«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1983,
ТОМ 14, ВЫП. 5

Посвящается памяти
Юрия Михайловича Широкова

УДК 539.182

АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В. А. Смирнов
Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

Г. К. Толоконников
Тульский политехнический институт, Тула

Ю. Г. Шондин
Институт прикладной физики АН Молд. ССР

Статья является обзором последних работ Ю. М. Широкова [1—9], посвященных ассоциативным алгебрам обобщенных функций и их применению в квантовой механике.

Построены ассоциативные алгебры функционалов, включающие δ-функцию, а также элементы $\varepsilon = \operatorname{sign} x$ (в одномерном случае) и $r = |x|$ (в трехмерном). Изложена методика решения квантовых задач с δ-потенциалами, проиллюстрированная на некоторых примерах. Описано представление свободных решений уравнения Шредингера с сингулярными δ-потенциалами.

The paper is a review of the last Yu. M. Shirokov's works devoted to associative algebras of distributions and their applications in quantum mechanics.

The associative algebras of functionals including δ-function and the elements $\varepsilon = \operatorname{sign} x$ (in one-dimensional case) and $r = |x|$ (in three-dimensional case) are constructed. The methodology of solving the quantum problems with δ-potentials is formulated and illustrated by some examples. The representation of free solutions of Scrödinger equation with singular δ-potentials is described.

ВВЕДЕНИЕ

Ю. М. Широков неоднократно подчеркивал, что одной из основных математических трудностей релятивистской квантовой теории поля является определение корректной операции перемножения полевых операторов. В последние годы им был сделан вывод о возможности преодоления этой трудности с помощью построения ассоциативных алгебр обобщенных функций из некоторого класса [1]. Простейшими моделями, в которых имитируются квантовополевые проблемы, и в частности проблема ультрафиолетовых расходимостей, оказываются модели квантовой механики, описываемые сингулярными сосредоточенными (δ-образными) потенциалами. Именно решение задач, связанных с этими потенциалами,привело к построению ассоциативных алгебр обобщенных функций одного и трех переменных и к последующему их применению [1—9].

Основная трудность при формулировке таких задач состоит в том, что сами сосредоточенные потенциалы не определяют линейных операторов в гильбертовом пространстве. Проблема в этом случае заключается в придании операторного смысла полному гамильтониану $H = H_0 + V$ с взаимодействием. В физических работах сингулярные гамильтонианы подобного типа задаются, как правило, с помощью граничных условий, и необходимы значительные усилия для построения их операторной реализации, которая часто вообще отсутствует.

Первое математическое исследование этой проблемы на примере задачи о частице в поле сосредоточенного потенциала в трех измерениях было проведено в [10]. Использованная в ней методика была обобщена в [11] на случай задачи трех тел с парными δ-потенциалами, которая соответствует модели, построенной в работе [12]. Схема построения гамильтонианов, отвечающих δ-потенциалам, предложенная в [10, 11], состоит в получении самосопряженных расширений оператора кинетической энергии H_0 с подходящего подмножества в пространстве квадратично интегрируемых функций L_2. Для отбора же физически приемлемых расширений привлекаются дополнительные соображения. В случае одного измерения n-частичная задача с парными δ-потенциалами решена в [13]. Постановочная часть одномерной задачи заметно проще, чем многомерной и фактически не требует использования теории расширений. Дальнейшее развитие, но с иной точки зрения — с помощью расширений через основное состояние — этот подход получил в работах [14, 15]. В [15, 16] исследована задача регуляризации δ-гамильтонианов регулярными. В работе [16] содержится обобщение модели из [10] на случай частицы в поле нескольких сингулярных центров.

Иной подход к построению динамических моделей с δ-потенциалами, несущий в себе алгебраическую подоплеку и использующий идеи «нестандартного анализа», был предложен в [17]. Однако новых примеров на основе этого подхода пока построить не удалось. Построению сингулярной динамики через модификацию оператора эволюции посвящена работа [18].

Подход с использованием алгебр обобщенных функций, предложенный Ю. М. Широковым в [3, 4], отличается от предшествующих в том, что определяется не оператор Гамильтона в пространстве квадратично интегрируемых функций, а самосогласованным образом строится пара $\{\mathcal{H}, H\}$: гильбертово пространство $\mathcal{H}$ (не обязательно L_2) и действующий в нем гамильтониан H. Такой подход обогащает список моделей с δ-образными потенциалами. На этом пути удалось построить модели с содержательной спектральной структурой. Реализуемыми оказываются, например, модели с потенциалами типа δ'', $\Delta\delta$ в пространствах $\mathcal{H} \neq L_2$ [3, 4]. Можно решать подобные задачи и методами теории расширений, если использовать расширения с выходом из исходного пространства. При этом, однако, необходимо ответить на вопросы: куда? и как? Нетривиален в данном случае и вопрос о регуляризации сингулярных потенциалов регулярными.

Методика решения квантовомеханических задач с δ-образными потенциалами, разработанная Ю. М. Широковым в [3, 4], основана на использовании ассоциативных алгебр обобщенных функций, в которые входят такие функционалы, как δ-функция, а также элементы $\varepsilon = \mathrm{sign}\, x$ в одномерном случае и $r = \sqrt{\mathbf{x}^2}$ в трехмерном [1, 2]. Построение этих алгебр стало решением нетривиальной математической задачи. При определении умножения обобщенных функций приходится сталкиваться со многими трудностями. В частности, не удается сохранить многие привычные свойства умножения. Так, известный пример Л. Шварца [19] запрещает ассоциативность в алгебре, содержащей функционалы δ, x, $1/x \in D'(R^1)$. Проблеме умножения обобщенных функций посвящено большое количество работ, во многих из которых задача построения алгебры вообще не ставится, а задаются лишь произведения некоторых конкретных пар функционалов (см., например, [20, 21]). Такие произведения определяются, как правило, с помощью регуляризации обобщенных функций различными обычными функциями, для которых умножение имеет однозначный смысл [20—24]. При этом произведение часто зависит от способа регуляризации, используемого в работе. Иногда умножение определяется для всех обобщенных функций из некоторого класса, однако полученные таким образом произведения, вообще говоря, являются не обобщенными функциями, а гиперраспределениями, умножение которых уже не определено (см., например, [24]). В последнее время для построения операции произведения функционалов применяется и аппарат «нестандартного анализа» [25]. Близкие идеи использованы при построении теории «асимптотических функций» [26].

В целом ряде работ используется подход, который можно охарактеризовать как аксиоматический. В нем заранее формулируются свойства, которыми должна обладать строящаяся алгебра, а затем определяется умножение в алгебре без использования регуляризации [27—31]. Метод, использованный в работах Ю. М. Широкова, также является аксиоматическим. При этом требования, предъявляемые к алгебре, непосредственно вытекают из физических свойств и в совокупности образуют нетривиальную систему аксиом, практически однозначно определяющую алгебру. Одно из главных требований заключается в ассоциативности, которая соответствует ассоциативности алгебры наблюдаемых квантовой теории. Другое важное требование, также имеющее физическое происхождение, состоит в существовании операции дифференцирования. Кроме того, элементы алгебры необходимо не только перемножать между собой, но и умножать на величины, описывающие векторы состояния физической системы. В алгебре также должна быть задана билинейная форма, необходимая для определения квантовомеханических средних. С другой стороны, пришлось отказаться от других привычных, но физически несущественных требований. Так, в алгебрах, построенных в [1, 2], отсутствует коммутативность ($\delta\varepsilon = -\varepsilon\delta$ в одномерном и $\delta r = -r\delta$ в трехмерном случаях), а элементы алгебр с необходимостью оказываются не «обычными» обобщенными функциями из пространств D' или S', но функционалами на пространстве основных функций, которые сами могут иметь сингулярности определенного типа в начале координат.

Предлагаемый ниже обзор работ [1—9] естественным образом делится на две части, первая из которых содержит математический аппарат ассоциативных алгебр обобщенных функций, а вторая — его применение в квантовомеханических задачах с δ-образными потенциалами. В первой части сначала излагается построение алгебр в одномерном (разд. 1) и трехмерном (разд. 2) случаях. В разд. 3 описано построение алгебры, замкнутой относительно операций дифференцирования и взятия первообразной. Во второй части в разд. 4 сформулирована методика решения задач с δ-образными потенциалами, которая уточнена и продемонстрирована на примерах в одномерном случае. В разд. 5 указанная методика применяется для решения простейших трехмерных задач. Кроме того, в этом разделе рассмотрены физически нетривиальные задачи о движении в поле δ-образного потенциала в p-состоянии и взаимодействии заряженной квантовомеханической частицы с электромагнитным полем при наличии сильно сингулярного потенциала. Наконец, в разд. 6 описано построение представления свободных решений для уравнения Шредингера с сильно сингулярными потенциалами.

1. АССОЦИАТИВНАЯ АЛГЕБРА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Ассоциативная алгебра обобщенных функций $\mathscr{A}$ с дифференцированием и инволюцией, построенная в работе [1] и предназначенная для описания δ-образных квантовомеханических потенциалов, обладает следующими свойствами.

1. Элементы алгебры $\mathscr{A}$ при $x \neq 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

2. В $\mathscr{A}$ определена ассоциативная операция умножения $A, B \to AB$, которая совпадает с обычным умножением всюду, где элементы алгебры представляют собой обычные функции, т. е. по крайней мере, при $x \neq 0$.

3. На $\mathscr{A}$ и Ψ ($\Psi \subset \mathscr{A}$ — подпространство, характеризующееся быстрым убыванием элементов $\psi(x) \in \Psi$ при $|x| \to \infty$) задан билинейный функционал $\langle A, \psi\rangle$, причем

$$\langle A B, \psi\rangle = \langle A, B\psi\rangle, A, B \in \mathscr{A}, \psi \in \Psi. \tag{1}$$

4. В $\mathscr{A}$ определена операция дифференцирования $\partial = d/dx$, совпадающая с обычным дифференцированием всюду, где элементы алгебры являются дифференцируемыми функциями. Выполняется пра-

вило Лейбница

$$\frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx} B + A \frac{dB}{dx}, \tag{2}$$

а также соотношение

$$\left\langle \frac{dA}{dx}, \psi \right\rangle = -\left\langle A, \frac{d\psi}{dx} \right\rangle \tag{3}$$

при любых A, $B \in \mathcal{A}$, $\psi \in \Psi$.

5. В $\mathcal{A}$ определена операция инволюции $f \to f^+$, совпадающая с комплексным сопряжением в области, где элементы алгебры представляют собой обычные функции, перестановочная с дифференцированием и удовлетворяющая соотношению

$$\langle f, g\rangle^* = \langle g^+, f^+\rangle \tag{4}$$

(«звездочкой» обозначено комплексное сопряжение).

Из перечисленных свойств вытекает, что алгебру $\mathcal{A}$ нельзя реализовать на некотором подмножестве обычных обобщенных функций $D'(R)$ или $S'(R)$. Ее элементы оказываются функционалами на пространстве Ψ_f основных функций, которые при $x \neq 0$ ведут себя как функции из $S(R)$: они бесконечно дифференцируемы, а при $x \to \pm\infty$ убывают быстрее $|x|^{-n}$ для любого $n > 0$. Кроме того, в нуле существуют пределы $\Psi^{(n)}(\pm 0)$ справа и слева у всех производных $\psi^{(n)}(x)$. Удобно ввести обозначения

$$\psi_s^n = (\psi^{(n)}(+0) + \psi^{(n)}(-0))/2;$$
$$\psi_a^n = (\psi^{(n)}(+0) - \psi^{(n)}(-0))/2.$$

Пространство $\mathcal{A}_f$ (оно образует подалгебру алгебры $\mathcal{A}$) по определению состоит из функций, отличающихся от $\psi \in \Psi_f$ лишь поведением на бесконечности: они полиномиально ограничены вместе со всеми своими производными. На $\mathcal{A}_f$ и Ψ_f естественным образом определен билинейный функционал

$$\langle A, \psi\rangle = \int dx A(x)\, \psi(x), \quad A \in \mathcal{A}_f, \quad \psi \in \Psi_f. \tag{5}$$

Любой элемент из $\mathcal{A}_f$ задает согласно (5) линейный функционал на Ψ_f. Кроме того, на Ψ_f при $n = 0, 1, 2, \ldots$ определены функционалы $\delta_s^{(n)}$ и $\delta_a^{(n)}$ ($\delta_{s(a)}^{(0)} = \delta_{s(a)}$):

$$\langle \delta_s^{(n)}, \psi\rangle = (-1)^n \psi_s^{(n)}; \tag{6}$$

$$\langle \delta_a^{(n)}, \psi\rangle = (-1)^n \psi_a^{(n)}, \tag{7}$$

носитель которых сосредоточен в точке $x = 0$ (понятие носителя легко обобщается на случай пространства Ψ_f').

Произвольный элемент алгебры $\mathcal{A}$ по определению [1] имеет следующий вид:

$$A(x) = A_f(x) + \sum_{m=0}^{M(A)} A_m \delta_s^{(m)}(x) + \sum_{n=0}^{N(A)} A^n \delta_a^{(n)}(x) \equiv A_f(x) + A_{\text{sing}}(x);$$

$$A_f \in \mathcal{A}_f,\ A_m,\ A^m \in C. \tag{8}$$

Таким образом, $A \in \mathcal{A}$ задается функцией $A_f(x) \in A_f$ и двумя обрывающимися последовательностями $\{A_1, \ldots, A_{M(A)}\}$ и $\{A^1, \ldots A^{N(A)}\}$. Произвольный элемент подалгебры $\Psi \subset \mathcal{A}$, предназначенной для описания векторов состояния, представляется в форме

$$\psi(x) = \psi_f(x) + \sum_{m=0}^{M(\psi)} \psi_m \delta_s^{(m)}(x) + \sum_{n=0}^{N(\psi)} \psi^n \delta_a^{(n)}(x) \equiv \psi_f(x) + \psi_{\text{sing}}(x);$$

$$\psi_f \in \Psi_f,\ \psi_m,\ \psi^n \in C. \tag{9}$$

При $A \in \mathcal{A}_f$, $\psi \in \Psi_f$ выражение для билинейного функционала сводится к (5). В общем случае оно определяется формулой

$$\langle A, \psi\rangle = \langle A_f, \psi_f\rangle + \langle A_{\text{sing}}, \psi_f\rangle + \langle \bar{\psi}_{\text{sing}}, \xi A_f\rangle, \tag{10}$$

где $\bar{\psi}_{\text{sing}}$ отличается от ψ_{sing} лишь знаком в одном из слагаемых [ср. (8)]:

$$\bar{\psi}_{\text{sing}} = \sum_{m=0}^{M} \psi_m \delta_s^{(m)} - \sum_{n=0}^{N} \psi^n \delta_a^{(n)},$$

а $\xi \in D(R)$ — функция, равная единице в некоторой окрестности точки $x = 0$. Для сокращения записи символом $\langle\ ,\ \rangle$ обозначается и билинейный функционал на $\mathcal{A}$ и Ψ, и действие функционала из $\mathcal{A}$ на $\psi \in \Psi_f$, что не должно приводить к недоразумению.

Дифференцирование элементов из $\mathcal{A}$ при $x \neq 0$ совпадает с обычным дифференцированием. Для «сингулярных» элементов оно задается соотношениями

$$\partial\delta_s^{(n)} = \delta_s^{(n+1)}, \quad \partial\delta_a^{(n)} = \delta_a^{(n+1)}. \tag{11}$$

Наконец, поскольку любая функция $A(x) \in \mathcal{A}_f$ допускает представление

$$A(x) = A_1(x) + \varepsilon(x) A_2(x),\ A_{1,2} \in \mathcal{A}_f \cap C^\infty,\ \varepsilon(x) = \operatorname{sign} x,$$

необходимо еще задать дифференцирование элемента $\varepsilon(x)$

$$\partial\varepsilon = 2\delta_s. \tag{12}$$

Это равенство довольно естественно, поскольку оно выполняется при сужении на $S(R) \subset \Psi_f$. При этом $\delta_s^{(n)}$ действует на $\psi \in S(R)$ как n-я производная обычной δ-функции, так что в дальнейшем вместо $\delta_s^{(n)}$ употребляется символ $\delta^{(n)}$. Нетрудно показать, что сформулированные правила дифференцирования обеспечивают выполнение свойства, выраженного формулой (3).

Умножение в алгебре вводится следующим образом. Произведение функций из $\mathcal{A}_f$ совпадает с обычным произведением. Произведение любых δ-образных элементов между собой по определению полагается равным нулю:

$$\delta^{(n)}\delta^{(m)} = 0. \tag{13}$$

Произведения типа $\delta^{(n)}A$, $\delta_a^{(n)}A$ при $A \in A_f$ определяются так, чтобы выполнялось свойство 2 [формула (1)]. Из этого требования, в частности, вытекает равенство

$$\delta^{(n)}\varepsilon = \delta_a^{(n)}, \tag{14}$$

которое можно использовать для обозначения $\delta_a^{(n)}$. Аналогично устанавливаются соотношения

$$\delta^{(n)}x^m = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m\, n!}{(n-m)!}\,\delta^{(n-m)}, & n \geqslant m, \\ 0, & n < m. \end{cases} \tag{15}$$

Остается, наконец, определить произведения типа $A\delta^{(n)}$ при $A \in \mathcal{A}_f$. В случае $A \in \mathcal{A}_f \cap C^\infty$ элементы $A(x)$ перестановочны с $\delta^{(n)}$:

$$A\delta^{(n)} = \delta^{(n)}A.$$

Однако элемент $\varepsilon(x)$ не может коммутировать с $\delta^{(n)}$. Из требования выполнения правила Лейбница и из соотношения (12) следует равенство

$$(\varepsilon\varepsilon)' = 1' = 0 = 2(\delta\varepsilon + \varepsilon\delta),$$

откуда вытекает, что ε и δ должны быть антикоммутативны:

$$\varepsilon\delta = -\delta\varepsilon. \tag{16}$$

После $(n-1)$-кратного дифференцирования этого равенства с учетом соотношения (13) получается более общее правило умножения

$$\varepsilon\delta^{(n)} = -\delta^{(n)}\varepsilon. \tag{17}$$

Нетрудно показать, что в алгебре имеет место ассоциативность и выполняется правило Лейбница.

Операция инволюции, удовлетворяющая стандартным требованиям $(A^+)^+ = A$, $(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$, $(AB)^+ = B^+A^+$ при $A, B \in \mathcal{A}$, $\lambda \in C$, совпадает с комплексным сопряжением для обычных функций $A \in \mathcal{A}_f$. Инволюция сингулярных элементов определяется по формуле

$$(\delta^{(n)})^+ = \delta^{(n)}. \tag{18}$$

Из этих правил, в частности, вытекает, что

$$(\varepsilon\delta^{(n)})^+ = \delta^{(n)}\varepsilon = -\varepsilon\delta^{(n)}.$$

Перестановочность операций дифференцирования и инволюции легко проверяется непосредственно.

С помощью инволюции на Ψ и билинейного функционала можно определить полуторалинейную форму

$$\chi, \psi \to C: \quad (\chi, \psi) = \langle \chi^+, \psi \rangle.$$

Форма (,) является действительной ($\mathrm{Im}\,\langle \psi^+ \psi \rangle = 0$ при любом $\psi \in \Psi$), но не положительно определенной: в частности,

$$(\delta, \delta) = 0.$$

2. АССОЦИАТИВНАЯ АЛГЕБРА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В работе [2] построена алгебра обобщенных функций, являющаяся трехмерным аналогом алгебры $\mathcal{A}$ и обозначаемая далее $\mathcal{A}_3$. Для $\mathcal{A}_3$ ставились требования, выраженные в свойствах 1—5 (см. разд. 1), обобщенных на трехмерный случай, и переформулированные в эквивалентном виде. Вместо билинейного функционала $\langle A, \psi \rangle$ в алгебре использовался линейный функционал $\langle \psi \rangle$, называемый перенормированным интегралом и обозначенный $\int d\mathbf{x}\psi(\mathbf{x})$. Свойство 4, выраженное формулой (3), заменяется при этом на равенство нулю величины $\langle \partial\psi \rangle$ для любого $\psi \in \Psi_3$ (Ψ_3 — трехмерный аналог пространства Ψ), что на языке «перенормированного интеграла» соответствует возможности формального интегрирования по частям

$$\int d\mathbf{x}\,(\partial_i A(\mathbf{x}))\,\psi(\mathbf{x}) = -\int d\mathbf{x} A(\mathbf{x})\,\partial_i\psi(\mathbf{x}), \tag{19}$$

где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Эквивалентность формулировок вытекает из того, что, используя наличие ассоциативной операции умножения, всегда можно по билинейному функционалу построить линейный и обратно:

$$\langle \psi \rangle = \langle 1, \psi \rangle, \; \langle A, \psi \rangle = \langle A\,\psi \rangle, \tag{20}$$
$$A \in \mathcal{A}_3, \psi \in \Psi_3.$$

В отличие от одномерного случая алгебра $\mathcal{A}_3$ не была реализована как алгебра функционалов из некоторого пространства [2]. Кроме того, были выписаны не все тождества для ее элементов. По крайней мере, были указаны два ограничивающих правила, справедливые для любой ассоциативной алгебры обобщенных функций в отношении элементов, имеющих обратные, например $\varepsilon(x)$ — в одномерной алгебре, $r = |\mathbf{x}|$ — в трехмерной. Во-первых, произведение такого элемента с любым другим ненулевым элементом не может равняться нулю (иначе потеряется ассоциативность: на этом основан, например, известный пример Л. Шварца [19]). Во-вторых, дифференцирование произведения элемента на его обратный ($\varepsilon\varepsilon^{-1}$, rr^{-1}) должно давать нуль. Связь другого типа между элементами из $\mathcal{A}_3$ осталась неразрешенной, что оказалось несущественным, поскольку для применений в квантовой механике достаточно было учитывать элементы с очень малым числом сингулярных слагаемых [4, 5, 7, 8].

Алгебра $\mathcal{A}_3$ строилась для описания сосредоточенных сильно сингулярных потенциалов, поэтому она включает в себя δ-образные элементы, а также элемент r, дифференцированием которого получается δ-функция. Таким образом, образующими алгебры $\mathcal{A}_3$ являются: 1) бесконечно дифференцируемые функции $A_{sm}(\mathbf{x})$; 2) r; 3) $\delta(\mathbf{x})$. Все остальные элементы алгебры получаются из этих образующих с помощью конечного числа операций умножения, сложения и дифференцирования. Соотношения алгебры $\mathcal{A}_3$ таковы:

$$r^l\partial^n\delta = (-1)^l\{\partial^l\delta\}\, r^l \neq 0; \tag{21}$$

$$x_i\partial^n\delta = (\partial^n\delta)\, x_i \neq 0; \tag{22}$$

$$(\partial^m\delta)\,(\partial^n\delta) = 0; \tag{23}$$

$$r^l r^k = r^{l+k}; \tag{24}$$

$$\partial_i r = x_i r^{-1} + 4\pi x_i r^2\delta, \tag{25}$$

где $m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ l,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ i = 1, 2, 3.$

Эти соотношения в совокупности обеспечивают выполнение равенств

$$\partial_i(r^2) = 2x_i,\ \partial_i(rr^{-1}) = (\partial_i r)\, r^{-1} + r\partial_i(r^{-1}) = 0.$$

Кроме того, из них вытекает, что

$$\Delta(r^{-1}) = -4\pi\delta + 4\pi\partial_i(x_i\delta).$$

Инволюция в алгебре $\mathcal{A}_3$ задается следующим образом:

$$(A_{sm}(\mathbf{x}))^+ = A_{sm}(\mathbf{x}),\ (\partial^n\delta)^+ = \partial^n\delta,\ r^+ = r.$$

Отсюда и из формулы (21) следует, например, соотношение

$$(r\delta)^+ = \delta r = -r\delta.$$

Для последующих приложений оказалось достаточным записывать общий элемент алгебры в виде

$$A(\mathbf{x}) = A_f(\mathbf{x}) + \sum_n \partial^n(r^{-2k}A_{skn}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x})) + \sum_n \partial^n(r^{-2l-1}A_{aln}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x})), \tag{26}$$

где k и l — некоторые целые числа; в качестве $A_f(\mathbf{x})$ выбирается, как правило, функция, представимая в форме (см. [4, 5, 8])

$$A_f(\mathbf{x}) = A_s(\mathbf{x}) + r^{-1}A_a(\mathbf{x}).$$

Здесь и в (26) $A_{skn}(\mathbf{x})$, $A_{aln}(\mathbf{x})$, $A_s(\mathbf{x})$, $A_a(\mathbf{x})$ — бесконечно дифференцируемые функции, причем A_{skn} и A_{aln} определяются лишь в произвольной окрестности точки $\mathbf{x} = 0$.

Общий вид перенормированного интеграла $\int d\mathbf{x}A(\mathbf{x})$ задается следующим образом [подразумевается, что $A_f(\mathbf{x})$, дающая вклад в $A(\mathbf{x})$, является интегрируемой при больших r функцией]. Из всей суммы (26) вклад в перенормированный интеграл дают только $A_f(\mathbf{x})$ и слагаемое, равное числу, умноженному на $\delta(\mathbf{x})$:

$$\int d\mathbf{x}A(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}A_f(\mathbf{x}) + a_k(\Delta^k A_{sk0})(0), \tag{27}$$

где a_k — комбинаторный множитель, определяемый видом коэффициента при r^{2k} в разложении $A_{sk0}(\mathbf{x})$ в ряд Маклорена, например $a_0 = 1$. Непосредственно можно убедиться, что при таком определении перенормированного интеграла выполняется свойство, выраженное формулой (19).

Следует отметить, что в построенной алгебре $\mathcal{A}_3$ элемент r аналогичен элементу ε из $\mathcal{A}$. Оба эти элемента антикоммутируют с δ-функцией. Из обоих δ-функция получается с помощью дифференцирований. Оба элемента имеют обратные, и поэтому их произведение на любой ненулевой элемент алгебры не равно нулю.

Полуторалинейная форма, с помощью которой записываются квантовомеханические средние, строится из линейного функционала $\langle\psi\rangle$ и инволюции естественным образом:

$$(\chi, \psi) = \langle\chi^+, \psi\rangle = \int d\mathbf{x}\,\chi^+(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x}),$$

так что среднее оператора $A(\mathbf{x})$, представляющего собой линейную комбинацию операторов умножения на элементы из $\mathcal{A}_3$ и операторов дифференцирования, записывается в виде

$$(\psi, A(\mathbf{x})\psi) = \int d\mathbf{x}\,\psi^+(\mathbf{x})\,A(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x}).$$

Необходимо учитывать, что в последних двух равенствах интегралы понимаются как перенормированные. Как и в случае алгебры $\mathcal{A}$, форма (χ, ψ) не является положительно-определенной, что следует, например, из неположительности функционалов r^{-n} при $n \geqslant 3$: $\langle r^{-n}, \varphi\rangle$ может быть отрицательным при $\varphi \geqslant 0$.

3. АССОЦИАТИВНАЯ АЛГЕБРА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАМКНУТАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ВЗЯТИЯ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Любой элемент алгебры $\mathcal{A}$ определяет согласно (10) линейный функционал на пространстве Ψ, каждый элемент (9) которого задается функцией $\psi_f(x)$ и двумя обрывающимися последовательностями $\{\psi_1, \ldots, \psi_{M(\psi)}\}$ и $\{\psi^1, \ldots, \psi^{N(\psi)}\}$ (это уже отмечалось выше в отношении элементов из $\mathcal{A}$). Помимо таких функционалов на Ψ можно, например, определить функционалы $\eta^{(n)}$ и $\eta^{(n)}\varepsilon$:

$$\langle \eta^{(n)}, \psi \rangle = \psi_n, \quad \langle \eta^{(n)} \varepsilon, \psi \rangle = \psi^n, \tag{28}$$

которые имеют носитель в нуле и поэтому могут описывать сосредоточенные сингулярные потенциалы. Естественно поставить задачу о построении алгебры, содержащей алгебру $\mathcal{A}$ и включающей элементы $\eta^{(n)}$. Такая задача была поставлена в [3] и решена в [6]. При решении этой задачи возникает алгебра, замкнутая не только относительно ранее введенных операций, но также и относительно взятия первообразной. Следует отметить, что подобным свойством алгебра $\mathcal{A}$ не обладает. В ней отсутствует, например, первообразная элемента $\varepsilon\delta$, поскольку производная от $\eta = \eta^{(0)}$ как раз и должна равняться $2\varepsilon\delta$ в соответствии со свойством 4 [формула (3)].

Построение алгебры, содержащей $\varepsilon(x)$, $\delta^{(n)}(x)$, $\eta(x)$, проводится аксиоматически, без определения элементов ε, δ, η в качестве функционалов на некотором пространстве основных функций, как это сделано в случае алгебры $\mathcal{A}$. Этим достигается разделение алгебраической и функциональной сторон рассматриваемой задачи, а именно, для символов x, ε, δ, η независимо от того, как они интерпретируются, формулируются аксиомы и на их основе строится алгебра $\mathfrak{A}$, в которой x, ε, δ, η являются образующими. Придавая этим символам смысл функционалов на некотором пространстве основных функций, можно реализовать $\mathfrak{A}$ как алгебру обобщенных функций (см. ниже).

Аксиомы, обобщающие свойства 1—4 (см. разд. 1), и необходимые определения имеют следующий вид: $\mathfrak{A}$ — линейная, ассоциативная алгебра с единицей над полем комплексных чисел. Операция дифференцирования ∂ в $\mathfrak{A}$ определена посредством соотношений

$$\left.\begin{array}{l} \partial x = 1, \quad \partial 1 = 0, \quad \partial\varepsilon = 2\delta, \quad \partial\delta = \delta^{(1)}, \quad \partial\delta^{(n)} = \delta^{(n+1)}, \\ \partial\eta = 2\varepsilon\delta, \quad \partial(fg) = (\partial f)g + f\partial g, \quad \partial\lambda f = \lambda\partial f, \\ \lambda \in C, \quad f, g \in \mathfrak{A}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \tag{29}$$

В $\mathfrak{A}$ выполнены тождества

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\varepsilon = 1, \quad x\delta = \delta x = 0, \quad \delta^{(m)}\delta^{(n)} = 0, \\ x\varepsilon = \varepsilon x, \quad \eta\varepsilon = -\varepsilon\eta, \quad \eta x = x\eta, \quad m, n = 0, 1, \ldots \end{array}\right\} \tag{30}$$

Инволюция в алгебре $\mathfrak{A}$ определяется так:

$$\left.\begin{array}{l} x^+ = x, \quad \varepsilon^+ = \varepsilon, \quad \delta^+ = \delta, \quad \eta^+ = -\eta, \\ (fg)^+ = g^+f^+, \quad (f^+)^+ = f, \quad f, g \in \mathfrak{A}. \end{array}\right\} \tag{31}$$

Операция инволюции коммутирует с дифференцированием:

$$(\partial f)^+ = \partial(f^+). \tag{32}$$

На алгебре $\mathfrak{A}$ определен билинейный функционал $\langle\ ,\ \rangle$, причем достаточно его задать только на элементах 1, δ:

$$\langle 1, \delta \rangle = 1. \tag{33}$$

Аксиомы, связывающие инволюцию, дифференцирование, умножение и функционал, имеют вид

$$\langle f g,\ h\rangle = \langle f,\ gh\rangle,\ f,\ g,\ h \in \mathfrak{A}; \tag{34}$$

$$\langle f^+,\ g\rangle = \langle g^+,\ f\rangle^*. \tag{35}$$

Чтобы выписать аксиому интегрирования по частям, определяется аналог выражения $f(x)\, g(x)\, |_{-a}^{a}$. Для этого вводится функционал $|_{-a}^{a}$:

$$\varepsilon\, |_{-a}^{a} = 2,\quad x^{2n+1}\, |_{-a}^{a} \neq 0,\quad x^{2n}\varepsilon\, |_{-a}^{a} \neq 0,\quad n = 0,\ 1,\ \ldots \tag{36}$$

На остальных элементах алгебры $\mathfrak{A}$ этот функционал дает нуль. Аксиома интегрирования по частям имеет вид

$$\langle \partial f,\ g\rangle = -\langle f,\ \partial g\rangle + fg\, |_{-a}^{a}. \tag{37}$$

Например, для 1 и δ выражение (37) запишется так:

$$1 = \langle 1,\ \delta\rangle = \frac{1}{2}\langle 1,\ \partial\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\, |_{-a}^{a} - \frac{1}{2}\langle 0,\ \varepsilon\rangle = 1.$$

Теорема 1. Аксиомам (29)—(37) удовлетворяет единственная алгебра $\mathfrak{A}$, в которой выполнены соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon\delta = -\delta\varepsilon,\quad \partial x^n = nx^{n-1},\quad \eta'\eta = \eta\eta',\quad (\eta' = \partial\eta);\\ &\eta\delta = -\delta\eta,\quad (\eta^p)' = p\eta'\eta^{p-1},\quad p = 1,\ 2,\ \ldots;\\ &\eta\delta^{(m)} = -\delta^{(m)}\eta,\quad (x^n\eta)' = nx^{n-1}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Например, последнее равенство в (38) доказывается с помощью выкладки

$$\partial^m(\eta\delta) = \partial^{m-1}\partial(\eta\delta) = \partial^{m-1}(\eta'\delta + \eta\delta') =$$
$$= \partial^{m-1}\eta\delta' = \ldots = \eta\delta^{(m)}.$$

В то же время $\partial^m(\eta\delta) = -\partial^m(\delta\eta) = -\delta^{(m)}\eta$, что и требовалось доказать.

Теорема 1 позволяет из аксиом (29)—(31) получить функционал на любых элементах агебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. Имеют место следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\langle 1,\ x^n\rangle = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\, |_{-a}^{a},\quad \langle \varepsilon,\ \eta^k\rangle = 0,\quad \langle \varepsilon,\ \delta\eta^k\rangle = 0,\\ &\langle \eta^k\delta\rangle = k!,\quad \langle \eta^m,\ 1\rangle = 0,\quad \langle x^n\eta^m\rangle = 0,\quad \langle \delta^{(k)},\ \eta^p\rangle = 0\quad (k \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Доказательство. Из цепочки равенств

$$\langle x^n,\ 1\rangle = \langle x^n,\ x'\rangle = x^{n+1}\, |_{-a}^{a} - \langle nx^{n-1},\ x\rangle = x^{n+1}\, |_{-a}^{a} - n\langle x^n,\ 1\rangle$$

вытекает, что

$$\langle 1,\ x^n\rangle = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\, |_{-a}^{a},$$

$$\langle \eta^k,\ \delta\rangle = \frac{1}{2}\langle \eta^k\varepsilon'\rangle = -\frac{1}{2}\langle k\eta^{k-1}\varepsilon\delta\varepsilon\rangle = k\langle \eta^{k-1},\ \delta\rangle.$$

Это рекуррентное равенство приводит к $\langle \eta^k \delta \rangle = k!$ Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично [6]. Из теоремы 2 нетрудно заключить, что каждый из элементов вида

$$x^m \eta^n, \quad \delta^{(m)} \eta^n, \quad \varepsilon x^m \eta^n, \quad \varepsilon \delta^{(m)} \eta^n \tag{40}$$

отличен от нуля, так как для любых $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ существует элемент $f \in \mathfrak{A}$ такой, что $\langle f, g \rangle \neq 0$, где g — один из элементов (40). Оказывается, элементы (40) являются не только отличными от нуля, но и линейно независимыми, а множество элементов алгебры $\mathfrak{A}$ исчерпывается их линейными комбинациями (доказательство см. в работе [6]).

Построенную алгебру формальных символов x, ε, δ, η можно реализовать как алгебру функционалов на пространстве основных функций, представимых в виде

$$\psi = \sum_n (\psi_{sn}(x) + \varepsilon(x)\, \psi_{an}(x)\, \eta^n(x)) + \\ + \sum_{m,n} (\psi_{mn} \delta^{(m)} \eta^n(x) + \varepsilon(x)\, \psi^{mn} \delta^{(m)} \eta^n(x)), \quad \psi_{sn},\ \psi_{an} \in S(R^1). \tag{41}$$

Разумеется, величины $\delta^{(m)}$, η^n, входящие в это выражение, не являются функциями, так что равенство (41) следует понимать как формальную запись того факта, что произвольный элемент пространства основных функций задается совокупностью функций и обрывающихся последовательностей $(\{\psi_{sn}\}, \{\psi_{an}\}, \{\psi_{mn}\}, \{\psi^{mn}\})$ (ср. аналогичные замечания в отношении пространства Ψ в разд. 1).

Соотношения (29)—(39) справедливы в алгебре с образующими x, $\varepsilon(x)$, $\delta(x)$, $\eta(x)$, а алгебра $\mathcal{A}$ с образующими x, ε, δ является ее подалгеброй. Эти соотношения показывают, что вместе с каждым элементом в алгебру $\mathfrak{A}$ входят как все его производные, так и все его первообразные, т. е. алгебра является замкнутой относительно этих операций.

4. ПРИМЕНЕНИЕ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ К ПОСТРОЕНИЮ ОДНОМЕРНЫХ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Рассмотренные в разд. 1—3 алгебры обобщенных функций $\mathcal{A}$, $\mathfrak{A}$, $\mathcal{A}_3$ могут быть использованы для описания сильно сингулярных сосредоточенных взаимодействий в квантовой механике. В этом разделе приведена общая методика построения динамик, отвечающих сингулярным сосредоточенным взаимодействиям, которая применена к движению квантовомеханической частицы на прямой.

Для построения алгебры $\mathcal{U}$ наблюдаемых квантовой теории с сингулярными потенциалами необходимо каждую из алгебр $\mathcal{A}$, $\mathfrak{A}$, $\mathcal{A}_3$ пополнить оператором дифференцирования, соответствующим, как обычно, оператору импульса. Однако таким пополнением могут быть получены не все локальные наблюдаемые. Действительно, по определению наблюдаемая локальна, если для соответствующего ей оператора A

$$\operatorname{supp} A\psi \subset \operatorname{supp} \psi$$

для всех $\psi \in \Psi$.

В рассматриваемом здесь случае алгебры $\mathcal{A}$ этому условию удовлетворяют необходимые для дальнейшего операторы

$$\left.\begin{aligned} &B_{mn}\psi(x) = \delta^{(m)}(x)\,\psi_s^{(n)}, \quad B^{mn}\psi(x) = \varepsilon(x)\,\delta^m(x)\,\psi_a^{(n)}; \\ &B^m_{,n}\psi(x) = \varepsilon(x)\,\delta^m(x)\,\psi_s^{(n)}, \quad B^{;n}_m\psi(x) = \delta^{(m)}(x)\,\psi_a^{(n)}, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

где $\psi(x)$ дается выражением (9), а также операторы

$$D_{mn}\psi(x) = \delta^{(m)}(x)\,\psi_n,\ D^{mn}\psi(x) = \varepsilon(x)\,\delta^{(m)}(x)\,\psi^{(n)},$$
$$D^m_{,n}\psi(x) = \varepsilon(x)\,\delta^m(x)\,\psi_n,\ D^{;n}_m\psi(x) = \delta^{(m)}\psi^{(n)}.$$

Операторы B можно выразить через элементы алгебры $\mathcal{A}$, например:

$$B_{mn}\psi = \delta^{(m)}(x)\,(-1)^n\ \langle \delta^{(n)}(x), \psi, (x)\rangle, \tag{43}$$

что позволяет включить B в алгебру $\mathcal{U}$.

Для операторов D справедливо выражение, аналогичное (43), если использовать функционал $\eta \in \mathfrak{A}$, однако через элементы алгебры $\mathcal{A}$ операторы D не выражаются. Это приводит к тому, что для операторов D не определена инволюция и поэтому их нельзя включить в алгебру локальных наблюдаемых $\mathcal{U}$.

Алгебра $\mathcal{U}$ является алгеброй наблюдаемых индефинитной квантовой механики, поскольку, как это уже отмечалось в разд. 3, полуторалинейная форма, заданная на пространстве Ψ, не удовлетворяет условию положительной определенности. Для придания теории непосредственного физического смысла необходимо перейти к подпространствам пространства Ψ с положительной метрикой и к подалгебрам алгебры наблюдаемых $\mathcal{U}$, инвариантным относительно указанных подпространств.

Методика вырезания подпространств с дефинитной метрикой, в которой определены гамильтонианы с сингулярными сосредоточенными потенциалами, состоит из трех этапов, имеющих некоторые особенности в зависимости от размерности конфигурационного пространства, и в случае алгебры $\mathcal{A}$ выглядит следующим образом. Первый этап состоит в переходе от пространств Ψ (9) к одному из подпространств Ψ^{MN}, где $M, N = f, 0, 1, \ldots$ Значения $M = f$, $N = f$ соответствуют отсутствию в $\psi(x)$ сингулярных членов данного типа, а $M \neq f$, $N \neq f$ указывают максимально допустимую производную δ-функции в сумме (9). Например, Ψ^{0f} и Ψ^{ff} состоят из элементов вида

$$\psi(x) = \psi_f(x) + \delta(x)\,\psi_0; \tag{44}$$

$$\psi(x) = \psi_s(x) + \varepsilon(x)\,\psi_a(x) = \psi_f(x) \tag{45}$$

соответственно.

Второй этап состоит в переходе от пространств Ψ^{MN} к их подпространствам с положительно-определенной метрикой. Для такого перехода достаточно выразить коэффициенты ψ_m, ψ^m из (9) через линейные комбинации значений производных $\psi_s^{(n)}(0)$, $\psi_a^{(n)}(0)$:

$$\left.\begin{aligned} \psi_m &= \sum_{n=0}^{M} b^{mn}\psi_s^{(n)} + \sum_{n=0}^{N} b^{m}_{,n}\psi_a^{(n)}; \\ \psi^m &= \sum_{n=0}^{M} b_m^{,n}\psi_s^{(n)} + \sum_{n=0}^{N} b_{mn}\psi_a^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Полуторалинейная форма (χ, ψ) на векторах из Ψ^{MN} при наложении условий (46) будет положительно-определенной, если выполнены равенства

$$\left.\begin{aligned} & b^{nn} = (-1)^n g_{sn} + ih_{sn}, \quad b_{nn} = (-1)^n g_{an} + ih_{an}; \\ & g_{sn} \geqslant 0, \quad g_{an} \geqslant 0, \quad h^*_{sn} = h_{sn}, \quad h^*_{an} = h_{an}; \\ & b^*_{mn} = -b_{nm}(-1)^{n-m}, \quad m \neq n; \\ & b^{mn*} = -b^{nm}(-1)^{n-m}, \quad b^{m}_{,n} = -b_n^{,m*}(-1)^{n-m}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Обозначим полученное подпространство с дефинитной метрикой Ψ_+^{MN}. Легко видеть, что алгебра наблюдаемых $\mathcal{U}$ не оставляет множество Ψ_+^{MN} инвариантным. Так, оператор дифференцирования выводит элементы из этого множества при любых M, N. Алгебру локальных наблюдаемых для пространства Ψ_+^{MN}, обозначаемую $\mathcal{U}_+^{MN}$, можно получить, используя идемпотентные операторы P_f, $P_{MN} \in \mathcal{U}$, определяемые соотношениями

$$P_f\psi = \psi_f; \tag{48}$$

$$P_{MN}\psi = \Big(\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{M} B_{mn}b^{mn} + \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} B_m^{,n}b^{m}_{,n} + \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{M} B^{m}_{,n}b_m^{,n} + \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} B^{mn}b_{mn}\Big)\psi. \tag{49}$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться, что $(P_f + P_{MN})\psi \in \Psi_+^{MN}$ для любого $\psi(x) \in \Psi$. Алгебра $\mathcal{U}_+^{MN}$ по определению является правым идеалом алгебры $\mathcal{U}$, порожденным идемпотентом $P_f + P_{MN}$, и, как можно показать, исчерпывается полиномами по операторам $A_f + \Delta_{MN}$ и $d/dx + d_{MN}$, определяемым соотношениями

$$(A_f + \Delta_{MN})\psi = P_f(A_f\psi) + P_{MN}(A_f\psi); \tag{50}$$

$$(d/dx + d_{MN})\psi = P_f(d\psi/dx) + P_{MN}(d\psi/dx). \tag{51}$$

Следует отметить, что $\mathcal{U}_+^{MN}$ не инвариантна относительно инволюции.

Третий этап состоит в выборе кандидата на роль гамильтониана L и дополнительном сужении пространства Ψ_+^{MN} до пространства

Ψ_L^{MN}, на котором соответствующий оператор L симметричен. Этот этап удобно разбить на несколько последовательных шагов.

А. Выбираем оператор $L \in \mathcal{U}_+^{MN}$, среднее от которого имеет мнимую часть, зависящую лишь от величин $\psi_s^{(n)}(0)$, $\psi_a^{(n)}(0)$, $\psi_s^{(n)*}(0)$, $\psi_a^{(n)*}(0)$.

Б. Мнимая часть среднего от оператора L приравнивается нулю:

$$(\psi, L\psi) - (\psi, L\psi)^* = 0. \tag{52}$$

В соответствии с требованием, наложенным на L, левая часть равенства (52) является билинейной формой от величин $\psi_s^{(n)}$, $\psi_a^{(n)}$ и $\psi_s^{(n)*}$, $\psi_a^{(n)*}$.

В. Входящие в равенство (52) величины $\psi_a^{(n)}$ приравниваются линейным комбинациям $\psi_s^{(n)}$ с неопределенными коэффициентами

$$\psi_a^{(m)} = \sum a_{mn}\psi_s^{(n)}. \tag{53}$$

Индексы m, n пробегают все значения, при которых они присутствуют в (52).

Г. При подстановке выражений (53) в (52) получается система уравнений на коэффициенты a_{mn}. Каждому нетривиальному решению этой системы соответствует подпространство Ψ_L^{MN} пространства Ψ_+^{MN}, на котором оператор L является симметрическим. Некоторые из операторов L могут, таким образом, быть выбраны в качестве гамильтонианов нетривиальных моделей с сингулярными потенциалами.

Описанную схему следует дополнить следующими рассуждениями. Пополнение множества Ψ_+^{MN} по имеющейся на нем полуторалинейной форме приводит к гильбертову пространству $\mathcal{H}$, имеющему структуру прямой суммы пространств $\mathcal{H} = L_2 \oplus C^1 \oplus \ldots \oplus C^1$. Замыкание оператора L с областью определения Ψ_L^{MN} в пространстве $\mathcal{H}$ приводит к самосопряженному гамильтониану в $\mathcal{H}$. Получаемые по изложенной схеме гамильтонианы параметризуются допустимыми наборами величин типа $\{b\}$ и $\{a\}$; при этом не всегда различным наборам этих величин отвечают неэквивалентные динамические модели. Описанный метод построения квантовых моделей с сингулярными потенциалами без труда обобщается на трехмерный случай. Возникающие модели с сингулярными потенциалами существенно отличаются от моделей обычной квантовой механики с регулярными потенциалами по следующим причинам:

а. Отвечающие им гамильтонианы не представляются в виде суммы операторов кинетической и потенциальной энергии. Последние не определены на множестве Ψ_L^{MN}. Определен лишь суммарный оператор L.

б. В общем случае гамильтонианы реализуются в пространствах, отличных от пространств квадратично-интегрируемых функций. Несмотря на эту специфику, подобные модели вполне приемлемы как с физической, так и с математической точки зрения. Для них выполняются аксиомы квантовой теории и существует разумная теория рассеяния, математически формулируемая как теория рассеяния в паре пространств [32].

Общая схема была использована для построения конкретных одномерных моделей [3].

Пример 1. Частица в поле сингулярного потенциала типа $\delta(x)$:

$$\Psi_+^{MN} = \Psi_+^{ff}. \tag{54}$$

В этом случае метрика положительна, а операторы Δ_{ff}, d_{ff} (50), (51) имеют вид

$$\Delta_{ff} = 0, \; d_{ff}\psi = -2\delta(x)\,\psi_a. \tag{55}$$

Выберем в качестве оператора L оператор

$$H_{ff}\psi = -(d/dx + d_{ff})^2\psi. \tag{56}$$

Явное действие этого оператора на множестве Ψ_+^{ff} описывается формулой

$$H_{ff}\psi_f(x) = -\psi_f''(x) + 2\delta(x)\,\psi_a' + 2\delta'(x)\,\psi_a. \tag{57}$$

Оператор H_{ff} не является симметрическим на Ψ_+^{ff}. Уравнение (53) применительно к этому оператору расписывается в виде

$$\psi_s^*\psi_a' - \psi_s'^*\psi_a - \psi_a'^*\psi_s + \psi_a^*\psi_s' = 0. \tag{58}$$

Соотношения (53) сводятся к

$$\psi_a = a_{00}\psi_s + a_{01}\psi_s', \; \psi_a' = a_{10}\psi_s + a_{11}\psi_s' \tag{59}$$

и при подстановке их в (58) приводят к таким условиям на коэффициенты $\{a\}$:

$$a_{11} = -a_{00}^*, \; a_{01} = a_{01}^*, \; a_{10} = a_{10}^*. \tag{60}$$

Оператор H_{ff} самосопряжен в существенном на множестве Ψ_H^{ff} и параметризуется в силу соотношений (60) четырьмя вещественными параметрами. Ситуация, в которой $a_{01} \neq 0$, $a_{10} = a_{00} = 0$, соответствует тому, что обычно называют уравнением Шредингера с потенциалом $a_{01}\delta(x)$. Эта ситуация отвечает случаю подпространства четных функций $\psi(x) = \psi(-x)$.

Решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (57) и граничными условиями (59), соответствующие рассеянию (т. е. отражению и прохождению) плоской волны с волновым числом k, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\psi_f(x) = e^{ikx} + A(k)\,e^{-ikx}, && x < 0,\\ &\psi_f(x) = B(k)\,e^{ikx}, && x > 0, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

где $A(k)$, $B(k)$ — комплексные коэффициенты, определяемые граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} A(k) &= D^{-1}(k)\,[a_{01}k^2 - \mathrm{i}k\,(a_{00}+a^*_{00})+a_{10}];\\ B(k) &= D^{-1}(k)\,[a_{01}a_{10}-(1+a_{00})\,(1-a^*_{00})];\\ D(k) &= a_{01}k^2+\mathrm{i}k\,(a_{01}a_{10}+a_{00}a^*_{00}+1)-a_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

В этом примере различным наборам параметров $\{a\}$ отвечают различные физически неэквивалентные системы. Из (62) видно, что при $a_{01}a_{10} - (1 + a_{00})(1 - a^*_{00}) = 0$ обращается в нуль B, т. е. независимо от импульса будет наблюдаться полное отражение с нетривиальным изменением фазы падающей волны.

Векторы из Ψ^{ff}_H, описывающие связанные состояния, с точностью до нормировочного множителя имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \psi_f(x) &= \mathrm{e}^{\varkappa x} \quad \text{при} \quad x<0;\\ \psi_f(x) &= \mathrm{e}^{-\varkappa x} \quad \text{при} \quad x>0, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

где параметр $\varkappa$ связан с энергией связи E соотношением $E = -\varkappa_2$ и определяется уравнением

$$a_{01}\varkappa^2 + (1 + a_{00}a^*_{00} + a_{10}a_{01})\,\varkappa + a_{10} = 0. \tag{64}$$

Из этого уравнения видно, что система может иметь одно, два или вообще не иметь связанных состояний. Следует отметить, что при комплексном a_{00} константа C комплексна, так что комплексным может быть вектор состояния низшего невырожденного уровня. При $a_{00} = 0$, $a_{10} = a^{-1}_{01} < 0$ существуют два уровня, для которых

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = -a_{10}. \tag{65}$$

Возможность появления вырожденного основного уровня и комплексные векторы состояния для основного уровня являются необычными свойствами гамильтонианов H_{ff}. Рассмотренная модель реализуется в обычном гильбертовом пространстве L_2 квадратично-интегрируемых функций. Следующий пример представляет модель другого типа.

Пример 2. Частица в поле сингулярного потенциала типа $\delta''(x)$.

В этом случае $\Psi^{MN} = \Psi^{0f}$. Элементы пространства Ψ^{0f} имеют вид $\psi = \psi_f(x) + \delta(x)\,\psi_1$. Общее преобразование к положительно-определенной форме задается соотношением $\psi_1 = b^{00}\psi_s = (g_{s0} + \mathrm{i}h_{s0})\,\psi_s$, где $g_{s0} \geqslant 0$, $h^*_{s0} = h_{s0}$. Элементы пространства Ψ^{0f}_+ поэтому имеют вид $\psi = \psi_f(x) + b^{00}\delta(x)\,\psi_f$, а полуторалинейная форма $(.\,,.)$ на множестве этих элементов определяется равенством

$$(\chi, \psi) = \int dx\chi^*_f(x)\,\psi_f(x) + 2g_{s0}\chi^*_s\psi_s. \tag{66}$$

Пополнение по форме (66) приводит к гильбертову пространству $\mathcal{H} = L_2 \oplus C^1$, состоящему из пар $\{h\} = \{h, H\}$, $h \in L_2$, $H \in C^1$ со скалярным произведением $(\{h\}, \{h'\}) = \int dxh^* (x) h' (x) + 2g_{s0}H^*H'$.

Операторы Δ_{0f}, d_{0f} в соответствии с правилами (50), (51) имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{0f}\psi (x) = b^{00}\delta (x) A_a\psi_a - b^{00}\varepsilon (x) \delta (x) A_a\psi_s; \\ d_{0f}\psi (x) = b^{00}\delta (x) \psi_s' - b^{00}\delta' (x) \psi_s - 2\delta (x) \psi_a. \end{array}\right\} \tag{67}$$

Как и в примере 1, гамильтониан системы определяется формулой $H_{0f} = -(d/dx + d_{0f})^2$, которая в развернутом виде запишется следующим образом:

$$H_{0f}\psi (x) = -\psi'' (x) - b^{00}\delta (x) \psi_s'' + 2\delta (x) \psi_a' + + 2\delta' (x) \psi_a + b^{00}\delta'' (x) \psi_s. \tag{68}$$

Уравнение (53) для оператора $L = H_{0f}$ разрешается при подстановке соотношений (54), которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\psi_a = a_{00}\psi_s + a_{01}\psi_s' + a_{02}\psi_s'', \psi_a' = a_{10}\psi_s + a_{11}\psi_s' + a_{12}\psi_s''. \tag{69}$$

Решения определяются набором параметров $\{a\}$ с условиями

$$\left.\begin{array}{l} a_{02} = 0, \quad a_{12} = \frac{1}{2} (b^{00} + b^{00*}) = g_{s0}; \\ a_{10} = a_{10}^*, \quad a_{01} = a_{01}^*, \quad a_{11} = -a_{00}^*. \end{array}\right\} \tag{70}$$

Гамильтониан H_{0f} самосопряжен в существенном на множестве Ψ_H^{0f} как оператор в пространстве $\mathcal{H}$ и параметризуется величинами g_{s0}, a_{00}, a_{10}, a_{01}.

Решения уравнения Шредингера, отвечающие рассеянию, задаются соотношениями (61), где коэффициенты $A(k)$, $B(k)$ выражаются согласно (62) с заменой $a_{10} \to a_{10} - k^2g_{s0}$. Уравнение для связанных состояний является уравнением третьей степени по $\varkappa$

$$a_{01}\varkappa^2 + (1 + a_{00}a_{00}^* + a_{01}a_{10} + a_{01}g_{s0}\varkappa^2) \varkappa + a_{10} + g_{s0}\varkappa^2 = 0. \tag{71}$$

Поэтому связанных состояний в общем случае три. Какие-то из них могут оказаться на нефизическом листе по энергии. Из выписанных формул следует, что величина g_{s0} влияет на физику модели, а h_{s0} — нет.

В свете изложенного подхода представляет интерес совместное рассмотрение регулярного и сингулярного потенциалов.

П р и м е р 3. Гармонический осциллятор в поле сингулярного, сосредоточенного в точке потенциала [9].

Пусть Ψ_H^{0f} — множество из примера 2. На этом множестве определен и симметричен оператор

$$H_{0f} = -(d/dx + d_{0f})^2 + x^2/4, \tag{72}$$

являющийся гамильтонианом рассматриваемой системы. Надо найти его собственные функции и собственные значения. Решение ищется в виде

$$\left.\begin{aligned}\psi(x)&=D_\nu(-x), \quad x<0;\\ \psi(x)&=A_\nu D_\nu(x), \quad x>0,\ \nu=E-1/2.\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Здесь A_ν — некоторая постоянная; $D_\nu(x)$ — функция параболического цилиндра [33], удовлетворяющая уравнению Шредингера для гармонического осциллятора с $E=\nu+1/2$. Подстановка функций (73) в граничные условия (69), (70) дает уравнение на спектр

$$\begin{gathered}[a_{10}-g_{s0}(\nu+1/2)]/\Gamma^2(1/2-\nu/2)+\\ +[1+a_{10}a_{01}+a_{00}a_{00}^*-g_{s0}a_{01}(\nu+1/2)]\sqrt{2}/\Gamma(1/2-\nu/2)\,\Gamma(-\nu/2)+\\ +2a_{01}/\Gamma^2(-\nu/2)=0,\end{gathered} \tag{74}$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция Эйлера. Для постоянной A_ν получается выражение

$$A_\nu=1-2a_{00}\left(1+a_{00}+\sqrt{2}\,a_{01}\frac{\Gamma(1/2-\nu/2)}{\Gamma(-\nu/2)}\right)^{-1}. \tag{75}$$

Решением уравнения (74) при $a_{10}=g_{s0}=0$ является набор значений $\nu=2k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, а при $a_{01}=0$ $\nu=2k+1$. Оба эти случая соответствуют уровням и собственным функциям невозмущенного осциллятора.

В общем случае можно вычислить малые поправки к уровням гармонического осциллятора, вызванные сингулярностью, считая $\nu=n+\alpha$, $|\alpha|\ll 1$. Для основного состояния поправка имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha_0=(2a_{10}-g_{s0})\Big[2g_{s0}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(2+2a_{00}a_{00}^*+2a_{10}a_{01}-g_{s0}a_{01})-\\ -(g_{s0}-2a_{10})(C+2\ln 2)\Big].\end{aligned} \tag{76}$$

Таким образом, при помощи развитой методики можно построить разветвленное семейство одночастичных гамильтоновых операторов с сингулярными потенциалами, сосредоточенными в точке. Однако не все гамильтонианы с сингулярными потенциалами удается включить в изложенную схему, например с потенциалом $a\delta'(x)$.

5. ПРИМЕНЕНИЕ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ К ПОСТРОЕНИЮ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Общая схема построения моделей с сингулярными потенциалами, изложенная в предыдущем разделе на примере одномерного случая, непосредственно обобщается на трехмерный случай. Построение гамильтонианов осуществляется в некоторых гильбертовых пространствах последовательно в три этапа. В трехмерном случае методика разд. 4 приводит к ряду содержательных моделей с сингулярными сосредоточенными потенциалами.

Пример 1. Частица в поле потенциала типа $\delta(x)$. Исходное пространство Ψ^f является подмножеством пространства $L_2(R^3)$. Элементы Ψ^f имеют вид

$$\psi_f(\mathbf{x}) = \psi_s(\mathbf{x}) + r^{-1}\psi_a(\mathbf{x}),\ r = |\mathbf{x}|, \tag{77}$$

где $\psi_s(\mathbf{x})$, $\psi_a(\mathbf{x})$ — гладкие, убывающие на бесконечности функции. Полуторалинейная форма на Ψ^f положительно определена. В трехмерном случае не удается определить инвариантные относительно Ψ_+^Q операторы $\partial_i + d_{iQ}$ (Q — мультииндекс, заменяющий индексы M, N в одномерном случае). Однако потребовав

$$\psi_a(\mathbf{x}) = \varphi(r^2),\ \varphi(\xi) \in C^\infty(R^3), \tag{78}$$

можно построить инвариантный оператор H_f

$$H_f\psi_f = -\Delta\psi_f(\mathbf{x}) - 4\pi\delta(\mathbf{x})\psi_a + {} \\ + 8\pi x_i\delta(\mathbf{x})\,\partial_i\psi_a + 4\pi\partial_i(x_i\delta(\mathbf{x}))\,\psi_a. \tag{79}$$

В соответствии с третьим этапом общей методики на множество Ψ^f накладывается условие (53) с $L = H_f$, т. е. $\operatorname{Im}(\psi, H_f\psi) = 0$. С помощью явного вида элементов пространства Ψ^f (77) и оператора H_f (79) это условие упрощается до условия

$$\psi_s^*(0)\,\psi_a(0) - \psi_a^*(0)\,\psi_s(0) = 0, \tag{80}$$

решение которого имеет вид

$$\psi_a(0) = \alpha_0\psi_s(0),\ \alpha_0 = \alpha_a^*. \tag{81}$$

Итак, получено однопараметрическое семейство симметрических операторов H_f на подмножествах $\Psi^f_{H_f}$, выделяемых граничным условием (81). Замыкание этих операторов в $L_2(R^3)$ дает семейство самосопряженных операторов.

Пример 1 эквивалентен тому, что обычно называют уравнением Шредингера с потенциалом $c\delta(\mathbf{x})$. Трактовка этого уравнения с точки зрения расширения оператора $-\Delta$ с подмножества функций, обращающихся в нуль при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, дана в [10]. Такие расширения эквивалентны расширениям оператора $-d^2/dr^2$ в нуле на полуоси $(0, +\infty)$ и поэтому приводят к нетривиальному рассеянию лишь для s-волны. Этим же объясняется сокращение параметров по сравнению со случаем $(-\infty, \infty)$ примера 1 из разд. 4. Обобщением примера 2 из разд. 4 на трехмерный случай является следующий пример.

Пример 2. Частица в поле потенциала типа $\Delta\delta(\mathbf{x})$. Исходное пространство $-\Psi^0$. По определению элементы этого пространства представимы в виде

$$\psi = \psi_f(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x})\,\psi_0,\quad \psi_0 \in C^1, \tag{82}$$

где $\psi_f(\mathbf{x})$ допускает представление (77). Полуторалинейная форма на Ψ^0 задается правилом

$$(\chi, \psi) = \int d\mathbf{x}\chi_f^*(\mathbf{x})\,\psi_f(\mathbf{x}) + \chi_s^*(0)\,\psi_0 + \chi_0^*\psi_s(0). \tag{83}$$

Переход к подпространству с дефинитной формой осуществляется при наложении условия $\psi_0 = g\psi_s(0)$, тогда

$$(\chi, \psi) = \int d\mathbf{x}\chi_f^*(\mathbf{x})\,\psi_f(\mathbf{x}) + 2g\chi_s^*(0)\,\psi_s(0). \tag{84}$$

Пополнение Ψ_+^0 по отношению к форме (84) порождает гильбертово пространство $\mathscr{H} = L_2(R^3) \oplus C^1$. В качестве гамильтониана H, инвариантного относительно Ψ_+^0, выбирается оператор

$$H\psi = -\Delta\psi(\mathbf{x}) - 4\pi\delta(\mathbf{x})\,\psi_a + 8\pi x_i\delta(\mathbf{x})\,\partial_i\psi_a + \\ + 4\pi\partial_i(x_i\delta(\mathbf{x}))\,\psi_a(\mathbf{x}) + g\Delta\delta(\mathbf{x})\,\psi_s - g\delta(\mathbf{x})\,\Delta\psi_s. \tag{85}$$

Третий этап состоит в разрешении уравнения

$$(\psi, H\psi) - (\psi, H\psi)^* = -4\pi(\psi_s^*\psi_a - \psi_a^*\psi_s) + \\ + g(\Delta\psi_s^*\psi_s - \psi_s^*\Delta\psi_s) = 0. \tag{86}$$

Линейная подстановка $\psi_a = \alpha_0\psi_s + \alpha_2\Delta\psi_s$ является решением (86) при условиях

$$\alpha_0^* = \alpha_0; \tag{87}$$

$$\alpha_2 = \alpha_{22}^* = -(2\pi)^{-1}g. \tag{88}$$

Этими условиями определяется подпространство Ψ_H^0. Замыкание оператора H с областью определения Ψ_H^0 в пространстве $\mathscr{H}$ задает самосопряженный оператор, являющийся гамильтонианом рассматриваемой системы. Семейство гамильтонианов параметризуется двумя вещественными параметрами α_0, g.

Решение уравнения Шредингера $(H - E)\,\psi = 0$, отвечающее рассеянию с энергией $E = k^2$ и фазой δ_k, имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}) = (kr)^{-1}\sin kr\cos\delta_k + (kr)^{-1}\cos kr\sin\delta_k + \\ + g\delta(\mathbf{x})\cos\delta_k. \tag{89}$$

Отсюда следует

$$\psi_s = \cos\delta_k,\ \Delta\psi_s = -k^2\cos\delta_k,\ \psi_a = \frac{1}{k}\sin\delta_k. \tag{90}$$

Подстановка (89) в граничные условия при учете (90) дает выражение для фазы $\operatorname{tg}\delta_k = \alpha_0 k + gk^3/2\pi$. Поскольку фазы волн с $l > 0$ равны нулю, рассеяние изотропно, и полное сечение задается выражением

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_k = \frac{4\pi(\alpha_0 + gk^2/2\pi)^2}{1 + k^2(\alpha_0 + gk^2/2\pi)^2}. \tag{91}$$

При наличии связанного состояния с энергией связи $E = -\varkappa^2$ вектор состояния принимает вид

$$\psi(x) = (\varkappa r)^{-1} e^{-\varkappa r} - g\delta(x), \tag{92}$$

а уравнение для определения связанных состояний

$$(g/2\pi)\,\varkappa^3 + \alpha_0\varkappa + 1 = 0 \tag{93}$$

имеет третью степень и при $g = 0$ переходит в соответствующее уравнение для связанных состояний модели из примера 1.

П р и м е р 3. Квантовый δ-образный потенциал, действующий в p-состоянии.

Эта задача существенно отличается от примера 1, что можно пояснить с точки зрения теории расширений симметрических операторов. Спектральные свойства оператора Лапласа в пространстве $L_2(R^3)$ определяются свойствами радиального оператора $\Delta_l = \partial_r^2 + 2/r\partial_r - l(l+1)/r^2$ в $L_2(R_+, r^2dr)$ $(R_+ = \{x \in R^1, x \geqslant 0\})$.

Оператор Δ_l унитарно эквивалентен оператору $\Delta_l' = \partial_r^2 - l(l+1)/r^2$ в пространстве $L_2(R_+, dr)$. Соответствующее преобразование задается правилом $\varphi \to r\varphi$. Специфика случая $l \neq 0$ проявляется в том, что при $l \geqslant 1$ оператор Δ_l' самосопряжен в существенном на множестве $C_0^\infty(R_+)$ [34], т. е. имеет единственное самосопряженное расширение в $L_2(R_+, dr)$, равное оператору Δ_l'. Однако в подобных случаях возможны нетривиальные расширения в пространстве с индефинитной метрикой, как это было впервые отмечено в [35] на примере модели Ли.

Для получения таких расширений, отвечающих δ-потенциалу в p-состоянии, необходимо видоизменить общую схему построения сингулярных потенциалов. Первый этап — выбор исходного пространства функций Ψ; для данной задачи это делается следующим образом. Пусть $\psi(x)$ — гладкая при $x \neq 0$, быстро убывающая на бесконечности функция. Ее разложение по сферическим гармоникам имеет вид

$$\psi(x) = \sum C_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n})\, r^l \psi_l(r). \tag{94}$$

Далее предполагается, что функции $\psi_l(r)$ при всех $l \neq 1$ — четные, бесконечно дифференцируемые функции r, а при $l = 1$ в некоторой окрестности точки $r = 0$ справедливо представление

$$\psi_1(r) = \psi_s(r) + r^{-3}\psi_a(r), \tag{95}$$

где $\psi_s(r), \psi_a(r) = \varphi(r^2)$ — бесконечно дифференцируемые, четные функции в этой окрестности. Описанное множество выбирается в качестве пространства Ψ. Пусть $\psi = \{C_{lm}, \psi_l\}$, $\chi = \{D_{lm}, \chi_l\}$ — пара функций из Ψ. Согласно правилам построения перенормированного интеграла, описанным в разд. 2, на Ψ задается полуторалинейная форма

$$(\chi, \psi) = \int d\mathbf{x}\chi^+ (\mathbf{x}) \psi (\mathbf{x}) =$$
$$= \sum_l \left(\sum_m D^*_{lm} C_{lm} \right) (4\pi)^{-1} \int d\mathbf{x}\chi_l^+ (r) \psi_l (r) r^{2l}. \quad (96)$$

Интегралы в правой части сделаны трехмерными для упрощения интегрирования по частям. Интеграл $I = \int d\mathbf{x} r^2 \psi_1^\dagger \psi_1$ не является положительно-определенным. Именно это обстоятельство приводит к индефинитности метрики.

Второй этап решения исходной задачи должен состоять в сужении пространства Ψ до нового пространства с дефинитной метрикой. В данном случае, как это уже отмечалось, его провести не удается. На третьем этапе сначала строится гамильтониан H, не выводящий из пространства Ψ. Пусть $\psi \in \Psi$. Тогда в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ справедливо равенство

$$\Delta\psi = \sum_{l \neq 1} \sum_m C_{lm} \Delta [Y_{lm} (n) r^l \psi_l] +$$
$$+ \sum_m C_{1m} \Delta [Y_{1m} (\mathbf{n}) r\psi_s] + \sum_m C_{1m} \Delta [Y_{1m} (\mathbf{n}) r^{-2} \psi_a]. \quad (97)$$

Только последнее слагаемое в этом равенстве содержит члены, не входящие в ψ. Действие лапласиана в последнем слагаемом в соответствии с правилами алгебры разд. 2 задается формулой

$$\Delta (\mathbf{x} r^{-3} \psi_a) = \Delta (\mathbf{x} r^{-3} \varphi_a (r^2)) = \mathbf{x} r^{-3} [\Delta\varphi_a (r^2) - 8\varphi_a'] + 4\pi \nabla (\delta (\mathbf{x}) \varphi_a).$$

Теперь нетрудно записать не выводящий из Ψ гамильтониан:

$$H\psi = - \Delta\psi + 4\pi C\nabla [\delta (\mathbf{x}) \psi_a], \quad (98)$$

где $\mathbf{Cn} = \sum_m C_{1m} Y_{1m} (\mathbf{n})$.

Наконец, пространство Ψ нужно сузить в соответствии с требованием $\mathrm{Im} (\psi, H\psi) = 0$, которое с помощью формулы (98) приводится к виду $\psi_s^* (0) \psi_a (0) = \psi_a^* (0) \psi_s (0)$. Последнее равенство будет выполняться, если на функции из Ψ наложить дополнительное условие

$$\psi_a (0) = - 3\alpha\psi_s (0), \quad (99)$$

где α — произвольное вещественное число. Каждому значению α соответствует множество $\Psi_H \subset \Psi$, на котором оператор H является симметрическим.

Решая непосредственно уравнение Шредингера с граничным условием (99) для состояний с $l = 1$ и $E = k^2$, можно получить радиальные собственные функции $\psi = \psi_{1k}(r)$:

$$\psi_{1k} (r) = (kr)^{-3/2} [\cos \delta_k J_{3/2} (kr) - \sin \delta_k J_{-3/2} (kr)], \quad (100)$$

где $J_\nu(\mathbf{x})$ — функция Бесселя, а фаза p-рассеяния связана с константой α соотношением $\alpha k^3 \operatorname{ctg} \delta_k = -1$. Полное сечение в этом случае равно

$$\sigma = 4\pi k^2\alpha^2/(1 + k^6\alpha^2). \tag{101}$$

При $\alpha < 0$ существует одно связанное состояние с энергией $E = -\varkappa^2$, для которого $\alpha\varkappa^3 = -1$, а радиальная собственная функция $\psi_1(r) = \psi_{1\varkappa}(r)$ выражается формулой

$$\psi_{1\varkappa}(r) = \left(\varkappa^{5/2}/\sqrt{3\pi}\right)(\varkappa r)^{-3/2} K_{3/2}(\varkappa r), \tag{102}$$

где $K_{3/2}(\varkappa r)$ — функция Макдональда. При $\alpha > 0$ оказывается, что метрика на подпространстве, порождаемом полным набором собственных функций (100), положительно определена [7]. При $\alpha < 0$ для функций непрерывного спектра также имеет место положительность метрики. Однако для связанного состояния это уже не так. Прямое вычисление с использованием перенормировочной процедуры дает $I = \int d\mathbf{x} r^2 \psi_{1\varkappa}^* \psi_{1\varkappa} = -1$. Итак, связанное состояние имеет отрицательную норму и физически неприемлемо. Поэтому в рассматриваемом случае пространство Ψ_{H_2} следует сузить до пространства Ψ_{H_3}, порождаемого векторами $\psi(x) + \psi_{1\varkappa}(\mathbf{x})(\psi_{1\varkappa}, \psi)$, ортогональными $\psi_{1\varkappa}$, и тем самым имеющего дефинитную метрику. Физически это означает, по-видимому, что при $l = 1$ в приближении длины рассеяния связанное состояние не может существовать. Возможно, что связанные состояния с положительной нормой будут существовать при учете эффективного радиуса, т.е. при добавлении к потенциалу более сингулярных слагаемых.

Следующий пример обобщает пример 2 на случай включения внешнего электромагнитного поля и демонстрирует общий метод разд. 4, когда взаимодействие зависит от угловых переменных.

П р и м е р 4. Взаимодействие заряженной частицы с внешним электромагнитным полем при наличии сильно сингулярного потенциала.

В дальнейшем потенциалы электромагнитного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $A_0(\mathbf{x})$ считаются гладкими функциями координат, не зависящими явно от времени. Полагается $c = h = 2m = 1$. На первом этапе выбирается пространство Ψ, состоящее из элементов вида

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi_f(\mathbf{x}) + \delta_A(\mathbf{x})\psi_1 \tag{103}$$

таких, что $\psi_f(\mathbf{x})$ — квадратично-интегрируемые функции, гладкие всюду, кроме нуля; ψ_1 — комплексные числа; $\delta_A(\mathbf{x}) = [1 + ie\mathbf{x}\mathbf{A}(0)]\,\delta(\mathbf{x})$. В окрестности начала координат функции $\psi_f(\mathbf{x})$ допускают представление

$$\psi_f(\mathbf{x}) = r^{-1}\psi_a(\mathbf{n}) + \psi_s(\mathbf{n}) + r\psi_r(\mathbf{x}), \tag{104}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$; $\psi_a(\mathbf{n})$, $\psi_s(\mathbf{n})$, $\psi_r(\mathbf{x})$ — достаточно гладкие функции на сфере и в R_3 соответственно. Полуторалинейная форма на Ψ определяется аналогично форме (84):

$$(\chi, \psi) = \int d\mathbf{x}\chi_f^* \psi_f + (\chi_f, \delta_A)\,\psi_1 + \chi_1^*\,(\delta_A, \psi). \tag{105}$$

Для полного ее определения достаточно задать (. , .) на элементах δ и ψ_f. По определению

$$(\psi_f, \delta) = (4\pi)^{-1} \int d\Omega \psi_s(\mathbf{n}) = [\psi_s(\mathbf{n})]_0.$$

Тогда форма (105) принимает вид

$$(\chi, \psi) = \int d\mathbf{x}\chi_f^* \psi_f + [\chi_A]_0^* \psi_1 + \chi_1^*\,[\psi_A]_0, \tag{106}$$

где $\psi_A(\mathbf{n}) = \psi_s(\mathbf{n}) - ie\mathbf{n}\mathbf{A}(0)\,\psi_a(\mathbf{n})$. Такая форма не является положительно-определенной.

На втором этапе осуществляется переход к пространству $\Psi_+ \subset \Psi$ с положительно-определенной формой:

$$\Psi_+ = \{\psi \in \Psi \mid \psi_1 = g[\psi_A(\mathbf{n})]_0,\ g > 0\}.$$

Форма (.,.) задает на пространстве Ψ_f скалярное произведение, пополнение по которому приводит к гильбертову пространству $\mathscr{H}$.

Третий этап — построение гамильтониана для поставленной задачи. Пусть $D \subset \Psi_+$ — множество элементов, для которых

$$\psi_a(\mathbf{n}) = \psi_a,\quad \psi_s(\mathbf{n}) = \psi_s + ie\mathbf{n}\mathbf{A}(0)\,\psi_a.$$

В частности, для этих элементов $\psi_1 = g\psi_s$. Пусть, кроме того, $\Delta_A = (-i\nabla - e\mathbf{A}(x))^2$. Характеристическое свойство области D состоит в следующем: если $\psi \in D$, то для функции $[\Delta_A\psi]_f$ имеет место представление (104). На элементах из D определен оператор H^A, задаваемый формулой

$$H^A\psi = \{[-\Delta_A + eA_0(\mathbf{x})]\}_f + g\delta_A(\mathbf{x}) \times \\ \times \{[-\Delta_A\psi + eA_0(\mathbf{x})\,\psi]_A\}_0. \tag{107}$$

Оператор H^A не является симметрическим на D. Нужное подмножество выделяется условием $\operatorname{Im}(\psi, H\psi) = 0$, которое разрешается в явном виде при наложении граничных условий

$$\psi_a = \alpha\psi_s - g\,(2\pi)^{-1}\{[\Delta_A\psi]_A\}_0,\ \alpha^* = \alpha. \tag{108}$$

Эти условия задают плотное в D подмножество $D_\alpha \subset D$, на котором оператор H^A симметричен. Замыкание оператора H^A с областью определения D_α в пространстве $\mathscr{H}$ дает гамильтониан рассматриваемой системы. Следует отметить, что стационарное уравнение Шредингера $(H - E)\,\psi = 0$ инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\left.\begin{aligned} &A_i \to A_i + \nabla_i\chi; \\ &\psi \to \psi' = \psi\exp(ie\chi), \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

где $\chi(\mathbf{x})$ — произвольная гладкая функция. В самом деле, при таких преобразованиях выполняются соотношения

$$\psi_s \to \psi_s \exp[ie\chi(0)],\ \psi_a \to \psi_a \exp(ie\chi(0)),$$
$$\{[\Delta_A\psi]_A\}_0 \to \{[\Delta_A\psi]_A\}_0 \exp[ie\chi(0)],$$

из которых легко убедиться в инвариантности граничных условий и уравнения Шредингера.

Построенная модель дает возможность находить поправки к решениям для модели из примера 2, обусловленные электромагнитным полем. Для этого надо определить гамильтониан взаимодействия V с внешним полем, поскольку пока в пространстве Ψ_+ определен лишь полный гамильтониан H^A. Прежде чем дать определение оператора V, необходимо отметить следующее обстоятельство. Оператор H из примера 2 и оператор H^A нужно привести к одной области определения. Подвергнем оператор H с областью определения Ψ_H унитарному преобразованию, которое задается как оператор умножения на функцию $\exp\left[ie\int\limits_0^1 ds\, \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}, s)\right]$, после чего H перейдет в некоторый оператор H^0. Область определения оператора H^0 задается подобно области определения D_α оператора H^α с заменой $A(x)$ на $\nabla\left[\int ds\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}s)\right]$. При помощи формулы [36]

$$A(\mathbf{x}) = \nabla\left[\int\limits_0^1 ds\,\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}s)\right] - \left[\mathbf{x}, \int\limits_0^1 s\,ds\mathbf{B}(\mathbf{x}s)\right], \tag{110}$$

где $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\, A$, нетрудно показать, что такая замена не меняет зависящего от A числа $\{[\Delta_A\psi]_A\}_0$, входящего в граничные условия. Таким образом, области определения операторов H^0 и H^A совпадают. Явный вид H^0 получается при замене в формуле (107) потенциала $A(x)$ на $\nabla\left[\int ds\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}s)\right]$, а потенциала $A_0(\mathbf{x})$ — на $A_0(0)$. Последняя замена означает приведение спектров операторов H^0 и H^A к одному началу отсчета. Можно подвергнуть указанному преобразованию гамильтониан H^A, не преобразуя гамильтониан без внешнего поля. При этом происходит переход к беспотенциальной формулировке задачи, в которой взаимодействие с магнитным полем нелокально. Такая формулировка электродинамики рассматривалась в [36]. Теперь можно определить гамильтониан взаимодействия с внешним полем как $V = H^A - H^0$ и в физически оправданных случаях применять теорию возмущений. В качестве примера в [8] найдены поправки первого порядка к энергиям связанных состояний частицы, движущейся в поле сильно сингулярного потенциала, обусловленные внешним однородным магнитным полем: $A_0 = 0$, $A = -\frac{1}{2}[\mathbf{x}, \mathbf{B}]$. Оператор V достаточно рассматривать лишь на сферически-симметричных векторах. В этом случае $V = (e^2B^2/4)\, r^2 \sin\theta$, $\mathbf{x}\,\mathbf{B} = r\,B\cos\theta$.

Нормированное решение уравнения $H^0\psi = -\varkappa^2\psi$ имеет вид

$$\psi_{\text{св}} = [\varkappa/2\,(\pi + g\varkappa^3)]^{1/2}\,[r^{-1}\exp(-\varkappa r) - g\varkappa\delta(\varkappa)],$$

где $\varkappa = \varkappa(\alpha, g)$ определяется из уравнения (93). Первая поправка к уровню $-\varkappa^2$ дается выражением

$$E^{(1)} = \int d\mathbf{x}\psi^+_{\text{св}} V \psi_{\text{св}} = \frac{\pi e^2 B^2}{12\varkappa^2(\pi + g\varkappa^3)}. \tag{111}$$

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СВОБОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА С СИЛЬНО СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Примечательной особенностью рассмотренных моделей, отвечающих сингулярным сосредоточенным потенциалам является то, что для них можно построить представление, в котором исходное уравнение Шредингера сводится к свободному. Преобразование к такому представлению не задается каким-либо ядром. Однако обратное к нему обладает ядром и имеет простую форму. Последнее обстоятельство позволяет получать решения исходных уравнений с сингулярными потенциалами из решений для свободных уравнений и может оказаться полезным в ряде задач.

Пусть H — гамильтониан (85) с областью определения Ψ^0_H, характеризующий модель из примера 2 разд. 5. Оператор H, действуя на векторы из Ψ^0_H, вообще говоря, выводит их из этого пространства. Пусть $\Psi_{H_1} \subset \Psi^0_H$ — подпространство, из которого H не выводит: $H\psi \in \Psi_{H_1}$, если $\psi \in \Psi_{H_1}$. Отсюда вытекает, что условие (88) должно выполняться для элементов $H^n\psi$ при любом целом положительном n. Для получения нужных условий удобно ввести усреднение по углам

$$\psi_0(\mathbf{x}) = (4\pi)^{-1}\int d\Omega\psi_f(\mathbf{x}).$$

Тогда в некоторой окрестности начала координат справедливо представление

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0(\mathbf{x}) = \psi_{s0}(\mathbf{x}) + r^{-1}\psi_a(\mathbf{x}); \\ &\psi_{s0}(\mathbf{x}) = \psi_{s0}(r), \quad \psi_a(\mathbf{x}) = \psi_a(r), \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

где $\psi_{s0}(r)$, $\psi_a(r)$ — бесконечно дифференцируемые функции. Параметризуя гамильтониан H величинами g, α, условие (88) можно переписать в виде

$$[\psi_a(r)]_{r=0} = [\alpha\{r\psi_{s0}(r)\}' - (2\pi)^{-1}g\{r\psi_{s0}(r)\}'']_{r=0} \tag{113}$$

(штрих означает дифференцирование по r). Поскольку радиальная часть оператора Лапласа равна $r^{-1}\partial_r r$, под действием гамильтониана H функция ψ_a переходит в ψ''_a, а функция $\{r\psi_{s0}(r)\}$ — в $\{r\psi_{s0}(r)\}''$. Отсюда полная система условий, наложенных на функции пространства Ψ_{H_1}, будет иметь вид

$$[\psi_a^{(2n)}]_{r=0} = [\alpha\{r\psi_{s0}\}^{(2n+1)} - (2\pi)^{-1}g\{r\psi_{s0}(r)\}^{(2n+3)}]_{r=0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{114}$$

Коэффициенты $[\psi_a^{(2n)}(r)]_{r=0}$ и $[\{r\psi_{s0}\}^{(2n+1)}]_{r=0}$ выражаются через $\psi(\mathbf{x})$ посредством перенормированных интегралов

$$[\{r\psi_{s0}\}^{(2n+1)}]_{r=0} = \int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x})\,r^{-1}(\mathbf{x}\nabla)\,r\Delta^n\psi;$$

$$[\psi_a^{(2n)}]_{r=0} = \int d\mathbf{x}\delta(\mathbf{x})\,r\Delta^n\psi.$$

Множество Ψ_{H_1} содержит надлежащие интегралы (и суммы при наличии связанных состояний) по собственным функциям оператора H и тем самым плотно в пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть теперь $\Psi_{H_2} \subset \Psi_{H_1}$ — подмножество элементов, для которых ψ_s и ψ_a — целые функции. Тогда можно просуммировать ряды Тейлора с коэффициентами из левой и правой частей соотношения (114), что приведет к явному выражению $\psi_a(r)$ через $\psi_{s0}(r)$ во всем пространстве:

$$\psi_a(r) = \alpha\,\{r\psi_{s0}(r)\}' - (2\pi)^{-1}g\,\{r\psi_{s0}(r)\}''. \tag{115}$$

Для функций $\psi_a(x)$, $\psi_{s0}(\mathbf{x})$ то же самое выражение перепишется в виде

$$\psi_a(\mathbf{x}) = \alpha\,(1+\mathbf{x}\nabla)\,\psi_{s0}(\mathbf{x}) - (2\pi)^{-1}\,g\,(1+\mathbf{x}\nabla)\,\Delta\psi_{s0}(\mathbf{x}). \tag{116}$$

С помощью соотношений (115) функции $\psi(\mathbf{x})$ можно однозначно выразить через $\psi_s(\mathbf{x})$. Действительно, для волн с $l \neq 0$ имеют место равенства $\psi_l(r) = \psi_{sl}(r)$, а для волн с $l = 0$ искомое выражение получается с помощью формул (112), (113). В Ψ_{H_2} возможно и обратное преобразование. Для волн с $l \neq 0$ $\psi_{sl} = \psi_l(r)$. Для волн с $l = 0$ коэффициенты $[\psi_{s0}^{(2n)}(r)]_{r=0}$ сначала выражаются через ψ посредством перенормированного интеграла (см. разд. 2)

$$[\psi_{s0}^{(2n)}]_{r=0} = \int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x})\,r\Delta^n(r^{-1}\psi). \tag{117}$$

После этого функция $\psi_{s0}(r)$ получается суммированием ряда Тейлора

$$\psi_{s0}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}\,[\psi_{s0}^{(2n)}(r)]_{r=0}/(2n)! \tag{118}$$

Соотношения (117) и (118) дают решение задачи о построении функции ψ_{s0} по ψ, т. е. о переходе от $\psi(\mathbf{x})$ к $\psi_s(\mathbf{x})$ для волн с $l = 0$. Пусть Ψ_{Hs} — множество функций $\psi_s(\mathbf{x})$. Скалярное произведение (84) индуцирует скалярное произведение в Ψ_{H_s}

$$(\chi_s, \psi_s) = \int d\mathbf{x}\chi_f^*\psi_f + 2g\chi_s^*(0)\,\psi_s(0), \tag{119}$$

где подразумевается, что функции χ_f и ψ_f выражены через χ_s, ψ_s. Формулировка исходной задачи, выраженная в пространстве Ψ_{H_s}, и будет называться представлением свободных решений.

Свойство 1. Переход от Ψ_{H_s} к Ψ_{H_s} осуществляется с помощью преобразования, включающего аналитическое продолжение из некоторой окрестности начала координат на все пространство. В частности, для осуществления перехода достаточно иметь функцию ψ, заданную в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$. Если же функция задана всюду, кроме какой-либо окрестности начала координат, то для осуществления перехода к ψ_s необходимо еще аналитическое продолжение ψ. Тем самым становится ясно, что преобразование от Ψ_{H_s} к Ψ_{H_s} не обладает ядром.

Свойство 2. В представлении свободных решений гамильтониан H становится свободным:

$$H\psi_s = -\Delta\psi_s. \tag{120}$$

Это очевидно уже из бесконечной дифференцируемости функций и легко устанавливается непосредственно. Важность свойства 2 подчеркивается названием представления Ψ_{H_S}.

Свойство 3. Если для гамильтониана H существуют связанные состояния, то функции $\psi_s(\mathbf{x})$, описывающие эти состояния, имеют экспоненциальный рост на бесконечности (при конечности нормы). Это свойство следует из вида решений для связанного состояния и будет продемонстрировано ниже.

Из существования перехода от Ψ_{H_S} к Ψ_{H_s} и из свойства 2 следует, что решение исходного уравнения Шредингера

$$\mathrm{i}\partial_t\psi = H\psi \tag{121}$$

с гамильтонианом (86), описывающим нетривиальное сильно сингулярное взаимодействие, сводится к решению свободного уравнения. Согласно свойству 3 для получения полного решения необходимо проследить за тем, чтобы не были пропущены экспоненциально растущие решения, соответствующие связанным состояниям. Полное решение уравнения (121) методом перехода к представлению свободных решений получается следующим образом. В соответствии с формулами (114), (120) каждому свободному решению $\exp\{-\mathrm{i}\omega_k t + \mathrm{i}\mathbf{kx}\}, \omega_k = k^2$ будет соответствовать решение $\exp(-\mathrm{i}\omega_k t)\,\psi_k(\mathbf{x})$ уравнения (121), где

$$\psi_k(\mathbf{x}) = \exp(\mathrm{i}\mathbf{kx}) + r^{-1}[\alpha + (2\pi)^{-1}gk^2]\cos kr + \\ + g\delta(\mathbf{x}),\ k = |\mathbf{k}|. \tag{122}$$

Полное решение уравнения (121) имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{k}\, \exp(-\mathrm{i}\omega_k t)\,\psi_k(\mathbf{x})\,b(\mathbf{k}) + \\ + \sum_j b_j\psi_j(\mathbf{x})\exp(-\mathrm{i}E_j t), \tag{123}$$

где $b(\mathbf{k})$ — произвольная функция из некоторого пространства, вид которого при необходимости можно уточнить; b_j — комплексные числа; $\psi_j(\mathbf{x})$ — функции связанных состояний; j — индекс, нумерующий связанные состояния. Следует отметить два свойства общего решения (123), существенные тем, что они сохраняются при обобщениях.

Свойство 4. Из вида гамильтониана (120) нельзя еще получить полную информацию о функциях связанных состояний. Можно лишь сказать, что функции связанных состояний соответствуют свободным решениям ψ_{sj} вида

$$\psi_{sj}(\mathbf{x}) = (\varkappa_j r)^{-1}\,\mathrm{sh}\,(\varkappa_j r),\ E_j = -\varkappa_j^2. \tag{124}$$

Для получения количества связанных состояний и значений их энергий необходимо еще использовать требование конечности нормы, порождаемой формой (119).

Свойство 5. Для полного решения задачи Коши следует выразить $b(\mathbf{k})$, b_j через $\psi(\mathbf{x}, 0)$.

Для получения фаз рассеяния и энергий связанных состояний осуществляется переход к импульсному представлению для $\psi_k(\mathbf{x})$ и выделение волны $\psi_{0k}(\mathbf{p})$ с $l = 0$:

$$\psi_{0k}(\mathbf{p}) = (4\pi)^{-1}\int d\Omega_p\,(2\pi)^{-3}\int d\mathbf{x}\exp(-\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x})\,\psi_k(\mathbf{x}).$$

Результат вычислений можно представить в виде

$$\psi_{0k}(\mathbf{p}) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi^2 k}\left[\frac{1-(2\pi)^{-1}\,\mathrm{i}k\,(2\pi\alpha+gk^2)}{k^2-p^2+\mathrm{i}0} - \frac{1-(2\pi)^{-1}\,\mathrm{i}k\,(2\pi\alpha+gk^2)}{p^2-k^2+\mathrm{i}0}\right], \tag{125}$$

удобном для получения in и out пределов:

$$\psi_k\begin{pmatrix}\mathrm{in}\\ \mathrm{out}\end{pmatrix}(p) = \lim_{t\to\mp\infty}\exp[-\mathrm{i}(k^2-p^2)\,t]\,\psi_{0k}(p).$$

Каждое слагаемое в фигурных скобках в формуле (125) дает вклад только в один из пределов

$$\psi_k\begin{pmatrix}\mathrm{in}\\ \mathrm{out}\end{pmatrix}(p) = -(2\pi k)^{-1}\,\delta(p^2-k^2)\,[1\mp(2\pi)^{-1}\,\mathrm{i}k\,(2\pi\alpha+gk^2)]. \tag{126}$$

Отсюда следует, что фаза рассеяния δ_k определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\,\delta_k = (2\pi)^{-1}\,k\,(2\pi\alpha+gk^2).$$

Правые части в формулах (125), (126) не содержат полюсов, отвечающих связанным состояниям. Однако полюсы должна содержать S-матрица $S(k) = (1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\delta_k)/(1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\delta_k)$. Поэтому функция $\psi_{k\,\mathrm{out}}(p)$ должна иметь нули по переменной $\varkappa$, где $k = \mathrm{i}\varkappa$, в точках связанных состояний. Эти нули соответствуют реальным связанным состояниям при действительных $\varkappa > 0$ и полюсам S в нефизической области — в остальных случаях. При этом связанные состояния описываются уравнением (93).

В рассмотренном случае переход к представлению свободных решений не только дает общее решение (123), но и позволяет получить решения задач о рассеянии и о связанных состояниях. Нетрудно показать, что то же получается и для одномерных сингулярных и сильно сингулярных потенциалов, рассмотренных в разд. 4. Малосущественное различие состоит в том, что функции ψ_s и ψ_a выражаются соотношениями типа (116) через новую функцию, которая удовлетворяет свободному уравнению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При создании работ [1—9] Ю. М. Широков имел в виду задачу построения подходящих алгебр обобщенных функций для применения в квантовой теории поля. Сохранилось лишь несколько записей, посвященных этой задаче, которая казалась ему, по-видимому, еще преждевременной. Более близкими задачами были следующие [3, 5]: 1) построение новых одномерных и многомерных алгебр, содержащих δ, r^k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а также обобщенные функции других типов, например x^k, многомерные аналоги функционала η (см. разд. 3); 2) задача классификации физически неэквивалентных моделей с δ-образными потенциалами и связь метода ассоциативных алгебр обобщенных функций с методами теории расширений симметрических операторов; 3) построение N-частичных моделей с парными δ-образными потенциалами. Указанные задачи послужили предметом ряда исследований учеников Ю. М. Широкова. Так, в [37, 38] построена ассоциативно-коммутативная алгебра, порожденная элементами типа δ, x^k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, дана классификация дифференциальных колец, содержащих $\delta(x)$, r^k, $x \in R^n$, $n = 1, 2, \ldots$, и для нечетномерных R^n построены алгебры, включающие эти элементы. Алгебра, содержащая функционалы δ и r^k в случае произвольной размерности $d = 2, 3, \ldots$, построена в работе [39]. В [40] построена корректная модель с полуограниченным гамильтонианом в некотором гильбертовом пространстве, отличном от L_2, для системы трех частиц с δ-образными потенциалами. Дальнейшее применение в случае сингулярных нецентральных взаимодействий частиц со спином 1/2 метод Ю. М. Широкова [1—9] получил в [41].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Широков Ю. М.**— ТМФ, 1979, т. 39, с. 291.
2. **Широков Ю. М.**— ТМФ, 1979, т. 40, с. 348.
3. **Широков Ю. М.**— ТМФ, 1979, т. 41, с. 291.
4. **Широков Ю. М.**— ТМФ, 1980, т. 42, с. 45.
5. **Широков Ю. М.**— ТМФ, 1981, т. 46, с. 291.
6. **Толоконников Г. К., Широков Ю. М.**— ТМФ, 1981, т. 46, с. 305.
7. **Цирова И. С., Широков Ю. М.**— ТМФ, 1981, т. 46, с. 310.
8. **Талалов С. В., Широков Ю. М.**— ТМФ, 1981, т. 46, с. 316.
9. **Горяга О. Г., Широков Ю. М.**— ТМФ, 1981, т. 46, с. 321.

10. **Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.**— Докл. АН СССР, 1961, т. 137, с. 1011.
11. **Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д.**— Докл. АН СССР, 1961, т. 141, с. 1335.
12. **Скорняков Г. В., Тер-Мартиросян К. А.**— ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 775; **Данилов Г. С.**— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 498.
13. **Березин Ф. А., Похил Г. П., Финкельберг В. М.**— Вест. МГУ. Сер. мат., мех., 1964, № 1, с. 21.
14. **Albeverio S., Høegh-Krohn R., Streit L.**— J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 907.
15. **Albeverio S., Høegh-Krohn R., Streit L.**— J. Math. Phys., 1977, v. 21, p. 1636.
16. **Grossmann A., Høegh-Krohn R., Mebhout M.**— J. Math. Phys., 1980, v. 21, p. 2376.
17. **Albeverio S., Høegh-Krohn R., Fenstadt J. E.**— Trans. Amer. Soc., 1979, v. 252, p. 275.
18. **Hughes R. J., Segal I. E.**— J. Funct. Analysis, 1980, v. 38, p. 71.
19. **Schwartz L.**— Compt. rend. Acad. sci., 1954, v. 239, p. 847.
20. **Fisher B.**— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1972, v. 71, p. 123; Math. Ann., 1973, v. 203, p. 103.
21. **Gonzalez-Dominguez A., Scarfiello R.**— Rev. Union Math. Argent 1956, v. 1, p. 53.
22. **Mikusinski J.**— Stud. Math., 1962, v. 21, p. 253; Bull. Acad. Polon. Sci., 1966, v. 19, p. 511.
23. **Itano M.**— J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 1966, v. 30, p. 151.
24. **Иванов В. К.**— Докл. АН СССР, 1972, т. 204, с. 1045.
25. **Li Bang-He.**— Sci. sinica, 1978, v. 21, p. 561.
26. **Христов Хр., Дамянов Б.**— Болг. физ. ж., 1978, V, кн. 6, с. 543.
27. **Keller K.**— Math. Ann., 1978, v. 236, p. 1, 49.
28. **Иванов В. К.** — Докл. АН СССР, 1977, т. 237, с. 779.
29. **Коршунов М. К.**— Изв. вузов. Сер. мат., 1980, т. 10, с. 15.
30. **Вержбалович Т. А.**— Изв. вузов. Сер. мат., 1980, т. 6, с. 3.
31. **Berg L.**— Z. Angew. J. Math. Mech., 1976, Bd 56, S. 177.
32. **Kato T.**— J. Funct. Analysis, 1967, v. 1, p. 342.
33. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм и произведений. М.: Наука, 1971.
34. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 2: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
35. **Березин Ф. А.**— Матем. сб., 1963, т. 60(102), с. 425.
36. **Широков М. И.** Препринт ОИЯИ Р4-12632. Дубна, 1980.
37. **Толоконников Г. К.**— ТМФ, 1982, т. 51, с. 366.
38. **Толоконников Г. К.**— ТМФ, 1982, т. 53, с. 16.
39. **Смирнов В. А.**— ТМФ, 1982, т. 52, с. 327.
40. **Шондин Ю. Г.**— ТМФ, 1982, т. 51, с. 181.
41. **Цирова И. С.**— ТМФ, 1982, т. 51, с. 376.