\}) \xrightarrow[\lambda \to +i\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-k} \tag{37}$$

и имеют вид (см. Приложение 5):

$$q = (i\varkappa)^{-1} C_1; \; P = (i\varkappa)^{-1} C_2 + C_1/2;$$
$$H = (i\varkappa)^{-1} C_3 + C_2 + i\varkappa C_1/6. \tag{38}$$

Мы видим, что они отличаются от классических тождеств следов (15) квантовыми поправками.

2. Модель СГ в рамках КМОЗ была впервые решена в [9]. С ней дело обстоит более тонко из-за ультрафиолетовых расходимостей. Наиболее прямой и строгий способ ультрафиолетовой регуляризации дает модель РСГ, которую мы и будем квантовать. Квантовую модель РСГ построим так, чтобы она сохраняла бо́льшую часть симметрий модели СГ и в квазиклассическом пределе переходила в классическую модель РСГ. Самая важная симметрия модели СГ — полная интегрируемость, означающая существование бесконечного числа законов сохранения. На нашем языке это означает наличие R-матрицы, которая для модели СГ давно известна [9]; ее ненулевые элементы имеют вид [см. (П.1)]:

$$R^{11}_{11} = R^{22}_{22} = 1, \quad R^{12}_{21} = R^{21}_{12} = \operatorname{sh}\alpha/\operatorname{sh}(\alpha + i\gamma);$$
$$R^{11}_{22} = R^{22}_{11} = i\sin\gamma/\operatorname{sh}(\alpha + i\gamma); \tag{39}$$
$$R(\lambda, \mu) = R(\lambda/\mu); \; \lambda/\mu \equiv \exp\{\alpha\}.$$

Отметим, что квантовую R-матрицу можно независимо вычислить по классической (см. разд. 8). Следующая задача — построить L-оператор, который сплетается (28) этой R-матрицей, обладает нужными симметриями и имеет правильный квазиклассический предел. Эта задача решена в [16]:

$$L(n\mid\lambda)=\\ =\begin{pmatrix} f(u_n)\pi_n^-; & \sqrt{s}\,(\lambda\chi_n^- - \lambda^{-1}\chi_n^+) \\ \sqrt{s}\,(\lambda^{-1}\chi_n^- - \lambda\chi_n^+); & g(u_n)\pi_n^+ \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Здесь u_n и p_n — канонически-сопряженные операторы: $[u_n, p_m] = i\delta_{mn}$. Функции f и g удовлетворяют функциональным уравнениям:

$$\begin{gathered} g(u+\beta/4-2\pi/\beta)\,g(u) = 1+2s\cos(\beta u+\gamma); \\ f(u) = g(u-2\pi/\beta);\ \gamma\equiv\beta^2/8;\ s=(m\Delta/4)^2. \end{gathered} \tag{41}$$

Остальные обозначения такие же, как в классическом случае (23). В работе [16] построены все решения уравнения (41) при любом вещественном β; показано, что различные решения приводят к одной и той же физической модели и что почти при всех β существуют периодические $[g(u) = g(u-2\pi/\beta) = f(u)]$, ограниченные на вещественной оси решения. В дальнейшем рассматриваются только такие β.

Специфический вид L-оператора (40) приводит к соотношениям, аналогичным (24) и (25):

$$\sigma_2 T^*(n, m\mid\lambda^*)\,\sigma_2 = VT(n, m\mid\lambda)\,V^{-1};\ V=\prod_{k=m}^{n} f(u_k), \tag{42}$$

$$T(n, m\mid\lambda)\,\sigma_2 T^T(n, m\mid\lambda\exp(-i\gamma))\,\sigma_2 = d_q^{\,n-m+1}(\lambda); \tag{43}$$

$$d_q(\lambda) = 1+(\lambda^2\exp(-i\gamma)+\lambda^{-2}\exp(i\gamma))\,s.$$

Величину $d_q(\lambda) = L_{11}(n\mid\lambda)\,L_{22}(n\mid\lambda e^{-i\gamma}) - L_{12}(n\mid\lambda)\times\times L_{21}(n\mid\lambda\exp(-i\gamma))$ естественно назвать квантовым определителем оператора L. Как и в классическом случае, нули $\lambda^2=\nu_\pm = -b^{\pm1}\exp\{i\gamma\}$ этого определителя играют большую роль для тождеств следов [определение b см. в (26)].

Гамильтониан и импульс квантовой модели РСГ зададим с помощью тождеств следов:

$$\begin{gathered} H\pm P = \frac{m^2\Delta}{8\sin\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda^{\pm2}}F(\lambda^2=\nu_\pm^*)+\frac{\partial}{\partial\lambda^{\pm2}}G(\lambda^2=\nu_\pm)\right), \\ F(\lambda^2)\equiv\ln\left(d_q^{-\frac{N}{2}}(\lambda)\,\tau(\lambda)\right);\ G(\lambda^2)=\ln\left(d_q^{-\frac{N}{2}}(\lambda^{-1})\,\tau(\lambda)\right). \end{gathered} \tag{44}$$

Инволюция (42) и выбор точек $\nu_\pm$ в (44) обеспечивают вещественность спектра операторов H и P. В точках $\lambda^2=\nu_\pm$ квантовая матрица монодромии становится пропорциональной проектору. В отличие от классического случая отсюда не следует, что гамильтониан описывает взаимодействие только ближайших соседей. В квантовом случае взаимодействуют все узлы решетки, однако потенциал взаимодействия между n-м и m-м узлами экспоненциально убывает как $\gamma^{|n-m|}$. Очевидно, что в квазиклассическом пределе $\gamma \to 0$ квантовая модель РСГ превращается в классическую модель РСГ. Действительно, в этом пределе L-оператор (40) переходит в (23), а квазиклассический предел гамильтониана (44) отличается от классического гамильтониана (26) лишь конечной константой. Отметим, что можно определить и квантовый заряд q, аналогичный (27):

$$\gamma q = \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^{N/2} (u_{2n} - u_{2n-1}) + N(\pi - \gamma)/2, \tag{45}$$

причем $[q, \tau(\lambda)] = [q, H] = 0$, как это следует из соотношения

$$[q, T(N, 1 \mid \lambda)] = \frac{1}{2} [\sigma_3, T(N, 1 \mid \lambda)]. \tag{46}$$

В заключение отметим, что список моделей квантовой теории поля, для которых известны L-операторы и R-матрицы, не ограничивается рассмотренными в этом разделе (см., например, [12, 14, 33, 34]).

3. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНЗАТЦ БЕТЕ

Рассмотрим задачу о вычислении спектра гамильтониана квантовой модели НШ (см. разд. 2 пример 1) и опишем процедуру построения собственных функций этого оператора с помощью КМОЗ [6, 8] — алгебраический анзатц Бете. Обозначим матричные элементы матрицы монодромии следующим образом:

$$T(N, 1 \mid \lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda); & B(\lambda) \\ C(\lambda); & D(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Из формул (37), (38) видно, что собственные функции оператора H те же,что у трансферматрицы $\tau(\lambda)$. Для построения этих собственных функций необходимо построить сначала порождающий вектор — псевдовакуум Ω. В случае модели НШ удается построить псевдовакуум, на который матрица монодромии $T(N, 1 \mid \lambda)$ действует особенно просто:

$$A(\lambda)\,\Omega = \exp(-i\lambda L)\,\Omega; \; D(\lambda)\,\Omega = \exp(i\lambda L)\,\Omega; \; C(\lambda)\,\Omega = 0. \tag{48}$$

Вектор Ω строится из локальных фоковских вакуумов ω_n $(n = 1, \ldots, N)$:

$$\Omega = \prod_{n=1}^{N} \omega_n; \; \psi_n \omega_n = 0. \tag{49}$$

Учитывая, что

$$L(n\mid\lambda)\,\omega_n=\begin{pmatrix}(1-\mathrm{i}\lambda\Delta/2)\,\omega_n; & -\mathrm{i}\sqrt{\varkappa}\,\Delta\psi_n^+\omega_n\\ 0; & (1+\mathrm{i}\lambda\Delta/2)\,\omega_n\end{pmatrix},\tag{50}$$

и перемножая треугольные матрицы $L(n\mid\lambda)\,\omega_n$, приходим при $\Delta\to 0$ к (48), принимая во внимание, что $(1+\mathrm{i}\lambda\Delta/2)^N\approx\exp\{\mathrm{i}\lambda L\}$.

Покажем, что собственные функции $\tau(\lambda)$ строятся по формуле

$$\Psi_n(\{\mu_j\})=B(\mu_1)\,B(\mu_2)\,\ldots\,B(\mu_n)\,\Omega,\tag{51}$$

где μ_j удовлетворяет некоторой системе уравнений. Для этого перепишем КС (29), (36) в виде:

$$A(\lambda)\,B(\mu)=\alpha(\lambda,\mu)\,B(\mu)\,A(\lambda)-\beta(\lambda,\mu)\,B(\lambda)\,A(\mu);\tag{52}$$

$$D(\lambda)\,B(\mu)=\alpha(\mu,\lambda)\,B(\mu)\,D(\lambda)+\beta(\lambda,\mu)\,B(\lambda)\,D(\mu);\tag{53}$$

$$B(\lambda)\,B(\mu)=B(\mu)\,B(\lambda);\tag{54}$$

$$\alpha(\lambda,\mu)=(\lambda-\mu+\mathrm{i}\varkappa)(\lambda-\mu)^{-1};\quad \beta(\lambda,\mu)=\mathrm{i}\varkappa(\lambda-\mu)^{-1}.\tag{55}$$

Эти соотношения вместе с (48) позволяют определить, как $A(\lambda)$ действует на Ψ_n:

$$A(\lambda)\,\Psi_n(\{\mu_j\})=\Lambda(\lambda,\{\mu_j\})\,\Psi_n(\{\mu_j\})+\sum_{l=1}^{n}\Lambda_l(\lambda,\{\mu_j\})\,B(\lambda)\Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}B(\mu_k)\Big)\Omega.\tag{56}$$

Здесь

$$\Lambda(\lambda,\{\mu_j\})=\exp(-\mathrm{i}\lambda L)\prod_{j=1}^{n}\alpha(\lambda,\mu_j);\tag{57}$$

$$\Lambda_l(\lambda,\{\mu_j\})=-\exp(-\mathrm{i}\mu_l L)\,\beta(\lambda,\mu_l)\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\alpha(\mu_l,\mu_k).\tag{58}$$

Обсудим, как получаются эти формулы. При пронесении A через B мы можем воспользоваться либо первой схемой [первое слагаемое в правой части (52)], либо второй схемой (второе слагаемое). Чтобы вычислить коэффициент перед первым слагаемым в (56), надо все время пользоваться первой схемой. Действительно, если мы хоть раз воспользуемся второй схемой, то среди операторов B возникает $B(\lambda)$, которое потом уже не исчезает; это будет вклад в другое слагаемое в (56). Данное замечание приводит нас непосредственно к выражению (57) для Λ.

Для вычисления же Λ_l воспользуемся формулой (54) и представим Ψ_n в виде

$$\Psi_n(\{\mu_j\})=B(\mu_l)\Big(\prod_{k\neq l}B(\mu_k)\Big)\Omega.$$

Теперь для вычисления Λ_l на первом шаге [при пронесении $A(\lambda)$ через $B(\mu_l)$] обязательно нужно воспользоваться второй схемой, иначе $B(\mu_l)$ останется, а интересующее нас слагаемое $B(\mu_l)$ не содержит. Итак, получим после первого шага выражение

$$-\beta(\lambda, \mu_l) B(\lambda) A(\mu_l) \Big(\prod_{k\neq l} B(\mu_k)\Big)\Omega.$$

Далее при пронесении $A(\mu_l)$ через $B(\mu_k)$ следует пользоваться только первой схемой, иначе возникнет сомножитель $B(\mu_l)$. Эти соображения приводят к выражению (58). Аналогично получаем:

$$D(\lambda)\Psi_n(\{\mu_j\}) = \tilde{\Lambda}(\lambda, \{\mu_j\})\Psi_n(\{\mu_j\}) + \\ + \sum_{l=1}^{n} \tilde{\Lambda}_l(\lambda, \{\mu_j\}) B(\lambda)\Big(\prod_{k\neq l} B(\mu_k)\Big)\Omega; \tag{59}$$

$$\tilde{\Lambda}(\lambda, \{\mu_j\}) = \exp(i\lambda L)\prod_{j=1}^{n}\alpha(\mu_j, \lambda);$$

$$\tilde{\Lambda}_l(\lambda, \{\mu_j\}) = \exp(i\mu_l L)\beta(\lambda, \mu_l)\prod_{k\neq l}\alpha(\mu_k, \mu_l).$$

Потребуем теперь, чтобы $\Psi_n(\{\mu_j\})$ была собственной функцией трансферматрицы $\tau(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$. Это означает, что суммы в (56) и (59) должны сократиться, что приводит к системе уравнений на μ_j:

$$\exp\{2i\mu_l L\} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\frac{\alpha(\mu_l, \mu_k)}{\alpha(\mu_k, \mu_l)} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\frac{\mu_l-\mu_k+i\varkappa}{\mu_l-\mu_k-i\varkappa}. \tag{60}$$

При этом собственное значение $\tau(\lambda)$ равно:

$$t_n(\lambda, \{\mu_j\}) = \exp(-i\lambda L)\prod_{j=1}^{n}\alpha(\lambda, \mu_j) + \\ + \exp(i\lambda L)\prod_{j=1}^{n}\alpha(\mu_j, \lambda). \tag{61}$$

Итак, мы описали на простейшем примере алгебраический анзатц Бете — схему построения собственных функций трансферматрицы с помощью КМОЗ. Эти функции $\Psi_n(\{\mu_j\})$ являются собственными функциями гамильтониана (12), импульса и числа частиц (13) модели НШ; соответствующие собственные значения получаются из (61) и тождеств следов (38):

$$E_n(\{\mu_j\}) = \sum_{j=1}^{n}\mu_j^2;\quad P_n(\{\mu_j\}) = \sum_{j=1}^{n}\mu_j;\quad q_n = n.$$

Таким образом, μ_j являются импульсами квазичастиц. Физически интересная задача о бозе-газе с химическим потенциалом сводится к анализу трансцендентных уравнений (60), которые означают условие периодичности координатных волновых функций (см. разд. 5). Мы не останавливаемся здесь на этом анализе, отсылая читателя к оригинальным работам [35—37]. Анализ аналогичных уравнений для более интересной модели СГ проведен в разд. 6.

Отметим в заключение, что при построении собственных функций (51) мы предполагали, что все импульсы μ_j различны. Этого достаточно, чтобы построенная система волновых функций была полной, как показывает сравнение с координатной записью волновых функций [30, 31]. Причиной является принцип Паули для взаимодействующих бозонов в одномерном пространстве [38]. Для пояснения физической причины рассмотрим, например, двухчастичное одномерное уравнение Шредингера. Состоянию с одинаковыми импульсами в системе центра масс соответствует состояние с нулевой энергией. Соответствующая координатная волновая функция в общем случае линейно возрастает. Такую волновую функцию нельзя отнормировать так же, как обычную плоскую волну и сделать ее периодической. Другими словами, такого состояния нет. Даже на уровне классической физики причина такого запрета ясна: две взаимодействующие частицы не могут двигаться с одинаковой скоростью.

4. КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ СИНУС-ГОРДОН

Как мы уже обсуждали в разд. 2, естественную ультрафиолетовую регуляризацию модели СГ дает модель РСГ, которую мы и будем квантовать. Изложение этого раздела следует работам [9, 16]. Чтобы применить схему разд. 3 к этой модели, нужно построить псевдовакуум Ω. Локальный вакуум ω_n в модели СГ удается построить лишь для произведения двух соседних операторов $L(n \mid \lambda)$ (40):

$$l(n \mid \lambda) \equiv L(2n \mid \lambda)\, L(2n-1 \mid \lambda);\quad n = 1, \ldots, N/2;$$
$$T(N, 1 \mid \lambda) = l(N/2 \mid \lambda)\, l(N/2-1 \mid \lambda) \ldots l(1 \mid \lambda). \tag{62}$$

Матричные элементы T обозначим буквами A, B, C, D [так же, как в модели НШ (47)].

Для $l(n \mid \lambda)$ локальный вакуум имеет вид:

$$\omega_n = \delta(u_{2n-1} - u_{2n} + \beta/4 - 2\pi/\beta). \tag{63}$$

Действительно, легко убедиться, что

$$l_{11}(n \mid \lambda)\,\omega_n = d_q(\lambda)\,\omega_n;\quad l_{22}(n \mid \lambda)\,\omega_n = d_q(\lambda^{-1})\,\omega_n;$$
$$l_{21}(n \mid \lambda)\,\omega_n = 0.$$

Здесь $d_q(\lambda) = 1 + (\lambda^2 \exp(-i\gamma) + \lambda^{-2} \exp(i\gamma))\, s$ [см. (43)]. Псевдовакуум Ω построим теперь так же, как и в модели НШ:

$$\Omega = \prod_{n=1}^{N/2} \omega_n. \tag{64}$$

Матрица монодромии $T(N, 1/\lambda)$ (62) так действует на этот вектор:

$$A(\lambda)\,\Omega = d_q^{N/2}(\lambda)\,\Omega;\quad D(\lambda)\,\Omega = d_q^{N/2}(\lambda^{-1})\,\Omega;\quad C(\lambda)\,\Omega = 0. \tag{65}$$

Из (29), (39) легко показать, что КС между элементами матрицы $T(N, 1 \mid \lambda)$ можно представить в виде (52) — (54), где

$$\alpha(\lambda, \mu) = (\lambda^2 - \mu^2)^{-1} (\lambda^2 \exp(-i\gamma) - \mu^2 \exp(i\gamma));$$
$$\beta(\lambda, \mu) = -2i \sin \gamma\lambda\mu\, (\lambda^2 - \mu^2)^{-1}.$$

Схема предыдущего раздела приводит к следующим ответам. Собственные функции $\tau(\lambda)$ имеют вид:

$$\Psi_n(\{\mu_j\}) = B(\mu_1)\, B(\mu_2) \ldots B(\mu_n)\,\Omega, \tag{66}$$

причем μ_j удовлетворяют системе уравнений:

$$\left[\frac{d_q(\mu_l)}{d_q(\mu_l^{-1})}\right]^{\frac{N}{2}} = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{n} \frac{\alpha(\mu_k, \mu_l)}{\alpha(\mu_l, \mu_k)} =$$
$$= \prod_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{n} \left(\frac{\mu_k^2 \exp(-i\gamma) - \mu_l^2 \exp(i\gamma)}{\mu_k^2 \exp(i\gamma) - \mu_l^2 \exp(-i\gamma)}\right). \tag{67}$$

Собственные значения $\tau(\lambda)$ имеют вид:

$$t_n(\lambda, \{\mu_j\}) = d_q^{N/2}(\lambda) \prod_{j=1}^{n} \alpha(\lambda, \mu_j) + d_q^{N/2}(\lambda^{-1}) \prod_{j=1}^{n} \alpha(\mu_j, \lambda). \tag{68}$$

Так же, как и в предыдущем разделе, положим, что все μ_j различны благодаря принципу Паули для одномерных бозонов, хотя формальное доказательство полноты для системы собственных функций (66) отсутствует.

Собственные значения энергии и импульса вычисляются с помощью (68) и тождеств следов (44):

$$H\Psi_n = \Big(\sum_{j=1}^{n} h(\mu_j)\Big)\Psi_n;\quad P\Psi_n = \Big(\sum_{j=1}^{n} p(\mu_j)\Big)\Psi_n; \tag{69}$$

$$h(\mu) \pm p(\mu) = \frac{m^2\Delta \sin\gamma}{2} \times$$
$$\times \frac{[1-2\mu^{\mp 2} b \cos\gamma - \mu^{\mp 4} b^2 (1+2\cos 2\gamma)]\, \mu^{\mp 2}}{(1+b\mu^{\mp 2}\exp(-3i\gamma))(1+b\mu^{\mp 2}\exp(3i\gamma)) \times \times (1+\mu^{\mp 2} b \exp(-i\gamma))(1+\mu^{\mp 2} b\exp(i\gamma))}. \tag{70}$$

Таким образом, спектр H и P можно истолковать в терминах квазичастиц с импульсом $p(\mu)$ и энергией $h(\mu)$. Нетрудно показать, что функция Ψ_n является собственной функцией заряда q (45):

$$q\Psi_n = n\Psi_n. \tag{71}$$

Действительно, из (46), (63), (64) следует, что $[q, B(\lambda)] = B(\lambda)$ и $q\Omega = 0$.

Рассмотрим теперь собственно модель СГ, т. е. сгустим решетку. При этом $\Delta \to 0$, $N \to \infty$, $N\Delta = 2L$, и

$$\begin{gathered} h(\mu) \to h_c(\mu) = [(m^2\Delta \sin\gamma)/2]\, \mathrm{ch}\, \beta; \\ p(\mu) \to p_c(\mu) = [(m^2\Delta \sin\gamma)/2]\, \mathrm{sh}\, \beta; \\ \exp\{\beta\} \equiv \mu^{-2}, \end{gathered} \tag{72}$$

а уравнения (67) переходят в трансцендентные уравнения

$$\exp i\left[\frac{m^2\Delta\sin\gamma}{4} L\, \mathrm{sh}\, \beta_l\right] = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{n} \left(\frac{\exp\{-\beta_l + i\gamma\} - \exp\{-\beta_k - i\gamma\}}{\exp\{-\beta_l - i\gamma\} - \exp\{-\beta_k + i\gamma\}}\right). \tag{73}$$

Уравнения (72), (73), собственно, и описывают модель СГ. Попытка их решить, однако, приводит к проблеме ультрафиолетовых расходимостей. Уравнения (67), (70) являются корректной ультрафиолетовой регуляризацией уравнений для непрерывного случая. Прежде чем провести анализ трансцендентных уравнений, мы покажем эквивалентность модели СГ и массивной модели Тирринга.

5. МАССИВНАЯ МОДЕЛЬ ТИРРИНГА

Лагранжиан массивной модели Тирринга (ММТ) имеет вид:

$$\begin{gathered} \mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_0 \bar{\psi}\psi - \frac{1}{2} g (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi); \\ \gamma^0 = \sigma_1;\ \gamma^1 = i\sigma_2;\ \bar{\psi} = \psi^* \gamma^0. \end{gathered}$$

Гамильтониан, импульс и заряд этой модели фермионного поля имеют вид:

$$H = \int dx\,[\mathrm{i}\psi^*\sigma_3\partial_x\psi + m_0\psi^*\sigma_1\psi + 2g\psi_1^*\psi_2^*\psi_2\psi_1];$$
$$P = -\mathrm{i}\int dx\,\psi^*\partial_x\psi;\quad q = \int \psi^*\psi\,dx, \tag{74}$$

причем операторы ψ_k, ψ_l^* $(k,\ l = 1,\ 2)$ удовлетворяют соотношениям $\psi_k(x)\,\psi_l^*(y) + \psi_l^*(y)\,\psi_k(x) = \delta_{kl}\delta(x-y)$. Хотя лаксово представление и R-матрица этой модели известны [39, 40], алгебраический анзатц Бете еще не построен. Поэтому мы будем решать ММТ с помощью координатного Бете-анзатца. Это прояснит читателю физический смысл тех формул, которые возникают в рамках КМОЗ при решении модели СГ, для которой координатного анзатца Бете нет.

Собственные функции гамильтониана ММТ в секторе с n псевдочастицами имеют вид [41]:

$$\Psi_n = \int dx_1\ldots dx_n\,\chi^{j_1\ldots j_n}(x_1,\ldots,x_n\mid\beta_1,\ldots,\beta_n)\times$$
$$\times\,\psi_{j_1}^*(x_1)\ldots\psi_{j_n}^*(x_n)\mid 0\rangle. \tag{75}$$

Здесь $\mid 0\rangle$ — псевдовакуум: $\psi(x)\mid 0\rangle = 0$, а волновая функция

$$\chi^{j_1\ldots j_n}(x_1,\ldots,x_n\mid\beta_1,\ldots,\beta_n) =$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\chi^{j_k}(x_k\mid\beta_k)\prod_{j>m=1}^{n}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon(x_j - x_m)\,\Phi(\beta_j - \beta_m)\right]. \tag{76}$$

Здесь $\varepsilon(x)$ — знаковая функция;

$$\chi(x\mid\beta) = \begin{pmatrix}\exp\{-\beta/2\}\\ \exp\{\beta/2\}\end{pmatrix}\exp\{\mathrm{i}m_0x\,\mathrm{sh}\,\beta\},$$

а двухчастичная S-матрица $\exp\{\mathrm{i}\Phi\}$ равна

$$\exp\{\mathrm{i}\Phi(\beta)\} = e^{-\mathrm{i}g}(e^{\beta} + e^{\mathrm{i}g})(e^{\beta} + e^{-\mathrm{i}g})^{-1}. \tag{77}$$

Способ построения этих волновых функций объяснен в разд. 10. Собственные значения энергии, импульса и заряда (74) на этих функциях имеют вид:

$$E = m_0\sum_{j=1}^{n}\mathrm{ch}\,\beta_j;\quad P = m_0\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sh}\,\beta_j;\quad q = n. \tag{78}$$

Поместим ММТ в периодический ящик длиной $2L$ и наложим на волновые функции (76) условие периодичности по каждому из x_k:

$$\exp\{2im_0L\operatorname{sh}\beta_l\}=\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\exp\{-i\Phi(\beta_l-\beta_k)\}=$$

$$=\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\frac{\exp\{-\beta_l-ig/2\}+\exp\{-\beta_k+ig/2\}}{\exp\{-\beta_l+ig/2\}+\exp\{-\beta_k-ig/2\}}. \qquad (79)$$

Бросается в глаза сходство трансцендентных уравнений (73), (79) и собственных значений H, P, q (71), (72), (78) для ММТ и модели СГ. Действительно, при отождествлении

$$\pi-2\gamma=g;\ m^2\Delta\sin\gamma/8=m_0 \qquad (80)$$

уравнения (73) и (79) отличаются лишь заменой Φ на $\Phi+\pi$ в правой части, а собственные значения H и P для модели СГ (72) в 4 раза больше, чем для ММТ (78). Наблюдаемые величины, как мы увидим, выражаются лишь через $d\Phi/d\beta$, а множитель 4 поглощается перенормировкой массы. Это и есть наиболее прямой и строгий способ доказательства эквивалентности модели СГ и ММТ, впервые установленной в [42, 43]. Отметим, что собственные функции (76) периодически зависят от g, поэтому достаточно считать, что $-\pi<g<\pi$ $(0<\gamma<\pi)$. Случай $g>0$ $(0<\gamma<\pi/2)$ соответствует притяжению, а случай $g<0$ $(\pi/2<\gamma<\pi)$ — отталкиванию. В этих двух случаях физика явлений существенно различается. В следующем разделе будем использовать обозначения ММТ.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАБЛЮДАЕМЫХ ВЕЛИЧИН В СЛУЧАЕ ПРИТЯЖЕНИЯ

Вычисление наблюдаемых величин [44, 45] следует начинать с анализа трансцендентных уравнений (79), из которых определяются разрешенные значения быстрот псевдочастиц β_j. Гамильтониан ММТ не ограничен снизу, т. е. существуют состояния как с положительной, так и с отрицательной энергией. Действительно, если β вещественно, то энергия псевдочастицы $m_0\operatorname{ch}\beta$ положительна, а если $\operatorname{Im}\beta=\pi$, то энергия отрицательна. Кроме того, несколько псевдочастиц могут образовывать связанные состояния (см. [45]).

Первоначальная задача состоит в построении физического вакуума — состояния с наименьшей энергией. Очевидно, что при малых g физический вакуум представляет собой море Дирака, в котором заполнены все состояния псевдочастиц с отрицательной энергией. Построение вакуума сталкивается с проблемой ультрафиолетовых расходимостей. Эту проблему можно решать либо с помощью модели РСГ [см.(67), (70)], либо с помощью обычного для теории возмущений обрезания $|\beta| < \Lambda$. Мы выберем второй способ как физически более наглядный. Итак, в вакууме заполнены все состояния с $\beta_l = \alpha_l + i\pi$ ($\operatorname{Im} \alpha_l = 0$), разрешенные уравнениями (79). Прологарифмировав эти уравнения, получим

$$2m_0 L \operatorname{sh} \alpha_l = 2\pi l + \sum_{\substack{k=-M \\ k \neq l}}^{M} \Phi(\alpha_l - \alpha_k); \; l, \; k = -M, \; \ldots, \; M. \tag{81}$$

В этом уравнении участвуют все α_l, для которых $|\alpha_l| < \Lambda$. Энергия и импульс вакуума равны:

$$E_V = -m_0 \sum_{l=-M}^{M} \operatorname{ch} \alpha_l; \; P_V = -m_0 \sum_{l=-M}^{M} \operatorname{sh} \alpha_l \, (=0). \tag{82}$$

При $L \to \infty$ разрешенные значения быстрот псевдочастиц в вакууме сгущаются: $\alpha_{j+1} - \alpha_j = O(L^{-1})$. Введем плотность вакуумных частиц: $\rho(\alpha) = 1/2L\,(\alpha_{j+1} - \alpha_j)$. В системе (81) вычтем из $(l+1)$-го уравнения l-е, заменим сумму на интеграл и получим:

$$m_0 \operatorname{ch} \alpha = 2\pi \rho(\alpha) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \Phi'(\alpha - \beta)\, \rho(\beta)\, d\beta. \tag{83}$$

Голая масса m_0 зависит, как обычно в квантовой теории поля, от обрезания. Эту зависимость естественно определить из требования, чтобы $\rho(\alpha)$ при $\Lambda \to \infty$ не зависело от Λ. Непосредственные вычисления показывают, что

$$m_0 = a \exp\{-g\Lambda/(\pi + g)\}, \tag{84}$$

где a не зависит от Λ. При этом уравнение (83) явно решается:

$$\rho(\alpha) = \frac{ag}{2(\pi + g)\sin g} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi\alpha}{\pi + g}\right). \tag{85}$$

Таким образом, видно, что распределение быстрот в вакууме является квазисвободным, отличаясь от свободного ($g = 0$) лишь перенормировкой быстроты:

$$\alpha \to \theta = \pi\alpha/(\pi + g). \tag{86}$$

Чтобы доказать, что построенное состояние действительно является физическим вакуумом, надо убедиться, что энергия всех возбуждений над ним положительна; это было проделано в работе [45]. Рассмотрим здесь лишь простейшее возбуждение. Внесем в вакуум псевдочастицу с положительной энергией и быстротой β_p ($\operatorname{Im} \beta_p = 0$). Это приведет к перераспределению быстрот псевдочастиц в вакууме. Обозначим новые значения быстрот псевдочастиц в вакууме $\tilde{\alpha}_j$, они удовлетворяют системе уравнений

$$2m_0L\,\mathrm{sh}\,\tilde{\alpha}_l=2\pi l+\sum_{\substack{k=-M\\k\neq l}}^{M}\Phi(\tilde{\alpha}_l-\tilde{\alpha}_k)+\Phi(\tilde{\alpha}_l-\beta_p+i\pi), \tag{87}$$

причем энергия и импульс этого состояния равны:

$$\begin{aligned}\tilde{E}&=-m_0\sum_k \mathrm{ch}\,\tilde{\alpha}_k+m_0\,\mathrm{ch}\,\beta_p;\\ \tilde{P}&=-m_0\sum_k \mathrm{sh}\,\tilde{\alpha}_k+m_0\,\mathrm{sh}\,\beta_p.\end{aligned} \tag{88}$$

При $L\to\infty$ $\tilde{\alpha}_j$ сгущаются, введем функцию отклонения F_p:

$$F_p(\alpha_j)=\frac{\alpha_j-\tilde{\alpha}_j}{\alpha_{j+1}-\alpha_j};\ F_p(\alpha)\equiv f_p(\alpha-\beta_p). \tag{89}$$

Эта функция имеет конечный предел при $L\to\infty$ и удовлетворяет интегральному уравнению [44]

$$\Phi(\alpha+i\pi)+\int\Phi'(\alpha-\omega)f_p(\omega)\,d\omega+2\pi f_p(\alpha)=0. \tag{90}$$

Функция $f'_p(\alpha)$ — это плотность шубы виртуальных вакуумных частиц, окружающих затравочную частицу (структурная функция). Действительно, наблюдаемая энергия E_p и импульс P_p физической частицы равны:

$$\left.\begin{aligned}E_p&=\tilde{E}-E_V=m_0\,\mathrm{ch}\,\beta_p-m_0\int_{-\Lambda}^{\Lambda}f'_p(\alpha-\beta_p)\,\mathrm{ch}\,\alpha\,d\alpha;\\ P_p&=\tilde{P}-P_V=m_0\,\mathrm{sh}\,\beta_p-m_0\int_{-\Lambda}^{\Lambda}f'_p(\alpha-\beta_p)\,\mathrm{sh}\,\alpha\,d\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Уравнение (90) решается с помощью преобразования Фурье и приводит к следующим результатам:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{i\alpha k\}f'_p(\alpha)\,d\alpha=-\mathrm{ch}\left(\frac{\pi-g}{2}k\right)\Big/\mathrm{ch}\left(\frac{\pi+g}{2}k\right); \tag{92}$$

$$E_p=m_r\,\mathrm{ch}\,\theta_p;\ P_p=m_r\,\mathrm{sh}\,\theta_p;\ \theta_p=\pi\beta_p(\pi+g)^{-1}; \tag{93}$$

$$m_r=\frac{2a}{g}\sin\left(\frac{\pi(\pi-g)}{2(\pi+g)}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi g}{\pi+g}\right). \tag{94}$$

Таким образом, формула перенормировки (84) действительно приводит к конечному значению для массы наблюдаемых частиц, что соответствует стандартному определению перенормировки массы [46]. Обратим внимание, что наблюдаемый заряд полученной частицы не равен единице. Это объясняется тем, что одна из вакуумных частиц при внесении псевдочастицы β_p выталкивается за обрезание, и наблюдаемый заряд построенной частицы равен нулю [45]. Таким образом, мы построили нейтральную релятивистскую частицу. Можно показать, что она описывает наинизшее связанное состояние фермионов, соответствующее элементарной частице в модели СГ.

Рассмотрим теперь двухчастичную конфигурацию. Внесем в вакуум две псевдочастицы с положительной энергией и быстротами β_1 и β_2. В этой ситуации все вычисления аналогичны. Разрешенные значения быстрот вакуумных псевдочастиц обозначим $\hat{\alpha}_j$. Функция отклонения $F_{12}(\alpha_j) = (\alpha_j - \hat{\alpha}_j)(\alpha_{j+1} - \alpha_j)^{-1}$ аддитивна:

$$F_{12}(\alpha) = f_p(\alpha - \beta_1) + f_p(\alpha - \beta_2), \tag{95}$$

наблюдаемые энергия и импульс тоже аддитивны.

Вычислим матрицу рассеяния двух построенных (93) физических частиц. Для пояснения дальнейших выкладок заметим, что S-матрицу для одномерного потенциального безотражательного рассеяния можно определить следующим образом:

$$-\mathrm{i} \ln S(k) = \varphi_2(k) - \varphi_1(k).$$

Здесь $\varphi_1(k) = 2kL$ — фаза, которую набирает свободная частица с импульсом k на длине $2L$; $\varphi_2(k) = 2kL - \mathrm{i} \ln S(k)$ — фаза, которую набирает взаимодействующая частица. Если возможно отражение, то следует рассмотреть симметризованную и антисимметризованную волновые функции, для которых S-матрица диагональна, и воспользоваться той же формулой (предполагается, что потенциал четный). Применим это определение для вычисления S-матрицы физических частиц в ММТ:

$$-\mathrm{i} \ln S(\beta_1 - \beta_2) = \varphi_2(\beta_1, \beta_2) - \varphi_1(\beta_1). \tag{96}$$

В данном случае свободная одночастичная фаза φ_1 соответствует конфигурации, где присутствует первая псевдочастица с быстротой β_1 и возмущенное ею море (вторая частица отсутствует); φ_1 — это фаза, которую набирает первая псевдочастица при прохождении длины $2L$ в этой конфигурации:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\beta_1) &= 2m_0 L \operatorname{sh} \beta_1 + \sum_j \Phi(\beta_1 - \tilde{\alpha}_j + \mathrm{i}\pi) = \\ &= 2m_0 L \operatorname{sh} \beta_1 + \sum_j \Phi(\beta_1 - \alpha_j + \mathrm{i}\pi) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\beta_1 - \alpha + \mathrm{i}\pi) f_p(\alpha - \beta_1)\, d\alpha.\end{aligned}$$

Здесь второе и третье слагаемые отвечают рассеянию частицы β_1 на море Дирака. Фаза φ_2 соответствует конфигурации двух физических частиц (95); φ_2 — это фаза, которую набирает первая псевдочастица при прохождении длины $2L$ в этой конфигурации:

$$\varphi_2(\beta_1, \beta_2) = 2m_0L \operatorname{sh}\beta_1 + \Phi(\beta_1-\beta_2) + \sum \Phi(\beta_1 - \hat{\alpha}_k + i\pi) + \pi =$$
$$= 2m_0L \operatorname{sh}\beta_1 + \sum_j \Phi(\beta_1 - \alpha_j + i\pi) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\beta_1 - \alpha + i\pi) F_{12}(\alpha)\, d\alpha + \Phi(\beta_1 - \beta_2) + \pi.$$

Подставим в правую часть определения (96) полученные для φ_1 и φ_2 выражения и продифференцируем по β_1. Получим

$$\frac{1}{i}\frac{d}{d\beta} S(\beta) = \Phi'(\beta) + \int_{-\infty}^{\infty} f_p'(\alpha)\, \Phi'(\beta - \alpha + i\pi)\, d\alpha;$$
$$\beta \equiv \beta_1 - \beta_2.$$

Используя явный вид Φ (77) и f_p' (92) и переходя к физической быстроте $\theta = \pi\beta/(\pi + g)$ (86), находим:

$$S(\theta) = \frac{\operatorname{sh}\theta + i\sin\gamma'}{\operatorname{sh}\theta - i\sin\gamma'}; \quad \gamma' = \pi\frac{(\pi - g)}{(\pi + g)}; \quad \theta = \theta_1 - \theta_2. \qquad (97)$$

Итак, на примере простейшего возбуждения мы продемонстрировали способ вычисления наблюдаемых величин в ММТ и модели СГ.

7. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В МОДЕЛИ СГ

Здесь приведен спектр масс и S-матрица в модели СГ и ММТ, которые вычисляются с помощью методов, изложенных в разд. 6 [44, 45, 47]. Более естественным для физической интерпретации нам представляется язык модели СГ, который здесь и используется.

Формула перенормировки массы для модели СГ в теории возмущений давно известна (см., например, [42]):

$$m = m_r C \exp\{\gamma\Lambda_\theta/\pi\}; \qquad (98)$$

здесь $\Lambda_\theta = \pi\Lambda/(\pi + g)$ — обрезание по быстротам θ физических частиц; m_r — масса элементарной физической частицы в модели СГ; m — голая масса, входящая в гамильтониан модели СГ, а C — константа, не зависящая от обрезания. Эта формула элементарно получается из (80), (84), (94) при естественном отождествлении $m_r\Delta \equiv \exp(-\Lambda_\theta)$, причем вычисляется и константа C. Формула перенормировки массы (98) универсальна — она годится при любом $0 < \gamma < \pi$. Физические же ответы различны в случаях притяжения $0 < \gamma < \pi/2$ и отталкивания ($\pi/2 < \gamma < \pi$).

Сначала опишем ответы в случае притяжения. Область $0 < \gamma < \pi/2$ естественно разбивается на интервалы

$$\pi (q + 2)^{-1} < \gamma < \pi (q + 1)^{-1}; \; q = 1, 2, \ldots$$

На q-м интервале спектр масс состоит из солитона и антисолитона (частиц с массой M_s и зарядом ± 1) и q нейтральных частиц с массами

$$M_n = 2M_s \sin\left(\frac{n}{2}\gamma'\right); \; \gamma' = \frac{\pi\gamma}{\pi-\gamma}; \; n = 1, \ldots, q. \qquad (99)$$

Здесь q — номер интервала, его не следует путать с оператором заряда. Эти формулы совпадают с ранее известными [48]. Отметим, что солитон в модели СГ есть физический фермион ММТ, а масса $M_1 = m_r$ — это масса элементарной частицы модели СГ, построенной выше (94). Таким образом, элементарную частицу можно отождествить с низшим связанным состоянием пары солитон — антисолитон. Матрица рассеяния солитона на антисолитоне оказывается равной S-матрице Замолодчикова [49]:

$$S_{s\bar{s}} (\theta \mid \gamma) = S_z (\theta \mid \gamma); \qquad (100)$$

здесь $\theta = \theta_s - \theta_{\bar{s}}$ — разность быстрот солитона и антисолитона. В базисе с фиксированной пространственной четностью S_z имеет вид:

$$\begin{aligned} S_z^{\pm} (\theta|\gamma) &= U_{\pm} (\theta|\gamma)\, S (\theta|\gamma); \\ U_+ (\theta|\gamma) &= \frac{\operatorname{sh}\{\pi (i\pi+\theta)/2\gamma'\}}{\operatorname{sh}\{\pi (i\pi-\theta)/2\gamma'\}}; \\ U_- (\theta|\gamma) &= -\frac{\operatorname{ch}\{\pi (\theta+i\pi)/2\gamma'\}}{\operatorname{ch}\{\pi (\theta-i\pi)/2\gamma'\}}; \end{aligned} \qquad (101)$$

$$S (\theta|\gamma) = \exp\left\{-\int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{\operatorname{sh}(\pi x/\gamma' - x)\operatorname{sh}(2i\theta x/\gamma')}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}(\pi x/\gamma')}\right\}.$$

Нейтральные частицы (99) являются связанными состояниями солитонов. Их S-матрица получается из (100) по стандартным правилам [50]. Множественное рождение в модели отсутствует; матрица рассеяния нескольких частиц равна произведению парных S-матриц.

Отметим, что модель СГ и ММГ можно решать не только с помощью КМОЗ, а получать ответы в теории возмущений с помощью фейнмановской диаграммной техники. Эта программа проводилась в литературе. Например, S-матрица (97) была вычислена в [51]; самое поразительное при этом наблюдать, как на поверхности масс сокращаются графики, описывающие множественное рождение. Вычисления диаграмм существенно упрощаются [52], если использовать теорему о вычислении однопетлевых диаграмм по вычетам [53]. Основные физические эффекты в модели СГ были предсказаны (в случае притяжения) именно в рамках теории возмущений с помощью квантовой теории солитонов [54, 55].

Рассмотрим теперь случай отталкивания, который теорией возмущений не описывается. Ответы были получены в работе [47]. Главное физическое явление в этой области состоит в изменении структуры физического вакуума, который заполняется не только элементарными псевдочастицами, но и их связанными состояниями. Это явление имеет простое физическое объяснение. Дело в том, что в ММТ и модели СГ имеют место следующие инволюции:

$$H_T(g) = -UH_T(-g)\,U^{-1};\ H_{SG}(\gamma) = -UH_{SG}(\pi-\gamma)\,U^{-1}$$

(это обычное γ_5 преобразование в ММТ).

Мы видели, что в случае притяжения $0 < \gamma < \pi/2$ возникает богатый спектр физических частиц с положительной энергией. Из этих инволюций следует, что при $\pi/2 < \gamma < \pi$ возникают все те же частицы, но с отрицательной энергией, которыми теперь надо заполнять вакуум. Приведем физические ответы в случае отталкивания. Область $\pi/2 < \gamma < \pi$ также естественным образом разбивается на интервалы

$$\pi(q+1)(q+2)^{-1} > \gamma > \pi q(q+1)^{-1};\ q = 1,\ 2,\ \ldots$$

На каждом из интервалов спектр масс состоит из солитона и антисолитона массой M_s и $(q-1)$ нейтральной частицы с массами

$$M_n = \frac{2M_s \sin\{n(\pi-\gamma)\}\cos\{\pi-\gamma\}}{\sin\{(q-1)(\pi-\gamma)\}+\sin\{q(\pi-\gamma)\}\operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{\pi-\gamma}-q-1\right)\right\}}.$$

Матрица рассеяния двух нейтральных частиц

$$S_{nl}(\theta) = \delta_{n-1,\,l}\left(\frac{i\exp\{\theta\}+1}{\exp\{\theta\}+i}\right);\ \theta = \theta_n - \theta_l;\ l = 1,\ \ldots,\ q-2.$$

Матрица рассеяния нейтральной частицы на солитоне

$$S_{ns}(\theta) = \delta_{n,\,q-1}\left(\frac{i\exp\{\theta\}+1}{\exp\{\theta\}+i}\right);\ \theta = \theta_s - \theta_n;\ n = 1,\ \ldots,\ q-1.$$

Матрица рассеяния солитона на антисолитоне имеет вид

$$S_{s\bar{s}}(\theta\mid\gamma) = S_z(\theta\mid\gamma_q),$$

где γ_q — модифицированная константа связи:

$$\gamma_q = \pi\,[\pi(q-1) - q\gamma]\,[\pi(q-2) - (q-1)\gamma]^{-1},$$

а S_z см. в (101).

Отметим, что интервал изменения γ_q не зависит от q:

$$\pi/2 < \gamma_q < 2\pi/3.$$

Итак, видно, что КМОЗ позволяет полностью решить квантовую модель СГ в рамках единого подхода.

8. СООТНОШЕНИЯ ЯНГА—БАКСТЕРА

Обсудим некоторые важные свойства квантовой R-матрицы (28), (29). Самое важное ее свойство — это то, что она должна удовлетворять некоторой системе функциональных уравнений. Для вывода этих уравнений заметим, что прямое произведение трех матриц монодромии $T(\lambda)\otimes T(\mu)\otimes T(\nu)$ можно привести к виду $T(\nu)\otimes T(\mu)\otimes T(\lambda)$ двумя различными способами, используя соотношение (29):

$$\begin{aligned}(T(\lambda)\otimes T(\mu)\otimes T(\nu)) &= (R^{-1}(\lambda,\mu)\otimes I)(I\otimes R^{-1}(\lambda,\nu))\times\\ &\times(R^{-1}(\mu,\nu)\otimes I)(T(\nu)\otimes T(\mu)\otimes T(\lambda))(R(\mu,\nu)\otimes I)\times\\ &\times(I\otimes R(\lambda,\nu))(R(\lambda,\mu)\otimes I)=(I\otimes R^{-1}(\mu,\nu))\times\\ &\times(R^{-1}(\lambda,\nu)\otimes I)(I\otimes R^{-1}(\lambda,\mu))(T(\nu)\otimes T(\mu)\otimes T(\lambda))\times\\ &\times(I\otimes R(\lambda,\mu))(R(\lambda,\nu)\otimes I)(I\otimes R(\mu,\nu)).\end{aligned}$$

Достаточным условием для выполнения этого равенства и являются знаменитые соотношения Янга — Бакстера [56, 57]:

$$\begin{aligned}(I\otimes R(\lambda,\mu))(R(\lambda,\nu)\otimes I)(I\otimes R(\mu,\nu)) &=\\ =(R(\mu,\nu)\otimes I)(I\otimes R(\lambda,\nu))(R(\lambda,\mu)\otimes I).&\end{aligned}\qquad(102)$$

В индексах это соотношение записывается в виде (a, b — внешние индексы, по повторяющимся индексам c проводится суммирование):

$$R^{a_2c_1}_{a_3c_3}(\lambda,\mu)\,R^{a_1b_1}_{c_1c_2}(\lambda,\nu)\,R^{c_2b_2}_{c_3b_3}(\mu,\nu)=R^{a_1c_1}_{a_2c_2}(\mu,\nu)\,R^{c_2c_3}_{a_3b_3}(\lambda,\nu)\,R^{c_1b_1}_{c_3b_2}(\lambda,\mu).\qquad(103)$$

Отметим, что во всех интересных примерах удается выбрать параметры, в которых $R(\lambda,\mu)=R(\lambda-\mu)$. Все R-матрицы, которые рассматриваются в этом обзоре, удовлетворяют соотношению Янга — Бакстера. Соотношения Янга — Бакстера широко используются не только в КМОЗ, но и в теории факторизованных S-матриц [24]. Оказывается, что матрица рассеяния физических частиц во вполне интегрируемых моделях квантовой теории поля (например, для модели СГ) удовлетворяет уравнениям (102). Именно это первоначально послужило основой для вычисления явного вида S-матрицы солитонов (100) в модели СГ [49]. Отметим также, что соотношение (103) оказалось полезным при вычислении некоторых фейнмановских диаграмм в пространстве физической размерности [58].

Соотношения Янга — Бакстера часто удобно использовать как основу для вычисления квантовой R-матрицы в моделях квантовой теории поля, если известна классическая r-матрица. Тогда требование, чтобы R-матрица обладала теми же симметриями, что и классическая r-матрица, и правильным квазиклассическим пределом, позволяет вычислить R-матрицу. Так можно вычислить независимо R-матрицу модели СГ на основе формул (20), (22) и (35). Исходя именно из таких соображений, удалось, например, вычислить [14] довольно сложную R-матрицу для модели Шабата—Михайлова.

Очень важны соотношения Янга — Бакстера и при решении моделей статистической физики (см. разд. 9).

Таким образом, соотношения Янга — Бакстера играют важную роль в физических приложениях. Сейчас известно большое число решений уравнений (103). Классификация R-матриц размерности 4×4 проведена в [59]; физически интересные R-матрицы этой размерности приведены здесь. Известно также много R-матриц бо́льшей размерности (см. [40, 60—63]. Известны и примеры R-матриц с многомерным спектральным параметром λ (см. Приложение 6).

9. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СПИНОВЫЕ МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

R-матрица, удовлетворяющая соотношениям Янга — Бакстера, порождает естественным образом модель классической статфизики, аналогичную восьмивершинной модели Бакстера [8, 23]. Отметим, что двумерная модель Изинга является частным случаем восьмивершинной модели, т. е. модель Изинга также можно решить с помощью КМОЗ. С такими моделями статфизики связаны вполне интегрируемые спиновые модели на одномерной периодической решетке с N узлами. Построение спиновой модели, связанной с R-матрицей размерности $K^2 \times K^2$, начнем с построения L-оператора. Размерность матрицы $L(n \mid \lambda)$ есть $K \times K$. Каждый матричный элемент $L_{ik}(n \mid \lambda)$ $(i, k = 1, \ldots, K)$ этой матрицы тоже представляет собой матрицу размерности $K \times K$ (квантовый оператор в пространстве $C_K^{(n)}$):

$$L_{ik}^{\alpha\beta}(n \mid \lambda) \equiv R_{i\beta}^{\alpha k}(\lambda, \nu); \; \alpha, \beta = 1, \ldots, K. \tag{104}$$

Здесь ν — фиксированная точка. Назовем i, k матричными индексами, а α, β — квантовыми. Учитывая определение (104), можно записать соотношение Янга — Бакстера (103) в виде

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mu)\,(L(n \mid \lambda) \otimes L(n \mid \mu)) = \\ = (L(n \mid \mu) \otimes L(n \mid \lambda))\, R(\lambda, \mu). \end{aligned} \tag{105}$$

Таким образом, по данной R-матрице построен L-оператор, который сплетается этой R-матрицей. Этот оператор аналогичен тем, которые мы строили в квантовополевых моделях [см., например, (40)]. Его отличительной чертой является то, что размерность квантового спинового пространства в n-м узле решетки равна размерности матричного пространства. Модели, построенные по таким L-операторам, назовем фундаментальными.

Дальнейшее построение спиновой модели по L-оператору (104) проводится по аналогии с рассмотренной ранее моделью РСГ (см. разд. 2). Определим матрицу монодромии $T(N, 1 \mid \lambda)$ и трансферматрицу $\tau(\lambda)$ формулами (5), (6). Трансферматрица $\tau(\lambda)$ есть квантовый оператор, действующий в пространстве $\boldsymbol{C}_q = \boldsymbol{C}_K^{(1)} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{C}_K^{(N)}$. Гамильтониан H спиновой модели определим с помощью тождеств следов [ср. с (31)]:

$$H = \text{const}\, \frac{d}{d\lambda} \ln \tau(\lambda) \Big|_{\lambda=\nu}. \tag{106}$$

Здесь выбор точки $\lambda = \nu$ [см. (104)] объясняется тем, что при естественной нормировке $R(\nu, \nu) = E$ (34) гамильтониан описывает взаимодействие ближайших соседей на решетке и легко вычисляется [64]:

$$H = \text{const} \sum_n h_{n-1,\, n}.$$

Оператор $h_{n-1,n}$ нетривиально действует только в двух соседних узлах

$$h_{n-1,n\{\beta\}}^{\{\alpha\}} = \frac{d}{d\lambda} R(\lambda, \nu)_{\alpha_n\beta_n}^{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}} \Big|_{\lambda=\nu}.$$

Обсудим лаксово представление уравнений движения, порожденных этим гамильтонианом. Такое представление существует: M-оператор (2) легко вычисляется по общей формуле (32) (см. также [65]):

$$\begin{aligned} M_{kj}(n|\lambda, \nu)_{\{\beta\}}^{\{\alpha\}} = \mathrm{i} \frac{d}{d\mu} [\delta_{kj} R_{\alpha_n\beta_n}^{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}(\mu, \nu) - \\ - (R^{-1})_{kb}^{\alpha_{n-1}a}(\nu, \lambda)\, R_{\alpha_n\beta_n}^{bc}(\mu, \nu)\, R_{cj}^{a\beta_{n-1}}(\mu, \lambda)]|_{\mu=\nu}. \end{aligned} \tag{107}$$

Приведем примеры конкретных моделей.

1. XYZ-модель Гейзенберга [66] с гамильтонианом

$$H_{XYZ} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (J_x \sigma_{n-1}^x \sigma_n^x + J_y \sigma_{n-1}^y \sigma_n^y + J_z \sigma_{n-1}^z \sigma_n^z)$$

строится по R-матрице Бакстера $R(\lambda, \mu) = R(\lambda - \mu)$ [23] [см. (П.1)]:

$$R_{11}^{11} = R_{22}^{22} = \operatorname{sn}(\lambda - \mu + 2\nu); \quad R_{22}^{11} = R_{11}^{22} = \operatorname{sn}(2\nu);$$
$$R_{21}^{12} = R_{12}^{21} = \operatorname{sn}(\lambda - \mu);$$
$$R_{12}^{12} = R_{21}^{21} = k \operatorname{sn}(2\nu) \operatorname{sn}(\lambda - \mu) \operatorname{sn}(\lambda - \mu + 2\nu).$$

Здесь sn — эллиптический синус с модулем k. Тождества следов имеют вид:

$$H_{XYZ} = -\frac{d}{d\lambda} \ln \tau(\lambda) \Big|_{\lambda=\nu} + \frac{J_z}{2} N; \tag{108}$$

$$J_x = 1 + k \operatorname{sn}^2 2\nu; \quad J_y = 1 - k \operatorname{sn}^2 2\nu; \quad J_z = \operatorname{cn} 2\nu \operatorname{dn} 2\nu.$$

2. XY-модель в магнитном поле с гамильтонианом

$$H_{XY} = \sum_{n=1}^{N} (J_x \sigma_{n-1}^x \sigma_n^x + J_y \sigma_{n-1}^y \sigma_n^y + h\sigma_n^z)$$

строится по R-матрице Фельдергофа — Замолодчикова [67, 59] $R(\lambda, \mu) = R(\lambda - \mu)$ [см. (П.1)]:

$$R_{11}^{11} = \operatorname{dn}(\lambda - \mu)/\operatorname{cn}(\lambda - \mu) + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \operatorname{sn}(\lambda - \mu);$$

$$R_{22}^{22} = \operatorname{dn}(\lambda - \mu)/\operatorname{cn}(\lambda - \mu) - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \operatorname{sn}(\lambda - \mu);$$

$$R_{21}^{12} = R_{12}^{21} = \varepsilon \operatorname{sn}(\lambda - \mu); \quad R_{22}^{11} = R_{11}^{22} = 1;$$

$$R_{21}^{21} = R_{12}^{12} = \operatorname{sn}(\lambda - \mu) \operatorname{dn}(\lambda - \mu)/\operatorname{cn}(\lambda - \mu).$$

Здесь эллиптические функции имеют модуль k, ε — свободный параметр. Тождества следов имеют вид:

$$H_{XY} = d \ln \tau(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=0}; \tag{109}$$

$J_x = (1 + \varepsilon)/2$; $J_y = (\varepsilon - 1)/2$; $h = \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}$. Эта модель была решена в [67].

Обратим внимание, что существует много других интересных фундаментальных моделей (см. [14, 60]). Итак, мы видим, что и в задачах статистической физики КМОЗ позволяет решить много содержательных моделей.

10. ИЗОТОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТИРРИНГА

Мы покажем, как идеи КМОЗ работают при решении [13, 68] этой модели в двумерном пространстве — времени. Ее лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} g \sum_{a=0}^{3} (\bar{\psi}\gamma^\mu \tau_a \psi)^2;$$

здесь ψ_k^α — изодублет фермионных полей; $\alpha = 1, 2$ — изотопический индекс; $k = 1, 2$ — спинорный индекс; γ^μ — двумерные матрицы Дирака; τ_a $(a = 1, 2, 3)$ изотопические матрицы Паули; $\tau_0 = 1$;

$$\psi_k^\alpha(x) \psi_j^{*\beta}(y) + \psi_j^{*\beta}(y) \psi_k^\alpha(x) =$$
$$= \delta_{\alpha\beta} \delta_{kj} \delta(x - y); \quad \bar{\psi} = \psi^* \gamma^0.$$

Первый этап решения этой модели — простроение координатного анзатца Бете (так же, как и для ММТ). Над псевдовакуумом $|0>$ гамильтониан не меняет числа частиц. Поэтому его собственные функции имеют вид

$$|N\rangle = \int dx_1 \ldots dx_N \Phi^{i_1 \ldots i_N}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}(x_1, \ldots, x_N)\, \psi^{*\alpha_1}_{i_1}(x_1) \ldots \psi^{*\alpha_N}_{i_N}(x_N)|0\rangle.$$

Антисимметричные функции Φ являются собственными функциями следующего квантовомеханического гамильтониана H_N:

$$\left.\begin{aligned} &H_N = \sum_{n=1}^{N} (-i\sigma^z_n \partial_{x_n}) + g \sum_{n<m} \sum_{a=0}^{3} (\tau^a_n \tau^a_m) \times \\ &\times (I - \sigma^z_n \sigma^z_m)\, \delta(x_m - x_n); \\ &H_N \Phi = E_N \Phi. \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

Собственная функция при $N = 1$ имеет вид:

$$\Phi^j_\alpha(\sigma, k \mid x) = A_\alpha u^j(\sigma) \exp(ikx);\ \sigma = \pm 1;$$

$$u^j(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ u^j(-1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\ E_1 = \sigma k;\ p_1 = k.$$

При произвольном N функция Φ строится так. Все пространство естественным образом делится на $N!$ секторов δ-образными потенциалами: $x_{p_1} < x_{p_2} < \ldots < x_{p_N}$; P — некоторая перестановка $(P: \{1, 2, \ldots, N\} \to \{p_1, p_2, \ldots, p_N\})$. Обозначим ${}^{(P)}\Phi$ волновую функцию в соответствующем секторе. Внутри каждого сектора потенциал равен нулю. Выпишем волновую функцию для $N = 2$:

$$\begin{aligned} {}^{(12)}\Phi^{i_1 i_2}_{\alpha_1 \alpha_2} &= A^{12}_{\alpha_1 \alpha_2} u^{i_1}(\sigma_1)\, u^{i_2}(\sigma_2) \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] - \\ &- A^{21}_{\alpha_1 \alpha_2} u^{i_1}(\sigma_2)\, u^{i_2}(\sigma_1) \exp[i(k_2 x_1 + k_1 x_2)]; \\ {}^{(21)}\Phi^{i_1 i_2}_{\alpha_1 \alpha_2} &= A^{21}_{\alpha_2 \alpha_1} u^{i_1}(\sigma_1)\, u^{i_2}(\sigma_2) \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] - \\ &- A^{12}_{\alpha_2 \alpha_1} u^{i_1}(\sigma_2)\, u^{i_2}(\sigma_1) \exp[i(k_2 x_1 + k_1 x_2)]. \end{aligned}$$

Коэффициенты A можно вычислить из уравнения (110). Сшивая решения в разных секторах, получаем (по повторяющимся индексам суммирование):

$$A^{12}_{\alpha_1 \alpha_2} = R(\sigma_{12})^{\alpha_1 \beta_1}_{\alpha_2 \beta_2} A^{21}_{\beta_1 \beta_2}.$$

Здесь $\sigma_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, а матрица рассеяния R двух псевдочастиц равна:

$$R(\sigma) = \frac{(\sigma + i\,\mathrm{tg}\, g)}{(\sigma - i\,\mathrm{tg}\, g)(\sigma + i\,\mathrm{tg}\, 2g)} [i\,\mathrm{tg}\, 2gE + \sigma\Pi]. \qquad (111)$$

Обратим внимание, что эта матрица совпадает с точностью до скалярного множителя с R-матрицей модели НШ (36) при замене $\sigma = (\lambda - \mu)/2$; $\operatorname{tg} 2g = - \varkappa/2$. Тот факт, что R удовлетворяет соотношению Янга — Бакстера (102), позволяет свести N-частичную волновую функцию к произведению двухчастичных, в чем и состоит сущность анзатца Бете. N-частичная волновая функция строится так:

$$^{(P)}\Phi^{i_1 \ldots i_N}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N} = \sum_Q (-1)^{[Q]} A^{PQ}_{\alpha_{p_1} \ldots \alpha_{p_N}} \prod_{n=1}^{N} u^{i_n}(\sigma_{q_n}) \exp(\mathrm{i} k_{q_n} x_n).$$

Здесь суммирование проводится по всем перестановкам Q; $[Q]$ — четность перестановки; PQ — произведение перестановок; $\{k_1, \ldots, k_N\}$ — фиксированный набор импульсов. Энергия и импульс этой волновой функции равны:

$$E_N = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n k_n; \quad P_N = \sum_{n=1}^{N} k_n. \tag{112}$$

Все коэффициенты A^Q можно определить по первому $A^I \equiv F$ с помощью последовательных перестановок соседних индексов:

$$A^{\{\ldots q_n q_{n+1} \ldots\}}_{\ldots \alpha_n \alpha_{n+1} \ldots} = R(\sigma_{q_n}, q_{n+1})^{\alpha_n \beta_n}_{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}} A^{\{\ldots q_{n+1} q_n \ldots\}}_{\ldots \beta_n, \beta_{n+1} \ldots}. \tag{113}$$

Итак, мы построили координатный Бете-анзатц.

Поместим систему в периодический ящик длиной $2L$. При наложении периодического условия, например, по координате x_1 нам надо перейти из сектора $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ в сектор $x_2 < x_3 < \ldots < x_N < x_1$ с помощью соотношения (113). При этом возникает матрица рассеяния S_1 первой псевдочастицы на всех остальных псевдочастицах, которая равна произведению многих двухчастичных матриц R (111). Для произвольной частицы с номером a условие периодичности имеет вид:

$$\begin{gathered}(S_a)^{\{\alpha\}}_{\{\beta\}} F_{\{\beta\}} = \exp(2\mathrm{i} k_a L) F_{\{\alpha\}}; \\ \{\alpha\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}.\end{gathered} \tag{114}$$

Здесь S_a — матрица рассеяния a-й псевдочастицы на всех остальных. В работе [68] установлено, что все S_a ($a = 1, \ldots, N$) можно представить в виде

$$S_a = -\tau(\lambda)|_{\lambda=\sigma_a}; \quad \tau^{\{\alpha\}}_{\{\beta\}} = \sum_{\{j\}} \prod_{k=1}^{n} R\left(\frac{\lambda - \sigma_k}{2}\right)^{\alpha_k j_k}_{j_{k-1} \beta_k}. \tag{115}$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (114) — это задача о поиске совместных собственных функций всех S_a. Формула (115) позволяет применить к решению этой задачи КМОЗ. Действительно, эта формула показывает, что $\tau(\lambda)$ — трансферматрица, построенная по оператору $L(n \mid \lambda)$:

$$L^{\alpha\beta}_{jk}(n|\lambda) = R^{\alpha k}_{j\beta}((\lambda - \sigma_n)/2), \tag{116}$$

причем операторы $L(n \mid \lambda)$ удовлетворяют билинейному соотношению с R-матрицей (111) после замены $\sigma \to (\lambda - \mu)/2$. В этом легко убедиться, если обратить внимание на то, что L-оператор строится из R-матрицы, удовлетворяющей соотношению Янга — Бакстера, по тем же правилам, что и в фундаментальных моделях (104) [сдвиг спектрального параметра на σ_n в (116) несуществен]. Известно (30), что такие $\tau(\lambda)$ коммутируют: $[\tau(\lambda), \tau(\mu)] = 0$.

Из (115) видно, что и $[S_a, S_b] = 0$. Таким образом, можно все S_a и $\tau(\lambda)$ одновременно привести к диагональному виду. Построим собственные функции $\tau(\lambda)$. Для этого введем матрицу монодромии, связанную с этой трансферматрицей:

$$T(\lambda) = L(N \mid \lambda)\, L(N-1 \mid \lambda) \ldots L(1 \mid \lambda). \tag{117}$$

КС между элементами $T(\lambda)$ такие же, как в модели НШ (52)—(55) при замене $\varkappa \to -2\operatorname{tg} 2g$.

На псевдовакуум

$$\Omega = \prod_{n=1}^{N} \omega_n; \; \omega_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

матрица монодромии (117) действует так:

$$C(\lambda)\Omega = 0; \; A(\lambda)\Omega = \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda - \sigma_k + 2i\operatorname{tg} g}{\lambda - \sigma_k - 2i\operatorname{tg} g}\right)\Omega;$$

$$D(\lambda)\Omega = \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{(\lambda - \sigma_k + 2i\operatorname{tg} g)(\lambda - \sigma_k)}{(\lambda - \sigma_k - 2i\operatorname{tg} g)(\lambda - \sigma_k + 2i\operatorname{tg} 2g)}\right)\Omega.$$

Собственные функции $\tau(\lambda)$ строятся, как обычно, в виде $B(\mu_1)\, B(\mu_2) \ldots B(\mu_n)\,\Omega$, причем μ_j удовлетворяют системе уравнений

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{(\mu_b - \sigma_k)}{(\mu_b - \sigma_k + 2i\operatorname{tg} 2g)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq b}}^{n} \frac{\mu_b - \mu_j - 2i\operatorname{tg} 2g}{\mu_b - \mu_j + 2i\operatorname{tg} 2g}; \quad b = 1, \ldots, n, \tag{118}$$

а собственные значения $\tau(\lambda)$ имеют вид:

$$\left[\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mu_k - \lambda + 2i\operatorname{tg} 2g}{\mu_k - \lambda}\right) + \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{\lambda - \sigma_j}{\lambda - \sigma_j + 2i\operatorname{tg} 2g}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda - \mu_k + 2i\operatorname{tg} 2g}{\lambda - \mu_k}\right)\right] \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{\lambda - \sigma_k + 2i\operatorname{tg} g}{\lambda - \sigma_k - 2i\operatorname{tg} g}\right).$$

Собственные значения S_a получаются отсюда при подстановке $\lambda = \sigma_a$. Подставляя их в (114), получаем вторую систему трансцендентных уравнений:

$$\exp\{2ik_aL\} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mu_k - \sigma_a + 2i \operatorname{tg} 2g}{\mu_k - \sigma_a} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a}}^{N} \left(\frac{\sigma_a - \sigma_k + 2i \operatorname{tg} g}{\sigma_a - \sigma_k - 2i \operatorname{tg} g} \right). \quad (119)$$

Чтобы найти спектр гамильтониана изотопической модели Тирринга, остается решить совместно уравнения (118) и (119) и вычислить E_N и P_N (112). Этот анализ, проведенный в работе [68], аналогичен анализу, который описан в разд. 6. Замечательно, что точное решение подтверждает присутствие асимптотической свободы в этой модели, установленное ранее в рамках теории возмущений.

Мы изложили на примере изотопической модели Тирринга схему многократного анзатца Бете. Действительно, задача построения собственных функций изотопической модели Тирринга свелась к последовательному построению двух Бете-анзатцев. Именно в этой форме анзатц Бете применим ко многим физическим моделям: например, так была решена проблема Кондо [69].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели квантовый метод обратной задачи. Его основная идея состоит в переходе от исходных локальных переменных к «данным рассеяния», выражающимся через элементы матрицы монодромии. Эта замена позволяет применить алгебраический анзатц Бете и диагонализовать гамильтониан.

Основные компоненты КМОЗ следующие:

а) построение квантового L-оператора и R-матрицы;

б) выражение гамильтониана через матрицу монодромии с помощью тождеств следов;

в) построение псевдовакуума;

г) построение физического вакуума и возбуждений.

Хочется надеяться, что нам удалось убедить читателя в том, что КМОЗ — очень удобный аппарат при решении двумерных моделей физических явлений. В последнее время появились и первые результаты для трехмерных вполне интегрируемых систем [70].

В заключение мы выражаем признательность Л. Д. Фаддееву, идеи которого сыграли решающую роль при создании и развитии квантового метода обратной задачи, а также нашим коллегам Л. А. Тахтаджяну, П. П. Кулишу и Е. К. Склянину за обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Мы используем следующие обозначения. Тензорное произведение двух $K \times K$-матриц A и B (матрицу $A \otimes B$ размерности $K^2 \times K^2$) определим обычным образом:

$$(A \otimes B)_{kl}^{ij} = A_{ij} B_{kl} \quad (i, j; k, l = 1, \ldots, K).$$

Матричные элементы $K^2 \times K^2$-матриц нумеруем блочными индексами i, j (i — номер блок-строки, j — номер блок-столбца) и внутренними индексами k, l (k — номер строки, l — номер столбца внутри блока). Для примера выпишем, как выглядит некоторая матрица R размерности 4×4, действующая в тензорном произведении двух пространств размерности 2 ($K = 2$):

$$R = \left(\begin{array}{cc|cc} R^{11}_{11} & R^{11}_{12} & R^{12}_{11} & R^{12}_{12} \\ R^{11}_{21} & R^{11}_{22} & R^{12}_{21} & R^{12}_{22} \\ \hline R^{21}_{11} & R^{21}_{12} & R^{22}_{11} & R^{22}_{12} \\ R^{21}_{21} & R^{21}_{22} & R^{22}_{21} & R^{22}_{22} \end{array}\right). \tag{П.1}$$

В этих обозначениях матричное произведение двух $K^2 \times K^2$-матриц R и S записывается так:

$$(RS)^{ij}_{kl} = R^{im}_{kn} S^{mj}_{nl}$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Единичная матрица E размерности $K^2 \times K^2$ запишется в виде

$$E = I \otimes I; \qquad E^{ij}_{kl} = \delta_{ij}\delta_{kl}.$$

Другая важная в этом формализме матрица — матрица перестановки Π размерности $K^2 \times K^2$:

$$\Pi^{ij}_{kl} = \delta_{il}\delta_{kj}; \qquad \Pi^2 = E; \qquad \Pi (A \otimes B) \Pi = B \otimes A. \tag{П.2}$$

Последнее равенство верно для любых матриц A и B с коммутирующими элементами.

Определим также СП тензорного произведения двух матриц A и B, зависящих от динамических переменных:

$$\{A \overset{\otimes}{,} B\}^{ij}_{kl} = \{A_{ij}, B_{kl}\}.$$

Здесь в правой части стоят СП между двумя матричными элементами матриц A и B.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Докажем несколько более общее утверждение, чем то, которое использовалось в основном тексте. Пусть СП между элементами потенциала Q удалось представить в виде

$$\{Q(z_\lambda \mid \lambda) \overset{\otimes}{,} Q(z_\mu \mid \mu)\} = \delta(z_\lambda - z_\mu)\,[r(z_\lambda \mid \lambda, \mu),\ Q(z_\lambda \mid \lambda) \otimes I + I \otimes Q(z_\lambda \mid \mu)] - \\ - \delta(z_\lambda - z_\mu) \frac{d}{dz_\lambda} r(z_\lambda \mid \lambda, \mu). \tag{П.3}$$

Тогда СП между элементами матрицы монодромии даются формулой

$$\{T(x, y \mid \lambda) \overset{\otimes}{,} T(x, y \mid \mu)\} = -r(x \mid \lambda, \mu)\, T(x, y \mid \lambda) \otimes T(x, y \mid \mu) + \\ + T(x, y \mid \lambda) \otimes T(x, y \mid \mu)\, r(y \mid \lambda, \mu). \tag{П.4}$$

Таким образом, r-матрица в этих формулах может зависеть от x (как явно, так и через динамические переменные). Зависимость r-матрицы от x естественно возникает, например, при калибровочном преобразовании (см. [71]) потенциала. Для доказательства заметим, что матрица монодромии $T(x, y \mid \lambda)$ зависит от динамических переменных только через потенциал

$Q(\lambda)$. Поэтому СП ее матричных элементов можно записать так:

$$\{T_{ij}(\lambda),\ T_{kl}(\mu)\} = \int_y^x dz_\lambda \int_y^x dz_\mu \left(\delta T_{ij}(x,\ y \mid \lambda)/\delta Q_{ab}(z_\lambda \mid \lambda)\right) \times$$

$$\times \left(\delta T_{kl}(x,\ y \mid \mu)/\delta Q_{cd}(z_\mu \mid \mu)\right) \{Q_{ab}(z_\lambda \mid \lambda),\ Q_{cd}(z_\mu \mid \mu)\}. \tag{П.5}$$

Вариационная производная $T(\lambda)$ по $Q(\lambda)$ вычисляется в духе теории возмущений:

$$\delta T(x,\ y \mid \lambda) = -\int_y^x T(x,\ z \mid \lambda)\, \delta Q(z \mid \lambda)\, T(z,\ y \mid \lambda)\, dz. \tag{П.6}$$

Формула (П.6) и определения Приложения 1 позволяют переписать (П.5) в компактном виде:

$$\{T(x,\ y \mid \lambda) \overset{\otimes}{,} T(x,\ y \mid \mu)\} =$$

$$= \int_y^x dz_\lambda \int_y^x dz_\mu \left(T(x,\ z_\lambda \mid \lambda) \otimes T(x,\ z_\mu \mid \mu)\right) \{Q(z_\lambda \mid \lambda) \overset{\otimes}{,} Q(z_\mu \mid \mu)\} \times$$

$$\times \left(T(z_\lambda,\ y \mid \lambda) \otimes T(z_\mu,\ y \mid \mu)\right). \tag{П.7}$$

С помощью формулы (П.3) находим:

$$\{T(x,\ y \mid \lambda) \overset{\otimes}{,} T(x,\ y \mid \mu)\} = \int_y^x dz \Big[\left(T(x,\ z \mid \lambda) \otimes T(x,\ z \mid \mu)\right) \times$$

$$\times \left([r(z \mid \lambda,\ \mu),\ Q(z \mid \lambda) \otimes I + I \otimes Q(z \mid \mu)] - \frac{d}{dz} r(z \mid \lambda,\ \mu) \right) \times$$

$$\times \left(T(z,\ y \mid \lambda) \otimes T(z,\ y \mid \mu)\right) \Big]. \tag{П.8}$$

Для дальнейших преобразований удобно переписать (4) в виде:

$$\begin{gathered} (\partial_x + Q(x \mid \lambda))\, T(x,\ y \mid \lambda) = 0; \\ \partial_y T(x,\ y \mid \lambda) = T(x,\ y \mid \lambda)\, Q(y \mid \lambda); \\ T(y,\ y \mid \lambda) = I. \end{gathered} \tag{П.9}$$

Исключим с помощью этих равенств $Q(z)$ из (П.8) и получим:

$$\{T(x,\ y \mid \lambda) \overset{\otimes}{,} T(x,\ y \mid \mu)\} =$$

$$= -\int_y^x dz \frac{d}{dz} \left[\left(T(x,\ z \mid \lambda) \otimes T(x,\ z \mid \mu)\right) r(z \mid \lambda,\ \mu) \left(T(z,\ y \mid \lambda) \otimes T(z,\ y \mid \mu)\right) \right]. \tag{П.10}$$

Вычисляя интеграл, приходим к (П.4). Этот метод вычисления СП близок к методу вычисления СП между данными рассеяния с помощью «четверных» тождеств [4]. Итак, мы рассмотрели непрерывный случай.

Для классических решеточных моделей из локального соотношения

$$\{L(k \mid \lambda) \overset{\otimes}{,} L(l \mid \mu)\} =$$

$$= \delta_{kl}\left[(L(k \mid \lambda) \otimes L(k \mid \mu))\, r(k \mid \lambda, \mu) - r(k+1 \mid \lambda, \mu)(L(k \mid \lambda) \otimes L(k \mid \mu))\right] \forall k$$

следует соотношение

$$\{T(m, n \mid \lambda) \overset{\otimes}{,} T(m, n \mid \mu)\} = (T(m, n \mid \lambda) \otimes$$
$$\otimes T(m, n \mid \mu))\, r(n \mid \lambda, \mu) - r(m+1 \mid \lambda, \mu)(T(m, n \mid \lambda) \otimes$$
$$\otimes T(m, n \mid \mu)); \quad m \geqslant n.$$

Доказательство легко провести по индукции.

В квантовом случае мы тоже докажем соотношение, более общее, чем (29). Из

$$R(k+1 \mid \lambda, \mu)(L(k \mid \lambda) \otimes L(k \mid \mu)) =$$
$$= (L(k \mid \mu) \otimes L(k \mid \lambda))\, R(k \mid \lambda, \mu) \qquad (\text{П}.11)$$

и ультралокальности $[L_{ab}(k \mid \lambda), L_{cd}(m \mid \mu)] = 0$ при $m \neq k$ следует, что при $m \geqslant n$

$$R(m+1 \mid \lambda, \mu)(T(m, n \mid \lambda) \otimes T(m, n \mid \mu)) =$$
$$= (T(m, n \mid \mu) \otimes T(m, n \mid \lambda))\, R(n \mid \lambda, \mu). \qquad (\text{П}.12)$$

Доказательство проведем по индукции. Ясно, что нужно, исходя из (П. 12), доказать это же соотношение в случае m, на 1 большего. Очевидно, что

$$T(m+1, n \mid \lambda) = L(m+1 \mid \lambda)\, T(m, n \mid \lambda).$$

Вычислим выражение

$$R(m+2 \mid \lambda, \mu)(T(m+1, n \mid \lambda) \otimes T(m+1, n \mid \mu)) =$$
$$= R(m+2 \mid \lambda, \mu)(L(m+1 \mid \lambda) \otimes L(m+1 \mid \mu)) \times$$
$$\times R^{-1}(m+1 \mid \lambda, \mu)\, R(m+1 \mid \lambda, \mu) \times$$
$$\times (T(m, n \mid \lambda) \otimes T(m, n \mid \mu))\, R^{-1}(n \mid \lambda, \mu)\, R(n \mid \lambda, \mu) =$$
$$= (L(m+1 \mid \mu) \otimes L(m+1 \mid \lambda)) \times$$
$$\times (T(m, n \mid \mu) \otimes T(m, n \mid \lambda))\, R(n \mid \lambda, \mu) =$$
$$= (T(m+1, n \mid \mu) \otimes T(m+1, n \mid \lambda))\, R(n \mid \lambda, \mu).$$

Сравнивая левую и правую части этого равенства, видим, что доказали соотношение (П.12) для $m+1$ и тем самым завершили доказательство этого соотношения по индукции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

При $\lambda = \nu$ детерминант (25) оператора L равен нулю, сам оператор (23) пропорционален одномерному проектору: $L_{ik}(n \mid \nu) = \alpha_n^i \beta_n^k$. Здесь α и β — двухкомпонентные векторы. Величина $\tau(\nu)$ факторизуется:

$$\tau(\nu) = \prod_{n=1}^{N} (\beta_{n+1}\alpha_n); \quad \beta_{N+1} \equiv \beta_1; \quad \nu = -b^{\pm 1}.$$

Вычислим $\tau'(\nu)$:

$$\tau'(\nu) = \sum_{k=1}^{N} \tau_k; \quad \tau_k = \Big(\prod_{\substack{i=1\\ i \neq k-1,\, k}}^{N} (\beta_{i+1}\alpha_i)\Big)\, z_k;$$

$$z_k = (\beta_{k+1} L'(k \mid \nu)\, \alpha_{k-1}).$$

Первая логарифмическая производная

$$\tau^{-1}(\nu)\,\tau'(\nu)=\sum_{k=1}^{N} z_k\,(\beta_{k+1}\alpha_k)^{-1}\,(\beta_k\alpha_{k-1})^{-1}.$$

Итак, видим, что логарифмическая производная $\tau(\lambda)$ равна сумме локальных плотностей (взаимодействие трех ближайших соседей). На основе последней формулы легко получить явный вид гамильтониана в модели РСГ (см. разд. 1).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

КС между $L(n\mid\lambda)$ и $q(n\mid\lambda,\mu)$ легко получаются из соотношения (28):

$$q(n+1\mid\lambda,\mu)\,L(n\mid\lambda)=L(n\mid\lambda)\,q(n\mid\lambda,\mu).$$

Произведение в этой формуле обычное матричное, а не тензорное; величины q и L — матрицы размерности $K\times K$. Продифференцировав это соотношение по μ и умножив слева на $q^{-1}(n+1\mid\lambda,\mu)$, найдем

$$q^{-1}(n+1\mid\lambda,\mu)\frac{d}{d\mu}q(n+1\mid\lambda,\mu)\,L(n\mid\lambda)=$$
$$=q^{-1}(n+1\mid\lambda,\mu)\,L(n\mid\lambda)\frac{d}{d\mu}q(n\mid\lambda,\mu).$$

Для того чтобы преобразовать правую часть, перепишем КС между q и L в виде

$$q^{-1}(n+1\mid\lambda,\mu)\,L(n\mid\lambda)=L(n\mid\lambda)\,q^{-1}(n\mid\lambda,\mu)$$

и получим

$$\left(q^{-1}(n+1\mid\lambda,\mu)\frac{d}{d\mu}q(n+1\mid\lambda,\mu)\right)L(n\mid\lambda)=$$
$$=L(n\mid\lambda)\left(q^{-1}(n\mid\lambda,\mu)\frac{d}{d\mu}q(n\mid\lambda,\mu)\right).$$

Отсюда и следуют соотношения (32), (33).

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Вычислим коэффициенты C_k в разложении (37) [32]. Для этого преобразуем инфинитезимальную матрицу монодромии $L(n\mid\lambda)$ (14) с помощью калибровочного преобразования U_n, потребовав, чтобы преобразованная матрица монодромии $\tilde{L}$ была диагональной (зависимость от λ в аргументах функций мы не выписываем):

$$\tilde{L}(n\mid\lambda)=U_n^{-1}L(n\mid\lambda)\,U_{n-1}. \tag{П.13}$$

Матрицу U_n размерности 2×2 будем искать в виде асимптотического разложения по степеням λ^{-1}:

$$U_n=I+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k}Q_n^{(k)}.$$

Хотя матричными элементами U_n являются операторы, обратная матрица U_n^{-1} легко получается формальным обращением этого ряда, поскольку он начинается с единичной матрицы I. Нетрудно проверить, что $Q_n^{(k)}$ можем найти в антидиагональном виде:

$$Q_n^{(k)}=\begin{pmatrix}0; & \beta_n^{(k)}\\ \gamma_n^{(k)}; & 0\end{pmatrix},$$

причем условие диагональности матрицы $\widetilde{L}(n\mid\lambda)$ приводит к следующим уравнениям на β, γ:

$$\beta_n^{(k)}+\beta_{n-1}^{(k)}=B_n^{(k)};\qquad \gamma_n^{(k)}+\gamma_{n-1}^{(k)}=G_n^{(k)}. \tag{П.14}$$

Величины $B_n^{(k)}$ и $G_n^{(k)}$ выражаются через $\beta_m^{(l)}$ и $\gamma_m^{(l)}$ с $l<k$ соответственно и поля ψ_m, ψ_m^*. Приведем здесь лишь выражения для $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$, которые используем в дальнейшем:

$$\left.\begin{aligned}&G_n^{(1)}=-2\varkappa\psi_n;\quad G_n^{(2)}=\frac{2i}{\Delta}\left(\gamma_{n-1}^{(1)}-\gamma_n^{(1)}\right);\\ &G_n^{(3)}=\frac{2i}{\Delta}\left(\gamma_{n-1}^{(2)}-\gamma_n^{(2)}+i\Delta\gamma_n^{(1)}\psi_n^*\gamma_{n-1}^{(1)}\right).\end{aligned}\right\} \tag{П.15}$$

На $\beta_n^{(k)}$, $\gamma_n^{(k)}$ наложим естественные граничные условия: $\gamma_N^{(k)}=\beta_0^{(k)}=0\ \forall k$. Этот выбор приводит к нормально упорядоченной форме величин β, γ при решении уравнений (П.14).

В дальнейшем нам понадобится решение для γ:

$$\gamma_n^{(k)}=(-1)^{n+1}\sum_{l=n+1}^{N}(-1)^l G_l^{(k)}.$$

Нетрудно выразить матричные элементы диагональной матрицы $\widetilde{L}(n\mid\lambda)$ через β, γ; так, например,

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_{11}(n\mid\lambda)&=1-i\lambda\Delta/2-i\Delta\psi_n^*\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k}\gamma_{n-1}^{(k)}\approx\\ &\approx\exp\{-i\lambda\Delta/2\}\Big(1-i\psi_n^*\Delta\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k}\gamma_{n-1}^{(k)}\Big).\end{aligned} \tag{П.16}$$

Последнее равенство записано с учетом $\Delta\to0$; аналогичным образом

$$\widetilde{L}_{22}(n\mid\lambda)\approx\exp\{i\lambda\Delta/2\}\left(1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right). \tag{П.17}$$

Обратимся к выводу разложения (37). Из (П.13) следует, что

$$T(N,1\mid\lambda)=U_N(\lambda)\,\widetilde{T}(N,1\mid\lambda)\,U_0^{-1}(\lambda); \tag{П.18}$$

$$\widetilde{T}(N,1\mid\lambda)=\widetilde{L}(N\mid\lambda)\ldots\widetilde{L}(1\mid\lambda)=\begin{pmatrix}\widetilde{A}(\lambda); & 0\\ 0; & \widetilde{D}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Учитывая (П.16), (П.17), получаем при $\Delta\to0$:

$$\widetilde{A}(\lambda)=\exp\{-i\lambda L\}\left(1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right);$$

$$\widetilde{D}(\lambda)=\exp\{i\lambda L\}\left(1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right)\xrightarrow[\lambda\to+i\infty]{}0.$$

Пренебрегая граничными членами, находим при $\Delta\to0$ и $L\to\infty$:

$$\begin{aligned}&\ln\left[\exp\{i\lambda L\}\,\tau(\lambda)\right]\underset{\lambda\to+i\infty}{=}\ln\left[\exp\{i\lambda L\}\,\widetilde{A}(\lambda)\right];\\ &\exp\{i\lambda L\}\,\widetilde{A}(\lambda)=1+\sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{-l}a_l.\end{aligned} \tag{П.19}$$

Коэффициенты a_l легко получаются из (П.14) — (П.16), (П.18). Действительно, после калибровочного преобразования построение матрицы монодромии свелось к произведению диагональных матриц.

Логарифмируя (П.19), получаем искомое разложение (37), причем

$$C_1 = a_1; \quad C_2 = a_2 - a_1^2/2; \qquad \text{(П.20)}$$
$$C_3 = a_3 - (a_2 a_1 + a_1 a_2)/2 + a_1^3/3 = a_3 - a_1 a_2 + a_1^3/3.$$

Последнее равенство получается с учетом свойства $a_l a_k = a_k a_l$, следующего из (30).

Для определения из (П.20) выражений C_1, C_2, C_3 через локальные поля ψ_m, ψ_m^* надо воспользоваться явными выражениями для коэффициентов a_l и перейти в найденных выражениях к пределу $\Delta \to 0$. При конечном Δ интегралы движения получаются нелокальными и становятся локальными лишь при $\Delta \to 0$. Переход $\Delta \to 0$ необходимо делать с учетом требования гладкости описывающих модель квантовых полей, т. е. в нормально упорядоченных выражениях. Выражения для C_n поэтому необходимо нормально упорядочить. После этого для перехода к пределу $\Delta \to 0$ можно воспользоваться формулой

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k f_k \approx \frac{1}{2} [(-1)^n f_n - f_1],$$

которая верна, если f является гладкой функцией. Соответствующие вычисления не содержат уже принципиальных трудностей и приводят к выражениям (38) для первых трех коэффициентов разложения (37).

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Здесь рассмотрено решение уравнения Янга — Бакстера с трехмерным спектральным параметром, найденное В. Е. Корепиным. Спектральный параметр $\hat{\lambda}$ является матрицей 2×2 с определителем, равным единице:

$$\hat{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}; & \lambda_{12} \\ \lambda_{21}; & \lambda_{22} \end{pmatrix}; \quad \det \hat{\lambda} = 1.$$

Другими словами, $\hat{\lambda} \in SL(2, C)$. Приведем R-матрицу:

$$R(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = R(\hat{\lambda}\hat{\mu}^{-1}); \quad \hat{\lambda}\hat{\mu}^{-1} \equiv \hat{g};$$
$$R_{11}^{11} = g_{11}; \quad R_{22}^{22} = g_{22}; \quad R_{22}^{11} = R_{11}^{22} = 1;$$
$$R_{21}^{12} = \mathrm{i} g_{12}; \quad R_{12}^{21} = \mathrm{i} g_{21}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.**— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095.
2. **Lax P. D.**— Comm. Pure Appl. Math., 1968, v. 21, p. 467.
3. **Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.**— Функциональный анализ, 1971, т. 5, с. 18.
4. **Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.** Теория солитонов. М., Наука, 1980.
5. **Склянин Е. К., Фаддеев Л. Д.**— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, с. 1430.

6. **Фаддеев Л. Д.** Препринт ЛОМИ Р-2-79. Л., 1979; в кн.: Проблемы квантовой теории поля (Труды V Международного совещания по нелокальным теориям поля). Дубна, 1979, с. 249.
7. **Склянин Е. К.**— Докл. АН СССР, 1978, т. 244, с. 1337.
8. **Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.**— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, с. 13.
9. **Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.**— Теорет. и мат. физ., 1979, т. 40, с. 194.
10. **Thacker H. B.** Preprint FERMILAB-Pub-80/38-THY, 1980.
11. **Kulish P. P., Sklyanin E. K.**— Phys. Lett. A, 1979, v. 70, p. 461.
12. **Кулиш П. П.** Препринт ЛОМИ Р-3-79. Л., 1979.
13. **Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu.** Preprint LOMI E-4-79, 1979; **Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю.**— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1981, т. 80, 214.
14. **Izergin A. G., Korepin V. E.** Preprint LOMI E-3-80, 1980; **Izergin A. G., Korepin V. E.** Commun. Math. Phys., 1981, v. 79, p. 165.
15. **Изергин А. Г., Корепин В. Е.**— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, с. 76.
16. **Izergin A. G., Korepin V. E.**— Lett. Math. Phys., 1981, v. 5, p. 199.
17. **Bethe H.**— Z. Phys., 1931, Bd 71, S. 105.
18. **Hulten L.**— Arkiv mat. astron.-fys., 1938, v. 26A, p. 1.
19. **Yang C. N., Yang C. P.**— Phys. Rev., 1966, v. 150, p. 131.
20. **Onsager L.**— Phys. Rev., 1944, v. 65, p. 117.
21. **Kramers H. A., Wannier G. H.**— Phys. Rev., 1941, v. 60, p. 252.
22. **Lieb E. H.**— Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 162; Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 108.
23. **Baxter R. J.**— Ann. Phys., 1972, v. 70, p. 323; 1973, v. 76, p. 1, 25, 48.
24. **Zamolodchikov A. B.**— Commun. Math. Phys., 1979, v. 69, p. 165.
25. **Склянин Е. К.**— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 55.
26. **Гельфанд И. М., Левитан Б. М.**— Докл. АН СССР, 1953, т. 88, с. 593; **Буслаев В. С., Фаддеев Л. Д.**— Докл. АН СССР, 1960, т. 132, с. 13.
27. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.**— ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 118; 1973, т. 64, с. 1627.
28. **Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.**— Теорет. и мат. физ., 1974, т. 21, с. 160.
29. **Изергин А. Г., Корепин В. Е.**— Вестн. Ленингр. ун-та, 1981, № 22, с. 87.
30. **Березин Ф. А., Похил Г. П., Финкельберг В. М.**— Вестн. МГУ, 1964, № 1, с. 21.
31. **McGuire J. B.**— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 622.
32. **Изергин А. Г., Корепин В. Е., Смирнов Ф. А.**— Теорет. и мат. физ., 1981, т. 48, с. 319.
33. **Корепин В. Е.**— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, т. 101, с. 90.
34. **Кулиш П. П.**— Докл. АН СССР, 1981, т. 255, с. 323.
35. **Lieb E. H., Liniger W.**— Phys. Rev., 1963, v. 130, p. 1605.
36. **Lieb E. H.**— Ibid., p. 1616.
37. **Yang C. N., Yang C. P.**— J. Math. Phys., 1969, v. 10, p. 1115.
38. **Mathematical** Physics in One Dimension. Ed. Lieb E. H. and Mattis D.C., N. Y.— L., Academic Press, 1966.
39. **Изергин А. Г., Кулиш П. П.**— Теорет. и мат. физ., 1980, т. 44, с. 189.
40. **Кулиш П. П., Склянин Е. К.**— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 129.
41. **Березин Ф. А., Сушко В. Н.**— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1965, т. 48, с. 1293.
42. **Coleman S.**— Phys. Rev. D, 1975, v. 11, p. 2088.
43. **Mandelstam S.**— Ibid., p. 3026.
44. **Bergknoff H., Thacker H. B.**— Phys. Rev. D., 1979, v. 19, p. 3666.

45. **Корепин В. Е.**— Теорет. и мат. физ., 1979, т. 41, с. 169.
46. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1973.
47. **Korepin V. E.**— Commun. Math. Phys., 1980, v. 76, p. 165; **Корепин В. Е.**— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 633.
48. **Luther A.**— Phys. Rev. B, 1976, v. 14, p. 2153.
49. **Zamolodchikov A. B.**— Commun. Math. Phys., 1977, v. 55, p. 183.
50. **Haag R.**— Phys. Rev., 1958, v. 112, p. 669; **Zimmermann W.**— Nouvo cimento, 1958, v. 10, p. 567.
51. **Арефьева И. Я., Корепин В. Е.**— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 680.
52. **Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov Al. B.**— Ann. Phys., 1979, v. 120, p. 253.
53. **Изергин А. Г., Корепин В. Е.**— — Вестн. Ленингр. ун-та, 1979, № 16, с. 17.
54. **Faddeev L. D., Korepin V. E.**— Phys. Rep., 1978, v. C42, p. 3.
55. **Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A.**— Phys. Rev. D, 1975, v. 11, p. 3424.
56. **Yang C. N.**— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1312.
57. **Baxter R. L.**— Ann. Phys., 1972, v. 70, p. 193.
58. **Zamolodchikov A. B.**— Phys. Lett. B, 1980, v. 97, p. 63.
59. **Кричевер И. М.**— Функциональный анализ, 1981, т. 15, с. 512.
60. **Замолодчиков А. Б., Фатеев В. А.**— Ядерная физика, 1980, т. 32, с. 581.
61. **Белавин А. А.**— Функциональный анализ, 1980, т. 14, с. 18.
62. **Чередник И. В.**— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, с. 1095.
63. **Stroganov Yu. G.**— Phys. Lett. A, 1979, v. 74, p. 116.
64. **Sutherland B.**— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 3183.
65. **Sklyanin E. K.** Preprint LOMI E-3-79, 1979.
66. **Heisenberg W.**— Z. Phys., 1928, Bd 49, S. 619.
67. **Felderhof B. U.**— Physica, 1973, v. 66, p. 279.
68. **Belavin A. A.**— Phys. Lett. B, 1979, v. 87, p. 117.
69. **Вигман П. Б.**— Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 31, с. 392.
70. **Замолодчиков А. Б.**— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1980, т. 79. с. 641.
71. **Захаров В. Е., Михайлов А. В.**— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1978, т. 74, с. 1953.