

## СОЛИТОНЫ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

*В. Г. Маханьков*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре обсуждаются свойства одно- и двухмерных солитонов. Особый упор сделан на качественные результаты, полученные с помощью математического моделирования. Там где это возможно, дано краткое описание вычислительной методики.

Properties of one and more space dimensional solitons are discussed with special attention paid to the qualitative results obtained by means of computer simulations. Where possible a brief outline of calculation methods employed is presented.

### СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- Bq (IBq) — уравнение Буссинеска (улучшенный вариант);  
CS — цилиндрически-симметричный;  
DSG (TSG) — уравнение двойной (тройной) синус-Гордона;  
RLW — регуляризованное длинноволновое уравнение;  
S3 — уравнение Шредингера с кубической нелинейностью;  
SG — уравнение синус-Гордона;  
SIT — самонаведенная прозрачность;  
KAM — теория Колмогорова — Арнольда — Мозера;  
KG — уравнение Клейна — Гордона;  
KдФ(МКдФ) — уравнение Кортевега де Фриза (модифицированный вариант);  
OЗТР — метод обратной задачи теории рассеяния;  
PI(Y) — релятивистски-инвариантный (уравнение);  
СПР — солитоноподобное решение;  
ЧПР — частицеподобное решение;  
ФПУ — проблема Ферми — Паста — Улама.

### ВВЕДЕНИЕ

Прежде всего следует сказать, что именно компьютер около 25 лет назад создал проблему Ферми — Паста — Улама, а затем обнаружил солитоны. В результате численного эксперимента по динамике нелинейных волн уравнения Кортевега де Фриза (КдФ) появилось понятие солитонов (Забуски) как уединенных волн, выходящих из взаимодействия, не изменяя своей формы и скорости. Несколько ранее в экспериментах Перринга и Скирме аналогичные эффекты были обнаружены в рамках уравнения синус-Гордона, однако для весьма отличных объектов.

Интересно отметить, что «двухсолитонные» решения (бионы) были найдены аналитически десятью годами ранее (Зеегер и др.). В 1970 г. Ояма и Сайто обнаружили солитоны на решетке Тоды, приближаясь тем самым к проблеме Ферми — Паста — Улама (ФПУ). Наконец, в 1971 г. были найдены солитоны в рамках уравнения Шредингера с кубической нелинейностью (S3) (Яджима и Оути). Все ссылки можно найти в обзоре Скотта и соавторов [1] и ниже в тексте.

В результате компьютер, положив начало целому новому направлению в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, опять отошел на задний план. Началась пора открытия и исследования вполне интегрируемых гамильтоновых систем и связанных с ними методов обратной задачи рассеяния, Хироты и преобразований Беклунда. Развитие и формализация этой методики, носящие характер международного соревнования, показали, что интегрируемые уравнения можно генерировать практически в неограниченном количестве. В результате стало казаться, что если не все, то большинство лагранжевых систем вполне интегрируемы.

Первые удары по этим воззрениям опять нанес компьютер. В 1974 г. в Дубне было обнаружено неупругое взаимодействие ленгмюровских солитонов в плазме аналогично для солитонов «улучшенных» вариантов уравнений Буссинеска и КдФ, уравнений Хиггса и Клейна — Гордона (КГ) [2]. Оказалось, что вроде бы «малого» изменения уравнения достаточно, чтобы оно стало неинтегрируемым. Более того, как выяснилось, некоторые специфические свойства интегрируемости исчезают при переходе от плоской  $(x, t)$ -геометрии к сферически (или цилиндрически)-симметричной  $(r, t)$ .

Возникло понятие систем, *близких* к интегрируемым, для которых своеобразным нулевым приближением могут служить вполне интегрируемые уравнения, а исследование строится по отклонению от полной интегрируемости. При этом роль параметра взаимодействия современных теорий играет отклонение от вполне интегрируемого уравнения.

Наиболее «просто» исследование строится, когда такое отклонение можно выделить в виде правой части с малым параметром. В этом случае можно применить метод последовательных приближений. Подчеркнем, что такое применение должно происходить со всеми возможными предосторожностями, так как на этом пути могут быть получены «решения», не удовлетворяющие исходному уравнению.

Кроме того, даже в данном случае возможны солитонные решения, принципиально отличающиеся от хорошо известных решений вполне интегрируемых уравнений. Иногда выделить в чистом виде такое отклонение не удается [например, для уравнения Буссинеска (Bq) имеет место замена  $\varphi_{xxxx}$  на  $\varphi_{xxtt}$ ], еще нетривиальнее близость уравнений Хиггса и КГ к уравнению синус-Гордона (SG).

Подчеркнем здесь, что численный эксперимент является в настоящее время одним из весьма мощных орудий исследования гамильто-

новых систем, особенно это касается ответа на вопрос, может ли данная система быть интегрируемой. Упругое взаимодействие солитонов позволяет ответить на этот вопрос положительно (вспомним КдФ, S3, SG). Обнаружение неупругости взаимодействия солитонов делает бесплодными попытки найти следствия интегрируемости, в частности многосолитонные формулы \*. Тем не менее идея о близости изучаемой системы к интегрируемой в какой-то степени помогла обнаружить пульсирующие солитоны — бионы как в плоской  $(x, t)$ -геометрии, так и в сферически-симметричной  $(r, t)$ -геометрии в рамках уравнений КГ, Хиггса и SG. Отметим, что если в плоском случае еще удается найти приближенное аналитическое решение для пульсонов (пульсирующих солитонов), то в  $(r, t)$ -геометрии как сам факт открытия, так и исследование свойств пульсонов целиком связаны с компьютером (до сих пор стандартные аналитические методы были бессильны: сказывались отсутствие малого параметра и существенная нелинейность) [2].

Трансформация «физической» системы, описывающей взаимодействие ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме, от «сильнонеинтегрируемой» при малых скоростях сталкивающихся солитонов (возможно их слияние) вплоть до вполне интегрируемой при  $v \rightarrow 1$  была впервые прослежена на ЭВМ. Здесь уместно отметить, что при нелинейном описании ионно-звуковых волн (например, с помощью уравнения Буссинеска) интегрируемость исчезает. Система из двух интегрируемых уравнений оказалась неинтегрируемой.

В результате работы большого количества исследователей во всем мире свойства солитонов в плоском  $(x, t)$ -мире были достаточно хорошо изучены. Настало время переходить в более реальные и сложные многомерные миры. Этот переход, как впрочем и следовало ожидать, оказался нетривиальным.

При переходе от одного к нескольким пространственным переменным на первое место вышел вопрос об устойчивости солитонов [в плоском  $(x, t)$ -случае лишь в рамках уравнений КГ и В $q$  были обнаружены неустойчивые солитоны]. В последние годы большое количество работ, особенно в теории плазмы, было посвящено исследованию устойчивости плоских  $(x, t)$ -солитонов в перпендикулярном по отношению к их движению направлении. Отметим здесь, что солитоны двух хорошо известных интегрируемых уравнений КдФ и S3 оказались в этом смысле противоположными: солитоны КдФ устойчивы, что в конечном итоге позволило решить двумерную задачу; солитоны S3 неустойчивы, что лишней раз указывало на существование коллапса ленгмюровских волн в плазме.

В 1963—1964 гг. Дерриком и Хобартом была доказана следующая теорема: в пространстве более чем одного измерения не существует устойчивых стационарных солитоноподобных решений в рамках

\* Это утверждение верно для систем с внутренней симметрией не выше SU (2).

обычных релятивистски-инвариантных нелинейных теорий (без внутренних симметрий и дифференциальных взаимодействий).

Здесь следует определить, что мы будем понимать под термином *солитон в неоднородном пространстве*. Наше определение солитона смыкается с широко известным понятием квазичастичного решения: \* солитон есть решение некоторого нелинейного уравнения гиперболического типа, обладающее конечной энергией, импульсом, «зарядом» и «правильной» асимптотикой на бесконечности.

Теорема Деррика — Хобарта фактически утверждает, что гамильтониан системы в стационарном случае  $H[\varphi] = \text{const}$  как функционал поля определяет поверхность, которая не может быть долиной: это или холм, или, в лучшем случае, седловина в функциональном пространстве. Поэтому для стабилизации системы нужны дополнительные связи (интегралы движения). Возможны два пути:

1) поиски законов сохранения, связанных с нетривиальной топологией решения (Фаддеев, Поляков, Туфт и др.);

2) переход к теориям с внутренними глобальными или локальными калибровочными симметриями.

Первого подхода мы не будем здесь касаться. Во втором случае солитон обеспечивает гамильтониану условный экстремум, что может привести к устойчивости солитона. Вопросы устойчивости, а также статические свойства солитонов изучены уже в рамках различных скалярных и векторных калибровочных моделей, а также с включением цветных спинорных (кварковых) полей (см. [2, 3]).

Динамика солитонов в многомерном мире пока почти целиком эпархия компьютера. Так, именно с его помощью были открыты пульсоны — бионы в сферическом трехмерном пространстве — и изучены их свойства. Однако это лишь первый шаг. Реальная динамика, в которой в полной мере проявляются особые свойства солитонов, это их взаимодействие. В настоящее время имеется уже несколько работ, в которых изучена динамика взаимодействия двумерных \*\* солитонов. Полученные результаты весьма впечатляющие и, что особенно важно, география исследований (Англия, Польша, СССР, США, Япония) вполне широка. Ниже более подробно остановимся на этих исследованиях.

В данном обзоре рассмотрим преимущественно те качественно новые нелинейные явления, которые были открыты и изучены с помощью компьютера. Сюда относятся отыскание локализованных решений неинтегрируемых нелинейных волновых уравнений (особенно в более чем двух пространственных измерениях), а также исследование их устойчивости и динамики взаимодействия.

\* Здесь следует отметить разницу между солитоном — решением гиперболического уравнения и инстантоном — решением эллиптического уравнения.

\*\* Трехмерные солитоны, по-видимому, пока слишком сложны для компьютера.

Эти явления изучим на примере простейших моделей, возникающих в различных областях современной физики от оптики и гидродинамики до теории поля и элементарных частиц.

Как уже отмечалось выше, ныне широко известное понятие солитон возникло при исследовании взаимодействия уединенных волн в рамках уравнения КдФ. Ниже будем придерживаться более широкого определения, т. е. под солитоном будем понимать уединенную волну, распространяющуюся в системе, близкой к интегрируемой, тем более что в последние годы были обнаружены и исследованы вполне интегрируемые системы с нетривиальной динамикой (взаимодействием) солитонов. Мы имеем в виду работы Калоджеро и Дегаспериса (бумероны и пр.), В. Е. Захарова и А. В. Михайлова (расщепляющиеся солитоны). Даже для таких систем старое определение не подходит.

В неоднородных геометриях наше определение будет весьма близким к понятию частицеподобного решения, хорошо известному специалистам в теории поля.

Рассмотрены свойства плоских солитонов, т. е. солитонов с плоским волновым фронтом. Исследован их вид, устойчивость и взаимодействие, а также связанные состояния солитонов. Исследованы неоднородные солитоны. Изучены их устойчивость, динамика формирования и взаимодействия, связанные состояния (резонансы). В заключении приведены некоторые намечившиеся направления дальнейшего развития.

## 1. ПЛОСКИЕ СОЛИТОНЫ

**Уравнения и их применения.** Одним из первых уравнений, решения которого были исследованы численно и проявили солитонные свойства, было уравнение КдФ, которое запишем в следующей «общей» форме:

$$\varphi_t + \varphi_x + \alpha \varphi^v \varphi_x + \varphi_{xxx} = 0. \quad (1)$$

В настоящее время установлено, что при  $v = 1, 2$  это уравнение вполне интегрируемо, а его солитоны взаимодействуют упруго. При  $v \geq 3$  это свойство уравнение (1) теряет, хотя остается весьма «близким» к интегрируемому [4]. Солитоноподобные решения (1) можно легко получить:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s &= \left( A \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{Av}{\sqrt{(v+1)(v+2)}} (x - vt - x_0) \right] \right)^{2/v}; \\ v &= 2\alpha A^2 / [(v+1)(v+2)] + 1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравнение (1) описывает широкий спектр физических явлений в системах, в которых малые колебания имеют акустический спектр, т. е.  $\omega(k) \rightarrow k$  при  $k \rightarrow 0$ . Однако оно обладает неприятной особенностью — однонаправленностью движения нелинейных волн (они

могут двигаться лишь в положительном направлении оси  $x$ , «правое» КдФ). Действительно, при получении КдФ симметричный оператор  $\partial_t^2 - \partial_x^2$  заменяется на  $(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x) \approx -2\partial_x(\partial_t + \partial_x)$ \*. От этого дефекта свободно уравнение Буссинеска (1872 г.):

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_x^3)\varphi - \partial_x^2\varphi^2 = 0, \quad (3)$$

которое с помощью упомянутой процедуры, однократного интегрирования и замены переменных легко привести к виду

$$(\partial_t + \partial_x + \partial_x^3)\varphi + \partial_x\varphi^2 = \text{const.}$$

Это уравнение при рассмотрении ограниченных в пространстве решений, т. е. решений с конечной энергией, совпадает с правым КдФ, поскольку  $\text{const} = 0$  на данном классе решений.

Уравнение (3) также является интегрируемым [5], и для него были получены Хиротой многосолитонные формулы [42], по которым проводился расчет взаимодействия солитонов.

Далее следует упомянуть нелинейное уравнение Шредингера

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \beta |\psi|^v \psi = 0 \quad (4)$$

или в более общем виде

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \Phi(|\psi|)\psi = 0. \quad (5)$$

Солитоноподобные решения (4) имеют вид, аналогичный (2):

$$\psi_s = A_0 \exp \left\{ i \left[ \left( \frac{v^2}{4} + \frac{2\beta}{v+2} A_0^v \right) t + \frac{v}{2} (x - vt) - \vartheta_0 \right] \right\} \text{sech}^{2/v} \left[ \frac{v}{2} A_0^{v/2} \sqrt{\frac{2\beta}{v+2}} (x - vt - x_0) \right]. \quad (6)$$

При  $v = 2$  уравнение (4) или S3 является вполне интегрируемым [6], а его уединенные волны огибающей — истинными солитонами. При других значениях  $v$  решения (4) уже лишь квазисолитоны. Уравнения (4) и (5) также описывают широкий класс физических явлений в системах, где спектр малых колебаний имеет щель  $\Delta$  и квадратичную по  $k$  дисперсию.

Подробности о физических приложениях этих уравнений вкуче с релятивистски-инвариантными уравнениями Клейна — Гордона

$$(\square \mp m^2)\psi + \beta\psi\Phi(|\psi|) = 0; \quad \square = \partial_t^2 - \partial_x^2 \quad (7)$$

и синус-Гордона

$$\square\varphi + \sin\varphi = 0 \quad (8)$$

читатель может найти в обзорах [1, 2, 7—11].

\* Аналогично легко можно написать уравнение для волны, движущихся влево, — «левое» КдФ.

В теории плазмы также встречается уравнение (5), в котором  $\Phi (|\psi|)$  подчиняется одному из следующих уравнений:

$$\square \Phi = \partial_x^2 (|\psi|^2) \quad (9)$$

(приближение Захарова 1972 г. [12]);

$$\Phi_t + \Phi_x + \beta (\Phi^2)_x + \alpha \Phi_{xxx} = -(|\psi|^2)_x \quad (10)$$

(приближение Нишикавы, Хойо, Мимы и Икези, 1974 г. [13]);

$$\square \Phi - \beta (\Phi^2)_{xx} - \alpha \Phi_{xxx} = (|\psi|^2)_{xx} \quad (11)$$

(приближение, полученное автором обзора в 1974 г. [14]).

Солитоноподобные решения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi_s &= A \exp \left\{ i \left( \frac{v}{2} x - \Omega t - \vartheta \right) \right\} \operatorname{sech} \left[ \frac{A\gamma}{\sqrt{2}} (x - vt - x_0) \right]; \\ \Phi &= -\gamma^2 |\psi_s|^2; \quad \gamma^{-2} = 1 - v^2; \quad \Omega = v^2/4 - \gamma^2 A^2/2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

для системы (5), (9) и

$$\left. \begin{aligned} \psi_s &= A \exp \left\{ i \left( \frac{v}{2} x - \Omega t - \vartheta \right) \right\} \operatorname{th} \xi \operatorname{sech} \xi; \\ \xi &= \sqrt{-\lambda} (x - vt - x_0); \\ \Phi_s &= 6\lambda \operatorname{sech}^2 \xi; \quad A^2 = 48\lambda^2 \varepsilon; \quad \Omega = v^2/4 + \lambda \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

для систем (5), (10) и (5), (11) при

$$\lambda = (-3/20 \varepsilon \gamma^2), \quad \beta = 3\alpha = \varepsilon.$$

Из (10) следует, что система (5), (9) хорошо описывает достаточно медленные солитоны  $v < 1$ . В области  $v \rightarrow 1$  следует использовать приближение (10) или (11).

Кроме упомянутых выше уравнений и их систем в нелинейной оптике часто возникает уравнение, кратное синус-Гордону:

$$\square \varphi = \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} \sin \left( \frac{m}{n} \varphi \right), \quad (14)$$

сводящееся к обычному SG-уравнению при  $n = 1$ .

Солитоноподобные решения этого уравнения численно подробно исследованы в [18], а при  $n = 2$  (так называемое DSG-уравнение) в [19, 20].

Приведем еще два уравнения, часто встречающиеся в литературе:

$$\varphi_t + \varphi_x + \varphi^v \varphi_x - \varphi_{xxt} = 0_x \quad (15)$$

при  $\nu = 1$ ; оно было предложено Перегрином для описания приливных волн [21] \*:

$$\varphi_s = \left\{ A \operatorname{sech} \left( \frac{Av}{\sqrt{2}} [(v+1)(v+2) + 2A^2]^{-1/2} (x - vt - x_0) \right) \right\}^{2/\nu};$$

$$\nu = 1 + 2A^2/(v+1)(v+2), \quad (16)$$

и уравнение Бенджамина — Оно [22, 23]

$$\varphi_t + 6\varphi\varphi_x + H\varphi_{xx} = 0, \quad (17)$$

где  $H$  — оператор Гильберта,

$$Hf(x) \equiv \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi,$$

используемое для описания внутренних волн в слоистых жидкостях. Как было показано в [17, 24], его решение:

$$\varphi_s = (2/3) \nu [1 + \nu^2 (x - vt)^2] \quad (18)$$

является истинным солитоном.

Некоторые разновидности перечисленных уравнений и уравнения, сводящиеся к ним, будут рассмотрены ниже.

В заключение отметим, что большое количество уравнений, обладающих солитонными (и квазисолитонными) решениями, возникает в классической и квантовой двухмерных  $(x, t)$ -теориях поля. В этих теориях поля инвариантны относительно группы Лоренца (или Пуанкаре), а также относительно некоторой группы внутренней симметрии (изотопической) и подчиняются различным коммутационным соотношениям.

Практически все результаты получены здесь с помощью аналитических методов исследования: спектрального преобразования (метод обратной задачи теории рассеяния), теоретико-полевых и теоретико-групповых методов, а также методов дифференциальной геометрии.

В этой области машинный эксперимент только начинает делать свои первые робкие шаги.

Динамика формирования и взаимодействия плоских солитонов. Наиболее хорошо и последовательно изучен этот вопрос в рамках вполне интегрируемых уравнений, где часто удается решить аналитически задачу Коши с помощью обратного метода.\*\* Отметим еще раз, что исследования в этом направлении были инициированы

\* Следует отметить, что в обзоре автора [2] вкралась досадная опечатка на с. 17: вместо ссылки на работу Перегринна дана ссылка на обзор Ли.

\*\* За последние годы появилось огромное количество работ (более шестисот), посвященных этому вопросу. Существуют также весьма обстоятельные обзоры [1, 4, 7, 25] и книга [15].



машинными экспериментами по проблеме Ферми — Паста — Улама и солитонам уравнений КдФ, синус-Гордона и S3. Напомним, что интегрируемым называют по аналогии с механикой уравнение, обладающее бесконечным набором (аддитивных) интегралов движения. Эти интегралы строятся из степеней полевой функции и ее производных и должны быть в инволюции. Первые результаты, полученные при исследовании вполне интегрируемых систем, привели к заключению, что в их рамках взаимодействие уединенных волн сводится лишь к сдвигу в положении и фазе, оставляя форму и скорость волн неизменными. Именно отсюда и возникло название солитон как устойчивый объект вроде частицы. Так было до тех пор, пока рассматривались поля с группой симметрии не выше  $U(1)$ . Включение в рассмотрение более высоких симметрий, например  $SU(2)$ , привело к открытию в 1976 г. весьма оригинальных объектов-солитонов, возвращающихся назад, получивших название бумерангов и солитонов, центр тяжести которых осциллирует около некоторого положения, «траппон» [26]. Наконец, в начале 1978 г. появилась работа, в которой было показано, что в рамках интегрируемой системы (модель главного кирального поля) на группе  $SU(N)$  возможен распад и взаимопревращение солитонов при  $N \geq 3$  [27]. Тем самым было показано, что первоначальное определение понятия солитон оказывается слишком узким даже на множестве интегрируемых систем. Заметим, что начиная с 1976 г. кроме известного уравнения синус-Гордона было открыто и исследовано несколько вполне интегрируемых теоретико-полевых моделей: к ним в частности относятся массивная модель Тирринга [28] (классическое спинорное поле с самодействием  $\gamma^{\mu\nu}\psi(\bar{\psi}\gamma_{\mu\nu}\psi)$ ), комплексное обобщение уравнения синус-Гордона [29] и некоторые другие [30].

Перейдем теперь к численным экспериментам по динамике солитонов. За исключением многосолитонных формул динамика образования солитонов из произвольных начальных пакетов даже в интегрируемых системах известна лишь асимптотически при  $t \rightarrow \infty$ , тем более в рамках возмущенных уравнений.

Вначале несколько слов о методах численного исследования. В обзорном докладе «Численные исследования солитонов» на Оксфордском симпозиуме по нелинейной (солитонной) структуре и динамике в конденсированном состоянии (июнь 1978 г.) [31] Эйблек отметил, что в области дифференциальных уравнений в частных производных численный анализ до сих пор почти столь же искусство, сколь и наука. Для любого данного уравнения вопрос о «наилучшем» численном методе является самым сложным. Это связано со множеством причин, в частности с требуемой точностью вычислений, ограничением времени и памяти ЭВМ (мощности), а также длины слова и т. п. Более того, весьма редко можно найти в литературе сравнение численных алгоритмов различных авторов и доскональное исследование каждого данного алгоритма. Особенно это касается нелинейных уравнений. Следовательно, требуется еще огромная

работа как по теоретическому исследованию применяемых методов, так и по анализу их практического применения. Ниже будем лишь кратко останавливаться на методах расчета.

Обычно используют два основных подхода, чтобы свести задачу к конечному числу параметров: приближение функций и приближение разностных схем.

В первом случае точное решение  $y(x, t)$  аппроксимируют с помощью приближенного выражения, определенного на конечном подпространстве, например:

$$y(x, t) \approx \bar{y}(x, t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) y_i(x), \quad (19)$$

здесь  $y_i(x)$  — базисные функции, определенным образом выбранные (подробнее см. [31] и цитированную там литературу).

Более часто используют второй подход при исследовании дифференциальных уравнений в частных производных, т. е. точное решение  $y(x, t)$  аппроксимируют множеством значений  $y_m^n$ , определенных в узлах прямоугольной сетки на плоскости  $x, t$  (или в кубе  $x, y, t$ ) с шагом  $h$  и  $\tau$  соответственно, т. е.  $x_m = hm, t_n = \tau n$ . При этом используют различные схемы счета для определения временных производных, явные и неявные. По такому методу счета существует целая наука (сопшемся здесь лишь на [32]). Тем не менее для исследования *нелинейных* дифференциальных уравнений в частных производных готовых рецептов не существует и в настоящее время. Заметим лишь, что качество счета иногда существенно зависит от вида аппроксимации нелинейного члена: берутся ли его значения в точке  $x_m$ , т. е.  $F(y_m^n)$ , в виде полусуммы в симметричных точках, т. е.  $F(1/2 [y_m^{n+1} + y_m^{n-1}])$  по  $x$  или по  $t$   $F(1/2 [y_m^{n+1} + y_m^{n-1}])$  и т. п. [34].

Подчеркнем в заключение, что все используемые методы должны удовлетворять условию устойчивости, т. е.  $|y(x_m, t_n) - y_m^n| \leq N$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это условие совместно с условием точности аппроксимации обычно накладывает ограничения на соотношение между шагами  $h$  и  $\tau$  и на их значения. Весьма перспективен также подход, в котором применяют разложение Фурье искомого решения по координате с последующим решением получающихся обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью известных разностных (leap — frog) схем. После обратного преобразования Фурье (обычно используют алгоритм так называемого *быстрого преобразования Фурье* [33]) получаем искомый результат. Упомянем здесь лишь три работы, в которых с успехом был применен этот метод [34—36]. Иногда используют некую модифицированную смесь этих подходов.

Одними из первых нелинейных уравнений, которые при численном исследовании проявили необычные свойства, были, как уже отмечалось выше, уравнения Кортевега — де Фриза, синус-Гордона и конечноразностный аналог уравнения Буссинеска (или нелинейной

струны) (ФПУ, 1955 г.):

$$d^2 y_m / dt^2 = f(y_{m+1} - y_m) - f(y_m - y_{m-1}), \quad (20)$$

где  $f(y) = y + \alpha y^2$  или  $f(y) = y + \beta y^3$  \*.

Как выяснилось, проблема ФПУ тесно связана с близостью рассматриваемой системы к интегрируемой, а значит, и к солитонам (см., например, [1]). Поэтому в дальнейшем ограничимся обсуждением свойств солитонов.

С точки зрения численного эксперимента динамика формирования солитонов и солитоноподобных решений (СПР) как в рамках уравнения КдФ, так и близких к нему уравнений (1) и (13) из одинаковых начальных условий  $\varphi_0$  практически одинакова. В зависимости от интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 dx$  образуется один, два и т. д. солитонов и некото-

рый осцилляторный хвост. Именно это свойство уравнений типа КдФ вместе с одинаковым видом дисперсии при  $k \rightarrow 0$  привело к мысли, что все они интегрируемы. В результате много усилий аналитического и вычислительного характера было напрасно потрачено, чтобы доказать этот факт. Отметим, что распад начального условия на солитоны является характерной особенностью любой квазиинтегрируемой системы.

При взаимодействии солитонов картина качественно меняется. Солитоны КдФ и модифицированного КдФ, являясь истинными, лишь претерпевают сдвиг в их положении [37], в то время как солитоны остальных КдФ-подобных уравнений, т. е. (1) при  $\nu \neq 1$  и 2 и (13) взаимодействуют неупруго (см. [35, 38]). Степень неупругости такого взаимодействия обычно мала, но растет с увеличением  $\nu$ , а при  $\nu = 4$  становится явной. Это очень хорошо прослеживается также на примере (13) при  $\nu = 1$  и 2. Уравнение

$$\varphi_t + \varphi_x + \varphi\varphi_x - \varphi_{xx} = 0, \quad (21)$$

которое иногда также называют РВВМ- или RLW-уравнением \*\*, по-видимому, одно из первых разрушило иллюзию интегрируемости. Разностная схема для него была исследована Эйлбеком и Макгиром [40] и Х. Абдуллоевым, И. Л. Боголюбским и автором [38].

Как известно, при численном интегрировании КдФ возникает довольно жесткое соотношение между шагами сетки в  $t$ - и  $x$ -направлении  $\tau \ll ch^3$ , точнее,  $\tau/h^3 \ll 1/(4 + h^2 |\varphi_0|)$  или  $\tau/h^3 \leq 1/|2 - h^2 \varphi_0|$  (подробно см. в [31]). Во всяком случае можно сказать, что выявить тонкие эффекты при численном интегрировании КдФ — задача не из легких. При исследовании RLW-уравнения (21) ситуация меняется к лучшему, а условие устойчивости разностных схем становится

\* Уравнение (20) можно свести при  $f(y) = y + \alpha y^2 + \beta y^3$  и переходе к континуальному аналогу  $h \rightarrow 0$  к уравнению КдФ или В $\varphi$  (см., например, [7]).

\*\* В первом случае по фамилиям авторов работ: Перегрин [21], Бенжамин, Бона и Махони [39], во втором оно соответствует английскому названию *регуляризованное длинноволновое уравнение* [31].

$\tau \leq h$  [38] \*. Тем не менее и в этом случае появляются свои особенности: так, после запуска в машину точного (аналитического) односолитонного решения

$$\varphi_s = A \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \sqrt{A/[2(2A+3)]} (x - [1 + (2/3)A]t - x_0) \right\} \quad (22)$$

происходит его слабое (на уровне долей процента) изменение — солитон «дышит» и даже как будто бы слабо излучает в течение короткого

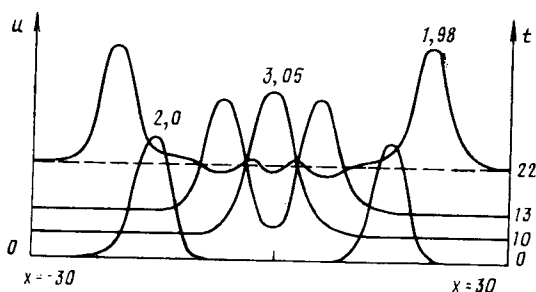


Рис. 1.

времени, после чего картина стабилизируется. В силу так и непонятого авторами [38] свойства RLW-уравнения пришлось изобрести довольно сложную вычислительную процедуру, чтобы выявить такой тонкий эффект, как неупругость взаимодействия солитонов. Здесь следует оговориться, что авторы работы [38] были ободрены результатами, полученными при аналогичной модификации Вq уравнения (6).

Как уже было отмечено выше, взаимодействие солитонов в рамках Вq численно исследовали лишь с помощью двухсолитонной формулы [42]. Непосредственные вычисления на основе Вq практически невозможны из-за неустойчивости линейного спектра  $\omega^2 = k^2(1 - k^2)$ . Это побудило нас модифицировать уравнение так, чтобы линейный спектр совпадал в пределе  $k \rightarrow 0$  со спектром Вq и в то же время был устойчив. Именно таким спектром обладают ионно-звуковые волны в плазме  $\omega^2 = k^2/(1 + k^2)$ , ему соответствует:

$$(\square - \partial_t^2 \partial_x^2) \varphi - \partial_x^2 \varphi^2 = 0,$$

которому было предложено название улучшенного уравнения Вq, т. е. IVq \*\*.

В результате численного эксперимента [44] было показано, что солитоны IVq взаимодействуют неупруго (рис. 1). В той же работе

\* Возможно, что с этим свойством связано и название уравнения. Это уравнение было использовано также с целью моделирования цунами [41].

\*\* Отметим, что оно также было известно Буссинеску [43].

обсуждался и вычислительный алгоритм. Несмотря на несомненную похожесть уравнений IBq и RLW степень неупругости при взаимодействии их солитонов существенно различна. Это связано с тем, что RLW-солитоны догоняют один другой, а IBq-солитоны могут испытывать лобовые соударения. Последние предпочитают исследовать численно в силу их симметрии (экономия памяти). В действительности, что было замечено еще в 1975 г. в [45, 46], встречные столкновения солитонов в рамках различных уравнений приводят к большей неупругости во взаимодействиях при тех же амплитудах солитонов,

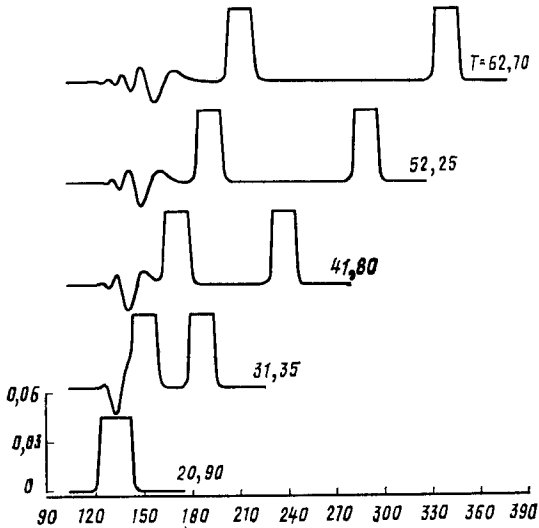


Рис. 2.

чем однонаправленные. Поэтому за эргодизацию в неинтегрируемой системе ответственны преимущественно встречные соударения (для ионно-звуковых волн в плазме [45], для ленгмюровских волн [46]).

В результате численных экспериментов по КдФ подобным уравнениям было обнаружено, что неупругость взаимодействия квазисолитонов увеличивается с ростом их амплитуды и степени нелинейности в уравнении  $\nu > 1$  (для уравнения (19) при  $\nu = 2,4$ , см., например, [35]). Бона, Причард и Скотт разработали весьма совершенный вычислительный алгоритм [47], который позволил им детально изучить динамику взаимодействия RLW-солитонов. Их результаты согласуются с полученными ранее [38, 48]. Типичная картина взаимодействия солитонов большой амплитуды приведена на рис. 2 [47].

Иногда рассматривают комплексные модификации КдФ (см., например, [35, 49] \*):

$$\psi_t + |\psi|^2 \psi_x + \psi_{xxx} = 0; \quad (23)$$

$$\psi_t + (|\psi|^2 \psi)_x + \psi_{xxx} = 0. \quad (24)$$

Первое из этих уравнений интегрируемо, что было показано Хиротой в 1972 г. с помощью обратного метода [51]. Второе, как это было проиллюстрировано в [35, 49], неинтегрируемо, а распад начального условия и взаимодействие квазисолитонов носят довольно сложный неупругий характер.

Упомянем еще одно КдФ-подобное уравнение, которое обычно называют уравнением Бенжамина — Оно (17):

$$\varphi_t + 6\varphi\varphi_x + \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\xi\xi}}{\xi - x} d\xi = 0$$

и используют для описания волн в слоистой жидкости (внутренних волн) [22]. Численные эксперименты Мейсса и Перейры [52] указывали на солитонный характер поведения бегущих волн («лоренцианов») вида

$$\varphi_s = (2/3) v / \{1 + [v(x - vt)]^2\}$$

в столкновениях и при распаде начального пакета (многосолитонные решения были найдены Джозефом [53]).\*\*

Численные исследования солитонных явлений в рамках нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом были впервые проделаны Яджимой и Оутой в 1971 г. [54]. Они обнаружили, что уединенные волны огибающей уравнения Шредингера с кубической нелинейностью S3 упруго взаимодействуют друг с другом. Этот факт был объяснен В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [6, 55], которые показали, что S3 описывает интегрируемую систему, а решения (6) при  $v = 2$  являются истинными солитонами огибающей. Здесь отметим лишь, что время формирования S3-солитона (или солитонов) из начального пакета существенно зависит от вида пакета и может быть очень большим, если в процессе распада начального условия образуются солитоны достаточно малой амплитуды. В одном из первых экспериментов [56] так и не удалось наблюдать формирование солитона из некоторого начального пакета гауссовой формы. Возможное объяснение этого факта (и его отличие от КдФ-подобных уравнений)

\* Подобного вида уравнения возникают, например, в теории плазмы [50].

\*\* Полностью задача была решена в [24], где показана интегрируемость (17) как предельного случая «нелинейного промежуточного длинноволнового уравнения».

дано в [2]. На рис. 3, а приведена зависимость максимальной амплитуды пакета  $\psi_{\text{макс}}$  от времени.

Тот факт, что начальный пакет столь длительное время не распадается на солитоны, можно связать с образованием из него связанного состояния солитонов — биона (более подробно см. ниже).

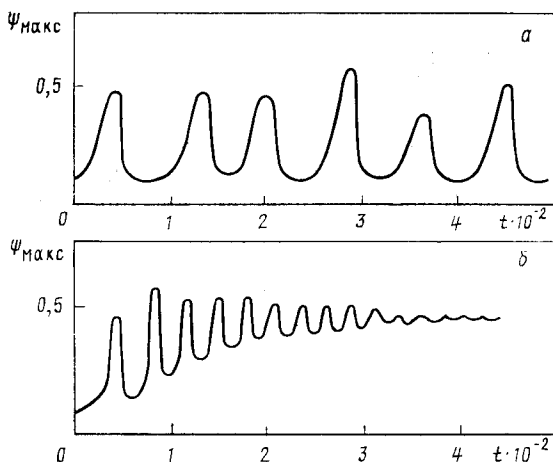


Рис. 3.

Решение начальной задачи, т. е. исследование распада различных начальных пакетов в рамках уравнения S3 с помощью метода ОЗТР, а также численного эксперимента, детально описано Сатсумой и Яджиной [57].

Для дальнейшего рассмотрения введем некоторые дополнительные понятия, которые хорошо известны из классической теории поля, а в применении к солитонным явлениям подробно описаны в [2]. Поэтому здесь лишь кратко просуммируем их:

1) подавляющее большинство уравнений, допускающих солитонные или солитоноподобные решения, можно получить как решение некоторой экстремальной задачи;

2) это означает, в силу теоремы Нетер, что симметриям лагранжиана будут соответствовать некоторые законы сохранения. В частности, законы сохранения «числа частиц» (заряда), энергии, импульса, момента поля и т. п.

Вернемся к нелинейному уравнению Шредингера. Его применяют в различных областях физики. Отметим здесь кроме широко известных приложений в физике плазмы и нелинейной оптике также теорию волн на глубокой воде, волны плотности в спиральных галактиках, одномерные спиновые системы, а также теорию экситонов в одномерных молекулярных цепочках и биополимерах. Вопросы получения:

уравнений Шредингера, пределы их применения и т. п. можно найти в [58—60].

Наиболее полно нелинейное уравнение Шредингера было исследовано (в том числе численно) в применении к описанию ленгмюровских волн и турбулентности в плазме. Поэтому кратко остановимся здесь на исследовании именно ленгмюровских солитонов (в других областях физики, где встречаются подобного типа уравнения, часто достаточно изменить лишь терминологию и обозначения).

Итак, S3-уравнение:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \alpha |\psi|^2 \psi = 0 \quad (25)$$

имеет счетный набор интегралов движения и является вполне интегрируемым. В теории ленгмюровской турбулентности оно возникает как «квазистатический предел» в рамках системы Захарова ( $\alpha > 0$ ):

$$i\psi_t + \psi_{xx} - \Phi\psi = 0; \quad (26)$$

$$\square\Phi = \partial_x^2 |\psi|^2 \quad (27)$$

при  $\partial^2\Phi \rightarrow 0$  (здесь  $\psi$  — комплексная амплитуда ленгмюровского ВЧ-поля;  $\Phi$  — НЧ-вариация плотности плазмы).

Начальная задача в рамках этой системы, так же как и взаимодействие двух встречных солитонов, впервые была исследована в [56]. В численных экспериментах было обнаружено, что одинаковые начальные пакеты ведут себя совершенно различно в рамках S3-уравнения и системы (26) и (27). На рис. 3, а и б для сравнения приведены результаты такого счета: рис. 3, а соответствует динамике пакета S3-уравнения, рис. 3, б [61] — системе Захарова. Во втором случае процесс формирования квазисолитона происходит достаточно быстро, при этом излишек энергии и импульса уносят волны плотности  $\Phi$ . Подобная ситуация имеет место и при взаимодействии квазисолитонов. Квазисолитоны системы (26) и (27) показывают богатую картину взаимодействий между собой и со звуковыми импульсами различной формы. Весьма подробно эти эффекты были изучены в [46, 61, 34].

В [46, 61] численно моделировали элементарные акты взаимодействия солитонов и звуковых импульсов в рамках системы (26) и (27). На основе чего в [46] было написано приближенное кинетическое уравнение для солитонов и получено его решение, описывающее распределение солитонов по их ширине \*. Из результатов работы [61] следует также, что при данной амплитуде сталкивающихся солитонов степень неупругости их взаимодействия тем меньше, чем больше их относительная скорость  $\Delta v$ . При  $\Delta v \rightarrow 2$  ( $\Delta v = v_1 - v_2$ ,  $v_1 = -v_2 \rightarrow 1$ ) степень неупругости становится пренебрежимо малой. Этот результат подсказал двум японским теоретикам Яджиме и Ойкаве мысль, что околосвуковая система (26) и (27) может быть вполне

\* Отметим, что в этих работах не исследовали влияние фазовых соотношений на взаимодействие солитонов.



интегрируемой, что они и доказали блестяще в [63]. Для этого необходимо от уравнения (27) перейти к его правому или левому однонаправленному варианту, т. е. сделать замену  $\square \rightarrow -2 \frac{\partial}{\partial x} (\partial_t + \partial_x)$  и проинтегрировать по  $x$ . Положив в силу солитонных условий на бесконечности константу интегрирования равной нулю, получим

$$(\partial_t + \partial_x) \Phi = -\partial_x |\psi|^2. \quad (28)$$

Система (26) и (28) оказалась интегрируемой [63]. Таким образом, здесь мы сталкиваемся с весьма интересным фактом: некоторая система при изменении физического параметра (в рассматриваемом случае скорости солитона) может трансформироваться от сильно неинтегрируемой (при малых  $v$ ) до близкой к интегрируемой ( $v \rightarrow 1$ ), так что с помощью весьма простого приближения можно получить ее интегрируемый аналог.\* Нечто подобное увидим также для неодномерных солитонов. При вычислениях в рамках системы (26) и (27) контролировалось сохранение величин:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx; \\ S_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \{i(\psi\psi_x^* - \psi^*\psi_x) + 2\Phi u\} dx; \\ S_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |\psi_x|^2 + \Phi |\psi|^2 + \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{1}{2} u^2 \right\} dx; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\Phi_t + u_x = 0, \quad (30)$$

которые представляют собой соответственно число частиц, импульс и энергию системы. Согласно высказанному в [64] предположению для этой системы существует лишь  $N = n - 2 = 1$  точное солитонное решение ( $n$  — число законов сохранения).

В [34] проведен подробный и последовательный анализ солитонных явлений в применении к теории плазмы: в рамках системы (26) и (27), ее модификации с учетом затухания Ландау ленгмюровских и ионно-звуковых волн, а также в рамках модели частиц конечного размера. Проведены сравнения результатов при различных параметрах плазмы, амплитуды и скорости солитонов.

Детали сравнения различных кодов вычислений можно найти, например, в оригинальной работе [66]. Отметим здесь также, что большая работа по численному исследованию ленгмюровской турбулентности в плазме при наличии поля накачки или электромагнит-

\* Подчеркнем, что первоначальная система (26) и (27) остается неинтегрируемой также и в области  $v \rightarrow 1$ .

ного поля была проделана калифорнийскими группами (см., например, [67]).

Чтобы закончить со «шредингеровскими» квазисолитонами, отметим здесь весьма интересный и в каком-то смысле парадоксальный

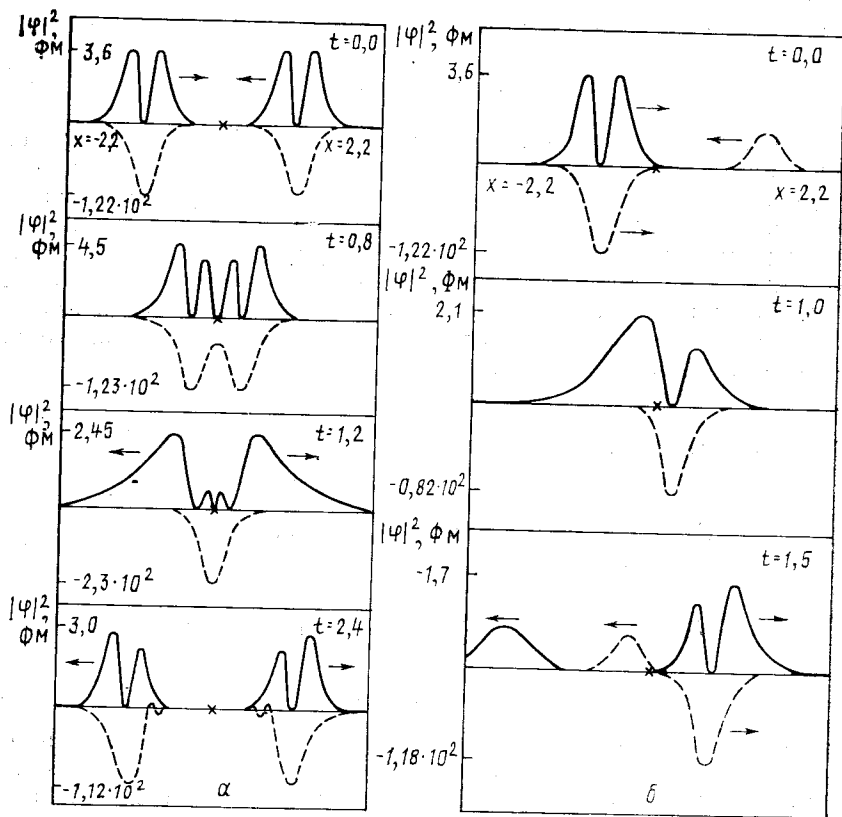


Рис. 4.

результат. Как уже известно, околосвучковые солитоны при  $(1 - v^2) \rightarrow \rightarrow m_i/m_i$  должны описываться системой (5), (10) или (11).

В [68] была предпринята попытка исследовать взаимодействие двух встречных двугорбых солитонов в рамках системы уравнений Шредингера и IVq:

$$i\psi_t + \psi_{xx} - \psi\Phi = 0; \quad \left( \square - \frac{\varepsilon}{3} \partial_x^2 \partial_t^2 \right) \Phi - \varepsilon \partial_x^2 (\Phi^2) = \partial_x^2 (|\psi|^2).$$

Из результатов, приведенных на рис. 4, видно, что в отличие от солитонов системы Захарова двугорбые околосвучковые солитоны

сильно взаимодействуют как между собой, так и со звуковым импульсом.

Уравнение  $IVq$  не является интегрируемым, поэтому весьма интересно было исследовать однонаправленное взаимодействие солитонов в рамках системы Нишикавы, Хойо, Мимы и Икези, (10) и (5). Без членов  $\beta (\Phi^2)_x$  и  $\alpha \Phi_{xxx}$  эта система не только переходит в интегрируемую систему Яджимы и Ойкавы, но и уравнение (10), как и (28) без правой части, интегрируемо. Является ли система НХМИ, состоящая из двух связанных интегрируемых уравнений, интегрируемой? Результаты работы [68] дают как будто разочаровывающий ответ на этот вопрос, тем не менее окончательный ответ еще не получен.

Если в уравнении (20) функцию  $f(y_n)$  подставить в виде

$$f(y_n) = \exp y_n, \quad (31)$$

то приходим к интегрируемой системе — цепочке Тоды [69]. В этой же работе показано, что система

$$\frac{d}{dt} y_n = y_n (y_{n+1} - y_{n-1}) \quad (32)$$

также интегрируема.

Системы вида (32) при определенных приближениях возникают при изучении структуры спектров ленгмюровских колебаний в слаботурбулентной плазме, взаимодействия популяций в биологии (фидер — итер-приближение), индуцированного комптоновского рассеяния и многих других индуцированных эффектов.

Уравнение (32) обычно получается из интегро-дифференциального уравнения вида

$$\partial_t y(x, t) = y(x, t) \int_0^{\infty} dx' W(x, x') y(x', t), \quad (33)$$

когда ядро  $W(x, x') = -W(x', x)$ , пропорциональное плотности вероятности перехода, имеет резонансные знаменатели, соответствующие некоторым процессам распада. Так, для ленгмюровских спектров это процессы  $l \rightarrow l + s$ , для фотонов  $t \rightarrow t + l$  или  $t \rightarrow t + s$  и т. д. При этом ядро  $W(x, x')$  вырождается в  $W(x, x') = W_0 (\delta(x - x' + \kappa) - \delta(x - x' - \kappa))$ , а уравнение (33) в (32).

Если распадные процессы запрещены законами сохранения  $\omega_1 + \omega_2 \neq \omega_3$ ,  $k_1 + k_2 = k_3$ , то ядро  $W(x, x')$  для индуцированного рассеяния ленгмюровских и электромагнитных волн на частицах плазмы принимает форму:

$$W(x, x') = \frac{d}{dx} G(x - x') \equiv \frac{W_0}{\sqrt{\pi} \Delta} \frac{\partial}{\partial x} \exp \left[ -\frac{(x - x')^2}{\Delta^2} \right] \quad (34)$$

(см., например, [71, 72], там же можно найти и выражения  $W_0$ ,  $\Delta$  и  $x$  через параметры плазмы).

В [69] показано, что уравнение (32) с граничными условиями  $y_n \rightarrow \text{const}$ ,  $n \rightarrow \pm\infty$ , имеет своим континуальным аналогом уравнение КдФ. Поэтому распад начального условия  $y_n(0)$  будет происходить по известной схеме КдФ.

С помощью численного эксперимента Монте с соавторами показали, что уравнение (33) с ядром (34) описывает систему, близкую к интегрируемой (КдФ?).

В [72] была исследована задача о распаде начального условия (спектра)  $y(x, 0)$  и было показано, что из «узкого» пакета  $\delta x \leq \Delta$ , проходя через стадию спутниковой трансформации, образуется один квазисолитон.\*

«Широкий» начальный спектр ( $\delta x > \Delta$ ) распадается на набор квазисолитонов, расположенных в соответствии с их амплитудой (или, что то же, скоростью). В работе [74] было показано, что найденные раньше решения действительно являются квазисолитонами, как это было для уравнения RLW.

Отметим здесь, что взаимодействие сблившихся солитонов не слишком различных амплитуд напоминает спутниковую перекачку, т. е. они остаются хорошо разделенными, что похоже на взаимодействие

КдФ-солитонов. При тройном взаимодействии квазисолитонов отклонение от интегрируемости весьма существенно: рождается четвертый солитон малой амплитуды, этот процесс представлен на рис. 5 [74]. Похожие эксперименты были проведены другой французской группой, в которых исследовалось взаимодействие квазисолитонов в рамках возмущенных вариантов уравнений (32):

$$\frac{d}{dt} y_n = y_n (y_{n+1} - y_{n-1}) + \mu (y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n) \quad [75]$$

и КдФ (уравнение КдФ — Бюргерса)

$$y_t + 6(y^2)_x + y_{xxx} = \mu y_{xx} \quad [76].$$

В этих случаях, как и следовало ожидать, отклонение от интегрируемости заключается в появлении осцилляторных хвостов в про-

\* Заметим, что для сферически-симметричных пакетов этот результат был ранее получен в [73], однако авторы не придали ему должного значения.

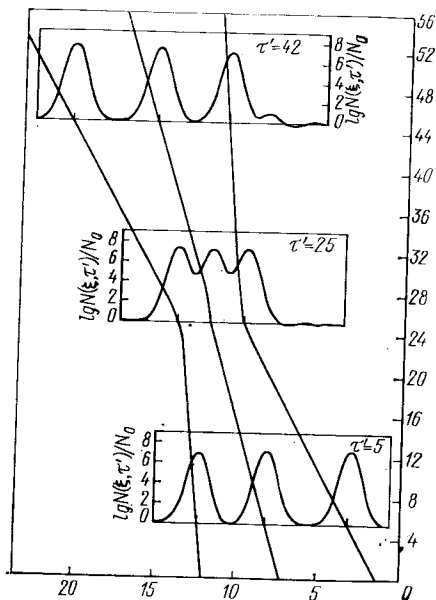


Рис. 5.

цессе эволюции квазисолитона и при их взаимодействии и показано на рис. 6 и 7 (см. раздел о структурной устойчивости солитонов).

Формирование и взаимодействие плоских солитонов в рамках нелинейных релятивистски-инвариантных уравнений (РИУ) были

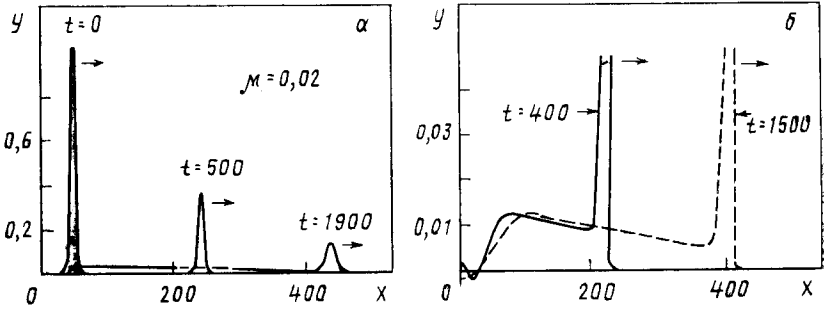


Рис. 6.

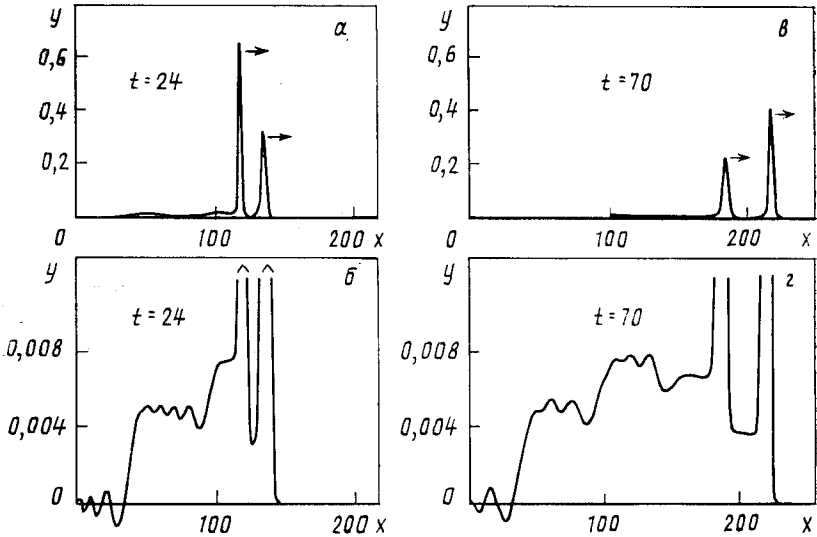


Рис. 7.

изучены в [20, 78—80]. Обсуждение возможных разностных схем для исследования РИУ можно найти в [31].

Обычно исследуемое уравнение имеет вид:

$$\square y = F(y), \quad (35)$$

а  $F(y)$  или некоторый полином [20, 79, 80], или ряд синусов [18, 19, 20, 78]. Интересно отметить здесь, что уравнение (35) обладает

бесконечным набором законов сохранения, если

$$\frac{d^2}{dy^2} F(y) = F(y)$$

(см., например, [81]) или  $F(y) = \exp y + \exp(-2y)$  [70].

В отличие от нерелятивистских уравнений, рассмотренных выше, уравнения вида (35) имеют, кроме бэлл-солитонов, также и кинк-солитоны, т. е. решения, представляющие переход от одного асимптотического состояния к другому, не равному первому\*.

Весьма широкие физические приложения так называемого уравнения синус-Гордона хорошо известны. Им посвящено большое количество оригинальных работ и несколько обзоров. Упомянем здесь только два из них [10, 82]. Именно в рамках этого уравнения получило свое подтверждение существование квазисолитонов в реальных физических системах 100 лет спустя после наблюдений Скотта Рассела: имеется в виду самонаведенная прозрачность SIT при распространении ультракоротких лазерных импульсов через двухуровневую систему\*\*, «квантование» магнитного потока в джозефсоновской линии и т. п.

Поскольку SG-уравнение  $-\square y = \sin y$  вполне интегрируемо [83], не будем подробно останавливаться здесь на исследовании свойств его решений. Упомянем лишь, что, как для КдФ и S3, произвольный

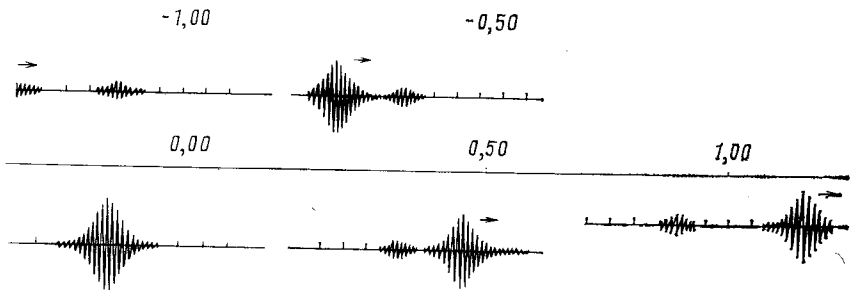


Рис. 8.

начальный импульс в рамках SG разбивается на набор солитонов. Часто бывает удобнее следить не за самой функцией  $y(x, t)$ , а за ее производной  $y_x$  или  $y_t$ . Существуют прекрасные фильмы, снятые английской солитонной группой, в которых демонстрируются различные виды взаимодействий солитонов и квазисолитонов, а также

\* Кинкобразные решения могут появляться также в рамках S3-уравнения (25) при  $\alpha < 0$

\*\* Отметим, что SIT, как и солитоны КдФ и ФПУ, была открыта с помощью анализа численных решений уравнений, описывающих распространение оптических импульсов» (Лэмб в обзоре [62], который можно рекомендовать для начинающих изучать это явление).

их связанных состояний (бионов) между собой (часть из которых была показана на солитонных симпозиумах в 1977 и 1979 гг. в Польше и в 1980 г. в Греции—Крит). На рис. 8 [31] представлено взаимодействие двух бионов.

Большая вычислительная работа была предпринята манчестерской группой по исследованию решений кратных SG-уравнений. В частности, уравнение DSG (двойной SG):

$$\square y = \mp[\sin y + (1/2) \lambda \sin y/2],$$

возникающее при исследовании SIT в системах с двойным вырождением, было изучено в [18, 20, 84] \*. Авторам удалось показать, что DSG описывает систему, весьма близкую к интегрируемой: начальные импульсы распадаются при определенных условиях на набор солитонов, взаимодействие которых практически упруго при достаточно больших скоростях  $v > 0,4$ . При  $v < 0,4$  неупругость становится существенной, а при  $v \approx 0,1$  образуется связанное состояние кинк — антикинк (бион) [20].

Таким образом, в этих работах, несмотря на существовавшие пессимистические прогнозы, было показано, что в рамках краткого SG также существуют квазисолитонные решения, распад на них начального импульса и, как следствие, SIT. Подчеркнем, что здесь опять встречаемся с синергетическим использованием ЭВМ в теоретических исследованиях, что приводит к качественно новым выводам.

Уравнение (35), в котором

$$F(y) = \begin{cases} -y + y^3 (\varphi_+^4); & (36) \\ y - y^3 (\varphi_+^4), & (37) \end{cases}$$

или так называемая *фи-четыре теория* ( $\varphi^4$ ), было исследовано достаточно подробно как для действительных, так и для комплексных функций в [2, 20, 79, 80]. Уравнения (35) с правой частью (36) и (37) получаются из лагранжиана, в котором потенциал  $U(y)$  является полиномом четвертой степени.

Нами были исследованы квазисолитонные решения также в более общей постановке, когда

$$U(y) \propto \sum_{n=1}^m C_n y^n \quad (\text{см. [2, с. 50]}).$$

В этих работах со всей очевидностью была выявлена неупругость взаимодействия  $\varphi^4$  квазисолитонов, что приводит к возможности образования их долгоживущих связанных состояний.

\* В [18] было также исследовано разбиение на квазисолитоны начального импульса в рамках TSG-уравнения (тройной SG).

Уравнение  $\varphi^4$ -теории в качестве квазисолитонных решений имеет кинки и антикинки

$$y(x, t) = \pm \operatorname{th} \frac{\gamma}{2} (x - vt - x_0), \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2},$$

взаимодействие между которыми носит характер притяжения.

Уравнение  $\varphi_+^4$ -теории, так же как S3-уравнение, может иметь в качестве решений  $\operatorname{sech}$  и  $\operatorname{th}$  квазисолитоны;  $\operatorname{sech}$ -решения устойчивы лишь для комплексной функции  $y = a(x) \exp(-i\omega t)$ , когда  $\omega > > 2^{-1/2}$ . Неупругость взаимодействия этих квазисолитонов тем меньше, чем больше их относительная скорость.

В заключение отметим, что при машинном исследовании  $\varphi_+^4$ -квазисолитонов, по-видимому, впервые столкнулись с их неустойчивостью.

**Связанные состояния солитонов.** Весьма интересные объекты, возникающие в теории солитонов, это их связанные состояния. Если один солитон или квазисолитон можно рассматривать как некоторое связанное состояние, бесконечного (в классике) числа конститюентов [2], то естественно ожидать, что сами солитоны могут образовывать связанные состояния.

По-видимому, впервые такие состояния были описаны в [77], где аналитически было найдено бисолитонное решение (кинк — антикинк) для SG-уравнения (ниже, как и в [2], будем, следуя авторам [82], называть такие решения бионами). Это решение имеет вид:

$$\varphi_b = 4 \arctg \{ \sqrt{1/\omega^2 - 1} \operatorname{sech} \zeta' \sin(\zeta'' + \delta) \}, \quad (38)$$

где  $\zeta' = \gamma \sqrt{1 - \omega^2} (x - vt - x_0)$ ;  $\zeta'' = \gamma \omega (vx - t)$ ;  $\gamma^{-2} = 1 - v^2$ .

В собственной системе ( $v = 0$ ) оно представляет собой уединенный осциллирующий горб. В лабораторной системе, где  $v \neq 0$ , появляется ВЧ-заполнение горба (аналогичное солитонам S3-уравнения), связанное с появлением зависимости от  $x$  под знаком синуса. Прежде чем подробно изучить структуру и динамику связанных состояний солитонов в рамках нелинейного уравнения Клейна — Гордона

$$\square \varphi = F(\varphi), \quad (39)$$

скажем несколько слов о возможности таких решений в КдФ-подобных моделях. До сих пор, как известно автору, связанных состояний в КдФ-подобных моделях обнаружено не было. Отсутствие их для интегрируемых КдФ- и МКдФ-уравнений следует непосредственно из решения обратной задачи рассеяния, поскольку каждому дискретному уровню соответствует лишь один солитон. Что касается неинтегрируемых КдФ-подобных уравнений, то проведенные до сих пор численные исследования по взаимодействию солитонов не дали положительных результатов. Тем не менее вопрос о существовании связанных состояний в рамках неинтегрируемых КдФ-подобных уравне-



ний можно считать открытым, особенно для комплексных функций и больших нелинейностей  $v$ .

Бионное решение (38) обладает двумя характерными особенностями, отличающими его от подобных решений в неинтегрируемых системах и в пространстве более чем одного измерения. Во-первых, состояние, описываемое им, не может быть получено как результат взаимодействия кинков и антикинков, так как в силу интегрируемости SG при взаимодействии солитонов не возникает излучения. Во-вторых, благодаря отсутствию излучения время жизни биона (38) бесконечно. Наконец, взаимодействие SG-бионов является упругим, что весьма наглядно демонстрируется на рис. 8 [31].

В последнее время появились работы, где обращается внимание на существенное значение, которое могут играть решения бионного типа в различных одномерных физических моделях конденсированного состояния. Упомянем здесь лишь работы [11, 85—87]. Необходимо подчеркнуть существенную разницу между кинк-солитонными решениями и их связанными состояниями: бионы (и, как увидим ниже, квазибионы — пульсоны) аналогично солитонам огибающей имеют внутреннюю осцилляторную («вращательную») степень свободы, и, как следствие, их масса покоя  $M_b = 2M\sqrt{1 - \omega^2}$  в классическом пределе непрерывно меняется от нуля до  $2M$  в зависимости от  $\omega$ , что напоминает солитоны S3. (Здесь  $M = 8$  — масса покоя кинка или антикинка в безразмерных переменных.) Аналогия между SG-бионами и солитонами огибающей S3-уравнения оказывается гораздо глубже, чем это может показаться с первого взгляда, что отмечалось в [86а, 86в]. Действительно, при малых амплитудах  $\sqrt{1/\omega^2 - 1} \ll 1$ ,  $\arctg x \approx x$  и (38) переходит с точностью 0 ( $x$ ) в соответствующие выражения для КГ-солитона огибающей  $\varphi_b \approx 2\sqrt{2} \operatorname{Im} \psi_{\text{КГ}}$ , либо  $\operatorname{Re} \psi_{\text{КГ}}$  в зависимости от фазы  $\delta$ , а при  $v \ll 1$  получим соответствующим образом трансформированный S3-солитон, т. е.  $\varphi_b \approx 2\sqrt{2} \operatorname{Re} \psi_{S3} \exp(-it)$ .

Отмеченная особенность бионов приводит к тому, что (как и в системах, описываемых уравнениями Шредингера и Клейна-Гордона) при воздействии внешнего поля на систему возможен кумулятивный эффект накопления энергии в бионных возбуждениях, даже когда амплитуда внешнего поля меньше порога по рождению пары кинк — антикинк,  $E \ll 2M$  (для солитонов огибающей см. [46]). В результате обнаружение долгоживущих связанных состояний солитонов и исследование их свойств — один из важнейших разделов солитонной теории (особенно это касается неодномерных моделей, см. ниже). Для неинтегрируемых моделей с полиномиальными или логарифмическими лагранжианами (в частности,  $\varphi^4$ -теория), а также кратного SG-уравнения точные аналитические решения, описывающие связанные состояния, получены не были. Здесь, как и при изучении динамики взаимодействия солитонов, основным является численный эксперимент.

Указания на возможность существования связанных состояний содержались уже в ранних работах по численному исследованию динамики начальных пакетов в рамках S3-уравнения. В [56, 57] в результате эволюции начального пакета было получено решение, весьма напоминающее связанное состояние с точки зрения современных концепций. Возможно, именно этим определяется столь длительное время существования нелинейных колебаний амплитуды в центре пакета (см. рис. 3, а) [56]. В [54] также был изучен распад начального гауссова пакета, при этом прослеживалось образование трех горбов, однако, как отмечали Яджима и Оути, время счета было недостаточным для однозначного ответа на вопрос, образуются ли из них солитоны или система какое-то время будет находиться в квазипериодическом режиме. В работе [57] было исследовано образование S3-биона:

$$\psi_b = 4 \exp(-i t/2) [\operatorname{ch} 3x + 3 \operatorname{ch} x \exp(-4i t)] / (\operatorname{ch} 4x + 4 \operatorname{ch} 2x + 3 \cos 4t)$$

из начального пакета  $\psi_0 = 2 \operatorname{sech} x$ . К сожалению, авторы представили лишь начальную стадию эволюции пакета.

С полной очевидностью бион был обнаружен в численных экспериментах Кудрявцева по исследованию взаимодействия кинков в модели Хиггса ( $\varphi^4$ -теория) [79]. В дальнейшем эти результаты были подтверждены в [2, 20, 80].

Остановимся на них подробнее. В численном эксперименте в [79] изучалось взаимодействие кинков и антикинков для уравнения

$$(\square - 1 + \varphi^2) \varphi = 0. \quad (40)$$

Начальное состояние, описывающее движущиеся навстречу из бесконечностей кинк и антикинк:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \operatorname{th} \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - x_0) - \operatorname{th} \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x + x_0) - 1; \\ \varphi_t(x, 0) &= -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} v \left[ \operatorname{sech}^2 \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - x_0) + \operatorname{sech}^2 \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x + x_0) \right] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

с экспоненциальной точностью [ $\propto \exp(-4x_0)$ ] приводит к решению уравнения (40) в виде

$$\varphi = \operatorname{th} \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - vt - x_0) - \operatorname{th} \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x + vt + x_0) - 1.$$

Вставляя его в компьютер, получим следующую картину взаимодействия \*. Оказалось, что окончательное состояние зависит от скорости  $v$  сталкивающихся квазисолитонов. Если скорость  $v$  больше некоторого критического значения  $v_{кр}$ , то кинк и антикинк отталки-

\* Ниже суммируются результаты всех цитированных только что работ.

ваются друг от друга, теряя некоторую долю кинетической энергии на излучение. Причем эта доля тем меньше, чем больше  $v > v_{кр}$ , так что в релятивистской области  $v \rightarrow 1$  соударение становится квазиупругим. При  $v < v_{кр}$  картина взаимодействия качественно меняется\*, и в результате образуется осциллирующее во времени решение, описывающее связанное состояние кинка и антикинка. При этом дефект массы, равный  $\Delta M = 2E_k - M_b$ , излучается в виде линейных волн на выделенном начальными условиями вакууме. Энергия кинка или антикинка  $E_k$  может оцениваться по стандартной формуле:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \dot{\varphi}_t^2 + \dot{\varphi}_x^2 + \frac{1}{2} (\varphi^2 - 1)^2 \right] dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \gamma \equiv M_k \gamma,$$

а масса образовавшегося биона  $M_b$  меньше масс двух кинков  $2M_k$ . В результате численных экспериментов получаем  $v_{кр}$  порядка  $0,2 \pm \pm 0,01$  [80]. После короткой релаксации колебания поля  $\varphi(0, t)$  в бионе приобретают исключительную регулярность, удивительным образом напоминающая график зависимости амплитуды  $\psi(0, t)$  в эксперименте по S3 (см. рис. 3, а). В отличие от S3 уравнение (40) неинтегрируемо, поэтому образовавшийся в результате столкновения кинков бион продолжает излучать волны малой амплитуды, теряя свою энергию. Время жизни биона большой амплитуды оказывается весьма значительным:  $T \approx 2 \cdot 10^3 / \omega$  [80], увеличиваясь с ее уменьшением.

Эти результаты указывали на то, что наличие связанных состояний не является привилегией интегрируемых S3- и SG-уравнений, а они могут образовываться при взаимодействии квазисолитонов и в рамках других уравнений.

Можно предположить, что системы, близкие к интегрируемым, должны обладать решениями, описывающими долгоживущие связанные состояния. Это предположение было также проверено в численных экспериментах. В [80] было обнаружено связанное состояние двух кинков и одного антикинка для уравнения (40), которое было названо *тритон*, а в [20] был обнаружен бион в рамках DSG-уравнения ( $v_{кр} \approx 0,1$ ). Пульсации поля в тритоне вполне регулярны и сопровождаются значительным излучением, так что его время жизни меньше бионного и порядка сотен периодов колебаний на основной частоте, декремент затухания по энергии  $\delta_T \approx (3 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$ . Наконец, заметим, что тритон образуется в результате тройного соударения кинков, поэтому вероятность его появления значительно ниже бионной и соответственно меньше вклад таких состояний в различные физические процессы. Это нельзя сказать о бионных состояниях, вклад которых может оказаться определяющим при рассмотрении

\* В работе [20] обнаружена некая малая «резонансная» область  $\Delta v$  вблизи  $v \approx 0,3 > v_{кр} \approx 0,2$ , в которой также образуются связанные состояния. Этот непонятный до сих пор эффект должен приводить к появлению короткоживущих бионов, распадающихся на кинки и антикинки («резонансы»).

«идеального газа» кинков низкой температуры  $T_k < T_{pt} = M_k v_{кр}^2 = (2\sqrt{2/3}) \cdot 0,2^2 = 0,04$  для  $\varphi^4$ -теории. Температуру  $T_{pt}$  можно рассматривать как точку Кюри для фазового перехода, происходящего с изменением топологии. Этот переход можно также интерпретировать как переход от газа «заряженных» частиц — кинков (и антикинков) к газу «нейтральных диполей» — бионов\*.

В связи с этим весьма существенным становится изучение структуры и динамики бионов, вопросов их образования, устойчивости и взаимодействий в рамках различных моделей. Здесь особенно интересным может быть факт образования устойчивых, т. е. долгоживущих, связанных состояний из неустойчивых квазисолитонов. Первые указания на такую возможность уже имеются.

**Устойчивость солитонов.** Прежде всего определим, что будем понимать под устойчивостью тех или иных солитоноподобных решений. Такие решения, как уже говорилось выше, описывают экстремальные состояния некоторой нелинейной системы. Можно говорить о двух типах устойчивости рассматриваемой системы: 1) по отношению к возмущению начальных данных, 2) по отношению к возмущению эволюционного уравнения, которому подчиняется поведение системы (структурная устойчивость).

В первом случае вопрос исследован достаточно хорошо. Существуют различные методы и подходы линейные и нелинейные. В линейном приближении вопрос об устойчивости сводится обычно к изучению спектра собственных значений линеаризованного эволюционного уравнения, в нелинейном — к исследованию неравенств Ляпунова (см., например, [1, 2, 89]).

В последние годы появилось много работ, в которых так или иначе исследуется структурная устойчивость в рамках различных эволюционных уравнений для различных видов возмущений. Были предприняты попытки построения некоторой общей теории возмущения солитонов с помощью методов функций Грина и спектрального преобразования, т. е. перехода от конфигурационного пространства  $(x, t)$  в пространство данных рассеяния, на основе хорошо известного двухвременного формализма [90—96]. Однако разработанная методика годится лишь для довольно ограниченного класса функционалов возмущения [59]. Несмотря на вполне впечатляющие результаты, полученные в этом направлении, исследования нельзя считать законченными, особенно по структурной устойчивости систем, близких к интегрируемым.

Отметим здесь, что существуют строгие результаты по структурной устойчивости гамильтоновых систем с конечным числом степеней свободы — так называемая *теорема Колмогорова — Арнольда — Мо-*

\* Так что при малой температуре статистика системы, например, в модели Крумхансла и Шрифера [88] может определяться бивонными возбуждениями. Это значит, что частоту возбуждений должна определять температура с помощью приближенной формулы  $\omega \approx \sqrt{2} [1 - (9/32) T^2] = \sqrt{2} [1 - (T/2M_k)^2]$ .

зера (КАМ). Основное утверждение КАМ-теоремы гласит, что при включении возмущения в интегрируемую систему большая часть (конечная по мере) структуры ее фазового пространства сохраняется, если выполнены условия линейной независимости (иррациональности) частот невозмущенной системы. Это означает, что при малых возмущениях большая часть решений остается квазипериодическими функциями нормальных координат (действие, угол). Однако остальная часть структуры фазового пространства, где не выполнены условия КАМ-теоремы, разрушается, и фазовые траектории системы могут блуждать по всей этой части, плотно заполняя ее (так называемая *диффузия Арнольда*). Таким образом часть орбит (квазипериодических решений) невозмущенной системы становятся неустойчивыми и расползаются по всей доступной области фазового пространства. Устойчиво или нет состояние возмущенной системы — зависит от области фазового пространства, в которой находилась невозмущенная система (подробнее см. [98]). Вопрос о применимости этого результата к инфинитным системам открыт. Особенно сложен вопрос об устойчивости движения интегрируемой системы под действием негамильтонова возмущения.

С точки зрения вычислительной науки обе проблемы можно исследовать в рамках единого подхода — начальной задачи. В первом случае изучается описываемая невозмущенным эволюционным уравнением эволюция возмущенного или невозмущенного (компьютер сам вносит возмущения) начального состояния, заданного в виде исследуемого на устойчивость солитонного решения.

Во втором случае эволюция аналогичного начального состояния подчиняется возмущенному уравнению. И в том и в другом случае исследуемые решения могут зависеть от некоторого медленного времени как от параметра. В первом случае под устойчивыми будем понимать решения, для которых начальные возмущения не нарастают со временем в процессе эволюции начального состояния. Заметим, что в соответствии с этим определением следует считать устойчивыми также слабоизлучающие солитоноподобные решения, не разрушающиеся под действием начальных возмущений.

Под структурно устойчивыми естественно понимать решения, достаточно долго сохраняющие свою форму. Понятие *достаточно долго* определяется временной шкалой физических процессов, происходящих в рассматриваемой системе. Заметим здесь, что некоторые из невозмущенных решений в этом случае будут разрушаться весьма быстро, при этом возможно появление вместо них совершенно новых типов решений, особенно для возмущений негамильтонова типа.

Ниже приведем некоторые примеры численных исследований в обоих направлениях. Выбор этих примеров в большой степени произволен и не претендует на полноту.

1. В плоском  $(x, t)$ -случае большинство исследованных систем обладает устойчивыми солитонными или солитоноподобными решениями, во всяком случае по отношению к возмущениям, не изменяю-

щим симметрию системы, т. е. зависящим от  $x$  и  $t$  \*. Устойчивость (продольная) истинных солитонов вытекает, как правило, из интегрируемости соответствующих уравнений S3, КдФ, МКдФ и SG (см., например, [6]). Единственный, но весьма поучительный контрпример привел Берриман в [99]. Он рассмотрел продольную устойчивость солитонов в модели Вq и показал, что эти солитоны неустойчивы по отношению к инфинитезимальным возмущениям типа плоских волн. И хотя эта неустойчивость, по-видимому, обязана своим происхождением «плохой» дисперсии уравнения Вq  $\omega^2 = k^2 (1 - k^2)$ , этот пример показывает, что нужно относиться с известной осторожностью к укоренившемуся мнению, что интегрируемость системы с необходимостью влечет за собой устойчивость солитонных, а в особенности многосолитонных решений.

Действительно, второй контрпример касается неустойчивости связанного состояния двух солитонов (биона) в рамках вполне respectable (в смысле дисперсии) S3-уравнения. Как было обнаружено Сатсумой и Яджимой [57], в численном эксперименте бион

$$\varphi(x, t) = 4A \frac{\operatorname{ch} 3Ax + 3 \operatorname{ch} Ax \exp(4iA^2t)}{\operatorname{ch} 4Ax + 4 \operatorname{ch} 2Ax + 3 \cos 4A^2t} \exp\left(i \frac{A^2}{2} t\right)$$

распадается на составляющие его солитоны под воздействием начального возмущения с асимметричной мнимой частью \*\*.

Неустойчивые солитоноподобные решения (СПР) появляются в рамках нелинейного уравнения Клейна — Гордона. Для уравнения  $\varphi_+^2$ -теории поля  $F(\varphi) = (1 - |\varphi|^2)\varphi$  на возможную неустойчивость СПР было указано уже в работе Заставенко [100], там же была определена область неустойчивости для комплексных решений вида  $\varphi = \chi(x) \exp(-i\omega t)$ ,  $0 \leq \omega^2 \leq 1/2$ . При исследовании таких решений на машине неустойчивость проявляется весьма ярко, особенно при  $\omega \rightarrow 0$ , т. е. в случае действительной полевой функции: даже при весьма малых возмущениях, вносимых ЭВМ, СПР разваливается за времена порядка нескольких единиц, обычно приводя к особенностям  $\chi$ .

Для лагранжевых уравнений, описывающих комплексные поля, кроме обычных законов сохранения энергии-импульса (момента при  $d \geq 2$ ) существует дополнительный закон сохранения «заряда»,  $(d/dt)Q = 0$ , где для скалярных полей:

$$Q = -\frac{i}{2} \int (\varphi_t^* \varphi - \varphi^* \varphi_t) dx. \quad (42)$$

\* Такие возмущения будем называть продольными, в отличие от поперечных, нарушающих начальную симметрию и зависящих, например, от  $x$ ,  $y$  и  $t$ .

\*\* Подчеркнем, что S3-бион не имеет дефекта массы, т. е.  $E_b = E_{S1} + E_{S2}$ , поэтому в возмущенных системах S3 он неустойчив. Тот факт, что бион формируется из начального пакета и долго (!?) живет в рамках S3, скорее удивителен, чем закономерен, и, видимо, связан с высшими интегралами.

Используя вариационный принцип и это уравнение, можно доказать теорему ( $Q$ -теорему), формулирующую достаточные условия устойчивости скалярных комплексных СПР (см. [2, с. 94], а также [3]). Область устойчивости этих решений определяется неравенством

$$\frac{\omega}{Q} \frac{dQ}{d\omega} < 0. \quad (43)$$

Применим, например, это условие к комплексным уравнениям Шредингера и Клейна — Гордона с нелинейностью вида  $\varphi |\varphi|^\nu$  (см., например, [101]):

$$\left. \begin{aligned} i\varphi_t + \varphi_{xx} + |\varphi|^\nu \varphi &= 0; \quad (1) \\ (\square + 1)\varphi - |\varphi|^\nu \varphi &= 0. \quad (2) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

В первом случае вместо заряда  $Q$  сохраняется нормировка волновой функции  $\varphi$ :

$$\frac{d}{dt} \int |\varphi|^2 dx \equiv dS/dt = 0, \quad (45)$$

а вместо (43) имеем  $dS/d\omega < 0$ , причем  $\omega < 0$  \*. После подстановки  $\varphi(x, t) = \chi(x) \exp(-i\omega t)$  из (44) получим

$$-\chi_{xx} + \kappa^2 \chi - \chi^{\nu+1} = 0; \quad \kappa^2 = \begin{cases} -\omega & (1); \\ 1 - \omega^2 & (2). \end{cases} \quad (46)$$

Можно проверить, что условия применимости  $Q$ -теоремы для уравнения (46) удовлетворяются. Остается найти зависимость  $Q$  и  $S$  от  $\omega$ . Найдем ее с помощью масштабного преобразования  $x \rightarrow \kappa^{-1}\xi$ ,  $\chi \rightarrow \kappa^{2/\nu}\eta$ , при котором (46) принимает вид, свободный от  $\kappa$ :  $-\eta_{\xi\xi} + \eta - \eta^{\nu+1} = 0$ . Поэтому  $S = \int \chi^2 dx = \kappa^{(4-\nu)/\nu} \int \eta^2 d\xi \equiv \kappa^{(4-\nu)/\nu} C(\nu)$ ;  $Q = \omega S = \omega \kappa^{(4-\nu)/\nu} C(\nu)$ . Вычисляя  $dS/d\omega = -dS/d\kappa^2$  и  $dQ/d\omega$ , находим соответствующие области устойчивости:

$$(1) \quad \nu < 4, \quad \omega \equiv -\kappa^2 \text{ — произвольно};$$

$$(2) \quad 1 > \omega^2 > \nu/4.$$

Таким образом, в обоих случаях устойчивые СПР существуют при  $\nu < 4$ .

Более интересная ситуация возникает при исследовании поперечной устойчивости солитонов и СПР. Здесь фактически переходим к трехмерным системам (две пространственные и временная координаты). В зависимости от вида рассматриваемой физической системы этот переход может быть разным. Трансформация КдФ-подобных уравнений (1) обычно приводит к «обобщенному» уравнению Кадомацева — Петвиашвили

$$\varphi_{tx} + [1/(\nu + 1)](\varphi^{\nu+1})_{xx} + \varphi_{xxx} + \alpha\varphi_{yy}/2 = 0.$$

\* Условие  $\omega < 0$  необходимо для существования СПР (см. [2, с. 33]).

Для уравнений типа Шредингера и Клейна — Гордона вместо оператора  $\partial_x^2$  могут возникать как  $\partial_+^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ , так и  $\partial_-^2 = \partial_x^2 - \partial_y^2$ , т. е.

$$(\partial_t^2 - \partial_+^2) \varphi = F(\varphi) \quad (47)$$

или

$$(\partial_t^2 - \partial_-^2) \varphi = F(\varphi). \quad (48)$$

С точки зрения вычислительной науки наиболее досконально и последовательно изучена устойчивость плоских солитонов в физике плазмы, описываемых уравнением Шредингера с самосогласованным потенциалом [34, 102, 103]:

$$\begin{aligned} \nabla (i\partial_t \varphi + \nabla \nabla \varphi - \Phi \varphi) &= 0; \quad \square \Phi = \nabla |\varphi|^2; \\ \nabla \times \varphi &= 0; \quad \varphi = \{\varphi_x, \varphi_y\}; \end{aligned} \quad (49)$$

при  $\varphi_x \gg \varphi_y$ ,  $i\partial_t \varphi_x + \partial_+^2 \varphi_x + |\varphi_x|^2 \varphi_x = 0$ , а также [102, 104].

$$i\partial_t \varphi + \partial_-^2 \varphi + 2|\varphi|^2 \varphi = 0. \quad (50)$$

Опуская детали физической постановки задач, которые можно найти в [34, 102—104] и в следующем разделе, опишем качественно характер поведения плоских солитонов при поперечных возмущениях в рамках этих уравнений.

Оказывается, что плоские солитоны неустойчивы как в том, так и в другом случае. Более того, многочисленные исследования последних лет (в том числе вычислительного характера) показали, что два вида плоских солитонов поперечно устойчивы КдФ- и SG-солитоны и один вид СПР — кинки уравнения Хиггса ( $\varphi^1$ -теория). Из них только КдФ-солитон не является топологическим. Все остальные нетопологические (колоколообразные) солитоны и СПР, в том числе шредингеровские и КГ, оказываются неустойчивыми.

В заключение несколько слов о структурной устойчивости солитонов и СПР (теория возмущения солитонов). Как уже отмечалось, несмотря на значительный объем работы, выполненный к настоящему времени в данном направлении, эта проблема еще далека от завершения в фактическом и в концептуальном плане для систем с бесконечным числом степеней свободы. Здесь приведем лишь ссылки на известные автору работы, а также в качестве примера кратко результаты некоторых вычислительных исследований.

Естественно одними из первых в этом плане были исследования КдФ-и S3-солитонов с учетом эффектов слабой диссипации линейной [90, 105] и нелинейной [65]. В [90] с помощью двухвременного формализма Боголюбова были получены уравнения, описывающие изменение во времени параметров КдФ-солитонов в предположении, что их форма (функциональная зависимость) не меняется для различных моделей затухания\*. В [65, 105] численно исследовано влияние диссипации на S3-солитоны.

\* Впоследствии этот метод широко применяли и в других работах (см., например, [94]).



Уже упомянутые первые исследования показали, что поведение солитона, а именно сохранение его формы как баланса эффектов дисперсии и нелинейности, весьма существенно зависит от вида возмущающего члена. Особенно рельефно это было выявлено в [106], где изучалось поведение S3-солитонов под действием затухания степенного вида  $\gamma \propto \epsilon k^b$  ( $k$  — волновое число). Автору удалось показать, что лишь при  $b = 2$ , что связано с масштабными свойствами S3, солитон практически не изменяет свою форму со временем. В остальных случаях  $b \neq 2$  эволюция солитона происходит с изменением формы и тем большим, чем больше коэффициент  $\epsilon$  в затухательном члене.

Так, для  $b = 4, 3$  и  $2$  должны выполняться неравенства  $\epsilon \leq 0,01, 0,03$  и  $0,2$ , чтобы изменением формы солитона можно было пренебречь. Для КдФ ситуация еще сложнее. Даже при слабых возмущениях уравнений КдФ или S3 у солитонов обычно появляются хвосты (см., например, [75, 76, 107 и 65]) или они вообще могут изменить свою форму [65, 97]. Остановимся более подробно на весьма интересных результатах, полученных в этом направлении японской группой [65]. Они изучали влияние нелинейного затухания Ландау на динамику S3-солитона sech- и th-типов, т. е. изучалась начальная задача:

$$F(\varphi, \epsilon) \equiv i\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_{xx} + \alpha|\varphi|^2\varphi + \epsilon\varphi P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi(x', t)|^2}{x-x'} dx' = 0; \quad (51)$$

$$\psi(x, 0) = f(x) \quad (52)$$

( $\epsilon$  — константа,  $\alpha = \pm 1$ ).

Функцию  $f(x)$  выбирали в виде солитона, связанного состоянием двух солитонов или периодической волны. При  $\alpha = 1$  в результате модуляционной неустойчивости возникают sech-солитоны, при  $\alpha = -1$  солитонными решениями  $F(\varphi, 0) = 0$  являются кинки th-типа.

Как показали численные исследования, наличие интегрального члена (возмущения) в (51) приводит к весьма важным качественным эффектам: для одного солитона  $f(x) = A \operatorname{sech}(Ax)$  — к его движению в положительном направлении оси  $x$  и появлению хвоста на заднем фронте (рис. 9),

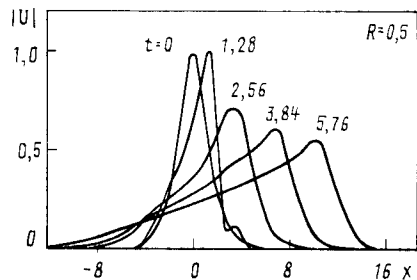


Рис. 9.

однако эти эффекты тем меньше, чем меньше  $\epsilon$ ; для связанного состояния солитонов  $f(x) = 2A \operatorname{sech} Ax$  возмущение приводит к его распаду на составляющие солитоны. По-видимому, этот эффект связан с асимметрией по  $x$  возмущения в (51). Действи-

тельно, ранее [57] аналогичный распад связанного состояния наблюдался даже в рамках невозмущенного интегрируемого S3-уравнения при наложении на бион начального возмущения с асимметричной мнимой частью (к сожалению, амплитуда возмущения была велика).

Еще более сильно действует нелинейное затухание Ландау на кинк-солитоны ( $\alpha = -1$ ),  $\varphi_k = A \operatorname{th}(Ax) \exp[i(\nu x - \omega t)]$ . В зависимости от направления движения кинка его амплитуда или уменьшается ( $\nu < 0$ ), или нарастает ( $\nu > 0$ ).

В соответствии с этим периодические волны  $\varphi(x, 0) = 1 + A \cos \pi x$  разбиваются асимметрично на ряд: 1) затухающих sech-солитонов при  $\alpha = 1$ ; 2) нарастающих th-солитонов при  $\alpha = -1$ .

Другая серия работ, на которой следует здесь остановиться, посвящена изучению структурной устойчивости SG-солитонов, выполнена корнельской группой [85а, 92] (теория) и [108] (численный эксперимент). В этой серии изучали начальную задачу

$$\square \varphi + \omega_0^2(x) \sin \varphi + AF(x) = 0; \quad \varphi(x, 0) = f(x). \quad (53)$$

Здесь зависимость собственной частоты системы  $\omega_0$  от  $x$  может моделировать присутствие в системе примесей (неоднородностей), а также ее макроструктуру (слоистость и пр.). Последний член в (53) моделирует влияние внешних воздействий (полей, токов и т. п.). В [85а, 92] аналитически было предсказано, а в [108] с помощью численного эксперимента подтверждено, что SG-кинк-солитоны ведут себя при достаточно малых возмущениях, как ньютоновские частицы с *внутренней структурой* во внешних полях: они могут ускоряться (замедляться), излучать, незначительно изменять свою структуру, что сопровождается переходным излучением; могут быть заперты в некоторой области пространства, а затем вытолкнуты из нее снятием одной из пробок. Появление излучения в модели (53), а также в ее дискретном аналоге даже при  $d\omega_0/dx = 0$  должно сильно влиять на структуру и особенно динамику связанных состояний — бионов, их образование, время жизни, развал. Все эти результаты весьма интересны (я бы даже сказал впечатляющи) с точки зрения приложения в физике твердого тела. Здесь также следует отметить работы [109].

В заключение заметим, что работа в этом направлении продолжается весьма интенсивно, и, хотя предстоит решить немало сложных проблем, можно надеяться, что в ближайшие годы появится достаточно полное понимание вопросов устойчивости (особенно структурной) солитонов. Это позволит перейти к последовательному экспериментальному изучению солитонных явлений в различных областях физики.

## 2. НЕОДНОМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ

**Устойчивость плоских солитонов.** В системах более одного пространственного измерения возможно существование солитонов с различными видами симметрий плоской, цилиндрической, сферической

и т. п. Наиболее простое и естественное обобщение одномерных солитонов — плоские, полевая функция  $\varphi$  которых зависит только от координаты в направлении их движения, например оси  $z$ , так что их волновой фронт параллелен плоскости  $xoy$ . Как нетрудно видеть, такие солитоны действительно являются частными решениями соответствующих многомерных уравнений в силу  $\partial_x \varphi = \partial_y \varphi = 0$ .

Естественно возникает вопрос об устойчивости таких решений при поперечных, т. е. зависящих от  $x, y$ , возмущениях. С нашей точки зрения это означает, что нужно решить начальную задачу

$$\left. \begin{aligned} M[\varphi] &= 0; \\ \varphi &= \varphi_s(z, 0) + \delta\varphi(r_{\perp}, z, 0), \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где  $M$  — нелинейный дифференциальный оператор, соответствующий тому или иному нелинейному уравнению в частных производных;  $\varphi_s(z, 0)$  — решение этого уравнения в виде плоского солитона;  $\delta\varphi(r_{\perp}, z, 0)$  — некоторое возмущение. Именно в такой постановке решалась задача об исследовании поперечной устойчивости плоских ленгмюровских солитонов и о коллапсе ленгмюровских волн в серии работ аналитического и вычислительного характера [34, 102—104]. В этом случае оператор  $M$  определяется системой уравнений (49). Проиллюстрируем результаты этих исследований на примере работы [34]. Авторы в своих расчетах использовали двухмерный алгоритм, основанный на преобразовании фурье-системы (49) при периодических граничных условиях по  $y$  и  $z$  пространственной сетке из  $32 \times 32$  точек.

Начальную функцию  $\varphi$ , напряженность электрического поля, выбирали в виде плоского солитонного решения, а на потенциал  $\Phi$ -плотность числа частиц накладывались возмущения

$$\Phi(z, y, 0) = -(2A^2 \operatorname{sech}^2 Az) (1 + 2\epsilon \cos k_y y),$$

так что ни электрическое поле, ни производная  $\Phi_t$  не возмущались в начальный момент. Как и следовало ожидать, плоский солитон оказывается неустойчивым при достаточно большой амплитуде или больших длинах волн возмущения  $l_y = 2\pi/k_y$ . Область устойчивости плоского солитона определяют соотношением  $k_y \geq \alpha A$ , где  $\alpha$  — численный коэффициент, порядка единицы в экспериментах авторов [34]. Неустойчивые солитоны после прохождения короткой стадии согласованной перестройки электрического поля вступают в стадию коллапса, в которой амплитуда  $\varphi$  неограниченно нарастает (во всяком случае в рассматриваемой модели). На рис. 10 представлены последовательные стадии развития неустойчивости плоского покоящегося солитона при  $l_y = 16$ ,  $A = 2$ ,  $v = 0$  и  $\epsilon = 0,1$  [34] (похожие результаты были получены также в [103]). В работе Перейры, Судана и Денавита обнаружена также связь между групповой скоростью

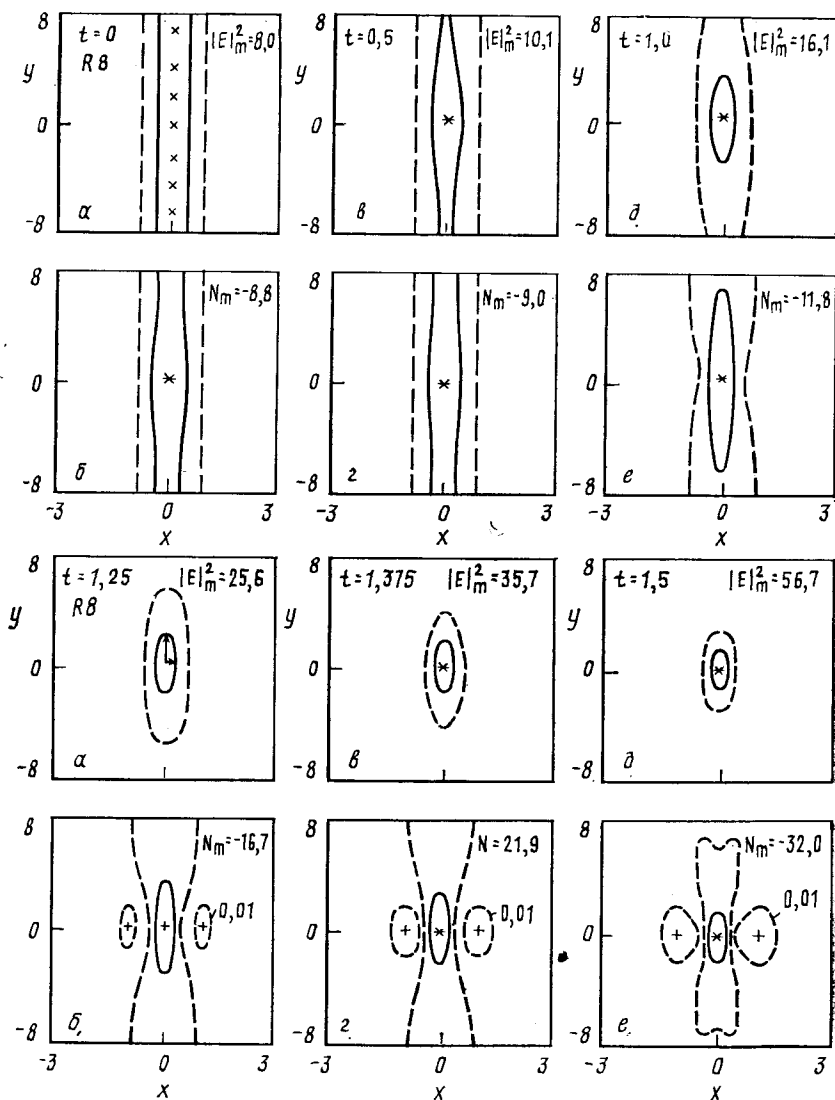


Рис. 10.

движущегося солитона и локальной плотностью энергии  $| \phi |^2$ , возникающая в нестационарных процессах типа коллапса или затухания Ландау. \*

\* Отметим, что ими также было исследовано влияние затухания Ландау и поля накачки на процесс коллапса и показано, что в двухмерном случае процесс рождения и смерти солитонов носит периодический характер.

Второй пример касается исследования эволюции плоского солитона в рамках «несимметричного» S3-уравнения:

$$i\varphi_t + \partial_z^2 \varphi + |\varphi|^2 \varphi = 0.$$

Уравнения подобного типа и несколько более сложные, например

$$2i\varphi_t + \partial_z^2 \varphi = \frac{9}{2} \varphi |\varphi|^2 + 3\varphi \Phi_y; \quad \partial_z^2 \Phi = -3\partial_y |\varphi|^2,$$

встречаются при изучении нелинейных двумерных волн в плазме [102, 110] и поверхностных волн на воде конечной глубины [111, 112]. Второе из этих уравнений, как было показано Анкером и Фрименом [112], интегрируемо, причем в его рамках возможны процессы слияния и распада солитонов при выполнении обычных распадных условий  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ ,  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ . К сожалению, остался открытым вопрос об устойчивости солитонных решений (вспомним поучительный урок Берримена).

Плоские солитоны первого уравнения в рамках начальной задачи (54) были исследованы численно в [104] с помощью кода, описанного в [34] и выше. Было показано, что плоские солитоны вида  $\varphi_s = \sqrt{2} \operatorname{sech} z$  устойчивы по отношению к четным по  $z$  возмущениям типа перетяжек, что согласуется с результатами [2, 102, 104], но неустойчивы по отношению к нечетным по  $z$  возмущениям типа змейки

$$\delta\varphi(z, y, t) = a (\partial_z \varphi_s) \cos(ky) \quad (a = 0,1).$$

Начальная линейная стадия развития этой неустойчивости хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями Яджимы [102] и имеет характерный экспоненциальный рост. Когда амплитуда возмущения достигает половины невозмущенного значения, неустойчивость переходит в нелинейный режим, представленный на рис. 11. Из этих рисунков видно, что неустойчивость приводит к разбиению солитона на куски и рассеянию энергии, первоначально запасенной в солитоне, так что в отличие от предыдущей ее можно назвать *антиколлапсом*.

К сожалению, условия эксперимента (влияние соседних периодов) не позволяют однозначно ответить на вопрос — установится ли некое нелинейное квазистационарное состояние солитонного типа или энергия рассеется по всему пространству вполне равномерно (см. [2, с. 74]).

Аналогичным видам поперечной неустойчивости подвержены также плоские  $\operatorname{sech}$ -солитоны релятивистского уравнения Клейна — Гордона. Отметим здесь, что нет до сих пор строгого исследования устойчивости белл-солитонов типа бионов для уравнений Хиггса ( $\varphi^4$ ) и синус-Гордона \*. Кинки Хиггса и SG, как и белл-солитоны

\* Из соображений об эквивалентности SG-бионов и S3-солитонов, высказанных выше, можно предположить, что первые также могут быть неустойчивыми.

уравнения Кадомцева — Петвиашвили, оказываются устойчивыми.

Нужно отметить, что аналогично заряженным или токовым бесконечным плоскостям в электродинамике плоские солитоны обладают бесконечной энергией, зарядом и т. п. В связи с этим в пространствах

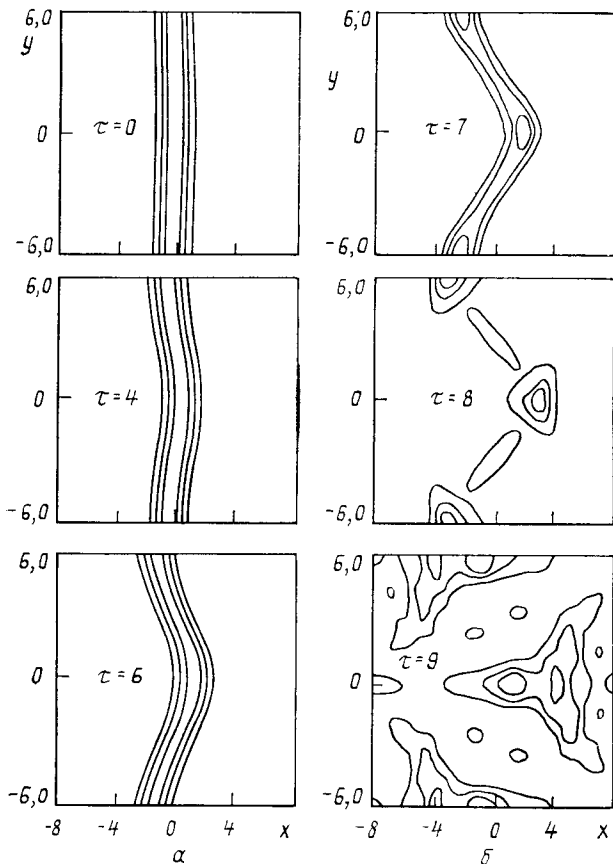


Рис. 11.

более одного измерения естественно в качестве солитоноподобных решений рассматривать только такие конфигурации полей, которые обладают конечными значениями упомянутых величин, т. е. частицеподобные решения. Для таких решений можно сформулировать теорему об устойчивости квазисолитонов (теорему Деррика — Хобарта). Гамильтонова система не имеет устойчивых стационарных квазисолитонных решений в пространстве более одного измерения, если потенциал не зависит от производных полевых функций [113, 114].

Для систем с некоторой изотопической группой симметрии эту теорему можно трансформировать в  $Q$ -теорему [2], гласящую, что квазисолитонное решение  $\varphi_s = R(r) \exp(-i\omega t)$  устойчиво в случае, когда выполняется неравенство  $dQ/d\omega < 0$  (и неустойчиво в противоположном), где  $Q$  — сохраняющаяся величина, определяемая группой внутренней симметрии. Так, в простейшем случае  $U(1)$ -симметрии

$$Q = -\frac{i}{2} \int (\varphi_t^* \varphi - \varphi^* \varphi_t) d^D x$$

( $D$  — размерность пространства).

Столь общие утверждения, как теорема Деррика — Хобарта и  $Q$ -теорема для спинорных полей, автору не известны.

Ниже рассмотрим свойства квазисолитонов в двух- и трехмерном пространствах на ряде конкретных примеров. Подчеркнем здесь, что, как и при открытии самих солитонов КдФ, практически все основные результаты получены с помощью компьютера.

**Схлопывание хиггсовских пузырей.** В настоящее время резко возрос интерес к изучению нелинейных теорий поля и их применений в физике элементарных частиц. Возможно, это связано с успехами моделей, основанных на теории калибровочных полей, а также со значительно возросшим математическим пониманием структур изучаемых объектов. Во всяком случае число публикаций, начиная с середины семидесятых годов, растет экспоненциально, что говорит о молодости и перспективности данного направления. Основой для построения протяженных квантовых объектов обычно служат частицеподобные ЧПР (или квазисолитонные) решения нелинейных классических уравнений поля («мешки», солитоны, струны). Это позволяет моделировать и изучать структуру элементарных частиц, а не считать их заданными, как бывает в обычной линейной квантовой теории поля. В связи с этим одна из главных задач данного направления — изучение структуры ЧПР на классическом уровне. Как мы уже видели выше, в двухмерном пространстве — времени понимание подобных структур продвинулось весьма далеко в результате, с одной стороны, развития мощных методов аналитического исследования, основанных на спектральном преобразовании\*, с другой, — многочисленных и плодотворных вычислительных работ.

В то же время детальное изучение ЧПР в многомерных пространствах фактически только начинается, хотя первые исследования в этом направлении появились более двух десятилетий назад. Наибольший вклад в данное направление в настоящее время вносят численные исследования. Опишем здесь лишь результаты, полученные при изучении ЧПР в рамках нелинейного уравнения Клейна — Гордона и Шредингера.

\* Так, следуя Калоджеро, называем метод обратной задачи рассеяния [115].

Одна из наиболее известных первых солитонных моделей адрона, так называемый SLAC — BAG [116], представляла собой хиггсовскую стенку, в которую «вклеены» кварки. В связи с этим возник интерес к поведению хиггсовской стенки в трехмерном пространстве. Именно при изучении данного явления с помощью ЭВМ были открыты неизвестные ранее объекты, получившие название пульсонов.

Рассмотрим следующую начальную задачу:

$$(\square - 1 + \chi^2) \chi = 0; \quad (55)$$

$$\chi(r, 0) = \text{th} [(r - R_0)/\sqrt{2}]. \quad (56)$$

Функция (56) является неподвижным кинк-решением уравнения (55) в плоском  $(x, t)$  случае. Используя формулы

$$E = 4\pi \int \mathcal{H} dr; \quad \mathcal{H} = (r^2/2) \{ \chi_t^2 + \chi_r^2 + (\chi^2 - 1)/2 \},$$

легко можно вычислить энергию поля образования вида (56), представляющего собой сферически-симметричный пузырь. Вся энергия этого пузыря  $E \propto R_0^2$  сосредоточена в оболочке толщиной  $\Delta r \approx \sqrt{2}$ .

Будем предполагать, что в начальный момент  $R_0 \gg 1$ . Поскольку пузырь стремится уменьшить свою потенциальную энергию, а в начальный момент он обладает только ею в силу  $v = 0$ , он начнет схлопываться, как под действием поверхностного натяжения. В [117] (см. также [2]) было получено уравнение, описывающее процесс такого схлопывания при  $R_0 \gg 1$ :

$$\frac{d^2}{dt^2} R_0 + \frac{2}{R_0} \left[ 1 - \left( \frac{dR_0}{dt} \right)^2 \right] = 0$$

и решение  $R_0 = R_{\text{in}} \text{cn} \left( \frac{\sqrt{2}}{R_{\text{in}}} t, \frac{1}{2} \right)$ ,  $\text{cn}$  — эллиптический косинус с модулем  $k^2 = 1/2$ .

Введение задачи (55), (56) в машину показывает, что на начальном этапе поведение пузыря действительно хорошо описывается приведенной формулой. Значительные отклонения начинаются в области  $R_0 \approx 1$ . В процессе схлопывания пузыря его потенциальная энергия переходит в кинетическую, так что вблизи центра процесс схлопывания сменяется процессом расширения (пузырь как бы «отражается» от центра), а часть энергии уйдет на излучение. По достижении размера несколько меньшего, чем начальный (из-за потерь на излучение), пузырь опять начнет схлопываться и т. д. Его поведение весьма похоже на поведение маятника при наличии трения. Число колебаний зависит от потерь энергии на излучение. И. Л. Боголюбским и автором была проведена серия численных экспериментов для различных значений  $R_0$  [118]. В результате выяснилось, что достаточно нескольких (обычно 2—5) колебаний, чтобы основная доля энергии пузыря излучилась на бесконечность. В этой же серии экспериментов было замечено, что пузыри с достаточно большим начальным размером



заканчивают свою жизнь, давая начало неким новым долгоживущим образованиям. Пузыри с малыми размерами исчезают вовсе. Вторая серия расчетов была предпринята с целью изучить поведение пузырей

$$\varphi(r) = 4 \operatorname{arctg} [\exp(r - R_0)], \quad R_0 \gg 1, \quad (57)$$

в рамках уравнения SG. В силу интегрируемости SG в двухмерном пространстве — времени мы предполагали, что время жизни пузырей (57) будет весьма большим. Результаты расчетов опровергли эти ожидания: излучение при схлопывании пузыря оказалось весьма значительным, а картина в целом качественно аналогична описанной выше. Таким образом, в проведенных экспериментах интегрируемость SG в  $(x, t)$ -мире никак не проявилась в реальном четырехмерном пространстве — времени.

**Пульсоны.** Их образование, устойчивость и взаимодействия. Как мы видели выше, в плоском  $(x, t)$ -мире существуют долгоживущие связанные состояния солитонов — бионы в рамках КГ-уравнения. Естественно возникает вопрос о существовании аналогов бионов в двух- и трехмерном пространствах. В соответствии с теоремой Деррика — Хобарта устойчивых стационарных солитонов для уравнений SG- и  $\varphi_{\pm}^4$ -теорий не существует. В исследованиях, проведенных в Дубне, в рамках  $\varphi_{+}^4$ -теории устойчивых осцилляторных решений обнаружено не было. Ситуация меняется при переходе к SG- и  $\varphi_{-}^4$ -теориям.

Как уже упоминалось выше, в результате эволюции хиггсовского и SG-пузыря достаточно большого размера (или, что то же самое, достаточно массивного) в его центре возникает некоторый сгусток полевой энергии. Распределение поля по радиусу в сгустке имеет форму колокола, причем полевая функция осциллирует около вакуумного значения, закрепленного граничными условиями. В описываемых экспериментах [119] эти значения были  $\chi^v(t, \infty) = -1$  для  $\varphi_{-}^4$ -теории и  $\varphi_{SG}^v(t, \infty) = 0$  для SG.

Такие сгустки энергии, названные пульсонами, возникали при довольно произвольных начальных условиях, если только  $\chi(0, 0) > C_1 \gg 1$ ;  $\varphi(0, 0) > C_2 \gg 2\pi$ .

Излучение из пульсонов оказалось небольшим, поэтому их время жизни довольно велико — порядка тысяч периодов осцилляций (вспомним хиггсовские бионы в плоском мире). Эти результаты были подтверждены позднее группой из ИТЭФ (Москва) [120] для пульсонов  $\varphi_{-}^4$ -теории и датской группой [16] для SG-пульсонов.

Для многовакуумной теории синус-Гордона в [121] были обнаружены не имеющие аналогов в плоском мире тяжелые пульсоны. Их амплитуды лежат в области  $\varphi(0, t) \in (3\pi, 4\pi)$ . В области  $(2\pi, 3\pi)$  эти пульсоны становятся неустойчивыми и быстро переходят в  $2\pi$ -пульсоны, описанные выше. В заключение заметим, что описанные выше пульсоны устойчивы по отношению к азимутальным возмущениям [122].

Можно предположить, что вращение слабо несимметричного хиггсовского пузыря может замедлить его коллапс и существенно удли-

нить время жизни (эта идея, насколько известно автору, была независимо высказана Кудрявцевым и Скоттом). Проведенные нами предварительные исследования не привели пока к положительным результатам в  $x, y, t$ -случае.

**Взаимодействие пульсонов.** Выше были рассмотрены динамические свойства пульсонов, касающиеся вопросов их формирования и устойчивости. Однако это лишь первый шаг. Реальная динамика, в которой в полной мере проявляются особые свойства солитонов, — это их взаимодействие.

Поэтому рассмотрим результаты по столкновению двумерных цилиндрически-симметричных (в системе покоя) пульсонов КГ-уравнения ( $\varphi_+$ -теория), полученные в Дубне [122]. В серии расчетов было исследовано лобовое столкновение двух *неустойчивых* КГ-пульсонов вида

$$\psi(x, y, t) = Af[u_0 \sqrt{\gamma_i^2(x - v_i t)^2 + y^2}] \cos[\sqrt{1 - u_0^2} \gamma_i(t - v_i x)],$$

где  $v_i$  — скорость  $i$ -пульсона в единицах скорости света;  $v_1 = -v_2 = v = 0,2; 0,3; 0,4; 0,6$ ;  $\gamma_i^2 = (1 - v_i^2)^{-1}$ ; функция  $f(r)$  в системе покоя пульсона есть решение граничной задачи

$$f_{rr} + f_r/r - f + f^3 = 0; f_r(0) = f(\infty) = 0.$$

Время столкновения выбирали меньше времени развития неустойчивости. Поведение пульсонов напоминает поведение одномерных Is-солитонов или кинков Хиггса. Если скорость пульсонов превосходит некоторую критическую величину  $v_{кр} \approx 0,3$ , то они выходят из взаимодействия и лишь после этого «распадаются» по диссипативной (распыление) или сингулярной (коллапс) моде. При  $v \leq 0,3$  пульсоны сливаются в один, впоследствии коллапсирующий. Замечательный факт состоит в том, что при  $v > v_{кр}$  число неустойчивых квазичастиц сохраняется во взаимодействии, причем они живут приблизительно то же время, что и в свободном состоянии. И это несмотря на то, что столкновение пульсонов вносит большое, хотя и самосогласованное, возмущение порядка единицы для каждого из них. Здесь уже в трехмерном мире мы, по-видимому, стали свидетелями проявления «солитонных» свойств (в понимании Забуски, Крускала) неустойчивыми пульсонами.

**Цилиндрически-симметричные  $Q$ -солитоны и их взаимодействия.** **Нерелятивистские модели.** Перейдем к изучению динамических свойств устойчивых  $Q$ -солитонов в моделях с простейшей  $U(1)$  внутренней симметрией. Как уже отмечалось выше, устойчивые нетопологические солитоны существуют только в теориях с внутренней симметрией. Естественно, что исследования были проведены, начиная с наиболее простых моделей ( $U(1)$ -симметрия), далее включались все более высокие симметрии, часть из которых могла быть спонтанно нарушена.

Отметим здесь, что, постепенно усложняя модели, при надлежащем выборе параметров Ли и Фрайдбергу [3] удалось описать с удовлетворительной точностью по отношению к экспериментальным дан-

ным такие свойства нуклонов, как относительные магнитные моменты протона и нейтрона, отношение констант  $\beta$ -распада (аксиальной к векторной) и среднеквадратический электромагнитный радиус протона.

Если статические свойства солитонов еще поддаются аналитическому исследованию в рамках даже сложных моделей, то взаимодействие неоднородных солитонов удастся пока исследовать лишь с помощью компьютера. Здесь также естествен путь исследования от простых моделей к сложным.

Наиболее простыми моделями, изучению которых было посвящено несколько работ в 1977—1979 гг., были нерелятивистские модели, описываемые уравнением Шредингера с различными видами нелинейности. Сюда относятся весьма впечатляющие фильмы Тапперта о взаимодействии цилиндрических солитонов в рамках уравнения Шредингера с экспоненциальной нелинейностью

$$i\varphi_t + \Delta_{rr}\varphi + \varphi(1 - \exp[-\alpha|\varphi|^2])/\alpha = 0,$$

моделирующего поведение пакетов ленгмюровских волн вблизи стационарных состояний.

Во второй работе [36] исследовали столкновения цилиндрически-симметричных (CS) гауссонов (по терминологии авторов) в рамках уравнения

$$i\varphi_t + (\Delta_{rr}/2 + b \ln[a^D|\varphi|^2])\varphi = 0, \quad (58)$$

где  $a$  и  $b$  — константы,  $D$  — размерность пространства.

Это уравнение имеет точное односолитонное решение — гауссон вида:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= (A/\sqrt{\pi})^{D/2} \exp\{i[-\omega t + \mathbf{v}\mathbf{x} + \vartheta_0]\} \times \\ &\times \exp\{-b(\mathbf{x} - \mathbf{v}t - \mathbf{x}_0)^2\}; \\ \omega &= v^2/2 + 2Db[1 - \ln(Aa/\sqrt{\pi})], \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость гауссона;  $\vartheta_0$  — его начальная фаза.

В CS-геометрии получаем

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = (A/\sqrt{\pi}) \exp\{i[-\omega t + \mathbf{v}\mathbf{r} + \vartheta_0]\} \exp\{-b(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0)^2\} \quad (60)$$

и  $\omega = v^2/2 + 4b[1 - \ln(Aa/\sqrt{\pi})]$ . При  $A = e\sqrt{\pi}/a$  имеем частное решение  $\omega = v^2/2$ , которое использовали в своих исследованиях авторы [36]. Процедура численного счета заключалась в формальном решении (58) в пренебрежении зависимостью  $\varphi(r, t)$  от времени под знаком логарифма в связи с малостью шага по времени  $\delta t$ :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t + \delta t) &= \exp\{-i b \delta t \ln|\varphi(x, y, t)|^2\} \times \\ &\times \exp(-i \delta t \Delta_{rr}/2) \varphi(x, y, t). \end{aligned}$$

Далее на каждом шаге применялось преобразование Фурье, так что

$$\exp(-i\delta t\Delta_{rr}/2) \rightarrow \exp[i(k_x^2 + k_y^2)\delta t/2].$$

С помощью обратного преобразования получали функцию  $F(x, y, t + \delta t) = \exp(-i\delta t\Delta_{rr}/2)\varphi(x, y, t)$ , которую достаточно умножить на  $\exp\{-i\delta t b \ln|\varphi(x, y, t)|^2\}$ , чтобы получить искомое решение на соседнем временном слое. Авторы использовали  $128 \times 128$ -точечную пространственную сетку, выбирая численные значения констант  $a = e$ ,  $b = 400$ , так что  $|\varphi|^2 \approx 1$ , а  $\Delta r \approx 0,035$ . Шаг по времени  $\Delta t \approx 0,002$ . В начальный момент задавались два идентичных гауссона, движущихся навстречу друг другу с прицельным параметром (относительным угловым моментом  $l = 2vr$ ), равным или не равным нулю. В результате численных экспериментов было обнаружено, что существует некоторая резонансная область по энергии (или скорости) сталкивающихся солитонов  $\Delta E_{\text{рез}}$ , в которой в результате столкновения возможно рождение третьего гауссона, если разность начальных фаз гауссонов отличается от  $\pi$  (рис. 12). При  $\delta\vartheta_{\text{in}} = \pi$  гауссоны отталкиваются друг от друга и в резонансной области, если  $l = 0$  (см. рис. 12, б). Однако при  $l \neq 0$  и  $\delta\vartheta_{\text{in}} = \pi$  мы видим, что имеется перекрытие гауссонов, а их рассеяние происходит так, как будто между ними действует сила притяжения (имеется даже задержка во времени при расхождении гауссонов, ср. рис. 12, б и 12, е). На рисунках представлена функция  $|\varphi|^2$ , линии отвечают геодезическим со значениями 0,1; 0,4; 0,7 и 1,1 от начальной высоты гауссона. Эти результаты показывают, что, во-первых, взаимодействия двумерных гауссонов с  $l = 0$  и одномерных качественно совпадают. Как в том, так и в другом случае имеется резонансная область по энергии, в которой возможно рождение третьего гауссона. Вне этой области взаимодействие квазиупруго и существенно зависит от разности фаз сталкивающихся гауссонов, становясь квазиупругим при  $\vartheta \rightarrow \pi$  даже в резонансной области.

Наличие углового момента эффективно эквивалентно появлению дополнительной разности фаз, как если бы в момент соударения  $\delta\vartheta \neq \pi$ . Подчеркнем, что существенна лишь разность фаз, набираемая солитонами к моменту соударения. Эта разность может зависеть от разностей скоростей и амплитуд солитонов. В рассматриваемом случае прединтеровских гауссонов  $\delta\vartheta = \delta\vartheta_{\text{in}}$ , для S3-солитонов  $\delta\vartheta = \frac{L/2}{v_1+v_2}(A_2^2 - A_1^2) + \delta\vartheta_{\text{in}}$  и т. п.

Естественно возникает вопрос, возможны ли связанные состояния гауссонов в исследуемой модели (58). И хотя в [36] они не были обнаружены, ответ на него нельзя считать установленным, поскольку, как мы уже видели [см. формулу (59)], были исследованы взаимодействия лишь «незаряженных» гауссонов, для которых  $\omega = 0$  при  $v = 0$ .

В [123] обсуждаются более общие решения вида гауссонов, существующие также в рамках уравнения Клейна — Гордона с нелиней-

ностью вида (58). Согласно [123а] кроме действительных (стационарных в системе покоя) и комплексных (заряженных) гауссонов типа (59) могут существовать *устойчивые* неизлучающие гауссоны

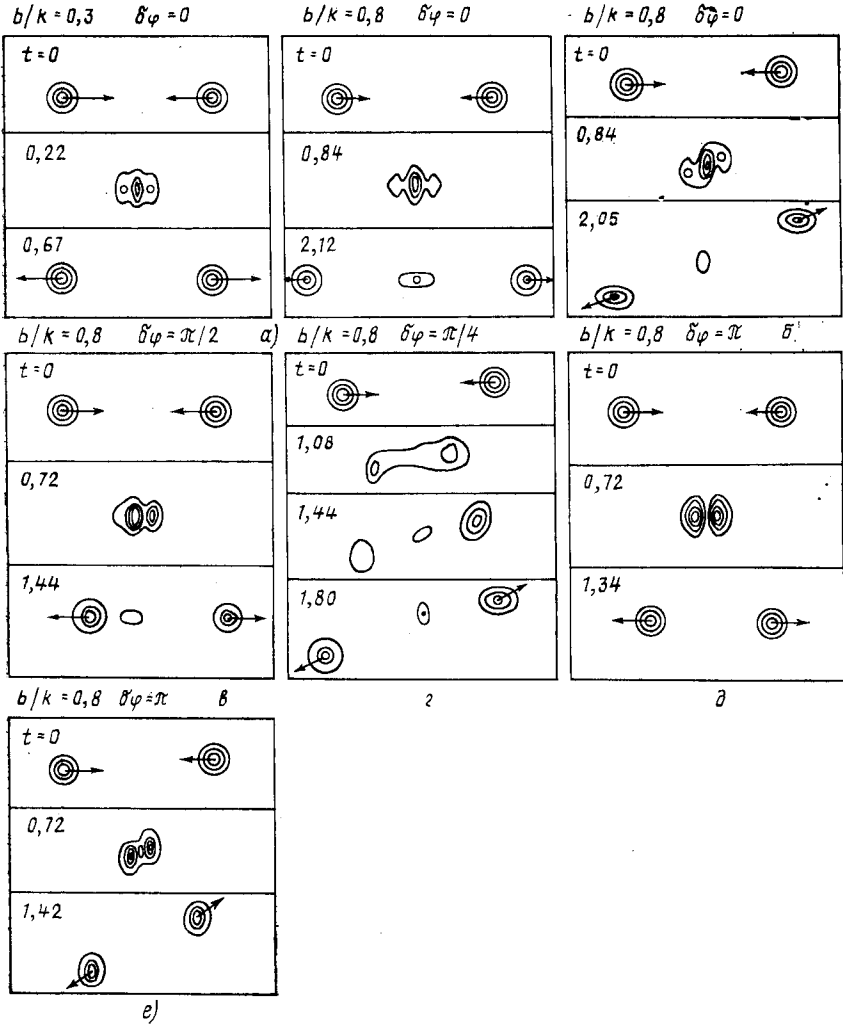


Рис. 12.

пульсирующего типа ( $G$ -пульсоны). До сих пор все известные нам пульсоны, кроме SG- и S3-бионов в  $(x, t)$ -мире, были хотя и слабо, но излучающими квазисолитонами. Устойчивость действительных и комплексных  $G$ -пульсонов хотя и не была строго доказана, однако

была проверена в численных экспериментах. Более того, оказалось, что излучение из возбужденного  $G$ -пульсона весьма мало [1236]. В этом смысле модель с нелинейностью  $\varphi \ln |\varphi|^2$  является пока уникальной и носит черты, схожие с интегрируемыми [SG в  $(x, t)$ -мире] моделями.

В [124] в рамках временной теории Хартри — Фока исследуется рассеяние  $\alpha$ -частиц друг на друге. Приведены довольно убедительные аргументы в пользу сведения трехмерной задачи к двумерной, описываемой нерелятивистской (шредингеровской)  $\varphi^4 - \alpha\varphi^6$ -моделью:

$$i\varphi_t + \Delta_{rr}\varphi + a\varphi + b\varphi|\varphi|^2 - c\varphi|\varphi|^4 = 0, \quad (61)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — константы;  $\varphi(x, y, t)$  — одночастичная волновая функция.

Подробности о физической постановке задачи и о пределах применимости развитой теории читатель может найти в [124] и цитированной там литературе. На основе (61) изучали встречи столкновения двух одинаковых CS-квазисолитонов при различных энергиях ( $v_1 = -v_2 = v$ ) и прицельных параметрах  $p$  или, что то же самое угловых моментах  $l$ . Константы  $a$ ,  $b$  и  $c$  подбирались из эксперимента по энергии связи и среднеквадратическому радиусу  $\alpha$ -частицы.

В численных экспериментах было обнаружено, что существует довольно узкая резонансная область прицельных параметров, в которой неупруго взаимодействие солитонов заметно возрастает, т. е. увеличиваются энергия возбуждения  $E_{\text{exc}} = K_{\text{in}} - K_{\text{fin}}$  ( $K_{\text{in}}$  и  $K_{\text{fin}}$  — кинетические энергии солитонов соответственно до и после соударения), время задержки  $\tau_d$  (разность кинематических времен взаимодействующих и невзаимодействующих солитонов) и угол отклонения  $\theta$ .

При уменьшении энергии сталкивающихся солитонов  $K_{\text{in}} \propto v^2$  резонансная область расширяется, а при некотором значении  $K_{\text{in}}$  в центре резонансной области появляются связанные состояния ( $\tau_d \rightarrow \infty$ ).

На рис. 13 схематически указаны области, в которых имеет место упругое рассеяние, сильно неупругое рассеяние, и образование связанных состояний на плоскости  $K_{\text{in}}, l$ . Пример слабо неупругого взаимодействия солитонов приведен на рис. 14.

**Многомерные солитоны и их взаимодействия.** Релятивистская теория. Ниже обсудим некоторые с нашей точки зрения нетривиальные свойства солитоноподобных решений. Особый упор будет сде-

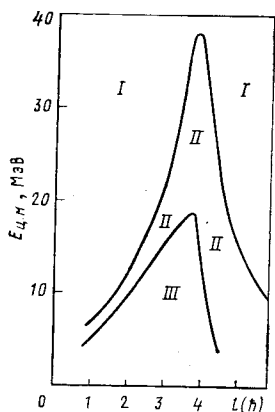


Рис. 13.

I — область квазиупругого рассеяния солитонов ( $\alpha$ -частиц); II — область сильнонеупругого рассеяния; III — область образования связанных состояний

лан на их динамические характеристики. Далее увидим, что даже в рамках достаточно простых моделей нелинейной классической тео-

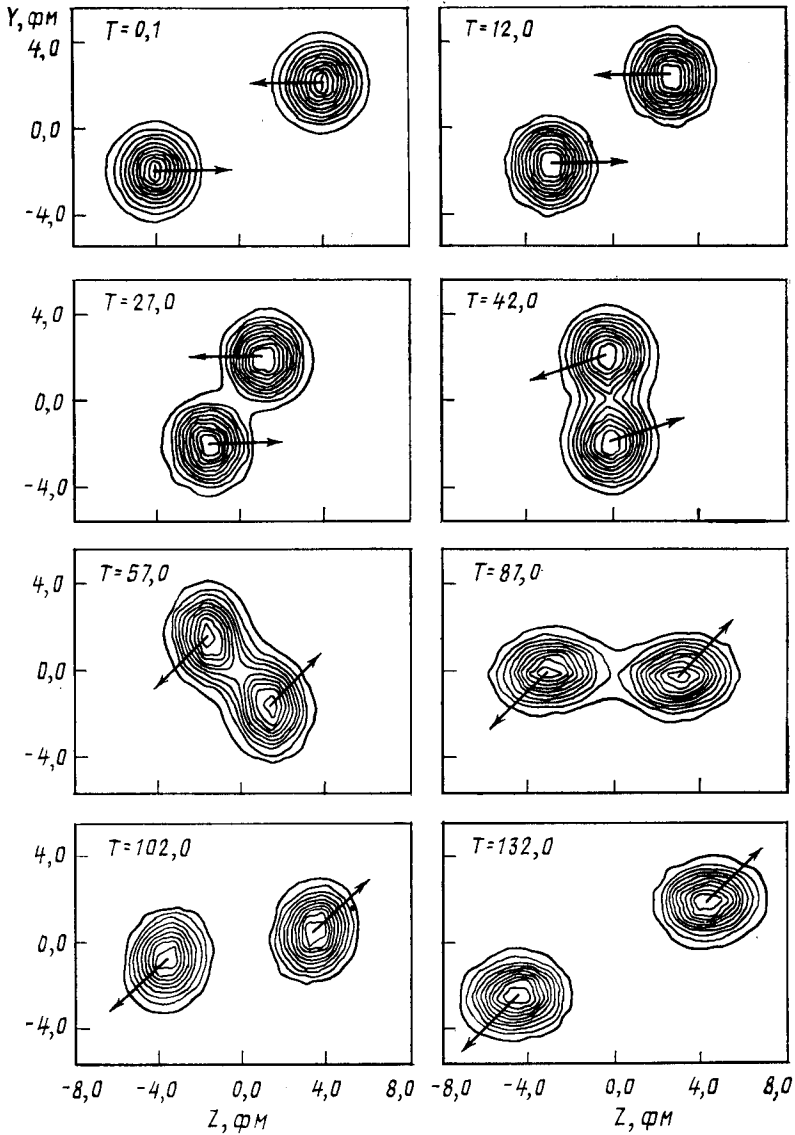


Рис. 14.

рии поля такие решения могут обладать не только нетривиальными, но и поразительными, на первый взгляд, свойствами, весьма напоминающими свойства сложных реальных объектов.

Как уже отмечалось выше, одна из возможностей получения устойчивых солитоноподобных решений — введение некоторой изотопической группы симметрии лагранжиана и связанных с ней законов сохранения. Мы обсудим свойства моделей с наиболее простой  $U(1)$ -группой, ведущей к закону сохранения «изозаряда»  $Q$ . Сохранение изозаряда  $Q$  означает наличие ограничения на возможные виды возмущений, а именно  $\delta Q[\varphi] = 0$ , что приводит к условию устойчивости  $\text{СПР } \frac{\omega}{Q} \frac{dQ}{d\omega} < 0$ . Очевидно, что действительные стационарные полевые конфигурации не могут удовлетворять этому условию и будут неустойчивы. Эти выводы были подтверждены ранее в численных экспериментах различных групп.

В настоящее время известна лишь одна нелинейная РИ-модель, интегрируемая в трехмерном пространстве — времени. Она описывается уравнением самодуальности в 4-пространстве с метрикой (2,2), когда потенциалы не зависят от одной из координат. Взаимодействие солитонов в ней отсутствует. Поэтому представляет особый интерес изучение с помощью ЭВМ динамических свойств двухмерных (2, 1), а затем и трехмерных (3, 1), хорошо локализованных решений для различных моделей теории поля. Исследование качественных свойств этих решений с помощью ЭВМ может подсказать пути к их дальнейшему изучению аналитическими (возможно приближенными) методами.

Рассмотрим две модели классической теории поля с потенциалом взаимодействия в лагранжиане \*:

$$U = -\ln(1 + |\varphi|^2) - (m^2 - 1)|\varphi|^2 \quad (62)$$

и

$$U = -|\varphi|^2 \ln(|\varphi|^2). \quad (63)$$

Легко видеть, что эти модели принципиально различны в следующем смысле: первая в пределе  $\varphi \rightarrow 0$  с точностью до  $O(|\varphi|^2)$  переходит в обычную свободную теорию, поскольку  $U \approx -m^2|\varphi|^2$ , вторая модель содержит в себе конститuyente с бесконечной массой, так как  $\ln(|\varphi|^2) \rightarrow -\infty$  при  $\varphi \rightarrow 0$ . Это означает, что в рамках первой модели возможен при определенных условиях распад решения на конститuyente с излучением линейных волн. Во втором случае такой распад невозможен (запрещен законами сохранения), и все возможные конфигурации полей состоят только из нелинейных решений; модели второго типа иногда называют «конфайнинг-моделями». В результате в рамках первой модели СПР могут распадаться, в то время как в рамках второй — неустойчивость СПР проявляется в виде их коллапса. Вторая модель интересна еще и тем, что в ней СПР могут быть найдены в явном виде для любой размерности  $D$ . Более того, из  $Q$ -теоремы следует, что независимо от  $D$  устойчивые  $U(1)$ -симмет-

\* Для  $\varphi_D^4$ -теории при  $D > 1$  устойчивых СПР не существует даже в системах с изогруппой.



ричные СПР вида  $\varphi = \psi(r) \exp(-i\omega t)$  существуют при  $\omega > \omega_{кр} = 2^{-1/2}$ . В этом смысле модель  $\ln(|\varphi|^2)$  размерно инвариантна и качественно отличается от модели (62), где  $\omega_{кр}$  существенно зависит от  $D$  и  $m$ . На рис. 15 представлены области существования и устойчивости СПР и соответствующие зависимости  $Q(\omega)$  для модели (62).

*Гипотеза:* характер взаимодействия солитонов в столкновениях определяется дисперсионной зависимостью  $Q(\omega)$ , а не типом модели (независимо от характера неустойчивости — распад или коллапс).

Это предположение было проверено в серии численных экспериментов [125]. В расчетах варьировались два параметра: скорость относительного движения квазисолитонов  $v$  и их заряд  $Q$ . В обоих случаях выявлены четыре типа взаимодействия:

- 1) упругое и квазиупругое взаимодействие квазисолитонов;
- 2) распад (коллапс) провзаимодействовавших квазисолитонов;
- 3) распад (коллапс) через короткоживущее связанное состояние (резонанс); \*

4) долгоживущее связанное состояние двух квазисолитонов — бion, что указывает в действительности на модельно-независимый характер взаимодействия солитонов, во всяком случае в рамках рассмотренных моделей. Средние два типа взаимодействия возможны лишь в области  $dQ/d\omega \approx 0$ . Это дает основание предполагать, что подобные виды взаимодействий будут присутствовать и в моделях, лагранжианы которых допускают более высокие группы симметрии, в случае, если зависимость соответствующего «изозаряда» («изоспина» и т. п.) будет иметь экстремальные точки аналогично рассмотренным моделям.

Более детальное исследование процесса взаимодействия квазисолитонов выявило [125г], что он зависит также от прицельного параметра  $p$  или, что то же самое, углового момента  $l$  и начальной разности фаз  $\Delta\theta$ . Численные эксперименты показали, что:

- а) существует некоторая резонансная область по моменту  $l$ , в которой неупругость взаимодействия квазисолитонов резко возрастает (см. также [124]);
- б) чисто антисимметричная начальная полевая конфигурация  $\Delta\theta = \pi \pm 2\pi l$  приводит к упругому расталкиванию солитонов.

Как уже отмечалось, стационарные конфигурации действительных полей не могут быть устойчивы, т. е. действительных квазисолитонов не существует. Более того, не во всех системах с внутренней изо-

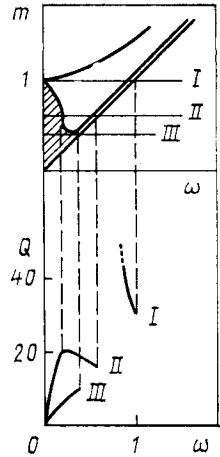


Рис. 15.

\* Вспомним странные резонансы в (1, 1)-мерной модели Хиггса ( $\varphi^4$ ).

симметрией и не всегда существуют устойчивые квазисолитоны. Такие решения могут возникать в системах, в которых поверхность постоянной энергии в функциональном пространстве может иметь условные или локальные минимумы. Естественно возникает вопрос: существуют ли в подобных системах нестационарные устойчивые

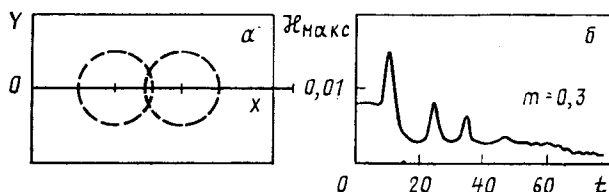


Рис. 16.

конфигурации действительных полей? При этом нестационарность играет роль стабилизирующего фактора, аналогичного зависимости  $\exp(-i\omega t)$  в случае  $U(1)$ -группы\*.

Это предположение было проверено в серии численных экспериментов в рамках модели (62), проведенных в Дубне [125в]. Результаты,

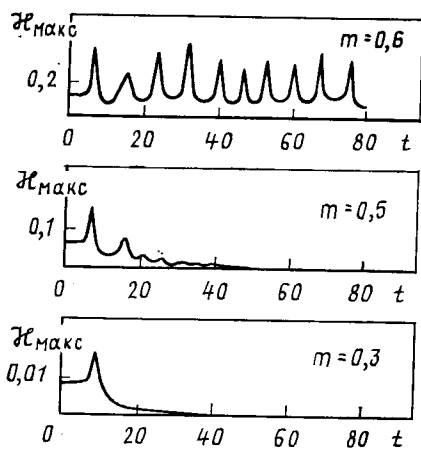


Рис. 17.

полученные в этих экспериментах, выглядели, на первый взгляд, парадоксально. Помещая, например, неустойчивые солитоноподобные объекты достаточно близко друг к другу — так, чтобы кинематическое время их взаимодействия было меньше времени распада каждого из них (рис. 16, а), мы наблюдали при достаточно малых скоростях встречного движения квазисолитонов возникновение их связанного состояния — двухмерного биона. Амплитуда в центре биона регулярно осциллировала, лишь весьма незначительно уменьшаясь в течение счета (несколько периодов колебаний, рис. 16, б). Дальнейшее изучение показало, что аналогичные объекты могут возникать и из достаточно тяжелого односолитонного начального состояния. Поведение во времени и вид обнаруженных бионов качественно совпадают с пульсонами, описанными выше (рис. 17). Тем самым показано, что существование пульсонов не является привиле-

\* Вспомним задачу П. Л. Капицы о маятнике с качающейся точкой подвеса.

гией систем с вырожденным вакуумом типа уравнений поля Хиггса и синус-Гордона, где полевая функция осциллирует между двумя смежными вакуумами. Заметим, что аналогичные пульсоны естественно возникают и в рамках системы (63).

Тем самым была подтверждена гипотеза, что в моделях с достаточно сложной поверхностью постоянной энергии, допускающих существование устойчивых заряженных солитонов, существуют долгоживущие (устойчивые) пульсоны, т. е. квазипериодические решения\*.

Эта гипотеза позволяет с единой точки зрения трактовать все полученные до сих пор результаты по взаимодействию квазисолитонов. В рассмотренных моделях кроме устойчивых (и неустойчивых) заряженных ( $Q \neq 0$ ) квазисолитонов существуют устойчивые (и неустойчивые) заряженные ( $Q \neq 0$ ) и незаряженные ( $Q = 0$ ) пульсоны. Это означает, что при определенных параметрах квазисолитонов (как заряженных, так и незаряженных) эволюция их взаимодействия или завершается образованием соответствующего пульсона (связанного состояния), или проходит через пульсонную фазу (резонанс) перед развитием неустойчивости (распада).

С этой же точки зрения перестает быть парадоксальным факт появления устойчивого пульсона в результате столкновения двух неустойчивых квазисолитонов. Пульсоны, подобные описанным выше, были обнаружены в численных экспериментах [127] в пространстве размерности (1, 1) при столкновениях заряженных квазисолитонов с различными суммарными «изозарядами» ( $Q = 2Q_1$ ,  $Q_1 = Q_2$  и  $Q = Q_1 + Q_2 = 0$ ,  $Q_1 = -Q_2$ ). По-видимому, в первом случае имеем дело с рождением заряженного пульсона, поскольку  $Q_p \propto d\vartheta/dt \neq 0$  (см. рис. 2 работы [127]), во втором случае — с рождением незаряженного пульсона  $Q_p \rightarrow 0$  (см. [127, с. 383]). При этом область начальных условий для рождения незаряженного пульсона значительно более узкая.

Наконец, в работе [124] были также, по-видимому, обнаружены пульсоны, но уже в рамках уравнения Шредингера с нелинейностью вида  $\varphi^3 - \alpha\varphi^5$ . Существуют ли неодномерные пульсоны в рамках уравнения Шредингера с другими видами нелинейности? В численных экспериментах, выполненных польской группой ученых, во всяком случае в модели гауссонов, неодномерные пульсоны не обнаружены [36]. Возможное объяснение устойчивости обнаруженных пульсонов с помощью некоторого адиабатического инварианта можно найти в [126]. Отметим также, что устойчивые связанные состояния из неустойчивых конститюентов уже давно известны в ядерной физике (дейтоны). Так же как и в нашем случае, это состояние мало похоже на связанное состояние двух классических объектов типа Луна — Земля, двойные звезды и т. п. При формировании связанного состоя-

\* Это предположение было высказано ранее в [126].

ния входящие в состав системы конститьюенты теряют свою индивидуальность.

Несколько слов о методике расчетов. В работе [124] в двумерных расчетах была применена пространственная сетка  $25 \times 25$ , при интегрировании по  $x, y$  использовали разностную схему четвертого порядка (шаг равен 0,8), интегрирование по  $t$  производили с помощью метода прогноза и коррекции пятого порядка точности с шагом  $\Delta t = 0,15$ . Расчеты проводились на IBM 370/165. Время просчета одного варианта с данными  $K_{in}$  и  $l$  составляло около 15 мин. Трехмерный расчет с 15 точками в перпендикулярном направлении займет в 15 раз большее время, т. е. около 4 ч. Однако авторы со ссылкой на Флокарда утверждают, что они могут улучшить технику интегрирования по времени, уменьшив время счета почти на порядок. При этом становится реальным исследование трехмерных взаимодействий с той же степенью симметрии, т. е. встречные столкновения одинаковых солитонов с равными по модулю начальными фазами.

В [125] вначале с заданной точностью находили односолитонное решение  $\tilde{\psi}(r)$ , которое затем аппроксимировалось набором гауссовых экспонент (смешанный метод см. выше):

$$\tilde{\psi}(r) \approx \sum_i^n \alpha_i \exp \{ \beta_i (r - \delta_i)^2 \}.$$

Подбирая  $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ , удается при  $n = 3$  приближать  $\tilde{\psi}(r)$ , так что при всех  $\omega$  имеем:

$$\max |\tilde{\psi}(r) - \sum_i^3 \alpha_i \exp \{ \beta_i (r - \delta_i)^2 \}| \leq 0,005 \tilde{\psi}(0).$$

С помощью преобразования Лоренца получаем движущийся солитон

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = & \sum_{i=1}^3 \alpha_i \exp \{ \beta_i (\sqrt{\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2} - \delta_i)^2 \} \times \\ & \times \exp \{ -i\omega\gamma(t - vx) \}. \end{aligned}$$

Столкновение этих солитонов изучалось с помощью симметричной разностной схемы второго порядка по  $x, y$  и  $t$ . Шаг по времени был  $\Delta t = 0,1$ , а шаг  $\Delta x = \Delta y$  выбирали из интервала  $(0,1 \div 0,4)$  в зависимости от параметра  $\omega$ . В точках  $t = 0, 1, 2, \dots$  вычисляли плотность энергии поля

$$\mathcal{H} = |\varphi_t|^2 + |\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 + \ln(1 + |\varphi|^2).$$

Для контроля точности расчетов использовалось соотношение

$$dE/dt = 0, \quad E = \int \mathcal{H} dx dy,$$

при этом максимум величины

$$\varepsilon_T = (E_0 - E_T)/E_0$$

не превосходил 0,01, здесь  $E_0 = E(t = 0)$ ,  $E_T = E(t = T)$ . Расчеты проводились на БЭСМ-6 (подробнее см. [125]).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нашем изложении основное внимание было сосредоточено скорее на математических, чем на физических, аспектах теории солитонов, с упором на приоритет ЭВМ в раскрытии их различных необычных свойств. Это было сделано сознательно, поскольку объем статьи не позволяет дать достаточно полного обзора приложений этой теории в различных областях физики (да автор и не ставил перед собой такой задачи). Достаточно сказать, что уже опубликован ряд обзорных статей и даже книг, где эти приложения нашли свое отражение. Упомянем здесь обзоры Раджарамана [128], Коулмена [129], Ли [130], Ребби [131], Л. Д. Фаддеева и В. Е. Корепина [132], Вадати, Мацумото и Умезавы [134] по солитонам в физике частиц и обзоры Бишопа [11], Ичикавы [94], А. С. Давыдова [60], Скотта и Лусадера [60], Маки [133], Вадати [137] по солитонам в теории конденсированного состояния, плазмы и биологии. Наконец, в последнее время растет количество публикаций по экспериментальному подтверждению существования солитонов, особенно в физике конденсированного состояния, где с их помощью удалось предсказать открытые впоследствии явления (см. [135] и популярную статью Булофа [136]). Можно с уверенностью сказать, что в настоящее время это направление продолжает успешно развиваться как в математическом, так и в физическом аспектах.

В двухмерном пространстве — времени уже развиты и продолжают развиваться новые мощные методы исследования интегрируемых систем, основанные на спектральном преобразовании, теоретико-групповом, алгебраическом и геометрическом подходах. Полученные результаты весьма впечатляющи [15] и [256]. Для неинтегрируемых систем постоянно совершенствуются методы вычислительных исследований, а также развивается постепенно адекватная теория возмущений солитонов [25в, 25г].

Работы по динамике неодномерных солитонов только начинаются, но уже имеющиеся данные позволяют надеяться, что в ближайшем будущем мы будем свидетелями новых и, возможно, неожиданных открытий в этой области, причем численные исследования не сдадут своих передовых позиций.

Отметим, что полученные результаты представляют несомненный интерес с точки зрения физических приложений. Обнаруженные резонансы привлекаются при интерпретации экспериментов с ядерными молекулами [138]. Существование многомерных пульсонов может пролить свет на свойства мягкой моды при структурных фазовых переходах [139], а также джозефсоновской линии большого размера [140]. Этот список можно было бы продолжить.

В заключение подчеркнем, что идея о важности или даже необходимости исследований в этой области начинает проникать во все более широкие круги научной общественности, что видно из следующих высказываний: «...мы должны принимать во внимание все возможные пути, по которым список элементарных частиц, возникающих из уравнений квантовой теории поля, может быть расширен. Здесь, конечно, и обычные связанные состояния и голдстоуновские бозоны и фермионы ... Это могут быть солитоны (такие, как монополи) или другие ЧПР и связанные состояния, включающие их». И далее: «в любой квантовой теории поля мы должны понимать, насколько все эти вторичные объекты могут при настоящих энергиях маскироваться под элементарные частицы», — Гелл-Ман в [141]. И еще более круто: «...если расширенная супергравитация или какая-либо аналогичная теория будущего окажется верной, то может быть только косвенная связь между элементарными полями и частицами, которые мы считаем сегодня элементарными. Если известные фермионы ведут себя при данной спиральности как комплексное спинорное представление группы  $SO_{4n+2}$  или  $E_6$ , то эта связь даже не такая, как в составной модели. Все или большинство известных частиц должны будут соответствовать ЧПР фундаментальных уравнений с алгебраическими свойствами, отличными от фундаментальных полей...» (Гелл-Ман, Рамонд и Слански в работе [142]). Аналогичные мысли ранее и неоднократно высказывались Л. Д. Фаддеевым.

В этой связи уместно вспомнить поговорку «...природа сложна и нелинейные уравнения сложны, поэтому следует моделировать природу с помощью нелинейных уравнений...», которую можно найти в книге Уилера [143]. Действительно, как мы видели выше, динамика даже простых нелинейных систем весьма богата, разнообразна, а иногда и неожиданна.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Scott A., Chu F., McLaughlin D.— Proc. IEEE, 1973, v. 61, p. 1443.
2. Makhankov V.— Phys. Reports, 1978, v. 35, p. 1.
3. Friedberg R., Lee T. D., Sirlin A.— Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 2739; Nucl. Phys. B, 1976, v. 115, p. 1, 32; Friedberg R., Lee T. D.— Phys. Rev. D, 1977, v. 15, p. 1694; v. 16, p. 1096; Preprint CU-TP-118. N. Y., Columbia Univ., 1978; Lee T. D.— Preprint CU-TP-127. N. Y., Columbia Univ., 1978.
4. Miura R.— SIAM Rev., 1976, v. 18, p. 412.
5. Захаров В. Е.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 219.
6. Захаров В. Е., Шабат А. Б.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 118.

7. Cercignani C.— Riv. Nuovo cimento, 1977, v. 7, p. 429.
8. Spatschek K.— F. Phys., 1976, Bd 24, S. 687; Lee Y., Morales G. Soliton— Like Structures in Plasmas, Invited paper at the Soltion Confer. Tucson. Arizona, 1976.
9. ter Haar D. Non-linear Propagation Behaviour in Optical and Other Physical Systems. Preprint Ref. 54/77 Univ. of Oxford, 1978.
10. Barone A. e.a.— Riv. Nuovo cimento, 1971, v. 1, p. 227.
11. Bishop A.— Physica Scripta, 1979, v. 20, p. 409.
12. Захаров В. Е.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 1745.
13. Nishikawa K. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 148.
14. Makhankov V. Preprint E5-8389, Dubna, 1974; Phys. Lett. A, 1974, v. 50, p. 42.
15. Теория солитонов. Под ред. С. П. Новикова М., Наука, 1980.
16. Christiansen P., Olsen O.— Phys. Lett. A, 1978, v. 68, p. 185; Phys. Scripta, 1979, v. 20, p. 531; Christiansen P., Lomdahl P.— Preprint DCAMM N 198, Lyngby, Denmark, 1980; Physica D 1981, v. 2, p. 482.
17. Bock T., Kruskal M.— Phys. Lett. A, 1979, v. 74, p. 173.
18. Dodd P., Bullough R., Duckworth S.— J. Phys. A. Math. Gen., 1975, v. 8, p. L64.
19. Duckworth S. e.a.— Phys. Lett. A, 1976, v. 57, p. 19.
20. Ablowitz M., Kruskal M., Ladik J. SIAP reports N 870.
21. Peregrine D.— J. Fluid Mech., 1966, v. 25, p. 321.
22. Benjamin T.— J. Fluid Mech., 1966, v. 25, p. 241; 1967, v. 29, p. 559.
23. Ono H.— J. Phys. Soc. Japan, 1975, v. 39, p. 1082.
24. Ablowitz M., Kodama Y., Satsuma J.— Phys. Lett. A, 1979, v. 73, p. 283; Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 687.
25. Various papers in: a) Miura R. ed. Bäcklund Transformation. The Inverse Scattering Methods, Solitons and Their Application. Lectures Notes in Mathematics. Berlin—N. Y., Springer, 1976; б) Calogero F. ed. Non-linear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform. London, Pitman, 1978; в) Solitons and Condensed Matter Physics. Eds A. Bishop and T. Schneider. Springer Series in Solid-State Sciences 8, 1978; r) Wilhelmsson H. e.a. Solitons in Theoretical Physics. A Topical Issue of Phys. Scripta, 1979, v. 19.
26. См. [256], p. 97—126.
27. Захаров В. Е., Михайлов А. В.— Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 47.
28. Михайлов А. В.— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 356.
29. Polmayer K.— Comm. Math. Phys., 1976, v. 46, p. 207; Lund F., Regge T.— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 1524.
30. Lund F.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 1175; Кулиш П. П.— ТМФ, 1977, т. 33, с. 272; 1976, т. 26, с. 198.
31. Eilbeck J.— См. [25в], p. 28—43.
32. Richtmyer R., Morton K. Difference Methods for Initial Value Problems. London, Interscience, 1967; Mitchell A. Computational Methods in Partial Differential Equations. London, J. Wiley, 1969; Ames W. Numerical Methods for Partial Differential Equations. London, Nelson, 1977; Jacobs D. e.a. The State of the Art in Numerical Analysis, London, Academic Press, 1977. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1971. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М., Наука, 1973.
33. Cooley J., Lewis P., Welch P.— IEEE Trans. Education E-12, 1969, N I, p. 27—34; Cooley J., Tukey J.— Math. Comp., 1965, v. 19, p. 297.
34. Pereira N., Sudan R., Denavit J.— Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 271, 936.
35. Fornberg B., Whitham G.— Philos. Trans. Roy. Soc. L., 1978, v. 289, p. 373.
36. Oficjalski J., Bialynicki-Birula I.— Acta Phys. Pol. B, 1978, p. 9, 759.
37. Zabusky N., Kruskal M.— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 240.
38. Abdulloev Kh., Bogolubsky I., Makhankov V.— Phys. Lett A, 1976, v. 56, p. 427.

39. Benjamin T., Bona J., Mahony J.— Phil. Trans. Roy. Soc. L., 1972, v. 272, p. 47.
40. Eilbeck J., McGuire G.— J. Comp. Phys., 1975, v. 19, p. 43; 1977, v. 23, p. 63.
41. Hammack J.— J. Fluid Mech., 1973, v. 60, p. 769.
42. Hirota R.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 810.
43. Boussinesq J.— Mem. Acad. Sci. (Paris), 1877, v. 23, p. 1.
44. Bogolubsky I.— Comp. Phys. Comm., 1977, v. 13, p. 149.
45. Ogino T., Takeda S.— J. Phys. Soc. Japan, 1975, v. 39, p. 1365.
46. Дегтярев Л. М., Маханьков В. Г., Рудаков Л. И.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 553.
47. Bona J., Pritchard W., Scott L.— Preprint N 94, Fluid Mech. Res. Inst. Univ. of Essex, 1978.
48. Santarelli A.— Nuovo cimento B, 1978, v. 46, p. 179.
49. Karney C., Sen A., Chu F.— Preprint Plasma Phys. Lab. PPPL-1455. N. Y., Princeton Univ., 1978.
50. Karney C., Sen A., Chu F.— Preprint Plasma Phys. Lab. PPPL-1452. N. Y., Princeton Univ., 1978.
51. Hirota R.— J. Phys. Soc. Japan, 1972, v. 33, p. 1456.
52. Meiss J., Pereira N.— Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 700.
53. Joseph R.— J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 2251.
54. Yajima N., Outi A.— Prog. Theor. Phys., 1971, v. 45, p. 1997.
55. Захаров В. Е., Шабат А. Б.— ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 1627.
56. Abdulloev Kh., Bogolubsky I., Makhankov V.— Phys. Lett. A, 1974, v. 48, p. 161.
57. Satsuma J., Yajima N.— Suppl. Prog. Theor. Phys., 1974, v. 55, p. 284.
58. Chen H., Lee Y., Pereira N.— Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 187.
59. Fedyanin V., Makhankov V.— Phys. Scripta, 1979, v. 20, p. 552.
60. Davydov A.— Ibid., p. 387; Scott A., Lusader S.— Ibid., p. 395.
61. Abdulloev Kh., Bogolubsky I., Makhankov V.— Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 21.
62. Lamb G. L.— J. Rev. Mod. Phys., 1971, v. 43, p. 99.
63. Yajima N., Oikawa M.— Prog. Theor. Phys., 1976, v. 56, p. 1719.
64. Thornhill S., ter Haar D.— Phys. Rep. C, 1978, v. 43, p. 43.
65. Yajima N. e.a.— Res. Inst. Appl. Phys. Reports XXII, 1975, v. 70, p. 89; Preprint IPPJ-319, Nagoya Univ., 1978.
66. Denavit J., Kruer W.— Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 1782; Langdon A.— Preprint UCRL-80446, 1977; UCRL-80666, 1978; Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 163.
67. Valeo E., Kruer W.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 750; Lee Y., Morales G. Invited paper at Soliton Conference in Tucson, — Arizona, Jan., 1976 and referencies therein.
68. Bogolubsky I., Makhankov V.— Preprint JINR E4-9425, Dubna, 1975; Физика плазмы, 1976, т. 2, с. 974.
69. Манаков С. В.— ЖЭТФ, 1976, т. 67, с. 543.
70. Михайлов А. В.— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 443.
71. Sagdeev R., Galeev A. Non-linear Plasma Theory. N. Y., Benjamin, 1969, p. 92.
72. Montes C. Plasma Phys. Non-linear Theory and Experiments. N. Y., Plenum, 1977, p. 222; Astroph. J., 1977, v. 216, p. 329.
73. Makhankov V., Shchinov B.— Comp. Phys. Comm., 1972, v. 4, p. 327; Communication of JINR P9-6432, Dubna, 1972.
74. Montes C., Peyraud J., Hénon M. Preprint LPMC Nice, 1978; Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 176.
75. Fernandes J., Reinisch G.— Physica A, 1978, v. 91, p. 393.
76. Fernandes J. e.a.— Phys. Lett. A, 1978, v. 66, p. 175.
77. Seeger A., Donth H., Kochendorfer A.— Z. Phys. B, 1953; Bd 134, S. 173.
78. Perring J., Skyrme T.— Nucl. Phys., 1962, v. 31, p. 550.



79. Кудрявцев А. Е.— Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 178.
80. Getmanov B.— Preprint JINR P2-10208, 1976; Phys. Lett. B, 1977, v. 66, p. 39.
81. McLaughlin D., Scott A.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1817.
82. Caudrey P., Eilbeck J., Gibbon J.— Nuovo Cimento B, 1975, v. 25, p. 497—512.
83. Ablowitz M. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 1262; Фаддеев Л. Д., Тахтаджан Л. А.— ТМФ, 1974, т. 21, с. 160.
84. Dodd P., Bullough R.— Proc. Roy. Soc. London A, 1976, v. 351, p. 499; v. 352, p. 481.
85. а) Fogel M. e.a.— Phys. Rev. B, 1977, v. 15, p. 1578; б) Rice M. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 423.
86. а) Kaup D.— SIAM J. Appl. Math., 1976, v. 31, p. 124; б) Kaup D., Newell A.— Proc. Roy. Soc. London A, 1978, v. 361, p. 413; в) Kaup D., Newell A. Prediction of a Non-linear, Oscillating Dipolar Excitation in One-Dimensional Condensates. Preprint Clarkson Coll. of Techn., 1978.
87. а) Schneider T., Stoll E.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1254; Phys. Rev. B, 1978, v. 17, p. 1302; б) Stoll E., Schneider T., Bishop A. Evidence for Breather Excitation in the Sine-Gordon Chain. Preprint IBM Res. Lab. PACS No 0340, 1978.
88. Krumhansl J., Schrieffer J.— Phys. Rev. B, 1975, v. 11, p. 3535.
89. Laedke E., Spatschek K. H.— Phys. Rev. Lett., 1978, v. 41, p. 1798.
90. Ott E., Sudan R.— Phys. Fluids, 1969, v. 12, p. 2388; 1970, v. 13, p. 1432.
91. Keener J., McLaughlin D.— Phys. Rev. A, 1977, v. 16, p. 777.
92. Fogel M. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1411.
93. Bishop A. Solitons and Physical Perturbation. Preprint PD Queen Mary Coll., 1977; в кн.: Солитоны в действии. Пер. с англ. М., Мир, 1981, с. 72.
94. Ichikawa Y.— Phys. Scripta, 1979, v. 20, p. 296.
95. Карпман В. И., Маслов Е.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 537; 1978, т. 75, с. 504; Phys. Lett. A, 1977, v. 60, p. 307; 1977, v. 61, p. 355.
96. Bondeson A., Lisak M., Anderson D.— Physica Scripta, 1979, v. 20, p. 343.
97. Cohen B., Watson K.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 345.
98. Arnold' V.— Sov. Math. Surveys, 1963, v. 18, p. 9; Moser J. Nearly Integrable and Integrable Systems. Preprint of a Lecture at Elastern Theor. Phys. Conf. Rochester. N. Y. Nov., 1976; Lectures on Celestial Mechanics. N. Y., Springer, 1971 (with C. Siegel).
99. Berryman J.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 771.
100. Zastavenko L.— J. Appl. Math. Mech., 1965, v. 29, p. 497.
101. Katyshev V., Makhaldiani N., Makhankov V.— Phys. Lett. A, 1978, v. 66, p. 456.
102. Yajima N.— Progr. Theor. Phys. Japan, 1974, v. 52, p. 1066.
103. Захаров В. Е., Рубенчик А. М.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 997; Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 115; Schmidt G.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 724.
104. Pereira N., Sen A., Bers A.— Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 117.
105. Hasegawa A., Tappert F.— Appl. Phys. Lett., 1973, v. 23, p. 142.
106. Pereira N.— Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 1735.
107. Watanabe S.— J. Phys. Soc. Japan, 1978, v. 45, p. 276.
108. Currie J. e.a.— Phys. Rev. B, 1977, v. 15, p. 5567.
109. Nakajima K. e.a.— J. Appl. Phys., 1974, v. 45, p. 4095; Nakajima K., Sawada Y., Onodera Y.— Ibid., 1975, v. 46, p. 5272.
110. Sen A. e.a.— MIT Rep. PLE-PRR 77-16, 1977.
111. Benney D., Roskes G.— Stud. Appl. Math., 1969, v. 48, p. 377; Freeman N., Darey A.— Proc. Roy. Soc. London A, 1975, v. 344, p. 427.
112. Anker D., Freeman N.— Ibid., 1978, v. 360, p. 529.
113. Hobart R.— Proc. Phys. Soc., 1963, v. 82, p. 201; 1965, v. 85, p. 610.
114. Derrick G.— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 1252.
115. Calogero F.— See Introduction in [256].

116. Bardeen W. e.a.— Phys. Rev. D., 1975, v. 11, p. 109.
117. Воронов Н., Кобзарев И., Конюхова Н.— Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 590.
118. Боголюбский И. Л., Маханьков В. Г.— Там же, 1976, т. 24, с. 15.
119. Боголюбский И. Л., Маханьков В. Г.— Там же, 1977, т. 25, с. 120.
120. Белова Т. и др.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1611.
121. Bogolubsky I.— Phys. Lett. A, 1977, v. 61, p. 205.
122. Bogolubsky I., Makhankov V., Shvachka A.— Ibid., v. 63, p. 225.
123. а) Marques G., Ventura I.— Preprint IFUSP P-83, 1976. б) Боголюбский И. Л.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 422.
124. Sandhya Devi, Strayer M., Irvine J.— TDHF Calculation for Nuclear Collisions: Model Studies of Alpha-Alpha Scattering. Daresbury Lab. Preprint DL/NSF/D83, 1978; J. Phys. G, 1979, v. 5, p. 281.
125. а) Makhankov V., Kummer G., Shvachka A. Interaction of Non-One-Dimensional Classical Q Solitons. Preprints JINR E-2-11579; P2-11913; Physica Scripta., 1979, v. 20, p. 454;— Phys. Lett. A, 1979, v. 70, p. 171; б) Маханьков В. Г., Швачка А. Б. Препринт ОИЯИ P2-13041, Дубна, 1980; Physica D, 1981, v. 3, p. 396; в) Маханьков В. Г., Куммер Г., Швачка А. Б. Препринт ОИЯИ P2-13042, Дубна, 1980; Physica D, 1981, v. 3, p. 344; г) Маханьков В. Г., Боголюбский И. Л., Куммер Г., Швачка А. Б. Препринт ОИЯИ P2-80-367, Дубна, 1980; Physica Scripta, 1981, v. 23, p. 767.
126. Манаков С. В.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 589; Makhankov V.— Physica Scripta, 1979, v. 20, p. 558.
127. Simonov Yu., Tjon J.— Phys. Lett. B, 1979, v. 85, p. 380.
128. Rajaraman R.— Phys. Rep. C, 1975, v. 21, p. 227.
129. Coleman S. Classical Lumps and Their Quantum Descendants. Ed. Zichichi A. New Phenomena in Subnuclear Physics. N.Y., Plenum, 1977.
130. Lee T. D.— Physica Scripta, 1979, v. 20, p. 440; Phys. Rep. C, 1970, v. 23, p. 254—258.
131. Rebbi C. Solitons in Particle Physics. Preprint BNL-24920, N.Y., Upton, 1978; Scient. Amer., 1979, v. 240, p. 92.
132. Faddeev L., Korepin V.— Phys. Reports C, 1978, v. 42, p. 1.
133. Maki K.— Physica B, 1977, v. 90, p. 84.
134. Wadati M., Matsumoto H., Umezawa H.— Phys. Rev. B, 1978, v. 18, p. 4077; Extended Objects Created by Goldstone Bosons (Phys. Rev. D, 1978, v. 18, p. 520); Phys. Lett. B, 1978, v. 73, p. 448.
135. Mikeska H.— J. Phys. C, 1978, v. 11, p. L. 29; Kjems J., Steiner M.— Phys. Rev. Lett., 1978, v. 41, p. 1137.
136. Bullough R.— Phys. Bull., 1978, p. 78.
137. Wadati M.— Phys. Reports C, 1979, v. 50, p. 87.
138. Бромли Д.— УФН, 1980, т. 131, с. 695.
139. Schneider T., Stoll E.— Phys. Rev. B, 1976, v. 13, p. 1216; Ferroelectrics, 1980, v. 24, p. 67.
140. Christiansen P., Lomdahl P., Zabusky N.— Preprint DCAMM; Lyngby, Denmark. 1981; Appl. Phys. Lett., 1981, v. 39, p. 170.
141. Gell-Mann M.— Preprint CERN TH. 2855, Geneva, 1980.
142. Gell-Mann M., Ramond P., Slansky R.— In: Supergravity. Eds P. Van Nieuwenhuizen and D. Freedman. North-Holland Publ. Comp., 1979.
143. Уилер Д. В кн.: Гравитация, нейтрино и Вселенная. М. Изд-во иностр. лит. 1962.