

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ КИРАЛЬНЫЙ ЛАГРАНЖИАН С УЧЕТОМ ГЛЮОННЫХ АНОМАЛИЙ

М. К. Волков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дается обзор работ, посвященных построению киральных лагранжианов с учетом глюонных аномалий. Такие лагранжианы можно рассматривать как эффективные лагранжианы для КХД в пределе больших N . Решается $U(1)$ -проблема, описываются характерные распады η - и η' -мезонов.

It is review of studies aimed at constructing chiral Lagrangians with the inclusion of gluon anomalies. Such Lagrangians can be considered as effective Lagrangians for QCD in the limit of large N . An $U(1)$ problem is solved, and specific decays of η - and η' -mesons are described.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на очевидные успехи квантовой хромодинамики (КХД) в описании сильных взаимодействий адронов при высоких энергиях [1], она пока не может претендовать на хорошее количественное, а в некоторых случаях даже на качественное объяснение физических явлений в области низких энергий. Прежде всего это относится к попыткам выяснения сущности эффекта удержания кварков, к предсказанию спектра масс адронов и описанию ряда других низкоэнергетических характеристик.

Известно также, что в области низких энергий сильные взаимодействия адронов вполне удовлетворительно описываются феноменологическими киральными лагранжианами или алгеброй токов [2—6]. Формализм киральных лагранжианов имеет еще и ту привлекательную черту, что в нем можно работать непосредственно с физическими частицами и прямо описывать физически наблюдаемые явления.

Для описания низкоэнергетической физики в рамках КХД в последнее время интенсивно разрабатывали аппарат, связанный с $1/N$ разложением при больших значениях N . Здесь N обозначает количество цветов. При больших значениях N приходим к так называемой *многоцветной хромодинамике* [7—9]. Впервые она была предложена т'Хоофтом в 1974 г. [7]. Основная идея этой теории заключается в том, что вместо цветной группы $SU(3)$ предлагается рассматривать $SU(N)$ -группу при больших значениях N . Тогда появляется возможность использовать разложение по обратным степеням N , которые будут малыми параметрами теории. Такое разложение вполне разумно, поскольку в пределе $N \rightarrow \infty$ (исходный

шаг разложения) теория сильно упрощается. Из всех диаграмм остаются лишь планарные графики с минимальным числом фермионных петель.

Хотя окончательного решения такой теории пока не удалось найти даже в пределе $N \rightarrow \infty$, тем не менее на этом пути можно получить ряд глубоких физических результатов. Главным образом многоцветная хромодинамика развивалась в дальнейшем Венециано [8, 10] и Виттенем [9, 11]. Постулируя невылетание цвета в пределе $N \rightarrow \infty$ и привлекая некоторые дополнительные предположения, они получили интересные следствия, относящиеся к низкоэнергетической физике адронов. В частности, совместное рассмотрение кирального предела КХД и предела больших N позволило получить явное решение так называемой $U(1)$ -проблемы в КХД [10—13]. Причем результаты этой деятельности удалось сформулировать в терминах уже упомянутых выше феноменологических киральных лагранжианов [14—17]. Тем самым был как бы перекинут мост между киральными лагранжианами и КХД при низких энергиях, т. е. модифицированные киральные лагранжианы стало возможным рассматривать как эффективные лагранжианы для КХД при низких энергиях.

Окончательные результаты при построении модифицированного кирального лагранжиана сводятся к следующему. Для корректного описания массы η' мезона необходимо учесть в киральном лагранжиане $U(1)$ аксиальную аномалию в соответствии с низшими порядками $1/N$ разложения в КХД. Чтобы описать более сложные явления, такие, например, как распад $\eta' \rightarrow \eta 2\pi$, необходимо учитывать глюонные аномалии в киральном лагранжиане в более сложных формах, что соответствует на языке КХД учету более высоких порядков разложения по $1/N$. Введение в киральный лагранжиан членов, нарушающих СР-четность за счет сильных взаимодействий (учет нетривиальной топологической структуры θ -вакуума*), позволяет вычислять значение дипольного электрического момента нейтрона.

Изучение киральных лагранжианов с глюонными аномалиями начнем с описания $U(1)$ -проблемы и возможных способов ее решения.

1. КХД, АКСИАЛЬНЫЕ ТОКИ И $U(1)$ -ПРОБЛЕМА

КХД лагранжиан. В КХД сильные и электромагнитные взаимодействия описываются лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{КХД}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{\mu\nu a}(x) + \bar{q}(x) \gamma^\mu (i\partial_\mu + gA_\mu^a \lambda^a) q(x) -$$

* При исследовании теории неабелевых калибровочных полей (например, поля Янга — Миллса) оказалось, что вакуум обладает нетривиальной топологической структурой [18]. Вместо единого вакуума приходится иметь дело с множеством различных вакуумов, отличающихся друг от друга значениями своих топологических зарядов. Плотность топологического заряда дана в (14) [см. также (1) следующего раздела].

$$-\theta \left[\frac{g^2}{32\pi^2} F^{\mu\nu a}(x) \tilde{F}_{\mu\nu}^a(x) \right]. \quad (1)$$

Здесь $A_\mu^a(x)$ ($a = 1, 2, \dots, 8$) — цветные глюонные $SU(3)$ -поля; $F_{\mu\nu}^a(x)$ — тензор напряженности этих полей ($\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta a}/2$); $q(x)$ — поля кварков. Последний член в (1) обязан своим происхождением нетривиальной топологической структуре θ -вакуума и приводит к нарушению СР-четности за счет сильных взаимодействий. Поскольку на данном этапе «голая» масса кварков предполагается равной нулю, лагранжиан (1) обладает $U(N_3) \times U(N_3)$ глобальной киральной симметрией, где N_3 — число кварковых «запахов». Таким образом, симметрия КХД лагранжиана для безмассовых кварков совпадает с симметрией феноменологического кирального лагранжиана, описывающего безмассовые голдстоуновские мезоны. Учет ненулевых значений кварковых или мезонных масс приводит к нарушению киральной симметрии как в КХД-лагранжиане, так и в феноменологическом киральном лагранжиане.

Источники кварковых масс. Кварки могут приобрести конечные массы по двум различным причинам: 1) вследствие спонтанного нарушения симметрии в электрослабом секторе взаимодействий за счет полей Хиггса; 2) за счет нарушения киральной симметрии в сильном секторе КХД. В феноменологических киральных лагранжианах массы мезонов обычно вводятся с помощью явного нарушения киральной симметрии, например по схеме Гелл-Мана — Оакса — Реннера [19].

Аксиальные токи и мезоны. Будем рассматривать в дальнейшем только три легких кварка: u , d и s , что соответствует лагранжиану с киральной симметрией $U(3) \times U(3)$. В такой теории возникают девять голдстоуновских бозонов, которые можно связать с девятью слабыми аксиальными токами A_a^μ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \langle 0 | A_a^\mu | q, b \rangle &= i F_{ab} q^\mu; \quad A_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} q; \\ \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= 2\delta_{ab}; \quad \gamma^5 = - \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (a = 1, 2, \dots, 9) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь $|q, b\rangle$ — O^- -мезонное состояние; λ_a — матрицы Гелл-Мана; F_{ab} — константы распада мезонов*. Если массы кварков отличны от нуля, то появляются девять легких мезонов с массами, не превышающими примерно 500 МэВ. При этом массы основного мезонного октета описываются достаточно удовлетворительно. Но масса тяжелого η' -мезона сильно отличается от теоретического значения. В этом и заключается суть $U(1)$ -проблемы.

* Будем считать, что диагональные элементы матрицы F_{ab} для октета всегда $F_{\pi\pi} \approx 95$ МэВ. F_{99} может быть отлична от $F_{\pi\pi}$. Пнедиагональные элементы также могут иметь ненулевые значения (см. (25) и, например, [17]).

2. $1/N$ -РАЗЛОЖЕНИЕ В КХД И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ КИРАЛЬНЫЙ ЛАГРАНЖИАН

Использование $1/N$ -разложения в многоцветной хромодинамике позволило Виттену дать качественную картину решения $U(1)$ -проблемы при введении аксиальной $U(1)$ -аномалии [11]. На основе феноменологических лагранжианов такой картине можно придать более количественный характер. В [9] Виттенем было отмечено, что если при $N \rightarrow \infty$ фундаментальный КХД-лагранжиан обеспечивает невылетание цветных полей, то это естественно ведет к предположению о существовании эффективного лагранжиана, описывающего только физически наблюдаемые мезонные поля. Оказывается, что эффективный лагранжиан — хорошо известный киральный лагранжиан, который подчиняется $1/F$ -разложению [2—4]. Следуя работе [17], покажем, что $1/N$ -разложение в КХД полностью аналогично $1/F$ -разложению в феноменологическом киральном лагранжиане, соответствующем алгебре токов.

Начнем с рассмотрения некоторых результатов $1/N$ -разложения в КХД. В [9] показано, что матричные элементы между вакуумом и одномезонными синглетными по цвету состояниями от любого билинейного кваркового оператора пропорциональны \sqrt{N} , где N — индекс цветной группы $SU(N)$. В частности, для нонета аксиальных токов (2) имеем

$$\langle 0 | A_a^\mu | q, a \rangle \sim \sqrt{N}. \quad (3)$$

Рассматривая с этой точки зрения функции с большим числом мезонов, можно показать, что трехточечная мезонная вершина ведет себя при больших N как $N^{-1/2}$, четырехточечная мезонная вершина — как N^{-1} и n -точечная — как $N^{1-n/2}$. Теперь напомним, что в области низких энергий n -точечную амплитуду рассеяния можно получить из эффективного лагранжиана, имеющего форму

$$\mathcal{L} = \sum_n g_n \mathcal{L}^{(n)},$$

где $\mathcal{L}^{(n)}$ — полином n -го порядка по мезонным полям.

Проведенный выше анализ позволяет определить поведение коэффициентов g_n при больших значениях N . Однако найти явный вид коэффициентов g_n в КХД довольно трудно. В киральной теории можно вычислить явный вид для таких коэффициентов. Это следствие того, что $1/F$ -разложение в киральной теории не смешивает различные порядки $1/N$ -разложения в КХД. Поэтому не только полный фундаментальный КХД-лагранжиан подчиняется правилам токовой алгебры, но и каждый порядок $1/N$ -разложения.

Напомним, что феноменологический киральный лагранжиан, описывающий физические мезоны, представляется в виде разложения, подобного приведенному выше. Только коэффициенты g_n определяются в терминах интерполяционных констант F_{ab} [константы рас-

пада мезонов, см. (2)]. Эти константы отражают также ту силу, с которой мезонные состояния связаны с токами. Если теперь формулу (2) сравнить с (3), полученной в КХД для поведения матричного элемента $\langle 0 | A_a^\mu | q, a \rangle$ при больших значениях N , то легко увидеть, что интерполяционные константы ведут себя как $F_{ab} \sim \sqrt{N}$. Поскольку при $1/F$ -разложении кирального лагранжиана коэффициенты g_n следующим образом зависят от F :

$$g_n \sim F^{2-n},$$

для больших значений N получаем

$$g_n \sim N^{1-n/2}.$$

Тем самым из киральной теории также следует, что трехточечная мезонная вершина ведет себя как $N^{-1/2}$, четырехточечная — как N^{-1} и т. п., как того и требует $1/N$ -разложение в КХД. Таким образом, $1/F$ -разложение феноменологического кирального лагранжиана, соответствующего токовой алгебре, можно рассматривать как аналог $1/N$ -разложения КХД в области низких энергий, когда рассматривается только низколежащая часть мезонного спектра.

3. РАСПАД $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, АНОМАЛЬНАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ АКСИАЛЬНОГО ТОКА И $U(1)$ -АНОМАЛИЯ*

Поскольку в решении $U(1)$ -проблемы и построении модифицированного кирального лагранжиана учет аномальных членов играет решающую роль, остановимся здесь несколько более подробно на этих вопросах.

Начнем с напомнимания о хорошо известных расхождениях с экспериментом, возникших при описании распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ в рамках алгебры токов и в σ -модели. Весьма подробно эта ситуация описана, например, в лекциях Джекива [20] и сводится к следующему. Предел амплитуды $T_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}(k^2)$ при $k^2 = 0$ равен нулю (теорема Сазерленда — Вельтмана; k — импульс пиона). В то же время прямое вычисление в σ -модели приводит к результату $T_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}(0) = e^2/2\pi^2 F$, отличному от нуля (здесь F — константа распада пиона). Причина расхождения заключается в том, что при вычислении распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ имеем дело с диаграммами аномального типа [21]. Отличительная черта этих диаграмм — их линейная расходимость, приводящая при вычислениях к появлению неопределенностей вида

$$\Delta^{\alpha\mu\nu}(p, q|a) = -(e^2/8\pi^2) a \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} (q - p)_\beta,$$

где p и q — импульсы фотонов; a — неопределенная константа. Это так называемые *поверхностные члены*.

Чтобы определить константу a , следует наложить дополнительные условия на амплитуду. Такими условиями могут быть условия кираль-

* В изложении этого раздела будем следовать лекциям Джекива [20].

ной инвариантности теории или условия калибровочной инвариантности. Но оказывается, что эти условия не могут быть удовлетворены одновременно. Действительно, из условия киральной инвариантности следует, что $a = 0$ (тогда будет выполняться теорема Сазерленда — Вельтмана), а из условия калибровочной инвариантности теории — $a = -2$. Первое условие ($a = 0$) обеспечивает выполнение аксиального тождества Уорда, второе условие ($a = -2$) — векторного тождества Уорда. Какому же из них следует отдать предпочтение? Поскольку калибровочная инвариантность точная, а киральная инвариантность — приближенная, необходимо выбрать первую и положить $a = -2$.

Покажем теперь, как меняется дивергенция аксиального тока при наложении условия калибровочной инвариантности. Рассмотрим фермионную часть аксиального тока

$$J_5^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x). \quad (4)$$

Поскольку одновременный антикоммутатор ψ и $\bar{\psi}$ содержит δ -функцию, отсюда следует, что предел $\lim_{x \rightarrow y} \bar{\psi}(x) \psi(y)$ сингулярен. Для более корректного определения тока следует ввести в (4) малую раздвижку аргументов

$$J_5^\mu(x|\varepsilon) = \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) \psi^\mu \gamma^5 \psi(x - \varepsilon/2). \quad (5)$$

Но это выражение не является калибровочно-инвариантным при наличии электромагнитного поля. Для построения калибровочно-инвариантного выражения следует в (5) ввести дополнительный множитель

$$J_5^\mu(x|\varepsilon|b) = \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x - \varepsilon/2) \exp \left[i e b \int_{x - \varepsilon/2}^{x + \varepsilon/2} dy_\alpha A^\alpha(y) \right]. \quad (6)$$

При $b = 1$ получаем калибровочно-инвариантный ток, а локальный физический ток — после усреднения по всем направлениям ε и взятия предела $\varepsilon^2 = \varepsilon_\mu \varepsilon^\mu \rightarrow 0$.

Используя уравнения движения для ψ , найдем дивергенцию тока (6):

$$\left. \begin{aligned} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi &= m \psi - e \gamma_\mu A^\mu \psi, \\ \partial_\mu J_5^\mu(x|\varepsilon|b) &= J_5(x|\varepsilon|b) - i e J_5^\mu(x|\varepsilon|b) \times \\ &\times \varepsilon^\alpha [\partial_\alpha A_\mu(x) - b \partial_\mu A_\alpha(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь $J_5(x|\varepsilon|b) = i 2m \bar{\psi} \gamma^5 \psi$. Если положить формально $\varepsilon = 0$ и отбросить последний член в (7), то $\partial_\mu J_5^\mu = J_5$. В киральном пре-

деле $m = 0$ мы получили бы сохраняющийся аксиальный ток. Однако это возможно лишь при условии, что $J_5^\mu(x|\varepsilon|b)$ имеет гладкое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$, чего нет на самом деле. $J_5^\mu(x|\varepsilon|b)$ обладает линейной расходимостью и поэтому последний член в (7) отличен от нуля.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вакуумное среднее от $\partial_\mu J_5^\mu(x|\varepsilon|b)$:

$$\begin{aligned} \langle 0|\partial_\mu J_5^\mu(x|\varepsilon|b)|0\rangle &= \langle 0|J_5(x|\varepsilon|b)|0\rangle - \\ &- i\varepsilon^\alpha \langle 0|J_5^\mu(x|\varepsilon|b)|0\rangle [\partial_\alpha A_\mu(x) - b\partial_\mu A_\alpha(x)] + 0(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Для последнего члена имеем [20]:

$$\begin{aligned} &- i\varepsilon^\alpha \langle 0|J_5^\mu(x|\varepsilon|b)|0\rangle|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \\ &= -i \operatorname{Tr} \gamma^5 \gamma^\mu \varepsilon^\alpha G(x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2) \exp \left[ieb \int_{x - \varepsilon/2}^{x + \varepsilon/2} dy_\alpha A^\alpha(x) \right] \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \\ &= -[e/(4\pi)^2] \tilde{F}^{\mu\alpha}(x), \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\tilde{F}^{\mu\alpha} = \varepsilon^{\mu\alpha\nu\sigma} F_{\nu\sigma}$; $F_{\nu\sigma}$ — тензор напряженности электромагнитного поля; $G(x, y)$ — функция Грина фермиона во внешнем поле A_μ . При переходе к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ существен лишь линейный по A_μ член в G . Подставляя (9) в (8), приходим к окончательному выражению:

$$\begin{aligned} \langle 0|\partial_\mu J_5^\mu(x|b)|0\rangle &= \langle 0|J_5(x|b)|0\rangle + \\ &+ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{(1+b)}{2} F_{\mu\nu}(x) \tilde{F}^{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

или

$$\partial_\mu J_5^\mu = J_5 + \frac{e^2}{16\pi^2} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (b = 1).$$

Отсюда видно, что если берется калибровочно-инвариантное определение тока ($b = 1$), то дивергенция аксиального тока содержит аномальный член. Выражение, приводящее в киральном пределе $m = 0$ к сохраняющемуся аксиальному току, соответствует выбору $b = -1$, т. е. нарушению калибровочной инвариантности.

Интересно отметить еще следующее обстоятельство. При невозможности определения сохраняющегося калибровочно-инвариантного аксиального тока можно найти сохраняющийся калибровочно-инвариантный аксиальный заряд в безмассовой спинорной электродинамике. Действительно,

$$\tilde{J}_5^\mu = J_5^\mu - (e^2/8\pi^2) \tilde{F}^{\mu\nu} A_{,\nu}. \quad (11)$$

Здесь J_5^μ калибровочно-инвариантен, но сохранение его нарушено аномалией. Напротив, ток \tilde{J}_5^μ сохраняется, но неинвариантен. Построим теперь заряд Q_5 из \tilde{J}_5^μ :

$$Q_5 = \int d^3x \tilde{J}_5^0(x). \quad (12)$$

Можно убедиться, что при калибровочном преобразовании ($\delta A_\nu = \partial_\nu \Lambda$) заряд Q_5 остается инвариантным.

Теперь вернемся к рассмотрению слабых аксиальных токов A_a^μ [см. (2)]. Оказывается, что в дивергенции девятого аксиального тока также необходимо учитывать наличие глюонной аномалии [14, 17, 22]*:

$$\partial_\mu A_a^\mu = i\bar{q}\gamma^5 \{ \lambda_a/2, M \} q + \delta_{a9} 2\sqrt{N_l} \partial_\mu K^\mu. \quad (13)$$

Здесь N_l — число легких кварков; M — массовая матрица легких кварков $\text{diag } M = (m_u, m_d, m_s)$ и аномалия входит в дивергенцию в виде плотности топологического заряда

$$Q(x) \equiv \partial_\mu K^\mu = (g^2/32\pi^2) F^{\mu\nu\alpha} \tilde{F}_{\mu\nu}^\alpha, \quad (14)$$

где K^μ имеет вид:

$$K^\mu(x) \equiv (g^2/32\pi^2) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\alpha^a (F_{\beta\nu}^a - (g/3) C^{abc} A_\beta^b A_\nu^c) \quad (15)$$

[C^{abc} — $SU(3)$ -структурные константы]. Аномальные члены в (15) генерируются треугольной и четырехугольной диаграммами соответственно [22]. Ток A_9^μ можно записать в форме

$$A_9^\mu = A_{9\text{кир}}^\mu + 2\sqrt{N_l} K^\mu. \quad (16)$$

Здесь A_9^μ — калибровочно-инвариантный ток, но не сохраняющийся в киральном пределе $M \rightarrow 0$. Он не может генерировать $U(1)$ -симметричные преобразования. Ток $A_{9\text{кир}}^\mu$, напротив, сохраняется в киральном пределе, хотя и калибровочно-неинвариантен. Он порождает $U(1)$ -симметричные преобразования операторов

$$U(1) = \exp \{ i \alpha Q_9^{\text{кир}} \}; \quad Q_9^{\text{кир}} \equiv \int d^3x A_{9\text{кир}}^0(x). \quad (17)$$

* Заметим, что, как и в предыдущих работах (например, [5, 6]), используем здесь матрицы Гелл-Мана, удовлетворяющие условию $\text{Tr}(\lambda_a, \lambda_b) = 2\delta_{ab}$ [см. (2)]. Это отличается от обозначений, использованных в работах [14, 15, 23], где $\text{Tr}(\lambda_a, \lambda_b) = \delta_{ab}$. Коэффициент в аномальном члене записан в форме, предложенной в [14]. В работах [17, 22] используются несколько иные виды этих коэффициентов.

4. КИРАЛЬНЫЙ ЛАГРАНЖИАН С УЧЕТОМ ГЛЮОННЫХ АНОМАЛИЙ

Построим сначала простейший киральный лагранжиан, приводящий к аксиальному току, дивергенция которого удовлетворяет условию (13). При выводе такого лагранжиана будем следовать работам [14, 23].

Напомним, что обычный киральный лагранжиан (σ -модель), описывающий взаимодействие скалярных и псевдоскалярных мезонов, имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^+) - \mathcal{V} (U, U^+) + \frac{F}{2\sqrt{2}} \text{Tr} [M (U + U^+)], \quad (18)$$

где U — это 3×3 -матрица, описывающая поля мезонов; F — константа пионного распада ($F \approx 95$ МэВ). Первые два члена в \mathcal{L} инвариантны при киральных $U(3) \times U(3)$ -преобразованиях:

$$U \rightarrow AUB^+,$$

где A и B — унитарные матрицы.

Потенциал $\mathcal{V} (U, U^+)$ обычно имеет форму, приводящую к спонтанному нарушению киральной симметрии. В общем случае его можно считать производной функцией $U(3) \times U(3)$ инвариантов $I_n = \text{Tr} (UU^+)^n$ и $J = (\det U + \det U^+)$.

Третий член в \mathcal{L} явно нарушает киральную симметрию лагранжиана и приводит к возникновению масс у мезонов псевдоскалярного нонета. Матрицу M можно выбрать в форме $M_{ij} = \mu_i^j \delta_{ij}$, где μ_i^j пропорциональны кварковым массам m_u, m_d и m_s (см. также (13) и [15, 23]).

Однако аксиальный ток, полученный из лагранжиана (18), не удовлетворяет уравнению (13) с аномальными членами. Как изменить лагранжиан, чтобы удовлетворялись аномальные тождества Уорда, а следовательно, и условия на дивергенцию аксиального тока в форме (13)?

Оказывается, добиться этого можно введением глюонных полей в виде плотности топологического заряда (14) прямо в лагранжиан σ -модели:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^+) - \mathcal{V} (U, U^+) + \\ & + \frac{N_l}{af^2} (\partial_\mu K^\mu)^2 + \frac{i}{2} \partial_\mu K^\mu \text{Tr} [\ln U - \ln U^+] + \frac{F}{2\sqrt{2}} \text{Tr} [M (U + U^+)], \end{aligned} \quad (19)$$

где a — неопределенный параметр.

Для дальнейших целей удобно будет использовать нелинейный вариант σ -модели. Чтобы перейти к этому варианту, необходимо устремить массы скалярных частиц к бесконечности при конечном значении F . Конкретная форма потенциала $\mathcal{V} (U, U^+)$ при этом

несущественна. Действительно, выбирая его в виде

$$\mathcal{U}(U, U^+) = (\lambda/4) f(\text{Tr}(UU^+ - F^2/2)), \quad (20)$$

где для U можно использовать экспоненциальное представление

$$U = (F/2) \exp(i\Phi/F), \quad (21)$$

легко заметить, что с точностью до константных членов потенциал в лагранжиане (19) можно отбросить. В (21) Φ — это матрица, содержащая поля псевдоскалярного нонета:

$$\Phi = \sum_1^8 \lambda_i \varphi_i + \sqrt{2/3} 1 \varphi_9. \quad (22)$$

Если построить теперь $U(1)$ -ток на основе лагранжиана (19) (подобно тому, как это сделано, например, в [14]) и взять дивергенцию от этого тока, то можно убедиться, что дивергенция будет удовлетворять уравнению (13), т. е. содержать как массовые, так и апомальные члены с глюонными полями.

Чтобы убедиться в этом, перепишем первый член правой стороны уравнения (13) в форме, близкой к виду массового члена лагранжиана \mathcal{L} [см. (19)]. Для этого заметим, что массовую матрицу M можно представить как разложение по операторам λ_i :

$$M = \begin{pmatrix} \mu_u^2 & & \\ & \mu_d^2 & \\ & & \mu_s^2 \end{pmatrix} = \frac{\mu_u^2 - \mu_d^2}{2} \lambda_3 + \frac{\mu_u^2 + \mu_d^2 - 2\mu_s^2}{2\sqrt{3}} \lambda_8 + \frac{\mu_u^2 + \mu_d^2 + \mu_s^2}{\sqrt{6}} \lambda_9. \quad (23)$$

Тогда, имея в виду, что псевдоскалярные мезоны обладают теми же трансформационными свойствами, что и билинейный кварковый член в (13) (см., например, [24]):

$$F\varphi_a \sim i\bar{q}\gamma^5 (\lambda_a/\sqrt{2}) q, \quad (24)$$

можем записать

$$i\bar{q}\gamma^5 \{ \lambda_9/2, M \} q \sim \frac{F}{\sqrt{3}} \left[(\mu_u^2 - \mu_d^2) \pi_3 + \frac{\mu_u^2 + \mu_d^2 - 2\mu_s^2}{\sqrt{3}} \eta_8 + \sqrt{\frac{2}{3}} (\mu_u^2 + \mu_d^2 + \mu_s^2) \eta_0 \right] \approx i \frac{F}{\sqrt{6}} \text{Tr} [M (U^+ - U)] \quad (25)$$

с точностью до первых членов разложения по мезонным полям*. Построим теперь $U(1)$ -ток на основании лагранжиана (19). Из теоремы Нетер следует [5, 6, 14], что

$$A_9^\mu = \frac{i}{\sqrt{3}} \text{Tr} (U^+ \overleftrightarrow{\partial}_\mu U) \quad (26)$$

* Из (25) видно, что при $\mu_u \neq \mu_d \neq \mu_s$ не только диагональная константа F_{99} , но и F_{39} , F_{89} отличны от нуля [см. (2)].

или

$$\partial_\mu A_9^\mu = \frac{i}{\sqrt{3}} \text{Tr} (U^+ \partial^2 U - U \partial^2 U^+). \quad (27)$$

Варьируя лагранжиан (19) по U^+ , получаем

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U^+} = -\frac{1}{2} \partial^2 U - \frac{i}{2} Q (U^+)^{-1} + \frac{F}{2\sqrt{2}} M - \frac{\delta \gamma^2}{\delta U^+} = 0. \quad (28)$$

Аналогичное уравнение можно получить при вариации \mathcal{L} по U . Умножая первое из них на U^+ , а второе на U и беря след от комбинации вида (27), приходим к равенству

$$\partial_\mu A_9^\mu = i \frac{F}{\sqrt{6}} \text{Tr} [M (U^+ - U)] + 2\sqrt{3} Q. \quad (29)$$

Сравнивая (29) с (13), где первый член представлен в форме (25), легко убедиться в справедливости условия ЧСАТ для A_9^μ с участием аномальных членов. Итак, лагранжиан (19) привел к появлению аномальных членов в дивергенции девятого аксиального тока.

Покажем теперь, как можно исключить из (19) члены с глюонами и вернуться опять к лагранжиану, описывающему только поля физических псевдоскалярных мезонов. Для этого проварьируем лагранжиан (19) по Q . В результате

$$\frac{2N}{aF^2} Q + \frac{i}{2} \text{Tr} (\ln U - \ln U^+) = 0. \quad (30)$$

Отсюда, заменяя Q через U и подставляя в (19), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^+) + \frac{F}{2\sqrt{2}} \text{Tr} [M (U + U^+)] + \\ & + \frac{aF^2}{16N} [\text{Tr} (\ln U - \ln U^+)^2]. \end{aligned} \quad (31)$$

5. МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПСЕВДОСКАЛЯРНОГО НОНЕТА

Из полученного лагранжиана следует, что в кирально-симметричном пределе ($\mu_i^2 = 0$) синглетный мезон не взаимодействует с остальными мезонами октета и становится стабильной частицей. Действительно, в этом пределе лагранжиан (31) можно переписать в форме

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\partial_\mu V \partial^\mu V^+) + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta_0 \partial^\mu \eta_0 - \frac{3}{2N_l} a \eta_0^2, \quad (32)$$

где

$$V = \frac{F}{\sqrt{2}} \exp \left(\frac{i}{F} \sum_1^8 \lambda_i \varphi_i \right).$$

Это обстоятельство позволяет в некоторых случаях рассматривать независимо взаимодействия синглетных и октетных мезонов с другими частицами и друг с другом (см. [4—6]). Такое поведение \mathcal{L} при $\mu_i^2 \rightarrow 0$ тесно связано с выбранным нами способом нарушения аксиальной $U(1)$ -симметрии через введение глюонных аномалий.

Перейдем теперь к изучению массовых членов лагранжиана (31). Квадратичная по мезонным полям часть лагранжиана (31) имеет вид (без кинетических членов):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu_u^2 + \mu_d^2}{2} (\pi^{0z} + 2\pi^+\pi^-) + \right. \\ & + (\mu_u^2 + \mu_s^2) K^+ K^- + (\mu_d^2 + \mu_s^2) \bar{K}^0 K^0 + \frac{1}{6} (\mu_u^2 + \mu_d^2 + 4\mu_s^2) \eta_3^2 + \\ & \left. + \left[\frac{1}{3} (\mu_u^2 + \mu_d^2 + \mu_s^2) + a \right] \eta_0^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} (\mu_u^2 - \mu_d^2) \pi^0 (\eta_8 + \sqrt{2}\eta_0) + \frac{\sqrt{2}}{3} [\mu_u^2 + \mu_d^2 - 2\mu_s^2] \eta_0 \eta_8 \right\}. \quad (33) \end{aligned}$$

Параметры μ_u^2 , μ_d^2 и μ_s^2 можно зафиксировать по массам мезонов m_{π^0} , m_{K^0} , m_{K^+} . При этом значение массы m_{K^+} будем брать с учетом того, что реальная масса должна еще включить электромагнитные поправки, которые составляют 2,9 МэВ [25]. Без них масса $\tilde{m}_{K^+} = 490,8$ МэВ, $m_{K^0} = 497,7$ МэВ, $m_{\pi^0} = 135$ МэВ*. Отсюда для параметров μ_i^2 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mu_u^2 = 0,0114 \text{ ГэВ}^2; \quad \mu_d^2 = 0,025 \text{ ГэВ}^2; \quad \mu_s^2 = 0,47 \text{ ГэВ}^2; \\ \mu_u^2/\mu_d^2 = 0,456; \quad \mu_d^2/\mu_s^2 = 0,053 \approx \text{tg}^2 \theta_c (\theta_c \approx 0,23). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Отношение μ_d/μ_s близко к значению тангенса угла Кабиббо, подобно тому как это имело место в схеме нарушения киральной группы, использованной в [19]. Отношение μ_u/μ_d близко к тому значению, которое требуется для правильного описания распада $\eta \rightarrow 3\pi$ (см. разд. 6). Если фиксировать параметры μ_i^2 без учета электромагнитных поправок, то $\mu_u^2/\mu_d^2 = 0,66$, что приводит к завышенным оценкам для вероятности распада $\eta \rightarrow 3\pi$.

В лагранжиане (33) остался еще один неопределенный параметр a . Зафиксировать его можно по значению суммы масс m_{η}^2 и $m_{\eta'}^2$. Для этого необходимо сначала привести лагранжиан \mathcal{L}_m к диагональному виду по полям η_0 и η_8 . Введем угол смешивания

$$\eta_8 = \cos \varphi \eta + \sin \varphi \eta'; \quad \eta_0 = -\sin \varphi \eta + \cos \varphi \eta'. \quad (35)$$

Тогда

$$-\frac{1}{2} \{b\eta_0^2 - c\eta_0\eta_8 + d\eta_8^2\} = -\frac{m_{\eta}^2}{2} \eta^2 - \frac{m_{\eta'}^2}{2} \eta'^2, \quad (36)$$

* На данном этапе массы m_{π^0} и $m_{\pi^{\pm}}$ считаем равными. Разность масс $m_{\pi^{\pm}} - m_{\pi^0}$ имеет полностью электромагнитное происхождение (см. [25]).

где

$$\left. \begin{aligned} m_{\eta}^2 &= [b + d - \sqrt{(b-d)^2 + c^2}]/2; \\ m_{\eta'}^2 &= [b + d + \sqrt{(b-d)^2 + c^2}]/2; \\ \operatorname{tg} 2\varphi &= -c/(b-d); \quad \operatorname{tg} \varphi = [b-d - \sqrt{(b-d)^2 + c^2}]/c. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Сравнивая (36) и (33), находим для b , c и d следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} b &= (\tilde{m}_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 + m_{\pi^0}^2)/3 + a; \\ d &= (2\tilde{m}_{K^+}^2 + 2m_{K^0}^2 - m_{\pi^0}^2)/3; \\ c &= (2\sqrt{2}/3)(\tilde{m}_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 - 2m_{\pi^0}^2). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Теперь можно зафиксировать параметр a :

$$m_{\eta}^2 + m_{\eta'}^2 = b + d = \tilde{m}_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 + a, \quad (39)$$

откуда получаем

$$\left. \begin{aligned} a &= 0,729 \text{ ГэВ}^2; \quad \varphi = -18,1^\circ; \\ m_{\eta}^2 &= 0,25 \text{ ГэВ}^2; \quad m_{\eta'}^2 = 0,968 \text{ ГэВ}^2, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

в то время как экспериментальные значения:

$$m_{\eta}^2 = 0,301 \text{ ГэВ}^2; \quad m_{\eta'}^2 = 0,917 \text{ ГэВ}^2. \quad (41)$$

Таким образом, приходим к решению U (1)-проблемы. Масса синглетного η -мезона существенно тяжелее октетного η -мезона, причем в киральном пределе ($\mu_i^2 \rightarrow 0$) октетные мезоны становятся безмассовыми голдстоуновскими частицами, а синглетный мезон сохраняет отличную от нуля массу $m_{\eta}^2 = a$.

Во введении уже отмечали, что U (1)-проблема нашла свое объяснение в рамках КХД [10—13] при использовании $1/N$ -разложения [7—9]. В частности, было показано, что U (1)-аксиальная аномалия ведет себя как поправка типа $1/N$ по отношению к основным членам. В киральном пределе в тех случаях, когда основные члены исчезают, эти поправки могут оказаться весьма заметными. Имея в виду это обстоятельство, массу η' -мезона можно представить в виде

$$m_{\eta'}^2 = \mu^2 + \operatorname{const}/N,$$

где $\mu^2 \rightarrow 0$, если $\mu_i^2 \rightarrow 0$ (вклады в массу от «киральных» членов); const/N — вклады в массу от аномалии.

Обсудим теперь количественные результаты, полученные для масс m_{η} , $m_{\eta'}$ и угла φ . В настоящее время для угла смешивания φ как теоретически, так и экспериментально существует два возможных значения. Старое значение $\varphi \approx -10^\circ$ (см., например, [26]). Этому

значению φ соответствует член смешивания η_0 - и η_8 -мезонов в 2 раза меньший, чем в лагранжиане (33) [$c_{(\varphi=-10^\circ)} = (\sqrt{2}/3)(\tilde{m}_{K^0}^2 + m_{K^0}^2 - 2m_{\pi^0}^2)$]. При таком угле смешивания массы m_{η}^2 и $m_{\eta'}^2$ идеально совпали бы с экспериментальными значениями (41). Однако при прямых вычислениях, соответствующих лагранжиану (33), получается $\varphi = -18^\circ$ и расчетные массы η - и η' -мезонов [см. (40)] несколько отличаются от экспериментальных. В то же время недавно проведенный эксперимент [27], а также теоретические расчеты [28] указывают, что значение $\varphi = -18^\circ$ также вполне возможно. Отсюда возникает дилемма: относиться ли с полным доверием к полученному значению угла смешивания и не стремиться слишком точно описывать массы η -мезонов или пытаться учесть в лагранжиане (31) некоторые дополнительные члены, например, более высокого порядка по $1/N$ -разложению, как это сделано в работе [23], с тем чтобы уменьшить член смешивания c и прийти к значению $\varphi = -10^\circ$. При этом неизбежно возникает необходимость введения новых неопределенных параметров, что несомненно уменьшает предсказательную силу модели. Имея в виду последнее обстоятельство, при описании дальнейших применений ограничимся простейшим видом лагранжиана \mathcal{L} [см. (31)], а в конце статьи кратко обсудим его возможные обобщения с учетом высших порядков по $1/N$ -разложению.

Интересно отметить, что к значению $\varphi = -10^\circ$ можно прийти и без введения дополнительных членов в лагранжиан (31). Для этого достаточно ввести в операторе U [см. (21)] разные значения в экспоненте для константы F_9 , на которую делится поле φ_9 , и для остальных октетных констант $F_i = F_\pi$ ($i = 1, 2, \dots, 8$). Это действие не нарушает киральных групп $SU(3) \times SU(3)$ и $U(1)$, которым удовлетворяет лагранжиан (31) в киральном пределе [см. (32)]. Посмотрим, что произойдет, если положить

$$F_9 = 2F_\pi; \quad F_i = F_\pi \quad (i = 1, 2, \dots, 8). \quad (42)$$

Тогда параметры a , φ , m_η^2 и $m_{\eta'}^2$ приобретают следующие значения:

$$a = 3,42 \text{ ГэВ}^2 \quad (a/4 = 0,856 \text{ ГэВ}^2); \quad \varphi = -10,1^\circ;$$

$$m_\eta^2 = 0,301 \text{ ГэВ}^2; \quad m_{\eta'}^2 = 0,917 \text{ ГэВ}^2.$$

Легко видеть, что совпадение с экспериментальными значениями достигается здесь с очень хорошей точностью.

В дальнейших приложениях будем использовать лагранжиан (31) со значениями $F_i = F_\pi$ ($i = 1, 2, \dots, 9$), а в конце вычислений приводить также значения для случая (42). Сразу заметим, что наибольшие затруднения в последнем случае встретятся при описании распадов $(\eta, \eta') \rightarrow \gamma\gamma$ и $(\eta, \eta') \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$, если в этих распадах использовать петлевые диаграммы аномального типа подобно тому, как это делалось в [29, 30]. В первом случае достигается лучшее согласие с экспериментом (см. [30]). Однако следует помнить, что при исполь-

зовании в этих расчетах однопетлевого приближения нельзя гарантировать большую точность. После этих общих замечаний перейдем к описанию характерных распадов η -мезонов.

6. РАСПАДЫ $\eta \rightarrow 3\pi$ и $\eta' \rightarrow 3\pi$

При изучении распада $\eta \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$ обнаружен интересный эффект. В пределе мягких заряженных пионов амплитуда процесса $\eta \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$ также мала. Однако в области мягких π^0 -мезонов экспериментальная амплитуда этого процесса не становится малой, вопреки теореме Сазерленда (подобно тому, что мы наблюдали в процессе $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ при $m_\pi \rightarrow 0$). Когут и Саскинд [31] объяснили это поведение присутствием безмассового «духового» полюса у кирально-симметричного тока $A_{9\text{ кир}}^\mu$ [см. (16)]:

$$\langle a | A_{9\text{ кир}}^\mu | b \rangle = \frac{q^\mu}{q^2} \langle a | G | b \rangle + \text{гладкая часть}, \quad (43)$$

где $\langle a | G | b \rangle$ не равно нулю при $q^\mu \rightarrow 0$. Поскольку амплитуда распада $\eta \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$ выражается через матричный элемент (43) [17, 32]:

$$T_{\eta \rightarrow 3\pi} \sim [q_\mu \langle \pi^+ \pi^- | A_{9\text{ кир}}^\mu | \eta \rangle]_{q^\mu \rightarrow 0}, \quad (44)$$

легко видеть, что

$$T_{\eta \rightarrow 3\pi} \sim [\langle \pi^+ \pi^- | G | \eta \rangle]_{q^\mu=0} \neq 0, \quad (45)$$

т. е. в этом случае достигается согласие с экспериментом. Присутствие нефизического духового полюса у тока $A_{9\text{ кир}}^\mu$ возможно, поскольку этот ток не является калибровочно-инвариантным. Поэтому если постулировать, что $2\sqrt{N_i} K^\mu$ имеет такой же полюс, но с противоположным знаком

$$2\sqrt{N_i} \langle a | K^\mu | b \rangle \sim (-q^\mu/q^2) \langle a | G | b \rangle, \quad (46)$$

то калибровочно-инвариантный ток A_9^μ (16) не будет содержать «духовых» полюсов.

Лагранжиан (19) соответствует низшему порядку по $1/N$ -разложению в КХД. Если член, включающий глюонные и мезонные поля, записать в более общей форме $\sim \partial_\mu K^\mu G(\varphi)$, то после вариации по K^μ получим

$$-\partial_\nu^2 K^\mu = C \partial_\mu G(\varphi), \quad (47)$$

откуда следует

$$\langle a | K^\mu | b \rangle = i(q^\mu/q^2) C \langle a | G(\varphi) | b \rangle. \quad (48)$$

В общем случае матричный элемент $\langle a | G(\varphi) | b \rangle$ может быть отличен от нуля в пределе $q^2 \rightarrow 0$, что согласуется с (45). Тем самым появление полюса (46) вполне допустимо.

Возвращаясь к материалу, изложенному выше, отметим, что источник аномального увеличения массы η' -мезона и аномального поведения амплитуды распада $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ при малых значениях импульса π^0 -мезона оказывается одним и тем же. Более подробное описание распада $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ можно найти, например, в [17, 32].

Вычислим теперь полную вероятность распадов $\eta \rightarrow 3\pi$ и $\eta' \rightarrow 3\pi$, используя лагранжиан (31). Для этого нам будут необходимы члены второго и четвертого порядка по мезонным полям:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{4} \text{Tr} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi) - \frac{1}{4} \text{Tr} (M \Phi^2) - \frac{a}{12} (\text{Tr} \Phi)^2; \\ \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{48F^2} \{ -8\varphi^i \varphi^j \partial_\mu \varphi^l \partial_\mu \varphi^m f_{ilk} f_{hjm} + \text{Tr} (M \Phi^4) \}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

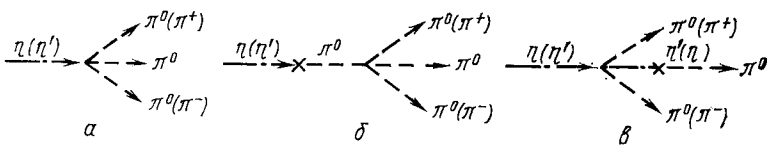
Здесь φ^i — поля мезонного октета; f_{ilk} — структурные константы $SU(3)$ -группы. Оставляя в \mathcal{L}_4 только пионные и η -мезонные поля, а в \mathcal{L}_2 член π^0 — η -смешивания, можно переписать (50) в форме

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6F^2} [(\pi \partial_\mu \pi)^2 - \pi^2 (\partial_\mu \pi)^2] + \frac{m_\pi^2}{24F^2} [(\pi^2 + \eta^2)^2 - \frac{8}{9} \eta^4] + \frac{\mu^2}{\sqrt{3}} \pi^0 \eta \left[1 - \frac{1}{6F^2} (\pi^2 + \frac{\eta^2}{3}) \right], \quad (51)$$

где

$$\eta = \eta_8 + \sqrt{2} \eta_0; \quad \mu^2 = (\mu_a^2 - \mu_\eta^2)/2.$$

Распад $\eta \rightarrow 3\pi^0$ почти полностью определяется диаграммой, изображенной на рис. 1, а:



$$T_{\eta \rightarrow 3\pi^0}^{(a)} = -i (\mu^2/3F^2) (\cos \varphi/\sqrt{2} - \sin \varphi). \quad (52)$$

Диаграммы рис. 1, б и в дают незначительные поправки к этому основному вкладу. Не приводя соответствующих формул, сразу выпишем значение для ширины распада $\eta \rightarrow 3\pi^0$ ($\varphi = -18^\circ$):

$$\Gamma_{\eta \rightarrow 3\pi^0} = 0,28 \text{ кэВ}. \quad (53)$$

Экспериментальное значение вполне согласуется с (53) [33]:

$$\Gamma_{\eta \rightarrow 3\pi^0}^{\text{эксп}} = 0,25 \pm 0,04 \text{ кэВ}. \quad (54)$$

Для случая (42) ($F_9 = 2F_\pi$, $\varphi = -10^\circ$) получаем

$$\Gamma_{\eta \rightarrow 3\pi^0}^{(F_9=2F_\pi)} = 0,22 \text{ кэВ}. \quad (55)$$

Это значение лежит в пределах экспериментальных погрешностей.

Перейдем теперь к распаду $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$. При вычислении полной ширины этого распада опять определяющую роль играет диаграмма, изображенная на рис. 1, а:

$$T_{\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0}^{(a)} = -i \frac{\mu^2}{3\sqrt{3}F^2} (\cos \psi - \sqrt{2} \sin \varphi). \quad (56)$$

Однако в отличие от предыдущего распада здесь в амплитуде появляются члены, зависящие от энергии π^0 -мезона ω , и для вычисления этих вкладов важное значение приобретает рис. 1, б:

$$T_{\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0}^{(b)} = -i \frac{\mu^2}{3\sqrt{3}F^2} (\cos \varphi - \sqrt{2} \sin \varphi) \frac{(2m_\eta^2 + m_\pi^2 - 6m_\eta \omega)}{m_\eta^2 - m_\pi^2}. \quad (57)$$

Диаграмма рис. 1, в менее существенна. Полный вклад в амплитуду от всех диаграмм, изображенных на рисунке 1, имеет вид:

$$T_{\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0} = -i \frac{\mu^2}{3\sqrt{3}F^2} \frac{(\cos \varphi - \sqrt{2} \sin \varphi)}{(\Delta^2 - 1)} \times \\ \times \left[\Delta^2 - 1 - \sin^2 \varphi + \sqrt{2} \sin 2\varphi - \varepsilon + 3 \frac{s_3 - s_0}{m_\pi^2} \right] = A \left\{ 1 - \sigma_\eta \frac{s_3 - s_0}{m_\pi^2} \right\}. \quad (58)$$

Здесь $\Delta = m_\eta/m_\pi$; $\varepsilon = 0,33$ — вклад от диаграммы рис. 1, в, когда η -мезон сначала переходит в $\eta'\pi^+\pi^-$, а затем η' превращается в π^0 ; $s_3 = (p_\eta - p_{\pi^0})^2$; $s_0 = (1/3)(m_\eta^2 + 3m_\pi^2)$; σ_η — параметр наклона. В результате

$$\sigma_\eta = -0,21 \quad (59)$$

и хорошо согласуется с экспериментом [3]. Для ширины распада

$$\Gamma_{\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0} = 0,17 \text{ кэВ}. \quad (60)$$

Экспериментальное значение

$$\Gamma_{\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0}^{\text{эксп}} = 0,20 \pm 0,03 \text{ кэВ}. \quad (61)$$

Для варианта (42) имеем несколько заниженное значение $\Gamma_{\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0}^{(F_0=2F_\pi)} = 0,13 \text{ кэВ}$; $\sigma_\eta = -0,2$.

Еще раз отметим, что хорошее согласие ширин распадов $\eta \rightarrow 3\pi^0$ и $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ [см. (53), (60)] с экспериментальными данными получилось потому, что фиксацию параметров μ_u^2 и μ_d^2 [см. (34)] производили по значениям масс m_{π^0} , m_{K^0} и \tilde{m}_{K^+} , где \tilde{m}_{K^+} не включала электромагнитных поправок. Если для m_{K^+} взять полное физическое значение, то ширина распадов $\eta \rightarrow 3\pi$ окажется несколько завышенной.

Заметим также, что в работе [5] для распадов $\eta \rightarrow 3\pi$ получены сильно завышенные оценки. Это объясняется тем, что в [5] была использована более грубая схема нарушения киральной группы [19] чем здесь, однако содержащая меньшее число свободных параметров.

На языке параметров μ_i схема [19] соответствует выбору

$$\mu_u^2 = 0; \quad \mu_d^2 = \mu_s^2 \operatorname{tg}^2 \theta_c, \quad (62)$$

т. е. содержит лишь один произвольный параметр μ_s^2 (θ_c — угол Кабиббо). Эта схема нарушения достаточно хорошо описывает почти все распады мезонов нонета, за исключением распадов $\eta \rightarrow 3\pi$ и $\eta' \rightarrow 3\pi$, в которых амплитуды пропорциональны разности $\mu_d^2 - \mu_u^2$. Поэтому для указанных распадов следует использовать рассмотренную здесь схему нарушения киральной группы.

Обратимся теперь к описанию распада $\eta' \rightarrow 3\pi^0$. Основной вклад в амплитуду опять дает диаграмма рисунка а:

$$T_{\eta' \rightarrow 3\pi^0} = -i \frac{\mu^2}{3F^2} \left(\cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}} \right). \quad (63)$$

Остальные диаграммы дают лишь малые поправки к (63). Суммируя их, получаем $\Gamma_{\eta' \rightarrow 3\pi^0} = 1,3$ кэВ, что не противоречит верхнему экспериментальному пределу для этого распада $\Gamma_{\eta' \rightarrow 3\pi^0}^{\text{эксп}} < 10$ кэВ [34].

Интересно отметить, что при отсутствии аномального члена в лагранжиане (31) ($a = 0$) из (37) получаем: $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{2}$. Этот угол соответствует идеальному смешиванию, а из (63) легко видеть, что при $a = 0$ распад $\eta' \rightarrow 3\pi^0$ будет запрещен. Таким образом, вероятность распада $\eta' \rightarrow 3\pi^0$ полностью определяется аномальными членами.

Ширина заряженного распада $\eta' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ почти полностью определяется диаграммой рисунка а, а параметр наклона — диаграммой рисунка б, как и для распада $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$. Полный вклад в амплитуду от всех трех диаграмм (см. рис. 1)

$$T_{\eta' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = -i \frac{\mu^2}{3 \sqrt{3} F^2} \frac{(V\sqrt{2} \cos \varphi + \sin \varphi)}{(\Delta'^2 - 1)} \times \\ \times \left[\Delta'^2 - 1 - \cos^2 \varphi - \sqrt{2} \sin 2\varphi - \epsilon' + 3 \frac{s'_3 - s'_0}{m_\pi^2} \right]. \quad (64)$$

Здесь $\Delta' = m_{\eta'}/m_\pi$; $\epsilon' = 6,28$ — вклад от диаграммы рисунка 1, в, когда η' -мезон сначала переходит в $\eta \pi^+ \pi^-$, а затем η -мезон превращается в пион; $s'_3 = (p_{\eta'} - p_{\pi^0})^2$; $s'_0 = (m_{\eta'}^2 + 3m_{\pi^0}^2)/3$. Из (64) имеем, что ширина распада $\Gamma_{\eta' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} \approx 0,75$ кэВ, а параметр наклона $\sigma_{\eta'} = -0,07$, т. е. в 3 раза меньше, чем в распаде $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ [см. (59)].

Для (42) оценки на ширины распадов получаются более низкими:

$$\Gamma_{\eta' \rightarrow 3\pi^0}^{(F_s=2F_\pi)} \approx 0,5 \text{ кэВ}, \quad \Gamma_{\eta' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0}^{(F_s=2F_\pi)} \approx 0,2 \text{ кэВ}. \quad (65)$$

Величина $\sigma_{\eta'}$ меняется мало:

$$\sigma_{\eta'}^{(F_s=2F_\pi)} \approx -0,06. \quad (66)$$

Все расчеты, проведенные в этом разделе, основаны на киральном лагранжиане, соответствующем низшему порядку по $1/N$ -разложению в КХД [см. (31)]. Учет более высоких поправок по $1/N$ -разложению мало меняет результаты для распада $\eta \rightarrow 3\pi$. Более заметны эти поправки в распадах $\eta' \rightarrow 3\pi$ [23].

7. РАСПАД $\eta' \rightarrow \eta^2\pi$

С необходимостью некоторого улучшения лагранжиана (31) или (19) мы столкнулись уже в разд. 5 при описании спектра масс нонета мезонов. Действительно, чтобы получить лучшее согласие с экспериментом в значениях масс m_η и $m_{\eta'}$ [см. (40)] необходимо добиться уменьшения в 2 раза значения члена $\eta_0 - \eta_8$ смешивания в лагранжиане (33), как отмечалось ранее. Лагранжиан (31) соответствует основному порядку по $1/N$ -разложению и по степеням μ_i^2 . Его можно дополнить или членами более высоких порядков по $1/N$, или членами порядка μ_i^2/N , которые меньше членов a/N , уже содержащихся в (31) (аномальные члены). Для более точного описания спектра масс в работе [23] использованы дополнительные члены последнего вида:

$$-\frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{N} \text{Tr}(\Phi) \text{Tr}(M\Phi). \quad (67)$$

Если для ε взять значение $\varepsilon = -1$, то легко видеть, что c в (36) уменьшится в 2 раза, угол φ станет равным примерно -10° и массы m_η и $m_{\eta'}$ будут хорошо совпадать с экспериментальными значениями.

В лагранжиане (19) члену (67) будет соответствовать член вида

$$i \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}aF} Q(x) \text{Tr}[M(U - U^*)]. \quad (68)$$

Для корректного описания поведения амплитуды распада $\eta \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^-$ при $p_{\pi^0} \rightarrow 0$ также необходим учет аномальных членов более сложного вида, чем в (19) (см. разд. 6 и работу [17]).

Однако при описании всех процессов, о которых до сих пор шла речь, как и при описании спектра масс мезонного нонета, лагранжианы (19) и (31) все же в основном правильно воспроизводили физическую картину. Иная ситуация имеет место при описании распада $\eta' \rightarrow \eta^2\pi$. Здесь получается заметное расхождение с экспериментальными данными при использовании простого лагранжиана (31), и аномальные члены начинают играть значительно большую роль.

Действительно, из (31) для амплитуды распада $\eta' \rightarrow \eta^2\pi$ имеем

$$T_{\eta' \rightarrow \eta^2\pi^0} = i \frac{m_\pi^2}{3F^2} \left(\cos 2\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{2}} \right). \quad (69)$$

Такое же выражение, только умноженное на $\sqrt{2}$, получается для амплитуды распада $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$. Тогда, даже при угле смешивания $\varphi \approx -10^\circ$, приходим к следующим парциальным ширинам $\Gamma_{\eta' \rightarrow \eta^2\pi^0} =$

$= 2\Gamma_{\eta' \rightarrow \eta 2\pi^0} = 2,4$ кэВ или $\Gamma_{\eta' \rightarrow \eta 2\pi} = 3,6$ кэВ, в то время как экспериментальное значение намного больше [35]:

$$\Gamma_{\eta' \rightarrow \eta 2\pi}^{\text{эксп}} = 180 \pm 60 \text{ кэВ}. \quad (70)$$

Более того, амплитуда (69) постоянна, в то время как экспериментальные данные указывают на ее энергетическую зависимость

$$T_{\eta' \rightarrow \eta 2\pi} = A(1 + \sigma K_{\eta}), \quad (71)$$

где K_{η} — кинетическая энергия η -мезона; A и σ — постоянные. Параметр наклона [36]:

$$\sigma^{\text{эксп}} = -(0,48 \pm 0,18) m_{\pi}^{-4}. \quad (72)$$

Одним из возможных способов получения амплитуды распада $\eta' \rightarrow \eta 2\pi$ в форме (71) является добавление к лагранжиану (19) или (31) членов более высокого порядка по $1/N$ -разложению [23] *. При описании распада $\eta' \rightarrow \eta 2\pi$ такие члены могут оказать заметное влияние, поскольку ведущий член амплитуды (69) пропорционален квадрату малой пионной массы. Такого рода члены можно взять в форме **

$$\frac{2\beta}{a^2 F^4} Q^2 \text{Tr}(\partial_{\mu} U \partial^{\mu} U^+). \quad (73)$$

Вводя этот член вместе с (68) в лагранжиан (19), а затем исключая Q , приходим к следующему дополнительному слагаемому в лагранжиане (31) четвертого порядка по степеням мезонных полей:

$$\frac{\beta}{4N^2 F^2} \left[(\text{Tr} \Phi)^2 + \frac{\varepsilon}{a} \text{Tr} \Phi \text{Tr} M \Phi \right] \text{Tr}(\partial_{\mu} \Phi \partial^{\mu} \Phi). \quad (74)$$

Удерживая только те члены, которые пропорциональны каонной массе, и полагая $N = 3$, получаем для амплитуды распада $\eta' \rightarrow \eta \pi\pi$ выражение

$$T_{\eta' \rightarrow \eta \pi\pi} = \beta \frac{(m_{\eta'} - m_{\eta})^2}{6F^2} \left\{ \sin 2\varphi + \frac{2\varepsilon}{3a} m_K^2 (\sin 2\varphi + \sqrt{2} \cos 2\varphi) \left[1 - \frac{2m_{\eta'}}{(m_{\eta'} - m_{\eta})^2} K_{\eta} \right] \right\}. \quad (75)$$

Отсюда параметр наклона

$$\sigma = -2m_{\eta'} / (m_{\eta'} - m_{\eta})^2 \approx -1,6 m_{\pi}^{-4}. \quad (76)$$

Это значение σ лишь по знаку и порядку величины совпадает с экспериментом.

С учетом члена (67) или (68) параметры a и φ приобретают значения $a \approx 0,9$ ГэВ², $\varphi = -10^{\circ}$. Подставляя их в (75) и сравнивая ширину распада $\eta' \rightarrow \eta \pi\pi$ с экспериментальным значением (70),

* Возможны и другие способы (см., например, [37]).

** Используя результаты разд. 2, легко убедиться, что (73) будет членом следующего по $1/N$ -разложению порядка по сравнению с членами лагранжиана (19). С другой стороны, он обладает кирально-инвариантной формой. Общие правила построения такого рода членов описаны в [15].

получаем $\beta \approx 4,5$. Введение новых членов в лагранжиан, соответствующих неведущим порядкам по $1/N$, мало меняет предсказания для распадов $\eta \rightarrow 3\pi$. Более сильно эти члены влияют на величины распадов $\eta' \rightarrow 3\pi$, однако в пределах экспериментальных ограничений.

8. ОБОБЩЕНИЕ КИРАЛЬНОГО ЛАГРАНЖИАНА С УЧЕТОМ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПО $1/N$

Поскольку некоторые из рассмотренных задач потребовали введения дополнительных членов в лагранжиан (31), имеет смысл обсудить общий вид кирального лагранжиана с поправками аномального типа более высоких порядков по $1/N$ и μ_i^2/N . Сделаем это, следуя работе [23] (см. также [15]).

Эффективный лагранжиан можно представить в форме

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{инв}} + \mathcal{L}_m, \tag{77}$$

где $\mathcal{L}_{\text{инв}}$ — это функция от $Q(x)$ и $U(x)$, инвариантная относительно киральной группы $SU(3) \times SU(3)$; \mathcal{L}_m содержит члены с массовой матрицей M , которые нарушают киральную группу. Будем требовать, чтобы лагранжиан не содержал более двух производных в своих членах. Тогда $\mathcal{L}_{\text{инв}}$ можно представить в форме

$$\mathcal{L}_{\text{инв}} = \mathcal{L}_{\text{инв}}^{(0)} + \mathcal{L}_{\text{инв}}^{(1)} + \mathcal{L}_{\text{инв}}^{(2)}, \tag{78}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{инв}}^{(0)} &= \frac{1}{2} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^+) + \frac{N}{aF^2} Q^2(x); \\ \mathcal{L}_{\text{инв}}^{(1)} &= \frac{i}{2} Q(x) \text{Tr} [\ln U - \ln U^+] + \frac{\alpha}{F^2} [\text{Tr} (U^+ \partial_\mu U)]^2; \\ \mathcal{L}_{\text{инв}}^{(2)} &= \frac{2\beta}{a^2 F^4} Q^2(x) \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^+) + \frac{\gamma}{a^2 F^2} Q^4(x). \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{L}_{\text{инв}}^{(n)}$ содержит члены порядка $1/N^n$, если α , β и γ -константы.

Аналогично для \mathcal{L}_m получаем, требуя $U(2) \times U(2)$ -инвариантности в пределе $m_\pi \rightarrow 0$, $m_K \rightarrow 0$:

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m^{(0)} + \mathcal{L}_m^{(1)}, \tag{79}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{(0)} &= \frac{F}{2\sqrt{2}} \text{Tr} [M(U + U^+)]; \\ \mathcal{L}_m^{(1)} &= i \frac{e}{2\sqrt{2}aF} Q(x) \text{Tr} [M(U - U^+)] \\ &\text{с } \mathcal{L}_m^{(n)} \sim O(m/N^n). \end{aligned}$$

Если теперь исключить поле $Q(x)$, используя его уравнение движения, то получаем, оставляя члены, содержащие не более двух производных:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^+) + \frac{\alpha}{F^2} [\text{Tr} (U^+ \partial_\mu U)]^2 + \\ & + \frac{F}{2\sqrt{2}} \text{Tr} [M(U + U^+)] + \frac{aF^2}{4N} \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} (\ln U - \ln U^+) + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}aF} \text{Tr} [M(U - U^+)] \right\}^2 \left\{ 1 - \frac{2\beta}{aF^2N} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^+) \right\}. \quad (80) \end{aligned}$$

Этот лагранжиан содержит все те части, которые были использованы выше при описании распада $\eta' \rightarrow \eta$ лл и более точного спектра масс мезонного нонета.

До сих пор рассматривались лишь распады, соответствующие сильным взаимодействиям. Чтобы описать электромагнитные распады, можно или включить наряду с $U(1)$ -аномалией также и электромагнитную аномалию [23], или ввести в рассмотрение барионные или кварковые петли [5, 6, 30]. Последний способ является более универсальным, поскольку позволяет наряду с распадами $(\eta, \eta') \rightarrow 2\gamma$ описывать также распады $(\eta, \eta') \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ ($\rho\gamma$).

В заключение этого раздела заметим, что лагранжиан (77) следует дополнить еще членом, явно зависящим от топологического заряда вакуума Θ . Этот CP-нарушающий член соответствует последнему слагаемому в КХД-лагранжиане (1):

$$\mathcal{L}_{CP} = -\theta Q(x). \quad (81)$$

В кирально-симметричном пределе $M \rightarrow 0$ член (81) можно исключить из лагранжиана с помощью $U(1)$ -преобразования вида (17). Если же $M \neq 0$, то такое преобразование просто переводит Θ -зависимость в лагранжиан \mathcal{L}_m .

Используя Θ -зависимые члены, можно произвести оценку таких физических величин, как, например, электрический дипольный момент нейтрона D_n . В рамках КХД и модели мешка такие расчеты были проведены в [38], в мягкокионном приближении в [39] и в модели феноменологических киральных лагранжианов в [17]. Исходя из верхнего экспериментального предела на $|D_n| \lesssim 10^{-24}$ см [40], можно получить верхний предел

$$\Theta \lesssim 10^{-9}.$$

Укажем еще, что из работы [15] можно найти более общий вид кирального феноменологического лагранжиана с глюонными аномалиями. Там рассмотрен бесконечный ряд членов по всевозрастающим степеням $Q(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное здесь рассмотрение киральных феноменологических лагранжианов с глюонными аномалиями показало, что на их основе вполне возможно как решение $U(1)$ -проблемы, так и успешное описание целого ряда физических процессов (например, распады η -мезонов). Влияние глюонов (или глюоболов) особенно заметно при вычислениях, связанных с описанием массы η' -мезона и его распадов. Прежде всего это относится к распаду $\eta' \rightarrow \eta$ лл, где влияние глюонных аномалий особенно заметно [23, 32, 41]. На распады η -мезонов глюонные аномалии оказывают влияние лишь через угол смешивания ϕ .

Интересную интерпретацию допускает комбинация глюонных полей $Q(x) = \partial_\mu K^\mu(x)$. Это поле можно рассматривать как духовое поле с неправильным знаком перед массовым членом Q^2 . Поэтому одна из возможностей получения физических результатов заключается в исключении его из лагранжиана с использованием уравнения движения, и работе с лагранжианом, состоящим из одних мезонных полей. Однако остается открытым вопрос — не являются ли эти поля реальными физическими частицами — глюеболами? Тем более что даже без исключения этих полей можно вполне корректно определить гамильтониан [14, 15].

Недостаток рассмотренной здесь модели — необходимость введения новых произвольных параметров при рассмотрении членов более высокого порядка по $1/N$. Это несколько снижает предсказательную силу модели. Поэтому было бы интересно найти более однозначный принцип для построения таких членов.

Еще раз отметим, что при использовании киральных лагранжианов можно получить все те результаты, которые получались с $1/N$ -разложением в КХД (см., например, [11]), но более простым способом. Кроме того, можно получить и ряд новых результатов [17]. Тем самым нам кажется очевидным, что использование киральных лагранжианов при изучении процессов с низкими энергиями представляет безусловный интерес и позволяет проводить вполне корректные количественные расчеты, связанные с описанием сильных взаимодействий адронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Efremov A. V., Radyushkin A. V.— Riv. Nuovo cimento, 1980, v. 3, N 2; Dokshitzer Yn. L., D'Yakonov D. I., Trogan S. I.—Phys. Reports, 1980, v. 58, p. 269.
2. Wess J., Zumino B.— Phys. Rev., 1967, v. 163, p. 1727.
3. Де Альфаро В. и др. Токи в физике адронов. Пер. с англ. М., Мир, 1976.
4. Волков М. К., Первушин В. Н. Существование нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов. М., Атомиздат, 1978.
5. Волков М. К.— ЭЧАЯ, 1979, т. 10, с. 693.
6. Ebert D., Volkov M. K.— Fortsch. Phys., 1981, Bd 29, S. 127.
7. t'Hoof G.— Nucl. Phys. B, 1974, v. 72, p. 461.

8. Veneziano G.— Nucl. Phys. B, 1976, v. 117, p. 519.
9. Witten E.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 160, p. 57.
10. Veneziano G.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 159, p. 213.
11. Witten E.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 156, p. 269.
12. Di Vecchia P.— Phys. Lett. B, 1979, v. 85, p. 357.
13. Nath P., Arnowitt R.— North Eastern Preprint NUB-2417, 1979.
14. Rosenzweig C., Schechter J., Trahern G.— Phys. Rev. D, 1980, v. 21, p. 3388.
15. Di Vecchia P., Veneziano G. CERN Preprint TH-2814, 1980.
16. Witten E. Harvard Preprint HUTP-80/A005, 1980.
17. Arnowitt R., Nath P. North Eastern Preprint NUB-2445; 2468; 2469, 1980.
18. Jackiw R., Rebbi C.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 172; Callan C. G., Dashen Jr. R. F., Gross D. J.— Phys. Lett. B, 1976, v. 63, p. 334.
19. Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner V.— Phys. Rev., 1968, v. 175, p. 2195; Oakes R. J.— Phys. Lett. B, 1969, v. 29, p. 683.
20. Трейман С., Джекив Р., Гросс Д. Лекции по алгебре токов. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1977.
21. Adler S. L., Bardcen W.— Phys. Rev., 1969, v. 182, p. 1517; Терентьев М. В.— УФН, 1974, т. 112, с. 37.
22. Crewther R. J. CERN Preprint TH-2791, 1979.
23. Di Vecchia P. e.a.— Nucl. Phys. B, 1981, v. 181, p. 318.
24. Сакураи Д. Токи и мезоны. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1972.
25. Socolow R. H.— Phys. Rev. B, 1965, v. 137, p. 1221.
26. Isgur N.— Phys. Rev. D, 1975, v. 12, p. 3770.
27. Arpe W. D. e.a.— Phys. Lett. B, 1979, v. 83, p. 131.
28. Филиппов А. Т.— Ядерная физика, 1979, т. 29, с. 1035.
29. Chanowitz M. S.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 977.
30. Волков М. К., Эберт Д.— Ядерная физика, 1980, т. 32, с. 503.
31. Kogut J., Susskind L.— Phys. Rev. D., 1975, v. 11, p. 3594.
32. Milton K. A. e.a.— Phys. Rev. D., 1980, v. 22, p. 1124; 1647.
33. Particle Data Group — Rev. Mod. Phys., 1980, v. 52, N. 2.
34. Particle Data Group — Phys. Lett. B, 1978, v. 75.
35. Binnie D. M. e.a.— Phys. Lett. B, 1979, v. 83, p. 141; Abrams C. S. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 477.
36. Kalbleish G. R.— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 916.
37. Deshpande N. G., Truong T. N.— Phys. Rev. Lett., 1978, v. 44, p. 1579.
38. Baluni V.— Phys. Rev. D, 1979, v. 19, p. 2227.
39. Grawther R. J. e. a.— Phys. Lett B, 1979, v. 88, p. 123.
40. Dress W. B. e.a.— Phys. Rev. D., 1977, v. 15, p. 9.
41. Novikov V. e.a.— Nucl. Phys. B. 1980, v. 165, p. 55.