«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1985,
ТОМ 16, ВЫП. 1

УДК 519.4

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ И ДВУМЕРНЫЕ КВАНТОВО-ПОЛЕВЫЕ СИСТЕМЫ

А. Н. Лезнов, М. В. Савельев
Институт физики высоких энергий, Серпухов

И. А. Федосеев
Всесоюзный научно-исследовательский центр по изучению свойств поверхности и вакуума, Москва

Обзор посвящен конструктивному исследованию точно интегрируемых одно- и двумерных квантовых систем, обладающих нетривиальной группой внутренней симметрии.

The review is devoted to a constructive investigation of one- and two-dimensional exactly integrable quantum systems possessing a nontrivial internal symmetry group.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий обзор посвящен точно интегрируемым квантовым системам, обладающим нетривиальной динамической группой внутренних симметрий, в пространстве одного и двух измерений. В одномерном случае это — многочастичные квантовомеханические системы, взаимодействие между отдельными «частицами» в которых осуществляется потенциалами определенного типа; для двумерного пространства это квантово-полевые модели (см., например, [1—5]). Одно- и двумерные уравнения такого типа как в квантовой, так и в классической областях имеют непосредственное отношение к конкретным задачам теоретической и математической физики. В частности, они описывают физические явления в реальном трех- или четырехмерном пространстве при определенных дополнительных условиях инвариантности, таких, как сферическая симметрия стационарных решений (одномерная задача) и цилиндрическая симметрия (двумерный случай). Помимо этого, двумерные модели связаны с пространствами больших размерностей в тех случаях, когда описываемые объекты в них двумерны по своей природе. Например, в [6] изучение динамики квантовой релятивистской струны в пространстве произвольного числа измерений сведено к квантованию двумерного уравнения Лиувилля в бозонном и его суперсимметричного обобщения в фермионном случаях.

Исследование одно- и двумерных динамических систем, допускающих полное интегрирование, важно не только в модельном отношении, но и для решения конкретных задач в пространствах бо́льших размерностей или с дополнительной симметрией определенного типа. Наиболее, пожалуй, интересна возможность развития этих методов для нахождения критериев полной интегрируемости на групповой или более общей основе, в первую очередь в реальном четырехмерном случае.

Для всех без исключения точно интегрируемых систем аппарат теории представлений алгебр и групп Ли играет существенную роль. Однако лишь в последние годы удалось осмыслить важность таких воззрений и сформулировать их в конструктивном виде. Конкретная связь точно интегрируемых нелинейных динамических систем с теорией представлений была установлена и эффективно использована для интегрирования таких систем также сравнительно недавно [7—11]. Идея применения теории групп для этой цели принадлежит Софусу Ли, который предвосхитил определяющее значение групповых методов как мощного средства интегрирования дифференциальных (в особенности нелинейных) уравнений. Согласно его концепции, группы преобразований дифференциальных уравнений играют ту же роль, что и группы Галуа для алгебраических уравнений.

Критерий полной интегрируемости динамических систем с r степенями свободы, заключающийся в требовании существования r функционально независимых глобальных интегралов в инволюции, сформулировал Лиувилль еще в прошлом веке. Однако даже для одномерного случая знание вида таких интегралов не всегда позволяет аналитически проинтегрировать соответствующую систему, т. е. определить ее эволюцию по начальным данным для произвольного момента времени. Аналогичное утверждение справедливо и для двумерного случая: задача Коши часто не имеет явного решения, тогда как явные выражения для динамических переменных системы можно получить в терминах асимптотических полей — ее динамических характеристик в бесконечно «прошлом» или «будущем». Сказанное требует некоторого пояснения. Представим гамильтониан $\hat{H}$ (нелинейной) динамической системы как сумму «кинетического» члена (свободного гамильтониана $\hat{H}_0$) и нелинейной части $\lambda\hat{H}_{\mathrm{I}}$, отвечающей взаимодействию с постоянной λ. Выражения для гейзенберговых операторов поля квантовой задачи с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}_{\mathrm{I}}$ ищут в вид функционалов операторов свободного поля, связанных с невозмущенной частью гамильтониана $\hat{H}_0$. Оказывается, что для точно интегрируемых систем эта функциональная зависимость для определенных динамических величин приводит к конечным полиномам по постоянной взаимодействия λ. Аналогичное рассмотрение в классической области можно связать с результатами, полученными в конце прошлого века Бэклундом, изучившим целый ряд нелинейных уравнений (систем) с помощью (канонического) преобразования, приводящего их к линейному виду. В то же время с точки зрения теории групп их можно интерпретировать с помощью операции сжатия Инони — Вигнера. При этом групповая (алгебраическая) деформация влечет за собой изменение «постоянной» λ и в пределе $\lambda \to 0$ приводит к системе, описываемой гамильтонианом H_0. (Соответствующие гейзенберговы операторы являются *in*-полями для исходной нелинейной системы.) Поскольку операция несингулярного сжатия сохраняет алгебраическую структуру, то в терминах интегралов движения это означает, что они как раз являются интегралами таких деформаций. Поэтому при достаточном их количестве удается провести полное интегрирование соответствующей динамической системы и построить ее решения с помощью аппарата теории (групп) алгебр Ли и их представлений. При таком рассмотрении нулевым значениям постоянных взаимодействия систем отвечают более «плоские» (распрямленные) группы. Например, известное уравнение Лиувилля $\partial^2 x/\partial z_+ \partial z_- = \lambda \exp 2x$ описывается в терминах группы $SL(2, \mathbb{R})$ $(\lambda \neq 0)$, тогда как связанное с ним линейное уравнение Лапласа $\partial^2 x/\partial z_+ \partial z_- = 0$, решения которого играют роль асимптотических полей, связано с группой движений плоскости. Последняя может быть получена из $SL(2, \mathbb{R})$ при бесконечном увеличении радиуса сферы и из рассмотрения группы движений в окрестности одного из ее полюсов, эквивалентных двумерной плоскости.

Отмеченная выше групповая основа связи гейзенберговых полей точно интегрируемых моделей с их асимптотическими значениями позволяет применить к ним прекрасно разработанный формализм квантовой теории поля (см., например, [12, 13]), согласно которому асимптотические поля связаны с гейзенберговым унитарным преобразованием *, реализуемым оператором $\hat{S}(-\infty, t)$. Половинная $\hat{S}$-матрица определяется рядом теории возмущений по постоянной взаимодействия λ и приводит к явным (конечным) выражениям для динамических параметров определенного вида. В точно интегрируемых моделях они представимы конечными рядами по λ. Аналогичное положение имеет место и в классической области, где роль унитарной $\hat{S}$-матрицы выполняет функция S, осуществляющая соответствующее каноническое преобразование. Таким образом, преобразование Бэклунда приобретает смысл канонического отображения для классических систем, тогда как на квантовом уровне его аналогом является унитарное $\hat{S}$-матричное преобразование. Подчеркнем, что данное утверждение применимо как к одномерным, так и к двумерным моделям. Вместе с тем следует отметить, что если гейзенберговы операторы, в частности одномерной цепочки Тода, можно непосредственно записать в терминах теории представлений групп, то квантово-

* Напомним, что в одно- и двумерных случаях тривиализации соответствующих моделей, обусловленной известной теоремой Хаага, не происходит. Поэтому половинная S-матрица имеет смысл и может быть построена.

полевые операторы соответствующих двумеризованных систем выражаются через величины, смысл которых с этой точки зрения не вполне ясен. Еще более существенные отличия возникают при изучении квантовомеханических и квантово-полевых систем в представлении Шредингера. Если стационарные состояния в одномерном случае можно описать с помощью матричных элементов неприводимых представлений (основной непрерывной серии) естественных вещественных форм соответствующих комплексных полупростых групп Ли, то аналогичные групповые параметры при квантово-полевой трактовке, в частности двумеризованной экспоненциальной модели, пока не найдены.

Исследуемые в настоящем обзоре системы мы называем точно интегрируемыми, имея в виду, что в классическом пределе для них могут быть получены решения, определяемые достаточным для постановки задачи Коши или Гурса запасом произвольных функций [14]. Термин «вполне интегрируемой» системы сохраняется за динамическими системами, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния (см., например, [15—19]). (Квантовый вариант обратной задачи разработан в [20—22]). Подчеркнем, что несмотря на то, что в основе построения решений как точно, так и вполне интегрируемых систем лежит представление типа Лакса, однако применяется оно для них по-разному. Это является отражением того факта, что алгебры внутренних симметрий точно интегрируемых систем конечномерны, тогда как для вполне интегрируемых — они бесконечномерны (конечного роста), но обладают конечномерными представлениями со спектральным параметром. Метод обратной задачи применим в том случае, когда спектральный параметр «нетривиален», т. е. не может быть исключен преобразованием группы внутренней симметрии. Для рассматриваемых же в обзоре систем спектральный параметр тривиален в указанном смысле, и метод обратной задачи к таким системам неприменим. Таким образом, несмотря на внешнюю схожесть, методы получения решений точно и вполне интегрируемых систем существенно разные и взаимно дополняют друг друга.

Отметим, что единый метод построения общих решений для точно и вполне интегрируемых систем (см. [8, 9, 23, 24]), зависящих от нужного числа произвольных функций, заключается в следующем. Для первых решения удается получить в виде конечных полиномов по постоянной взаимодействия, тогда как для вторых они выражаются бесконечными абсолютно сходящимися рядами, что обусловлено их групповыми свойствами. Метод обратной задачи рассеяния позволяет установить в общих решениях для вполне интегрируемых систем зависимость между произвольными функциями, приводящую к состояниям солитонного типа [15].

Для построения явных выражений для гейзенберговых операторов точно интегрируемых одно- и двумерных систем воспользуемся стандартным методом теории возмущений в квантовой области. При этом его применение направлено не на получение каких-либо приближенных результатов, а на нахождение точных решений соответствующих уравнений, т. е. ряды теории возмущений удается просуммировать.

Рассматриваемые квантовомеханические (одномерные) системы исследуются также в представлении Шредингера с целью явного построения их волновых функций. В рамках гамильтонова подхода эта конструкция в картине Шредингера связана с квадратичными операторами Казимира естественных вещественных форм, взятыми между состояниями с определенными наборами квантовых чисел. В классическом случае последнее соответствует наложению определенных начальных условий на некоторый набор динамических переменных, которые остаются фиксированными (нулевыми) согласно уравнениям движения для произвольного момента времени. На основе этого и вводятся векторы Уиттекера [25, 26] и их обобщения в качестве базисных состояний [27]. Система интегралов движения в инволюции совпадает при этом с полным набором взаимокоммутирующих операторов Казимира. Данный подход к изучению точно решаемых одномерных квантовых динамических систем разработан Лаксом, Костантом, Мозером и др. [25, 28—30].

Предлагаемую работу можно рассматривать как продолжение наших обзоров [31, 32], посвященных изложению алгебраического метода построения общих решений для точно и вполне интегрируемых нелинейных динамических систем в классической области. Она основана, главным образом, на результатах [27, 33—36] изучения квантовомеханических и полевых точно интегрируемых систем, которые в последние годы интенсивно исследуются как в физической, так и в математической литературе (см., например, [1—6, 10, 11, 29, 46]).

При написании обзора большую помощь авторам оказали Б. А. Арбузов, А. А. Кириллов, Ю. И. Манин, М. А. Мествиришвили, О. А. Хрусталев и А. Б. Шабат, за это мы приносим им свою сердечную благодарность.

1. ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

В соответствии с алгебраической конструкцией, развитой в работах [9, 23], конечномерные алгебры и супералгебры Ли $\mathfrak{G}$ порождают с помощью представлений типа Лакса в двумерном пространстве (z_+, z_-) широкий класс точно интегрируемых динамических систем. В этом представлении

$$[\partial/\partial z_+ + \hat{A}_+,\ \partial/\partial z_- + \hat{A}_-] = 0, \tag{1}$$

операторы $\hat{A}_\pm = \sum_{a=0}^{m_\pm} E_{\pm a}$ принимают значения в подпространствах $\sum_{a=0}^{m_\pm} \oplus\, \mathfrak{G}_{\pm a}$, $E_{\pm a} = \sum_{\alpha=1}^{d_{\pm a}} \varphi_\alpha^{\pm a}\,(z_+, z_-)\, F_\alpha^{(\pm a)}$. Здесь $F_\alpha^{(\pm a)}$ — элементы

$\mathfrak{G}_{\pm a}$, а коэффициентные функции $\varphi_\alpha^{\pm a}$ принадлежат, вообще говоря, четной или нечетной частям пространства Грассмана, если они являются множителями при четных и соответственно нечетных элементах супералгебры $\mathfrak{G}$. Представление (1) форм-инвариантно относительно (калибровочных) преобразований из группы G_0, генерируемой подалгеброй $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$. Для устранения этого произвола в дальнейшем воспользуемся калибровочным условием вида $E_{+0} = 0$.

Метод интегрирования системы уравнений, вытекающей из (1), и явный вид ее решений, определяемых полным набором произвольных функций, приведен в работах [8, 9, 23, 24]. Здесь мы ограничимся частным случаем, когда градуировка $\mathfrak{G}$ задается картановским элементом H трехмерной подалгебры A_1 $\{H, J_\pm\}$, вложенной в четную часть $\mathfrak{G}$ при определенном выборе значений $m_\pm$.

Для целочисленных вложений A_1 в $\mathfrak{G}$ представление (1) при $m_+ = m_- = 1$ переписывается в виде

$$[\partial/\partial z_+ + E_{+1},\ \partial/\partial z_- + E_0 + E_{-1}] = 0$$

($E_0 \equiv E_{-0}$). Его частичное разрешение

$$E_{+1} = g^{-1}J_+g,\ E_0 = g^{-1}\partial g/\partial z_-,\ E_{-1} = J_- \qquad (2)$$

приводит к уравнению для элемента g комплексной оболочки группы G_0:

$$\partial/\partial z_+ (g^{-1}\partial g/\partial z_-) = [J_-,\ g^{-1}J_+g], \qquad (3а)$$

или в эквивалентной форме

$$\partial/\partial z_- (\partial g/\partial z_+ g^{-1}) = [J_+,\ gJ_-g^{-1}]. \qquad (3б)$$

Когда элемент g зависит от одной переменной, скажем $t \equiv z_+ + z_-$, это уравнение сводится к виду

$$d/dt\,(g^{-1}dg/dt) = [J_-,\ g^{-1}J_+g] \qquad (4)$$

и описывает точно решаемую одномерную модель.

Заметим, что системы, порождаемые посредством (1) локальной части $\mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_{+1}$ произвольной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ ($m_+ = m_- = 1$), градуировка которой согласована с целочисленным вложением в нее подалгебры A_1, возникают в рамках калибровочного подхода в задаче о цилиндрически симметричных инстантонах (а также монополях). По этой причине системы (3) в дальнейшем будем называть инстантонными. В простейшем случае $\mathfrak{G} = A_1$ они переходят в хорошо известное однокомпонентное уравнение Лиувилля.

При допущении полуцелочисленных вложений A_1 в $\mathfrak{G}$ и порождаемости $\hat{A}_\pm$ подпространствами $\mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_{\pm 1/2} \oplus \mathfrak{G}_{\pm 1}$ представление (1) в калибровке $E_{+0} = 0$ принимает вид

$$[\partial/\partial z_+ + E_{+1/2} + E_{+1},\ \partial/\partial z_- + E_0 + E_{-1/2} + E_{-1}] = 0. \qquad (5)$$

Из подсистемы (5), натянутой на подпространства $\mathfrak{G}_{\pm 1}$, вытекают соотношения (2). В обозначениях $\xi_{+1/2} \equiv gE_{+1/2}g^{-1}$, $\xi_{-1/2} \equiv E_{-1/2}$ оставшиеся уравнения (5), отвечающие подпространствам $\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}_{+1/2}$, переписываются в следующей симметричной форме:

$$\left.\begin{aligned} \partial/\partial z_+ (g^{-1}\, \partial g/\partial z_-) + [g^{-1}\xi_{+1/2}g,\, \xi_{-1/2}] + [g^{-1}J_+g,\, J_-] = 0; \\ \partial\xi_{+1/2}/\partial z_- + [g\xi_{-1/2}g^{-1},\ J_+] = 0; \\ \partial\xi_{-1/2}/\partial z_+ + [g^{-1}\xi_{+1/2}g,\ J_-] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Систему, описываемую уравнениями (6), естественно интерпретировать как модель нелинейного взаимодействия двухкомпонентного дираковского поля ($\xi_{\pm 1/2}$) с бозонным полем, параметризуемым элементом g. Когда алгебра $\mathfrak{G}$ не содержит нечетной части, компоненты дираковского поля взаимокоммутирующие; если вложение A_1 в четную часть супералгебры $\mathfrak{G}$ целочисленно, они антикоммутирующие. При нецелочисленных вложениях A_1 в четную часть супералгебры $\mathfrak{G}$ возможны ферми-поля с аномальными соотношениями коммутации. Простейший нетривиальный случай системы (6) с минимальным (ненулевым) числом четных и нечетных элементов соответствует суперсимметричному уравнению Лиувилля [37, 38], связанному с супералгеброй OSp (2,1) (b (0,1)).

2. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА (КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ) И МЕТОД ЯНГА-ФЕЛЬДМАНА

В основе развиваемой в обзоре процедуры квантования систем вида (3) как в шредингеровском, так и в гейзенберговом представлении лежит гамильтонов формализм. При этом для построения явных выражений для гейзенберговых операторов соответствующих динамических величин используются методы теории возмущений. Как уже отмечалось во введении, речь идет не о каких-либо приближенных результатах, а о точных выражениях, возникающих в результате суммирования рядов теории возмущений по постоянной взаимодействия λ, введенной явным образом в уравнение (3) в виде множителя перед его правой частью. [В дальнейшем, ссылаясь на (3) и (4), будем подразумевать наличие λ в них.] Получаемые выражения в классическом пределе воспроизводят точные решения соответствующих систем, представляющие другую, полностью эквивалентную полученной в работах [8, 23], форму их записи.

Существует несколько различных эквивалентных формулировок теории возмущений. В рамках канонического формализма явные выражения для гейзенберговых операторов определяются известной формулой Швингера (47). В ряде случаев более удобным оказывается метод Янга — Фельдмана, заключающийся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, которые описывают соответствующую квантовую систему, с автоматическим учетом граничных условий и последующим разложением искомых решений в ряд по степеням λ.

Рассмотрим вначале гамильтонову формулировку системы (3) в одномерном случае, т. е. (4), и построим отвечающий ей гамильтониан. С этой целью введем оператор

$$H = K_0 + \lambda \operatorname{Sp} (g^{-1}J_+gJ_-). \tag{7}$$

Скобка Пуассона H с групповым элементом g в некотором представлении $\widetilde{G}_0$ с генераторами X_{μ_0} имеет вид

$$\{H, g\} = \sum_{\mu_0} F^L_{\mu_0} X_{\mu_0} g \quad \text{или} \quad \{H, g\} g^{-1} = \sum_{\mu_0} F^L_{\mu_0} X_{\mu_0}.$$

Построим далее скобку H с этим элементом:

$$\{H, \sum_{\mu_0} F^L_{\mu_0} X_{\mu_0}\} = \lambda \operatorname{Sp} \{g^{-1}J_+gJ_-, \sum_{\mu_0} F^L_{\mu_0} X_{\mu_0}\} =$$
$$= -\lambda \sum_{\mu_0} X_{\mu_0} \operatorname{Sp} \{X_{\mu_0}, [g^{-1}J_+g, J_-]\} = -\lambda [g^{-1}J_+g, J_-].$$

Здесь для простоты используется ортонормированный базис в пространстве представления G_0, т. е. $\operatorname{Sp} X_{\mu_0} X_{\nu_0} = \delta_{-\mu_0\nu_0}$. Кроме того, учтена перестановочность операторов Казимира со всеми генераторами.

Таким образом, если идентифицировать оператор H с гамильтонианом системы, то соответствующие уравнения Гамильтона приводят к (4). При этом роль свободной части гамильтониана играет первый член в (7), тогда как второй описывает взаимодействие.

Существует глубокая взаимосвязь между решением задачи квантования в картине Шредингера и теорией представлений групп, впервые вскрытая Костантом [25, 30] на примере систем типа цепочки Тода (см., также [10, 11, 27, 29]). В этих работах получено интегральное представление для однокомпонентных волновых функций цепочки Тода через векторы Уиттекера. Как мы увидим из дальнейшего, волновые функции для более общих систем (4) оказываются матричными элементами основной непрерывной серии унитарных представлений естественных вещественных форм G, взятыми между состояниями с определенными квантовыми числами (обобщенные векторы Уиттекера). Ввиду того, что выбор таких базисных функций в пространстве представления G играет фактически ту же роль, что и выбор начальных условий в фазовом пространстве функциональной группы G^f для классической задачи, остановимся на этом подробнее.

Рассмотрим некомпактную вещественную группу Ли G, заданную инфинитезимальными операторами регулярного представления (П.10) как функциональную группу Ли — Энгеля G^f. Иначе говоря, заменим все коммутационные соотношения между генераторами G классическими скобками Пуассона, чему с физической точки зрения соответствует переход от квантового случая к классическому. (Все коммутационные соотношения алгебры при устремлении к нулю постоянной Планка $\hbar$ переходят в скобки Пуассона между соответствующими классическими величинами.) Благодаря линейности генераторов регулярного представления по производным параметров G такой переход каких-либо затруднений не вызывает. В классическом случае в силу теоремы Ли — Энгеля фазовое пространство рассматриваемой динамической системы описывается $2\,(N - r)$ обобщенными координатами и импульсами и, кроме того, r интегралами движения в инволюции, соответствующими r циклическим координатам (r — ранг, а N_R — размерность G^f). Генераторы $F^R_{\mu_0}$, $Z^L_{\underline{\alpha}}$ и $Z_{-\underline{\alpha}}$, через которые по формуле (П.10) выражаются элементы функциональной группы G^f, отвечающей вещественной форме G, удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\{F^R_{\mu_0},\ F^R_{\nu_0}\} = B^{\sigma_0}_{\mu_0\nu_0} F^R_{\sigma_0},\ \{F^R_{\mu_0},\ Z^L_{\underline{\alpha}}\} = \{F^R_{\mu_0},\ Z^R_{-\underline{\alpha}}\} = \{Z^L_{\underline{\alpha}},\ Z^R_{-\underline{\beta}}\} = 0;\\ &\{Z^L_{\underline{\alpha}},\ Z^L_{\underline{\beta}}\} = N_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} Z^L_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}},\ \{Z^R_{-\underline{\alpha}},\ Z^R_{-\underline{\beta}}\} = N_{-\underline{\alpha},-\underline{\beta}}\, Z^R_{-(\underline{\alpha}+\underline{\beta})}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Здесь $B^{\sigma_0}_{\mu\nu_0}$ и $N_{\alpha,\beta}$ — структурные постоянные; $\{Z^L_{\underline{\alpha}},\ g\} = \{Z^R_{-\underline{\alpha}},\ g\} = 0$; причем $F^R_{\mu_0}$ играют роль обобщенных импульсов, тогда как соответствующие групповые параметры g — обобщенные координаты; $\{F^R_{\mu_0},\ g\} = -gX_{\mu_0}$. Рассмотрим далее квадратичный оператор Казимира $K^f \equiv K\,(G^f)$ функциональной группы, задаваемый формулой (П.11), как гамильтониан соответствующей классической системы. Тогда из стандартных уравнений Гамильтона

$$dQ/dt \equiv \dot{Q} = \{K^f,\ Q\} \quad (9)$$

для Q, совпадающего с $Z^R_{-\underline{\alpha}}$ или $Z^L_{\underline{\alpha}}$, получаем с учетом (2)

$$\left.\begin{aligned} &\dot{Z}^L_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\beta},\underline{\gamma}} (X^{\underline{\beta}},\ gX^{-\underline{\gamma}}g^{-1})\, N_{\underline{\beta},\underline{\alpha}} Z^R_{-\underline{\gamma}} Z^L_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}},\\ &\dot{Z}^R_{-\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\beta},\underline{\gamma}} (X^{\underline{\beta}},\ gX^{-\underline{\gamma}}g^{-1})\, N_{-\underline{\gamma},-\underline{\alpha}} Z^L_{\underline{\beta}} Z^R_{-(\underline{\alpha}+\underline{\gamma})}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Благодаря (10), величина $\dot{Z}^L_{\underline{\alpha}}$ с $\underline{\alpha} \in R_+$ выражается через генераторы $Z^L_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}}$, отвечающие в силу свойства (П.2) элементам $X_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}}$ подпространств алгебры Ли $\mathfrak{G}$ с более высокими градуировочными индексами. Поэтому, выбирая начальные условия в виде $Z^L_{\underline{\alpha}}\,(t = 0) = 0$ при $\underline{\alpha} \in R_+/R^1_+$, получаем $Z^L_{\underline{\alpha}}(t) = 0$ для $\underline{\alpha} \in R_+/R^1_+$ и $Z^L_{\underline{\alpha}}(t) = c_{(\alpha)}$ для $\alpha \in R^1_+$, где $c_{(\alpha)}$ — некоторые постоянные. Аналогичное утверждение имеет место и для генераторов правых сдвигов: $Z^R_{-\underline{\alpha}}\,(t) = 0\ \forall\ \underline{\alpha} \in R_+/R^1_+$ и $Z^R_{-\alpha}\,(t) = c_{(-\alpha)} = \mathrm{const}$. Определим эти постоянные следующим образом: $Z_\alpha^L = v_\alpha c_\alpha$, $Z_{\alpha-}^R = v_\alpha c_{-\alpha}$, где $v_\alpha \equiv (X_\alpha, X_{-\alpha})$, а $c_{\pm\alpha}$ совпадают с коэффициентами разложения образующих $J_\pm = \sum_{\alpha\in R_+^1} c_{\pm\alpha} X_{\pm\alpha}$ подалгебры A_1 алгебры $\mathfrak{G}$, градуировка которой задается картановским элементом $H = [J_+, J_-]$. Тогда оставшиеся уравнения (9) для $Q = F_{\mu_0}^R$ и $Q = g$ приводят с учетом соотношений (8) к искомой системе (4). [Отметим, что следует также потребовать тождественное обращение в нуль генераторов $F_{\mu_0}^R$, отвечающих элементам $\mathfrak{G}_0^0$. Последнее обеспечивает выполнение условия того, что $g^{-1}\dot{g}$ принимает значения в $\mathfrak{G}_0^f$, так же как и правая часть (4).] При этом очевидно, что формула (П.11) в рассматриваемом случае тождественно сводится к выражению (7) для гамильтониана системы (4).

Перейдем теперь к квантовому случаю. При выборе определенных базисных состояний в пространстве представления вещественной формы G ее квадратичный оператор Казимира (П.15) воспроизводит гамильтониан квантовой системы (4). Действительно, действие оператора (П.15) с $\exp 2B \equiv g \in G_0$ на его собственные функции Ψ приводит к выражению (7) для гамильтониана, если выполняются следующие условия:

$$K_{\underline{\alpha}}^R \Psi = 0, \tag{11}$$

$$Z_{\underline{\alpha}}^L \Psi = \sum_{\alpha\in R_+^1} \delta_{\alpha\alpha} v_\alpha c_\alpha \Psi. \tag{12}$$

Кроме того, следует также исключить из K_0 члены, связанные с элементами $\mathfrak{G}_0^0$.

Ввиду того, что квантовомеханические волновые функции нормируемы, Ψ должны преобразовываться по некоторому унитарному представлению G. Тогда наложенные выше условия однозначно определяют функции Ψ как матричные элементы основной непрерывной серии между состояниями, инвариантными относительно правых сдвигов $K_{\underline{\alpha}}^R$. [Отметим, что рассмотрение функций Ψ, удовлетворяющих условию (12) и преобразующихся по конечномерному представлению максимальной компактной подгруппы $\mathcal{K}$ группы G, приводит к оператору (П.15), отвечающему точно интегрируемой квантовомеханической системе с многокомпонентными волновыми функциями.]

Для построения явных параметрических выражений для волновых функций как матричных элементов между состояниями с определенными квантовыми числами и исследования их асимптотических свойств, определяющих меру Планшереля и амплитуду рассеяния в терминах функций Йоста, требуется некоторая реализация соответствующего представления G. Последнее удобно реализовать на пространстве функций, заданных на $\mathcal{K}$ в виде (П.16). Тогда матричный элемент перехода между состояниями с векторами $\varphi_{\pm}(\hat{k})$ определяется формулой

$$D^{\{\rho\}}(\hat{g}) = \int d\hat{k}\varphi_{-}^{*}(\hat{k}) \prod_{j} [R_j(\hat{k},\ \hat{g})]^{\rho_j}\varphi_{+}(\hat{\hat{k}}). \tag{13}$$

Поэтому для нахождения искомых волновых функций нужно получить выражение для $\varphi_{+}(\hat{k})$, удовлетворяющее указанным выше условиям, с $\varphi_{-}(\hat{k})\,|_{\mathscr{K}/S} = 1$ согласно (11). Очевидно, что функция φ_{+} должна преобразовываться по некоторому представлению $\{l\}$ группы S, являясь скаляром относительно преобразований, генерируемых $\mathfrak{G}_0^0$. Удовлетворим (формально) вначале условию (12) без правой части, $\hat{F}_{\underline{\alpha}}\varphi_{+}^{0} = 0\ \forall\ \underline{\alpha} \in R_{+}$, и затем учтем неоднородность. Для заданного представления $\{\rho,\ l\}$ группы G функция φ_{+}^{0} суть матричный элемент $\langle|\ \hat{k}\ |\rangle$ как между старшими состояниями $|\ j\rangle$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ базисов фундаментальных представлений G, так и их базисных состояний, аннигилируемых под действием $X_{\underline{\alpha}}$, $\underline{\alpha} \in R_{+}$. Поэтому φ_{+}^{0} есть сужение (на $\mathscr{K}$) матричных элементов $\Xi^{\{\rho,l\}}(\hat{k})$ фундаментальных представлений G, «старших» (максимально заполненных) относительно элементов $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_0$. Неоднородную часть соотношений (12) можно восстановить, если снабдить $\Xi^{\{\rho,l\}}(\hat{k})$ множителем $\exp(J_{-}^{L}\ln\xi')$ с $J_{-}^{L} = \sum_{\alpha} c_{-\alpha}\hat{X}_{-\alpha}^{L}$, где $\hat{X}_{-\alpha}^{L}$ — левые генераторы на $\mathscr{K}$, отвечающие отрицательным корням $(-\alpha)$; $\xi' \equiv \prod_{i=1}^{r} \xi^{\{i\}}(\hat{k})$, $i \notin I_0$. Здесь I_0 — поднабор индексов $1, \ldots, r$, отвечающих значениям $i_0 \in I_0$ с $H_{i_0} \in \mathfrak{G}_0^0$. Таким образом,

$$\varphi_{+} \equiv W^{\{\rho,\ l\}} = \Xi^{\{\rho,\ l\}} \exp(J_{-}^{L}\ln\xi') \tag{14}$$

и сводится к векторам Уиттекера в данной параметризации

$$W^{\{\rho\}} = \xi^{\{\rho\}}(\hat{k})\exp(J_{-}^{L}\ln\xi), \quad \xi \equiv \prod_{i=1}^{r} \xi^{\{i\}}(\hat{k}) \tag{15}$$

для канонического вложения A_1 в $\mathfrak{G}$, приводящего к обобщенной цепочке Тода. По этой причине будем называть $W^{\{\rho,\ l\}}$ обобщенными векторами Уиттекера.

Окончательно волновые функции, отвечающие гамильтониану (7) системы (4), выражаются следующим интегральным представлением $[\hat{g} = \hat{g}(\tau,\ \chi)]$:

$$\Psi^{\{\rho,\ l\}}(\tau,\ \chi) = \exp(1/2\delta\tau)\,N(\sigma)\int d\hat{k}\overset{*}{\hat{D}}{}^{\{l\}}(\hat{k}_0)\times$$
$$\times\prod_{i}[R_i(\tau,\ \chi;\ \hat{k})]^{\rho_j}W^{\{\rho,\ l\}}(\hat{\hat{k}}). \tag{16}$$

Здесь $D^{\{l\}}(\hat{k}_0)$ — матричный элемент максимальной компактной подгруппы вещественной формы G_0, удовлетворяющий условию (11). Нормирующий множитель $\exp(1/2\delta\tau) N(\sigma)$ введен для обеспечения эрмитовости гамильтониана, т. е. для преобразования его к самосопряженному относительно стандартного скалярного произведения в пространстве регулярного представления G виду, отвечающему «физическому» гамильтониану рассматриваемой системы. Именно благодаря наличию $N(\sigma)$ последний имеет правильный спектр. Состояния рассеяния реализуются в асимптотической области ($\alpha(\tau) \to \infty$) положительной камеры Вейля [все $\underset{-}{\alpha}(\tau) > 0$], так как в ней отсутствует взаимодействие между «частицами» системы.

Как уже отмечалось выше, исследование нелинейных динамических систем на квантовом уровне в представлении Гейзенберга удобнее проводить, пользуясь формулировкой Янга — Фельдмана теории возмущений. Рассмотрим вначале применение этого метода для построения точных решений системы (3) в классической области, а затем обсудим модификацию расчетной процедуры для квантового случая.

Для реализации метода разложим искомый групповой элемент g по степеням λ, рассматривая ее в качестве параметра малости:

$$\left.\begin{aligned} g &= g_0 p(u) \equiv g_0 \sum_{m\geqslant 0} \lambda^m u_m, \quad u_0 \equiv 1, \\ g^{-1} &= p^{-1}(u)\, g_0^{-1} \equiv [1 - \lambda u_1 + \lambda^2 (u_1^2 - u_2) + \ldots]\, g_0^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Очевидно, что в нулевом порядке по λ решение $g(\lambda = 0) = g_0$ имеет вид $g_0 = h_+(z_+)\, h_-(z_-)$, где $h_\pm(z_\pm)$ — элементы комплексной оболочки группы Ли G_0 с алгеброй Ли $\mathfrak{G}_0$, являющиеся произвольными дифференцируемыми функциями своих аргументов. Подставляя разложение (17) в уравнение (3) для элемента g, получаем:

$$\partial [p^{-1} h_-^{-1} \partial (h_- p)/\partial z_-]/\partial z_+ = \lambda [J_-,\ p^{-1} h_-^{-1} h_+^{-1} J_+ h_+ h_- p],$$

или, после элементарных упрощений,

$$\begin{aligned} \partial [p^{-1}(\tilde{u})\, \partial p(\tilde{u})/\partial z_-]/\partial z_+ &= \lambda [h_- J_- h_-^{-1},\ p^{-1}(\tilde{u})\, h_+^{-1} J_+ h_+ p(\tilde{u})] \equiv \\ &\equiv \lambda [J_-(h_-),\ p^{-1}(\tilde{u})\, J_+(h_+)\, p(\tilde{u})]. \end{aligned} \qquad (18)$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{u}_m \equiv h_- u_m h_-^{-1}, \quad J_+(h_+) \equiv h_+^{-1} J_+ h_+, \quad J_-(h_-) \equiv h_- J_- h_-^{-1}.$$

Приравняв в обеих частях уравнения (18) члены с одинаковыми степенями λ, приходим к системе

$$\partial \Big\{ \sum_{s=0}^{m-1} v_s\, \partial \tilde{u}_{m-s}/\partial z_- \Big\}/\partial z_+ = \Big[J_-(h_-),\ \sum_{s=0}^{m-1} v_s^{-1} J_+(h_+)\, \tilde{u}_{m-s-1}\Big], \qquad (19)$$

где v_s — коэффициент разложения полинома $p^{-1}(\tilde{u})$ при λ^s.

В частности, для первых двух порядков ($m = 1,2$) из (19) имеем

$$\tilde{u}_{1,\, z_+z_-} = [J_-(h_-),\ J_+(h_+)],$$
$$\tilde{u}_{2,\, z_+z_-} = [J_-(h_-)\,[J_+(h_+),\ \tilde{u}_1]] + (\tilde{u}_1\tilde{u}_{1,\, z_-}),\ z_+,$$

результат интегрирования которых представим в виде

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{u}_1 = \left[\int^{z_-} dz'_- J_-(h_-(z'_-)),\ \int^{z_+} dz'_+ J_+(h_+(z'_+))\right];\\ &\tilde{u}_2 = \left[\int^{z_-} dz'_- J_-(h_-(z'_-))\left[\int^{z_+} dz'_+ J_+(h_+(z'_+))\left[\int^{z'_-} dz''_- J_- \times\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.\times\,(h_-(z''_-)),\ \int^{z'_+} dz''_+ J_+(h_+(z''_+))\right]\right]\right] + \left[\int^{z_-} dz'_- J_-(h_- z'_-)),\right.\\ &\left.\int^{z_+} dz'_+ J_+(h_+(z'_+))\right]\left[\int^{z_-} dz''_- J_-(h_-(z''_-))\int^{z_+} dz''_+ J_+(h_+(z''_+))\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

В конечном счете нас интересуют вполне определенные матричные элементы g, тогда как приведенные выше формулы для членов ряда теории возмущений содержат соответствующие величины, взятые между произвольными состояниями исходной алгебры $\mathfrak{G}$. [В свою очередь, искомый элемент g возникает в результате интегрирования подалгебры $\mathfrak{G}_0$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$. При этом входящие в формулы типа (21) кратные коммутаторы элементов $J_-(h_-)$ и $J_+(h_+)$ подпространств $\mathfrak{G}_{-1}$ и $\mathfrak{G}_{+1}$ соответственно таковы, что они принимают значения в $\mathfrak{G}_0^f \subset \mathfrak{G}_0$.] Именно, рассматриваются состояния, аннигилирующиеся под действием элемента J_+, $J_+\,|\rangle = 0$ и соответственно $\langle|\,J_- = 0$. Тогда разложение (17) для решений системы (3) (в смысле указанных матричных элементов) дается формулой

$$\begin{aligned} \langle g\rangle = \Big\langle h_+(z_+)\Big\{1 - \lambda\int^{z_+} dz'_+ J_+(h_+(z'_+))\int^{z_-} dz'_- J_-(h_-(z'_-)) +\\ + \lambda^2\int^{z_+} dz'_+ J_+(h_+(z'_+))\int^{z'_+} dz''_+ J_+(h_+(z''_+))\,\times\\ \times\int^{z_-} dz'_- J_-(h_-(z'_-))\int^{z'_-} dz''_- J_-(h_-(z''_-)) + \ldots\Big\}\,h_-(z_-)\Big\rangle \equiv\\ \equiv \Big\langle h_+(z_+)\Big\{\sum_{m\geqslant 0}(-\lambda)^m\int\cdots\int\prod_{1\leqslant i\leqslant m} dz_+^{(i)}\,dz_-^{(i)}\,\theta\,(z_+^{(i-1)} - z_+^{(i)})\,\times\\ \times\,\theta\,(z_-^{(i-1)} - z_-^{(i)})\,J_+(h_+(z_+^{(1)}))\ldots J_+(h_+(z_+^{(m)}))\,J_-(h_-(z_-^{(m)}))\ldots\\ \ldots J_-(h_-(z_-^{(1)}))\Big\}\,h_-(z_-)\Big\rangle;\quad z_\pm^{(0)} \equiv z_\pm, \end{aligned} \qquad (22)$$

где правило составления кратных коммутаторов очевидно. Конечномерные алгебры Ли обладают набором конечномерных представлений, для которых многократное применение понижающих операторов слева направо (или повышающих справа налево) приводит к аннигиляции базисных состояний. Таким образом, в этом случае ряды теории возмущений обрываются на соответствующем порядке, и выражение (22) дает эквивалентную форму записи решений для точно интегрируемых динамических систем (3) на классическом уровне, построенных в [23]. Подчеркнем еще раз, что правило нахождения явных выражений для элементов $\widetilde{u}_m$ заключается в последовательном перемещении всех J_+ (J_-) в крайнее правое (левое) положение, при котором соответствующие матричные элементы обращаются в нуль.

Как уже отмечалось, при переходе к одномерному случаю искомый элемент g зависит от одной переменной (t) и его параметры удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4). В частности, в нулевом порядке по λ элемент $g(t, \lambda = 0) = g_0(t)$ подчиняется уравнению $d/dt\,(g_0^{-1}\dot{g}_0) = 0$, откуда

$$g_0(t) = h \exp(p^- t) \equiv (h \exp(p^- t)\, h^{-1})\, h \equiv \exp(p^+ t)\, h, \tag{23}$$

где $p^\pm$ — не зависящие от t величины, принимающие значения в подпространстве $\mathfrak{G}_0^f$ алгебры $\mathfrak{G}$, а h — не зависящий от t элемент G_0. При этом в обозначениях $J_\pm^{\tau_\pm} \equiv \exp(\pm p^\pm \tau_\pm)\, J_\pm \exp(\mp p^\pm \tau_\pm)$ выражение (22) принимает вид

$$\langle g(t)\rangle = \sum_{m \geqslant 0} (-\lambda)^m \int \cdots \int \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} \theta(\tau_{+(i-1)} - \tau_{+i})\, \theta(\tau_{-(i-1)} - \tau_{-i}) \times$$
$$\times \langle J_+^{\tau_{+1}} \ldots J_+^{\tau_{+m}} J_-^{\tau_{-m}} \ldots J_-^{\tau_{-1}} \rangle = \langle \hat{\mathcal{M}}_+ g_0(t)\, \hat{\mathcal{M}}_- \rangle. \tag{24}$$

Здесь хронологически $\hat{\tau}_\pm$-упорядоченные экспоненты

$$\hat{\mathcal{M}}_+ \equiv \hat{\tau}_+ \exp \lambda \int^0 d\tau_+ J_+^{\tau_+}, \quad \hat{\mathcal{M}}_- \equiv \hat{\tau}_- \exp \int^0 d\tau_- J_-^{\tau_-}$$

не содержат зависимости от временного аргумента. Не останавливаясь на вопросе о вычислении входящих в формулу (24) интегралов, отметим лишь, что они могут быть получены в явном виде.

Обсудим теперь модификацию развитой выше конструкции для построения точного выражения квантовой динамической величины — гейзенбергова оператора $g(t)$. В соответствии со свободной частью лагранжиана системы (4) в квантовой области,

$$L_0(g) = 1/2\, \mathrm{Sp}\, (g_0^{-1}\dot{g}_0)^2 \text{ с } g_0(t) = \exp(-X^0 \hat{q}),$$

определим импульсы $\hat{p}_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\dot{\hat{q}}_\beta$, канонически сопряженные

$\hat{q}_\alpha(t)$, $[\hat{p}_\alpha, \hat{q}_\beta] = -i\hbar\delta_{\alpha\beta}$. Напомним, что элемент $(X^0\hat{q})$ принимает значения в $\mathfrak{G}_0^f$, т. е. $1 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant d_1 \equiv \dim \mathfrak{G}_0^f$; поэтому $c_{\alpha\beta} \equiv (X_\alpha^0, X_\beta^0)$ — симметричная, невырожденная $d_1 \times d_1$-матрица. Далее, удобно ввести операторы

$$\Psi_\alpha \equiv \sum_\beta \mathcal{M}_{\alpha\beta}\hat{q}_\beta, \quad \mathcal{M}_{\alpha\beta} \equiv \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^{\gamma+},$$

общий вид которых $\Psi_\alpha = A_\alpha t + B_\alpha$ определяется не зависящими от t произвольными операторами A_α и B_α, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[A_\alpha, B_\beta] = -i\hbar R_{\alpha\beta}, \quad [A_\alpha, A_\beta] = 0,$$
$$[B_\alpha, B_\beta] = 0; \quad R \equiv \mathcal{M}c^{-1}\mathcal{M}^T. \tag{25}$$

Как и в классической области, решение системы (4) для гейзенбергова оператора $g(t)$ ищется в виде

$$g(t) = \Big(\sum_{m \geqslant 0} \lambda_m \tilde{u}_m(t)\Big) g_0(t)$$

с $\tilde{u}_0 \equiv 1$ и $\tilde{u}_{m\geqslant 1}$, принимающем значения в $\mathfrak{G}_0^f$, откуда при степенях λ^m с $m \geqslant 1$ имеем

$$d/dt\Big(g_0^{-1}\sum_{s=0}^{m-1} v_s\dot{\tilde{u}}_{m-1}g_0\Big) = \Big[J_-,\ g_0^{-1}\sum_{s=0}^{m-1} v_s J_+\tilde{u}_{m-s-1}g_0\Big]. \tag{26}$$

Введем обозначения

$$g_0^{(t_1, -t_2, \ldots, \varepsilon_s t_s)} \equiv g_0(t_1)\, g_0^{-1}(t_2) \ldots g_0^{\varepsilon_s}(t_s), \quad \varepsilon_s \equiv (-1)^{s-1};$$
$$T_s \equiv t_1 - t_2 + \ldots + \varepsilon_s t_s, \quad J_\pm^{(t_1, -t_2, \ldots, \varepsilon_s t_s)} \equiv$$
$$\equiv g_0^{(t_1, -t_2, \ldots, \varepsilon_s t_s)} J_\pm \big(g_0^{(t_1, -t_2, \ldots, \varepsilon_s t_s)}\big)^{-1}.$$

Тогда нетрудно показать, что решения системы (26) выражаются как и в классическом случае, в виде мультипликативных интегралов от кратных коммутаторов операторов $J_\pm^{(t_1, -t_2, \ldots, \varepsilon_s t_s)}$. В частности, при $m = 1,2$,

$$\tilde{u}_1(t) = \int^t dt_1 \int^{t_1} dt_2\, [J_-^{(t_1)},\ J_+^{(t_1 - t_2)}],$$

$$\tilde{u}_2(t) = \int^t \tilde{u}_1(t')\, d\tilde{u}_1(t') + \int^t dt_1 \int^{t_1} dt_2 \int^{t_2} dt_3 \int^{t_3} dt_4 \times$$
$$\times [J_-^{(t_1)} [J_+^{(t_1, -t_2)} [J_-^{(t_1, -t_2, t_3)},\ J_+^{(t_1, -t_2, t_3, -t_4)}]]].$$

Квантовый характер системы проявляется в алгебраической структуре операторов $J_\pm^{(t_1, -t_2, \ldots, \varepsilon_s t_s)}$. Приведение окончательного выражения для решения $g(t)$ к формуле типа (24) требует преобразования этих операторов к виду $\widetilde{g}_0(T_s)\, J_{\pm}\widetilde{g}_0^{-1}(T_s)$, где элементы $\widetilde{g}_0(T_s)$ группы G_0 уже не сводятся только к $g_0(T_s)$, а содержат также множители, зависящие от постоянной Планка. Процедура такого приведения будет рассмотрена в разд. 4 на примере обобщенной цепочки Тода.

3. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Настоящий раздел носит вспомогательный характер: в нем собраны перестановочные соотношения и другие формулы, которые понадобятся при интегрировании динамических систем, исследуемых в данном обзоре.

Рассмотрим одномерную квантовомеханическую лагранжеву систему из r частиц с потенциальным взаимодействием. Функция Лагранжа имеет здесь вид:

$$L(u, \dot{u}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \widetilde{k}_{\alpha\beta}\dot{u}_\alpha\dot{u}_\beta - \mu^2 U(u), \tag{27}$$

где u_α — гейзенбергов оператор координаты α-й частицы, точка означает дифференцирование по времени, $\widetilde{k}_{\alpha\beta}$ — невырожденная симметричная вещественная матрица, $\mu^2\ (\equiv\lambda)$ — константа связи, функция $U(u_1, \ldots, u_r)$ описывает взаимодействие. Соответствующая функция Гамильтона есть

$$H(u, p) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (\widetilde{k}^{-1})_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + \mu^2 U(u), \tag{28}$$

причем канонические импульсы $p_\alpha = \sum_\beta \widetilde{k}_{\alpha\beta}\dot{u}_\beta$.

Уравнения движения соответственно в форме Лагранжа и Гамильтона имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{u}_\alpha + \mu^2\sum_\beta (\widetilde{k}^{-1})_{\alpha\beta}U_\beta(u) = 0;\\ &U_\beta \equiv \partial U/\partial u_\beta;\\ &\dot{p}_\alpha + \mu^2 U_\alpha(u) = 0;\\ &\dot{u}_\alpha = \sum_\beta (\widetilde{k}^{-1})_{\alpha\beta}p_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Для построения теории возмущений прежде всего рассмотрим систему невзаимодействующих частиц с

$$L_0(\varphi\quad) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\widetilde{k}_{\alpha\beta}\dot{\varphi}_\alpha\dot{\varphi}_\beta;\quad H_0(\varphi, p^{(0)}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(\widetilde{k}^{-1})_{\alpha\beta}p_\alpha^{(0)}p_\beta^{(0)}.$$

Общим решением для гейзенберговых координат φ_α свободных частиц является равномерное прямолинейное движение:

$$\varphi_\alpha = \tilde{a}_\alpha t + \tilde{b}_\alpha; \quad p_\alpha^{(0)} = \sum_\beta \tilde{k}_{\alpha\beta} \tilde{a}_\beta,$$

где $\tilde{a}_\alpha$, $\tilde{b}_\alpha$ — не зависящие от времени операторы. Канонические перестановочные соотношения (при равных временах)

$$[p_\alpha^{(0)}, \varphi_\beta] = -i\hbar\delta_{\alpha\beta}; \quad [p_\alpha^{(0)}, p_\beta^{(0)}] = [\varphi_\alpha, \varphi_\beta] = 0$$

в терминах операторов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ записываются в виде

$$[\tilde{a}_\alpha, \tilde{b}_\beta] = -i\hbar (\tilde{k}^{-1})_{\alpha\beta}; \quad [\tilde{a}_\alpha, \tilde{a}_\beta] = [\tilde{b}_\alpha, \tilde{b}_\beta] = 0.$$

В дальнейшем нас будут интересовать функции взаимодействия, зависящие от своих аргументов через линейные комбинации $u'_\alpha = \sum_\beta k_{\alpha\beta} u_\beta$, где k — матрица, связанная с $\tilde{k}$ формулой

$$\tilde{k}_{\alpha\beta} = w_\alpha k_{\alpha\beta}, \tag{30}$$

w_α — некоторые положительные числа. В связи с этим введем новые операторы

$$\psi_\alpha \equiv \sum_\beta k_{\alpha\beta} \varphi_\beta \equiv a_\alpha t + b_\alpha, \tag{31}$$

через которые старые выражаются в виде

$$\varphi_\alpha = \sum_\beta (k^{-1})_{\alpha\beta} \psi_\beta; \quad p_\alpha^{(0)} = w_\alpha a_\alpha. \tag{32}$$

Перестановочные соотношения (при произвольных временах) имеют вид:

$$\begin{gathered}
[a_\alpha, b_\beta] = -i\hbar \hat{k}_{\alpha\beta}; \quad [a_\alpha, a_\beta] = [b_\alpha, b_\beta] = 0; \\
[\psi_\alpha(t), \psi_\beta(t')] = -i\hbar \hat{k}_{\alpha\beta} \cdot (t - t'); \\
[\varphi_\alpha(t), \psi_\beta(t')] = -\frac{i\hbar}{w_\alpha} \delta_{\alpha\beta}(t - t'),
\end{gathered} \tag{33}$$

где

$$\hat{k}_{\alpha\beta} \equiv k_{\alpha\beta} \frac{1}{w_\beta}. \tag{34}$$

Поскольку в данном обзоре рассматриваются, в частности, взаимодействия экспоненциального типа, то нам понадобятся также правила перемножения и распутывания операторов типа $\exp \psi_\alpha$ и операторов, связанных с ними. Приведем общие формулы, позволяющие совершать такого рода операции. Во-первых,

$$e^{-A}Be^{A}=B+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}[B,\underbrace{A,A,\ldots,A}_{l\ \text{раз}}], \tag{35}$$

где введено обозначение для кратного коммутатора:

$$[A, B, C, \ldots, M]\equiv[\ldots[[A, B], C], \ldots], M]. \tag{36}$$

Далее:

$$e^{A}e^{B}=T\exp\left\{\int_{0}^{1}d\tau\,(A+e^{\tau A}Be^{-\tau A})\right\}, \tag{37}$$

где знак «T-экспоненты» означает упорядочение по параметру τ в экспоненциальном ряду:

$$T\exp\left\{\int_{a}^{b}d\tau Y(\tau)\right\}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{b}d\tau_1\int_{a}^{\tau_1}d\tau_2\ldots$$

$$\ldots\int_{a}^{\tau_{n-1}}d\tau_n Y(\tau_1)\,Y(\tau_2)\ldots Y(\tau_n). \tag{38}$$

Если подынтегральные выражения в (37) при разных τ коммутируют друг с другом, то, очевидно, знак T-упорядочения можно отбросить. В частности, как видно из (35), это можно сделать, когда все кратные коммутаторы $[B, A, \ldots, A]$ коммутируют друг с другом и с $(A+B)$. Если, более того, $[A, B]$ коммутирует с A и с B, то имеем

$$e^{A}e^{B}=e^{\frac{1}{2}[A,B]}e^{A+B}=e^{[A,B]}e^{B}e^{A}. \tag{39}$$

Формулы (35), (37) справедливы всегда (в том смысле, что соответствующие формальные ряды совпадают), однако применение их в конкретных физических моделях для получения осмысленных операторов требует надлежащего анализа сходимости.

Учитывая (33), можно теперь с помощью (39) сразу получить формулы перемножения:

$$\left.\begin{aligned}&\exp(\psi_\alpha(t))\exp(\psi_\beta(t'))=\\&=\exp(-i\hbar\hat{k}_{\alpha\beta}(t-t'))\exp(\psi_\beta(t'))\exp(\psi_\alpha(t));\\&\exp(\varphi_\alpha(t))\exp(\psi_\beta(t'))=\\&=\exp\left(-\frac{i\hbar}{w_\alpha}\delta_{\alpha\beta}(t-t')\right)\exp(\psi_\beta(t'))\exp(\varphi_\alpha(t)),\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

а также формулу расщепления на операторы, зависящие только от a и только от b:

$$\exp(\psi_\alpha(t)) = \exp\left(a_\alpha + \frac{i\hbar}{2}\hat{k}_{\alpha\alpha}t\right)\exp b_\alpha = \\ = \exp b_\alpha \exp\left(a_\alpha - \frac{i\hbar}{2}\hat{k}_{\alpha\alpha}t\right), \tag{41}$$

или, в общем виде

$$\exp(\psi_{\alpha_1}(t_1)) \ldots \exp(\psi_{\alpha_n}(t_n)) = \\ = \prod_{m=1}^{n} \exp b_{\alpha_m} \prod_{s=1}^{n} \exp\left(a_{\alpha_s} - \frac{i\hbar}{2}\hat{k}_{\alpha_s\alpha_s} - i\hbar \sum_{l=s+1}^{n} \hat{k}_{\alpha_s\alpha_l}\right) t_s = \\ = \prod_{m=1}^{n} \exp(\psi_{\alpha_m}(t)) \prod_{s=1}^{n} \exp\left(a_{\alpha_s} - \frac{i\hbar}{2}\hat{k}_{\alpha_s\alpha_s} - i\hbar \sum_{l=s+1}^{n} \hat{k}_{\alpha_s\alpha_l}\right)(t_s - t). \tag{42}$$

Отметим еще формулу

$$\exp\left(\sum_\alpha l_\alpha\psi_\alpha\right) a_\mu \exp\left(-\sum_\alpha l_\alpha\psi_\alpha\right) = a_\mu + i\hbar\left(\sum_\alpha \hat{k}_{\mu\alpha} l_\alpha\right) \tag{43}$$

(l_α — произвольные константы), которая получается с помощью (33) из (35) [ряд в (35) обрывается на первом члене]. Отсюда находим также общую формулу для произвольной функции $f(a)$ операторов $a_1, \ldots, a_r$, разлагая последнюю в ряд, используя (43) в каждом члене и затем вновь сворачивая ряд:

$$\exp\left(\sum_\alpha l_\alpha\psi_\alpha\right) f(a_\mu) \exp\left(-\sum_\alpha l_\alpha\psi_\alpha\right) = f\left(a_\mu + i\hbar \sum_\alpha \hat{k}_{\mu\alpha} l_\alpha\right). \tag{44}$$

Точно так же получается

$$\exp\left(\sum_\alpha l_\alpha\varphi_\alpha\right) f(a_\mu) \exp\left(-\sum_\alpha l_\alpha\varphi_\alpha\right) = f\left(a_\mu + \frac{i\hbar}{w_\mu} l_\mu\right), \tag{45}$$

откуда видно, что $\exp\varphi_\mu$ является оператором сдвига по a_μ:

$$\exp\varphi_\mu = \exp\left(\frac{i\hbar}{w_\mu}\partial/\partial a_\mu\right),$$

что, впрочем, ясно уже из (32).

Решения задачи для взаимодействующих частиц можно строить с помощью формальных рядов теории возмущений в гейзенберговом представлении. Предположим, что существуют асимптотические пределы [«in-операторы»] $\varphi(t) \equiv u_{\text{in}}(t) \equiv \lim_{t\to-\infty} u(t)$, удовлетворяющие соотношениям для операторов свободных частиц. Введем «S-матрицу для конечных времен»

$$S(t) \equiv T \exp\left\{\frac{\mu^2}{i\hbar} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau U(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)\right\}. \tag{46}$$

Тогда для любой функции $A(u)$ операторов $u_1, \ldots, u_r$ (взятых в один и тот же момент времени t) можно записать

$$A(u(t)) = S^+(t) A(\varphi(t)) S.$$

Подставляя $A(u)$ в виде ряда

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{2n} A_n,$$

имеем $A_0 = A(\varphi(t))$,

$$A_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [A(\varphi(t)), U_1, \ldots, U_n] \prod_{m=1}^{n} \frac{dt_m}{i\hbar} \theta(t_{m-1} - t_m), \tag{47}$$

где $\theta(x)$ — обычная ступенчатая функция, $t_0 \equiv t$, $U_m \equiv U(\varphi(t_m))$.

При рассмотрении экспоненциальных взаимодействий (U — линейная функция $\exp \psi_\alpha$) мы будем вычислять операторы типа $\exp(lu_\alpha)$. Как видно из (47), для этого понадобятся коммутаторы вида $[\exp(l\varphi_\alpha), \exp\psi_\beta, \ldots, \exp\psi_\gamma]$. Для их вычисления выстроим в каждом слагаемом коммутатора экспоненты в порядке убывания временнóго аргумента слева направо с помощью формул перемножения (40), что приводит к появлению числовых множителей. Вынося затем произведение экспонент за скобку, имеем:

$$[\exp(l\varphi_\alpha(t)), \exp\psi_{\beta_1}(t_1), \ldots, \exp\psi_{\beta_n}(t_n)] =$$
$$= \exp(l\varphi_\alpha(t)) \exp\psi_{\beta_1}(t_1) \ldots \exp\psi_{\beta_n}(t_n) \prod_{s=1}^{n} \left\{1 - \right.$$
$$\left. - \exp\left[\frac{i\hbar l}{w_{\beta_s}} \delta_{\alpha\beta_s}(t - t_s) + i\hbar \sum_{j=1}^{s-1} \hat{k}_{\beta_j\beta_s}(t_j - t_s)\right]\right\}. \tag{48}$$

Далее можно с помощью формулы (42) вынести всю зависимость от параметров $t_1, \ldots, t_n$ вправо, в произведение коммутирующих множителей, после чего интегрирование по t_i проводится элементарно.

Рассмотрим теперь аналогичную модель в двумерном пространстве-времени $x^\mu = (t; x)$ с r скалярными эрмитовыми полями u_α. Удобно ввести переменные $z^\pm = \frac{1}{2}(t \pm x)$, так что

$$u^\alpha_{,\mu} u^{,\mu}_\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial z^+}\frac{\partial u^\beta}{\partial z^-} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial z^-}\frac{\partial u^\beta}{\partial z^+}\right);$$

$$u^{,\mu}_{\alpha\ ,\mu} = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial z^+ \partial z^-}.$$

Будем считать, что пространственная координата либо пробегает весь бесконечный интервал, либо является циклической [так что поля u_α обладают свойством периодичности, $u_\alpha(t, x+2L) = u_\alpha(t, x)$]. Первый случай можно формально рассматривать как предельный случай второго при $L \to \infty$.

Лагранжиан имеет вид

$$\Lambda = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} \widetilde{k}_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial z^+} \frac{\partial u^\beta}{\partial z^-} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial z^-} \frac{\partial u^\beta}{\partial z^+} \right) - \mu^2 V(u_1, \ldots, u_r) \tag{49}$$

[см. (27)]. Соответствующие уравнения движения суть

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial z^+ \partial z^-} + \mu^2 \sum_{\beta=1}^{r} (\widetilde{k}^{-1})_{\alpha\beta} V_\beta(u); \quad V_\alpha \equiv \frac{\partial V}{\partial u_\alpha}. \tag{50}$$

Для проведения процедуры квантования по теории возмущений рассмотрим прежде всего свободную систему с лагранжианом в виде кинетической части (49):

$$\Lambda_0 = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} \widetilde{k}_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial z^+} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial z^-} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial z^-} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial z^+} \right).$$

Общее решение соответствующих уравнений движения есть

$$\varphi_\alpha(z^+, z^-) = \varphi_\alpha^+(z^+) + \varphi_\alpha^-(z^-), \tag{51}$$

где $\varphi_\alpha^\pm(z^\pm)$ — произвольные операторные функции. Наложение условия периодичности по x ограничив ет вид (51) следующим выражением:

$$\varphi_\alpha = Q^\alpha + \frac{t}{2L} P^\alpha + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} [A_n \, e^{-\frac{2\pi i n}{L} z^+} + A_n^{-\alpha} e^{-\frac{2\pi i n}{L} z^-}], \tag{52}$$

гда Q^α, P^α, $A_n^{\pm\alpha}$ — произвольные пока операторы. Эрмитовость полей φ_α означает

$$(Q^\alpha)^\dagger = Q^\alpha, \quad (P^\alpha)^\dagger = P^\alpha, \quad (A_n^{\pm\alpha})^\dagger = A_{-n}^{\pm\alpha}. \tag{53}$$

Лагранжиану Λ_0 соответствует гамильтониан

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \widetilde{k}_{\alpha\beta} \int_{-L}^{L} dx \left[\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x} \right] =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta} \widetilde{k}_{\alpha\beta} \left\{ \frac{P^\alpha P^\beta}{4L} + \frac{\pi}{2L} \sum_{n \neq 0} [A_{-n}^{+\alpha} A_{+n}^{+\beta} + A_{-n}^{-\alpha} A_{+n}^{-\beta}] \right\}. \tag{54}$$

Стандартная процедура канонического квантования приводит к перестановочным соотношениям

$$\left.\begin{aligned}&[Q^\alpha,\ P^\beta]=\mathrm{i}\hbar\,(\hat{k}^{-1})_{\alpha\beta};\\&[A_m^{\pm\alpha},\ A_n^{\pm\beta}]=\mathrm{i}\hbar m\delta_{m,\,-n}\,(\tilde{k}^{-1})_{\alpha\beta};\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

остальные коммутаторы равны нулю. Отсюда находим

$$[\varphi_\alpha(z),\ \varphi_\beta(z')]=-\mathrm{i}\hbar\,(\tilde{k}^{-1})_{\alpha\beta}\,D(z-z'),$$

где перестановочная функция

$$D(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\varepsilon(z^+-nL)+\varepsilon(z^--nL)].\tag{56}$$

Здесь $\varepsilon(x)$ — знаковая функция, а сумма понимается в смысле главного значения. Из (55) видно, что операторы φ_α могут быть представлены в гильбертовом пространстве

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_0\oplus\mathscr{H}^+\oplus\mathscr{H}^-,$$

где $\mathscr{H}_0$ — пространство одномерной r-частичной квантово-механической задачи (см. начало этого раздела), а $\mathscr{H}^\pm$ — фоковские пространства (с r сортами частиц), в которых операторы рождения (уничтожения) выражаются через $A_{-n}^{\pm\alpha}$ ($A_{+n}^{\pm\alpha}$), $n>0$.

Как и в (31), введем новые операторы $\psi_\alpha=\sum k_{\alpha\beta}\varphi_\beta$. Для них

$$\left.\begin{aligned}&[\psi_\alpha(z),\ \psi_\beta(z')]=-\mathrm{i}\hbar\hat{k}_{\alpha\beta}D(z-z');\\&[\psi_\alpha(z),\ \varphi_\beta(z')=-\mathrm{i}\,\frac{\hbar}{w_\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}D(z-z').\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

Следующий ряд формул мы приведем лишь для однокомпонентного случая, $r=1$ ($\tilde{k}=w$). Они получаются совершенно так же, как и формулы (40) — (46), и их обобщение на многокомпонентную систему не представляет каких-либо трудностей. Имеем:

$$\begin{aligned}&\exp(-b\varphi(z))\exp(a\varphi(z'))\exp(b\varphi(z))=\\&=\exp\left(\mathrm{i}ab\,\frac{\hbar}{w}\,D(z-z')\right)\exp(a\varphi(z'));\end{aligned}\tag{58}$$

$$\exp(aP+b\varphi)=\exp\left(a\left(P+\mathrm{i}\,\frac{\hbar b}{2w}\right)\right)\exp(b\varphi);\tag{59}$$

$$e^{-b\varphi}f(P)\,e^{b\varphi}=f\left(P-\mathrm{i}\,\frac{\hbar}{w}\,b\right).\tag{60}$$

Нам понадобится также оператор

$$\Phi(z)\equiv\int\limits_{z^+-L}^{z^+}dz^{+\prime}\int\limits_{z^--L}^{z^-}dz^{-\prime}\exp(2\varphi(z')),\tag{61}$$

для которого из (58) — (60) получаются перестановочные соотношения

$$e^{-b\varphi}\Phi e^{b\varphi} = \exp\left(\frac{i\hbar}{w} b\right) \Phi; \tag{62}$$

$$\Phi f(P) = f\left(P + \frac{2i\hbar}{w}\right) \Phi. \tag{63}$$

Приведем еще без доказательства редукционную формулу

$$\int\limits_{z^+-L}^{z^+} dz^{+\prime} \int\limits_{z^--L}^{z^-} dz^{-\prime} e^{2\varphi(z')}\Phi^{n-1}(z') = \frac{(1-e^{i\hbar/w})^2 (1-e^{-nP-i\hbar n^2/w})^2}{(1-e^{i\hbar n/w})^2 (1-e^{-P-i\hbar n/w})^2} \Phi^n(z), \tag{64}$$

которая проверяется подстановкой в обе части явного выражения (61) для Φ и перестройкой областей интегрирования с учетом свойств $\varphi(z^+, z^-)$ при сдвиге его аргументов на L [см. (52)].

Для бесконечного пространства (формально $L \to \infty$) операторные функции в (51) произвольны; при этом перестановочная функция, получаемая каноническим квантованием, принимает просто вид

$$D(z) = \frac{1}{4}\varepsilon(z^+) + \frac{1}{4}\varepsilon(z^-). \tag{65}$$

Хотя в этом случае, как известно, возникают трудности с реализацией операторов φ_α в гильбертовом пространстве [13], мы, однако, выпишем некоторые алгебраические соотношения для них, которые понадобятся нам в разд. 6:

$$\left.\begin{aligned} &[\psi_\alpha^\pm(z^\pm),\ \psi_\beta^\pm(z^{\pm\prime})] = -\frac{i\hbar}{4w}\hat{k}_{\alpha\beta}\varepsilon(z^\pm - z^{\pm\prime});\\ &[\psi_\alpha^\pm(z^\pm),\ \psi_\beta^\mp(z^{\mp\prime})] = 0;\\ &\exp(a\psi_\alpha^\pm(z^\pm))\exp(b\psi_\beta^\pm(z^{\pm\prime})) =\\ &= \exp\left(-\frac{i\hbar ab}{4w}\hat{k}_{\alpha\beta}\varepsilon(z^\pm - z^{\pm\prime})\right)\times\\ &\times\exp(b\psi_\beta^\pm(z^{\pm\prime}))\exp(a\psi_\alpha^\pm(z^\pm)).\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Вводя многоиндексные операторы

$$\Phi_{\alpha\beta\ldots}^\pm(z^\pm) = \int\limits_{-\infty}^{z^\pm} dz_1^\pm\, e^{\psi_\alpha^\pm(z_1^\pm)} \int\limits_{-\infty}^{z_1^\pm} dz_2^\pm\, e^{\psi_\beta^\pm(z_2^\pm)} \ldots, \tag{67}$$

которые носят характер запаздывающих функционалов от полей φ_α, получаем для них соотношения, аналогичные (62):

$$e^{a\psi_\beta^\pm} F(\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^\pm)\, e^{-a\psi_\beta^\pm} = F\left(\exp\left(-\frac{i\hbar a}{4w}\sum_{m=1}^{n}\hat{k}_{\beta\alpha_m}\right)\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^\pm\right). \tag{68}$$

С помощью формул (66) имеем для $\Phi^{\pm}_{\alpha\beta\ldots}$ следующие соотношения эрмитовости:

$$[\Phi^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}]^{\dagger}=\exp\left(\frac{i\hbar}{4w}\sum_{l<m}^{n}\hat{k}_{\alpha_l\alpha_m}\right)\Phi^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \tag{69}$$

Переходя теперь к построению решений (50) как функционалов полей φ_α, можно снова воспользоваться общей формулой (47), где теперь в качестве A берется локальная функция полевых операторов, а возмущающая функция $U(t)$ есть интеграл своей плотности $V(t, x)$:

$$U(t)=\int_{-L}^{L}dx\,V(\varphi(t, x)).$$

Иначе говоря, n-й порядок теории возмущений для локального оператора $A(u)$ дается формулой Швингера

$$A_n(t, x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-L}^{L}[A(\varphi(t, x)), V_1, \ldots, V_n]\prod_{m=1}^{n}\frac{dt_m\,dx_m}{i\hbar}\theta(t_{m-1}-t_m), \tag{70}$$

$$V_i\equiv V(\varphi(t_i, x_i)).$$

Другой вариант построения теории возмущений — использовать уравнение Янга — Фельдмана, т. е. интегральную форму уравнения (50):

$$u_\alpha(t, x)=\varphi_\alpha(t, x)+\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int_{-L}^{L}dx'\,D^{\mathrm{ret}}(t-t', x-x')\,j_\alpha(t', x'), \tag{71}$$

где φ_α — свободные поля; $D^{\mathrm{ret}}(t, x)=\theta(t)\,D(t, x)$, D — перестановочная функция (56). В данном случае

$$j_\alpha=-\mu^2\sum_\beta(\hat{k}^{-1})_{\alpha\beta}V_\beta(u).$$

Уравнение (71) для u_α можно решать итерациями, взяв φ_α в качестве нулевого приближения. Тем самым для u_α получается ряд теории возмущений по константе связи μ^2.

4. ОДНОМЕРНАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЦЕПОЧКА ТОДА С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

В этом разделе мы применим общую конструкцию разд. 2 для важного частного случая системы (4) — обобщенной (конечной, непериодической) цепочки Тода, описываемой системой уравнений

$$\ddot{u}_i=\lambda\exp(ku)_i, \tag{72}$$

гамильтониан которой имеет вид

$$H = 1/2 \sum_{i,j} (vk)^{-1}_{ij}\, p_i p_j + \lambda \sum_i v_i \exp (ku)_i. \qquad (73)$$

Этот частный случай с очевидностью вытекает из (4) при выборе канонической градуировки конечномерной простой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ с матрицей Картана k в подстановке

$$g = \exp \left\{ -\sum_i H_i \left(u_i - \sum_j [k^{-1}_{ij} \ln \delta_j)\right)\right\}, \quad J_{\pm} = \sum_i \delta_i^{1/2} X_{\pm i},$$

$K_0 = \mathrm{Sp}\,(\sum_i H^i p_i)$; $\delta_i \equiv 2 \sum_j k^{-1}_{ij}$ с учетом соотношений (П.5) и (П.6).

Здесь p_i и u_i — обобщенные импульсы и координаты. Последующее рассмотрение проводится как в представлении Шредингера, так и Гейзенберга.

Картина Шредингера. Оператор Казимира второго порядка для естественной вещественной формы G в разложении Ивасава дается формулой (П.15), или, обозначив в ней $\partial/\partial\tau_i = p_i$ и выполнив каноническое преобразование $K \to \exp(^1/_2\,(\delta\tau))\, K \exp(-^1/_2\,(\delta\tau))$, получим выражение

$$K = 1/2 \sum_{i,j} (vk)^{-1}_{ij}\, p_i p_j + \sum_{\alpha>0} v^{-1}_{\alpha}\, [\exp(-\alpha(\tau))\, K^R_{\alpha} Z^L_{\alpha} -$$
$$- \exp(-2\alpha(\tau))\, Z^L_{\alpha} Z^L_{\alpha}]. \qquad (74)$$

Действие оператора (74) на его собственные функции, подчиненные условиям (П.5) и (П.6), приводит, с точностью до очевидных замен, к выражению (73). Иначе говоря, роль базисных состояний для рассматриваемой задачи играют векторы Уиттекера (П.9).

Если в качестве собственных функций оператора (74) рассмотреть величины, преобразующиеся по некоторому конечномерному представлению $\{l\}$ размерности N_l подгруппы $\mathcal{K}$ группы G, и наложить на них условие (П.6), то этот оператор можно привести к виду

$$K = 1/2 \sum_{i,j} (vK)^{-1}_{ij}\, p_i p_j + \sum_i \delta_i^{-1/2}\, [\exp(-(k\tau)_i)\, K^R_i -$$
$$- v_i \delta_i^{1/2} \exp(-2\,(k\tau)_i)], \qquad (75)$$

где K^R_i — суть генераторы представления $\{l\}$. Тогда выражение (75) отвечает точно интегрируемой квантовомеханической системе с N_l — компонентной волновой функцией переходящей в однокомпонентном случае (т. е. когда собственные функции H одномерны по Z и инвариантны относительно правых сдвигов на $\mathcal{K}$: $\{l\} = 0$, $K^R_i \varphi = 0$) в обобщенную цепочку Тода при замене $\tau_i = -1/2 u_i + 1/2 \sum_j K^{-1}_{ij} \ln(-\delta_j)$. Заметим, что в простейшем частном случае группы $SL(2, \mathbb{R})$ формула (75) воспроизводит потенциал Морзе, описывающий осцилляции двухатомной молекулы, и тем самым реализует его теоретико-групповую интерпретацию.

Таким образом, при изучении многокомпонентного варианта обобщенной квантовой цепочки Тода в качестве начального состояния ($\varphi_+(\hat{k})$) в формуле (П.7) следует взять вектор Уиттекера (П.9), тогда как конечным ($\varphi_-(\hat{k})$) является произвольный вектор пространства левого регулярного представления $\mathscr{K}$, т. е. $\varphi_-(\hat{k}) = \sum_{\{n\}} D^{\{l\}}_{\{m\}\{n\}}(\hat{k})\,\eta_{\{n\}}$, $\eta \equiv \{\eta_{\{n\}}\}$ — произвольный числовой вектор. [В однокомпонентном случае, естественно, $\varphi_-(\hat{k}) = \eta_{\{0\}}$.] Тогда для некомпактных преобразований G, $\exp\sum_j H_j\tau_j \in \mathscr{A}$, с учетом формулы $\xi^{\{\rho\}}(\hat{k}) = \exp(\tau\rho)\prod_j R_j^{-\rho_j}\xi^{\{\rho\}}(\hat{k})$, вытекающей из (П.17), (П.18), получаем следующее интегральное представление искомой волновой функции:

$$\psi^{\{\rho,\,l\}}_{\{m\}}(\tau) = \exp(i(\tau\sigma))\,N(\sigma)\sum_{\{n\}}\int d\hat{k}\,\xi^{\{\rho\}}(\hat{k})\,D^{*\{l\}}_{\{m\},\{n\}}(\hat{k})\times$$
$$\times\exp\left\{-\mathrm{i}\sum_j K_j^L\ln\xi^{\{j\}}(\hat{k})\right\}\eta_{\{n\}} \tag{76}$$

[ср. (П.10)]. Здесь тильда над показателем экспоненты означает, что все входящие в него величины зависят от преобразованных под действием $\hat{g}(\tau)$ параметров $\hat{k} \in \mathscr{K}$.

Зная явный вид волновых функций (76), можно вычислить их квазиклассический предел и таким образом получить еще одним способом точные выражения для решений соответствующей классической задачи. Проиллюстрируем эту процедуру на примере однокомпонентного варианта обобщенной цепочки Тода с

$$\Psi^{\{\rho\}}(\tau) = \exp\mathrm{i}(\tau\sigma)\,N(\sigma)\int d\hat{k}\,\xi^{\{\rho\}}(\hat{k})\exp\times$$
$$\times\left\{-\mathrm{i}\sum_j K_j^L\ln\xi^{\{j\}}(\hat{k})\right\} \tag{77}$$

и применим к ней метод перевала. Показатель быстро осциллирующей функции в интегранде (76) имеет вид

$$S = \sum_j\left[P_j\ln\xi^{\{j\}} + K_j^L\ln\xi^{\{j\}} + P_j\tau_j + 1/4\sum_i (vk)^{-1}_{ij}P_iP_jt\right].$$

Стационарные точки последнего выражения определяются из условия равенства нулю его производных по всем групповым параметрам элемента $\hat{k}(\theta_\alpha)$ из $\mathscr{K}$, что эквивалентно уравнениям

$$K^R_{-\alpha}S = 0 \text{ и/или } K^L_\alpha S = 0. \tag{78}$$

$$\forall \alpha \in R_+.$$

Для нахождения классических траекторий, дающих точные решения (72) ($u_i = -2\tau_i$), следует приравнять производные действия системы по произвольным параметрам P_j, определяемые в соответствии с условиями (78), некоторым произвольным постоянным $\ln c_j$, именно

$$\ln c_j = dS/dP_j \equiv \partial S/\partial P_j + \sum_\alpha \partial S/\partial\theta_\alpha\, \partial\theta_\alpha/\partial P_j = \partial S/\partial P_j =$$

$$= \ln \xi^{\{j\}} + 1/2 u_j + 1/2 \sum_i (vk)^{-1}_{ji} P_i t. \qquad (79)$$

Отсюда следует, что

$$\xi^{\{j\}}(\hat{k}) = c_j \exp(\alpha_j t - u_j), \qquad (80)$$

где $\alpha_j \equiv -\sum_i (vk)^{-1}_{ij} P_i$. (Отметим, что члены $\partial S/\partial\theta_\alpha$ равны нулю в силу экстремальности действия.) Таким образом, мы приходим к известным выражениям [7, 8] для решений рассматриваемой задачи, которые удовлетворяют системе (4) при выполнении условий (78) на групповые параметры элемента $\hat{k}$.

Для иллюстрации процедуры реализации этих условий рассмотрим более подробно случай группы $SL(3, \mathbb{R})$, т. е. цепочку Тода, связанную с алгеброй A_2. Обозначим k^β_α, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 3$, элементы 3×3 ортогональной матрицы из $SO(3)$; при этом $\xi^{\{1\}} = k^1_1$, $\xi^{\{2\}} = k^1_1 k^2_2 - k^1_2 k^2_1 \equiv k^3_3$. Тогда с учетом формулы (П.14) система (78) перепишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
&K^R_{-\pi_1} S \equiv P_1 \frac{k^2_1}{k^1_1} - \exp\left(\frac{2u_1 - u_2}{2}\right) k^3_3/(k^1_1)^2 = 0;\\
&K^R_{-\pi_2} S \equiv -P_2 \frac{k^2_3}{k^3_3} - \exp\left(\frac{2u_2 - u_1}{2}\right) k^1_1/(k^3_3)^2 = 0;\\
&K^R_{-(\pi_1+\pi_2)} S \equiv P_1 \frac{k^3_1}{k^1_1} - P_2 \frac{k^1_3}{k^3_3} + \exp\left(\frac{2u_1 - u_2}{2}\right) k^2_3/(k^1_1)^2 +\\
&\qquad + \exp\left(\frac{2u_2 - u_1}{2}\right) k^2_1/(k^3_3)^2 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

(π_1, $\pi_1+\pi_2$, π_2 — положительные корни A_2). Ввиду того, что $k^1_1 = c_1 \exp\frac{1}{2}(\alpha_1 t - u_1)$, $k^3_3 = c_2 \exp\frac{1}{2}(\alpha_2 t - u_2)$ $\left(\alpha_1 \equiv -\frac{1}{3}(2P_1 + P_2),\ \alpha_2 \equiv -\frac{1}{3}(P_1 + 2P_2)\right)$ и, следовательно, из (81) $k^2_1 = P_1^{-1} c_1^{-1} c_2 \exp\frac{1}{2}[(\alpha_2 - \alpha_1)t - u_1]$, $k^2_3 = -P_2^{-1} c_1 c_2^{-1} \exp\frac{1}{2}[(\alpha_1 - \alpha_2)t -$

$-u_2]$, используя соотношение ортогональности $\sum_{\alpha=1}^{3} k_1^\alpha k_3^\alpha = 0$, находим

$$k_3^1 = (P_1 + P_2)^{-1} P_1^{-1} c_1^{-1} \exp \frac{1}{2} (-\alpha_1 t - u_2),$$

$$k_1^3 = (P_1 + P_2)^{-1} P_2^{-1} c_2^{-1} \exp \frac{1}{2} (-\alpha_2 t - u_1).$$

С учетом этих формул и соотношений $\sum_{\alpha=1}^{3} (k_1^\alpha)^2 = 1$, $\sum_{\alpha=1}^{3} (k_3^\alpha)^2 = 1$ приходим к явным выражениям для искомых классических траекторий для цепочки Тода в случае A_2 (см., например, [8]).

Картина Гейзенберга (канонический формализм). Для явного построения гейзенберговых операторов $\exp(-\hat{u}_i)$ в рамках гамильтонова подхода воспользуемся формулой Швингера (47) с $A(t) = \exp(-\varphi_j(t))$ и $U_j = \sum_i v_i \exp \psi_i (t_j)$, а также соотношениями (42) и (48), благодаря которым получаем

$$\left.\begin{aligned} &[\exp(-u_i)]_0 = \exp(-\varphi_i); \\ &[\exp(-u_i)]_{n\geqslant 1} = \exp(-\varphi_i) \sum_{j_1, \ldots, j_n} \prod_{l=1}^{n} (i\hbar)^{-1} v_{j_l} \exp \psi_{j_l}(t) \times \\ &\qquad \times I_{j_1 \ldots j_n}, \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

где

$$I_{j_1 \ldots j_n} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \prod_{m=1}^{n} dt_m\, \theta(t_{m-1} - t_m) \exp[a_{j_m}^{(1)} (t_m - t)] \times$$

$$\times \left[1 - \exp i\hbar \sum_{l=0}^{m-1} \hat{k}_{j_l j_m} (t_l - t_m) = \right.$$

$$= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \sum_{1 \leqslant q_1 < \ldots < q_m} \prod_{s=1}^{n} [c_{j_s}(q) + c_{j_{s+1}}(q) + \ldots + c_{j_n}(q)]^{-1}; \tag{83}$$

$$c_{j_s}(q) \equiv a_{j_s}^{(1)} + i\hbar \sum_{l=1}^{m} [\theta(q_l - 1)\, \hat{k}_{j_s j_{q_l}} + \delta_{s q_{l_n}} (\hat{\delta}_{i j_s} - \sum_{p=1}^{s-1} \hat{k}_{j_p j_s})];$$

$$\hat{\delta}_{ij} \equiv \delta_{ij} v_i^{-1}; \quad a_{j_m}^{(1)} \equiv a_{j_m} - i\hbar/2\hat{k}_{j_m j_m} - i\hbar \sum_{l=m+1} \hat{k}_{j_m j_l}.$$

Дальнейший анализ и упрощение решений в форме (83) достаточно сложны. Поэтому мы перепишем их в несколько ином виде:

$$\exp(-u_i(t)) = \langle i \mid \hat{\mathscr{M}}(t) \exp(-\varphi_i(t))\, \hat{\mathscr{M}}^+(t) \mid i \rangle, \tag{84}$$

где

$$\hat{\mathcal{M}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{j_1, \ldots, j_n} R_{j_1 \ldots j_n} X_{j_1} \ldots X_{j_n};$$

$$R^{\dagger}_{j_1 \ldots j_n} \equiv \prod_{s=1}^{n} \exp 1/2\, \psi_{j_s} [\sum_{m=s}^{n} a_{j_m}]^{-1}$$

[ср. с (24]. (Отметим, что множитель λ^n в разложении для $\hat{\mathcal{M}}^{\dagger}$ отсутствует.) Матричный элемент раскрывается по формуле (П.8), причем X_{+j} рассматривается в представлении, где $X^{\dagger}_{+j} = X_{-j}$. Первые три порядка в разложении по λ совпадают с приведенными выше выражениями. Для произвольного n-го порядка имеем

$$[\exp(-u_i(t))]_n = \exp(-\varphi_i) \times$$
$$\times \sum_{j_1 \ldots j_n} \delta_{ij_1} \prod_{s=1}^{n} \exp \psi_{j_s} \mathcal{F}^{(1)}_{j_1 \ldots j_n} \sum_{\omega} \prod_{l=2}^{n} [\delta_{ij_l}(1 + \xi_{j_l}) - k_{ij_l} -$$
$$- \sum_{m=2}^{l-1} k_{j_m j_l} \theta(j_l - j_m)] \mathcal{F}^{(2)}_{j \ldots j_n}, \qquad (85)$$

где суммирование по ω проводится по всем перестановкам индексов $(2, \ldots, n) \to (j_2, \ldots, j_n)$:

$$\mathcal{F}^{(\varepsilon)}_{j_1 \ldots j_n} \equiv \prod_{l=1}^{n} [\sum_{s=l}^{n} a^{(\varepsilon)}_{j_s}]^{-1}, \quad \varepsilon = 1,\ 2; \qquad (86)$$

$$a^{(2)}_{j_s} \equiv a^{(1)}_{j_s} + i\hbar\delta_{ij_s} - i\hbar \sum_{l=1}^{s-1} \hat{k}_{j_l j_s} + i\hbar \sum_{l=s+1}^{n} \hat{k}_{j_s j_l}.$$

Переход к классическому пределу ($\hbar \to 0$) сводится к тривиальной замене $a^{\varepsilon}_j \to a_j$, и в случае, когда k совпадает с матрицей Картана конечномерной простой алгебры Ли, окончательный результат воспроизводит эквивалентную форму записи известных классических решений [7, 8, 27] одномерной обобщенной (конечной, непериодической) цепочки Тода. При этом алгебраическая структура решений (в смысле их зависимости от матрицы Картана) в классическом и квантовом случаях одинакова. Поэтому же множители, зависящие только от элементов k_{ij} в классической области, обеспечивают обрывание рядов теории возмущений по λ и для соответствующей квантовой задачи. Таким образом, решения (84) — (86) представимы конечными полиномами по постоянной взаимодействия λ.

Картина Гейзенберга (формализм Янга — Фельдмана) Общее рассмотрение разд. 2, касающееся применения формализма Янга — Фельдмана для нахождения гейзенберговых операторов, в случае обобщенной цепочки Тода может быть доведено до окончательных явных выражений (84) — (86). Здесь $\Psi_i = \psi_i \equiv (k\varphi)_i$ и $g_0(t) = \exp[-(Hk^{-1}a)\,t - (Hk^{-1}b)]$, причем $[\psi_i(t_1), \psi_j(t_2)] = i\hbar\,(kv^{-1})_{ij} \times \times (t_1 - t_2)$. Тогда можно показать, что

$$J_+^{(t_1, -t_2, \ldots, \varepsilon_s t_s)} = g_0^{(\varepsilon_s)}(T_s)\,J_+\,(g_0^{(\varepsilon_s)}(T_s))^{-1}, \tag{87}$$

где

$$g_0^{(+1)}(T) \equiv g_0(T), \quad g_0^{(-1)}(T) \equiv \exp[-(Hk\tilde{a})\,T + i\hbar/2 \times \times (Hk^{-1}Hv^{-1})\,T]; \; \tilde{a}_j \equiv a_j + i\hbar v_j^{-1}. \tag{88}$$

Аналогичная формула для $J^{(t_1, -t_2, \ldots, \varepsilon_s t_s)}$ вытекает из (87) при применении эрмитового сопряжения (†) и учета соотношений $X_{+j}^\dagger = X_{-j}$, $H_j^\dagger = H_j$. (Напомним, что в рассматриваемом случае $J_\pm = \sum_j \delta_j^{1/2} H_j$). Доказательство (8) может быть получено использованием редукционной процедуры и непосредственным расчетом для $s = 2$. Действительно,

$$J_+^{(t_1, -t_2)} = g_0(t_1)\,[\sum_j \delta_j^{1/2} \exp\psi_j(t_2)\,X_j]\,g_0^{-1}(t_1) \equiv$$

$$\equiv \sum_j \delta_j^{1/2}\,[g_0(t_1)\exp\psi_j(t_2)\,g_0^{-1}(t_1)]\,[g_0(t_1)\,X_j g_0^{-1}(t_1)] =$$

$$= \sum_j \delta_j^{1/2}\,\{\exp[i\hbar\,(Hv^{-1})_j\,T_2]\exp\psi_j(t_2)\}\,\{\exp(-\psi_j(t_1))\,X_j\} =$$

$$= \sum_j \delta_j^{1/2}\exp[i\hbar\,(Hv^{-1})_j\,T_2]\exp\{[\psi_j(t_2) - \psi_j(t_1)] - i\hbar v_j^{-1} T_2\}\,X_j \equiv$$

$$\equiv g_0^{(-1)}(T_2)\,J_+\,(g_0^{(-1)}(T_2))^{-1}.$$

Подстановка этих соотношений для $J_\pm^{(t_1, -t_2, \ldots, \varepsilon_s t_s)}$ в соответствующие формулы для $\hat{u}_m(t)$ приводит к выражениям (84) — (86), если учесть, что $\exp(-u_i) \equiv \prod_j \delta_j^{-k_{ij}^{-1}} \langle i \mid g(t) \mid i \rangle$.

5. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим гейзенбергово поле $u(t, x)$ в двумерном пространстве-времени цилиндрического типа; другими словами, u определено на всей прямой $-\infty < t < +\infty$, а по координате x обладает свойством периодичности:

$$u(t, x + 2L) = u(t, x). \tag{89}$$

Выберем лагранжиан в виде

$$\Lambda = \frac{w}{2}\,(u_{,\alpha} u^{,\alpha} - \mu^2 e^{2u}) = \frac{w}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z^+}\frac{\partial u}{\partial z^-} - \mu^2 e^{2u}\right) = = \Lambda_0 + \mu^2 \Lambda_I; \; z^\pm \equiv \frac{t \pm x}{2}, \tag{90}$$

где w — константа размерности действия; μ^2 — константа самодействия. Соответствующее уравнение движения есть уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^+ \partial z^-} + \mu^2 e^{2u} = 0. \qquad (91)$$

Будем искать поле u как функционал от асимптотического поля $\varphi(t, x) \equiv u_{\text{in}} = \lim\limits_{t\to-\infty} u(t, x)$, явный вид которого дается разложением (52). Для этого воспользуемся уравнением Янга — Фельдмана (71), которое в данном случае принимает вид

$$u(z) = \varphi(z) - \mu^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt' \int\limits_{-L}^{L} dx'\, D^{\text{ret}}(z - z')\, e^{2u(z')} =$$
$$= \varphi(z) - \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int\limits_{z^- - L}^{z^-} dz^{-\prime} \int\limits_{z^+ - (k+1)L}^{z^+ - kL} dz^{+\prime}\, e^{2u(z')}. \qquad (92)$$

Мы разбили здесь полную область интегрирования на подобласти, на которых запаздывающая функция Грина постоянна, и использовали свойство периодичности u по x. Будем решать это уравнение итерациями, рассматривая μ^2 как параметр малости. В первом приближении вместо u подставляем в правую часть φ. После этого область интегрирования по z' можно разбить на отрезки длины L и, используя формулы перемножения из разд. 3, свести все интегралы к интегралу по стандартному промежутку $(z^\pm, z^\pm - L)$. Элементарное суммирование возникающих рядов приводит окончательно к формуле

$$u_1 = -(1 - e^{-P-i})^{-2}\,\Phi; \quad \Phi \equiv \int\limits_{z^- - L}^{z^-} dz^{-\prime} \int\limits_{z^+ - L}^{z^+} dz^{+\prime}\, e^{2\varphi(z')}.$$

Здесь и далее мы опускаем для простоты множитель $\hbar/w$ при i, восстанавливая его только в окончательном ответе.

Для получения второго приближения в правую часть (92) следует вместо u подставить $\varphi + u_1$. Формулы перемножения операторных экспонент (39) и редукционная формула (64) показывают, что u_2 пропорционально Φ^2, причем множитель пропорциональности зависит только от оператора P. И вообще, можно записать

$$u = \varphi + \tilde{u} = \varphi + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{2l} u_l = \varphi + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{2l} f_l(P)\, \Phi^l. \qquad (93)$$

Подставим это разложение в уравнение (92). Запишем $\exp(2u) = \exp(2\varphi)\,[\exp(-2\varphi)\exp(2u)] = \exp(2\varphi)\, T \exp \int\limits_0^1 dt\, e^{-2\varphi t}\tilde{u}\, e^{2\varphi t}$. Используя формулы (60), (62), вычисляем $\exp(-2\varphi t)\, u_l \exp(2\varphi t) = f_l(P-2\mathrm{i}t)\, e^{2\mathrm{i}lt}\Phi^l$. Интегралы по z берутся с помощью редукционной формулы (64). Наконец, с помощью перестановочных соотношений для Φ с функциями от P (63) все Φ в правой части (92) могут быть пронесены вправо. После этого, приравнивая коэффициенты при равных степенях μ^2, получаем рекуррентное соотношение для $f_l(P)$:

$$f_{l+1} = -\frac{(1-e^{\mathrm{i}})^2}{(1-e^{\mathrm{i}(l+1)})^2(1-e^{-P-\mathrm{i}(l+1)})^2}\times$$
$$\times \sum_{m=1}^{l} 2^m \sum_{\substack{\Sigma l_i = l\\ l_1,\ldots,l_m}} \int_0^1 dt_1\, e^{2\mathrm{i}l_1t_1} f_{l_1}(P-2\mathrm{i}t_1+2\mathrm{i}) \int_0^{t_1} dt_2\, e^{2\mathrm{i}l_2t_2} f_{l_2}\times$$
$$\times(P-2\mathrm{i}t_2+2\mathrm{i}l_1+2\mathrm{i})\times\ldots\times\int_0^{t_{m-1}} dt_m\times$$
$$\times e^{2\mathrm{i}l_mt_m} f_{l_m}(P-2\mathrm{i}t_m+2\mathrm{i}l_1+\ldots+2\mathrm{i}l_{m-1}+2\mathrm{i}). \tag{94}$$

Заметим прежде всего, что при $P\to\infty$ $f_l(P)$ принимают вид

$$f_l^{(0)} = \frac{(-1)^l}{\mathrm{i}^{l-1}}\,\frac{(e^{\mathrm{i}}-1)^l}{e^{\mathrm{i}l}-1}. \tag{95}$$

В этом можно убедиться, не обращаясь к рекуррентным соотношениям, а заметив, что при $P\to\infty$ T-экспонента в выражении для $\exp(2u)$ превращается в обычную экспоненту (поскольку подынтегральные выражения при любых значениях параметра t коммутируют), после чего f_l определяется элементарно. Решение же соотношений (94) имеет вид

$$f_l = f_l^{(0)}\frac{1}{1-e^{-P-\mathrm{i}l}}\prod_{m=1}^{2l-1}\frac{1}{1-e^{-P-\mathrm{i}m}}, \tag{96}$$

в чем мы убедимся непосредственной подстановкой в уравнение Лиувилля.

Для вычисления $\partial^2u/\partial z^+\partial z^-$ воспользуемся формулами дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^+\partial z^-} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^+\partial z^-} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^+\partial z^-} = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{2k} f_k(P)\frac{\partial^2\Phi^k}{\partial z^+\partial z^-} =$$
$$= \sum_k \mu^{2k} f_k(P)\frac{(1-e^{\mathrm{i}k})^2}{(1-e^{\mathrm{i}})^2}(1-e^{-P-\mathrm{i}k})^2 e^{2\varphi}\Phi^{k-1} =$$
$$= e^{2\varphi}\sum_k \mu^{2k} f_k(P-2\mathrm{i})\frac{(e^{\mathrm{i}k}-1)^2}{(e^{\mathrm{i}}-1)^2}(1-e^{-P+2\mathrm{i}-\mathrm{i}k})^2\,\Phi^{k-1} =$$

$$= -e^{i\varphi}\frac{\mu^2}{(e^i-1)(1-e^{-P+i})}\sum_k (e^{ik}-1)(1-e^{-P+2i-ik})\times$$
$$\times\left[i\mu^2(e^i-1)\frac{1}{(1-e^{-P})(1-e^{-P-i})}\Phi\right]^{k-1}=$$
$$=e^{2\varphi}\frac{\mu^2}{(e^i-1)(1-e^{-P+i})}\left\{(1+e^{-P+2i})\frac{1}{1+X}-e^i\frac{1}{1+e^iX}-\right.$$
$$\left.-e^{-P+i}\frac{1}{1+e^{-i}X}\right\}=e^{2\varphi}\frac{\mu^2}{1-e^{-P+i}}\times$$
$$\times\left\{e^{-P+i}\frac{1}{e^{-i}X+1}-\frac{1}{e^iX+1}\right\}\frac{1}{1+X}, \tag{97}$$

где $X\equiv\frac{\mu^2}{i}(e^i-1)(1-e^{-P})^{-1}(1-e^{-P-i})^{-1}\Phi$ [здесь использованы перестановочные соотношения для $F(P)$ и Φ, а также явный вид $f_l(P)$ (95), (96)]. В то же время вычислим оператор $\exp(-u)$. Имеем $\exp(-u)=\exp(-\varphi)[\exp\varphi\cdot\exp(-u)]=\exp(-\varphi)R$, где

$$R=R(\tilde{u})=T\exp\left\{-\int_0^1 dt e^{\varphi t}\tilde{u}e^{-\varphi t}\right\}. \tag{98}$$

Повторяя аргументацию, использованную при решении уравнения Янга — Фельдмана, можно записать

$$R=\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{2l}R_l(P)\Phi^l. \tag{99}$$

Сравнивая с выражением (97), получаем

$$R_l=\sum_{m=1}^{l}(-1)^m\sum_{l_1,\ldots,l_m}^{\sum l_i=l}\int_0^1 dt_1 e^{-il_1t_1}f_{l_1}(P+it_1)\int_0^{t_1}dt_2e^{-il_2t_2}f_{l_2}\times$$
$$\times(P+it_2+2il_1)\times\ldots\times\int_0^{t_{m-1}}dt_me^{-il_mt_m}f_{l_m}\times$$
$$\times(P+it_m+2il_1+\ldots+2il_{m-1})\quad(l\geqslant 1). \tag{100}$$

Непосредственным вычислением находим

$$R_0=1;\; R_1=\frac{e^i-1}{ie^i}\frac{1}{(1-e^{-P-i})(1-e^{-P-2i})};\; R_2=0. \tag{101}$$

Кроме того, в пределе $P\to\infty$ имеем $R_l^{(0)}=0$ $(l\geqslant 2)$ (что снова легко получается с учетом того, что T-экспонента для R превращается в обычную экспоненту). Перейдем в (100) от интегрирования по t_l к интегрированию по $z_l\equiv P+it_l$. При этом выделится множитель $\exp(lP)$, а в остальном зависимость от P останется лишь в пределах интегрирования. После этого легко провести дифференцирование по P, причем остающиеся интегралы сводятся к R_l с меньшими значениями l. В результате получаем:

$$e^{lP}\frac{\partial}{\partial P}[R_l e^{-lP}]=i\sum_{n=1}^{l}[e^{-in}f_n(P+i)R_{l-n}(P+2in)-$$
$$-f_n(P+2il-2in)R_{l-n}(P)].$$

Докажем по индукции, что $R_l=0$ ($l\geqslant 2$). Предположим $R_2=\ldots$ $\ldots=R_{l-1}=0$. Тогда

$$e^{lP}\frac{\partial}{\partial P}[R_l e^{-lP}]=e^{-il}f_l(P+i)-f_l(P)+$$
$$+e^{-i(l-1)}f_{l-1}(P+i)R_1(P+2i(l-1))-f_{l-1}(P+2i)R_1(P).$$

Вычисление с помощью (96), (101) дает $e^{lP}\partial/\partial P(R_l e^{-lP})=0$, т. е. $R_l=Ce^{lP}$. Поскольку при $P\to\infty$ должно быть $R_l\to 0$, то $C=0$. Итак,

$$e^{-u}=e^{-\varphi}\left[1+\frac{2w}{\hbar}\sin\frac{\hbar}{2w}e^{-\frac{i\hbar}{2w}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\mu^2}{(1-e^{-P-i\hbar/w})(1-e^{-P-2i\hbar/w})}\Phi\right]. \qquad (102)$$

Теперь находим: $\exp(2u)=R^{-1}e^{\varphi}R^{-1}e^{\varphi}=e^{2\varphi}R^{-1}(P-2i)R^{-1}\times$ $\times(P-i)$. Сравнивая с (97), убеждаемся, что (93), где $f_l(P)$ даются формулами (97), (98), действительно удовлетворяет уравнению Лиувилля. Важнейшей особенностью полученных решений является то, что ряд теории возмущений для $\exp(-u)$ обрывается; конкретно в данном случае $\exp(-u)$ — линейная функция μ^2.

Можно совершить формальный переход к полю в бесконечном пространстве, вводя $P'\equiv L^{-1/2}P$ и устремляя $L\to\infty$; при этом

$$f_l=f_l^{(0)}\text{ и } e^{-u}=e^{-\varphi}\left[1+\frac{2w}{\hbar}\sin\frac{\hbar}{2w}e^{-\frac{i\hbar}{2w}}\mu^2\Phi\right], \qquad (103)$$

что совпадает с выражениями, полученными в работе [35]. Однако если операторы $\varphi(t, x)$ в периодической по x задаче хорошо определены, то соответствующие операторы для задачи в бесконечном пространстве трудно интерпретировать физически; как известно [13], они не могут быть реализованы в фоковском пространстве. Для бесконечного пространства можно, однако, использовать в качестве регуляризационной процедуры переход к конечному интервалу.

Выражение (103) имеет правильный классический предел. Действительно, устремляя $\hbar\to 0$, получаем одну из форм общего классического решения Лиувилля, выраженного через две произвольные функции, заданные на характеристиках.

Мы решили квантовое уравнение Лиувилля с помощью формализма Янга — Фельдмана. То же решение может быть получено и с помощью канонического формализма, с использованием половинной S-матрицы. Мы продемонстрируем это для случая бесконечного пространства (который технически проще, чем случай конечного интервала). Используя формулу Швингера (см. разд. 3), ряд теории возмущений будем строить для оператора exp $(-u)$. В нулевом порядке exp $(-u)$ = exp $(-\varphi)$. В первом порядке

$$(e^{-u(z)})_1 = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{z} dz' \theta(t-t') [e^{-\varphi(z)}, \ e^{2\varphi(z')}].$$

Используя перестановочное соотношение (58), а также легко проверяемую формулу

$$\theta(t-t')[1-a^{\varepsilon(z-z')}] = (1-a^2)\,\theta(z-z'),$$

находим

$$(e^{-u})_1 = \frac{2w}{\hbar} \sin\frac{\hbar}{2w}\, e^{-\frac{i\hbar}{2w}} e^{-\varphi}\Phi.$$

Все последующие порядки обращаются в нуль (см. общее доказательство в разд. 6). Таким образом мы действительно снова пришли к формуле (103).

6. МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ. А

Перейдем теперь к обобщенным моделям Лиувилля, а именно к моделям с лагранжианом вида (49), где взаимодействие имеет экспоненциальный характер:

$$V(u) = \sum_{\alpha=1}^{r} w_\alpha \exp\Big(\sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta} u_\beta\Big). \tag{104}$$

Тогда уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^+ \partial z^-} + \mu^2 \exp\Big(\sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta} u_\beta\Big) = 0. \tag{105}$$

(Относительно обозначений см. разд. 3.) Вычисление гейзенберговых полевых операторов будем проводить с помощью формулы (70). Хотя, как отмечено в разд. 3, в случае бесконечной координатной прямой x интерпретация полей φ_α неясна, мы проведем вычисления именно на этом примере, чтобы избежать дополнительных алгебраических осложнений, возникающих в задаче с циклической координатой x.

Общая структура взаимодействия (104) позволяет преобразовать формулу (70). Введем «двухточечные операторы поля» $\psi^{\alpha}_{ij} \equiv \psi^{+}_{\alpha}(z^{+}_{i}) + \psi^{-}_{\alpha}(z^{-}_{j})$, перестановочные соотношения для которых, вследствие (66), имеют вид

$$[\psi^{\alpha}_{ij}, \psi^{\beta}_{kl}] = -\frac{i\hbar}{4}\hat{k}_{\alpha\beta}[\varepsilon(z^{+}_{i}-z^{+}_{k})+\varepsilon(z^{-}_{j}-z^{-}_{l})]. \qquad (106)$$

Определим операторы

$$V_{ij} \equiv V(z^{+}_{i}, z^{-}_{j}) \equiv \sum_{\alpha} 2w_{\alpha} \exp \psi^{\alpha}_{ij}, \qquad (107)$$

так что в (70) $V_i = \frac{1}{2} V_{ii}$.

Из (106) и (39) следуют перестановочные соотношения для V_{ij}:

$$[V_{ij}, V_{kl}] = \sum_{\alpha,\beta} 4w_{\alpha}w_{\beta} \exp \psi^{\alpha}_{ij} \exp \psi^{\beta}_{kl} \times$$
$$\times \left\{1 - \exp\left[\frac{i\hbar}{4}\hat{k}_{\alpha\beta}(\varepsilon(z^{+}_{i}-z^{+}_{k})+\varepsilon(z^{-}_{j}-z^{-}_{l}))\right]\right\}. \qquad (108)$$

Отметим, что дальнейшие рассуждения основаны, по существу, не на экспоненциальном характере взаимодействия, а на алгебраической структуре соотношений (108), выраженной c-числовыми множителями в правой части. В частности, существенно, что

$$[V_{ij}, V_{kl}] = 0 \text{ при } (z^{+}_{i}-z^{+}_{k})(z^{-}_{j}-z^{-}_{l}) < 0 \qquad (109)$$

(поскольку аргументы ε-функций при этом имеют противоположный знак и все экспоненты обращаются в единицу). Выберем в качестве $A[u]$ функцию $\exp(gu_{\alpha})$. Переходя от интегрирования по $dt_i\,dx_i$ к интегрированию по $dz_i \equiv dz^{+}_{i}\,dz^{-}_{i}$, мы можем переписать формулу (70) в виде

$$(e^{gu_{\alpha}})_n = \frac{1}{(i\hbar)^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \ldots dz_n\,\theta(t-t_1)\ldots$$
$$\ldots\theta(t_{n-1}-t_n)[e^{g\varphi_{\alpha}}, V_{11}, \ldots, V_{nn}]. \qquad (110)$$

Окончательное выражение для n-го порядка теории возмущений имеет вид

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{2}k_{\alpha\alpha}u_{\alpha}\right)\right)_n = \exp\left(-\frac{1}{2}k_{\alpha\alpha}\varphi_{\alpha}\right)2w_{\alpha}f\left(-\frac{1}{2}\hat{k}_{\alpha\alpha}\right)\times$$
$$\times\sum_{\beta_2\ldots\beta_n}\sum_{p(\beta)}\exp\left(\frac{i\hbar}{4}F_p\right)\Phi^{+}_{\alpha\beta_2\ldots\beta_n}\Phi^{-}_{\alpha\beta_{p(2)}\ldots\beta_{p(n)}}\prod_{s=2}^{n}2w_{\beta_s}f\times$$
$$\times\left(-\delta^{p}\delta_{\alpha\beta_s}\hat{k}_{\alpha\alpha}+\hat{k}_{\alpha\beta_s}+\sum_{l=2}^{s-1}\hat{k}_{\beta_l\beta_s}\theta(p(s)-p(l))\right), \qquad (111)$$

где $\delta^p = 1$, если сумма по l равна нулю и $\delta^p = 1/2$ в остальных случаях; $F_p(\beta, k) = \sum_{l<m}^{n} \hat{k}_{\beta j_l \beta j_m} \theta(j_l - j_m)$.

С целью анализа свойств ряда теории возмущений для $\exp\left(-\frac{1}{2} k_{\alpha\alpha} u_\alpha\right)$ перейдем к классическому пределу $\hbar \to 0$:

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{2} k_{\alpha\alpha} u_\alpha\right)\right)_n = \exp\left(-\frac{1}{2} k_{\alpha\alpha} \varphi_\alpha\right) \sum_{\beta_2 \ldots \beta_n} \sum_{p(\beta)} \Phi^+_{\alpha\beta_2 \ldots \beta_n} \times$$
$$\times \Phi^-_{\alpha\beta_{p(2)} \ldots \beta_{p(n)}} \prod_{s=2}^{n} \left[\delta^p \delta_{\alpha\beta_s} k_{\alpha\alpha} - k_{\alpha\beta_s} - \sum_{l=2}^{s-1} k_{\beta_l \beta_s} \theta(p(s) - p(l))\right]. \quad (112)$$

Это есть другая форма полученных в [8] классических решений. В форме [8], однако, по построению ясно, что $\exp\left(-\frac{1}{2} k_{\alpha\alpha} u_\alpha\right)$ являются полиномами по константе связи μ^2 тогда и только тогда, когда $k_{\alpha\beta}$ — матрица Картана полупростой группы Ли. Это означает, что в формуле (112) коэффициенты при

$$\Phi^+_{\alpha\beta \ldots} \Phi^-_{\alpha\gamma \ldots}$$

все обращаются в нуль, начиная с некоторого n. Но отсюда следует, что и коэффициенты в (111) обращаются в нуль начиная с этого n, так что в квантовой задаче ряд тоже обрывается. Обратно, если ряды (111) обрываются, то это верно и в классическом пределе, так что $k_{\alpha\beta}$ — матрица Картана. Итак: операторы $\exp\left(-\frac{1}{2} k_{\alpha\alpha} u_\alpha\right)$ имеют вид полиномов по константе связи μ^2 тогда и только тогда, когда $k_{\alpha\beta}$ является матрицей Картана полупростой группы Ли.

В иллюстративных целях приведем конкретные выражения для гейзенберговых операторов в случаях, соответствующих матрицам Картана k классических простых алгебр Ли второго ранга:

$$\left.\begin{array}{l}
A_2 : k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad w_\alpha = w/2 \\
e^{-u_1} = e^{-\varphi_1}[1 + \mu^2 \lambda \Phi_1^+ \Phi_1^- + \mu^4 \lambda^2 \Phi_{12}^+ \Phi_{12}^-], \\
e^{-u_2} = e^{-\varphi_2}[1 + \mu^2 \lambda \Phi_2^+ \Phi_2^- + \mu^4 \lambda^2 \Phi_{21}^+ \Phi_{21}^-]. \\
B_2 : k = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \{w_\alpha\} = w(1/2, \ 1), \\
e^{-u_1} = e^{-\varphi_1}[1 + \mu^2 \lambda \Phi_1^+ \Phi_1^- + 2\mu^4 \lambda^2 \Phi_{12}^+ \Phi_{12}^- + \\
\quad + 4\mu^6 \lambda^3 e^{i\hbar/2w} \Phi_{122}^+ \Phi_{122}^- + 4\mu^2 \lambda^4 e^{i\hbar/2w} \Phi_{1221}^+ \Phi_{1221}^-], \\
e^{-u_2} = e^{-\varphi_2}[1 + \mu^2 \lambda' \Phi_2^+ \Phi_2^- + \mu^4 \lambda \lambda' \Phi_{21}^+ \Phi_{21}^- + \mu^6 \lambda (\lambda')^2 \Phi_{212}^+ \Phi_{212}^-].
\end{array}\right\} \quad (113)$$

Здесь

$$\lambda \equiv \frac{2w}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{2w} e^{-i\hbar/2w};$$

$$\lambda' \equiv \frac{4w}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{4w} e^{-i\hbar/4w}.$$

7. МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ. В

Остановимся кратко на квантовании системы (90) с циклической пространственной координатой x. Частный случай $r = 1$ подробно разобран в разд. 5. Характерные особенности этого случая сохраняются и для произвольного r, а именно мы видели, что при переходе к циклической координате в функционале Ф интегрирование соответственно идет в конечных пределах, а перед Ф появляется множитель, зависящий лишь от оператора P «нулевой моды». При этом остается неизменным коэффициент, явно содержащий $\hbar$, алгебраические свойства которого фактически и обеспечивают обрыв ряда теории возмущений для $\exp(-u)$.

Мы не будем здесь заниматься общим доказательством соответствующих формул, которое заметно усложняется по сравнению с предыдущим разделом, а приведем схему вычисления двух первых порядков теории возмущений и покажем соответствие с другими рассмотренными в обзоре задачами путем предельных переходов. Вычисления будем проводить с помощью уравнения Янга — Фельдмана (71), где в данном случае

$$j_\alpha = -\mu^2 \exp\Big(\sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta} u_\beta\Big).$$

Расчет первого порядка по сути ничем не отличается от приведенного в разд. 5 расчета для уравнения Лиувилля: имеем

$$(u_\alpha)_1 = \Big[1 - \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(p_\alpha + \frac{i\hbar}{2}\hat{k}_{\alpha\alpha}\Big)\Big)\Big]^{-2} \Phi^L_{\alpha;\,\alpha}, \qquad (114)$$

где

$$\Phi^L_{\alpha;\,\alpha} \equiv \int\limits_{z^+-L}^{z^+} dz^{+\prime} \int\limits_{z^--L}^{z^-} dz^- \exp \psi_\alpha(z'); \qquad (115)$$

$$p_\alpha \equiv \sum_\beta k_{\alpha\beta} P_\beta; \quad q_\alpha \equiv \sum_\beta k_{\alpha\beta} Q_\beta;$$

$$a_n^{\pm\alpha} \equiv \sum_\beta k_{\alpha\beta} A_n^{\pm\alpha}.$$

Второй порядок вычисляется по схеме разд. 3, где вместо (60)—(62) используются точно так же доказываемые формулы

$$\left.\begin{aligned} \exp(-b\psi_\beta)\, f(p_\alpha) \exp(b\psi_\beta) &= f(p_\alpha - \mathrm{i}\hbar b\hat{k}_{\alpha\beta}); \\ \exp(ap_\alpha + b\psi_\beta) &= \exp\left(ap_\alpha + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2} ab\hat{k}_{\alpha\beta}\right) \exp(b\psi_\beta). \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Далее полная область интегрирования разбивается на подобласти постоянства D^{ret}, интегралы по которым с помощью тождества

$$\exp(-b\psi_\beta)\, \Phi^L_{\alpha;\,\alpha} \exp(b\psi_\beta) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2} b\hat{k}_{\alpha\beta}\right) \Phi^L_{\alpha;\,\alpha}, \tag{117}$$

обобщающего (62), сводятся к интегралам по стандартной области

$$\int\limits_{z^+-L}^{z^+} dz^{+\prime} \int\limits_{z^--L}^{z^-} dz^{-\prime} e^{\psi_\alpha(z')} \Phi^L_{\beta;\,\beta}(z'), \tag{118}$$

коэффициенты при которых зависят лишь от операторов p. Получающийся ряд коэффициентов сворачивается, интеграл же (118) с помощью элементарных преобразований (подобных проведенным в разд. 6), в подробности которых мы здесь не будем вдаваться, сводится к интегралу

$$\Phi^L_{\alpha\beta;\,\alpha\beta} = \int\limits_{z^+-L}^{z^+} dz_1^+ \int\limits_{z^--L}^{z^-} dz_1^- e^{\psi_\alpha(z_1)} \int\limits_{z_1^+-L}^{z_1^+} dz_2^+ \int\limits_{z^--L}^{z_1^-} dz_2^- e^{\psi_\beta(z_2)}. \tag{119}$$

В результате находим:

$$\begin{gathered} (u_\alpha)_2 = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} \sum_\beta 2w_\beta \left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\beta}\right) - 1\right] \times \\ \times \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_\alpha + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\alpha} + p_\alpha + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \hat{k}_{\beta\beta} + \mathrm{i}\hbar\hat{k}_{\alpha\beta}\right)\right)\right]^{-2} \times \\ \times \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_\beta + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \hat{k}_{\beta\beta} + \mathrm{i}\hbar\hat{k}_{\alpha\beta}\right)\right)\right]^{-1} \times \\ \times \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_\beta + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \hat{k}_{\beta\beta}\right)\right)\right]^{-1} \Phi^L_{\alpha\beta;\,\alpha\beta}. \end{gathered}$$

Как и в случае бесконечного пространства, удобно перейти к операторам $\exp\left(-\frac{1}{2} k_{\alpha\alpha} u_\alpha\right)$. Это делается по общим правилам, изложенным в разд. 3, с помощью формул (53), (54).

Вычисление следующих порядков не имеет каких-либо принципиальных особенностей, и мы приведем без доказательства окончательный результат:

$$\left[\exp\left(-\frac{1}{2}k_{\alpha\alpha}u_{\alpha}\right)\right]_n = \exp\left(-\frac{1}{2}k_{\alpha\alpha}\varphi_{\alpha}\right)\times$$

$$\times\sum_{\beta_2\ldots\beta_n}\sum_{P(\beta)}K^{\alpha}_{\beta;\,P(\beta)}S^{+\alpha}_{\beta}S^{-\alpha}_{P(\beta)}\Phi^{L}_{\alpha\beta_2\ldots\beta_n;\,\alpha P(\beta_2)\ldots P(\beta_n)}. \qquad (120)$$

где второй знак суммы означает суммирование по всем подстановкам индексов $(\beta_2, \ldots, \beta_n)$, а суммирование по каждому β_s идет от 1 до r. Здесь функционалы

$$\Phi^{L}_{\alpha\beta\ldots;\,\mu\nu\ldots} \equiv \int\limits_{z^+-L}^{z^+} dz_1^+ \int\limits_{z^--L}^{z^-} dz_1^- \times$$

$$\times \exp\psi_{\alpha\mu}(z_1)\int\limits_{z_1^+-L}^{z_1^+} dz_2^+ \int\limits_{z_1^--L}^{z_1^-} dz_2^- \exp\psi_{\beta\nu}(z_2)\ \ldots;$$

$$\psi_{\alpha\mu} \equiv q_{\alpha} + \psi^+_{\alpha}(z^+) + \psi^-_{\mu}(z^-);$$

$$\psi^{\pm}_{\alpha} \equiv \frac{1}{2L}p_{\alpha}z^{\pm} + \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}a_n^{\pm\alpha}e^{-\frac{2\pi i n}{L}z^{\pm}}$$

являются аналогом функционалов

$$\Phi^{+}_{\alpha\beta_2\ldots\beta_n}\Phi^{-}_{\alpha P(\beta_2)\ldots P(\beta_n)}$$

из формулы (111); функционалы

$$S^{\pm\alpha}_{\beta_2\ldots\beta_n} \equiv \prod_{s=1}^{n}\left[1-\exp\left(-\frac{1}{2}\left(p^{\pm}_{\beta_s}+p^{\pm}_{\beta_{s+1}}+\ldots+p^{\pm}_{\beta_n}\right)\right)\right]^{-1};\quad \beta_1\equiv\alpha; \qquad (121)$$

$$p^{+}_{\beta_s} \equiv p_{\beta_s} + \frac{i\hbar}{2}k^{1}_{\beta_s\beta_s} + i\hbar\sum_{l=s+1}^{n}\hat{k}_{\beta_l\beta_s};$$

$$p^{-}_{\beta_s} \equiv \frac{i\hbar}{2}\hat{k}_{\beta_s\beta_s} + p_{\beta_s} + i\hbar\sum_{l=1}^{s-1}\hat{k}_{\beta_l\beta_s} + \frac{i\hbar}{w_{\alpha}}\delta_{\alpha\beta_s}$$

являются функциями лишь от операторов «нулевой моды» p_μ; коэффициенты же

$$K^{\alpha}_{\beta;\ P(\beta)} \equiv 2w_\alpha f\left(-\frac{1}{2}\hat{k}_{\alpha\alpha}\right)\exp\left[\frac{i\hbar}{4}F_P\right]\times$$
$$\times\prod_{s=2}^{n}2w_{\beta_s}f\left(-\delta^P\delta_{\alpha\beta_s}\hat{k}_{\alpha\alpha}+\hat{k}_{\alpha\beta_s}+\Delta^P\right); \qquad (122)$$
$$\Delta^P\equiv\sum_{l=2}^{s-1}k_{\beta_l\beta_s}^{1}\theta\left(P(s)-P(l)\right);$$
$$\delta^P\equiv\begin{cases}1, & \Delta^P=0;\\ 1/2, & \Delta^P\neq 0:\end{cases}$$
$$f(x)\equiv\left[1-\exp\left(\frac{i\hbar}{2}x\right)\right]\Big/ i\hbar,$$

где F_P та же, что и в (111).

Таким образом, по сравнению с бесконечным пространством формулы для гейзенберговых операторов модифицируются следующим образом: функционалы Φ свободных полей заменяются аналогичными функционалами, имеющими вид стандартных интегралов по конечной пространственно-временной области, причем перед ними появляются множители, несущие явную зависимость от операторов «нулевой моды». Поскольку коэффициенты (зависящие лишь от $\hbar$ и от элементов матрицы k) остаются теми же, то можно сразу сделать вывод, что обрыв рядов теории возмущений, который обусловлен алгебраическими свойствами коэффициентов, происходит в рассматриваемой задаче в тех же случаях, что и в задаче с бесконечным пространством, а именно тогда и только тогда, когда матрица k является матрицей Картана полупростой алгебры Ли.

Формальное соответствие с задачей в бесконечном пространстве может быть установлено следующим образом: вводим новые операторы $p'_\alpha\equiv L^{-1/2}p_\alpha$ и устремляем $L\to\infty$, тогда ряд Фурье в (120) переходит в интеграл Фурье, операторы же p'_α становятся перестановочными со всеми операторами, вследствие чего можно положить $p'_\alpha\equiv 0$; тогда гамильтониан (54) переходит в соответствующий гамильтониан бесконечной задачи. Действительно, производя соответствующий предельный переход в (120), возвращаемся к формуле (49).

Далее, обратим внимание, что структура показателей экспоненты в (121) сходна со структурой знаменателей, появляющихся в решении (85) для одномерной задачи. Это не случайно: действительно, из (52) — (55) видно, что если положить $a_\alpha\equiv(2L)^{-1}p_\alpha$, $w^1_\alpha\equiv 2Lw_\alpha$ и устремить $L\to 0$, то $a_n^{\pm\alpha}$ становятся коммутирующими, после чего можно положить $a_n^{\pm\alpha}\equiv 0$; в результате гамильтониан (54) переходит в гамильтониан одномерной задачи. Для проверки перенесем в (110)

Φ влево от S, используя формулу (117), затем положим $p_\alpha = 2La_\alpha$, $w_\alpha = \frac{1}{2L} w'_\alpha$ и перейдем к пределу $L \to 0$. Тогда Φ^L перейдет в $\Phi^+_{\alpha\beta_2 \ldots \beta_n} \Phi_{\alpha P(\beta_2) \ldots P(\beta_n)}$ (с выделением множителя L^{2n}), экспоненты (121) и (122) — в линейные функции [с выделением множителя L^{-2n}] и в пределе для гейзенберговых операторов получаем, действительно, формулу (111).

Переход к классическому пределу, $\hbar \to 0$, в (120) ничем не отличается от соответствующего перехода в (111). Выполнение принципа соответствия можно проверить, подставляя в известные классические решения [8] [см. также (112)] периодические по x функции ψ_α и сводя функционалы Φ к интегралам по стандартной области с выделением зависящего от p_μ множителя.

В заключение в качестве иллюстрации приведем операторы, модифицирующие формулы (113) для простой алгебры A_2:

$$S^{+1}S^{-1} = \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_1 + \frac{2i\hbar}{w}\right)\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_1 + \frac{4i\hbar}{w}\right)\right)\right]^{-1};$$
$$S_2^{+1}S_2^{-1} = \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_2 + \frac{2i\hbar}{w}\right)\right)\right]^{-1}\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}p_2\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_1 + p_2 + \frac{2i\hbar}{w}\right)\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_1 + p_2 + \frac{4i\hbar}{w}\right)\right)\right]^{-1};$$
$$S^{+2}S^{-2},\ S_1^{+2}S_1^{-2}:\ 1 \leftrightarrow 2.$$

8. СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ЛИУВИЛЛЯ В КВАНТОВОЙ ОБЛАСТИ

Проведенное выше изучение квантовомеханических и полевых моделей с бозе-полями показывает, что в квантовой области условие их точной интегрируемости формулируется в тех же терминах теории представлений (конечномерных) алгебр Ли, что и в классической, где причиной этого является наличие у систем нетривиальной группы внутренних симметрий [47—49]. Для экспоненциальных систем условием обрыва ряда теории возмущений для определенных динамических величин в классической области и соответствующих квантовых гейзенберговых операторов является пропорциональность «матрицы констант взаимодействия» (105) матрице Картана простой алгебры Ли. Поэтому следует ожидать, что понятие группы внутренней симметрии переносится и в квантовую область, хотя описать ее в явном виде пока не удается. В этой связи представляется интересным выяснить, может ли сохраняться данная ситуация при включении в систему фермионных полей. Рассмотренный ниже пример квантовой суперсимметричной модели Лиувилля показывает, что такого не происходит и условие конечности ряда теории возмущений выражается в виде соотношения между константами системы, содержащего постоянную Планка. Тем самым напрашивается вывод о том, что понятие группы внутренней симметрии в квантовом случае, по крайней мере при наличии фермионных полей, должно быть каким-то образом модифицировано. Кроме того, из взаимосвязи решений классического и квантового суперсимметричных уравнений Лиувилля следует, что грассмановы переменные классической задачи можно понимать как формальный предел квантовых гейзенберговых фермионных полей. В этом смысле антикоммутативность грассмановых переменных вытекает из соотношения (125) при $\hbar \to 0$.

Лагранжиан рассматриваемой системы взаимодействующих скалярного $u(x)$ и спинорного $\theta(x)$ полей запишем, имея в виду, что в классическом пределе при соотношении $\mu^2 = +4\nu^2$ он приводит к компонентной форме записи суперсимметричного уравнения Лиувилля [37] в следующем виде:

$$\Lambda = 1/2\,(u_{,\alpha}u^{,\alpha} - \mu^2 \exp 2u) + i\theta\gamma^\alpha\theta_{,\alpha} - \nu\bar{\theta}\theta \exp u, \qquad (123)$$

где $\theta(x)$ — майорановский спинор; $\bar{\theta} = \theta^+\gamma_0$;

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем пользоваться координатами светового конуса $z_\pm \equiv 1/2\,(x_0 \pm x_1)$ и «$\pm$»-компонентами спинорного поля $\theta^\pm = \theta_1 \pm \theta_2$.

Лагранжиан (123) приводит к уравнениям движения:

$$\left.\begin{aligned} &\partial^2 u/\partial z_+\,\partial z_- + \mu^2 \exp 2u + \nu\theta^-\theta^+ \exp u = 0; \\ &\partial\theta^+/\partial z_- = \nu\theta^- \exp u; \\ &\partial\theta^-/\partial z_+ = -\nu\theta^+ \exp u. \end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

Для вычисления формальных рядов теории возмущений для соответствующих операторов в представлении Гейзенберга воспользуемся формулой типа (110), в которой $V_{ij} = \mu^2 \exp 2u\,(z_i^+, z_j^-) + 2\nu\theta^-(z_i^-)\,\theta^+(z_j^+) \exp u\,(z_i^+, z_j^-)$. Невзаимодействующие поля $\varphi^\pm(z_\pm)$ и $\omega^\pm(z_\pm)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям [ср. с (67)]:

$$\left.\begin{aligned} &[\varphi^\pm(z_\pm),\ \varphi^\mp(z'_\pm)] = \{\omega^\pm(z_\pm),\ \omega^\mp(z'_\mp)\} = 0; \\ &[\varphi^\pm(z_\pm),\ \varphi^\pm(z'_\pm)] = \frac{\hbar}{4i}\,\varepsilon(z_\pm - z'_\pm); \\ &\{\omega^\pm(z_\pm),\ \omega^\pm(z'_\pm)\} = \hbar\delta(z_\pm - z'_\pm), \end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

где $\varphi(z_+, z_-) = \varphi^+(z_+) + \varphi^-(z_-)$.

Найдем ряд теории возмущений для динамической переменной $\exp(-u)$. Подставляя $\exp(-\varphi)$ в правую часть формулы (110), после выполнения всех необходимых вычислений получаем, что если

$$\hbar\nu^2 = 2\mu^2 \operatorname{tg} \hbar/8, \tag{126}$$

то происходит обрыв ряда теории возмущений, начиная с членов порядка ν^3.

Таким образом,

$$\begin{gathered}
\exp[-u(z_+, z_-)] = \exp[-\varphi(z_+, z_-)] \times \\
\times \left\{1 + 2\nu \frac{\xi^2 - 1}{i\hbar} \int\limits_{-\infty}^{z_+} \int\limits_{-\infty}^{z_-} dz_1^+ \, dz_2^+ \exp\varphi(z_1^+, z_1^-)\, \omega^-(z_1^-)\, \omega^+(z_1^+) + \right. \\
+ \nu^2 \xi (1+\xi)^2 \int\limits_{-\infty}^{z_+} \int\limits_{-\infty}^{z_-} dz_1^+ \, dz_1^- \exp 2\varphi(z_1^+, z_1^-) + \\
+ \nu^2 \xi (1+\xi) \frac{\xi^2 - 1}{i\hbar} \left(\int\limits_{-\infty}^{z_+} \int\limits_{-\infty}^{z_-} dz_1^+ \, dz_1^- \exp\varphi(z_1^+ z_1^-) \exp\varphi^+(z_1^+) \times \right. \\
\times \int\limits_{-\infty}^{z_1^-} \exp\varphi^-(z_2^-)\, [\omega^-(z_1^-), \; \omega^-(z_2^-)]\, dz_2^- + \\
+ \int\limits_{-\infty}^{z_+} \int\limits_{-\infty}^{z_-} dz_1^+ \, dz_1^- \exp\varphi(z_1^+, z_1^-) \exp\varphi^-(z_1^-) \times \\
\left. \times \int\limits_{-\infty}^{z_1^+} dz_2^+ \exp\varphi^+(z_2^+)\, [\omega^+(z_1^+), \; \omega^+(z_2^+)] \right) + \\
+ \nu^2 \xi \left(\frac{\xi^2 - 1}{i\hbar}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{z_+} \int\limits_{-\infty}^{z_-} dz_1^+ \, dz_1^- \exp\varphi(z_1^+, z_1^-) \times \\
\left. \times \int\limits_{-\infty}^{z_1^+} \int\limits_{-\infty}^{z_1^-} dz_2^+ \exp\varphi(z_2^+, z_2^-)\, [\omega^-(z_1^-), \; \omega^-(z_2^-)]\, [\omega^+(z_1^+), \; \omega^+(z_2^+)] \right\}; \\
\xi \equiv \exp i\hbar/4;
\end{gathered} \tag{127}$$

($[\omega^\pm(z_1^\pm), \; \omega^\pm(z_2^\pm)]$ — коммутатор полей $\omega^\pm(z_1^\pm)$ и $\omega^\pm(z_2^\pm)$). Решения (127) для $\exp(-u)$ и $\hbar \to 0$ переходят в решение для классического суперсимметричного уравнения Лиувилля, полученное в [38].

ПРИЛОЖЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ АЛГЕБР И ГРУПП ЛИ

Градуировкой алгебры Ли будем называть ее разложение как пространства в прямую сумму конечномерных подпространств $\mathfrak{G}_a$, $\dim \mathfrak{G}_a \equiv d_a < \infty$,

$$\mathfrak{G} = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \oplus \mathfrak{G}_a, \qquad (\text{П.1})$$

для которого выполняется условие

$$[\mathfrak{G}_a, \mathfrak{G}_b] \subset \mathfrak{G}_{a+b}. \qquad (\text{П.2})$$

(При рассмотрении целочисленных градуировок, которые в основном и используются в обзоре, дополнительно предполагается, что локальная часть $\hat{\mathfrak{G}} \equiv \mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1$ порождает всю алгебру $\mathfrak{G}$.) Иначе говоря, речь идет о задании некоторого способа разбиения совокупности $\{X\}$ всех элементов алгебры Ли $\mathfrak{G}$ на конечномерные подсистемы $\{X_\alpha^a\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d_a$, удовлетворяющие условию (П. 2). Алгебры Ли, снабженные такой градуировкой, называются градуированными.

Образующие локальной части X_α^0 и $X_\alpha^{\pm 1} \equiv X_\alpha^{\pm 1}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[X_\alpha^0, X_\beta^0] = B_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma^0, \quad [X_\alpha^0, X_\beta^\pm] = C_{\alpha\beta}^{\pm\gamma} X_\gamma^\pm, \quad [X_\alpha^+, X_\beta^-] = A_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma^0, \qquad (\text{П.3})$$

и структурные постоянные A, B, C полностью определяют строение максимальной алгебры $\mathfrak{G}$ (с локальной частью $\hat{\mathfrak{G}}$) в целом. Процедура реконструкции алгебры $\mathfrak{G}$ основывается на введении билинейной симметричной формы (,) на $\hat{\mathfrak{G}}$ с последующим ее расширением на $\mathfrak{G}$. При этом $(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j) = 0$ при $i + j \neq 0$ $(i, j = 0, \pm 1)$ и из свойства инвариантности формы $([X_\alpha^a, X_\beta^b], X_\gamma^c) = (X_\alpha^a, [X_\beta^b, X_\gamma^c])$ вытекает, что $A_{\alpha\beta}(X_\rho^0, X_\gamma^0) = -G_{\rho\beta}(X_\alpha^+, X_\gamma^-)$.

В частном случае простой алгебры Ли, снабженной канонической градуировкой, подпространства $\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}_{\pm 1}$ образованы элементами H_j $(= X_j^0)$ картановской подалгебры $\mathfrak{K}$ алгебры $\mathfrak{G}$ и корневыми векторами $X_{\pm j}$ $(= X_j^\pm)$, отвечающими простым корням π_j алгебры $\mathfrak{G}$, $1 \leqslant j \leqslant r \equiv \operatorname{rank} \mathfrak{G}$; $d_0 = d_{\pm 1} = r$. При этом $B_{ij}^b = 0$, $G_{ij}^{\pm l} = \pm \delta_{jl} k_{ji}$, $A_{ij}^l = \delta_i \ \delta_{il}$, $1 \leqslant i, j, l \leqslant r$, где k — матрица Картана $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\ (k)$, и соотношения (П. 3) принимают вид

$$\begin{gathered}[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, X_{\pm j}] = \pm k_{ji} X_{\pm j}, \\ [X_{+i}, X_{-j}] = \delta_{ij} H_j.\end{gathered} \qquad (\text{П.4})$$

(Отметим, что матрица Картана произвольной простой алгебры Ли приводима к симметричному виду диагональной матрицей v, $vk = k^T v$.)

Дуальное пространство к простой алгебре Ли $\mathfrak{G}$ натянуто на образующие $X^{\pm\alpha}$ и H^j, нормируя которые формулами

$$(X^\alpha, X_\beta) = \delta_{\alpha+\beta, 0}, \ (X^\alpha, H_j) = (H^i, X_\beta) = 0, \ (H^i, H_j) = \delta_{ij} \qquad (\text{П.5})$$

и учитывая соответствующие соотношения для элементов локальной части $\hat{\mathfrak{G}}$, в конечномерном случае $(\det k \neq 0)$ имеем

$$X^{\pm\alpha} = v_\alpha^{-1} X_{\pm\alpha}, \qquad H^i = \sum_{j=1}^{r} (vk)_{ij}^{-1} H_j. \qquad (\text{П.6})$$

Числа v_α определяются с точностью до постоянного множителя и могут быть выбраны, например, в виде $v_\alpha = (\alpha, \alpha)^{-1}$, при котором они (с $\alpha = \pi_i$) симметризуют матрицу Картана $k_{ij} = 2(\pi_j, \pi_i)/(\pi_j, \pi_j)$.

В дальнейшем нам потребуются структуры, связанные с фундаментальными представлениями $\mathfrak{G}(k)$. Старший элемент $| \ i >$ базиса i-го фундаментального представления удовлетворяет условиям

$$X_{+j} \mid i\rangle = 0; \quad H_j \mid i> = \delta_{ij} \mid i\rangle; \qquad X_{-j} \mid i> = 0 \quad \forall j \neq i, \tag{П.7}$$

и его удобно нормировать на единицу, $<i \mid i> = 1$. При этом все векторы базиса восстанавливаются с помощью действия понижающих операторов, построенных из X_{-j}, $1 \leqslant j \leqslant r$, на старший его элемент. Вопрос о выделении линейно независимых комбинаций возникающих при такой процедуре векторов, определяется матричными элементами типа $\langle i | X_{+j_1} \ldots X_{+j_m}, X_{-i_m} \ldots X_{-i_1} \mid i\rangle$. Последние, в силу свойств (П.7) старших состояний и соотношений (П. 4), отличны от нуля лишь при $j_1 = i_1 = i$ и $i_s = j_{\omega(s)}$, $2 \leqslant s \leqslant m$, где ω — произвольная перестановка индексов $2, \ldots, m$. При этом можно показать, что имеет место формула [24, 27]

$$D_{\{i, j; \omega\}} \equiv \langle i \mid X_{+j_1} \ldots X_{+j_m} X_{-j_{\omega(m)}} \ldots X_{-j_1} \mid i\rangle = \delta_{ij_1} \prod_{l=}^{m} [\delta_{ij_l}(1+\xi_{j_l}) - k_{ij_l} - \eta_{j_l}], \tag{П.8}$$

где

$$\eta_{j_l} \equiv \sum_{s=2}^{l-1} k_{j_s j_l} \theta\,[j_{\omega(l)} - j_{\omega(s)}]; \quad \xi_l \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } \eta_{j_l} = 0, \\ 0 & \text{при } \eta_{j_l} \neq 0. \end{cases}$$

Большинство физических приложений теории алгебр Ли, и в том числе динамические системы, обсуждаемые в обзоре, естественным образом приводят к рассмотрению градуировок, связанных с различными вложениями трехмерной $3d$-подалгебры A_1 (с элементами H, $J_\pm$: $[H, J_\pm] = \pm 2J_\pm$, $[J_+, J_-] = H$) в исходную алгебру (или в четную часть суперaлгебры) Ли $\mathfrak{G}$. (Отметим, что каждое вложение A_1 в конечномерную простую алгебры Ли $\mathfrak{S}$ однозначно определяется (с точностью до эквивалентности) структурой разложения H по образующим $\mathfrak{K}$, $H = \sum_j c_j H_j$, где постоянные c_j находятся с помощью известной конструкции [44]. Канонической градуировке отвечает так называемая главная $3d$-подалгебра, для которой $c_j = \delta_j = 2\sum_i k_{ji}^{-1}$.) При этом градуировка осуществляется картановским элементом H соответствующей $3d$-подалгебры. Все элементы алгебры разбиваются в мультиплеты по неприводимым представлениям A_1 со старшим весом l («угловой момент»), и подпространства $\mathfrak{G}_a$ содержат члены различных мультиплетов с одинаковыми значениями веса («проекции углового момента»), $[H, \mathfrak{G}_a] = a\mathfrak{G}_a$. Таким образом, подалгебра $\mathfrak{G}_0$ образована всеми элементами $\mathfrak{G}$, перестановочными с H; она может содержать подалгебру $\mathfrak{G}_0^0$, инвариантную относительно A_1, т. е. $[J_\pm, \mathfrak{G}_0^0] = 0$. В дальнейшем, в тех случаях, когда потребуется различать корни (положительные) подпространств $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_0^0, \mathfrak{G}_0^f \equiv \mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_0^0$, $\sum_{a\geqslant 1} \oplus \mathfrak{G}_a$ и $\mathfrak{G}_1$, примем для них обозначения $\alpha\,(R_0)$, $\alpha_0\,(R_0^0)$, $\alpha_0^f, \alpha\,(R_+)$ и $\alpha\,(R_+^1)$ соответственно.

Приведенные выше элементы аппарата теории алгебр Ли в обзоре в основном используются для решения задачи квантования в представлении Гейзенберга. В картине Шредингера при квантовании одномерных моделей потребуется ряд результатов теории представлений вещественных форм: интегральное представление для матричных элементов унитарных представлений основной непрерывной серии, явные выражения для старших векторов неприводимых представлений компактных групп, инфинитезимальные операторы сдвигов на G, квадратичные операторы Казимира, реализация неприводимых представлений в инфинитезимальной форме и явный вид базисных векторов, удовлетворяющих определенным дополнительным условиям (векторы Уиттекера и их обобщения). Большинство этих вопросов для произвольных полупростых и редуктивных групп изложено достаточно подробно и именно под требуемым углом зрения в обзоре [40]. Ниже мы кратко перечислим необходимые результаты.

Произвольный регулярный элемент $\hat{g}$ некомпактной вещественной формы G комплексной полупростой группы Ли $G_{\mathbb{C}}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{G}$, снабженной градуировкой $\mathfrak{G} = (\sum_{a\geqslant 1} \oplus \mathfrak{G}_{-a}) \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus (\sum_{a\geqslant 1} \oplus \mathfrak{G}_{+a})$, можно параметризовать модифицированным разложением Гаусса

$$\hat{g} = \hat{Z}_- \hat{g}_0 \hat{Z}_+. \tag{П.9}$$

Здесь $\hat{g}_0$ и $\hat{Z}_\pm$ генерируются элементами $\mathfrak{G}_0$ ($X_{\mu_0} \equiv \{H_j, X_{\pm\bar{\alpha}}\}$) и $X_{\pm\alpha}$ соответственно. Тогда, применяя технику, развитую в [40], нетрудно показать, что инфинитезимальные операторы сдвигов (для определенности, левых) на G, отвечающие касательным преобразованиям $\mathcal{F}$ из $\mathfrak{G}$, имеют вид

$$\hat{F} = \sum_{\underline{\alpha}} (X^{\underline{\alpha}}, \hat{Z}^{-1}\mathcal{F}\hat{Z}_-)\, Z^R_{\underline{\alpha}} + \sum_{\mu_0} (X^{\mu_0}, \hat{Z}_-^{-1}\mathcal{F}\hat{Z}_-)\, F^R_{\mu_0} +$$
$$+ \sum_{\underline{\alpha},\,\underline{\beta}} (X^{\underline{\alpha}}, \hat{g}_0 X_{-\underline{\beta}}\hat{g}_0^{-1})(X^{-\underline{\beta}}, \hat{Z}_-^{-1}\mathcal{F}\hat{Z}_-)\, Z^L_{\underline{\alpha}}. \tag{П.10}$$

Здесь $Z^R_{-\underline{\alpha}}(Z^L_{\underline{\alpha}})$ — правые (левые) генераторы, соответствующие корневым векторам $X_{-\underline{\alpha}}$ $(X_{\underline{\alpha}})$, $F^R_{\mu_0}$ — правые генераторы, отвечающие X_{μ_0}; элементы $X^{\pm\alpha}$ и X^{μ_0} образуют базис подпространств $\mathfrak{G}^{\pm a}$ и $\mathfrak{G}^0$, нормируемый соотношениями (П.5).

Операторы Казимира G определяются как следы последовательных степеней матрицы генераторов $\hat{F}$. При этом квадратичный оператор Казимира (с точностью до канонического преобразования) дается формулой

$$K = K_0 + \sum_{\underline{\alpha},\,\underline{\beta}} (X^{\underline{\alpha}}, \hat{g}_0 X^{-\underline{\beta}}\hat{g}_0^{-1})\, Z^R_{-\underline{\beta}} Z^L_{\underline{\alpha}}, \tag{П.11}$$

где $K_0 \equiv 1/2\ \mathrm{Sp} \sum_{\mu_0} (F^R_{\mu_0})^2$ — квадратичный оператор Казимира подгруппы $G_0 \subset G$, генерируемой элементами $\mathfrak{G}_0$.

Выражения для операторов сдвига на G позволяют построить явную реализацию неприводимых представлений на пространстве функций, зависящих от групповых параметров, выделить унитарные компоненты и вычислить характерные величины теории. Действительно, уже в самих генераторах заложена вся необходимая информация о весовой структуре представлений, для извлечения которой достаточно в соответствии с асимптотическим методом (см., например, [40]) осуществить переход к асимптотическим значениям некомпактных параметров G в положительной камере Вейля.

Нам потребуется явная реализация представления G на пространстве функций, заданных на максимальной компактной подгруппе $\mathscr{K}$ группы G. С этой целью удобно воспользоваться разложением Ивасава произвольного (с точностью до подмножества низшей размерности) элемента $\hat{g}$ группы G:

$$\hat{g}=\hat{k}\left(\exp\sum_j H_j\tau_j\right)\hat{Z}_+. \tag{П.12}$$

Здесь $\exp\sum_j H_j\tau_j$, $1\leqslant j\leqslant \operatorname{rank}\mathscr{A}$ принадлежат максимальной абелевой некомпактной подгруппе $\mathscr{A}$ из G; $\hat{k}=k-\hat{s}\in\mathscr{K}$, где $\hat{s}$ — элемент централизатора S-подгруппы $\mathscr{A}$ в $\mathscr{K}$. Тогда генераторы операторно неприводимого представления G могут быть получены в рамках асимптотического метода из инфинитезимальных операторов сдвигов при $\underline{\alpha}(\tau)\to\infty$. При этом собственные значения ρ_j операторов $\partial/\partial\tau_j$ и старшего веса $\{l_\nu\}$, $1\leqslant\nu\leqslant\operatorname{rank}S$ неприводимых представлений S полностью определяют неприводимое представление G; $\operatorname{rank}G\equiv\operatorname{rank}\mathscr{A}+$ $+\operatorname{rank}S$. Отметим, что для основной непрерывной серии унитарных представлений G $\rho_j=-1/2\delta_j-i\sigma_j$, где $\delta_j\equiv\sum_a(H_j,[X^a,X_{-a}])$, σ_j — непрерывные вещественные параметры. В частности, генераторы левых сдвигов естественных вещественных форм

$$\hat{F}=-\sum_{\underline{\alpha}}(X^{\underline{\alpha}},\hat{k}^{-1}\mathscr{F}\hat{k})K^R_{\underline{\alpha}}+\sum_j(H^j,\hat{k}^{-1}\mathscr{F}\hat{k})\,\partial/\partial\tau_j+$$
$$+\sum_{\underline{\alpha}}\exp(-\underline{\alpha}(\tau))(X^{\underline{\alpha}}+X^{-\underline{\alpha}},\hat{k}^{-1}\mathscr{F}\hat{k})Z^L_{\underline{\alpha}} \tag{П.13}$$

имеют следующие асимптотические выражения при $\alpha(\tau)\to\infty$:

$$\hat{F}^\infty=-\sum_{\underline{\alpha}}(X^{\underline{\alpha}},\hat{k}^{-1}\mathscr{F}\hat{k})K^R_{\underline{\alpha}}+\sum_j(H^j,\hat{k}^{-1}\mathscr{F}\hat{k})\rho_j. \tag{П.14}$$

Здесь $K^R_{\underline{\alpha}}$ — правые генераторы на $\mathscr{K}$, отвечающие элементам $X_{\underline{\alpha}}-X_{-\underline{\alpha}}$; $\hat{k}=\hat{k}_-$; ρ_j — компоненты старшего веса соответствующего неприводимого представления G. (В случае естественных форм централизатор S — дискретный и зависимость от центральных элементов $\varepsilon_i=\{0,1\}$, связанных с его Z_2-структурой, для простоты мы опускаем.)

Обозначим $\exp B$ центральный элемент разложения (П.12), в который включены параметры подгруппы S из $\hat{k}$. При этом $\hat{k}_-$ — содержит только групповые параметры, отвечающие корням $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, тогда как B принимает значения в $\mathfrak{G}_0$ и обладает в дополнение к τ_j параметрами χ_s, $1\leqslant s\leqslant d_0r$. В такой параметризации квадратичный оператор Казимира G принимает вид

$$K=K_0-\sum_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}(X^{\underline{\beta}},\exp BX_{-\underline{\alpha}}\exp(-B))K^R_{\underline{\alpha}}Z^L_{\underline{\beta}}+\sum_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\exp(-B)X^{\underline{\alpha}}\exp B,$$
$$\exp BX^{-\underline{\beta}}\exp(-B))Z^L_{\underline{\alpha}}Z^L_{\underline{\beta}}, \tag{П.15}$$

где $K^R_{\underline{\alpha}}$ — правые генераторы $\mathfrak{K}$, отвечающие корням $\underline{\alpha}$.

Конечное преобразование неприводимого представления G в параметризации (П.12) определяется формулой

$$T_{\hat{g}}^{\{(\rho,\, l\}} f_{\{m\}}(\hat{k}_-) = \prod_j [R_j(\hat{g},\, \hat{k}_-)^{\rho_j} \sum_{\{n\}} D^{\{l\}}_{\{m\}\{n\}}(N)\, f_{\{n\}}(\hat{\tilde{k}}_-)], \qquad (П.16)$$

$R_j \equiv \exp(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j)$, где $\tilde{k}$ и $\tilde{\varepsilon}_j$ получаются из исходного элемента $\hat{k}$ — и некомпактного параметра ε_j из $\mathcal{A}$ под действием преобразования $\hat{g} \in G$. Величина $D^{\{l\}}_{\{m\}\{n\}}$ суть матричный элемент неприводимого представления старшего веса $\{l\}$ подгруппы S между состояниями с весами («квантовыми» числами) $\{m\}$ и $\{n\}$; $s = sN(\hat{k}_-, \hat{g})$, $N \in S$ не зависит от групповых параметров s.

Соотношения, связывающие преобразованные $\hat{\tilde{k}}$ и $\tilde{\varepsilon}_j$ с исходными параметрами k_- и ε_j, наиболее просто выглядят для естественных форм при $g = \exp\sum_j H_j\tau_j$:

$$R_j^2(\hat{k},\, \tau) = \xi^{\{j\}}\left(\hat{k}^{-1}\exp\left(2\sum_j H_j\tau_j\right)\hat{k}\right),$$

$$\xi^{\{j\}}(\hat{\tilde{k}}) = \exp\tau_j \xi^{\{j\}}(\hat{k})\left[\xi^{\{j\}}\left(\tilde{k}^{-1}\exp\left(2\sum_j H_j\tau_j\right)\hat{k}\right)\right]^{-1/2}, \qquad (П.17)$$

где $\xi^{\{j\}}(\hat{k})$ — сужение на $\mathcal{K}$ старшего вектора j-го фундаментального представления G. При этом сужение на $\mathcal{K}$ старшего вектора неприводимого представления G со старшим весом $\{\rho\}$ выражается через $\xi^{\{j\}}(\hat{\tilde{k}})$ по формуле

$$\xi^{\{\rho\}}(\hat{k}) = \prod_{j=1}^{r} [\xi^{\{j\}}(\hat{k})]^{\rho_j}. \qquad (П.18)$$

Завершим приложение явными выражениями для инвариантной меры dk и старших векторов $\xi^{\{\rho\}}(\hat{k})$ на максимальной компактной подгруппе естественной вещественной формы, необходимыми при конкретных расчетах волновых функций экпоненциальных систем типа обобщенной цепочки Тода:

$$d\hat{k} = \prod_{\alpha>0} (\sin\theta_\alpha)^{2\frac{(\alpha\rho_0)}{(\alpha\alpha)}-2} d\theta_\alpha,$$

$$\xi^{\{\rho\}}(\hat{k}) = \prod_{\alpha>0} (\sin\theta_\alpha)^{2\frac{(\alpha\rho)}{(\alpha\alpha)}},$$

$$\rho_0 \equiv \sum_{\alpha>0} \alpha. \qquad (П.19)$$

Эти формулы связаны с универсальной параметризацией элементов компактных групп; в рассматриваемом случае

$$\hat{k} = \prod_{\alpha>0}^{\Sigma+} \exp\theta_\alpha (X_\alpha - X_{-\alpha}), \qquad (П.20)$$

и их факторизуемость в обобщенных углах Эйлера обусловлена естественным упорядочением Σ^+ положительных корней [45], при котором каждый суммарный корень располагается между своими составляющими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov Al. B.**— Ann. Phys., 1979, v. 120, p. 253—291.
2. **Faddeev L. D.**— Sov. Sci. Rev., Math. Phys., 1981, v. C1, p. 107—160.
3. **Thacker H. B.**— Rev. Mod. Phys., 1981, v. 53, p. 253—285.
4. **Gutzwiller M. C.**— Ann. Phys., 1980, v. 124, p. 347—381; 1981, v. 133, p. 304—331.
5. **Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.**— Phys. Repts, 1983, v. 94, p. 313—404.
6. **Polyakov A. M.**— Phys. Lett., 1981, v. 103B, p. 207—212.
7. **Kostant B.**— Adv. Math., 1979, v. 34, p. 195—338.
8. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Comm. Math. Phys., 1980, v. 74, p. 111—118; Physica, 1981, v. 3D, p. 62—72.
9. **Лезнов А. Н., Савельев М. В., Смирнов В. Г.**— ТМФ, 1981, т. 48, с. 3—12.
10. **Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.**— Inent. Math., 1979, v. 54, p. 219—248.
11. **Adler M.**— Invent. Math., 1979, v. 50, p. 219—248.
12. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
13. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
14. **Курант Р.** Уравнения с частными производными: Пер. с англ. М.: Мир, 1964.
15. **Теория солитонов:** Метод обратной задачи/В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. М.: Наука, 1980.
16. **Zakharov V. E.** Lecture Notes in Math. N. Y., 1978.
17. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.**— Функц. анализ и его прилож., 1974, т. 8, с. 43—49; 1979, т. 13, с. 13—22.
18. **Солитоны** в действии.— Сб. статей/Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981.
19. **Фаддеев Л. Д.**— Итоги науки. Соврем. проблемы матем., 1974, т. 3, с. 93—180.
20. **Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.**— ТМФ, 1979, т. 40, с. 194—220.
21. **Thacker H. B., Wilkinson D.**— Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 3660—3665.
22. **Honerkamp J., Weber P., Wiesler A.**— Nucl. Phys., 1979, v. B152, p. 266—283.
23. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Comm. Math. Phys., 1983, v. 89, p. 59—75.
24. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** Итоги науки. Соврем. проблемы матем., 1984, т. 22.
25. **Kostant B.**— Invent. Math., 1978, v. 48, p. 101—184.
26. **Goodman R., Wallach N. R.**— J. Funct. Anal., 1980, v. 39, p. 199—279.
27. **Fedoseev I. A., Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Nuovo cimento, 1983, v. 76D, p. 596.
28. **Лакс П. Д.**— Математика, 1969, т. 13:5, с. 128—150.
29. **Moser J.**— Adv. Math., 1975, v. 16, p. 197—220; Lecture Notes in Phys., 1976, v. 38, p. 97—132.
30. **Kostant B.**— Proc. SRC/LMS Research Symp. on representation of Lie groups. Oxford, 1977. London Math. Soc. Lecture Notes series 34, 1979.
31. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**— ЭЧАЯ, 1980, т. 11, вып. 1, с. 40—91.
32. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**— ЭЧАЯ, 1981, т. 12, вып. 1, с. 125—161.
33. **Лезнов А. Н.** Препринт ИФВЭ 82-169, Серпухов, 1982.
34. **Лезнов А. Н.** Препринт ИФВЭ 83-70, Серпухов, 1983.
35. **Лезнов А. Н., Федосеев И. А.**— ТМФ, 1982, т. 53, с. 358—372.
36. **Лезнов А. Н., Хрущев В. В.**— В сб.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1983, с. 173—184.

37. **Chaichian M., Kulish P. P.**— Phys. Lett., 1978, v. 78B, p. 413—416.
38. **Лезнов А. Н., Лейтес Д. А., Савельев М. В.**— Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, с. 85—87.
39. **Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И.**— Докл. АН СССР, 1962, т. 145, с. 252—254.
40. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**— ЭЧАЯ, 1976, т. 7, вып. 1, с. 55—107.
41. **Фок В. А.** Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.
42. **Желобенко Д. П.** Гармонический анализ на полупростых группах Ли. М.: Наука, 1974.
43. **Bruschi M., Levi D., Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.**— Phys. Lett., 1982, v. 88A, p. 7—12.
44. **Дынкин Е. Б.** Труды Моск. матем. общ-ва, 1952, т. 1, с. 39—166; Матем. сб., 1952, т. 30, с. 349—462.
45. **Лезнов А. Н., Савельев М. Ф.**— Функц. анализ и его прилож., 1974, т. 8, с. 87—89.
46. **Braaten E., Curtright T., Ghandour G., Thorn C.** Preprint UFTP 83-5, 83-9, 1983; **Braaten E., Curtright T., Thorn C.** Preprint UFTP 82-27, 82-48, 1982; Phys. Lett., 1982, v. 118B, p. 115-117; **Curtright T., Thorn C.**— Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, p. 1309—1312; **Gervais J. L., Neveu A.**— Nucl. Phys., 1982, v. B199, p. 59; 1982, v. B209, p. 125; Phys. Lett., 1983, v. 123B, p. 86.
47. **Шабат А. Б., Ямилов Р. И.** Экспоненциальные системы. Башкирский филиал АН СССР, Уфа, 1981.
48. **Лезнов А. Н., Шабат А. Б.**— В сб.: Интегрируемые системы, Башкирский филиал АН СССР, Уфа, 1982, с. 34—45.
49. **Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б.**— ТМФ, 1982, т. 51, с. 10—21.