

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

С. Г. Матинян

Ереванский физический институт, Ереван

Исследован особый класс полей Янга — Миллса — пространственно однородные поля (классическая механика Янга — Миллса), не имеющий аналога в линейной абелевой электродинамике.

Компьютерные и аналитические подходы показывают, что такие поля обладают динамической стохастичностью. Это позволяет утверждать, что классические уравнения Янга — Миллса без внешних источников составляют неинтегрируемую систему.

Механизм Хиггса устраняет эту стохастичность: при некотором значении вакуумного среднего скалярного поля имеет место фазовый переход типа беспорядок — порядок (конфайнмент — деконфайнмент). Аналогично, по-видимому, ведет себя система при наличии внешних источников.

Рассматривается связь обнаруженной стохастичности с механизмом редукции размерности в макроскопических системах и с явлением конфайнмента цвета.

Показано, что наличие в вакууме случайных (гауссовых) токов приводит к невылетанию полей, генерированных этими токами.

Обращено внимание на возможное проявление обнаруженной стохастичности классических полей в процессах множественного рождения адронов, которое, по-видимому, отражает универсальные стохастические закономерности, характерные для систем совершенно различной природы (статистика отсчетов термoeлектронов от случайных источников и фотоэлектронов от лазерного излучения, проходящего через жидкость в критическом состоянии, развитая турбулентность в гидродинамике, звездные системы, КНО-скейлинг в множественном рождении).

A special class of the Yang — Mills fields — the spatially homogeneous fields (Yang — Mills classical mechanics) — having no analog in the linear abelian electrodynamics is studied.

Both the computer and analytical approaches show that such fields possess dynamical stochasticity, this allowing one to claim that the Yang — Mills classical equations without external sources represent a non-integrable system.

The Higgs mechanism eliminates this stochasticity: at some expectation value of scalar field, a phase transition of disorder-order (confinement-deconfinement) type takes place. The system with external sources behaves apparently analogously.

A relation of the discovered stochasticity with the dimensional reduction mechanism in the macroscopic systems as well as with colour confinement is considered.

It is shown that the presence of the random (Gaussian) currents in vacuum leads to confinement of fields generated by those currents.

Attention is called to the possible manifestation of the revealed stochasticity of the classical non-abelian gauge fields in the multiple hadroproduction processes which apparently reflect the universal stochastic regularities typical of the sy-

stems of quite different nature (the statistics of counting of thermoelectrons from random sources and photoelectrons from the laser radiation passing through fluid in critical state, the developed turbulency in hydrodynamics, the stellar systems, the KNO-scaling in multiple production).

ВВЕДЕНИЕ

До сравнительно недавнего времени случайное (хаотическое) поведение динамических систем связывалось или со случайными начальными условиями, или со случайными внешними воздействиями (как, например, в случае броуновского движения), или, наконец, с возбуждением очень большого числа степеней свободы. Конечно, любая из этих предпосылок достаточна для возникновения хаоса в системах, однако, как выяснилось, ни одна из них не играет роль необходимого условия [1—6].

Сегодня хорошо установлено, что целый ряд простых полностью детерминированных динамических систем классической механики, имеющих малое число ($n \geq 2$) степеней свободы, характеризуется крайне нерегулярным, исключительно сложным и практически непредсказуемым движением, всецело определяемым внутренней динамикой системы.

Такое случайное (стохастическое) поведение, никак не связанное с вышеперечисленными достаточными условиями возникновения хаоса, естественно определять как динамическую стохастичность.

Механизм возникновения такого динамического хаоса состоит в сильной локальной неустойчивости движения [3, 4, 7]. Характерные случайные свойства системы проявляются даже на отдельной траектории системы.

Динамический хаос характерен для многих нелинейных классических систем из различных областей физики, а также других наук (химия, гидродинамика, биология, метеорология, экология и т. д.).

Мы увидим, что он проявляется специфическим образом и в классической теории неабелевых калибровочных полей.

Вопрос о полной интегрируемости (или, вернее, неинтегрируемости) классических уравнений Янга — Миллса (ЯМ), связанный непосредственно с проблемой их стохастичности, имеет уже свою историю и в определенной мере связан с большой популярностью классических решений, например инстантонного типа [8, 9], на которые возлагались большие надежды при построении основного состояния КХД.

Однако все попытки найти дополнительные интегралы движения классических уравнений ЯМ оказались безуспешными. В результате возникла программа поисков законов сохранения, выражающаяся не в терминах потенциалов и полей, а в терминах контурных переменных [10, 11].

Это обстоятельство послужило стимулом для исследования классических уравнений ЯМ, нелинейных по своей природе, на предмет

присутствия в них стохастической компоненты. Актуальность исследования неабелевых калибровочных полей с точки зрения стохастичности, кроме того, что оно имеет большой самостоятельный интерес, диктуется также явлением (берущим начало из физики твердого тела) понижения размерности квантовых спиновых систем, взаимодействующих со случайным магнитным полем [12]. В 1982 г. Олесен [13] выдвинул гипотезу, что аналогично этому явлению случайные поля редуцируют четырехмерную теорию ЯМ к эффективной двумерной теории, которая обладает свойством конфайнмента. Им показано, что в пределе бесконечно большого числа цветов ($N \rightarrow \infty$) необходимым и достаточным условием конфайнмента является наличие в вакууме случайных полей. В работе [14] на примере вычисления вильсоновского среднего $W(C)$ в пределе $N \rightarrow \infty$ и при ограничении плоскими контурами эта редукция прослеживается конкретно. Вычисления в $SU(2)$ калибровочной теории на решетках [15] указывают на правдоподобность гипотезы Олесена.

Приведенные соображения показывают, что проблема конфайнмента может получить свое решение, если убедиться, что случайные вакуумные поля естественно возникают в четырехмерной КХД и являются ее неотъемлемой частью.

В данном обзоре речь будет идти о работах, в которых обнаружена и доказана стохастичность свободных классических неабелевых калибровочных полей [16—18].

В результате можно утверждать, что в отличие от квантовой электродинамики КХД является теорией, которая в классическом пределе имеет ярко выраженные стохастические черты.

Вопрос о том, что происходит со стохастичностью, когда мы переходим к квантовым системам, представляется довольно сложным и далеким от окончательного решения.

В общих чертах [19, 20] следует ожидать, что динамическая стохастичность в замкнутых квантовых системах с ограниченным фазовым пространством не может иметь место, так как волновая функция (или матрица плотности) таких систем всегда почти периодическая, т. е. ее частотный спектр дискретен. В таких системах может наблюдаться в лучшем случае переходная или временная стохастичность. Можно сказать, что до тех пор, пока, в квазиклассических терминах, волновой пакет такой системы не расплылся, она будет иметь классическую, а стало быть, стохастическую траекторию, а затем, по крайней мере, должны исчезнуть наиболее сильные черты стохастичности.

Однако в квантовом случае для консервативных систем говорить об их траекториях вряд ли следует даже в квазиклассическом пределе. Более адекватны здесь понятия спектра и волновых функций системы. Вполне законен и очень важен вопрос о том, каковы свойства спектра квантовой системы, которая в классическом пределе выявляет стохастическое движение.

Представляется вполне правдоподобным [21], что в квазикласси-

ческом пределе квантовый энергетический спектр динамической системы состоит из регулярной и нерегулярной частей. В общем случае регулярная часть спектра (слабо меняющаяся с параметрами гамильтониана) соответствует при $\hbar = 0$ регулярным классическим траекториям, составляющим обмотку инвариантного тора.

Нерегулярная часть спектра (резко зависящая от параметров гамильтониана) в этом пределе соответствует динамическому хаосу.

Численное моделирование показывает [22, 23], что имеется соответствие между долей классического хаотического движения и долей нерегулярной части множества собственных значений энергии системы. Такая часть спектра возникает за критической энергией, при которой классическое регулярное движение начинает переходить к хаотическому.

Отметим, что нерегулярная часть спектра с учетом симметричных свойств гамильтониана, как правило, связана с непересекающимися (отталкивающимися) уровнями в соответствии с известными теоремами [24, 25].

Мы еще вернемся (в разд. 4) к вопросу о характере спектра квантовых систем, которые в классическом пределе имеют стохастическую компоненту.

Другой критерий, различающий регулярное и нерегулярное (т. е. в классическом пределе отвечающее хаосу) квантовое состояние, связан с поведением волновых функций [26]: первому соответствует регулярная интерференционная картина и большие флуктуации интенсивности, второму — случайно распределенные интерференционные максимумы и минимумы с подавленными флуктуациями интенсивности.

Иначе обстоит дело, когда квантовая система является незамкнутой, т. е. находится в хаотическом внешнем поле. В этом случае, вообще говоря, приведенные выше аргументы неприменимы, и вопрос требует специального исследования. Рассмотрение примеров простых таких систем, проведенное в [27], показывает, что квантово-механические свойства этих систем, стохастических в классическом пределе, не накладывают сильных ограничений на проявления стохастичности. Иными словами, рассмотренные квантовые системы в случайном поле выявляют непрерывные спектральные свойства, также как соответствующая классическая модель.

Приведенные соображения делают правдоподобным, что обнаруженная динамическая стохастичность свободных классических неабелевых калибровочных полей оставит свои следы в реальном мире КХД, и можно надеяться, что именно они ответственны за невылетающие цветных объектов.

1. ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНЫЕ ПОЛЯ ЯНГА — МИЛЛСА. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ЯМ

В настоящее время есть целый ряд оснований утверждать, что теоретико-возмущенческий вакуум теории ЯМ не совпадает с истинным. Аргументы в пользу этого утверждения имеют как классическую [8, 9], так и квантовую основу [28, 29].

Качественно благодаря взаимодействию глюонов («спариванию») возникает их конденсат, проявляющийся в ненулевом значении вакуумного среднего квадрата напряженности глюонного поля и понижающий энергию основного состояния КХД, не учитывающей этого явления.

С классической точки зрения в этом свете представляется важным поиск и анализ классических решений уравнений ЯМ без внешних источников в пространстве Минковского, которые могли бы послужить основой для построения и исследования структуры квантового вакуума КХД и проблемы асимптотических состояний.

Начнем с рассмотрения свободных полей ЯМ, соответствующих $SU(2)$ -группе в обычном пространстве-времени.

Уравнения движения имеют вид

$$\partial_\mu G_{\mu\nu}^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b G_{\mu\nu}^c = 0, \quad (1)$$

где

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

(здесь и ниже латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, греческие — 0, 1, 2, 3).

Будем искать класс решений системы (1), для которых в некоторой системе вектор Пойнтинга обращается в нуль [30]:

$$T_{0j} = G_{0i}^a G_{ji}^a = 0 \quad (2)$$

($T_{\mu\nu} = -G_{\mu\lambda}^a G_{\nu\lambda}^a + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G_{\lambda\rho}^a G_{\lambda\rho}^a$ — тензор энергии-импульса поля).

В калибровке $A_0^a = 0$ уравнения (1) и условие (2) переписутся в виде

$$\dot{A}_i^a - G_{ji}^a{}_{,j} + g\epsilon^{abc} A_j^b G_{ji}^c = 0; \quad (1a)$$

$$N^a \equiv \epsilon^{abc} A_i^b \dot{A}_i^c = 0; \quad (1b)$$

$$\dot{A}_i^a G_{ij}^a = 0 \quad (2a)$$

(точка над A_i^a означает дифференцирование по времени; $G_{ij,k} \equiv \equiv \partial_k G_{ij}$), где уравнение (1b) выполняет функции связи. N^a равно нулю для свободных уравнений. В случае присутствия внешнего тока — N^a есть плотность внешнего цветного заряда j^a .

Уравнения связи (16) и (2а) приводят к соотношению

$$\dot{A}_i^a (A_j^a, i - A_i^a, j) = 0. \quad (2б)$$

Достаточным условием выполнения этого соотношения являются

$$а) A_i^a, j = 0; \quad б) \dot{A}_i^a = 0; \quad в) A_j^a, i - A_i^a, j = 0.$$

Мы изучим, как будет видно из дальнейшего, наиболее интересный случай а) пространственно однородных полей ЯМ, когда в данной системе координат поля зависят только от времени:

$$A_i^a = A_i^a(t).$$

Область применимости уравнений для однородных полей определяется условием, что временные изменения доминируют в системе. Иными словами, это отвечает длинноволновой области спектра (или сильным полям)

$$|A_i^a, j| \ll A_i^{a^2}; \quad \lambda |A_i^a| \gg 1.$$

Можно надеяться, что изучение таких полей будет полезным для получения информации об инфракрасном режиме КХД — наиболее неясном ее пункте.

Уравнения движения для однородных полей примут вид

$$\ddot{A}_i^a - g^2 A_j^a A_j^b A_i^b + g^2 A_i^a A_j^b A_j^b = 0 \quad (3)$$

со связью (16).

Таким образом, для пространственно однородных полей ЯМ уравнения поля (1) сводятся к дискретной нелинейной механической системе с гамильтонианом

$$H_{\text{ЯМ}} = \sum_{i, a=1}^3 \frac{1}{2} (\dot{A}_i^a)^2 + \frac{g^2}{4} [(A_i^a A_i^a)^2 - (A_i^a A_j^a)^2]. \quad (4)$$

Этот гамильтониан, как легко видеть, обладает симметрией относительно транспонирования матрицы A_i^a , т. е. относительно внутреннего и «внешнего» (трехмерного) пространств, которые оба изотропны [симметрия $SU(2) \otimes O(3)$], поэтому, как легко убедиться, сохраняются два «момента»: обычный трехмерный момент

$$M_i = \varepsilon_{ijk} A_j^a \dot{A}_k^a = \text{const}$$

и внутренний трехмерный момент N^a (16), который отличен от нуля лишь для полей с источниками и равен $-j_0^a$.

Сказанное дает веское основание для того, чтобы назвать рассматриваемую систему однородных полей ЯМ классической механикой ЯМ, которая, как будет показано ниже, выявляет в полной мере динамическую стохастичность.

Система (3) имеет девять степеней свободы ($i, a = 1, 2, 3$) и четыре очевидных сохраняющихся интеграла $H_{ЯМ}$ и M_i .

Прежде чем перейти к анализу ситуации с числом степеней свободы $n \geq 2$, рассмотрим простой случай [30]. Будем искать решение системы (3) в виде

$$A_i^a = \frac{O_i^a}{g} f^{(a)}(t) \quad (5)$$

[по a суммирование в (5) нет], где O_i^a — постоянная ортогональная матрица,

$$O_i^a O_i^b = \delta^{ab}. \quad (6)$$

Для $f^{(a)}(t)$ получается следующая система:

$$\ddot{f}^{(a)} + f^{(a)}(f^2 - f^{(a)^2}) = 0, \quad (7)$$

где

$$f^2 = \sum_{a=1}^3 f^{(a)^2}.$$

Известно, что любые консервативные системы с одной степенью свободы интегрируемы, и частное решение системы (7) при $f^{(1)} = f^{(2)} = f^{(3)} = f(t)$, используя интеграл энергии, легко найти:

$$f(t) = \left(\frac{2g^2}{3}\right)^{1/4} \mu \operatorname{cn} \left[\left(\frac{8g^2}{3}\right)^{1/4} \mu t; 1/\sqrt{2} \right], \quad (8)$$

где $\operatorname{cn}(x; k)$ — эллиптический косинус Якоби аргумента x и модуля k ; μ^4 — плотность гамильтониана T_{00} в рассматриваемой системе координат.

Решение, даваемое формулами (5), (6), (8), периодически во времени с периодом $T = \left(\frac{3}{8g^2}\right)^{1/4} \frac{4}{\mu} K(1/\sqrt{2})$, где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Отметим некоторые интересные черты полученного решения, хотя они непосредственно не относятся к интересующему нас вопросу стохастичности уравнений ЯМ.

Напряженности полей, соответствующие этому решению,

$$E_i^a = \frac{O_i^a}{g} \dot{f}; \quad H_i^a = \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} \frac{O_j^b O_k^c}{2g} f^2$$

$$\left(H_i^a = g \left(\frac{\dot{f}}{f}\right)^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} E_j^b E_k^c \right)$$

таковы, что E^a (H^a) взаимно ортогональны в системе «покоя», а H^a параллельны E^a ($a = 1, 2, 3$).

Далее, нетрудно видеть, что аргумент периодического решения (8) в произвольной системе координат, полученной из нашей системы,

«сопутствующей» волне, соответствующим преобразованием Лоренца перейдет в $\xi \equiv kx = k_\mu x_\mu$, где $k_0 = \mu\gamma$; $k_i = \mu\gamma v_i$ ($\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$), т. е. $k^2 = \mu^2$. В линейной безмассовой электродинамике такого решения быть не может, ибо невозможно выбрать систему координат, в которой вектор Пойнтинга волны равен нулю, а не плотности энергии. Именно этим обусловлено отличие решения (8) от соответствующего решения Коулмена [31]. Благодаря этому же μ играет формально роль массы в нелинейной волне (8).

Конечно, с самого начала можно было бы искать решения системы (3) в виде $A_i^q(x) = A_i^q(\xi)$ с $k^2 = \mu^2$, однако в этом случае аналогия с классической динамической системой, к которой мы свели калибровочное поле, была бы менее явной.

2. ДВЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ЦВЕТА [16]

Нелинейная система с $n = 2$ в консервативном случае уже может обладать всеми характерными чертами динамической стохастичности.

Для соответствующей гамильтоновой системы (3), вводя обозначения $A_1^1 = \frac{1}{g} x(t)$; $A_2^2 = \frac{1}{g} y(t)$ и положив $A_2^1 = A_1^2 = 0$, приходим к нелинейной механической системе на плоскости с гамильтонианом

$$H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} \quad (9)$$

и с соответствующими очень симметричными и простыми на вид связанными уравнениями движения, которые мы будем исследовать:

$$\ddot{x} + xy^2 = 0; \quad \ddot{y} + yx^2 = 0. \quad (10)$$

Анализ этих уравнений, несомненно, намного проще, чем более общей системы (3) и тем более (1). Однако, если будет показана стохастичность системы (10), то трудно представить, чтобы стохастическая компонента полностью исчезла в более сложной системе с $n > 2$ и тем более в общем случае пространственно неоднородных полей ЯМ. В следующих разделах мы рассмотрим однородные поля ЯМ с $n > 2$.

Из вида H (9) следует, что любой сохраняющийся интеграл $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ системы (10) должен удовлетворять уравнению в частных производных

$$\dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial F}{\partial y} = xy \left[y \frac{\partial F}{\partial x} + x \frac{\partial F}{\partial y} \right],$$

откуда видно, что F не может зависеть только от двух из переменных x, y, \dot{x}, \dot{y} , а также быть полиномом конечной степени этих переменных.

Очевидно, что «материальная точка», описываемая (10), не может выйти за пределы области, ограниченной эквипотенциальными кри-

выми $xy = \pm\sqrt{2}\mu^2$, где μ^4 — «полная энергия» точки. Очевидно, что если «точка» с полной энергией μ^4 , описываемая (10), находится в некоторый момент времени на эквипотенциальной кривой $xy = \pm\sqrt{2}\mu^2$, то она отходит от нее по нормали внутрь допустимой области.

Посмотрим, имеет ли система (10) периодические траектории.

Из симметрии задачи следует, что траектория ее будет периодической, если хотя бы дважды произойдут какие-либо из перечисленных событий: а) траектория проходит через начало координат; б) траектория перпендикулярна к одной из осей симметрии задачи; в) траектория попадает на эквипотенциальную кривую.

Эти (достаточные) условия периодичности полезны для классификации и описания траекторий (см. ниже), однако не исключено, что можно привести и другие, более слабые достаточные критерии периодичности траекторий системы (10).

Вдоль осей симметрии $x = \pm y$ система совершает, конечно, периодические колебания (8) [события а) и в)]. По осям $x = 0$ и $y = 0$ точка, как в электродинамике, уходит на бесконечность ($\ddot{x} = 0$, $\dot{x} \neq 0$; $\ddot{y} = 0$, $\dot{y} \neq 0$). Если же в некоторый момент времени скорость точки не направлена вдоль оси x или y , то она не уйдет на бесконечность, однако иногда может удалиться от центра на сколь угодно большое расстояние и вернуться за конечное время в область $x \sim y$, что легко увидеть из отрицательности величин \ddot{x}/x и \ddot{y}/y .

Можно говорить, что рассматриваемое движение занимает как бы промежуточное место между финитным и инфинитным типами движения.

В полярных координатах ($x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$) уравнения (10) записываются в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{\rho}}{\rho} \dot{\varphi} + \frac{\rho^2}{4} \sin 4\varphi = 0; \quad (11a)$$

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\rho^3}{2} \sin^2 2\varphi = 0. \quad (11b)$$

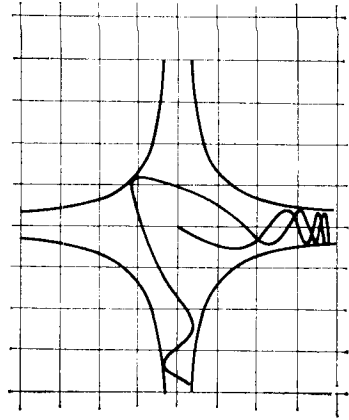
При удалении от начала координат ($\rho \gg \mu$; отметим, что в нашей задаче x , y , ρ имеют размерность массы, а не длины!), например, вдоль канала $\varphi \ll \pi/4$; $\sin 4\varphi \approx 4\varphi$; $\dot{\rho} > 0$, из (11) видно, что частота колебаний по координате φ возрастает с удалением от центра, а амплитуда убывает вплоть до момента, когда $\dot{\rho} = 0$ («точка поворота») (последнее происходит за конечный промежуток времени, поскольку $\ddot{\rho} \simeq -a(t)\rho^3(t)$ ($a > 0$)), после чего режим «затухания» сменяется режимом «раскачки». На рис. 1 приведен характерный пример такого поведения, снятый с дисплея ЭВМ.

Усредненное по быстрым осцилляциям φ движение по ρ представляет собой блуждания с большими амплитудами ($\ddot{\rho} + a\rho^3 \approx 0$)

Рис. 1. Пример блуждания из канала в канал для системы (10). Сфотографировано с дисплея ЭВМ

из канала в канал со сложным движением в области $x \approx y$ [которое можно проследить при численном интегрировании систем (10) на ЭВМ]. На языке изменения во времени амплитуд цвета A_1 и A_2 эта картина соответствует попеременно быстрым осцилляциям и падению одной цветовой амплитуды и нарастанию другой.

Очевидно, что система с тремя степенями свободы $A_1 = x/g$; $A_2 = y/g$; $A_3 = z/g$ качественно воспроизводит основные черты поведения системы (10) с $n = 2$ (см. ниже), которые мы проследили выше. Здесь имеются шесть каналов вдоль осей координат, движение в которых аналогично движению в каналах двухмерной системы, когда с удалением от центра частота осцилляций траекторий возрастает, а амплитуда убывает вплоть до остановки, после чего режим затухания по сферическому углу сменяется режимом раскачки. Общая картина изменения во времени цветových амплитуд в этом трехмерном случае характеризуется попеременными быстрыми осцилляциями и убыванием двух амплитуд цвета и нарастанием третьей. Происходят «биения» цвета.



основные черты поведения системы (10) с $n = 2$ (см. ниже), которые мы проследили выше. Здесь имеются шесть каналов вдоль осей координат, движение в которых аналогично движению в каналах двухмерной системы, когда с удалением от центра частота осцилляций траекторий возрастает, а амплитуда убывает вплоть до остановки, после чего режим затухания по сферическому углу сменяется режимом раскачки. Общая картина изменения во времени цветových амплитуд в этом трехмерном случае характеризуется попеременными быстрыми осцилляциями и убыванием двух амплитуд цвета и нарастанием третьей. Происходят «биения» цвета.

3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ (10). СТОХАСТИЧНОСТЬ

На рис. 2 даны примеры некоторых периодических траекторий, сфотографированных с дисплея ЭВМ, на которой интегрировалась система (10) [16].

На рис. 2, *a* — *e* приведены траектории, проходящие через начало координат и перпендикулярные либо эквипотенциальной линии (рис. 2, *a*, *b*, *г*, *e*), либо оси симметрии $y = 0$ (рис. 2, *в*, *д*). Траектории расположены в порядке уменьшения угла их наклона к оси x в начале координат. Траектория рис. 2, *a* отвечает колебаниям по закону эллиптического косинуса (8) [30]. Дальнейшее уменьшение угла наклона приводит к увеличению числа пересечений с осью x траекторий типа рис. 2, *в*, *д* и *г*, *e*.

Обозначим α_n^0 эти углы для траекторий типа рис. 2, *в*, *д*, а β_n^0 — для траекторий типа рис. 2, *г*, *e*, где n — число пересечений траекторий с осью x .

При $n \rightarrow \infty$ углы α_n^0 и β_n^0 стремятся к нулю.

На приведенных рисунках четко проявляется тенденция к увеличению частоты и уменьшению амплитуды осцилляций при перемеще-

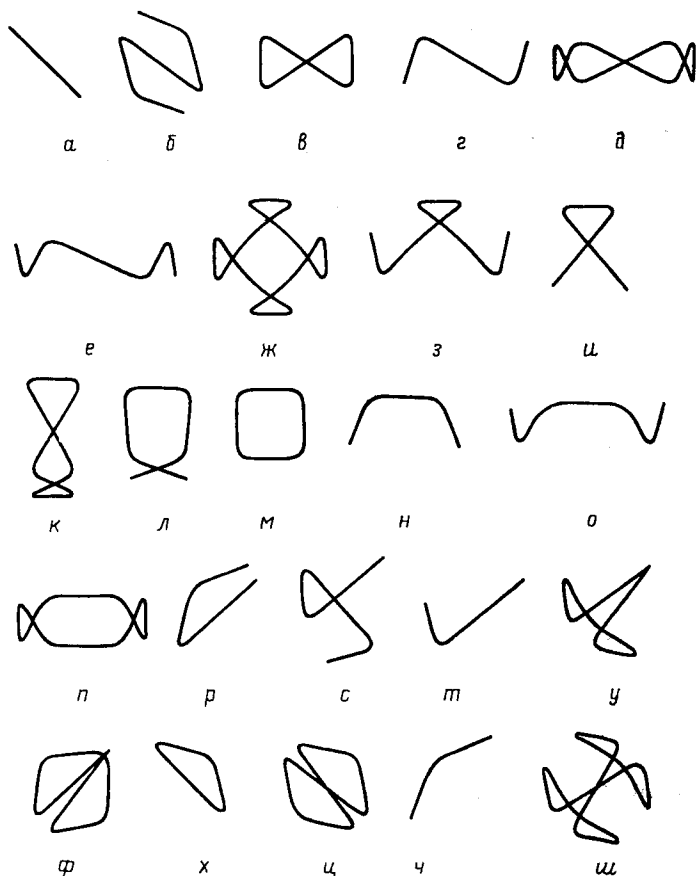


Рис. 2. Примеры периодических траекторий системы (10), сфотографированных с дисплея ЭВМ

нии частицы в глубь канала по оси x тем больше, чем меньше угол с осью x траекторий в начале координат, в соответствии с качественным анализом, проведенным в разд. 2 для больших ρ .

На рис. 2, *ж* — *к* даны примеры траекторий, проходящих перпендикулярно оси y на разных удалениях от центра и перпендикулярных либо осям координат (рис. 2, *ж*, *к*, *м*, *н*), либо эквипотенциальным линиям. С уменьшением удаления этих траекторий по оси y от центра они все дальше заходят в канал, и вновь качественно воспроизводится картина, рассмотренная в разд. 2 ($\rho \gg \mu$). Рисунки 2, *р*, *с*, *т* показывают траектории, дважды перпендикулярные эквипотенциальным линиям.

Наконец, рис. 2, *у* — *ш* изображают траектории, перпендикулярные оси симметрии $x = \pm y$

На основании приведенного выше анализа траекторий рис. 2 видно, что число периодических траекторий типа рис. 2, $e - e$, а также типа рис. 2, o, n , счетно, так что можно утверждать, что множество периодических траекторий системы (10) по крайней мере счетно.

Очевидно, что так как никакая траектория системы (10) не может лежать целиком в одном квадранте рис. 1, то отсюда и из симметрии задачи следует, что всевозможные траектории системы можно получить, задавая начальные условия в виде

$$y = 0; \quad x = x_0 > 0; \quad \dot{x} = \sqrt{2} \mu^2 \cos \alpha; \quad \dot{y} = \sqrt{2} \mu^2 \sin \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi).$$

Из этого анализа для нас наиболее важным является то, что найденные периодические траектории системы крайне неустойчивы, как мы видели, относительно малых изменений начальных условий (x_0, α) , что является одним из признаков стохастичности системы (10).

На основании приведенных аргументов следует ожидать, что траектории системы обладают локальной неустойчивостью, которая и является причиной сильной зависимости движения как от начальных условий, так и от различных малых возмущений.

Стохастичность системы (10) явно видна не только при исследовании устойчивости периодических траекторий относительно начальных условий. Другой метод, наглядно показывающий эту стохастичность, связан с компьютерными экспериментами, применяющими метод отображений Пуанкаре [32]. Эксперименты такого типа впервые проводились при исследовании движения звезд в поле галактики (Хенон, Хайлес, Кантопулос, Форд и др. [33—35]).

Запрограммируем ЭВМ на решение уравнений (10) так, чтобы выдавались точки пересечения фазовой траектории системы в пространстве (x, \dot{x}, y, \dot{y}) с плоскостью (y, \dot{y}) при $\dot{x} > 0$ [18]. Если движение периодическое, то это пересечение происходит в конечном числе точек; если система интегрируема, т. е. траектория представляет собой обмотку тора, точки образуют регулярную замкнутую кривую в плоскости (y, \dot{y}) . Наконец, при стохастическом поведении системы точка пересечения хаотически блуждает в плоскости (y, \dot{y}) , плотно покрывая конечную площадь. Именно такое поведение траекторий системы (10) в плоскости (y, \dot{y}) при $\dot{x} > 0$ и выявляет ЭВМ [18], что является доказательством стохастичности системы (10) [рис. 3, на котором все точки, пересекающие плоскость (y, \dot{y}) , принадлежат одной и той же траектории]. Наиболее характерным и важным свойством хаотического движения является быстрая, экспоненциальная неустойчивость траекторий системы, т. е. экспоненциальное расхождение близких фазовых траекторий: $R \sim e^{ht}$, где $h > 0$.

Особенно полезен этот критерий динамического хаоса при численном моделировании.

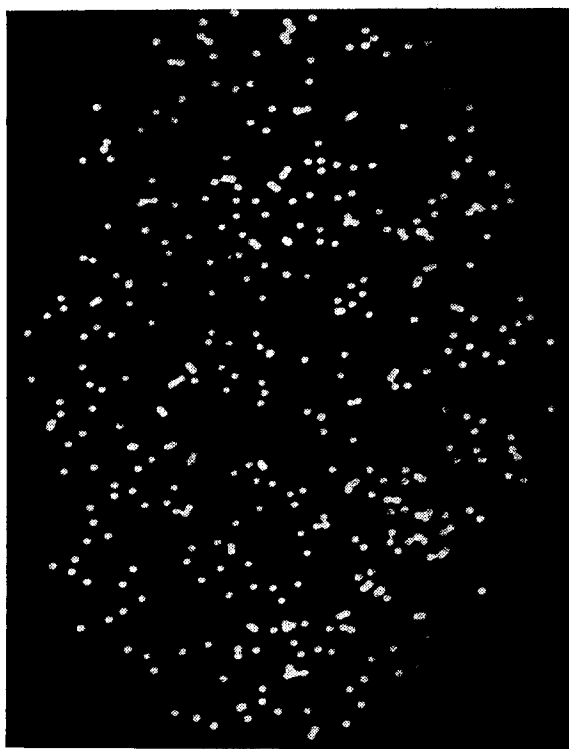


Рис. 3. Сфотографированная с дисплея ЭВМ картина в плоскости (y, \dot{y}) , показывающая стохастичность системы (10)

Величина h , определяющая экспоненциальную скорость расхождения близких траекторий, — метрическая энтропия хаотической компоненты движения, называемая иногда КС-энтропией (энтропией Крылова — Колмогорова — Синая).

Если $h > 0$, то движение имеет стохастическую компоненту. Более того, условие $h > 0$ согласно современной теории динамических систем [7] является необходимым и достаточным условием для случайности почти всех траекторий [36].

КС-энтропия определяется показателями Ляпунова Λ_i ($\Lambda_i > 0$)

$$h = \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i \geq \Lambda_m, \quad (12)$$

где Λ_m — максимальный показатель (n в большинстве случаев — число степеней свободы системы).

Λ_m — определяется «расстоянием» между близкими траекториями в фазовом пространстве

$$\rho^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta \dot{x})^2 + (\Delta \dot{y})^2 + (\Delta \dot{z})^2$$

(для определенности мы рассматриваем случай с $n = 3$; $A_1 = x$; $A_2 = y$; $A_3 = z$, изученный впервые с помощью понятия КС-энтропии в [17]):

$$\Lambda_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \rho(t)}{t}. \quad (13)$$

Поведение близких траекторий изучается в линейном приближении; так как нас интересует строго локальное поведение близких траекторий, то линейное приближение вполне корректно.

Если $\Lambda_m > 0$, то из (12) следует, что $h > 0$ и близкие траектории экспоненциально расходятся. Для интегрируемой системы (квазипериодическое движение) $\rho(t) \sim t$ (степенная локальная неустойчивость) и $\Lambda_m = h = 0$.

В работе [17], используя понятие КС-энтропии, была показана экспоненциальная локальная неустойчивость системы типа (10) с $n = 3$ и подтвержден полученный выше вывод [16] о стохастичности системы с $n = 2$.

Более подробно об анализе уравнений (10) с точки зрения присутствия в них стохастической компоненты см. в работе [36], в которой показано, что хаотическая компонента охватывает в обоих случаях почти всю энергетическую поверхность.

Еще одним критерием стохастичности движения иногда служит явление пересечения (расщепления) сепаратрис траекторий. Такой подход, использованный в [37], также подтверждает вывод, сделанный выше о том, что система (10) стохастична, т. е. она — неинтегрируема (см. также [38]).*

4. МЕХАНИЗМ ХИГГСА И СТОХАСТИЧНОСТЬ. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД БЕСПОРЯДОК — ПОРЯДОК В КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ [18]

В последние годы большой интерес приобрел вопрос о реализации той или иной фазы в калибровочных теориях [39—41]: фаза конфайнмента, с которой связывают состояние беспорядка, и фаза Хиггса — состояние порядка. По аналогии можно говорить, что отсутствию полного набора нетривиальных (так называемых изолирующих) интегралов в классической системе соответствует фаза беспорядка, которая обнаружена выше у системы (10) и ее обобщений на три степени свободы, а системам с полным набором изолирующих

* Г. К. Саввиди [64] недавно показал, что рассматриваемая классическая механика ЯМ является K -системой Колмогорова, т. е. обладает наиболее сильными статистическими свойствами. Отметим, что эллиптические звездные системы также являются такими системами [65] (ср. с разд. 8).

интегралов (когда их число равно числу степеней свободы) соответствует фаза порядка.

В связи с вышесказанным крайне интересным представляется исследование классических калибровочных систем со спонтанным нарушением в калибровке $A_0^a = 0$.

Соответствующий (4) гамильтониан имеет вид

$$H = H_{\text{ЯМ}} + \frac{1}{2} (\dot{B}_a^2 + \dot{\sigma}^2) + \frac{g^2}{4} (A_i^a A_i^a) \left[B_a^2/2 + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \eta \right)^2 \right] + \lambda^2 \left[B_a^2/2 + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \eta \right)^2 - \eta^2 \right]^2, \quad (14)$$

а уравнения связи выглядят так:

$$\varepsilon^{abc} A_i^b \dot{A}_i^c - \frac{\eta}{\sqrt{2}} B_a + \frac{1}{2} [\sigma \dot{B}_a - B_a \dot{\sigma} - \varepsilon^{abc} B_b \dot{B}_c] = 0, \quad (15)$$

где η — вакуумное среднее скалярного поля ϕ ;

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iB_1 + B_2 \\ \sqrt{2}\eta + \sigma - iB_3 \end{pmatrix};$$

λ — самодействие скалярного поля ϕ .

Подробно исследуем случай с двумя степенями свободы калибровочного поля [см. (9)], взаимодействующего с хиггсовским вакуумом ($B_a = \sigma = 0$):

$$H \equiv \mu^4 = \frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{g^2 \eta^2}{4} (x^2 + y^2) \right]. \quad (16)$$

Дополнительная потенциальная энергия $x^2 + y^2$ здесь также, естественно, сферически симметрична, и опять $N^a = 0$.

Ясно, что при больших полях эта добавка, соответствующая линейному осциллятору, несущественна, и мы должны получить хаотическое движение системы (10). При малых полях, наоборот, можно думать, что нелинейностью $x^2 y^2$ можно пренебречь и следует ожидать устойчивых регулярных колебаний.

Нетрудно убедиться с помощью масштабного преобразования $x \rightarrow \alpha x$; $y \rightarrow \alpha y$; $t \rightarrow \beta t$, что движение системы (16) характеризуется одним существенным безразмерным параметром $\pi = g^2 \eta^4 / 4\mu^4$.

При $\pi = 0$ мы, конечно, имеем стохастическое движение, исследованное подробно в разд. 2, 3. При больших значениях π , как уже было отмечено, следует ожидать регулярного движения.

Мы сейчас увидим, что на деле система (16) является хаотической не только при $\pi = 0$, но и малом, но конечном $\pi \leq \pi_c$.

Наша задача как раз и состоит в вычислении на ЭВМ критического значения параметра π_c , при котором происходит фазовый переход в следующем смысле: при больших значениях π система близка к интегрируемой, и траектория в фазовом пространстве (x, \dot{x}, y, \dot{y})

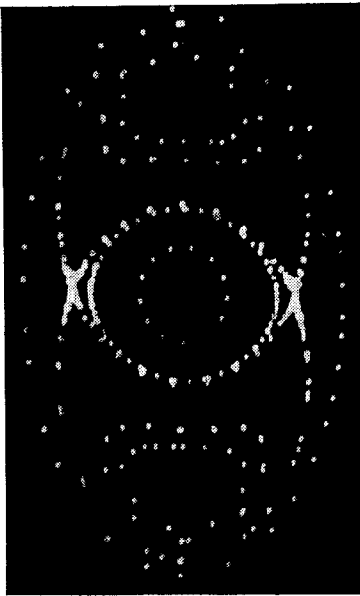


Рис. 4. Сфотографированная с дисплея ЭВМ картина в плоскости (y, \dot{y}) для $\pi = 4,84$

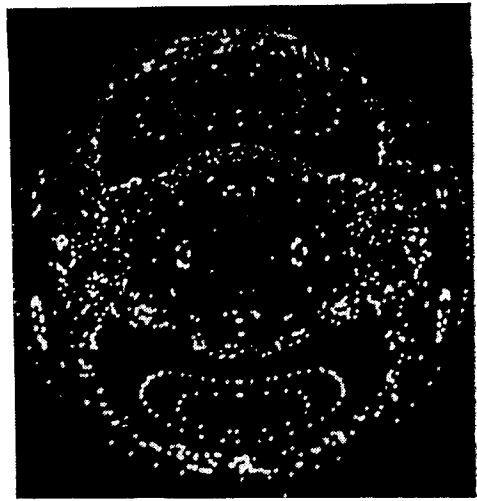


Рис. 5. Сфотографированная с дисплея ЭВМ картина в плоскости (y, \dot{y}) для $\pi = 0,35$

представляет собой обмотку тора [42] (мера эргодических траекторий равна нулю [1, 2, 43]), т. е. реализуется фаза порядка, а для малых, но конечных π ($\pi < \pi_c$) движение, как и при $\pi = 0$, стохастично, т. е. реализуется фаза беспорядка.

В разд. 3 уже описана часть вычислительного эксперимента, относящаяся к решению уравнений (10) на ЭВМ, выдающему точки пересечения фазовой траектории системы в пространстве (x, \dot{x}, y, \dot{y}) с фазовой плоскостью (y, \dot{y}) при $\dot{x} > 0$.

На рис. 4 приведена сфотографированная с дисплея ЭВМ картина в плоскости (y, \dot{y}) для значения $\pi = 4,84$; видно, что точки пересечения траектории с плоскостью образуют замкнутые регулярные кривые. Центрам трех малых замкнутых кривых соответствуют устойчивые траектории, а двум точкам пересечения замкнутых линий отвечают неустойчивые периодические траектории (пересечение сепаратрис под ненулевым углом, о котором уже шла речь в разд. 3).

Именно в окрестности этих последних точек пересечения впервые возникают «макроскопические» области эргодического движения ненулевой меры [рис. 5, $\pi = 0,35$, ср. с [33—35] (см. также [36])].

При дальнейшем уменьшении π площадь, занимаемая стохастической компонентой, резко возрастает и при критическом значении

$\pi = \pi_c \approx 0,15$ становится почти равной всей допустимой области движения на плоскости (y, \dot{y}) . Картина становится похожей на ту, которая приведена на рис. 3, и соответствует развитой стохастичности (подчеркнем снова, что все точки на этом рисунке относятся к одной и той же траектории).

В работе [36] стабилизирующая движение роль хиггсовского механизма проанализирована более детально. Для случая с $n = 2$ при малых μ ($\mu \gg 1$; $\pi \ll \pi_c$) движение является хаотическим ($h \sim \mu/\ln \mu \sim \frac{\pi^{-1/4}}{\ln 1/\pi} > 0$). При больших π ($\pi \gg \pi_c$) хаотическая компонента сохраняется только в экспоненциально узком слое вокруг сепаратрисы — система интегрируема в смысле КАМ-теории [43, 42].

Поскольку h непрерывно зависит от π , то обнаруженный в [18] «фазовый переход», по-видимому, имеет размытую переходную область (см. также [44], где для определения μ_c (или π_c) используется подход, основанный на изучении топологии энергетической поверхности $H = H(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. При $\pi < \pi_c = 2/3$ для нашей задачи характерен постепенный переход от регулярных траекторий к нерегулярным. При $\pi > \pi_c$ возможно выделение компактного инвариантного множества, заполненного регулярными траекториями).

При переходе к большему числу степеней свободы ($n = 3$) [36] положение становится более сложным. Даже при малых μ ($\pi \gg 1$) в определенных условиях обнаруживается значительная хаотическая компонента. При больших μ ($\pi \ll 1$), как и для $n = 2$, хаотическая компонента охватывает почти всю энергетическую поверхность за исключением малых областей вдоль осей координат.

Так что можно считать, что при $n > 2$ механизм Хиггса даже при больших значениях π не устраняет полностью стохастическую компоненту [36].

Сделаем одно замечание, связанное с рассмотрением системы Янга — Миллса — Хиггса (16) в квантовомеханическом пределе.

Соответствующая задача с параметром нелинейности α рассматривалась в [23]

$$H = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \alpha x^2 y^2. \quad (17)$$

В классической задаче авторы [23] также обнаружили переход (при больших энергиях, что соответствует, как легко видеть, малым значениям нашего параметра π) к хаосу из регулярного движения.

В квантовой задаче (17), рассматривая, правда, член с α как возмущение, обнаружено в соответствии с ожиданием [21], о которой шла речь во введении, что имеется тесная корреляция между долей классического хаотического движения и долей той части энергетического спектра гамильтониана (17), в которой собственные значения сильно чувствительны к малым изменениям параметра возмущения (прямо соответствуя отсутствию пересечения уровней).

Область энергий, где наблюдается переход от одного режима к другому, для обоих случаев — как классического, так и квантового — одинакова.

В работе [23] явно видно, как с увеличением энергии возрастает в спектре доля невырожденных собственных значений энергии с сильной зависимостью их от малого изменения параметра нелинейности α

$$\Delta_i^2 = |[E_i(\alpha + \Delta\alpha) - E_i(\alpha)] - [E_i(\alpha) - E_i(\alpha - \Delta\alpha)]| \approx \approx |\partial^2 E_i / \partial \alpha^2| (\Delta\alpha)^2$$

и убывает доля уровней с $\Delta_i^2 \approx 0$.

Представляет интерес изучить эту проблему, не рассматривая параметр α как возмущение.

Правда, не следует упускать из виду, что квантово-механическая система это еще не квантово-полевая система с бесконечно большим числом степеней свободы.

И хотя, как мы отмечали, однородные поля, которыми мы интересуемся в этом обзоре, отвечают длинноволновой части спектра классической системы ЯМ, соответствующая постановка задачи в квантовой теории поля не должна игнорировать того, что инфракрасная проблема — это проблема сильной связи.

5. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ЯМ С $n > 3$

Если, как показано в предыдущих разделах, классической механике ЯМ (т. е. пространственно однородным полям) присуща динамическая стохастичность уже при $n = 2, 3$, то увеличение числа степеней свободы системы, вообще говоря, должно лишь усилить хаотичность движения.

Вместе с тем увеличение n привносит новый аспект, который мы будем рассматривать в этом разделе.

Будем изучать систему (3) для $n = 4$: $A_3^3 = A_3^1 = A_3^2 = 0$.

В этом случае отлична от нуля третья компонента сохраняющегося момента

$$M_3 = A_1^a \dot{A}_2^a - A_2^a \dot{A}_1^a, \quad (18)$$

а условие связи (равенство нулю N^a) имеет вид

$$A_1^1 \dot{A}_1^2 - A_1^2 \dot{A}_1^1 = 0. \quad (19)$$

Вид потенциала $U = \frac{g^2}{4} (A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1)^2$ подсказывает подстановку

$$\left. \begin{aligned} gA_1^1 &= \xi_1 + \xi_2; & gA_1^2 &= \xi_3 + \xi_4; \\ gA_2^1 &= \xi_3 - \xi_4; & gA_2^2 &= \xi_1 - \xi_2, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

«перемешивающую» компоненты разных изотопических векторов

$$\mathbf{A}^{(1)}(A_1^1, A_2^1, 0); \quad \mathbf{A}^{(2)}(A_1^2, A_2^2, 0).$$

Гамильтониан принимает вид

$$g^2 H = \sum_{i=1}^4 \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{4} (\xi_1^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)^2. \quad (21)$$

Выражая M_3 из (18) через переменные (20) и используя связь (19), получаем

$$g^2 \frac{M_3}{4} = \xi_4 \dot{\xi}_1 - \xi_1 \dot{\xi}_4 = \xi_2 \dot{\xi}_3 - \xi_3 \dot{\xi}_2. \quad (22)$$

Удобно ввести еще переменные

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \sin \varphi; & \xi_2 &= r_2 \sin \theta; \\ \xi_4 &= r_1 \cos \varphi; & \xi_3 &= r_2 \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

так что (22) пишется очень просто

$$g^2 \frac{M_3}{4} = r_1^2 \dot{\varphi} = -r_2^2 \dot{\theta}. \quad (24)$$

Подставляя (23) и (24) в (21), получаем окончательно

$$g^2 H = \frac{\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2}{2} + \frac{M_3^2}{32} \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right] + \frac{1}{4} (r_1^2 - r_2^2)^2. \quad (25)$$

Конечно, положив $M_3 = 0$ и сделав подстановку $r_1 = (x + y)/2$; $r_2 = (x - y)/2$, мы придем к уже подробно исследованному гамильтониану с $n = 2$ (9).

Уравнение (25) было получено впервые в [45], где использовалась не гамильтонова, как здесь, а аксиальная калибровка $A_3^g = 0$.

Недавно к (25) пришел автор работы [46], однако он не заметил условия связи, которое приводит к равенству (в его обозначениях) $L_1 = L_2$ двух постоянных, играющих роль нашего M_3 ($= L_1 = L_2$).

Правда, всюду в [46] рассматривается (в качестве предположения) именно случай $L_1 = L_2$.

Полученная система с гамильтонианом (25) на деле не зависит от параметра M_3 , ибо с помощью масштабных преобразований

$$r_1 \rightarrow \left(\frac{M_3}{4} \right)^{1/3} r_1; \quad r_2 \rightarrow \left(\frac{M_3}{4} \right)^{1/3} r_2; \quad t \rightarrow \left(\frac{M_3}{4} \right)^{-1/3} t$$

H можно преобразовать в следующий вид [45]:

$$g^2 H = \left(\frac{M_3}{4} \right)^{4/3} \left[\frac{\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) + \frac{1}{4} (r_1^2 - r_2^2)^2 \right]. \quad (26)$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}_1 &= \frac{1}{r_1^3} + r_1 (r_1^2 - r_2^2); \\ \ddot{r}_2 &= \frac{1}{r_2^3} - r_2 (r_1^2 - r_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Наличие центробежного барьера в (26) делает запрещенной область $r_1 = r_2 = 0$.

Траектории системы в каждом из квадрантов системы координат r_1, r_2 лежат внутри области, ограниченной эквипотенциальной кривой, приведенной на рис. 6.

Здесь качественно имеет место та же картина блуждания частицы в канале вдоль биссектрисы квадранта, как и в случае системы (10). Исключая тривиальный случай, когда скорость частицы направлена точно вдоль оси канала, частица, как показывает анализ, на бесконечность уйти, вообще говоря, не может, ибо ширина канала убывает со временем быстрее (как t^{-2}), чем амплитуда колебаний около оси канала ($\sim t^{-1/2}$) [45]. Это обстоятельство в конечном счете обуславливает стохастичность системы, особенно ярко проявляющаяся при не малых значениях $H = \mu^4$.

Мы не будем останавливаться подробно на деталях анализа этой стохастичности и вопроса регулярной компоненты, отсылая за ними к работам [45, 47, 48]. Сделаем только одно замечание.

В разд. 4 мы видели стабилизирующее действие механизма Хиггса на систему (10). Оно, по существу, возникло благодаря введению в систему (10) дополнительного параметра λ , меняя который можно было при данном μ менять режим движения. В системе (25), несмотря на ненулевой момент M_3 , нет такого параметра. Если ввести, однако, в правую часть классических уравнений ЯМ плотность заряда $J_\mu^a = (\rho^a, 0)$ (по существу, квантового происхождения и генерированную, например, тяжелыми виртуальными кварками) $\rho^a = \rho \epsilon^{abc} n_1^b n_2^c$, где n_i^a — орты во внутреннем пространстве, то интегралы движения M_3 и N будут иметь вид

$$M_3 = r_1^2 \dot{\varphi} - r_2^2 \dot{\theta}; \quad \frac{\rho}{2} = r_1^2 \dot{\varphi} + r_2^2 \dot{\theta}.$$

Тогда вместо (26) будем иметь [48] [после масштабного преобразования $r_1 \rightarrow \left(\frac{\mu + \rho}{4}\right)^{1/3} r_1$ и т. д.]

$$g^2 H = \frac{\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_2^2} + \frac{\lambda^2}{r_1^2} \right) + \frac{1}{4} (r_1^2 - r_2^2)^2, \quad (28)$$

где в системе появился кроме энергии новый параметр

$$\lambda = (\mu - \rho)/(\mu + \rho).$$

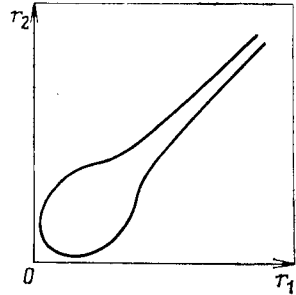


Рис. 6. Вид эквипотенциальной кривой гамильтониана (26). Дан лишь первый квадрант

Численное исследование, проведенное в [48], обнаруживает, что при $\lambda \neq 1$ при данном H имеет место переход от стохастического движения к регулярному с увеличением λ . При $\lambda > \lambda_c(H)$ система близка к регулярной. Конечно, стабилизирующее действие, связанное с ненулевой плотностью заряда ρ^a ($\lambda \gg 1$), совершенно иной природы, чем стабилизация, связанная с механизмом Хиггса.

6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЯМ

В работе [49] рассмотрен наиболее общий случай классической механики ЯМ с девятью степенями свободы.

Потенциал поля ЯМ $A_i^a(t)$ всегда можно представить как

$$(O_1 E O_2^T)_i^a, \quad (29)$$

где E диагональна,

$$E = \begin{pmatrix} x(t) & 0 & 0 \\ 0 & y(t) & 0 \\ 0 & 0 & z(t) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

а O_1 и O_2 — ортогональные, зависящие от времени матрицы.

Вводя антисимметричные матрицы ω и Ω

$$\left. \begin{aligned} \omega &= O_1^T \dot{O}_1 = -\dot{O}_1^T O_1; \\ \Omega &= O_2^T \dot{O}_2 = -\dot{O}_2^T O_2, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

для гамильтониана получаем

$$H_{\text{ЯМ}} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + T_{\text{ЯМ}} + \frac{g^2}{4} (x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2), \quad (32)$$

где

$$T_{\text{ЯМ}} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 \{ I_a (\omega_a^2 + \Omega_a^2) - 2J_a \omega_a \Omega_a \}; \quad (32a)$$

$$\omega_a = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega_{bc}; \quad \Omega_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega_{jk}; \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= y^2 + z^2; \quad I_2 = x^2 + z^2; \quad I_3 = x^2 + y^2; \\ J_1 &= 2yz; \quad J_2 = 2xz; \quad J_3 = 2xy. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Если в предыдущих разделах была полезна аналогия с классической механикой точки, то здесь напрашивается аналогия с механикой твердого тела. Только это «твердое тело» имеет зависящие от t моменты инерции J_i и I_i и «вращается» в обычном и внутреннем про-

странствах, так как если спроектировать моменты M_i и N^a на координатную систему, «движущуюся» вместе с «твердым телом»:

$$N^a = O_1^{ab} n^b; \quad M_i = O_{2ij} m_j;$$

$$N^a = I_a \omega_a - J_a \Omega_a; \quad M_k = I_k \Omega_k - J_k \omega_k,$$

и продифференцировать их по времени ($\dot{N}^a = \dot{M}_i = 0$), мы получим «уравнения Эйлера» классической механики

$$\frac{dn}{dt} = [n, \omega]; \quad \frac{dm}{dt} = [m, \Omega]. \quad (35)$$

Мы не будем подробно анализировать уравнения (35) и (32), отсылая читателя к оригинальной работе [49], где имеется также обобщение на случай произвольной калибровочной группы $SU(N)$.

7. СТОХАСТИЧНОСТЬ И КОНФАЙНМЕНТ

Обнаружение динамического хаоса свободных классических небелевых калибровочных полей и «фазового перехода» типа беспорядок — порядок (фаза конфайнмента — фаза Хиггса) в них, что составило содержание предыдущих разделов, делает крайне привлекательной идею о том, что наблюдаемые явления в какой-то мере сохраняются в реальном (т. е. квантовом) вакууме КХД и что именно наличие в нем случайных цветных вакуумных полей ответственно за конфайнмент цвета.

Во введении уже приводились аргументы в пользу того, что неупорядоченный (стохастический) вакуум может быть причиной конфайнмента (аналогия с понижением размерности квантовых спиновых систем в случайном поле, гипотеза Олесена о редукции четырехмерной теории ЯМ к двумерной при $N \rightarrow \infty$, расчеты на решетке, делающие правдоподобными эту гипотезу и для $SU(2)$ -симметрии).

Остановимся на последнем аргументе, связанном с монте-карло-расчетами на решетке распределения $\rho_C(\alpha)$ собственных значений вильсоновских петель $\langle W(C) \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \langle \rho_C(\alpha) \rangle e^{i\alpha}$, так как он показывает, что стохастические явления в какой-то мере присутствуют в КХД [15].

Как следует из результатов работы [15], для расстояний (размеров петель) r , меньших радиуса конфайнмента r_C , распределение собственных значений петель (спектральная плотность) $\rho_C(\alpha)$ имеет пик при $\alpha = 0$, что означает сильную корреляцию полей на малых расстояниях.

Однако для петель с $r > r_C$ распределение $\rho_C(\alpha)$ становится практически однородным, т. е. поля слабо коррелированы и распределение собственных значений $W(C)$ соответствует неупорядоченным конфигурациям.

Этот аргумент, если он не есть артефакт монте-карло-расчетов на решетке, указывает, что в КХД на самом деле присутствует в каком-то виде стохастическая компонента.

Вопрос о механизме этой стохастичности, является ли она проявлением и «реликтом» обнаруженной и описанной в разд. 1—6 классической стохастичности, остается, конечно, открытым.

В настоящее время имеется целый ряд механизмов, «обеспечивающих» невылетание цвета, наиболее популярным из которых является механизм, основанный на конденсации вихрей и магнитных монополей [40, 50, 51].

Не менее популярен механизм [52], основанный на идее понижения энергии вакуума из-за возникновения глюонного конденсата [28, 29].

Монте-карло-расчеты [53—55] показывают, что кварки не вылетают в $SU(2)$ - и $SU(3)$ -калибровочных решеточных теориях.

Из менее ортодоксальных механизмов невылетания укажем работу Киржница и др. [56], где возможная стохастичность КХД, о которой шла речь выше, связывается с явлением, подобным явлению локализации в неупорядоченных системах.

Явление локализации с помощью случайного потенциала, как известно, приводит к необычным свойствам спектра соответствующей квантовой задачи: он квазинепрерывен (типа множества рациональных чисел), однако волновые функции, отвечающие близким по величине энергиям, локализованы на большом расстоянии друг от друга. Поэтому таким локализованным волновым функциям отвечает дискретный спектр, уровни которого определяются свойствами случайного потенциала, действующего между кварками (в частности, длиной локализации).

В результате качественные аргументы приводят к тому, что в системе кварк — антикварк в одномерном приближении действует линейно растущий с расстоянием эффективный потенциал.

Вышесказанное с учетом упомянутых во введении работ [13, 14], в которых конфайнмент возникал в пределе $N \rightarrow \infty$ как следствие стохастичности, делает крайне важным показ того, что в самом деле стохастичность достаточна для конфайнмента в квантовой теории поля.

Покажем [57], что если в функциональном интеграле теории учитывать только поля, генерированные случайно распределенными токами, то соответствующая двухчастичная функция Грина отвечает конфайнменту. Конечно, такими полями не исчерпывается вклад в пропагатор глюонов, ибо несомненно имеется важный класс полей иной, нестохастической природы, которые особенно важны для малых и средних по сравнению с радиусом конфайнмента r_c или, в нашей задаче, с радиусом корреляции случайных токов μ^{-1} расстояний. Именно эти поля должны обеспечить свойство асимптотической свободы.

Мы не можем сказать, присутствуют ли они при $r \sim \mu^{-1} \sim r_c$

наряду со стохастической компонентой (на которую указывают упомянутые выше расчеты методом Монте-Карло [15], и если да, то каков их относительный вклад по сравнению со случайными полями.

Иными словами, нас интересует вопрос — какова функция Грина квантов поля, если они генерируются случайными цветными токами $J_\mu^a(x)$, распределенными по Гауссу (так называемый белый шум):

$$\langle J_\mu^a(x) J_\nu^b(y) \rangle = \mu^2 \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} \delta^{(4)}(x-y). \tag{36}$$

В соответствии со сказанным, динамика квантов поля (глюонов) на расстояниях порядка $r_c \sim \mu^{-1}$ определяется стохастическим уравнением движения

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} = J_\mu^a, \tag{37}$$

где S — действие теории в четырехмерном пространстве-времени (мы будем использовать ниже евклидову формулировку), а квантовое усреднение определяется соотношением

$$\langle A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n) \rangle = \langle \tilde{A}_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots \tilde{A}_{\mu_n}^{a_n}(x_n) \rangle_J. \tag{38}$$

Поля \tilde{A}_μ^a определяются из уравнения (37), а в правой части (38) усреднение $\langle \dots \rangle_J$ производится по гауссовому распределению токов

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\mu^2} \int J_\mu^a(x) J_\mu^a(x) d^4x \right\},$$

соответствующему (36).

Производящий функционал нашей теории, соответствующий (38), дается выражением

$$Z(h_\mu^a) = \int DJ \exp \left\{ - \int \left[\frac{1}{2\mu^2} J_\mu^a(x) J_\mu^a(x) - h_\mu^a(x) \tilde{A}_\mu^a(x) \right] d^4x \right\}, \tag{39}$$

дифференцированием которого по квантовому источнику $h_\mu^a(x)$ определяются гриновские функции (38).

Переходя в (39) от переменных J к переменным \tilde{A} введением соответствующей (37) δ -функции и применяя стандартный прием записи возникающего детерминанта через антикоммутирующие векторные поля $\psi_\mu^a, \bar{\psi}_\mu^a$, получаем формулу (всюду ниже для простоты мы опускаем лоренцевы и внутренние индексы)

$$Z(h) = \int D\bar{\psi} D\psi DA \exp \left\{ - \int \left[\frac{1}{2\mu^2} \left(\frac{\delta S}{\delta A} \right)^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \delta(x-y) - \bar{\psi}(x) \frac{\delta^2 S}{\delta A(x) \delta A(y)} \psi(y) - hA(x) \delta(x-y) \right] d^4x d^4y \right\} \tag{40}$$

Заметим, что введение здесь стохастического уравнения (37) в функциональный интеграл отличается тем, что здесь не вводится вспомогательное время в качестве пятой координаты, а мы работаем в реальном пространстве-времени. При этом возникает тесная связь стохастических дифференциальных уравнений типа (37) с суперсимметрией, которая была замечена недавно [58].

Собственно из вида (40) уже можно усмотреть, что в древесном приближении двухчастичная функция типа (38) имеет свойства конфайнмента [первое слагаемое в экспоненте (40)].

Покажем это другим способом, связанным с введением суперполя $\Phi_\mu^\alpha(x, \theta)$:

$$\Phi_\mu^\alpha(x, \theta) = A_\mu^\alpha(x) + \bar{\psi}_\mu^\alpha(x)\theta + \bar{\theta}\bar{\psi}_\mu^\alpha(x) + C_\mu^\alpha\bar{\theta}\theta, \quad (41)$$

где $\theta, \bar{\theta}$ антикоммутирующие переменные ($\theta^2 = \bar{\theta}^2 = \{\theta, \bar{\theta}\} = 0$).

Легко убедиться, что (40) можно записать в виде

$$Z(h) = \int D\Phi(x, \theta) \exp \left\{ - \int \left[\mathcal{L}(\Phi) - \frac{\mu^2}{2} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\theta} \partial \theta} \Phi - H\Phi \right] \right\} d^4x d\bar{\theta} d\theta, \quad (42)$$

где $H = h(x)\bar{\theta}\theta$.

Из (42) можно получить, что фурье-образ пропагатора $\langle \Phi_\mu^\alpha \Phi_\nu^\beta \rangle$ суперполя имеет структуру ($p^2 \leq \mu^2$)

$$(p^2 + \mu^2 \bar{\alpha}\alpha)^{-1} \delta^{ab} \delta_{\mu\nu},$$

где $\bar{\alpha}, \alpha$ — грассманы переменные, соответствующие (после фурье-преобразования) переменным $\bar{\theta}, \theta$.

Интегрируя по ним, мы приходим к конфайнменту, так как в результате фурье-образ $\langle A_\mu^\alpha A_\nu^\alpha \rangle$ имеет вид $\delta_{\mu\nu} \delta^{ab} \mu^2/p^4$, т. е. обмен такими квантами обуславливает линейно растущий с r (для $r \geq r_c$) потенциал между статическими источниками.

Проведенное рассмотрение показывает, что стохастичность источников, генерирующих соответствующие поля (а они могут быть, как показывают монте-карло-расчеты [15], вблизи $r \geq r_c$), является достаточным условием линейно растущего с r потенциала.

Можно убедиться, что стохастичность является также необходимым условием, если основываться на локальных теориях поля. Однако внимательный читатель, наверное, увидит, что такой конфайнмент не является чем-то особенным для калибровочных теорий, ибо, как видно из нашего вывода, любая квантовая теория поля, характеризующаяся условием (36) стохастичности (очевидно, ограничение белым шумом в качестве примера стохастичности не имеет решающего значения), будет иметь пропагатор с поведением μ^2/p^4 при $p^2 \ll \mu^2$.

Это хорошо видно из следующей цепочки символических уравнений и соотношений:

$$\square A = -J; A = -\square^{-1}J;$$

$$\langle A(x) A(y) \rangle = \square_x^{-1} \square_y^{-1} \langle J(x) J(y) \rangle = \mu^2 \square_x^{-1} \square_y^{-1} \delta^{(4)}(x-y)$$

и т. д., откуда следует, именно благодаря коррелятору (36), сделанное утверждение.

Что же тогда выделяет калибровочную теорию неабелевых полей среди других теорий?

Очевидно, присущая ей динамическая стохастичность, которую мы детально рассмотрели в этом обзоре для классического случая.

8. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Вопрос о том (см. введение), сохраняются ли следы описанной в этой статье динамической стохастичности классических неабелевых калибровочных полей в реальном адронном мире, непростой.

Хорошо известны отмеченные во введении следствия для квантовых систем, обладающих динамической стохастичностью в классическом пределе (КХД, как мы уже знаем, именно такая система), связанные со структурой спектра и свойствами волновых функций [21, 24—26].

Это позволяет думать, что реальный спектр адронов должен отражать иррегулярность, отвечающую установленному динамическому хаосу классической теории ЯМ.

Но как обнаружить эту иррегулярность, с чем сравнить этот реальный спектр?

На таком пути вряд ли следует ожидать какого-либо реального продвижения. Однако вполне вероятно, что можно выявить другие характеристики адронных явлений, в которых образуется динамическая стохастичность неабелевых калибровочных полей, управляющих миром адронов.

На этом пути возможен реальный прогресс. Наряду с отмеченными выше работами, связанными с монте-карло-расчетами на решетке [15], здесь особо следует отметить цикл работ Карузерса с сотрудниками [59—61], в которых множественное рождение адронов рассматривалось в свете тех стохастических закономерностей, которые характерны для развитой турбулентности и распределения галактик во Вселенной.

В этих работах было обнаружено, что эти явления из различных областей физики характеризуются общностью, в основе которой лежат стохастические закономерности.

Все эти явления описываются единым распределением (обобщенное бозе-эйнштейновское распределение)

$$P_n^{(k)} = \frac{(n+k-1)!}{n! (k-1)!} \frac{(\bar{n}/k)^n}{\left(1 + \frac{\bar{n}}{k}\right)^{n+k}}$$

Это распределение отвечает k независимым случайным (гауссовым) источникам. Оказывается, что распределению $P_n^{(k)}$ подчиняется и статистика отсчетов электронов от k случайных (тепловых) источников, а также статистика фотоэлектронов от когерентного лазерного света, проходящего через жидкость, находящуюся в критическом состоянии (соответствующее распределение для случая жидкости в нормальном состоянии описывается простым распределением Пуассона). Применительно к множественному (недифракционному) образованию адронов можно сказать, что распределение $P_n^{(k)}$ отражает тот факт, что адроны, по-видимому, испускаются случайными (гауссовыми) источниками, сильно возбужденное в результате столкновения глюонное вещество (кварк-глюонная плазма?), дающее мягкую адронизацию, ведет себя как турбулентная жидкость. Общность этих явлений особенно разительна в том смысле, что они характеризуются универсальной связью между \bar{n} и k :

$$k = \bar{n}^{1/D}$$

для больших k , где D почти одинаково для распределения галактик ($D = 2,50$) и множественного рождения адронов ($D \approx 2,56$). Для развитой турбулентности величина, соответствующая D , характеризует диссипативную корреляционную функцию и имеет смысл фрактальной размерности [62] каскадной модели турбулентности [63]. Измерения дают для D значения 2,6—2,8.

Это замеченное в [61] численное совпадение может иметь общую основу и отражает, по-видимому, общее для этих разных явлений топологическое свойство (не исключено, что D можно связать с показателями Ляпунова (12) или с KS -энтропией (см. сноску на с. 535)). Очевидно, что основа этих явлений носит не квантовый, а сугубо классический аспект, так что можно, например, сказать в этом свете, что известный KNO -скейлинг в множественном рождении, нашедший хорошее описание с помощью распределения $P_n^{(k)}$ [59—61], является не следствием различных динамических и геометрических моделей, а отражает не зависящие от деталей общие стохастические закономерности, присущие явлениям из самых разных областей науки. Динамический хаос неабелевых калибровочных полей принадлежит к этой группе явлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. — УМН, 1963, т. 18, № 6, с. 91; Arnold V. I., Avez A. Ergodic Problems of Classical Mechanics. Benjamin, 1968.
2. Moser J. Stable and Random Motions in Dynamical Systems. Princeton Univ. Press, 1973.
3. Корнфельд И. Р., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
4. Chirikov B. V. — Phys. Repts. 1981, v. 75, p. 287.
5. Ruelle D., Takens F. — Commun. Math. Phys., 1971, v. 20, p. 167.

6. Helleman R. H. Self-Generated Chaotic Behaviour in Nonlinear Mechanics.— In: Fundamental Problems in Statistical Mechanics. Vol. 5/Ed. E. Cohen, Amsterdam-N. Y.: North Holland Publ., 1980, p. 165.
7. Алексеев В. М., Якобсон М. В. Добавление к книге: Боуэн Р. Методы символической динамики: Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
8. Belavin A. A., Polyakov A. M., Tyupkin Yu. S., Schwartz A. S.— Phys. Lett., 1975, v. 59B, p. 85.
9. Callan C. G., Dashen R., Gross D. J.— Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 2717.
10. Поляков А. М.— Nucl. Phys., 1980, v. B164, p. 171.
11. Migdal A. A. Preprints EPI-584 (71)—82, 585 (72)—82, 586 (73)—82.
12. Imry Y., Ma S. K.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 1399; Grinstein J.— Ibid., 1976, v. 37, p. 944; Aharony A., Imry Y., Ma S. K.— Ibid., p. 1364; Young A.— J. Phys., 1977, v. C10, p. 1257.
13. Olesen P.— Nucl. Phys., 1982, v. B200, p. 381.
14. Kupiainen A., Niemi A. Preprint HN-TFT-82-41.
15. Belova T. I., Makeenko Yu. M., Polikarpov M. I., Veselov A. I. On the Stochastic Confinement in SU (2) Lattice Gauge Theory. Preprint ИТЕР № 27, 1983.
16. Матинян С. Г., Саввиди Г. К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н. Г.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 830.
17. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.— Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 34, с. 171.
18. Матинян С. Г., Саввиди Г. К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н. Г.— Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 34, с. 613.
19. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1950; Борн М.— УФН, 1959, т. 69, с. 2.
20. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Препринт ИЯФ СО АН СССР 80-210, 1980.
21. Percival I. C.— J. Phys. B: Atom. Mol. Phys., 1973, v. 1, p. 1909.
22. Pullen R. A., Edmonds A. R.— J. Phys. A, Math. Gen., 1981, v. 14, p. L319.
23. Pullen R. A., Edmonds A. R.— Ibid., p. L477.
24. Von Neumann J., Wigner E. P.— Z. Phys., 1929, v. 30, p. 467.
25. Teller E.— J. Phys. Chem., 1937, v. 41, p. 109.
26. Berry M. V.— J. Phys. A, Math. Gen., 1977, v. 10, p. 2083.
27. Casati G., Guarneri I.— Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, № 9, p. 640.
28. Matinyan S. G., Savvidy G. K.— Nucl. Phys., 1978, v. B138, p. 539.
29. Savvidy G. K.— Phys. Lett., 1977, v. B71, p. 133.
30. Басеян Г. З., Матинян С. Г., Саввиди Г. К.— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 641.
31. Coleman S.— Phys. Lett., 1978, v. 70B, p. 59.
32. Poincare H. New Methods of Celestial Mechanics, 1897, v. 3, Ch. 27.
33. Contopoulos G.— Astronom. J., 1963, v. 68, p. 14.
34. Henon M., Heiles C.— Ibid., v. 69, p. 73.
35. Walker C. N., Ford J.— Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 416.
36. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.— ЯФ, 1982, т. 36, с. 1563.
37. Николаевский Е. С., Шур Л. Н.— Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 36, с. 176.
38. Зиглин С. Л.— ДАН СССР, 1981, т. 23, с. 220.
39. Wilson K.— Phys. Rev., 1974, v.D10, p. 2445.
40. 't Hooft G.— Nucl. Phys., 1978, v. B138, p. 1.
41. Mandelstam S.— Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 2391.
42. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
43. Колмогоров А. Н.— ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 527.
44. Кожуховский Н. Н., Мартынюк А. А.— ЯФ, 1983, т. 37, № 2, с. 508.
45. Басеян Г. З. Препринт ЕФИ-573 (60)-82.
46. Frojland J.— Phys. Rev., 1983, v. D27, p. 943.
47. Авакян А. Р., Арутюнян С. Г., Басеян Г. З.— Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 36, с. 372.

48. Авакян А. Р., Арутюнян С. Г., Басеян Г. З. Препринт ЕФИ-641 (31)-83.
49. Asatryan H. M., Savvidy G. K. Preprint EPI-580 (67)-82.
50. Mandelstam S.— Phys. Rep., 1976, v. 23C, p. 245.
51. 't Hooft G.— Nucl. Phys., 1979, v. B153, p. 141.
52. Olesen P.— Physica Scripta, 1981, v. 23.
53. Creutz M.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 553—556.
54. Creutz M.— Phys. Rev., 1980, v. D21, p. 2308—2135.
55. Creutz M.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 313—316.
56. Апенко С. М., Киржниц Д. А., Лозовик Ю. Е.— Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 36, с. 172—174.
57. Egoryan E. Sh., Matinyan S. G. Preprint EPI-637 (27)-83.
58. Parisi G., Sourlas N.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 744.
59. Carruthers P., Shih C. C.— Phys. Lett., 1983, v. 127B, p. 242.
60. Carruthers P., Shih C. C.— Phys. Lett., 1984, v. 137B, p. 425.
61. Carruthers P., Minh Duong-Van. LA-UR-83-2419.
62. Mandelbrot B. Fractals, Form, Chance and Dimension/ Ed. W. H. Freeman, San Francisco, 1977.
63. Frish V., Sulem P. L., Nelnin M.— J. Fluid Mech., 1978, v. 87, p. 719.
64. Savvidy G. K. Preprint EPI-613 (3)-83.
65. Gurzadyan V. G., Savvidy G. K. Preprint EPI-678 (68)-83.