«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1983, ТОМ 14, ВЫП. 2

УДК 539.141

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

В. В. Комаров, А. М. Попова, В. Л. Шаблов

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

Для интегрального оператора рассеяния двух квантовомеханических частиц во внешнем поле получено разложение, в котором в явном виде выделены все полюсные (главные) особенности, отвечающие образованию связанных состояний в независимых подсистемах (связанные состояния первой частицы в поле, второй частицы и двух частиц). Для неизвестных функций этого разложения (компонент интегрального оператора рассеяния) получена система интегральных уравнений с ядрами, имеющими только интегрируемые особенности. Показана связь элементов S-матрицы с компонентами полного оператора рассеяния. Исследованы спектральные свойства полной функции Грина системы двух частиц в поле. Предложен метод обобщения этого спектрального анализа на случай задачи трех тел с произвольными массами, позволяющий описать связанные состояния и резонансы, возникающие в указанной системе.

The spectral decomposition of the integral scattering operator for two quantummechanical particles in a force field was obtained. All pole (main) singularities corresponding to the bound states in independent subsystems (the bound states of the first particle in the force field, the bound states of the second particle in the force field and the two particle bound states) are singled out. The integral equations with integrable singularities in the kernels for the unknown functions of this decompositions (the components of the integral scattering operator) were obtained. The connections were shown between the S-matrics elements and the total scattering operator components. The spectral properties of the total Green's function of the two particles in the force field were investigated. The bound states and the resonances in the considered systems of three particles with arbitrary masses were investigated by the generalized spectral analysis method.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе представлен метод решения задачи о рассеянии двух нерелятивистских частиц, находящихся во внешнем поле. Исследование этой квантовомеханической проблемы интересно не только потому, что она имеет большое прикладное значение в различных областях ядерной и атомной физики, квантовой химии и т. д., но и потому, что данная задача представляет простейший многочастичный процесс, который имеет все основные черты многоканального рассеяния в задачах $N \geqslant 3$ тел с проявлением связанных состояний, утопленных в непрерывном спектре.

В основе предложенного в настоящей работе метода решения задачи о взаимодействии двух частиц во внешнем поле лежит теория интегральных уравнений для амплитуд рассеяния частиц в системе.

В последнее время эта теория получила развитие * как в стационарной, так и в нестационарной постановке по следующим причинам. В отличие от традиционного метода описания многочастичных задач на основе дифференциального уравнения Шредингера, где необходимо сначала определить в явном виде векторы всех асимптотических состояний системы, в интегральном подходе достаточно знать характер особенностей ядра оператора рассеяния частиц в системе импульсного представления и перестроить ряд теории возмущений (временной или стационарной) в систему интегральных уравнений таким образом, чтобы известные особенности полного оператора рассеяния были бы представлены в ядрах и свободных членах этих уравнений в явном виде. Здесь имеются в виду полюсы (главные особенности), соответствующие образованию связанных подсистем в полной системе частиц, и δ-особенности, соответствующие закону сохранения импульса и энергии в независимых подсистемах.

Как показывает опыт, такая перестройка ряда теории возмущений [5, 7, 9, 10, 13, 14] позволяет получать уравнения только с динамическими особенностями и, следовательно, решить задачу численно. Обсуждаемая задача о взаимодействии двух частиц во внешнем поле не является частным случаем задачи трех тел, так как полные операторы рассеяния в этих задачах имеют разные типы особенностей. Действительно, в рассматриваемой задаче оператор, во-первых, может иметь полюсы, которые соответствуют связанным состояниям, утопленным в непрерывном спектре, при выключении взаимодействия между частицами. Во-вторых, в задаче двух частиц в поле по сравнению с задачей трех тел с конечными массами имеется нового типа несвязанный процесс, соответствующий независимому рассеянию частиц внешним полем. Оператор рассеяния этого процесса содержит две δ-функции, обусловленные законами сохранения энергии каждой частицы. Далее, сингулярные амплитуды рассеяния данного несвязанного процесса не выделяются в явном виде при переходе к бесконечному пределу по массе одной из частиц в свободном члене и ядрах интегральных уравнений задачи трех тел с конечными массами.

Следовательно, чтобы получить интегральные уравнения, допускающие численное решение для задачи двух частиц в поле, необходимо перестроить теории возмущений соответствующим методом. В [6] в рамках нестационарной теории возмущений был дан вывод системы интегральных уравнений для задачи двух частиц и доказана эквивалентность полученных уравнений соответствующим уравнениям в стационарной теории возмущений.

В настоящей работе рассмотрим уравнения, полученные в не зависящей от времени теории возмущений, так как этот подход более традиционен в теории многочастичного рассеяния, хотя прин-

* Изложение различных вопросов интегральных уравнений теории многочастичного рассеяния можно найти, например, в [1—10].

цип перестройки уравнения Липпмана — Швингера полностью заимствован из метода перестройки ряда четырехмерной теории возмущений.

1. ГАМИЛЬТОНИАНЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ КАНАЛОВ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДВУХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Постановка задачи. Сформулируем здесь те условия, при которых мы решаем задачу о взаимодействии двух квантовомеханических частиц во внешнем поле. Определим гамильтониан данной задачи в виде:

$$H = H_0 + V; \quad H_0 = H_{01} + H_{02}; \quad V = V_1 + V_2 + V_{12}. \tag{1}$$

Здесь оператор H_{0i} обозначает кинетическую энергию частицы i с массой m_i. Операторы V_α $(\alpha = 1,2)$ — потенциалы взаимодействия частиц 1 и 2 с внешним полем, а оператор V_{12} — потенциал взаимодействия частиц 1 и 2 между собой. Свойства этих операторов в импульсном представлении даны ниже. Предположим, что частицы 1 и 2 являются нерелятивистскими и описываются импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ или в координатном представлении векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ соответственно. Тогда потенциалы V_α $(\alpha = 1, 2)$ оказываются функциями только r_α, а двухчастичный потенциал V_{12} — функция $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ вектора относительного расстояния между частицами. Гамильтониан H действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$ квадратично интегрируемых функций по отношению к мере $d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2$.

Действие оператора H на произвольную функцию $f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)$ из $\mathcal{G}$ имеет вид:

$$Hf(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) = (p_1^2/2m_1) f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) + (p_2^2/2m_2) f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) + (V_1 + V_2 + V_{12}) f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2). \tag{2}$$

Операторы V_α $(\alpha = 1, 2, 12)$ в (2) являются интегральными операторами:

$$\left.\begin{aligned} V_1 f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) &= \int d\mathbf{q}_1 V_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) f(\mathbf{q}_1\mathbf{p}_2); \\ V_2 f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) &= \int d\mathbf{q}_2 v_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) f(\mathbf{p}_1\mathbf{q}_2); \\ V_{12} f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) &= \int d\mathbf{q}_{12} \int d\mathbf{Q}_{12} v_{12}(\mathbf{p}_{12} - \mathbf{q}_{12})\, \delta(\mathcal{P}_{12} - \mathbf{Q}_{12}) f(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь $v_\alpha(\mathbf{p}_\alpha)$ — фурье-преобразования функций $v_\alpha(\mathbf{r}_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 12)$; импульсы $\mathbf{q}_{12}$ и $\mathbf{Q}_{12}$ определены соотношениями:

$$\mathbf{q}_{12} = (m_2\mathbf{q}_1 - m_1\mathbf{q}_2)/M; \quad \mathbf{Q}_{12} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2; \quad M = m_1 + m_2. \tag{4}$$

Везде в дальнейшем будем предполагать, что функции $v_\alpha(\mathbf{p}_\alpha)$ удовлетворяют следующим условиям: 1. Вещественности $v(\mathbf{p}) = v(-\mathbf{p})^*$. 2. Ограниченности и убывания $|v(\mathbf{p})| \leqslant c\,(1 + |\mathbf{p}|)^{-1-\theta_0}$ $(\theta_0 > 1/2)$. 3. Гладкости $|v(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - v(\mathbf{p})| \leqslant c\,(1 + |\mathbf{p}|)^{-1-\theta_0}\,|\mathbf{h}|^{\mu_0} \times$

$\times(|\mathbf{h}|\leqslant 1,\ \mu_0>0)$. 4. Гладкости и ограниченности производной

$$\left|\frac{d}{d\mathbf{p}}v(\mathbf{p})\right|\leqslant c(1+|\mathbf{p}|)^{-1-\theta_0};\quad \left|\frac{d}{d\mathbf{p}}[v(\mathbf{p}+h)-v(\mathbf{p})]\right|\leqslant$$
$$\leqslant c(1+|\mathbf{p}|)^{\theta_0-1},|\bar{\mathbf{h}}|^{\mu_0}(|\bar{\mathbf{h}}|\leqslant 1,\ \mu_0>0).$$

Определим теперь гамильтонианы h_α $(\alpha=1, 2, 12)$ в виде:

$$\left.\begin{aligned} &h_i=H_{0i}+V_i,\ i=1,\ 2;\\ &h_{12}=h_{012}+V_{12}.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Оператор h_{012} в (5) имеет смысл свободного гамильтониана внутреннего движения в подсистеме частиц 1 и 2. Заметим, что гамильтониан H_0 можно представить в виде

$$H_0=h_{012}+H_{012},\tag{6}$$

где H_{012}— гамильтониан свободного движения центра масс пары частиц 1 и 2 и, следовательно,

$$h_{012}f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)=(p_{12}^2/2\mu_{12})f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2);\quad H_{012}f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)=(\mathcal{P}_{12}^2/2M)f(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2);$$
$$\mu_{12}=m_1m_2/M.\tag{7}$$

Для класса потенциалов $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям 1—4, доказано в [1—3, 11] следующее свойство. Дискретный спектр (5) оператора H и h_α $(\alpha=1, 2, 12)$ имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений, причем конечной кратности. Именно это свойство позволит изучить структуру сингулярностей T-матрицы рассматриваемой задачи.

Условия 1—4 в координатном представлении соответствуют тому, что потенциал $v(\mathbf{r})$ убывает как $r^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Следовательно, $v(\mathbf{r})$ — квадратично-интегрируемая функция, и можно определить на $\mathcal{G}$ оператор рассеяния $T(z)$ с помощью соотношений [12]:

$$\left.\begin{aligned} &T(z)=V+VG(z)V;\ T(z)=\\ &=V+VG_0(z)T(z),\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

где $G(z)=(z-H)^{-1}$ — полная функция Грина системы (резольвента оператора H); $G_0(z)=(z-H_0)^{-1}$ — свободная функция Грина системы; $z=E+i0$; E — энергия системы.

Определим также операторы:

$$t_\alpha(z)=V_\alpha+V_\alpha g_\alpha(z)V_\alpha;\ t_\alpha(z)=V_\alpha+V_\alpha g_{0\alpha}(z)t_\alpha(z),\tag{9}$$

где $g_\alpha(z)=(z-h_\alpha)^{-1}$ — резольвента оператора h_α; $g_{0\alpha}(z)=$ $=(z-H_{0\alpha})^{-1}$ $\alpha=1,\ 2$; $g_{012}(z)=(z-h_{012})^{-1}$ — соответствующие свободные функции Грина.

Система интегральных уравнений для амплитуд рассеяния двух частиц во внешнем поле. Рассмотрим уравнение Липпмана—Швингера для оператора рассеяния двух частиц в поле $T(z)$:

$$T(z)=(V_1+V_2+V_{12})+(V_1+V_2+V_{12})G_0(z)T(z).\tag{10}$$

Кроме особенности, соответствующей образованию связанного состояния двух частиц во внешнем поле при полной отрицательной энергии $z \in \sigma_{disc}(H)$, оператор $T(z)$, очевидно, должен иметь все особенности, которые имеют операторы рассеяния в независимых подсистемах, возможных в рассматриваемом случае, т. е. в подсистеме двух рассеивающихся частиц в отсутствие поля $t_{12}(z)$ и в подсистеме независимого рассеяния частиц на поле $N_{1,2}(z)$.

Перестроим уравнение (10) так, чтобы указанные выше особенности операторов были выделены в явном виде. Для этого представим оператор в виде двух слагаемых:

$$T(z) = T_{1,2}(z) + T_{12}(z), \tag{11}$$

где

$$T_{1,2}(z) = (V_1 + V_2) + (V_1 + V_2)\, G_0(z)\, T(z); \tag{12}$$

$$T_{12}(z) = V_{12} + V_{12} G_0(z)\, T(z). \tag{13}$$

Представление (11) позволяет в качестве ядер уравнений получить все возможные операторы рассеяния независимых подсистем в данной задаче и, следовательно, выделить в явном виде все возможные особенности. Действительно, если уравнение (12) умножить слева на оператор $[1 - (V_1 + V_2)]\, G_0(z)^{-1}$, а уравнение (13) — слева на оператор $[1 - V_{12}G_0(z)]^{-1}$, то для операторов $T_{1,2}(z)$ и $T_{12}(z)$ получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} T_{1,2}(z) &= N_{1,2}(z) + N_{1,2}(z)\, G_0(z)\, T_{12}(z); \\ T_{12}(z) &= t_{12}(z) + t_{12}(z)\, G_0(z)\, T_{1,2}(z). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Преобразуем систему (14), выделив амплитуды несвязанных процессов. Для этого введем операторы $L_{1,2}(z)$ и $L_{12}(z)$, связанные с операторами $T_{1,2}(z)$ и $T_{12}(z)$ следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} L_{1,2}(z) &= T_{1,2}(z) - N_{1,2}(z); \\ L_{12}(z) &= T_{12}(z) - t_{12}(z). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Тогда для операторов $L_{1,2}(z)$ и $L_{12}(z)$ будем иметь систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} L_{1,2}(z) &= N_{1,2}(z)\, G_0(z)\, t_{12}(z_{12}) + N_{1,2}(z)\, G_0(z)\, L_{12}(z); \\ L_{12}(z) &= t_{12}(z_{12})\, G_0(z)\, N_{1,2}(z) + t_{12}(z_{12})\, G_0(z)\, L_{1,2}(z). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Чтобы в дальнейшем преобразовать систему (16), необходимо иметь спектральное разложение операторов $N_{1,2}(z)$ и $t_{12}(z)$. Свойства оператора $t_{12}(z)$, а также операторов $t_1(z)$ и $t_2(z)$, определенных в (9), хорошо изучены в [4, 5], поэтому ниже приведем их без доказательства.

Свойства оператора $t(z)$. Условия 1—4 на потенциалы позволяют представить каждый из операторов $t_\alpha(z)$ в виде суммы сингулярной и несингулярной функций, причем сингулярная часть оператора $t_\alpha(z)$ имеет полюсной характер особенностей, которые возникают из-за существования дискретного спектра гамильтониана h_α. Условимся в дальнейшем считать, что дискретный спектр оператора h_α — $\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\alpha)$ состоит из одного отрицательного собственного значения кратности единица. Тогда для $t_\alpha(z)$ имеем

$$t_\alpha(z) = |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|/(z+\varkappa_\alpha^2) + \hat{t}_\alpha(z), \tag{17}$$

где $-\varkappa_\alpha^2 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(h_\alpha)$; $|\varphi_\alpha\rangle = V_\alpha|\psi_\alpha\rangle$; $|\psi_\alpha\rangle$ — собственная функция дискретного спектра оператора $h_\alpha : h_\alpha|\psi_\alpha\rangle = -\varkappa_\alpha^2|\psi_\alpha\rangle$. Оператор $\hat{t}_\alpha(z)$ в (17) не имеет особенности, более точно функция $\hat{t}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}'_\alpha, z)$ — гельдеровская функция своих переменных [5].

Сформулируем теперь ряд свойств волновых операторов рассеяния $\Omega_\alpha^\pm$. Операторы $\Omega_\alpha^\pm$, действующие на соответствующих гильбертовых пространствах функций $f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, 12$), определяются как сильный предел в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_\alpha^\pm = S - \lim_{t\to\mp\infty} \exp(\mathrm{i}h_\alpha t)\exp(-\mathrm{i}H_{0\alpha}t), \quad \alpha = 1, 2 \\ \text{и}\qquad & \\ &\Omega_{12}^\pm = S - \lim_{t\to\mp\infty} \exp(\mathrm{i}h_{12}t)\exp(-\mathrm{i}h_{012}t). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Для потенциалов взаимодействия из класса $\mathfrak{D}$ операторы $\Omega_\alpha^\pm$ ($\alpha = 1, 2, 12$) удовлетворяют условию асимптотической полноты. Именно произвольная функция f_α из соответствующего гильбертова пространства имеет представление

$$f_\alpha = \Omega_\alpha^\pm f_\alpha^\pm + f_d, \tag{19}$$

где $f_\alpha^\pm = (\Omega_\alpha^\pm)^+ f_\alpha$; $f_d = P_d f_\alpha$; P_d — проектор на дискретный спектр оператора $h_\alpha : P_d = |\psi_d\rangle\langle\psi_d|$. Кроме того, операторы $\Omega_\alpha^\pm$ характеризуются следующими свойствами [5]: а) оператор $\Omega_\alpha^\pm$ ортогонален к проектору P_d:

$$(\Omega_\alpha^\pm)^+ P_d = 0; \tag{20}$$

б) оператор $\Omega_\alpha^\pm$ изометричен:

$$(\Omega_\alpha^\pm)^+\Omega_\alpha^\pm = I_\alpha; \tag{21}$$

в) для любой ограниченной функции $\varphi(x)$ $-\infty < x < \infty$ имеет место соотношение:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(h_\alpha)\Omega_\alpha^\pm = \Omega_\alpha^\pm\varphi(H_{0\alpha}), \quad \alpha = 1, 2; \\ &\varphi(h_{12})\Omega_{12}^\pm = \Omega_{12}^\pm\varphi(h_{012}). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Свойство в) является следствием известных соотношений переброса для меллеровских операторов:

$$\left.\begin{aligned} &h_\alpha\Omega_\alpha^\pm = \Omega_\alpha^\pm H_{0\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \\ &h_{12}\Omega_{12}^\pm = \Omega_{12}^\pm h_{012}; \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

г) операторы $\Omega_\alpha^\pm$ связаны с оператором $t_\alpha(z)$ соотношением

$$\langle \mathbf{p}_\alpha | \Omega_\alpha^\pm | \mathbf{p}_\alpha^0 \rangle = \delta(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\alpha^0) + (\mathbf{p}_\alpha^{0\,2}/2m_\alpha - p_\alpha^2/2m_\alpha \pm \mathrm{i}0)^{-1} \times \\ \times t_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha^0, p_\alpha^{0\,2}/2m_\alpha \pm \mathrm{i}0) \qquad (24)$$

[при $\alpha = 12$ в (24) m_α следует заменить на μ_{12}].

Рассеяние двух невзаимодействующих подсистем частиц. Чтобы исследовать свойства оператора $N_{1,2}$, необходимо рассмотреть гамильтониан

$$H_{1,2} = h_1 + h_2 = H_0 + V_1 + V_2, \qquad (25)$$

определенный на $\mathcal{G}$.

Для операторов из (25) характерны следующие коммутационные свойства:

$$[h_1, h_2] = 0; \quad [H_{01}, H_{02}] = 0. \qquad (26)$$

Как будет видно из дальнейшего, коммутационные свойства (26) позволяют построить в явном виде функцию Грина $G_{1,2}(z) = (z - H_{1,2})^{-1}$ и соответствующий оператор рассеяния $N_{1,2}(z)$, определенный с помощью одного из следующих соотношений:

$$\left.\begin{array}{l} N_{1,2}(z) = (V_1 + V_2) + (V_1 + V_2)\, G_{1,2}(z)\, (V_1 + V_2); \\ G_{1,2}(z) = G_0(z) + G_0(z)\, N_{1,2}(z)\, G_0(z); \\ N_{1,2}(z) = (V_1 + V_2) + (V_1 + V_2)\, G_0(z)\, N_{1,2}(z). \end{array}\right\} \qquad (27)$$

Коммутационные соотношения (26) приводят к тому, что оператор эволюции такой системы равен произведению операторов эволюции каждой из независимых подсистем:

$$\exp(-\mathrm{i}H_{1,2}\, t) = \exp(-\mathrm{i}h_1 t)\exp(-\mathrm{i}h_2 t). \qquad (28)$$

Система с гамильтонианом (25) имеет три канала рассеяния, которые будем обозначать γ ($\gamma = 0, 1, 2$) и которым соответствуют канальные гамильтонианы: $H_0 = H_{01} + H_{02}$ для $\gamma = 0$, $H_1 = h_1 + H_{02}$ для $\gamma = 1$, $H_2 = h_2 + H_{01}$ для $\gamma = 2$. Кроме того, система с гамильтонианом (17) имеет локализованное состояние, при полной энергии системы $E = -\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2$, $-\varkappa_i^2$ — энергия связанного состояния в подсистеме с гамильтонианом h_i. Согласно (28) меллеровский оператор рассеяния для канала $\gamma = 0$ можно представить в следующем виде:

$$W_0^\pm f = S - \lim_{t \to \mp\infty} \exp(\mathrm{i}H_{1,2}\, t)\exp(-\mathrm{i}H_0 t) = \\ = S - \lim_{t\to\mp\infty} [\exp(\mathrm{i}h_1 t)\exp(-\mathrm{i}H_{01}t)] \times \\ \times [\exp(\mathrm{i}h_2 t)\exp(-\mathrm{i}H_{02}t)]\, f = (\Omega_1^\pm \otimes \Omega_2^\pm)\, f. \qquad (29)$$

Тензорное произведение в (29) означает, что матричный элемент

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | W_0^\pm | \mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0 \rangle = \langle \mathbf{p}_1 | \Omega_1^\pm | \mathbf{p}_1^0 \rangle \langle \mathbf{p}_2 | \Omega_2^\pm | \mathbf{p}_2^0 \rangle. \qquad (30)$$

Оставшиеся волновые операторы $W_1^{\pm}$ и $W_2^{\pm}$, соответствующие каналам 1 и 2:

$$W_2^{\pm} = \Omega_1^{\pm} \otimes P_2; \quad W_1^{\pm} = P_1 \otimes \Omega_1^{\pm}. \tag{31}$$

Асимптотическая полнота волновых операторов $\Omega_i^{\pm}$ ($i = 1, 2$) (27) приводит к тому, что любая функция из $\mathcal{G}$ допускает представление вида

$$f = W_0^{\pm} f_0^{\pm} + W_1^{\pm} f_1^{\pm} + W_2^{\pm} f_2^{\pm} + f_d, \tag{32}$$

где

$$f_\gamma^{\pm} = (W_\gamma^{\pm}) f \ (\gamma = 0,\ 1,\ 2); \ f_d = (P_1 \otimes P_2) f. \tag{33}$$

Из свойств одноканальных волновых операторов (20)—(23) вытекают следующие свойства операторов $W_\gamma^{\pm}$ ($\gamma = 0, 1, 2$):

$$\left.\begin{aligned} &(W_\gamma^{\pm})^+ W_{\gamma'}^{\pm} = I \times \delta_{\gamma\gamma'}; \quad (W_\gamma^{\pm})^+ (P_1 \otimes P_2) = 0; \\ &H_{1,2} W_0^{\pm} = W_0^{\pm} H_0; \quad H_{1,2} W_i^{\pm} = W_i^{\pm} (H_{0j} - \varkappa_i^2), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где $i \neq j$, $i, j = 1, 2$.

Поведение операторов $W_\gamma^{\pm}$ ($\gamma = 0, 1, 2$) приводит к следующему результату [13].

Функция Грина $G_{1,2}$ ($E + \mathrm{i}\tau$) для гамильтониана $H_{1,2}$, являющегося суммой коммутирующих гамильтонианов независимых подсистем, будет следующей:

$$G_{1,2}(E + \mathrm{i}\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi \mathrm{i}} g_1(\varepsilon + \mathrm{i}\tau_1) \otimes g_2(E - \varepsilon + \mathrm{i}\tau_2),$$

$$(\tau_1,\ \tau_2 > 0,\ \tau_1 + \tau_2 = \tau), \tag{35}$$

где g_i (z_i) — функция Грина независимой подсистемы с номером i:

Доказательство. Соотношение (35) эквивалентно следующему.

$$G_{1,2}(E + \mathrm{i}\tau) f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi \mathrm{i}} g_1(\varepsilon + \mathrm{i}\tau_1) \otimes g_2(E - \varepsilon + \mathrm{i}\tau_2) f \tag{36}$$

для любой функции f из $\mathcal{G}$. Поскольку функция f имеет представление (32), для выполнения (36) достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$G_{1,2}(E + \mathrm{i}\tau) W_\gamma^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi \mathrm{i}} g_1(\varepsilon + \mathrm{i}\tau_i) \otimes g_2(E - \varepsilon + \mathrm{i}\tau_2) W_\gamma^{\pm} \tag{37}$$

для $\gamma = 0, 1, 2$ и

$$G_{1,2}(E + \mathrm{i}\tau)(P_1 \otimes P_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi \mathrm{i}} g_1(\varepsilon + \mathrm{i}\tau_1) \otimes g_2(E - \varepsilon + \mathrm{i}\tau_2)(P_1 \otimes P_2). \tag{38}$$

Рассмотрим, например, случай $\gamma = 0$. Используя соотношения переброса (23) и (34), преобразуем (37) к виду

$$W_0^{\pm} G_0(E+i\tau) = W_0^{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) \otimes g_{02}(E - \varepsilon + i\tau_2). \quad (39)$$

Домножим слева на $(W_0^{\pm})^+$ и в силу изометричности оператора $W_0^{\pm}$ получим соотношение в импульсном представлении в следующем виде:

$$\frac{1}{E + i\tau - p_1^2/2m_1 - p_2^2/2m_2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \frac{1}{\varepsilon - p_1^2/2m_1 + i\tau_1} \frac{1}{E - \varepsilon - p_2^2/2m_2 + i\tau_2}, \quad (40)$$

что, очевидно, является тождеством в силу теоремы о вычетах. Следовательно, соотношения (37) и (39) выполняются. Случай других $\gamma = 1, 2$ и соотношение (38) изучается аналогичным путем. Тем самым представление (35) справедливо.

Теперь получим выражение для оператора $N_{1,2}(z)$ рассеяния двух независимых подсистем. С этой целью воспользуемся вторым из соотношений (27):

$$G_{1,2}(z) = G_0(z) + G_0(z) N_{1,2}(z) G_0(z). \quad (41)$$

Поскольку

$$g_i(z_i) = g_{0i}(z_i) + g_{0i}(z_i) t_i(z_i) g_{0i}(z_i), \; i = 1, 2, \quad (42)$$

то, комбинируя (35) и (42), получаем

$$G_{1,2}(E + i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} [g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) + g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) t_1(\varepsilon + i\tau_1) g_{01}(\varepsilon + i\tau_1)] \otimes$$

$$\otimes [g_{02}(E - \varepsilon + i\tau_2) + g_{02}(E - \varepsilon + i\tau_2) t_2(E - \varepsilon + i\tau_2) g_{02}(E - \varepsilon + i\tau_2)] =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (43)$$

Операторы I_i в (43) соответствуют четырем возможным произведениям в подынтегральном выражении. Как следствие из соотношения (40) можно найти выражение

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) \otimes g_{02}(E - \varepsilon + i\tau_2) = G_0(E + i\tau). \quad (44)$$

Через операторы I_2 и I_3 обозначены те из произведений в (43), которые включают одну t-матрицу. Например, для I_2 имеем

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) \otimes$$

$$\otimes g_{02}(E - \varepsilon + i\tau_2) t_2(E - \varepsilon + i\tau_2) g_{02}(E - \varepsilon + i\tau_2). \quad (45)$$

Используя соотношение (42), преобразуем интеграл (45) к следующему виду:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) \otimes [g_2(E-\varepsilon+i\tau_2) - g_{02}(E-\varepsilon+i\tau_2)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) \otimes g_2(E-\varepsilon+i\tau_2) - G_0(E+i\tau). \tag{46}$$

Далее с помощью приема, который был применен при доказательстве (35), легко устанавливается следующий результат:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) \otimes g_2(E-\varepsilon+i\tau_2) = G_2(E+i\tau), \tag{47}$$

где $G_2(z) = (z - H_{01} - h_2)^{-1}$. Теперь подставляя (47) в (46) и выражая оператор $G_2(z)$ через матрицу рассеяния $t_2(z)$, получаем

$$I_2 = G_0(E+i\tau)\, t_2(E - H_{01} + i\tau)\, G_0(E+i\tau) \tag{48}$$

или в импульсном представлении

$$\langle \bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid I_2 \mid \bar{p}_1^0 \bar{p}_2^0 \rangle = \frac{\delta(\bar{p}_1 - \bar{p}_1^0)\, t_2(\bar{p}_2, \bar{p}_2^0, E - p_1^{02}/2m_1 + i\tau)}{(E - p_1^2/2m_1 - p_2^2/2m_2 + i\tau)(E - p_1^{02}/2m_1 - p_2^{02}/2m_2 + i\tau)}. \tag{49}$$

Аналогично для I_3 имеем

$$I_3 = G_0(E+i\tau)\, t_1(E - H_{02} + i\tau)\, G_0(E+i\tau). \tag{50}$$

Оставшийся интеграл I_4 преобразуем с помощью тождества

$$\begin{gathered} g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) \otimes g_{02}(E - \varepsilon + i\tau_2) = \\ = G_0(E+i\tau)\,[g_{01}(\varepsilon + i\tau_1) + g_{02}(E-\varepsilon+i\tau_2)] = \\ = [g_{01}(\varepsilon + i\tau) + g_{02}(E-\varepsilon+i\tau_2)]\, G_0(E+i\tau) \end{gathered} \tag{51}$$

к виду

$$\begin{gathered} I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} g_{01}(\varepsilon + i\tau_1)\, t_1(\varepsilon+i\tau_1)\, g_{01}(\varepsilon+i\tau_1) \otimes \\ \otimes g_{02}(E-\varepsilon+i\tau_2)\, t_2(E-\varepsilon+i\tau_2)\, g_{02}(E-\varepsilon+i\tau_2) = \\ = G_0(E+i\tau)\, \mathscr{F}_{1\otimes 2}(E+i\tau)\, G_0(E+i\tau), \end{gathered}$$

где оператор $\mathscr{F}_{1\otimes 2}(E+i\tau)$ обозначает интеграл:

$$\begin{gathered} \mathscr{F}_{1\otimes 2}(E+i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} [g_{01}(\varepsilon+i\tau_1) + g_{02}(E-\varepsilon+i\tau_2)] \times \\ \times t_1(\varepsilon+i\tau_1)\, t_2(E-\varepsilon+i\tau_2)\, [g_{01}(\varepsilon+i\tau_1) + g_{02}(E-\varepsilon+i\tau_2)], \\ (\tau_1,\ \tau_2 > 0,\ \tau_1+\tau_2 = \tau). \end{gathered} \tag{52}$$

Подставляя сумму интегралов I_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ в (41), получаем выражение для оператора

$$N_{1,2}(z) = t_1(z_1) + t_2(z_2) + \mathcal{F}_{1\otimes 2}(z), \tag{53}$$

где $z_1 = z - H_{02}$; $z_2 = z - H_{01}$; оператор $\mathcal{F}_{1\otimes 2}(z)$ определен соотношением (52).

Перейдем к изучению S-матрицы рассеяния независимых подсистем $S_{1\otimes 2}$. Выражение для S-матрицы имеет вид:

$$(S_{1\otimes 2})_{\gamma\gamma'} = (W_\gamma^-)^+ W_{\gamma'}^+. \tag{54}$$

Рассмотрим подробно случай $\gamma = \gamma' = 0$. Тогда

$$S_{1\otimes 2} = (W_0^-) W_0^+ = (\Omega_0^- \otimes \Omega_0^-)^+ (\Omega_1^+ \otimes \Omega_2^+) = \\ = (\Omega_1^{-+}\Omega_1^+) \otimes (\Omega_2^{-+}\Omega_2^+) = S_1 \otimes S_2 \tag{55}$$

или в импульсном представлении

$$\langle \bar{\mathbf{p}}_1 \bar{\mathbf{p}}_2 \mid S_{1\otimes 2} \mid \bar{\mathbf{p}}_1^0 \bar{\mathbf{p}}_2^0 \rangle = \delta(\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{p}}_1^0)\,\delta(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_2^0) - \\ - 2\pi i \delta(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_2^0)\, t_1\left(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, \frac{p_1^{02}}{2m_1} + i0\right) \delta(p_1^2/2m_1 - p_1^{02}/2m_1) - \\ - 2\pi i \delta(p_2^2/2m_2 - p_2^{02}/2m_2)\,\delta(\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{p}}_1^0)\, t_2(\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_2^0, p_2^{02}/2m_2 + i0) + \\ + (2\pi i)^2 \delta(p_1^2/2m_1 - p_1^{02}/2m_1)\,\delta(p_2^2/2m_2 - p_2^{02}/2m_2)\, t_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, p_1^{02}/2m_1 + i0) \times \\ \times t_2(\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_2^0, p_2^{02}/2m_2 + i0). \tag{56}$$

Тот же самый результат (56) вытекает и из представления S-матрицы через оператор $N_{1,2}(z)$:

$$\langle \bar{\mathbf{p}}_1 \bar{\mathbf{p}}_2 \mid S_{1\otimes 2} \mid \bar{\mathbf{p}}_1^0 \bar{\mathbf{p}}_2^0 \rangle = \delta(\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{p}}_1^0)\,\delta(\bar{\mathbf{p}}_2 - \bar{\mathbf{p}}_2^0) - \\ - 2\pi i \delta(p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 - E_0)\, \langle \bar{\mathbf{p}}_1 \bar{\mathbf{p}}_2 \mid N_{1,2}(E_0 + i0) \mid \bar{\mathbf{p}}_1^0 \bar{\mathbf{p}}_2^0 \rangle, \tag{57}$$

где $E_0 = p_1^{02}/2m_1 + p_2^{02}/2m_2$. Действительно, члены, содержащие только одну t-матрицу в (56) и (57), совпадают, следовательно, надо показать равенство квадратичных по t членов. Полагая в (52) $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, получаем на энергетической поверхности:

$$\langle \bar{\mathbf{p}}_1 \bar{\mathbf{p}}_2 \mid \mathcal{F}_{1\otimes 2}(E_0 + 2i\tau) \mid \bar{\mathbf{p}}_1^0 \bar{\mathbf{p}}_2^0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \left[\frac{-2i\tau}{(\varepsilon - p_1^2/2m_1)^2 + \tau^2} \right] \times \\ \times t_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, \varepsilon + i\tau)\, t_2(\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_2^0, E - \varepsilon + i\tau) \left[\frac{-2i\tau}{(\varepsilon - p_1^{02}/2m_1)^2 + \tau^2} \right], \\ (p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 = p_1^{02}/2m_1 + p_2^{02}/2m_2). \tag{58}$$

Переходя в (58) к пределу $\tau \to 0$ и учитывая, что члены в квадратных скобках равны δ-функциям:

$$[-2\pi i \delta(\varepsilon - p_1^2/2m_1)]\,[-2\pi i \delta(\varepsilon - p_1^{02}/2m_1)],$$

получаем после интегрирования по ε:

$$\langle \bar{\mathbf{p}}_1 \bar{\mathbf{p}}_2 \mid \mathcal{F}_{1\otimes 2}(E_0 + \mathrm{i}0) \mid \bar{\mathbf{p}}_1^0 \bar{\mathbf{p}}_2^0 \rangle =$$
$$= -2\pi \mathrm{i}\delta (p_1^2/2m_1 - p_1^{02}/2m_1)\, t_1 (\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, p_1^{02}/2m_1 + \mathrm{i}0) \times$$
$$\times t_2 (\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_2^0, p_2^{02}/2m_2 + \mathrm{i}0), \quad (p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 = p_1^{02}/2m_1 + p_2^{02}/2m_2). \quad (59)$$

Очевидно, после умножения (59) на $-2\pi\mathrm{i}\delta\,(p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 - E_0)$ получим квадратичный член в (56).

Следовательно, представления (56) и (57) тождественны.

Исследование аналитических свойств ядра оператора $\mathcal{F}_{1\otimes 2}(z)$. Из формул (17) и (52) вытекает, что ядро оператора $\mathcal{F}_{1\otimes 2}(z)$

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mid \mathcal{F}_{1\otimes 2}(z) \mid \mathbf{p}_1^0 \mathbf{p}_2^0 \rangle =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi \mathrm{i}} \left(\frac{1}{\varepsilon - p_1^2/2m_1 + \mathrm{i}\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon - p_2^2/2m_2 + \mathrm{i}\tau_2} \right) \times$$
$$\times \left[\frac{\varphi_1(\bar{p}_1)\, \varphi_1^*(\bar{p}_1^0)}{\varepsilon + \varkappa_1^2 + i\tau_1} + \hat{t}_1 (\bar{p}_1, \bar{p}_1^0, \varepsilon + \mathrm{i}\tau_1) \right] \times$$
$$\times \left[\frac{\varphi_2(\bar{p}_2)\, \varphi_2^*(\bar{p}_2^0)}{E - \varepsilon + \varkappa_2^2 + \mathrm{i}\tau_2} + \hat{t}_2 (\bar{p}_2, \bar{p}_2^0, E - \varepsilon + \mathrm{i}\tau_2) \right] \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\varepsilon - p_1^{02}/2m_1 + \mathrm{i}\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon - p_2^{02}/2m_2 + \mathrm{i}\tau_2} \right) \quad (60)$$

можно представить в виде

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mid \mathcal{F}_{1\otimes 2}(z) \mid \mathbf{p}_1^0 \mathbf{p}_2^0 \rangle =$$
$$= \frac{\varphi_1(\bar{p}_1)}{z + \varkappa_1^2 - p_2^2/2m_2} \left[M_1^2 (\bar{p}_1, \bar{p}_1^0, z) \frac{\varphi_2^*(\bar{p}_2^0)}{z + \varkappa_2^2 - p_1^{02}/2m_1} + \right.$$
$$\left. + M_2^2 (\bar{p}_2, \bar{p}_2^0, z) \frac{\varphi_1^*(\bar{p}_1^0)}{z + \varkappa_1^2 - p_2^{02}/2m_2} + M_3^2 (\bar{p}_2, \bar{p}_1^0, \bar{p}_2^0, z) \right] +$$
$$+ \frac{\varphi_2(\bar{p}_2)}{z + \varkappa_2^2 - p_1^2/2m_1} \left[M_1^1 (\bar{p}_1, \bar{p}_1^0, z) \frac{\varphi_2^*(\bar{p}_2^0)}{z + \varkappa_2^2 - p_1^{02}/2m_1} + \right.$$
$$\left. + M_2^1 (\bar{p}_1, \bar{p}_2^0, z) \frac{\varphi_1^*(\bar{p}_1^0)}{z + \varkappa_1^2 - p_2^{02}/2m_2} + M_3^1 (\bar{p}_1, \bar{p}_1^0, \bar{p}_2^0, z) \right] +$$
$$+ \left[M_1^3 (\bar{p}_1 \bar{p}_2, \bar{p}_1^0, z) \frac{\varphi_2^*(\bar{p}_2^0)}{z + \varkappa_2^2 - p_1^{02}/2m_1} + \right.$$
$$\left. + M_2^3 (\bar{p}_1 \bar{p}_2, \bar{p}_2^0, z) \frac{\varphi_1^*(\bar{p}_1^0)}{z + \varkappa_1^2 - p_2^{02}/2m_2} + M_3^3 (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_1^0 \bar{p}_2^0, z) \right]. \quad (61)$$

Ниже приведен вывод спектрального разложения (61). Преобразуем сингулярные знаменатели в (60) с помощью тождества

$$1/ab = (1/a + 1/b)/(a + b), \quad (62)$$

где a и b есть, например, $(\varepsilon + \varkappa_1^2 + \mathrm{i}\tau_1)$ и $(E - \varepsilon - p_2^2/2m_2 + \mathrm{i}\tau_2)$

и т. д. Тогда если не рассматривать на первом этапе особенности функций Грина, стоящих справа от амплитуд рассеяния в интеграле (60), то для оператора $\mathcal{F}_{1\otimes 2}(z)$ получаем представление вида

$$\mathcal{F}_{1\otimes 2}(z)=\frac{|\varphi_1\rangle}{z+\varkappa_1^2-H_{01}}\mathcal{K}_2(z)+\frac{|\varphi_2\rangle}{z+\varkappa_2^2-H_{02}}\mathcal{K}_1(z)+\mathcal{K}_3(z) \tag{63}$$

или в матричной форме:

$$\langle\bar p_1\bar p_2\,|\,\mathcal{F}_{1\otimes 2}(z)\,|\,\bar p_1^0\bar p_2^0\rangle=\frac{\varphi_1(\bar p_1)\,\mathcal{K}_2(\bar p_2,\ \bar p_1^0\bar p_2^0,\ z)}{z+\varkappa_1^2-p_2^2/2m_2}+$$
$$+\frac{\varphi_2(\bar p_2)\,\mathcal{K}_1(\bar p_1,\ \bar p_1^0\bar p_2^0,\ z)}{z+\varkappa_2^2-p_1^2/2m_1}+\mathcal{K}_3(\bar p_1\bar p_2,\ \bar p_1^0\bar p_2^0,\ z). \tag{64}$$

Ядра операторов $\mathcal{K}_i(z)$, $i=1,\ 2,\ 3$, в (63) заданы следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{K}_1(\bar p_1,\ \bar p_1^0\bar p_2^0,\ z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\left(\frac{1}{\varepsilon-p_1^2/2m_1+i\tau_1}+\frac{1}{E-\varepsilon+\varkappa_2^2+i\tau_2}\right)\times\\
&\times t_1(\bar p_1,\ \bar p_1^0,\ \varepsilon+i\tau_1)\,\varphi_2^*(\bar p_2^0)\times\\
&\times\left(\frac{1}{\varepsilon-p_1^{02}/2m_1+i\tau_1}+\frac{1}{E-\varepsilon-p_2^{02}/2m_2+i\tau_2}\right);\\
&\mathcal{K}_2(\bar p_2,\ \bar p_1^0\bar p_2^0,\ z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\left(\frac{1}{E-\varepsilon-p_2^2/2m_2+i\tau_2}+\frac{1}{\varepsilon+\varkappa_1^2+i\tau_1}\right)\times\\
&\times t_2(\bar p_2,\ \bar p_2^0,\ E-\varepsilon+i\tau_2)\,\varphi_1^*(\bar p_1^0)\times\\
&\times\left(\frac{1}{\varepsilon-p_1^{02}/2m_1+i\tau_1}+\frac{1}{E-\varepsilon-p_2^{02}/2m_2+i\tau_2}\right);\\
&\mathcal{K}_3(\bar p_1\bar p_2,\ \bar p_1^0\bar p_2^0,\ z)=\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\left[\frac{t_1(\bar p_1,\ \bar p_1^0,\ \varepsilon+i\tau_1)\,\hat t_2(\bar p_2,\ \bar p_2^0,\ E-\varepsilon+i\tau_2)}{\varepsilon-p_1^2/2m_1+i\tau_1}+\right.\\
&\left.+\frac{\hat t_1(\bar p_1,\ \bar p_1^0,\ \varepsilon+i\tau_1)\,t_2(\bar p_2,\ \bar p_2^0,\ E-\varepsilon+i\tau_2)}{E-\varepsilon-p_2^2/2m_2+i\tau_2}\right]\times\\
&\times\left(\frac{1}{\varepsilon-p_1^{02}/2m_1+i\tau_1}+\frac{1}{E-\varepsilon-p_2^{02}/2m_2+i\tau_2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Выражения для ядер $\mathcal{K}_i(\cdot,\ \bar{\mathbf{p}}_1^0\bar{\mathbf{p}}_2^0,\ z)$ преобразуются тем же способом, что и выражение для $\langle\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2\,|\,\mathcal{F}_{1\otimes 2}(z)\,|\,\bar{\mathbf{p}}_1^0\bar{\mathbf{p}}_2^0\rangle$. В итоге разложение для ядер типа $\mathcal{K}$ приобретает вид:

$$\mathcal{K}_i(\cdot, \overline{\mathbf{p}}_1^0\overline{\mathbf{p}}_2^0, z) = M_1^i(\cdot, \overline{\mathbf{p}}_1^0, z)\frac{\varphi_2^*(\overline{\mathbf{p}}_2^0)}{z+\varkappa_2^2-p_1^{02}/2m_1} + \\ + M_2^i(\cdot, \overline{\mathbf{p}}_2^0, z)\frac{\varphi_1^*(\overline{\mathbf{p}}_1^0)}{z+\varkappa_1^2-p_2^{02}/2m_2} + M_3^i(\cdot, \overline{\mathbf{p}}_1^0\overline{\mathbf{p}}_2^0, z). \tag{66}$$

Явный вид функций $M_j^i(z)$, называемых далее компонентами $\mathcal{F}_{1\otimes 2}'(z)$, будет приведен ниже. При вычислении матричных элементов операторов $M_j^i(z)$ будем использовать следующие свойства функции $\hat{t}(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}^0, z)$ [5]. Функция $\hat{t}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^0, z)$ есть сумма вида

$$t(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}^0, z) = V(\overline{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p}}^0) + \tau(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}^0, z), \tag{67}$$

где

$$\tau(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}^0, z) = \int d\overline{\mathbf{q}}\,\frac{t(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}, q^2/2m+\mathrm{i}0)\, t(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}^0, q^2/2m-\mathrm{i}0)}{z-q^2/2m}. \tag{68}$$

Рассмотрим типичный интеграл с функцией $\tau(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}^0, z)$:

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi\mathrm{i}}\frac{\tau(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}^0, \varepsilon+\mathrm{i}\tau)}{\varepsilon-z}. \tag{69}$$

При $\operatorname{Im} z \neq 0$, $\tau > 0$ интеграл $I(z)$ вычисляется с помощью представления (69):

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{\varepsilon-z}\times \\ \times\int d\overline{q}\,\frac{t(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}, q^2/2m+\mathrm{i}0)\, t(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}^0, q^2/2m-\mathrm{i}0)}{\varepsilon-q^2/2m+\mathrm{i}\tau} = \\ = \int d\overline{q}\,t(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}, q^2/2m+\mathrm{i}0)\, t(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}^0, q^2/2m-\mathrm{i}0)\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{(\varepsilon-z)(\varepsilon+\mathrm{i}\tau-q^2/2m)}. \tag{70}$$

В этом выражении изменен порядок интегрирования, что законно при всех конечных τ и $\operatorname{Im} z$. Из (70) имеем

$$I(z) = \begin{Bmatrix} 0, & \operatorname{Im} z < 0, \\ -\tau(\overline{p}, \overline{p}^0, z+\mathrm{i}\tau), & \operatorname{Im} z > 0. \end{Bmatrix} \tag{71}$$

Вычисляя с помощью (71) интегралы для ядер операторов $M_j^i(z)$, получаем следующий результат:

$$\left.\begin{aligned}
&M_1^1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, z) = V_1(\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{p}}_1^0) + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \left[\frac{\varphi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\varphi_1^*(\bar{\mathbf{p}}_1^0)}{\varepsilon + \varkappa_1^2 + i\tau_1} + \tau_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, \varepsilon + i\tau_1) \right] \times \\
&\times \left(\frac{1}{\varepsilon - p_1^{02}/2m_1 + i\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon + \varkappa_2^2 + i\tau_2} \right) = \\
&= V_1(\bar{\mathbf{p}}_1 - \bar{\mathbf{p}}_1^0) + \frac{\varphi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\varphi_1^*(\bar{\mathbf{p}}_1^0)}{z + \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2} + \\
&+ \tau_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, z + \varkappa_2^2) = t_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, z + \varkappa_2^2); \\
&M_2^1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2^0, z) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \left(\frac{1}{\varepsilon - p_1^2/2m_1 + i\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon + \varkappa_2^2 + i\tau_2} \right) \times \\
&\times \varphi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\varphi_2^*(\bar{\mathbf{p}}_2^0) \left(\frac{1}{\varepsilon + \varkappa_1^2 + i\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon - p_2^{02}/2m_2 + i\tau_2} \right) = \\
&= \frac{\varphi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\varphi_2^*(\bar{\mathbf{p}}_2^0)}{z + \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2} + \frac{\varphi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\varphi_2^*(\bar{\mathbf{p}}_2^0)}{z - p_1^2/2m_1 - p_2^{02}/2m_2}; \\
&M_3^1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0\bar{\mathbf{p}}_2^0, z) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \frac{t_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, \varepsilon + i\tau_1)\varphi_2^*(\bar{\mathbf{p}}_2^0)}{(\varepsilon - p_1^2/2m_1 + i\tau_1)(\varepsilon - p_2^{02}/2m_2 + i\tau_2)} + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \left(\frac{1}{\varepsilon - p_1^2/2m_1 + i\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon + \varkappa_2^2 + i\tau_2} \right) \times \\
&\times \frac{\hat{t}_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, \varepsilon + i\tau_1)\varphi_2^*(\bar{\mathbf{p}}_2^0)}{E - \varepsilon - p_2^{02}/2m_2 + i\tau_2} = \frac{\hat{t}_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, z - p_2^{02}/2m_2)\varphi_2^*(\bar{p}_2^0)}{z - p_1^2/2m_1 - p_2^{02}/2m_2} + \\
&+ [\tau_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, z + \varkappa_2^2) - \tau_1(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1^0, z - p_2^{02}/2m_2)] \frac{\varphi_2^*(\bar{\mathbf{p}}_2^0)}{-\varkappa_2^2 - p_2^{02}/2m_2}.
\end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Выражения для ядер операторов $M_j^2(z)$ отличаются от (72) заменой индексов 1 на 2 и наоборот:

$$\left.\begin{aligned}
&M_1^2(\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_1^0, z) = \frac{\varphi_2(\bar{\mathbf{p}}_2)\varphi_1^*(\bar{\mathbf{p}}_1^0)}{z + \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2} + \frac{\varphi_2(\bar{\mathbf{p}}^2)\varphi_1^*(\mathbf{p}_1^0)}{z - p_1^{02}/2m_1 - p_2^2/2m_2}; \\
&M_2^2(\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_2^0, z) = t_2(\bar{\mathbf{p}}_2\, \bar{\mathbf{p}}_2^0, z + \varkappa_1^2); \\
&M_3^2(\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_1^0\bar{\mathbf{p}}_2^0, z) = \frac{\hat{t}^2(\bar{\mathbf{p}}_2^0, \bar{\mathbf{p}}_2^0, z - p_1^{02}/2m_1)\varphi_1^*(\bar{\mathbf{p}}_1^0)}{z - p_2^2/2m_2 - p_1^{02}/2m_1} + \\
&+ \left[\tau_2(\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_2^0, z + \varkappa_1^2) - \tau_2\left(\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_2^0, z - \frac{p_1^{02}}{2m_1}\right) \right. \frac{\varphi_1^*(\bar{\mathbf{p}}_1^0)}{-\varkappa_1^2 - p_1^{02}/2m_1}.
\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Ядра операторов $M_1^0(z)$ и $M_2^3(z)$ имеют вид, аналогичный $M_3^1(z)$ и $M_3^2(z)$, в силу симметричности выражения для $\langle \bar{\mathbf{p}}_1 \bar{\mathbf{p}}_2 \mid \mathcal{F}_{1\otimes 2}(z) \mid \mathbf{p}_1^0 \mathbf{p}_2^0\rangle$ (60) относительно перестановки in- и out-состояний:

$$\left.\begin{aligned} M_1^3(\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_1^0,\ z) &= \frac{\varphi_2(\bar{\mathbf{p}}_2)\,\hat{t}_1(\bar{\mathbf{p}}_1,\ \bar{\mathbf{p}}_1^0,\ z-p_2^2/2m_2)}{z-p_2^2/2m_2-p_1^{02}/2m_1}+\\ &+[\tau_1(\bar{\mathbf{p}}_1,\ \bar{\mathbf{p}}_1^0,\ z+\varkappa_2^2)-\tau_1(\bar{\mathbf{p}}_1,\ \bar{\mathbf{p}}_1^0,\ z-p_2^2/2m_2)]\frac{\varphi_2(\bar{\mathbf{p}}_2)}{-\varkappa_2^2-p_2^2/2m_2};\\ M_2^3(\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0,\ z) &= \frac{\varphi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\,\hat{t}_2(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0,\ z-p_1^2/2m_1)}{z-p_1^2/2m_1-p_2^{02}/2m_2}+\\ &+\left[\tau_2(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0,\ z+\varkappa_1^2)-\tau_2\left(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0,\ z-\frac{p_1^2}{2m_1}\right)\right]\frac{\varphi_1(p_1)}{-\varphi_1^2-p_1^2/2m_1}. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Далее выражение для оператора $M_3^3(z)$ имеет вид:

$$M_3^3(z) = A_1(z) + A_2(z) + A_3(z), \quad (75)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\frac{\hat{t}_2(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0,\ E-\varepsilon+i\tau_2)\,\varphi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\,\varphi_1^*(\bar{\mathbf{p}}_1^0)}{(\varepsilon-p_1^2/2m_1+i\tau_1)(\varepsilon+\varkappa_1^2+i\tau_1)(\varepsilon-p_1^{02}/2m_1+i\tau_1)};\\ A_2(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\times\\ &\times\frac{\hat{t}_1(\bar{\mathbf{p}}_1,\ \bar{\mathbf{p}}_1^0,\ \varepsilon+i\tau_1)\,\varphi_2(\bar{p}_2)\,\varphi_2^*(\bar{\mathbf{p}}_2^0)}{(E-\varepsilon-p_2^2/2m_2+i\tau_2)(E-\varepsilon+\varkappa_2^2+i\tau)(E-\varepsilon-p_2^{02}/2m_2+i\tau_2)};\\ A_3(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\left(\frac{1}{\varepsilon-p_1^2/2m_1+i\tau}+\frac{1}{E-\varepsilon+p_2^2/2m_2+i\tau_2}\right)\times\\ &\times\hat{t}_1(\bar{\mathbf{p}}_1,\ \bar{\mathbf{p}}_1^0,\ \varepsilon+i\tau_1)\,\hat{t}_2(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0,\ E-\varepsilon+i\tau_2)\times\\ &\times\left(\frac{1}{\varepsilon-p_1^{02}/2m_1+i\tau_1}+\frac{1}{E-\varepsilon-p_2^{02}/2m_2+i\tau_2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Интегралы A_1 и A_2 легко вычисляются с помощью формулы (34):

$$A_1(\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_1^0\bar{\mathbf{p}}_2^0,\ z) = \varphi_1(\bar{\mathbf{p}}_1)\,\varphi_1^*(\bar{\mathbf{p}}_1^0)\,\frac{\Phi_1(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0;\ \mathbf{p}_1^2,\ \tau_1)-\Phi_1(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0;\ \mathbf{p}_1^{02},\ \tau_1)}{p_1^2-p_1^{02}},$$

где

$$\Phi_1(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0;\ q_1^2,\ \tau_1) = 2m_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\,\frac{\hat{t}_2(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0,\ E-\varepsilon+i\tau_2)}{(\varepsilon+\varkappa_1^2+i\tau_1)(\varepsilon-q_1^2/2m_1+i\tau_1)} =$$

$$= 2m_1\frac{\tau_2(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0,\ z+\varkappa_1^2)-\tau_2(\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_2^0,\ z-q_1^2/2m_1)}{-\varkappa_1^2-q_1^2/2m_1}. \quad (77)$$

Поскольку функция $\tau(\bar{\mathbf{p}},\ \bar{\mathbf{p}}^0, z)$ — гельдеровская функция своих переменных [5], то при $\tau_1,\ \tau_2\to 0$ функция $A_1(\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2,\ \bar{\mathbf{p}}_1^0\bar{\mathbf{p}}_2^0,\ z)$ имеет в области $p_1 \approx p_1^0$ второстепенную особенность вида $|p_1 - p_1^0|^{-1+\nu}$, $0 < \nu < 1/2$. Выражение для A_2 получается из A_1 заменой индексов 1 и 2:

$$\left.\begin{aligned} &A_2(\overline{\mathbf{p}}_1\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0\overline{\mathbf{p}}_2^0,\ z) = \\ &= \varphi_2(\overline{\mathbf{p}}_2)\,\varphi_2^*(\overline{\mathbf{p}}_2^0)\,\frac{\Phi_2(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0;\ p_2^{02},\ \tau_2) - \Phi_2(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0;\ p_2^{02},\ \tau_2)}{p_2^2 - p_2^{02}}; \\ &\Phi_2(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0;\ q_2^2,\ \tau_2) = \\ &= 2m_2\,\frac{\tau_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0;\ z + \varkappa_2^2) - \tau_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z - q_2^2/2m_2)}{-\varkappa_2^2 - q_2^2/2m_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Поскольку оператор $\hat{t}(z)$ — сумма двух слагаемых $\hat{t}(z) = V + \tau(z)$, интеграл

$$A_3(z) = B_1(z) + B_2(z) + B_3(z) + B_4(z). \qquad (79)$$

Слагаемое $B_1(z)$ в (79) порождается произведением V_1V_2:

$$B_1(z) = V_1(\overline{\mathbf{p}}_1 - \overline{\mathbf{p}}_1^0)\,V_2(\overline{\mathbf{p}}_2 - \overline{\mathbf{p}}_2^0)\times \\ \times\left(\frac{1}{z - p_1^2/2m_1 - p_2^{02}/2m_2} + \frac{1}{z - p_2^2/2m_2 - p_1^{02}/2m_1}\right), \qquad (80)$$

а $B_2(z)$ и $B_3(z)$ — произведением потенциала и оператора $\tau(z)$:

$$B_2(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\left(\frac{1}{\varepsilon - p_1^2/2m_1 + i\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon - p_2^2/2m_2 + i\tau_2}\right)\times \\ \times V_1(\overline{\mathbf{p}}_1 - \overline{\mathbf{p}}_1^0)\,\tau_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ E - \varepsilon + i\tau_2)\times \\ \times\left(\frac{1}{\varepsilon - p_1^{02}/2m_1 + i\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon - p_2^{02}/2m_2 + i\tau_2}\right) = \\ = V_1(\overline{\mathbf{p}}_1 - \overline{\mathbf{p}}_1^0)\left[\frac{\tau_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ z - p_1^2/2m_1)}{z - p_1^2/2m_1 - p_2^{02}/2m_2} + \frac{\tau_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ z - p_1^{02}/2m_1)}{z - p_1^{02}/2m_1 - p_2^2/2m_2} + \right. \\ \left. + \frac{\tau_2(\overline{\mathbf{p}}^2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ z - p_1^2/2m_1) - \tau_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ z - p_1^{02}/2m_1)}{p_1^2/2m_1 - p_1^{02}/2m_1}\right]. \qquad (81)$$

Случай $B_3(z)$ рассматривается аналогично. Следовательно, ядра операторов $B_2(z)$ и $B_3(z)$ имеют особенности вида $(z - p^2/2m - p^{02}/2m)^{-1}$ и $|p - p^0|^{-1+\nu}$. Наконец, ядро оператора $B_4(z)$ имеет вид

$$B_4(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\left(\frac{1}{\varepsilon - p_1^2/2m_1 + i\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon - p_2^2/2m_2 + i\tau}\right)\times \\ \times\tau_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ \varepsilon + i\tau_1)\,\tau_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ E - \varepsilon + i\tau_2)\times \\ \times\left(\frac{1}{\varepsilon - p_1^{02}/2m_1 + i\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon - p_2^{02}/2m_2 + i\tau_2}\right). \qquad (82)$$

Разделяя в (82) сингулярные знаменатели с помощью тождества (62), получаем

$$B_4(z)=\frac{D(\xi_1)-D(\xi_1^0)}{\xi_1-\xi_1^0}+\frac{D(\xi_1)-D(\xi_2^0)}{\xi_2^0-\xi_1}+$$
$$+\frac{D(\xi_1^0)-D(\xi_2)}{\xi_2-\xi_1^0}+\frac{D(\xi_2)-D(\xi_2^0)}{\xi_2-\xi_2^0}, \tag{83}$$

где

$$\xi_1=p_1^2/2m_1-\mathrm{i}\tau_1;\ \xi_1^0=p_1^{02}/2m_1-\mathrm{i}\tau_1;\ \xi_2=E-p_2^2/2m_2+$$
$$+\mathrm{i}\tau_2;\quad \xi_2^0=E-p_2^{02}/2m_2+\mathrm{i}\tau_2;$$

$$D(\overline{\mathbf{p}}_1\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0\overline{\mathbf{p}}_2^0,\ \xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi\mathrm{i}}\frac{\tau_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ \varepsilon+\mathrm{i}\tau_1)\,\tau_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ E-\varepsilon+\mathrm{i}\tau_2)}{\varepsilon-\xi}. \tag{84}$$

Согласно лемме о сингулярных интегралах [5, 14] функция $D(\xi)$ — гельдеровская функция своих переменных в области $\mathrm{Im}\,\xi\geqslant 0$ ($\mathrm{Im}\,\xi\leqslant\leqslant 0$). Следовательно, слагаемое $B_4(z)$ имеет те же второстепенные особенности, что и $B_2(z)$.

Отметим, что все второстепенные особенности исчезают, когда $E<0$. Действительно, при $E<0$ и $\tau\to+0$ могут возникать только второстепенные особенности вида $|p-p^0|^{-1+\nu}$. Рассмотрим типичный интеграл, который при $E<0$ порождает эту особенность:

$$I=\int\limits_{\infty\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi\mathrm{i}}\frac{\tau_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ \varepsilon+\mathrm{i}\tau_1)\,\tau_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ E-\varepsilon+\mathrm{i}\tau_2)}{(\varepsilon-p_1^2/2m_1+\mathrm{i}\tau_1)(\varepsilon-p_1^{02}/2m_1+\mathrm{i}\tau_1)}. \tag{85}$$

В (85) подставим $\tau_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ E-\varepsilon+\mathrm{i}\tau_2)$ в виде (68). Далее, поступая точно так же, как и при доказательстве формулы (71), получаем

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi\mathrm{i}}\frac{\tau_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ \varepsilon+\mathrm{i}\tau_1)}{(\varepsilon-p_1^2/2m_1+\mathrm{i}\tau_1)(\varepsilon-p_1^{02}/2m_1+\mathrm{i}\tau_1)}\times$$
$$\times\int d\overline{\mathbf{q}}_2\,\frac{t_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{q}}_2,\ q_2^2/2m_2+\mathrm{i}0)\,t_2(\overline{\mathbf{q}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ q_2^2/2m_2-\mathrm{i}0)}{E-\varepsilon-q_2^2/2m_2+\mathrm{i}\tau_2}=$$
$$=\int d\overline{\mathbf{q}}_2\,\frac{\tau_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z-q_2^2/2m_2)\,t_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{q}}_2,\ q_2^2/2m_2+\mathrm{i}0)\,t_2(\overline{\mathbf{q}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_2^0,\ q_2^2/2m_2-\mathrm{i}0)}{(z-p_1^2/2m_1-q_2^2/2m_2)(z-p_1^{02}/2m_1-q_2^2/2m_2)}; \tag{86}$$

откуда явно видно, что при $E<0$ и $\tau=0$ подынтегральное выражение в (85) не имеет особенностей.

Окончательно ядро оператора $\mathcal{F}_{1\otimes 2}(z)$ имеет вид (61). Компоненты оператора $\mathcal{F}_{1\otimes 2}(z)\,M_j^i(z)$ $i,j=1,2,3$ при $E>0$ и $\tau=0$ имеют второстепенные особенности вида $(z-p_i^2/2m_i-p_j^{02}/2m_j)^{-1}$ $i,\ j=1,\ 2$, $i\neq j$ и $|\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_i^0|^{-1+\gamma}$. При $E<0$ и $\tau=0$ имеется особенность только по полной энергии $(z+\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)^{-1}$, соответствующая состоянию дискретного спектра гамильтониана $H_{1,2}$.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ОПЕРАТОРА РАССЕЯНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Система интегральных уравнений для компонент. Представления для операторов $t_\alpha(z)$ $(\alpha = 1, 2, 12)$ и $\mathscr{F}_{1\otimes 2}(z)$ вида (25) и (61), (63), (66) позволяют выделить явно в ядрах и свободных членах системы (16) главные особенности и перейти к системе интегральных уравнений, содержащей только второстепенные особенности. Получим сначала интегральные уравнения для компонент оператора $T(z)$ при условии, что полная энергия системы E не равна величине $(-\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2)$. Случай $E = -\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2$ рассмотрим далее специально. Из выражений для операторов $t_\alpha(z)$ $(\alpha = 1, 2, 12)$ и $\mathscr{F}_{1\otimes 2}(z)$ следует, что операторы $L_{1,2}(z)$ и $L_{12}(z)$ имеют представление вида:

$$\left.\begin{aligned}
L_{1,2}(z) &= u_{1,2}(z) + \frac{|\varphi_1\rangle}{z+\varkappa_1^2 - H_{02}}\, v_2(z) + \frac{|\varphi_2\rangle}{z+\varkappa_2^2 - H_{01}}\, v_1(z);\\
L_{12}(z) &= u_{12}(z) + \frac{|\varphi_{12}\rangle}{z+\varkappa_{12}^2 - H_{012}}\, v_{12}(z),
\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

где операторы $u_{1,2}(z)$, $u_{12}(z)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$, $v_{12}(z)$ заданы соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
u_{1,2}(z) &= [\hat{t}_1(z_1) + \hat{t}_2(z_2) + \mathscr{K}_3(z)]\, G_0(z)\, t_{12}(z_{12}) + \\
&+ [\hat{t}_1(z_1) + \hat{t}_2(z_2) + \mathscr{K}_3(z)]\, G_0(z)\, L_{12}(z);\\
u_{12}(z) &= \hat{t}_{12}(z_{12})\, G_0(z)\, [t_1(z_1) + t_2(z_2) + \mathscr{F}_{1\otimes 2}(z)] + \\
&+ \hat{t}_{12}(z_{12})\, G_0(z)\, L_{1,2}(z);\\
v_1(z) &= [\langle\varphi_2| + \mathscr{K}_1(z)]\, G_0(z)\, t_{12}(z_{12}) + \\
&+ [\langle\varphi_2| + \mathscr{K}_1(z)]\, G_0(z)\, L_{12}(z);\\
v_2(z) &= [\langle\varphi_1| + \mathscr{K}_2(z)]\, G_0(z)\, t_{12}(z_{12}) + \\
&+ [\langle\varphi_1| + \mathscr{K}_2(z)]\, G_0(z)\, L_{12}(z);\\
v_{12}(z) &= \langle\varphi_{12}|G_0(z)\, [t_1(z_1) + t_2(z_2) + \mathscr{F}_{1\otimes 2}(z)] + \\
&+ \langle\varphi_{12}|G_0(z)\, L_{1,2}(z).
\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

В свою очередь, каждый из операторов $u(z)$ и $v(z)$, входящих в выражения (87) и (88), можно представить в факторизованном виде. Например, для оператора $v_{12}(z)$ имеем

$$\begin{aligned}
v_{12}(z) &= \omega_{12}^0(z) + \omega_{12,12}(z)\, \langle\varphi_{12}|/(z+\varkappa_{12}^2 - H_{012}) + \\
&+ \omega_{12,1}(z)\, \langle\varphi_2|/(z+\varkappa_2^2 - H_{01}) + \omega_{12,2}(z)\, \langle\varphi_1|/(z+\varkappa_1^2 - H_{02}).
\end{aligned} \tag{89}$$

Аналогичное представление существует и для оставшихся операторов типа $u(z)$ и $v(z)$. Операторы $v_\alpha(z)$ $(\alpha = 1, 2, 12)$ и $\omega_{\alpha,\beta}(z)$ в (87)—(89), а также операторы $u_{(1,2),\alpha}(z)$ и $u_{12,\alpha}(z)$ для $\alpha = 1, 2, 12$ и операторы $u^0_{1,2}(z)$, $u^0_{12}(z)$ и $\omega^0_\alpha(z)$ будем называть компонентами полной T-матрицы рассеяния. Из представлений (87)—(89) следуют системы уравнений для компонент. Очевидно, что все эти системы отличаются свободными членами и имеют то же самое ядро. Запишем одну из таких систем, например, для компонент $u_{(1,2),1}(z)$, $u_{12,1}(z)$, $\omega_{\alpha,1}(z)$ ($\alpha = 1,\ 2,\ 12$):

$$\left.\begin{aligned}
&u_{(1,2),1}(z) = [\hat t_1(z_1) + \hat t_2(z_2) + \mathcal{K}_3(z)]\times\\
&\times G_0(z)\left[u_{12,1}(z) + \frac{|\varphi_{12}\rangle}{z+\varkappa_{12}^2-H_{012}}\,\omega_{12,1}(z)\right];\\
&u_{12,1}(z) = \hat t_{12}(z_{12})\,G_0(z)\,[|\varphi_2\rangle + B_1(z)] + \hat t_{12}(z_{12})\times\\
&\times G_0(z)\left[u_{(1,2),1}(z) + \frac{|\varphi_1\rangle}{z+\varkappa_1^2-H_{02}}\,\omega_{2,1}(z) +\right.\\
&\left.+\frac{|\varphi_2\rangle}{z+\varkappa_2^2-H_{01}}\,\omega_{1,1}(z)\right];\\
&\omega_{1,1}(z) = [\langle\varphi_2| + \mathcal{K}_1(z)]\,G_0(z)\left[u_{12,1}(z) +\right.\\
&\left.+\frac{|\varphi_{12}\rangle}{z+\varkappa_{12}^2-H_{012}}\,\omega_{12,1}(z)\right];\\
&\omega_{2,1}(z) = [\langle\varphi_1| + \mathcal{K}_2(z)]\,G_0(z)\left[u_{12,1}(z) +\right.\\
&\left.+\frac{|\varphi_{12}\rangle}{z+\varkappa_{12}^2-H_{012}}\,\omega_{12,1}(z)\right];\\
&\omega_{12,1}(z) = \langle\varphi_{12}|G_0(z)|\varphi_1\rangle + \langle\varphi_{12}|G_0(z)\,B_1(z) +\\
&+\langle\varphi_{12}|G_0(z)\left[u_{(1,2),1}(z) + \frac{|\varphi_1\rangle}{z+\varkappa_1^2-H_{02}}\,\omega_{2,1}(z) +\right.\\
&\left.+\frac{|\varphi_2\rangle}{z+\varkappa_2^2-H_{01}}\,\omega_{1,1}(z)\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(90)$$

Переходим теперь к изучению интегральных уравнений для компонент полной T-матрицы. Запишем, например, интегральный аналог системы (90):

$$\begin{aligned}
&u_{(1,2),1}(\bar{\mathbf p}_1,\ \bar{\mathbf p}_2,\ \mathbf p_1^0,\ z) =\\
&= \int d\bar{\mathbf p}_1' \int d\bar{\mathbf p}_2'\,[\delta(\bar{\mathbf p}_2 - \bar{\mathbf p}_2')\,\hat t_1(\bar{\mathbf p}_1,\ \bar{\mathbf p}_1',\ z - p_2^2/2m_2) +\\
&+\delta(\bar{\mathbf p}_1 - \bar{\mathbf p}_1')\,\hat t_2(\bar{\mathbf p}_2,\ \bar{\mathbf p}_2',\ z - p_1^2/2m_1) +\\
&+\mathcal{K}_3(\bar{\mathbf p}_1\bar{\mathbf p}_2,\ \bar{\mathbf p}_1'\bar{\mathbf p}_2',\ z)]\,\frac{1}{z - p_1'^2/2m_1 - p_2'^2/2m_2}\times\\
&\times\left[u_{12,1}\left(\bar{\mathbf p}_1' + \bar{\mathbf p}_2',\ \frac{m_2\bar{\mathbf p}_1' - m_1\bar{\mathbf p}_2'}{M},\ \bar{\mathbf p}_1^0,\ z\right) +\right.\\
&\left.+\frac{\varphi_{12}((m_2\bar{\mathbf p}_1' - m_1\bar{\mathbf p}_2')/M)\,\omega_{12,1}(\bar{\mathbf p}_1' + \bar{\mathbf p}_2',\ \bar{\mathbf p}_1^0,\ z)}{z + \varkappa_{12}^2 - (\bar{\mathbf p}_1' + \bar{\mathbf p}_2')^2/2M}\right];
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&u_{12,1}(\overline{\mathscr{P}}_{12}\overline{\mathbf{p}}_{12},\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)=\\
&=\frac{\hat{t}_{12}(\overline{\mathbf{p}}_{12},\ \overline{\mathbf{p}}_1^0-(m_1/M)\overline{\mathscr{P}}_{12},\ z-\mathscr{P}_{12}^2/2M)\,\varphi_2(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1^0)}{z-\mathbf{p}_1^{02}/2m_1-(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1^0)^2/2m_2}+\\
&+\int d\mathbf{p}_1'\,\frac{\hat{t}_{12}(\overline{\mathbf{p}}_{12},\ \overline{\mathbf{p}}_1'-(m_1/M)\overline{\mathscr{P}}_{12},\ z-\mathscr{P}_{12}^2/2M)}{z-p_1'^2/2m_1-(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{p}_1')^2/2m_2}\times\\
&\times[B_1(\overline{\mathbf{p}}_1',\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1',\overline{\mathbf{p}}_1^0,z)+u_{(1,2),1}(\overline{\mathbf{p}}_1',\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1',\overline{\mathbf{p}}_1^0,z)+\\
&+\frac{\varphi_1(\overline{p}_1')\,\omega_2(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1',\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)}{z+\varkappa_1^2-(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1')^2/2m_2}+\\
&+\frac{\varphi_2(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1')\,\omega_{1,1}(\overline{\mathbf{p}}_1',\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)}{z+\varkappa_2^2-p_1'^2/2m_1}\Bigg];\\
&\omega_{1,1}(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)=\\
&=\int d\overline{\mathbf{p}}_1'\int d\overline{\mathbf{p}}_2'\,\frac{\varphi_2^*(\overline{\mathbf{p}}_2')\,\delta(\overline{\mathbf{p}}_1-\overline{\mathbf{p}}_1')+\mathscr{K}_1(\overline{\mathbf{p}}_1,\ \overline{\mathbf{p}}_1'\overline{\mathbf{p}}_2'z)}{z-p_1'^2/2m_1-p_2'^2/2m_2}\times\\
&\times\Bigg[\frac{\varphi_{12}((m_2\overline{\mathbf{p}}_1'-m_1\overline{\mathbf{p}}_2')/M)\,\omega_{12,1}(\overline{\mathbf{p}}_1'+\overline{\mathbf{p}}_2',\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)}{z+\varkappa_{12}^2-(\overline{\mathbf{p}}_1'+\overline{\mathbf{p}}_2')^2/2M}+\\
&+u_{12,1}\left(\overline{\mathbf{p}}_1'+\overline{\mathbf{p}}_2',\ \frac{m_2\overline{\mathbf{p}}_1'-m_1\overline{\mathbf{p}}_2'}{M},\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z\right)\Bigg];\\
&\omega_{2,1}(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)=\\
&=\int d\overline{\mathbf{p}}_1'\int d\overline{\mathbf{p}}_2'\,\frac{\varphi_1^*(\overline{\mathbf{p}}_1')\,\delta(\overline{\mathbf{p}}_2-\overline{\mathbf{p}}_2')+\mathscr{K}_2(\overline{\mathbf{p}}_2,\ \overline{\mathbf{p}}_1'\overline{\mathbf{p}}_2',\ z)}{z-p_1'^2/2m_1-p_2'^2/2m_2}\times\\
&\times\Bigg[\frac{\varphi_{12}(m_2\overline{\mathbf{p}}_1'-m_1\overline{\mathbf{p}}_2')/M)\,\omega_{12,1}(\overline{\mathbf{p}}_1'+\overline{\mathbf{p}}_2',\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)}{z+\varkappa_{12}^2-(\overline{\mathbf{p}}_1'+\overline{\mathbf{p}}_2')^2/2M}+\\
&+u_{12,1}\left(\overline{\mathbf{p}}_1'+\overline{\mathbf{p}}_2',\ \frac{m_2\overline{\mathbf{p}}_1'-m_1\overline{\mathbf{p}}_2'}{M},\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z\right)\Bigg];\\
&\omega_{12,1}(\overline{\mathscr{P}}_{12},\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)=\frac{\varphi_{12}^*(\overline{\mathbf{p}}_1^0-(m_1/M)\overline{\mathscr{P}}_{12})\,\varphi_2(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1^0)}{z-p_1^{02}/2m_1-(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1^0)^2/2m_2}+\\
&+\int d\overline{\mathbf{p}}_1'\,\frac{\varphi_{12}^*(\overline{\mathbf{p}}_1'-(m_1/M)\overline{\mathscr{P}}_{12})}{z-\mathbf{p}_1'^2/2m_1-(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1')^2/2m_2}\times\\
&\times\Big[B_1(\overline{\mathbf{p}}_1',\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1',\overline{\mathbf{p}}_1^0,z)+u_{(1,2),1}(\overline{\mathbf{p}}_1',\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1',\overline{\mathbf{p}}_1^0,z)+\\
&+\frac{\varphi_2(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1')\,\omega_{1,1}(\overline{\mathbf{p}}_1',\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)}{z+\varkappa_2^2-p_1'^2/2m_1}+\\
&+\frac{\varphi_1(\overline{\mathbf{p}}_1')\,\omega_{2,1}(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1',\ \overline{\mathbf{p}}_1^0,\ z)}{z+\varkappa_1^2-(\overline{\mathscr{P}}_{12}-\overline{\mathbf{p}}_1')^2/2m_2}\Big].
\end{aligned}\right\}\quad(91)$$

Оператор $B_1(z)$ в системе (91) имеет вид:

$$B_1(z)=M_1^3(z)+\frac{|\varphi_1\rangle}{z+\varkappa_1^2-H_{02}}M_1^2(z)+\frac{|\varphi_2\rangle}{z+\varkappa_2^2-H_{01}}M_1^1(z);\qquad(92)$$

$$B_1(z^*)=\mathscr{K}_1^+(z).\qquad(93)$$

Анализ свойств интегральных уравнений для компонент оператора рассеяния. Систему интегральных уравнений (91) для компонент оператора рассеяния задачи двух частиц во внешнем поле запишем в матричном виде:

$$\mathcal{T}(z)=\mathcal{T}_0(z)+\widetilde{\mathcal{B}}(z)\,\mathcal{T}(z), \tag{94}$$

где $\mathcal{T}(z)$ — вектор с компонентами $u_{(1,2),1}(z)$, $u_{12,1}(z)$, $w_{1,1}(z)$, $w_{2,1}(z)$, $w_{21,1}(z)$. Нашей задачей является исследование аналитических свойств ядра $\mathcal{B}(z)$ системы уравнений для компонент полной T-матрицы, аналогично тому как это было в [5].

Рассмотрим свойства степеней ядра $\mathcal{B}(z)$. Запишем N-ю степень этого ядра в виде

$$[\widetilde{\mathcal{B}}(z)]^{\widetilde{N}}=\widetilde{\mathcal{D}}^N(z)\,G_0(z). \tag{95}$$

Элементы матрицы $\mathcal{D}^N(z)$ в импульсном представлении, т. е. функции $\langle \mathbf{p} \mid \widetilde{\mathcal{D}}^N_{mn}(z) \mid \mathbf{p}' \rangle$ [$\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — либо один из импульсов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_{12}$, $\mathcal{P}_{12}$, либо один из наборов $(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)$, $(\mathbf{p}_{12}, \mathcal{P}_{12})$, аналогично со штрихом], имеют главные особенности по импульсам $\mathbf{p}'$. Следовательно, система уравнений (94) и матрицы $\widetilde{\mathcal{D}}^N(z)$ имеют смысл только в терминах компонент. Из свойства ядер системы (94) вытекает, что для операторов $\widetilde{\mathcal{D}}^N_{mn}(z)$ справедливо одно из следующих разложений на компоненты:

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{D}}^N_{mn}(z)=[\widetilde{\mathcal{D}}^N_{mn}(z)]_0+[\widetilde{\mathcal{D}}^N_{mn}(z)]_{12}\frac{\langle\varphi_{12}|}{z+\varkappa_{12}^2-H_{012}}\,;\\
&\widetilde{\mathcal{D}}^N_{mn}(z)=[\widetilde{\mathcal{D}}^N_{mn}(z)]_0+[\widetilde{\mathcal{D}}^N_{mn}(z)]_1\frac{\langle\varphi_2|}{z+\varkappa_2^2-H_{01}}+\\
&\quad+[\widetilde{\mathcal{D}}_{mn}(z)]_2\frac{\langle\varphi_1|}{z+\varkappa_1^2-H_{02}}.
\end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Используя найденные выше интегральные представления, для компонент можно показать, что при $N\geqslant 5$ $\langle \mathbf{p} \mid [\widetilde{\mathcal{D}}^N_{mn}(z)]_\alpha \mid\mid \mathbf{p}'_\alpha \rangle$ ($\alpha = 0, 1, 2, 12$) являются гельдеровскими функциями своих переменных. Это значит, что система уравнений (94) — фредгольмовская. Используя метод анализа фредгольмовской системы уравнений задачи трех тел [5, 15], можно показать, что система уравнений (94) имеет единственное решение, а соответствующая им система однородных уравнений для $E \neq -\varkappa_1^2-\varkappa_2^2$ и $E \notin \delta_{\rm disc}(H)$ имеет только тривиальные решения.

3. СВЯЗЬ КОМПОНЕНТ T-МАТРИЦЫ С МЕЛЛЕРОВСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ И ЭЛЕМЕНТАМИ S-МАТРИЦЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДВУХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Компоненты Т-матрицы, построенные в соответствии с начальными каналами. Наряду с изученной выше системой уравнений для out-компонент T-матрицы рассеяния, построенных в соответствии с каналами в конечном состоянии системы, введем in-компоненты T-матрицы, соответствующие каналам в начальном состоянии. Эти системы должны быть эквивалентны друг другу и отличаться одна от другой операцией эрмитового сопряжения.

Определим операторы $T_\alpha^{\text{in}}(z)$ ($\alpha = 1, 2, 12$) соотношением

$$T_\alpha^{\text{in}}(z) = V_\alpha + VG(z)V_\alpha, \tag{97}$$

тогда для $T_\alpha^{\text{in}}(z)$ имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} T_{1,2}^{\text{in}}(z) &= N_{1,2}(z) + T_{12}^{\text{in}}(z)\,G_0(z)\,N_{1,2}(z);\\ T_{12}^{\text{in}}(z) &= t_{12}(z_{12}) + T_{1,2}^{\text{in}}(z)\,G_0(z)\,t_{12}(z). \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Аналитические свойства операторов $N_{1,2}(z)$ и $t_{12}(z)$, изученные выше, позволяют записать для операторов $T_\alpha^{\text{in}}(z)$ следующие разложения:

$$\left.\begin{aligned} T_{1,2}^{\text{in}}(z) &= t_1(z_1) + t_2(z_2) + \eta_{1,2}(z) + \zeta_2(z) < \varphi_1|/(z + \varkappa_1^2 - H_{02}) +\\ &+ \zeta_1(z) < \varphi_2|/(z + \varkappa_2^2 - H_{01});\\ T_{12}^{\text{in}}(z) &= t_{12}(z_{12}) + \eta_{12}(z) + \zeta_{12}(z) < \varphi_{12}|/(z + \varkappa_{12}^2 - H_{021}). \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Поскольку операторы $T_\alpha(z)$, для которых существует разложение по компонентам вида (87), связаны с операторами $T_\alpha^{\text{in}}(z)$ соотношением

$$T_\alpha^+(z) = T_\alpha^{\text{in}}(z^*), \tag{100}$$

то компоненты $u_\alpha(z)$, $v_\alpha(z)$ связаны с $\zeta_\alpha(z)$, $\eta_\alpha(z)$ следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} &[v_1(z) + \mathscr{K}_1(z)]^+ = \zeta_1(z^*);\quad [v_2(z) + \mathscr{K}_2(z)]^+ = \zeta_2(z^*);\\ &[u_{1,2}(z) + \mathscr{K}_3(z)]^+ = \eta_{1,2}(z);\quad v_{12}^+(z) = \zeta_{12}(z^*);\quad u_{12}^+(z) = \eta_{12}(z^*). \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Операторные равенства (101) в импульсном представлении имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_1^*(\mathbf{p}_1^0,\ \mathbf{p}_2^0;\ \mathbf{p}_1,\ z^*) = v_1(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ z) + \mathscr{K}_1(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ z);\\ &\zeta_2^*(\mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ \mathbf{p}_2,\ z^*) = v_2(\mathbf{p}_2,\ \mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ z) + \mathscr{K}_2(\mathbf{p}_2,\ \mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ z);\\ &\zeta_{12}^*(\mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ \mathscr{P}_{12},\ z^*) = v_{12}(\mathscr{P}_{12},\ \mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ z);\\ &\eta_{1,2}^*(\mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2,\ z^*) = u_{1,2}(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2,\ \mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ z) + \mathscr{K}_3(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2,\ \mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ z);\\ &\eta_{12}^*(\mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ \mathscr{P}_{12}\mathbf{p}_{12},\ z^*) = u_{12}(\mathscr{P}_{12}\mathbf{p}_{12},\ \mathbf{p}_1^0\mathbf{p}_2^0,\ z). \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

Отсюда следует, что с помощью решений системы уравнений (91) и сложений (102) можно построить in-компоненты T-матрицы при всех z, за исключением точек дискретного спектра оператора H и точки, соответствующей локализованному состоянию системы.

Определим в рассматриваемой задаче пространство асимптотических состояний $\mathscr{H}_{\text{ac}}$, на котором заданы меллеровские операторы

$\Omega_\alpha^\pm$ и S-матриц рассеяния. Будем по-прежнему считать, что потенциалы V_α ($\alpha = 1, 2, 12$) принадлежат классу $\mathfrak{D}$ и гамильтонианы h_α ($\alpha = 1, 2, 12$) имеют дискретный спектр, состоящий из одного простого отрицательного собственного значения. В этом случае пространство $\mathscr{H}_{\text{ac}}$ — прямая сумма вида [8]:

$$\mathscr{H}_{\text{ac}} = \mathscr{G}^0 \oplus \mathscr{G}^1 \oplus \mathscr{G}^2 \oplus \mathscr{G}^{12}. \tag{103}$$

Здесь $\mathscr{G}^0$ — пространство квадратично-интегрируемых функций $f(\bar{p}_1\bar{p}_2)$ двух переменных; $\mathscr{G}^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 12$) — пространства квадратично-интегрируемых функций одной переменной. Волновой оператор $\Omega^\pm$, действующий из $\mathscr{H}_{\text{ac}}$ в $\mathscr{G}$, задается следующим образом:

$$\Omega^\pm f = \Omega_0^\pm f + \Omega_1^\pm f_1 + \Omega_2^\pm f_2 + \Omega_{12}^\pm f_{12}, \tag{104}$$

где состояние f из $\mathscr{H}_{\text{ac}}$ равно $\{f_0, f_1, f_2, f_{12}\}$. Волновые операторы $\Omega_\alpha^\pm$, действующие из $\mathscr{G}_\alpha$ в $\mathscr{G}$, согласно результатам нестационарной теории рассеяния будут:

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega_0^\pm |f_0\rangle = |f_0\rangle + \int d\bar{\mathbf{p}}_1 \int d\bar{\mathbf{p}}_2 G(z_0^\pm)(V_1 + V_2 + V_{12})|\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2\rangle f_0(\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2);\\
&z^\pm = p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 \pm i0;\quad f_0(\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2) = \langle\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2|f_0\rangle;\\
&\Omega_1^\pm |f_1\rangle = |f_1\rangle|\psi_2\rangle + \int d\bar{\mathbf{p}}_1 G_1(z_1^\pm)(V_1 + V_{12})|\bar{\mathbf{p}}_1\psi_2\rangle f_1(\bar{\mathbf{p}}_1);\\
&z_1^\pm = p_1^2/2m_1 - \varkappa_2^2 \pm i0;\quad f_1(\mathbf{p}_1) = \langle\bar{\mathbf{p}}_1|f_1\rangle;\\
&\Omega_2^\pm |f_2\rangle = |f_2\rangle|\psi_1\rangle + \int d\bar{\mathbf{p}}_2 G(z_2^\pm)(V_2 + V_{12})|\psi_1\bar{\mathbf{p}}_2\rangle f_2(\bar{\mathbf{p}}_2);\\
&z_2^\pm = p_2^2/2m_2 - \varkappa_1^2 \pm i0;\quad f_2(\mathbf{p}_2) = \langle\mathbf{p}_2|f_2\rangle;\\
&\Omega_{12}^\pm |f_{12}\rangle = |\psi_{12}\rangle|f_{12}\rangle + \int d\mathscr{P}_{12} G(z_{12}^\pm)(V_1 + V_2)|\psi_{12}\mathscr{P}_{12}\rangle f_{12}(\mathscr{P}_{12});\\
&z_{12}^\pm = \mathscr{P}_{12}^2/2M_{12} - \varkappa_{12}^2 \pm i0;\quad f_{12}(\mathscr{P}_{12}) = \langle\mathscr{P}_{12}|f_{12}\rangle.
\end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Покажем, что операторы $\Omega_\alpha^\pm$ можно выразить через in-компоненты полной T-матрицы. Введем дополнительное условие: дискретный спектр оператора H лежит строго ниже всех $-\varkappa_\alpha^2$ ($\alpha = 1, 2, 12$). Выполнение этого условия означает, что при всех $z_\alpha^\pm$ ($\alpha = 1, 2, 12$) компоненты оператора $T(z)$ определяются однозначно из системы уравнений (91). Случай $E = -\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2$ здесь не рассматривается.

Тот факт, что $\sigma_{\text{disc}}(H)$ лежит ниже всех $-\varkappa_\alpha^2$, позволяет доказать следующее утверждение.

Оператор $\Omega_0^\pm$ связан с оператором $T(E \pm 0)$ и операторы $\Omega_\alpha^\pm$ — с компонентами $\zeta_\alpha(E \pm i0)$ с помощью соотношений:

$$\langle\bar{\mathbf{k}}_1\bar{\mathbf{k}}_2|\Omega_0^\pm|f_0\rangle = f(\bar{\mathbf{k}}_1\bar{\mathbf{k}}_2) + \\ + \int d\mathbf{p}_1 \int d\mathbf{p}_2 \frac{T(\bar{\mathbf{k}}_1\bar{\mathbf{k}}_2, \bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2, z_0^\pm) f_0(\bar{\mathbf{p}}_1\bar{\mathbf{p}}_2)}{z_0^\pm - k_1^2/2m_1 - k_2^2/2m_2}; \tag{106}$$

$$\langle \overline{\mathbf{k}}_1 \overline{\mathbf{k}}_2 | \Omega_1^{\pm} | f_1 \rangle = f_1 (\overline{\mathbf{k}}_1) \psi_2 (\overline{\mathbf{k}}_2) + \\ + \int d\overline{\mathbf{p}}_1 \frac{\zeta_1 (\overline{\mathbf{k}}_1 \overline{\mathbf{k}}_2, \overline{\mathbf{p}}_1, z_1^{\pm}) f_1 (\overline{\mathbf{p}}_1)}{z_1^{\pm} - k_1^2/2m_1 - k_2^2/2m_2}; \tag{107}$$

$$\langle \overline{\mathbf{k}}_1 \overline{\mathbf{k}}_2 | \Omega_2^{\pm} | f_2 \rangle = \psi_1 (\overline{\mathbf{k}}_1) f_2 (\overline{\mathbf{k}}_2) + \\ + \int d\overline{\mathbf{p}}_2 \frac{\zeta_2 (\overline{\mathbf{k}}_1 \overline{\mathbf{k}}_2, \overline{p}_2, z_2^{\pm}) f_2 (\overline{\mathbf{p}}_2)}{z_2^{\pm} - k_1^2/2m_1 - k_2^2/2m_2}; \tag{108}$$

$$\langle \overline{\mathbf{k}}_1 \overline{\mathbf{k}}_2 | \Omega_{12}^{\pm} | f_{12} \rangle = \psi_{12} (\overline{\mathbf{k}}_{12}) f_{12} (\mathscr{K}_{12}) + \int d\mathscr{P}_{12} \zeta_{12} (\overline{\mathbf{k}}_1 \overline{\mathbf{k}}_2, \mathscr{P}_{12}, z_{12}^{\pm}) \times \\ \times [z_{12}^{\pm} - k_1^2/2m_1 - k_2^2/2m_1]^{-1} f_{12}^* (\mathscr{P}_{12}). \tag{109}$$

Здесь параметры $z_\alpha^{\pm}$ ($\alpha = 0, 1, 2, 12$) те же, что и в формулах (105), а операторы ζ_α (z) ($\alpha = 1, 2, 12$) определены в (99). В силу наложенных условий на дискретный спектр оператора H системы уравнений (91), (94) и (98) однозначно разрешимы, и определения (106)—(109) корректны. Покажем эквивалентность представлений вида (105) и (106)—(109) для меллеровских операторов.

Эквивалентность формул (105) и (106) для $\Omega_0^{\pm}$ очевидна, так как $G(z) V = G_0 (z) T(z)$. Рассмотрим теперь равенство (107). Из определения $\zeta_1 (z)$ вида (99) имеем:

$$\zeta_1 (z) = B_1 (z) + T_{12}^{\text{in}} (z) G_0 (z) [\, | \varphi_2 > + B_1 (z)], \tag{110}$$

где оператор B_1 (z) тот же, что и в (91) и (92). Положим в равенстве (110) $z = z_1^{\pm}$ и вычислим $\zeta_1 (\overline{k}_1 \overline{k}_2, \overline{p}_1 z_1^{\pm})$ при $z_1^{\pm} = p_1^2/2m_1 - \varkappa_2^2 \pm \mathrm{i}0$:

$$\zeta_1 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2, p_1, z_1^{\pm}) = \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | B_1 (z_1^{\pm}) | \mathbf{p}_1 \rangle + \\ + \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | T_{12}^{\text{in}} (z_1^{\pm}) G_0 (z_1^{\pm}) | \varphi_2 \mathbf{p}_1 \rangle + \\ + \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | T_{12}^{\text{in}} (z_{18}^{\pm}) G_0 (z_1^{\pm}) B_1 (z_1^{\pm}) | \mathbf{p}_1 \rangle = \\ = \mathscr{K}_1^* (\mathbf{p}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z_1^{\pm}) + \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | T_{12}^{\text{in}} (z_1^{\pm}) | \psi_2 \mathbf{p}_1 \rangle + \\ + \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | T_{12}^{\text{in}} (z_1^{\pm}) G_0 (z_1^{\pm}) B_1 (z_1^{\pm}) | \mathbf{p}_1 \rangle. \tag{111}$$

Здесь были использованы (92), (93) и определение вектора $| \varphi >$ с помощью соответствующей волновой функции. Вычислим функцию $\mathscr{K}_1 (\mathbf{p}_1, \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2, z_1^{\pm})$. Согласно равенству (65) имеем

$$\mathscr{K}_1 (\overline{\mathbf{p}}_1, \overline{\mathbf{k}}_1, \overline{\mathbf{k}}_2, p_1^2/2m_1 \pm \mathrm{i}\tau - \varkappa_2^2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\mp 2\pi \mathrm{i}} \left(\frac{1}{E - \varepsilon + \varkappa_2^2 \pm \mathrm{i}\tau_2} + \frac{1}{\varepsilon - p_1^2/2m_1 \pm \mathrm{i}\tau_1} \right) \times \\ \times t_1 (\mathbf{p}_1, \mathbf{k}_1, \varepsilon \pm \mathrm{i}\tau_1) \varphi_2^* (\mathbf{k}_2) \left(\frac{1}{\varepsilon - k_1^2/2m_1 \pm \mathrm{i}\tau_1} + \frac{1}{E - \varepsilon - k_2^2/2m_2 \pm \mathrm{i}\tau_2} \right). \tag{112}$$

Положим в (112) $\tau_1=\tau_2$ и умножим это уравнение на $(z_1-k_1^2/2m_1-$ $-k_2^2/2m_2)^{-1}$. Учитывая, что при $\tau\to 0$

$$\left(\frac{1}{E-\varepsilon+\varkappa_2^2\pm i\tau}+\frac{1}{\varepsilon-p_1^2/2m_1\pm i\tau}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{\varepsilon-\rho_1^2/2m_1+i\tau}+\frac{1}{p_1^2/2m_1-\varepsilon\pm i\tau}\right)=$$
$$=\frac{\mp 2i\tau}{(\varepsilon-p_1^2/2m_1)^2+\tau^2}\to\mp 2\pi i\delta(\varepsilon-p_1^2/2m_1),$$

получаем

$$\frac{\zeta_1(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,\,\mathbf{p}_1,\,z_1^{\pm})}{z_1^{\pm}-k_1^2/2m_1-k_2^2/2m_2}=\frac{t_1(\mathbf{k}_1,\,\mathbf{p}_1,\,p_1^2/2m_1\pm i0)\,\psi_2(\mathbf{k}_2)}{p_1^2/2m_1-k_1^2/2m_1\pm i0}+$$
$$+\frac{\langle\overline{\mathbf{k}}_1\overline{\mathbf{k}}_2\,|\,T_{12}^{\text{in}}(z_1^{\pm})\,|\,\psi_1^{\pm}\psi_2\rangle}{z_1^{\pm}-k_1^2/2m_1-k_2^2/2m_2},\tag{113}$$

где $\langle\mathbf{k}\,|\,\psi^{\pm}\rangle=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})+(p^2/2m-k^2/2m\pm i0)^{-1}\,t\,(\mathbf{k},\mathbf{p},\,p^2/2m\pm$ $\pm i0)$.

Преобразуем теперь интегральный член в выражении (105) для $\Omega_1^{\pm}$. При всех $\operatorname{Im} z\neq 0$ имеем

$$G(z)=G_{1,2}(z)+G(z)\,V_{12}G_{1,2}(z),\tag{114}$$

откуда

$$G(z_1^{\pm})(V_1+V_{12})\,|\mathbf{p}_1\psi_2\rangle=$$
$$=g_{01}(p_1^2/2m_1\pm i0)\,t_1(p_1^2/2m_1\pm i0)|\,\mathbf{p}_1\rangle\psi_2\rangle+G(z_1^{\pm})\,V_{12}|\,\mathbf{p}_1\psi_2\rangle+$$
$$+G(z_1^{\pm})\,V_{12}g_{01}(p_1^2/2m_1\pm i0)\,t_1(p_1^2/2m_1\pm i0)|\mathbf{p}_1\psi_2\rangle=$$
$$=g_{01}(p_1^2/2m_1\pm i0)\,t_1(p_1^2/2m_1\pm i0)|\,\mathbf{p}_1\rangle\psi_2\rangle+$$
$$+G_0(z_1^{\pm})\,T_{12}^{\text{in}}(z_1^{\pm})|\psi_1^{\pm}\psi_2\rangle.\tag{115}$$

Сравнивая (113) и (115), приходим к справедливости представления (107) оператора $\Omega_1^{\pm}$ через компоненту $\zeta_1(z_1^{\pm})$. Доказательство формулы (108) для оператора $\Omega_2^{\pm}$ проводится аналогично. Осталось исследовать представление для оператора $\Omega_{21}^{\pm}$. Рассмотрим равенство

$$\zeta_{12}(z_{12}^{\pm})|\mathscr{P}_{12}\rangle=T_{1,2}^{\text{in}}(z_{12}^{\pm})\,G_0(z_{12}^{\pm})|\varphi_{12}\mathscr{P}_{12}\rangle,\tag{116}$$

где $T_{12}^{\text{in}}(z)$ определяется из системы (98). Комбинируя (97) и (116), приходим к доказательству (109).

Элементы G-матрицы в задаче двух частиц в поле. Установим теперь связь компонент T-матрицы с элементами S-матрицы рассеяния $S_{\alpha\beta}$. Запишем компоненты в виде

$$\zeta_\alpha(z)=\zeta_\alpha^0(z)+\frac{|\varphi_1\rangle}{z+\varkappa_1^2-H_{02}}\,\zeta_{2,\,\alpha}(z)+$$
$$+\frac{|\varphi_2\rangle}{z+\varkappa_2^2-H_{01}}\,\zeta_{1,\,\alpha}(z)+\frac{|\varphi_{12}\rangle}{z+\varkappa_{12}^2+H_{012}}\,\zeta_{12,\,\alpha}.\tag{117}$$

Покажем, что элементы S-матрицы рассеяния $S_{\alpha\beta}$ выражаются через компоненты $\zeta_{\alpha\beta}(z)$ (α, $\beta = 1, 2, 12$) с помощью соотношений:

$$\langle \mathbf{p}_\alpha | S_{\alpha\beta} | \mathbf{p}'_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}'_\beta) - \\ -2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta)\zeta_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}'_\beta, E_\beta \pm i0), \tag{118}$$

где $E_\beta \pm i0 = z_\beta^\pm$, аналогично для $z_\alpha^\pm$. Если конечный канал реакции соответствует развалу, т. е. канальный гамильтониан есть H_0 и $\alpha = 0$, то

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | S_{0\beta} | \mathbf{p}'_\beta \rangle = \\ = -2\pi i \delta(p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 - E_\beta)\zeta_\beta(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_\beta, E_\beta \pm i0). \tag{119}$$

Отметим, что в (118), (119) при α, $\beta = 12$ $\mathbf{p}'_\beta = \mathcal{P}'_{12}$, $\mathbf{p}_\alpha = \mathcal{P}_{12}$.

Доказательство формул (118) и (119) проводится точно так же, как и доказательство соотношений (106)—(109). Действительно, согласно [8] имеем:

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | S_{0\beta} | \mathbf{p}'_\beta \rangle = -2\pi i \left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - E_\beta\right) \times \\ \times \langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | T^{0\beta}(E_\beta + i0) | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle, \tag{120}$$

где оператор $T^{0\beta}(z)$ определен в виде

$$T^{0\beta}(z) = V^\beta + VG(z)V^\beta; \; V^\beta = V - V_\beta. \tag{121}$$

Поскольку $G(z) = G_0(z) + G_0(z)VG(z)$, то

$$G(z)V^\beta = G_0(z)T^{0\beta}(z). \tag{122}$$

Из этой формулы, а также из сравнений формул (105), (121) и (107)—(109) вытекает требуемый результат, так как

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | T^{0\beta}(z_\beta^+) | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle = \zeta_\beta(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_\beta, z_\beta^+). \tag{123}$$

Докажем теперь справедливость соотношений (118). Как и в предыдущем случае, при α, β (α, $\beta = 12$) p_α и p'_β есть $\mathcal{P}_{12}$ и $\mathcal{P}'_{12}$. Матричные элементы $S_{\alpha,\beta}$ при α, $\beta = 1, 2, 12$ имеют вид [8]:

$$\langle \mathbf{p}_\alpha | S_{\alpha,\beta} | \mathbf{p}'_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}'_\beta) - \\ -2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta)\langle \mathbf{p}_\alpha\psi_\alpha | T^{\alpha\beta}(z_\beta^+) | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle, \tag{124}$$

где $T^{\alpha\beta}(z) = V^\beta + V^\alpha G(z)V^\beta$. Для вычисления компонент $\zeta_{\alpha,\beta}(z)$ воспользуемся формулами (117), (123), (62), (63) и разложением операторов $T_\alpha(z)$ на компоненты. Поскольку для операторов $T^{0\beta}(z)$ имеем представление вида

$$T^{0\beta}(z) = V^\beta + VG(z)V^\beta = V^\beta + [T_{1,2}(z) + T_{1?}(z)]G_0(z)V^\beta, \tag{125}$$

то для компонент оператора $T^{0\beta}(z)$ получим:

$$\zeta_{12,\beta}(\mathcal{P}_{12}, \mathbf{p}'_\beta, z^+_\beta) = \langle \varphi_{12}\mathcal{P}_{12} | G_0(z^+_\beta) V^\beta | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle +$$
$$+ \langle \varphi_{12}\mathcal{P}_{12} | G_0(z^+_\beta)(V_1+V_2) G(z^+_\beta) V^\beta | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle; \qquad (126)$$

$$\zeta_{1,\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_\beta, z^+_\beta) = \langle \varphi_2 \mathbf{p}_1 | G_0(z^+_\beta) V^\beta | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle +$$
$$+ \langle \varphi_2 \mathbf{p}_1 | G_0(z^+_\beta) V_{12} G(z^+_\beta) V^\beta | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle +$$
$$+ \langle \mathbf{p}_1 | \mathcal{K}_1(z^+_\beta) G_0(z^+_\beta) V^\beta | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle + \langle \mathbf{p}_1 | \mathcal{K}_1(z^+_\beta) G_0(z^+_\beta) V_{12} G z^+_\beta V^\beta | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle. \qquad (127)$$

Выражение (126) на поверхности энергии приводится к виду

$$\zeta_{12,\beta}(\mathcal{P}_{12}, \mathbf{p}'_\beta, z^+_\beta) = \langle \psi_{12}\mathcal{P}_{12} | T^{12,\beta}(z^+_\beta) | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle. \qquad (128)$$

Выражение (127) при $E_\beta = p_1^2/2m_1 - \varkappa_2^2$ согласно (112) и (113) допускает представление вида

$$\zeta_{1,\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_\beta, E_\beta \pm \mathrm{i}0) = \langle \psi_1 - \psi_2 | V^\beta + V_{12} G(z^+_\beta) V^\beta | \psi_\beta \mathbf{p}'_\beta \rangle, \qquad (129)$$

где $\langle \mathbf{k} | \psi^- \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + (p^2/2m - k^2/2m - \mathrm{i}0)^{-1} t(\mathbf{k}, \mathbf{p}, p^2/2m - - \mathrm{i}0)$.

Соотношение (129) есть известный вариант записи амплитуды рассеяния с выделенной в конечном состоянии искаженной волны частицей 1 [8]. Этим завершается доказательство справедливости представлений (118) и (119).

4. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И РЕЗОНАНСЫ В СИСТЕМЕ ДВУХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ И В СИСТЕМЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ КОНЕЧНОЙ МАССЫ

Связанные состояния и резонансы в системе двух частиц во внешнем поле. Всюду ранее предполагали, что энергия системы не совпадает с энергией $-E_0$ состояния дискретного спектра гамильтониана $H_{1,2}$. Рассмотрим здесь случай, когда E близко к $(-E_0)$, и оценим влияние состояний из $\sigma_{\rm disc}(H_{1,2})$ на свойства спектра оператора H и, следовательно, на свойства оператора $T(z)$. Чтобы сделать исследование более общим, будем считать, что множества $\sigma_{\rm disc}(h_1)$ и $\sigma_{\rm disc}(h_2)$ содержат $n_1 \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$ элементов, причем некоторые из значений $(-\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2) \in \sigma_{\rm disc}(H_{1,2})$ лежат в непрерывном спектре системы $\sigma_c(H) = (\Sigma, \infty)$. Здесь Σ определена следующим образом [16]:

$$\Sigma = \min_\alpha \{-\varkappa_\alpha^2\}, \quad \alpha = 1, 2, 12, \qquad (130)$$

где минимум вычисляется по всем состояниям дискретного спектра гамильтонианов h_1, h_2, h_{12} (5).

Для описания влияния состояний из $\sigma_{\rm disc}(H_{1,2})$ на спектр оператора H воспользуемся уравнением Липпмана—Швингера, связывающим функции Грина $G(z) = (z - H)^{-1}$ и $G_{1,2}(z) = (z - H_{1,2})^{-1}$ операторов H и $H_{1,2}$ соответственно:

$$G(z) = G_{1,2}(z) + G_{12}(z) V_{12} G(z). \qquad (131)$$

Представим функцию Грина $G_{1,2}(z)$ в виде

$$G_{1,2}(z)=\frac{|\psi_{1,2}\rangle\langle\psi_{1,2}|}{z+E_0}+\hat{G}_{1,2}(z), \tag{132}$$

где выделен вклад состояния из $\sigma_{disc}(H_{1,2})$ с энергией $(-E_0)$ и волновой функцией $|\psi_{1,2}>=|\psi_1>|\psi_2>$. Оператор $\hat{G}_{1,2}(z)$ в (132) задан соотношением

$$\hat{G}_{1,2}(z)=MG_{1,2}(z), \tag{133}$$

где

$$M=1-\Lambda;\ \Lambda=|\psi_{1,2}><\psi_{1,2}|. \tag{134}$$

Операторы M и Λ в (134) ортогональны проекторам, так что $M = M^+ = M^2$ и $\Lambda = \Lambda^+ = \Lambda^2$. Исходя из представления ядра уравнения (131) в виде двух слагаемых (132), запишем $G(z)$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &G(z)=G_1(z)+G_2(z);\\ &G_1(z)=\frac{|\psi_{1,2}\rangle\psi_{1,2}|}{z+E_0}[1+V_{12}G(z)];\\ &G_2(z)=\hat{G}_{1,2}(z)[1+V_{12}G(z)]. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Из (135) получаем систему уравнений для $G_1(z)$ и $G_2(z)$:

$$\left.\begin{aligned} &G_1(z)=\frac{|\psi_{1,2}\rangle\langle\psi_{1,2}|}{z+E_0}[1+V_{12}G_1(z)+V_{12}G_2(z)];\\ &G_2(z)=\hat{G}_{1,2}(z)[1+V_{12}G_1(z)+V_{12}G_2(z)]. \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Предполагая существование оператора

$$R(z)=[1-\hat{G}_{1,2}(z)V_{12}]^{-1}\hat{G}_{1,2}(z), \tag{137}$$

находим из (136) представление вида

$$G_2(z)=R(z)+R(z)V_{12}G_1(z) \tag{138}$$

и

$$G_1(z)=|\psi_{1,2}\rangle\frac{1}{z+E_0-b(z)}\langle\psi_{1,2}|[1+V_{12}R(z)]. \tag{139}$$

Функция $b(z)$ в (139) имеет вид:

$$b(z)=\langle\psi_{1,2}|V_{12}+V_{12}R(z)V_{12}|\psi_{1,2}\rangle. \tag{140}$$

Суммируя (138) и (139), получаем выражение для $G(z)$ через $R(z)$:

$$G(z)=[1+R(z)V_{12}]|\psi_{1,2}\rangle\langle\psi_{1,2}|[1+V_{12}R(z)]/[z+E_0-b(z)]+R(z). \tag{141}$$

Отсюда следует, что

$$\langle\psi_{1,2}|G(z)|\psi_{1,2}\rangle=1/[z+E_0-b(z)]. \tag{142}$$

Проанализируем теперь условия, при которых оператор $R(z)$ существует. Из (137) вытекает, что оператор $R(z)$ — решение уравнения вида

$$R(z) = \hat{G}_{1,2}(z) + \hat{G}_{1,2}(z) V_{12} R(z), \tag{143}$$

определенное в подпространстве $M\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ — гильбертово пространство состояний системы), и, следовательно,

$$\begin{gathered}(zM - MHM) R(z) = M(z - H_{1,2}) [\hat{G}_{1,2}(z) + \\ + \hat{G}_{1,2}(z) V_{12} R(z)] - MV_{12} MR(z) = M(z - H_{1,2}) G_{1,2} \times \\ \times [M + MV_{12} R(z)] - MV_{12} MR(z) = M^2 + \\ + MV_{12} MR(z) - MV_{12} MR(z) = M.\end{gathered}$$

Отсюда

$$R(z) = (zM - MHM)^{-1} M. \tag{144}$$

Таким образом, оператор $R(z)$ является резольвентой оператора MHM в подпространстве M и, следовательно, существует [17].

Представление величины $b(z)$ (140) через резольвенту самосопряженного оператора позволяет заключить, что $b(E+\mathrm{i}0)$ имеет отрицательную мнимую часть. Этот результат можно получить из спектрального разложения оператора $R(E+\mathrm{i}0)$, применяя формулу Сохоцкого:

$$\operatorname{Im} b(E + i0) = -\pi \sum_{\alpha}\!\!\!\!\!\!\int\; |\langle \psi_{1,2} | V_{12} | \psi_\alpha \rangle|^2 \delta(E - E_\alpha) \leqslant 0, \tag{145}$$

где $|\psi_\alpha>$ — полный набор собственных функций гамильтониана MHM, т. е. $\sum\!\!\!\!\!\!\int_{\alpha} |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| = M$.

Из формулы (141) следует, что существование дискретного спектра гамильтониана $H_{1,2}$ приводит к появлению в полной функции Грина системы слагаемого с характерным множителем $[z + E_0 - b(z)]^{-1}$. Аналогичный результат имеет место и для матрицы рассеяния $T(z)$. Проанализируем зависимость спектральных свойств оператора H от поведения этого множителя. Из (141) следует, что обращение множителя $z + E_0 - b(z)$ или реальной части этого множителя в нуль при некоторых $z = E + \mathrm{i}0$ означает существование связанного состояния или резонанса в системе с гамильтонианом H. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Дискретный спектр оператора H.

Пусть уравнение

$$E + E_0 - b(E + \mathrm{i}0) = 0 \tag{146}$$

имеет корень E_d, удовлетворяющий условию $E_d < \Sigma$. В этом случае $E_d \notin \sigma_c(H)$, и, следовательно, $b(E)$ в некоторой окрестности точки E_d является вещественной. В силу тождества Гильберта для резольвенты самосопряженного оператора следует, что $b(z)$ удовлетворяет соотношению

$$b(z_1) - b(z_2) = (z_2 - z_1) < \psi_{1,2} \mid V_{12} R(z_1) R(z_2) V_{12} \mid \psi_{1,2} \rangle. \quad (147)$$

Полагая в (147) $z_1 = z$ и $z_2 = E_d$, получаем, что в некоторой окрестности точки E_d функции Грина $G(z)$ ведут себя как

$$(z - E_d)^{-1} [1 + \langle \psi_{1,2} \mid V_{12} R(z) R(E_d) V_{12}] \mid \psi_{1,2} \rangle. \quad (148)$$

Поскольку величина в квадратных скобках в (148) существует при $z = E_d$ и равна $1 + a^2$, где a — некоторое действительное число, то функция $G(z)$ имеет при $z = E_d$ простой полюс вида $(z - E_d)^{-1}$. Это значит, что $E_d \in \sigma_{\mathrm{disc}}(H)$, т. е. точка E_d — энергия связанного состояния системы с гамильтонианом H, т. е. E_d — собственное значение оператора H. Соответствующая собственная волновая функция, согласно (141) имеет вид:

$$\mid \psi_d > = (1 + a^2)^{-1/2} [1 + R(E_d) V_{12}] \mid \psi_{1,2} >. \quad (149)$$

В (149) в явном виде выписана нормировка функции $\mid \psi_d >$. Можно показать, что $\mid \psi_d >$ действительно является собственной функцией гамильтониана системы H с энергией E_d, следующей подстановкой в уравнение Шредингера:

$$\begin{aligned}(1 + a^2)^{1/2} (E_d - H) \mid \psi_d > &= (E_d - H_{1,2}) [1 + R(E_d) V_{12}] \mid \psi_{1,2} > \\ &- (1 + a^2)^{1/2} V_{12} \mid \psi_d > = (E_d + E_0) \mid \psi_{1,2} > + \\ &+ (E_d - H_{1,2}) G_{1,2}(E_d) [M + M V_{12} R(E_d)] V_{12} \mid \psi_{1,2} > - \\ &- (1 + a^2)^{1/2} V_{12} \mid \psi_d > = (E_d + E_0) \mid \psi_{1,2} > + \\ &+ (1 - \mid \psi_{1,2} > < \psi_{1,2} \mid) V_{12} [1 + R(E_d) V_{12}] \mid \psi_{1,2} > - \\ &- (1 + a^2)^{1/2} V_{12} \mid \psi_d > = [E_d + E_0 - b(E_d)] \mid \psi_{1,2} > = 0. \quad (150)\end{aligned}$$

Из предыдущего видно, что в окрестности точки E_d первое слагаемое в (141) — вклад в спектральное разложение функции $G(z)$, соответствующее связанному состоянию системы с энергией E_d и собственной функцией $\mid \psi_d >$ вида (149).

Случай 2. Резонансы при малом V_{12} в системе двух частиц во внешнем поле.

Пусть потенциал V_{12} является малым, т. е. $V_{12} = \beta V_{12}^0$, где β — малый параметр. В этом случае множитель $[z + E_0 - b(z)]^{-1}$ можно приближенно записать в виде

$$(E - E_R + i\Gamma/2)^{-1}, \quad (151)$$

где

$$\begin{aligned} E_R &= -E_0 + \beta \langle \psi_{1,2} \mid V_{12}^0 \psi_{1,2} \rangle, \; E_R > \Sigma; \\ \Gamma &= -2\,\mathrm{Im} b(-E_0 + i0) \geqslant 0. \quad (152)\end{aligned}$$

Следовательно, в данной ситуации имеет место обычный брейт-вигнеровский резонанс.

Случай 3. Резонансы в системе двух частиц во внешнем поле при произвольном V_{12}.

Пусть уравнение

$$E + E_0 - \operatorname{Re} b\,(E + i0) = 0 \tag{153}$$

имеет корень E_R, такой, что $E_R > \Sigma$. Тогда в окрестности точки E_R аргумент выражается $[E + E_0 - b\,(E + i0)]^{-1}$, скачком меняется на π, следовательно, E_R — энергия резонансного состояния системы [8, 18]. Для описания формы резонансной кривой предположим, что мнимая часть функции $b\,(E + i0)$ медленно меняется в окрестности точки E_R. Записав реальную часть функции $b\,(E + i0)$ в окрестности точки E_R в виде

$$\operatorname{Re}\,[b\,(E + i0) - b\,(E_R + i0)] = (E - E_R)\,\lambda\,(E) \tag{154}$$

и положив $\lambda\,(E) \approx \lambda\,(E_R) = -\lambda_0$, получим

$$[E + E_0 - b\,(E + i0)]^{-1} = (1 + \lambda_0)^{-1}\,[E - E_R + i\Gamma_R/2], \tag{155}$$

где Γ_R определена выражением

$$\Gamma_R = \Gamma\,(E_R)/(1 + \lambda_0);\ \Gamma\,(E_R) = -2\operatorname{Im} b\,(E_R + i0). \tag{156}$$

При малом V_{12} функция $\lambda\,(E)$ имеет второй порядок малости по параметру β, и формулы (155) и (156) переходят в (151) и (152). Следует подчеркнуть, что форма резонансной кривой (155) имеет место только тогда, когда функция $\Gamma\,(E)$ медленно меняется в окрестности точки резонанса. Это условие нарушается, когда точка E_R близка к Σ или к одной из $-\varkappa_\alpha^2$, задающих пороговые энергии в системе. В этом случае форма резонанса может сильно отличаться от (155), а формулы (156) становятся несправедливыми. Кроме того, при выводе формулы (155) предполагалось, что функция $b\,(E + i0)$ имеет непрерывную первую производную. Это предположение оправдано, так как в классе потенциалов $\mathfrak{Y}$ компоненты оператора $A\,(z) = V_{12} + V_{12}\,R\,(z)\,V_{12}$ являются непрерывными функциями E при $E \neq -\varkappa_\alpha$.

Согласно (140) и (147) полуширину резонанса можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Gamma &= b\,(E_R - i0) - b\,(E_R + i0) = \\ &= \lim_{\tau \to +0} 2i\tau\,\langle \psi_{1,2} \mid V_{12} R\,(E - i\tau)\,R\,(E + i\tau)\,V_{12} \mid \psi_{1,2} \rangle. \end{aligned} \tag{157}$$

Используя результаты работ [5, 17], можно показать, что функция Γ, определенная в виде (157), является аддитивной величиной относительно всех пороговых особенностей, лежащих выше точки E_R. Следовательно,

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_{12}, \tag{158}$$

где Γ_i — парциальные полуширины распада по i-му каналу.

Редукция трехчастичного гамильтониана. Предложенный выше анализ свойств системы и двух частиц в поле можно применить для описания связанных состояний и резонансов в системе трех частиц, взаимодействующих между собой посредством короткодействующих потенциалов. Для этого следует привести трехчастичный потенциал к виду гамильтониана двух частиц во внешнем поле, используя, например, метод, предложенный в [26]. Суть данного преобразования состоит в следующем.

Гамильтониан H системы трех частиц с конечными массами в импульсном представлении в переменных $\mathbf{p}_{ij}$ имеет вид [5]:

$$\left.\begin{aligned} &H = H_0 + V; \quad H_0 = p_{13}^2/2\mu_{13} + p_{23}^2/2\mu_{23} + p_{13}p_{23}/m_3;\\ &V = V_{13} + V_{23} + V_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

В (159) H_0 — оператор кинетической энергии, если за независимые переменные выбраны импульсы относительно движения $\mathbf{p}_{13}$ и $\mathbf{p}_{23}$, V_{ij} — потенциал взаимодействия пары ij, ядро оператора V_{ij} можно также выразить переменными $\mathbf{p}_{13}$ и $\mathbf{p}_{23}$ [5]. Записывая (159) в виде

$$H = H_{13} + H_{23} + (V_{12} + \mathbf{p}_{13}\mathbf{p}_{23}/m_3); \quad H_{ij} = \frac{p_{ij}^2}{2\mu_{ij}} + V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}), \tag{160}$$

получаем, что гамильтониан системы трех частиц отличается от гамильтониана системы двух частиц в силовом поле наличием слагаемого $\mathbf{p}_{13}\,\mathbf{p}_{23}/m_3$. Это слагаемое равно нулю, когда масса третьей частицы равна бесконечности.

Применим к оператору H унитарное преобразование вида $\exp(\mathrm{i}X)$, где

$$X = \alpha\,(\mathbf{p}_{13}\,\mathbf{r}_{23} + \mathbf{p}_{23}\,\mathbf{r}_{13}), \tag{161}$$

а параметр α дается выражением

$$\begin{aligned} \mathrm{th}\,2\alpha &= 2\mu_{13}\mu_{23}/[m_3(\mu_{13} + \mu_{23})] =\\ &= 2\mu_{12}/(2\mu_{12} + m_3) < 1. \end{aligned} \tag{162}$$

Координаты и импульсы частиц при этом преобразуются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{r}_{13}' = \exp(\mathrm{i}X)\,\mathbf{r}_{13}\exp(-\mathrm{i}X) = \mathbf{r}_{13}\,\mathrm{ch}\,\alpha + \mathbf{r}_{23}\,\mathrm{sh}\,\alpha;\\ &\mathbf{r}_{23}' = \exp(\mathrm{i}X)\,\mathbf{r}_{23}\exp(-\mathrm{i}X) = \mathbf{r}_{23}\,\mathrm{ch}\,\alpha + \mathbf{r}_{13}\,\mathrm{sh}\,\alpha;\\ &\mathbf{p}_{13}' = \exp(\mathrm{i}X)\,\mathbf{p}_{13}\exp(-\mathrm{i}X) = \mathbf{p}_{13}\,\mathrm{ch}\,\alpha - \mathbf{p}_{23}\,\mathrm{sh}\,\alpha;\\ &\mathbf{p}_{23}' = \exp(\mathrm{i}X)\,\mathbf{p}_{23}\exp(-\mathrm{i}X) = \mathbf{p}_{23}\,\mathrm{ch}\,\alpha - \mathbf{p}_{13}\,\mathrm{sh}\,\alpha;\\ &\mathbf{r}_{12}' = \exp(\mathrm{i}X)\,\mathbf{r}_{12}\exp(-\mathrm{i}X) = \exp(-\alpha)\,\mathbf{r}_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{163}$$

Далее преобразованный гамильтониан

$$H_X = \exp(\mathrm{i}X)\,H\exp(-\mathrm{i}X) \tag{164}$$

имеет вид:

$$H_X = (k_1 + V_1) + (k_2 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_{12} + W. \tag{165}$$

Здесь были использованы обозначения:

$$\left.\begin{aligned}&k_1=p_{13}^2/2\mu_{13}'; \quad k_2=p_{23}^2/2\mu_{23}'; \quad V_1=V_{13}(\mathbf{r}_{13}); \quad V_2=V_{23}(\mathbf{r}_{23});\\&\mathbf{V}_{12}=V_{12}(\exp(-\alpha)\,\mathbf{r}_{12});\\&W=[V_{13}(\mathbf{r}_{13}\operatorname{ch}\alpha+\mathbf{r}_{23}\operatorname{sh}\alpha)-V_{13}(\mathbf{r}_{13})]+\\&+[V_{23}(\mathbf{r}_{23}\operatorname{ch}\alpha+\mathbf{r}_{13}\operatorname{sh}\alpha)-V_{23}(\mathbf{r}_{23})].\end{aligned}\right\} \tag{166}$$

Приведенные массы μ_{13}' и μ_{23}' в (166) заданы соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\mu_{13}'}=\frac{1}{m_1}\operatorname{ch}^2\alpha+\frac{1}{m_2}\operatorname{sh}^2\alpha+\frac{1}{m_3}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha)^2;\\&\frac{1}{\mu_{23}'}=\frac{1}{m_2}\operatorname{ch}^2\alpha+\frac{1}{m_1}\operatorname{sh}^2\alpha+\frac{1}{m_3}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha)^2.\end{aligned}\right\} \tag{167}$$

Из (165) и (166) следует, что оператор H_X имеет вид гамильтониана системы двух частиц во внешнем поле, в котором присутствует многочастичная сила W. Гамильтониан независимых подсистем в этом случае имеет вид:

$$H_{X1,2}=h_{X1}+h_{X2};\ h_{Xi}=k_i+V_i. \tag{168}$$

Для системы с гамильтонианом H_X (165) канальными являются следующие гамильтонианы:

$$\left.\begin{aligned}&H_{X1}=k_1+k_2+V_1; \quad H_{X1}\varphi_1=E\varphi_1;\\&H_{X2}=k_1+k_2+V_2; \quad H_{X2}\varphi_2=E\varphi_2;\\&H_{X12}=k_1+k_2+\overline{V}_{12}; \quad H_{X12}\varphi_{12}=E\varphi_{12};\\&H_{X0}=k_1+k_2; \quad H_{X0}\varphi_0=E\varphi_0.\end{aligned}\right\} \tag{169}$$

Каждому асимптотическому состоянию исходного гамильтониана H (159) соответствует асимптотическое состояние гамильтониана H_X, описываемое одним из состояний φ_1, φ_2, φ_{12}, φ_0 (169), причем для соответствующих состояний рассеяния справедливы следующие соотношения [18]:

$$\Psi_\alpha^\pm(E)=\exp(-iX)\,\Psi_{X\alpha}^\pm(E), \tag{170}$$

где $\Psi_\alpha(E)$ — волновая функция канала α для гамильтониана H; $\Psi_{X\alpha}(E)$ — волновая функция того же канала для гамильтониана H_X, соответствующая асимптотическому состоянию φ_α. Из (170) вытекает совпадение элементов S-матрицы для систем с гамильтонианами H и H_X:

$$S_{\alpha\beta}=\langle\psi_\alpha^-(E_\alpha)\mid\psi_\beta^+(E_\beta)\rangle=\langle\Psi_{X\alpha}(E_\alpha)\mid\Psi_{X\beta}^+(E_\beta)\rangle=S_{X\alpha,\beta}. \tag{171}$$

Охарактеризуем спектральные свойства гамильтонианов внутреннего движения в каналах (169), т. е. гамильтонианов h_{X1}, h_{X2} и h_{X12}, где последний имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&h_{X12}=p_{12}^2/2\mu_{12}'+V_{12}(\exp(-\alpha)\,\mathbf{r}_{12});\\&\mu_{12}'=\mu_{13}'\mu_{23}'/(\mu_{13}'+\mu_{23}'); \quad \mathbf{p}_{12}=(\mathbf{p}_{13}\mu_{23}'-\mathbf{p}_{23}\mu_{13}')/(\mu_{13}'+\mu_{23}').\end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Начнем с оператора $h_{X1} = k_1 + V_1$. Заметим, что потенциал взаимодействия V_1 при этом унитарном преобразовании не изменился, но произошло формальное изменение приведенной массы частиц (1 и 3) в рассматриваемом канале. Действительно, для μ'_{13} имеем следующее соотношение:

$$\mu'_{13} = \mu_{13}\,(1 + \Delta)/[1 + (1/2)\,(1 - \mu_{13}/\mu_{23})\,\Delta] > \mu_{13}, \quad (173),$$

где $\Delta = \operatorname{ch} 2\alpha - 1 > 0$. Следовательно, при данном унитарном преобразовании произошло эффективное увеличение массы канала в $\beta > 1$ раз, что эквивалентно увеличению в β раз силы потенциала V_1. В итоге гамильтониан h_{X1} имеет вид $h_0 + \beta V_1$. Если потенциал V_1 был притягивающим, хотя бы в некоторой области координатного пространства, то согласно [16] собственные значения $E\,(\beta)$ гамильтониана $h_0 + \beta V$ монотонно убывают, а их число монотонно возрастает при увеличении параметра β. Случай оператора h_{X2} рассматривается аналогично. Из предыдущего вытекает, что гамильтониан $H_{X1,2}$ может иметь дискретный спектр, даже если в исходном гамильтониане в каналах 13 и 23 потенциалы V_{13} и V_{23} не образовывали связанных состояний.

Спектр в канале 12 определяется из уравнения

$$h_{X12}\varphi_{12} = -\varkappa^2_{X12}\varphi_{12}. \quad (174)$$

Приведенная масса канала 12 μ'_{12} в (172) равна $\exp(-2\alpha)\,\mu_{12}$. Заменой переменных $\mathbf{r}'_{12} = \exp(-\alpha)\,\mathbf{r}_{12}$ уравнение (174) приводится к виду

$$h_{12}\varphi_{12}(\mathbf{r}'_{12}) = -\varkappa^2_{X12}\varphi_{12}(\mathbf{r}'_{12}),$$

откуда $\varkappa^2_{12} = \varkappa^2_{X12}$, т. е. спектр в канале 12 при данном унитарном преобразовании не меняется. Закончим на этом краткий обзор свойств унитарного преобразования (164), сводящего задачу трех тел к задаче двух частиц в силовом поле.

Резонансы и связанные состояния в системе трех тел. Унитарное преобразование, описанное выше, позволяет распространить полученные результаты на случай задачи трех тел.

Пусть гамильтониан H (159) таков, что при редукции относительно одной из частиц гамильтониан $H_{X1,2}$ имеет непустой дискретный спектр, и пусть $|\psi_{X1,2}\rangle$ есть одно из состояний $\sigma_{\mathrm{disc}}\,(H_{X1,2})$ с энергией $-E_0$. Тогда, повторяя рассуждения, которые привели нас к (141), получаем, что в рассматриваемой системе существуют состояния дискретного спектра и резонансы, которые определены корнями уравнения

$$E = -E_0 + \operatorname{Re} b\,(E + i0), \quad (175)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &b\,(z) = \langle\psi_{X1,2}\,|\,U_X + U_X R_X(z)\,U_X\,|\,\Psi_{X1,2}\rangle;\\ &U_X = \overline{V}_{12} + W;\quad R_X(z) = (zM_X - M_X H_X M_X)^{-1}\,M_X;\\ &M_X = 1 - \Lambda_X;\quad \Lambda_X = |\,\psi_{X1,2}\rangle\langle\psi_{X1,2}\,|. \end{aligned}\right\} \quad (176)$$

В (176) фигурирует резольвента $R_X(z)$, которая соответствует гамильтониану $M_X H_X M_X$, включающему в себя многочастичную силу. Чтобы придать смысл формальному выражению для $R_X(z)$, применим к этому оператору обратное преобразование $\exp(-iX)$. Обозначим

$$\Lambda = \exp(-iX)\,\Lambda_X \exp(iX);\ M = \exp(-iX)\,M_X \exp(iX). \quad (177)$$

Очевидно, что Λ и M — ортогональные проекторы. Тогда из тождества для $R_X(z)$ вида

$$(zM_X - M_X H_X M_X)\,R_X(z) = M_X \quad (178)$$

получим

$$(zM - MHM)\exp(-iX)\,R_X(z)\exp(iX) = M,$$

откуда

$$\exp(-iX)\,R_X(z)\exp(iX) = R(z) = (zM - MHM)^{-1}M. \quad (179)$$

Из последнего равенства заключаем, что резольвенты $R_X(z)$ и $R(z)$ существуют, а для $b(z)$ справедлива формула вида

$$b(z) = \langle \psi_{1,2} \mid U + UR(z)\,U \mid \psi_{1,2} \rangle, \quad (180)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\mid \psi_{1,2}\rangle = \exp(-iX) \mid \psi_{X1,2}\rangle;\\ &U = \exp(-iX)\,U_X \exp(iX) =\\ &= V_{12}(\bar r_{12}) + [V_{13}(\bar r_{13}) - V_{13}(\bar r_{13}\,\mathrm{ch}\,\alpha - \bar r_{23}\,\mathrm{sh}\,\alpha)] +\\ &+ [V_{23}(\bar r_{23}) - (V_{23}\bar r_{23}\,\mathrm{ch}\,\alpha - \bar r_{13}\,\mathrm{sh}\,\alpha)]. \end{aligned}\right\} \quad (181)$$

Далее, поскольку гамильтониан H_X отличается от обычного гамильтониана системы двух частиц во внешнем поле заменой V_{12} на $\overline{V}_{12} + W$, то из (141) вытекает следующее представление для резольвенты оператора $H_X\ G_X(z)$:

$$G_X(z) = \frac{[1 + R_X(z)\,U_X] \mid \psi_{X1,2}\rangle\langle\psi_{X1,2} \mid [1 + U_X R_X(z)]}{z + E_0 - b(z)} + R_X(z). \quad (182)$$

Поскольку

$$G(z) = \exp(-iX)\,G_X \exp(iX),$$

то из (182) получим, что функция Грина исходного гамильтониана H задачи трех тел (159) имеет вид:

$$G(z) = \{[1 + R(z)\,U] \mid \psi_{1,2}\rangle\langle\psi_{1,2} \mid [1 + UR(z)]\}/[z + E_0 - b(z)] + R(z). \quad (183)$$

Обозначим Σ точку начала непрерывного спектра гамильтониана H $\sigma_c(H) = (\Sigma, \infty)$:

$$\Sigma = \min_{\alpha}\{-\varkappa_\alpha^2\}, \quad \alpha = 12,\ 13,\ 23,$$

а $-\varkappa_\alpha^2$ — энергии связанных состояний в каналах, т. е. $-\varkappa_\alpha^2 \in \in \sigma_{\text{disc}}(h_\alpha)$.

Если уравнение

$$E = -E_0 + \operatorname{Re} b\,(E + \mathrm{i}0) \tag{184}$$

имеет корень E_d, такой, что $E_d < \Sigma$, то точка E_d — энергия связанного состояния в системе. Действительно, в этом случае функция $b\,(E)$ существует и является вещественной в некоторой окрестности точки E_d, а функция Грина $G\,(z)$ (183) имеет в этой окрестности простой полюс вида $(z - E_d)^{-1}$. Из [5] вытекает, что точка $E_d \in \sigma_{\text{disc}}\,(H)$, причем соответствующая волновая функция $|\,\psi_d\rangle$ имеет вид:

$$|\,\psi_d > = (1 + a^2)^{-1/2}\,[1 + R\,(E_d)\,U]\,|\,\psi_{1,2} >, \tag{185}$$

где $a^2 = \langle\psi_{1,2}\,|\,UR\,(E_d)\,R\,(E_d)\,U\,|\,\psi_{1,2}\rangle$. Тот факт, что $|\,\psi_d\rangle$ удовлетворяет уравнению $H\,|\,\psi_d\rangle = E_d\,|\,\psi_d\rangle$, проверяется прямым вычислением в полной аналогии с (150). Отметим, что в силу определения (181) функция $|\,\psi_{1,2} >$ удовлетворяет уравнению

$$[E_0 + H_0 + V_{13}\,(\mathbf{r}_{13}\operatorname{ch}\alpha - \mathbf{r}_{23}\operatorname{sh}\alpha) + \\ + V_{23}\,(\mathbf{r}_{23}\operatorname{ch}\alpha - \mathbf{r}_{13}\operatorname{sh}\alpha)]\,\psi_{1,2}\,(\mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) = 0. \tag{186}$$

Заменой переменных вида:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{13}\operatorname{ch}\alpha - \mathbf{r}_{23}\operatorname{sh}\alpha;\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{23}\operatorname{ch}\alpha - \mathbf{r}_{13}\operatorname{sh}\alpha$$

уравнение (186) преобразуется в уравнение

$$[E_0 - \Delta_{\mathbf{r}_1}/2\mu'_{13} - \Delta_{\mathbf{r}_2}/2\mu'_{23} + V_{13}\,(\mathbf{r}_1) + V_{23}\,(\mathbf{r}_2)]\,\psi_{1,2}\,(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2) = 0.$$

Отсюда функция $\psi_{1,2}\,(\mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23})$ оказывается заданной соотношением

$$\psi_{1,2}\,(\mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) = \psi_{X1}\,(\mathbf{r}_{12}\operatorname{ch}\alpha - \mathbf{r}_{23}\operatorname{sh}\alpha)\,\psi_{X2}\,(\mathbf{r}_{23}\operatorname{ch}\alpha - \mathbf{r}_{13}\operatorname{sh}\alpha). \tag{187}$$

Корни уравнения (184), лежащие выше точки Σ, описывают резонансные состояния в системе трех тел.

О числе связанных состояний и резонансов в системе трех частиц. Проанализируем условия, при которых уравнение

$$E + E_0 - \operatorname{Re} b\,(E + \mathrm{i}0) = 0 \tag{188}$$

имеет решения. Напомним, что для функции

$$f\,(z) = z + E_0 - b\,(z) \tag{189}$$

существует представление через функцию Грина $G\,(z)$ исходного гамильтониана вида

$$G\,(z) = \frac{[1 + R\,(z)\,U]\,|\,\psi_{1,2}\rangle\langle\psi_{1,2}\,|\,[UR\,(z) + 1]}{z + E_0 - b\,(z)} + R\,(z). \tag{190}$$

Отсюда в силу свойств оператора $R\,(z)$ справедливо соотношение

$$\langle\psi_{1,2}\,|\,G\,(z)\,|\,\psi_{1,2}\rangle = [z + E_0 - b\,(z)]^{-1}, \tag{191}$$

и уравнение (188) приводится к виду

$$\mathrm{Re}\,[\langle\psi_{1,2}\mid G(E+\mathrm{i}0)\mid\psi_{1,2}\rangle]^{-1}=0. \qquad (192)$$

Покажем теперь, что уравнения (188) и (192) воспроизводят все точки $\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$, собственные векторы которых неортогональны $|\psi_{1,2}\rangle$. Если гамильтониан H имеет связанное состояние с энергией E_d и волновой функцией $|\psi_d>$, такой, что $\langle\psi_{1,2}\mid\psi_d\rangle=0$, то E_d есть корень уравнения (192), так как матричный элемент $\langle\psi_{1,2}\mid G(E+\mathrm{i}0)\mid\psi_{1,2}\rangle$ стремится к бесконечности, когда $E\to E_d$. Как было установлено ранее, функция

$$|\psi_d> = C\,[1+R(E_d)\,U]\,|\psi_{1,2}\rangle \qquad (193)$$

является собственной для оператора H. Для того чтобы функция $|\psi_d>$ была квадратично интегрируемой, необходимо, чтобы $E_d<\Sigma$ и резольвента $R(z)$ существовала при $z=E_d$. Условие $E_d<\Sigma$ означает, что система не имеет связанных состояний, утопленных в непрерывном спектре. Существование резольвенты $R(z)$ в точке E_d при условии $\langle\psi_{1,2}\mid\psi_d\rangle$ устанавливается с помощью формулы для $R(z)$ через $G(z)$, полученной из (190):

$$R(z)=G(z)-G(z)\,|\psi_{1,2}><\psi_{1,2}\,|\,G(z)/\langle\psi_{1,2}\mid G(z)\mid\psi_{1,2}\rangle. \qquad (194)$$

Из (194) вытекает, что $R(E_d)$ несингулярна при $E_d<\Sigma$, и $\|\psi_d\|<\infty$.

Таким образом, уравнение (188) действительно воспроизводит все состояния дискретного спектра, неортогональные к $|\psi_{1,2}>$. Пусть теперь все $|\psi_d>$ ортогональны $|\psi_{1,2}>$ или $\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$. Перепишем уравнение (192) в виде

$$\mathrm{Re}\,\langle\psi_{1,2}\mid G(E+\mathrm{i}0)\mid\psi_{1,2}\rangle=0. \qquad (195)$$

Раскладывая $|\psi_{1,2}\rangle$ по собственным функциям оператора H:

$$|\psi_{1,2}\rangle=\sum_\alpha\int dE_\alpha C_\alpha(E_\alpha)\,|\,\psi_\alpha(E_\alpha)\rangle, \qquad (196)$$

сведем уравнение (195) к виду

$$\sum_\alpha \mathscr{P}\int dE_\alpha\frac{|\,C_\alpha(E_\alpha)\,|^2}{E-E_\alpha}=0. \qquad (197)$$

В (196) и (197) было учтено, что все $|\psi_d\rangle$ ортогональны к $|\psi_{1,2}\rangle$ или, что в данном случае эквивалентно условию $\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$, отсутствует. Функция

$$\Phi(E)=\sum_\alpha\mathscr{P}\int dE_\alpha\,|\,C_\alpha(E_\alpha)\,|^2/(E-E_\alpha)$$

является непрерывной функцией E. При $E<\Sigma$ функция $\Phi(E)$ строго отрицательна, а при достаточно больших положительных E функция $\Phi(E)$ строго положительна, так как функции $C_\alpha(E_\alpha)$

быстро убывают с ростом E_α. Из соображений непрерывности уравнение (197) имеет корень, причем он лежит в непрерывном спектре. Следовательно, в системе существует по крайней мере один резонанс.

Суммируя полученные выше результаты, находим, что если гамильтониан H таков, что соответствующий гамильтониан $H_{1,2}$ или $H_{X1,2}$ имеет дискретный спектр, то каждое состояние из $\sigma_{\rm disc}(H_{1,2})$ или $\sigma_{\rm disc}(H_{X1,2})$ порождает или связанное состояние из $\sigma_{\rm disc}(H)$ или резонанс. Этот факт можно выразить неравенством

$$N_R + N_d \geqslant 1, \tag{198}$$

где N_d — число состояний из $\sigma_{\rm disc}(H)$; N_R — число резонансов, описываемых уравнением (1). Если число этих уравнений равно N [здесь N равно числу состояний из $\sigma_{\rm disc}(H_{1,2})$ или $\sigma_{\rm disc}(H_{X1,2})$], то

$$N_R + N_d \geqslant N. \tag{199}$$

Применим теперь неравенства (198) и (199) к системам трех нуклонов. Для определенности рассмотрим pnn-систему. Поскольку потенциалы взаимодействия между нуклонами зависят от спинов, необходимо рассмотреть два случая, соответствующих различным спиновым конфигурациям в системе трух нуклонов.

Случай 1. $S = 3/2$.

Пусть спин pnn-системы трех нуклонов равен $3/2$. В этом случае, совершая редукцию относительно протона, получаем

$$H_{X1,2} = K_1 + K_2 + V^t_{pn} + V^t_{pn}, \tag{200}$$

где $V^t_{\rm np}$ — триплетный нуклон-нуклонный потенциал. Поскольку V^t_{pn} имел в исходном гамильтониане H связанное состояние в каналах (13) и (23), то согласно результатам, приведенным выше, имеют дискретный спектр гамильтонианы $h_{X1} = K_1 + V^t_{pn}$, $h_{X2} = K_2 + V^t_{pn}$ и $H_{X1,2}$. Следовательно, при $S = 3/2$ уравнение (199) имеет хотя бы один корень. Поскольку спин связанного состояния в pnn-системе, т. е. $-H^3$, равен $1/2$, то этот корень должен соответствовать резонансу.

Случай 2. $S = 1/2$.

Если спин pnn-системы равен $1/2$, то после унитарного преобразования вида (193) возникают два типа гамильтонианов $H_{X1,2}$:

$$H^1_{X1,2} = K_1 + K_2 + V^t_{pn} + V^S_{nn}; \tag{201}$$

$$H^2_{X1,2} = K_1 + K_2 + V^S_{pn} + V^S_{nn}. \tag{202}$$

Гамильтонианы $H^1_{X1,2}$ и $H^2_{X1,2}$ имеют непустой дискретный спектр, или существует связанное состояние у гамильтониана $h^S_X = K + V^S$. Как указывалось выше, в результате преобразования (193) состояния дискретного спектра h^S_X существуют, если их имеет гамильтониан $-\Delta/2\mu + \beta V$, где $\beta = \mu'_{13}/\mu_{13} = \operatorname{ch} 2\alpha = \sqrt{4/3}$. С этой точки зрения все феноменологические синглетные нуклон-нуклонные потенциалы, которые будем считать зарядово-независимыми, разбиваются на два класса. Потенциалы из первого класса таковы, что при увеличении силы потенциала в $\beta = \sqrt{4/3}$ раз они не превращают виртуальное состояние в связанное. К этому классу относится, например, потенциал в виде прямоугольной ямы с параметрами $R = 2{,}583$ фм, $V_0 = 102,\ 276 \cdot 0{,}8893/R^2$ МэВ, примененный в [19] при поиске резонансов в системе трех нейтронов. Потенциалы из второго класса таковы, что гамильтониан $-\Delta/2\mu + \beta V^s$ имеет связанное состояние. К этому классу относится сепарабельный потенциал Ямагучи:

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}^0) = -(\lambda/2\mu)(\beta^2 + k^2)^{-1}(\beta^2 + k^{02})^{-1}$$

с параметрами $\lambda^S = 0{,}291$ фм$^{-3}$, $\beta^S = 1{,}4487$ фм$^{-1}$. Как известно, условие существования связанного состояния в потенциале Ямагучи имеет вид:

$$\pi\sqrt{\lambda/\beta} - \beta > 0. \tag{203}$$

Неравенство (203) не выполняется для наборов параметров (λ^S, β^S), но выполняется для набора ($\sqrt{4/3}\,\lambda^S$, β^S).

Таким образом, потенциалы из второго класса в отличие от потенциалов первого класса приводят к существованию дискретного спектра у гамильтонианов (201) и (202), и, следовательно, в этом случае имеет место условие $N_R + N_d \geqslant 2$.

Результаты проведенного рассмотрения можно сформулировать следующим образом: в приближении задачи трех тел с парными взаимодействиями в *pnn*-системе трех нуклонов всегда существует хотя бы один резонанс с $S = {}^3/_2$. То же самое относится и к *ppn*-системе. Если синглетный потенциал V_{NN}^S относится ко второму классу, то в состоянии с $S = {}^1/_2$ *pnn*- и *ppn*-системы также имеют по крайней мере одно резонансное состояние, более точно $N_R + N_d \geqslant 2$, и существует резонанс в системе трех нейтронов. Если же реальный нуклон-нуклонный потенциал (в состоянии $S = 0$) относится к первому классу, то уравнения (188) нет, и вопрос о существовании резонанса в системе трех нуклонов остается открытым. Таким образом, изложенный метод позволяет установить достаточные условия существования связанных состояний и резонансов в системе трех частиц и двух частиц в силовом поле. Это условие заключается в существовании дискретного спектра гамильтонианов $H_{X1,2}$ и $H_{1,2}$, причем для $H_{X1,2}$ редукция может производиться относительно любой из частиц.

К теории рассеяния частиц, взаимодействие которых имеет дальнодействующий характер.

В ряде случаев при описании взаимодействия нескольких частиц кроме короткодействующих потенциалов необходимо учитывать и дальнодействующие силы. Как известно, прямое обобщение результатов теории рассеяния на эти процессы не правомерно и их анализ следует проводить иначе. В настоящем разделе будет предложен один из методов описания систем рассеивающихся частиц с дальнодействующими силами, который основан на нестационарной теории, предложенной Доллардом [20] и развитой в [16,21,25].

Следуя работам [20—25], определяем канальные волновые операторы в виде:

$$\Omega^{\pm}_{\alpha D} = S - \lim_{t \mp \infty} \exp(\mathrm{i}Ht)\, U_{\alpha D}(t). \tag{204}$$

Здесь H — оператор энергии системы, определенный в пространстве $\mathcal{G} = \mathcal{L}^2(R^{3N-3})$; $U_{\alpha D}(t)$ — оператор эволюции системы в канале α;

$$U_{\alpha D}(t) = \exp[-\mathrm{i}H_{\alpha}t - \mathrm{i}\varphi^{\pm}_{\alpha}(t)]\, P_{\alpha}; \tag{205}$$

$H_{\alpha} = H_{0\alpha} + V_{\alpha}$ — оператор энергии в канале α; $P_{\alpha} = |\psi_{\alpha}\rangle\langle\psi_{\alpha}|$; $|\psi_{\alpha}\rangle$ — волновая функция связанного состояния фрагментов в канале α; $H_{\alpha}\,|\psi_{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}\rangle = E_{\alpha}\,|\psi_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha}\rangle$, $|\mathbf{p}_{\alpha}\rangle$ — волновая функция свободного движения фрагментов в канале α. Поведение функции $\varphi^{\pm}_{\alpha}(t)$ при $t \to \mp\infty$ рассмотрено в [16,22] и для кулоновского потенциала она имеет вид

$$\varphi^{\pm}_{\alpha}(t) \xrightarrow[t \to \mp\infty]{} \operatorname{sign} t\, \eta_{\alpha}(\hat{p}_{\alpha}) \ln|t|. \tag{206}$$

Здесь $\hat{p}_{\alpha}$ — оператор импульсов относительного движения связанных фрагментов в канале α и в импульсном представлении $\eta_{\alpha}(p_{\alpha})$ определена в виде:

$$\eta_{\alpha}(p_{\alpha}) = \sum_{\gamma,\, \nu \in \alpha} \frac{z_{\gamma} z_{\nu} e^2 \mu_{\gamma\nu}}{p_{\gamma\nu}}, \tag{207}$$

где (γ, ν) — пара фрагментов в канале α; z_{γ}, z_{ν} — заряды фрагментов; $\mu_{\gamma\nu}$, $p_{\gamma\nu}$ — приведенная масса и импульс относительного движения фрагментов (γ, ν). Как показано в [16] для операторов $\Omega^{\pm}_{\alpha D}$ справедливы соотношения:

$$(\Omega^{\pm}_{\alpha D})^{+}\, \Omega^{\pm}_{\alpha D} = P_{\alpha}; \quad H\Omega^{\pm}_{\alpha D} = \Omega^{\pm}_{\alpha D} H_{\alpha}.$$

В рассмотренном методе анализа систем с дальнодействующими потенциалами из условия (204) можно получить уравнение для волновой функции системы и выражение для элементов s-матрицы рассеяния. Определим волновую функцию системы, в которой действие развивается из канала α, в следующем виде:

$$|\psi^{D}_{\alpha}(E_{\alpha} \pm \mathrm{i}0)\rangle = \lim_{t \to \mp\infty} \exp(\mathrm{i}Ht) \exp[-\mathrm{i}H_{\alpha}t - \mathrm{i}\varphi^{\pm}_{\alpha}(t)]\, |\psi_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha}\rangle. \tag{208}$$

В соответствии с рассуждениями, предложенными в [16, гл. XI] будем считать, что функция $\varphi^{\pm}_{\alpha}(t)$ является непрерывной, имеет кусочно-непрерывную производную и $\varphi_\alpha^\pm(0) = 0$. Тогда из (208) будем иметь

$$| \psi_\alpha^D (E_\alpha \pm \mathrm{i}0)\rangle - \mathrm{i} \int_0^t ds \exp[\mathrm{i}H_\alpha S + \mathrm{i}\varphi_\alpha(S)] \times$$

$$\times \left[H - H_\alpha - \frac{d\varphi_\alpha^\pm(s)}{ds} \exp(-\mathrm{i}Hs) \,|\, \psi_\alpha^D (E_\alpha \pm \mathrm{i}0)\rangle \xrightarrow[t\to\mp\infty]{} |\, \psi_\alpha, p_\alpha\rangle. \quad (209)$$

Поскольку интеграл в (209) сходится по норме, то вводя под знак интеграла обрезающий множитель и учитывая, что функции $|\psi_\alpha(E)\rangle$ являются собственными для гамильтониана H, получаем следующий результат:

$$|\psi_\alpha^D (E_\alpha \pm \mathrm{i}0)\rangle = |\psi_\alpha, p_\alpha\rangle + [\mathrm{i}K_{1\alpha}^\pm V^\alpha - \mathrm{i}K_{2\alpha}^\pm] \,|\, \psi_\alpha^D (E_\alpha \pm \mathrm{i}0)\rangle, \quad (210)$$

где

$$\left.\begin{aligned} K_{1\alpha}^\pm &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\mp\infty} dt \exp[-u_\alpha^\pm t + \mathrm{i}\varphi_\alpha^\pm(t)]; \\ K_{2\alpha}^\pm &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\mp\infty} dt \exp[-u_\alpha^\pm t + \mathrm{i}\varphi_\alpha^\pm(t)] \frac{d\varphi_\alpha^\pm(t)}{dt}; \end{aligned}\right\} \quad (211)$$

$$u_\alpha^\pm = \mathrm{i}(E_\alpha - H_\alpha \pm \mathrm{i}\varepsilon) = \mathrm{i}G_\alpha^{-1}(E_\alpha \pm \mathrm{i}\varepsilon). \quad (212)$$

Интегрирование по частям выражения для оператора $K_{1\alpha}^\pm$ приводит к следующему соотношению между операторами $K_{1\alpha}^\pm$ и $K_{2\alpha}^\pm$:

$$K_{1\alpha}^\pm = \frac{1}{\mathrm{i}} G_\alpha (E_\alpha \pm \mathrm{i}0) [1 + \mathrm{i}K_{2\alpha}^\pm] = \frac{1}{\mathrm{i}} [1 + \mathrm{i}K_{2\alpha}^\pm] G_\alpha (E_\alpha \pm \mathrm{i}0). \quad (213)$$

Далее комбинируя уравнение (210) и соотношение (213), получаем искомое уравнение типа Липпмана—Швингера:

$$|\psi_\alpha^D (E_\alpha \pm \mathrm{i}0)\rangle = |\psi_{\alpha D}^\pm\rangle + G_\alpha (E_\alpha \pm \mathrm{i}0) V^\alpha \,|\, \psi_\alpha^D (E_\alpha \pm \mathrm{i}0)\rangle, \quad (214)$$

где

$$|\psi_{\alpha D}^\pm\rangle = \Phi_\alpha^\pm (p_\alpha) \,|\, \psi_\alpha, \mathbf{p}_\alpha\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} [1 + \mathrm{i}K_{2\alpha}^\pm (E_\alpha \pm \mathrm{i}\varepsilon)]^{-1} \,|\, \psi_\alpha, \mathbf{p}_\alpha\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} [u_\alpha^\pm(\varepsilon) K_{1\alpha} (E_\alpha \pm \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} \,|\, \psi_\alpha, \mathbf{p}_\alpha\rangle. \quad (215)$$

В отсутствии дальнодействующих сил между фрагментами, движущимися в канале α, уравнение (214) есть обычное уравнение Липпмана — Швингера, так как $V_D^\alpha = 0$ и $K_{2\alpha}^\pm = 0$.

Найдем теперь выражение для элементов многоканальной S-матрицы в случае дальнодействующих сил. Из уравнения (214) и известного резольвентного тождества

$$G(z) = G_\alpha(z) + G_\alpha(z) V^\alpha G(z)$$

имеем:

$$|\psi_\alpha^D(E_\alpha \pm i0)\rangle = [1 + G(E_\alpha \pm i0)V^\alpha]\,|\psi_\alpha, \mathbf{p}_\alpha\rangle\,\Phi_\alpha^\pm(p_\alpha); \tag{216}$$

$$|\psi_\alpha^D(E_\alpha + i0)\rangle = |\psi_\alpha^D(E_\alpha - i0)\rangle\,[\Phi_\alpha^-(p_\alpha)]^{-1}\Phi_\alpha^+(p_\alpha) + \\ + [G(E_\alpha + i0) - G(E_\alpha - i0)]\,V^\alpha\,|\psi_\alpha, \mathbf{p}_\alpha\rangle\,\Phi_\alpha^+(p_\alpha). \tag{217}$$

Поскольку для элементов S-матрицы имеется представление вида:

$$\langle \mathbf{p}_\alpha \mid S_{\alpha\beta} \mid \mathbf{p}_\beta\rangle = \langle \psi_\alpha(E_\alpha - i0) \mid \psi_\beta(E_\beta + i0)\rangle, \tag{218}$$

то, подставляя (216) и (217) в (218), а также полагая, что $\alpha \neq \beta$, получаем

$$\langle \mathbf{p}_\alpha \mid S_{\alpha\beta} \mid \mathbf{p}_\beta\rangle = \left(\frac{1}{E_\beta - E_\alpha + i0} - \frac{1}{E_\beta - E_\alpha - i0}\right) t_{\alpha\beta}^D(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, E_\alpha + i0) = \\ = -2\pi i\delta(E_\alpha - E_\beta)\, t_{\alpha\beta}^D(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, E_\alpha + i0), \tag{219}$$

где

$$t_{\alpha\beta}^D(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, E_\alpha + i0) = [\Phi_\alpha^-(p_\alpha)]^*\langle \mathbf{p}_\alpha \mid T_{\alpha\beta}^D(E_\alpha + i0) \mid \mathbf{p}_\beta\rangle\,\Phi_\beta^+(p_\beta) = \\ = \lim_{\varepsilon \to 0}\,[1 + iK_{2\alpha}^+(E_\alpha + i\varepsilon)]^{-1}\langle \mathbf{p}_\alpha \mid T_{\alpha\beta}^D(E_\alpha + i\varepsilon) \mid \mathbf{p}_\beta\rangle \times \\ \times [1 + iK_{2\beta}^+(E_\alpha + i\varepsilon)]^{-1}. \tag{220}$$

Оператор $T_{\alpha\beta}^D(z)$ в (220) определен соотношением

$$T_{\alpha\beta}^D(z) = \langle \psi_\alpha \mid V^\beta + V^\alpha G(z)\, V^\beta \mid \psi_\beta\rangle. \tag{221}$$

В случае кулоновского взаимодействия между частицами для записи уравнения (214) и выражения (218) необходимо определить функцию $\Phi_\alpha^\pm(p_\alpha)$. Для этого выберем функцию $\varphi_\alpha^\pm(t)$ в виде

$$\varphi_\alpha^\pm(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leqslant 1; \\ \operatorname{sign} t\,\eta_\alpha(p_\alpha)\ln|t|, & |t| \geqslant 1, \end{cases} \tag{222}$$

где η_α определяется формулой (207). Рассмотрим, например, функцию $\Phi_\alpha^-(p_\alpha)$. Согласно (215) она выражается через интеграл вида

$$I(p) = p\int_0^\infty dt\,\exp[-pt + i\varphi_\alpha^-(t)] = 1 - \exp(-p) + \frac{p\Gamma(1 + i\eta_\alpha p)}{p^{1+i\eta_\alpha}}. \tag{223}$$

Следуя работе [27], устремим модуль параметра p в (223) к нулю, тогда

$$I(p) \xrightarrow[|p| \to 0]{} p^{-i\eta_\alpha}\Gamma(1 + i\eta_\alpha). \tag{224}$$

Отсюда для функции $\Phi_\alpha^\mp(p_\alpha)$ имеем представление вида

$$\Phi^\mp(p_\alpha) = (\mp i\varepsilon)^{\pm i\eta_\alpha}\exp[-(\pi/2)\,\eta_\alpha(p_\alpha)]/\Gamma(1 \pm i\eta_\alpha). \tag{225}$$

Подставляя выражение (225) в уравнение (215) и соотношение (220), получаем следующие результаты для описания рассеяния кулоновских частиц:

$$| \psi_\alpha^c (E_\alpha \pm i0)\rangle = (\pm i\varepsilon)^{\mp i\eta_\alpha} \frac{\exp[-(\pi/2)\eta_\alpha(p_\alpha)]}{\Gamma(1\mp i\eta_\alpha)} | \psi_\alpha, \mathbf{p}_\alpha\rangle + $$
$$+ G_\alpha (E_\alpha \pm i0) V_\alpha | \psi_\alpha^c (E_\alpha \pm i0)\rangle;$$
$$t_{\alpha\beta}^c (\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, E_\alpha \pm i0) = F_\alpha (p_\alpha) F_\beta (p_\beta) \times$$
$$\times \lim_{\varepsilon\to 0} (\pm i\varepsilon)^{\mp i\eta_\alpha(p_\alpha)} T_{\alpha\beta}^c (\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, E_\alpha + i\varepsilon) (\pm i\varepsilon)^{\mp i\eta_\beta(p_\beta)};$$
$$F_\alpha (p_\alpha) = \exp[-(\pi/2)\eta_\alpha(p_\alpha)]/\Gamma(1\mp i\eta_\alpha).$$

Эти результаты для кулоновского рассеяния совпадают с результатами, полученными другими методами в [28, 29].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Simon B.**— Helv. phys. acta, 1970, Bd 43, S. 607.
2. **Яфаев Д. Р.**— Функциональный анализ, 1972, т. 6, с. 103.
3. **Hunziker W.**— Helv. phys. acta, 1966, Bd 39, S. 451.
4. **Повзнер А. Я.**— Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 3.
5. **Фаддеев Л. Д.**— Труды Матем. инст-та АН СССР, 1963, т. 69.
6. **Komarov V. V., Popova A. M., Shablov V. L.**— J. Math. Phys., 1980, v. 24, p. 854.
7. **Шмид Э., Цигельман X.** Проблемы трех тел в квантовой механике. М.: Наука, 1979.
8. **Тейлор Дж.** Теория рассеяния. Пер. с англ. М., Мир, 1975.
9. **Komarov V. V., Shablov V. L., Popova A. M., Osborn T. A.**— Phys. Rev. C, 1980, v. 22, p. 976.
10. **Osborn T. A., Kowalski K. L.**— Ann. Phys., 1971, v. 68, p. 361.
11. **Иоргенс К., Вайдман И.** Спектральные свойства гамильтоновых операторов. Пер. с англ. М., Мир, 1976.
12. **Hunziker W.** Mathematical Theory of Multiparticle Systems. Lectures in Theoretical Physics. N. Y., Barut and Britten, 1968.
13. **Hugenholz N. M.**— Phisica, 1957, v. 23, p. 481.
14. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1962.
15. **Albeverio S., Hunziker W., Schneider W., Schrader R.**— Helv. Phys. Acta, 1967, v. 40, p. 745.
16. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 4, Анализ операторов. Пер. с англ. М., Мир, 1982.
17. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. Пер. с англ. М., Мир, 1972.
18. **Ньютон Р.** Теория рассеяния волн и частиц. Пер. с англ. М., Мир, 1969.
19. **Бадалян А. М. и др.**— Ядерная физика, 1974, т. 20, с. 1147.
20. **Dollard J. D.**— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 729.
21. **Amrein W. O., Martin P. A., Misra B.**— Helv. Phys. Acta, 1970, v. 43, p. 313.
22. **Буслаев В. С., Матвеев В. Б.**— ТМФ, 1970, т. 2, с. 367.
23. **Chandler C. Gibson A. G.**— J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 291.
24. **Prugovecki E., Zorbas J.**— Nucl. Phys. A, 1973, v. 213, p. 541.
25. **Enss V.**— Comm. Math. Phys., 1979, v. 65, p. 151.
26. **Сунакава С.** Квантовая теория рассеяния. Пер. с япон. М., Мир, 1979.
27. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Пер. с англ. Т. I, М., Наука, 1973; Т. 2. М., Наука, 1974.
28. **Baizer Z.** In: Few Body Nuclear Physics. Eds. G. Pisent, V. Vanzani and L. Fonda. Vienna, IAEA, 1978, p. 365.
29. **Веселова А. М.**— ТМФ, 1972, т. 13, с. 368.