«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1985, ТОМ 16, ВЫП. 3

УДК 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ВИДА УЕДИНЕННЫХ ВОЛН НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е. П. Жидков, К. П. Кирчев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзор включены следующие вопросы: изучение задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза, уравнения Бенжамена — Бона — Махони, модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза, нелинейного уравнения Шредингера со степеннóй нелинейностью, уравнение Клейна — Гордона; при помощи спектральной теории операторов дано строгое исследование устойчивости решений вида уединенных волн указанных выше уравнений.

There are study the initial value problem for the Korteweg — de Vries equation, Benjamin — Bona — Mahony equation, modified Korteweg — de Vries equation, nonlinear Schrödinger equation, Klein — Gordon equation. The stability of solitary waves for these equations has been proved.

ВВЕДЕНИЕ

В изучении нелинейных волн в последние годы были достигнуты значительные результаты [1—10], и, хотя основные идеи теории нелинейных волн возникли при изучении соответствующих задач механики жидкостей, почти любая область физики связана с волновым движением.

Выяснилось, что некоторые простые нелинейные уравнения имеют универсальный характер. Например, уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ) первоначально было выведено при исследовании волн на воде. Впоследствии стало ясно, что оно является одним из простейших уравнений, сочетающих нелинейность и дисперсию, а уравновешивание дисперсии и слабой нелинейности является общим физическим процессом, возникающим в самых разнообразных физических приложениях. Почти все эти уравнения имеют решения в виде уединенной волны, а уединенные волны всегда вызывают интерес, поскольку при их взаимодействии возникают чисто нелинейные эффекты.

После замечательной работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [11], в которой был открыт метод решения уравнения КдФ, использующий обратную задачу рассеяния, интерес к уединенным волнам, а точнее к солитонам (как стали называть уединенную волну, сохраняющую свою форму и скорость после столкновения с другой такой уединенной волной) еще больше возрос. В. Е. Захаров и А. Б. Шабат показали, что есть и другие подобные уравнения и применили [12, 13] метод обратной задачи для оператора Дирака к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью. Отметим еще, что периодическая задача для уравнения КдФ была решена в [14—17]. Выяснилось, что те нелинейные эволюционные уравнения, которые интегрируемы обратным преобразованием рассеяния, имеют особый физический интерес и являются бесконечномерными гамильтоновыми системами. Точная интегрируемость уравнений имеет следующую интерпретацию на языке гамильтоновых систем: преобразование данных Коши к данным рассеяния, которое лежит в основе метода обратной задачи рассеяния, является нелинейным каноническим преобразованием к переменным типа действие — угол. Эта важная интерпретация была первоначально предложена В. Е. Захаровым и Л. Д. Фаддеевым [18] для уравнения КдФ. Наиболее интересные приложения этого подхода связаны с проблемами квантования нелинейных уравнений.

Впоследствии был проведен ряд исследований, фактически было создано новое направление теории нелинейных дифференциальных уравнений, в котором широко применялись самые разнообразные математические методы.

Настоящий обзор посвящен в основном вопросам устойчивости уединенных волн.

Исследования устойчивости на интуитивном уровне проводились во многих физических работах. Некоторые из них (например, исследования устойчивости, которые проводили В. Е. Захаров и А. Б. Шабат [2, 12], В. Г. Маханьков [6, 7]) содержат интересные идеи.

Тем не менее нам представляется естественным и важным не только для математики, а и для приложений проведение математических исследований нелинейных дифференциальных уравнений математической физики и уединенных волн на строгом математическом уровне. Другими словами, согласно классической концепции Адамара необходимо исследовать вопросы существования и единственности решения задачи Коши, непрерывной зависимости решения от начальных данных. А строгое определение и исследование устойчивости решения всегда связано с конкретной метрикой.

В настоящий обзор включены следующие вопросы:

1. Изучение задачи Коши для уравнения КдФ, уравнения Бенжамена — Бона — Махони (ББМ), модифицированного уравнения КдФ (МКдФ) НУШ со степенной нелинейностью, уравнение Клейна — Гордона (КГ).

2. При помощи спектральной теории операторов строгое исследование устойчивости решений вида уединенных волн вышеуказанных уравнений.

В п. I разд. 1 мы, следуя изложению работ [19, 20] (метод псевдопараболической регуляризации), излагаем строгую теорию регулярности (существование и единственность решения задачи Коши, непрерывная зависимость решения от начальных данных) для уравнений

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,\ u(x,\ 0) = g(x)\ \text{(КдФ)}; \tag{1}$$

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,\ u(x,\ 0) = g(x)\ \text{(ББМ)}, \tag{2}$$

описывающих процессы в нелинейных средах со слабой дисперсией в пространстве Соболева со стандартной нормой:

$$\| f \|_s^2 = \sum_{j=0}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} | f^{(j)}(x) |^2 \, dx,$$

где $f \in L_2$; $f^{(k)} = d^{(k)}f/dx^{(k)}$— обобщенная производная; $1 \leqslant k \leqslant s$.

Впервые полное доказательство теоремы существования для уравнения КдФ с периодическими начальными условиями было дано Темамом [21] при помощи метода параболической регуляризации [т. е. добавляя εu_{xxxx} к (1), а потом делая предельный переход при $\varepsilon \to 0$]. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах [22—24]. В частности, было доказано существование единственного локального (глобального) решения уравнения КдФ в случае, когда начальные данные принадлежат H^s, $2 > s > 3/2$ (соответственно $s \geqslant 2$). Из теории Като о квазилинейных абстрактных эволюционных уравнениях [25, 26] вытекает тот же результат; кроме того, получается и непрерывная зависимость решения от начальных данных в H^s, $s > 3/2$. Для нецелых s отметим еще работу [27], а в [28] доказано существование глобального решения для некоторых классов разрывных начальных данных.

При изложении вопросов существования решения уравнения КдФ мы будем пользоваться теорией регулярности Бона и Смита [20], так как сравнительно просто, не используя никаких сложных математических методов, получается достаточно общий результат для уравнения КдФ.

Впервые вопрос устойчивости уединенной волны для уравнения КдФ рассматривался Джефри и Какутани [29]. Их подход нельзя считать удовлетворительным по двум причинам: первое — наивно переносится теория Ляпунова на бесконечномерные пространства и второе — не учитывается наличие непрерывного спектра у дифференциального оператора линейной задачи. Более подробно об этом см. комментарий в [30].

Впервые строгий математический подход к изучению вопросов устойчивости уединенных волн предложен Бенжаменом в пионерской работе [31].

Бенжамен дал строгое доказательство устойчивости «формы» уединенных волн

$$\Phi(z) = 3c \operatorname{sch}^2 [c^{1/2} z]; \tag{3}$$

$$\Psi(z) = 3c \operatorname{sch}^2 [c^{1/2} z/2\,(1 + c)^{1/2}], \tag{4}$$

где $c > 0$; $z = x - (1 + c)\,t$. $\Phi(z)$ является решением уравнения КдФ в форме

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0; \; u(x, 0) = g(x). \tag{5}$$

Соответственно $\Psi(z)$ — решение уравнения (2).

Устойчивость формы определяется как устойчивость относительно заданной в пространстве H^1 псевдометрики

$$d(f, g) = \inf_{y \in R} \| f(\cdot + y) - g \cdot \|_1. \tag{6}$$

Вопрос устойчивости в метрике (6) естествен для уравнений (5) и (2) и отражает инвариантность решений (5) и (2) относительно сдвига.

Основная идея Бенжамена состоит в оценке второй вариации нелинейного функционала $M(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 - (1/3)\,u^3)\,dx$ при помощи подходящих спектральных задач.

В п. II разд. 1 мы приведем доказательство Бенжамена, придерживаясь изложения работы [32], в которой устранены некоторые мелкие неточности, допущенные в [31].

Из работ, посвященных устойчивости решений уравнения КдФ, отметим еще [30, 33, 34]. В [33] Бенжамен показывает, что уединенная волна уравнения КдФ в случае периодических начальных условий (при этом она задается через эллиптические функции Вейерштрасса) устойчива относительно аналогичной (6) метрики для возмущений начальных условий с тем же периодом. В [34] при помощи методов, развитых в [35—37], результат Бенжамена распространен на решения уравнения КдФ с начальными данными $u(x, 0) \in C_1^\infty$ (C_1^∞— класс бесконечно-дифференцируемых вещественных функций с периодом 1).

В [30] при помощи техники метода обратной задачи, развитой в [38], исследуется вопрос устойчивости произвольного достаточно быстро убывающего по пространственной переменной решения уравнения КдФ.

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), встречающееся в ряде различных задач, описывает многие явления, такие как поведение неидеального бозе-газа со слабым взаимодействием между частицами, распространение теплового импульса в твердом теле, лэнгмюровские волны в плазме и т. п. (см., например, [1, 12]).

Интерес к НУШ увеличился после того, как выяснилось, что оно имеет универсальный характер в том же смысле, что и уравнение КдФ, и в случае кубической нелинейности может быть проинтегрировано методом обратной задачи [12].

В разд. 2 мы докажем [39] устойчивость решения вида уединенной волны для одномерного НУШ со степенно́й нелинейностью

$$iu_t + u_{xx} - u(a - |u|^{2p}) = 0, \; 0 < 2p \leqslant 3; \; a \in R. \tag{7}$$

Можно показать, что уравнение (7) имеет двупараметрическое семейство решений

$$\varphi(x,\ t) = r(x - 2\omega t)\, e^{i\omega x + i(\alpha - \omega^2)t}, \tag{8}$$

где

$$r(y) = ((p+1)(a+\alpha))^{1/2p}\left(\operatorname{ch} py\sqrt{a+\alpha}\right)^{-1/p},\ \alpha,\ \omega \in R;\ a+\alpha > 0. \tag{9}$$

В частности, при $\omega = 0$ имеем решение вида стоячей волны, а при $p = 1$; $a = 0$; $\alpha = \xi^2$— односолитонное решение Захарова и Шабата [12].

Введем псевдометрику

$$d(u,\ \varphi) = \inf_{(\eta,\ \zeta)\in R^2} \| u(x,\ t) - e^{i\eta}\varphi(x-\zeta,\ t)\|_1. \tag{10}$$

Устойчивость стоящей волны в псевдометрике (10) Казенаве и Лионс [40] называют орбитальной устойчивостью, так как мы имеем устойчивость решения с точностью до сдвига и вращения, в частности в вещественном случае устойчивость формы.

Устойчивость в метрике (10) является естественной для уравнения (7), так как решения (7) инвариантны относительно сдвига и вращения в том смысле, что если $u(x, t)$ — решение (7), то $e^{i\eta}\, u(x - \zeta, t)$ тоже является решением. Можно легко показать, что $\varphi(x, t)$ неустойчиво в более сильной метрике $d_1(u, \varphi) = \|\varphi - u\|_1$.

В случае $\omega = 0$ в [40] доказана орбитальная устойчивость стационарного решения (стоящей волны) многомерного НУШ с более общим видом нелинейности. При этом границей, отделяющей устойчивые решения от неустойчивых [41], является в одномерном случае нелинейность $U(|u|)\,u$, где нелинейная функция $U(|u|)$ имеет степенной рост $2p = 4$. Отметим, что впервые на этот факт указал В. Г. Маханьков [6, 7, 42]. Можно предполагать, что и при $\omega = 0$ устойчивость решения (8) должна иметь место при $0 < 2p < 4$.

Хорошо известно [43—45], что задача Коши для уравнения (7) с начальными данными

$$u(x,\ 0) = u_0(x) \in H^1(R) \tag{11}$$

имеет единственное глобальное решение (в смысле распределений) $u(x,\ t)$, при этом $u(\cdot,\ t) \in C([0,\ \infty);\ H^1(R))$.

Основным результатом [39] разд. 2 является:

Теорема 1. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $u(x,\ t)$ является решением задачи (7), (11) и $d(u,\ \varphi)\,|_{t=0} < \delta$, то $d(u,\ \varphi) < \varepsilon$ для всех $t \in [0,\ \infty)$ [здесь $d(u,\ \varphi)$ и φ задаются формулами (10) и (8)].

При доказательстве теоремы 1 мы развиваем идеи метода, предложенного Бенжаменом [31, 33] (другую модификацию см. в [46]).

При этом существенную роль играют следующие три функционала:

$$\left.\begin{aligned} &Q = \mathrm{i}\int \bar{u}_x u\,dx \text{ (заряд)};\quad P = \int |u|^2\,dx \text{ (масса)};\\ &E = \int (|u_x|^2 + a|u|^2 - |u|^{2(p+1)})/(p+1)\,dx \text{ (энергия)}, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

инвариантные по времени, когда решение (7) принадлежит $C([0, \infty); H^1(R))$.

Положим $M = E + (\alpha + \omega^2)P - 2\omega Q$, т. е.

$$M(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[|u_x|^2 + (a + \alpha + \omega^2)|u|^2 - \frac{|u|^{2(p+1)}}{p+1} - 2\mathrm{i}\omega\bar{u}_x u\right]dx. \qquad (13)$$

Обозначим для фиксированного $q > 0$

$$d_q^2(u, \varphi) = \inf_{(\eta, \zeta)\in R^2}(\|u_x(x, t) - e^{\mathrm{i}\eta}\varphi_x(x - \zeta, t)\|^2 + + q\|u(x, t) - e^{\mathrm{i}\eta}\varphi(x - \zeta, t)\|^2). \qquad (14)$$

Утверждение теоремы 1 мы получим как следствие следующего предложения.

Предложение 1. Существуют положительные константы K, q, δ_0 такие, что если u — решение (7), (11), $P(u) = P(\varphi)$ и $d_q(u, \varphi) < \delta_0$, то $M(u) - M(\varphi) \geqslant Kd_q^2(u, \varphi)$. [Здесь $d_q(u, \varphi)$, φ, P и M задаются формулами (14), (8), (12) и (13).]

Доказательство предложения 1 мы получим в п. I разд. 2, оценивая снизу вторую вариацию $M(\varphi)$, при помощи подходящих спектральных задач. Отметим, что если в случае уравнений КдФ и ББМ достаточно было учитывать только вклад дискретного спектра в спектральном разложении, то здесь для получения необходимой оценки требуется учитывать и положительный вклад непрерывного спектра. По-видимому, более тонкий анализ вклада непрерывного спектра в спектральном разложении даст возможность доказать устойчивость уединенной волны (8) и в случае $3 < 2p < 4$.

Доказательство теоремы 1 мы изложим в п. II разд. 2.

Отметим, что в случае $p = 1$ устойчивость уединенной волны (8) была строго доказана Е. П. Жидковым. Изложим идею его доказательства. Выберем величину сдвига τ_0 для функции u из условия минимальности интеграла $I(u, \varphi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}[|\varphi(x - \tau, t)| - |u(x, t)|]^2\,dx$ (в работе доказано существование конечного τ_0, для которого достигается точная нижняя грань I). Представим функции φ и u в виде $\varphi = \rho_c e^{\mathrm{i}\Theta_0}$; $u = (\rho_0 + \rho)\,e^{\mathrm{i}(\rho_0 + \Theta)}$. В силу выбора τ_0 имеем условие стационарности интеграла I:

$$\int \rho_{0x}(x - \tau_0, t)\,\rho(x, t)\,dx = 0.$$

В этих обозначениях ΔM запишется в виде

$$\Delta M = \int [\rho_x^2 + \rho^2 (\alpha - 3 \mid \varphi \mid^2)]\, dx + \\ + \int (\rho_0 + \rho)^2 \Theta_x^2\, dx + \int O(\rho^3)\, dx = J_1 + J_2 + J_3.$$

Применив спектральную задачу для оператора $L = -d^2/dx^2 + 3\rho_0^2$ на полупрямой, условие стационарности интеграла I и дополнительное условие $P(u) = P(\varphi)$, получим оценку $J_1(\rho) \geqslant C_1 \| \rho \|^2$, где $C_1 > 0$. Из этой оценки при помощи рассуждений, аналогичных изложенным в п. II разд. 2, выводится устойчивость φ в метрике $d_1(u, \varphi)$, задаваемой формулой (10).

Для описания волн в средах со слабой дисперсией в случае, когда преобладает кубичная нелинейность, кроме НУШ встречается и нелинейное модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза (МКдФ)

$$u_t + 6 \mid u \mid^2 u_x + u_{xxx} = 0,\ u(x, 0) = g(x);\ x \in R;\ t \geqslant 0, \tag{15}$$

которое, как отмечает Захаров [8], тоже имеет универсальный характер.

Комплексное уравнение (15) рассматривалось Захаровым [8], Форнбергом и Уиземом [47], Маханьковым [6, 7, 42]. В частности, для вещественных u Вадати проинтегрировал уравнение (15) методом обратной задачи рассеяния [48]. Отметим, что проводя рассуждения, изложенные в [2, § 8—10], комплексный аналог (15) уравнения МКдФ тоже можно проинтегрировать методом обратной задачи.

Метод псевдопараболической регуляризации, изложенный в разд. 1, может быть применен к уравнению (15) только в случае вещественных u [49], так как в комплексном случае не существуют необходимые априорные оценки по ε для регуляризованного уравнения $u_t + 6 \mid u \mid^2 u_x + u_{xxx} - \varepsilon^2 u_{xxt} = 0$.

В п. I разд. 3 мы покажем [50], используя теорию квазилинейных эволюционных уравнений [25, 26], что задача Коши для уравнения (15) с начальными данными

$$u(x, 0) = g(x) \in H^s(R),\ s \geqslant 2 \tag{16}$$

имеет единственное глобальное решение $u(x, t)$, при этом $u(\cdot, t) \in C([0, \infty); H^s)$.

В п. II разд. 3 мы покажем орбитальную устойчивость решения (15) вида уединенной волны

$$\varphi(x, t) = e^{i\omega(x + (\omega^2 - 3a^2)t)} r(x + (3\omega^2 - a^2)t), \tag{17}$$

где $r(\xi) = a\, \mathrm{ch}^{-1} a\xi$; $a > 0$ и ω — фиксированные вещественные параметры. Для того чтобы, в частности, при $\omega = 0$ получилась как следствие устойчивость формы $r(x - a^2t)$ для вещественного уравнения МКдФ, псевдометрики (10) и (14) запишем в форме

$$d(u, \varphi) = \inf_{(\eta, \zeta)\in R^2} \| u(x, t) - e^{i\omega\eta}\varphi(x-\zeta, t)\|_1; \tag{18}$$

$$d_q^2(u, \varphi) = \inf_{(\eta, \zeta)\in R^2} [\| u_x(x, t) - e^{i\omega\eta}\varphi_x(x-\zeta, t)\|^2 + \\ + q\| u(x, t) - e^{i\omega\eta}\varphi(x-\zeta, t)\|^2]. \tag{19}$$

Основным результатом разд. 3 является [50]:

Теорема 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $u(x, t)$ — решение задачи (15), (16) и $d(u, \varphi)|_{t=0} < \delta$, то $d(u, \varphi) < \varepsilon$ для всех $t \in [0, \infty)$ [здесь $d(u, \varphi)$ и φ задаются формулами (18) и (17)].

Так же как для НУШ, при доказательстве теоремы 2 мы используем функционалы

$$Q = i\int \bar{u}_x u\, dx; \quad P = \int |u|^2 dx; \quad E = \int (|u_x|^2 - |u|^4)\, dx, \tag{20}$$

инвариантные по времени, когда $u(x, t)$ является решением задачи (15), (16).

Мы покажем, что $\varphi(x, t)$ минимизирует функционал $M = E + (a^2 + \omega^2)P - 2\omega Q$, т. е.

$$M(u) = \int [|u_x|^2 - |u|^4 + (a^2 + \omega^2)|u|^2 - 2i\omega\bar{u}_x u]\, dx, \tag{21}$$

а утверждение теоремы 2 получим как следствие предложения 2.

Предложение 2. Существуют положительные константы K, q, δ_0 такие, что если u — решение (15), (16), $P(u) = P(\varphi)$ и $d_q(u, \varphi) < \delta_0$, то $[M(u) - M(\varphi)] \geqslant K d_q^2(u, \varphi)$ [здесь $d_q(u, \varphi)$, φ, P и M задаются формулами (19), (17), (20) и (21)].

Доказательство предложения 1 мы получим в п. II разд. 3, так же как для НУШ, оценивая снизу вторую вариацию $M(\varphi)$ при помощи подходящих спектральных задач. Здесь для получения необходимой оценки тоже требуется учитывать и положительный вклад непрерывного спектра. Доказательство теоремы 2 мы изложим в п. III разд. 3.

Численное решение для уравнения ББМ с начальными данными типа ступеньки рассматривалось в [51], а теорема существования приведена в [19]. В [52] методами интегралов энергии и общей тауберовой теоремы изучена задача Коши для уравнения КдФ в предположении, что $u_0(x) \to -A$ при $|x| \to \infty$; $A > 0$.

Уравнение КдФ с начальными данными, имеющими разные пределы на $\pm\infty$, впервые рассматривалось в [53, 54], где приближенным методом Уизема была найдена асимптотика решения при $t \to +\infty$ в предположении существования глобального решения. В [55, 56], предполагая, что решение задачи Коши с начальными данными типа ступеньки для уравнения КдФ [55] и для уравнения МКдФ [56] существует, с помощью обратной задачи рассеяния были получены асимптотики решения при $t \to +\infty$.

Обозначим X^s, $s \geqslant 1$, множество функций $f(x)$, определенных на действительной оси R, таких, что для каждой функции $f(x)$ существует константа c_f, для которой выполняется

$$|||f|||_s^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x) - c_f \operatorname{sgn}(x)]^2 \, dx + \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|^2 \, dx < \infty, \quad (22)$$

где $f^{(k)} = d^{(k)}f/dx^{(k)}$ — обобщенная производная.

Линейное пространство X^s, $s \geqslant 1$, снабженное нормой (22), является банаховым пространством абсолютно непрерывных на любом конечном интервале функций $f(x)$, для которых $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c_f$.

Нетрудно показать, что имеет место оценка

$$|c_f| \leqslant \sup_{x \in R} |f(x)| \leqslant \text{const}\, |||f|||_s. \quad (23)$$

Следовательно, $f^2 - c_f^2 \in H^s(R)$.

В п. I разд. 4 [57] с использованием метода псевдопараболической регуляризации показано существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных данных для вещественного уравнения МКдФ

$$u_t - u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \; u(x, 0) = f(x); \; x \in R; \; t \geqslant 0, \quad (23')$$

где начальные данные $f(x)$ принадлежат X^s, $s \geqslant 3$. В п. II разд. 4 доказана устойчивость формы решения (23) вида уединенной волны, принадлежащего X^s для любого $t \geqslant 0$. Здесь под устойчивостью формы [в силу оценки (23)] понимаем устойчивость относительно псевдометрики

$$d(u, \varphi) = \inf_{\zeta \in R} |||u(x, t) - \varphi(x - \zeta, t)|||_1. \quad (24)$$

В п. III разд. 4 мы рассматриваем уравнение Клейна — Гордона в конусных переменных

$$v_{xt} - V'(v) = 0. \quad (25)$$

Мы изучаем устойчивость формы решения вида уединенных волн типа «кинков» уравнения (25). В предположении, что существует решение (25), удовлетворяющее некоторым естественным условиям, слегка модифицируя рассуждения, приведенные в работе [46], докажем устойчивость формы решения типа кинков уравнения (25). В частности, получается устойчивость односолитонного решения уравнения sine — Gordon и решения типа кинк уравнения Клейна — Гордона с кубической нелинейностью (отметим, что этот факт был доказан раньше другим путем в работе [58]).

1. УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА (КдФ) И УРАВНЕНИЕ БЕНЖАМЕНА — БОНА — МАХОНИ (ББМ)

I. **Теория регулярности.** Введем некоторые обозначения:

1. $\widetilde{H}^s_T = C\,(0,\ T;\ H^s)$ состоит из функций u: $R \times [0,\ T] \to R$, которые принадлежат H^s при фиксированном $t \in [0,\ T]$, и отображение u: $[0,\ T] \to H^s$ является непрерывным и ограниченным. Норма в $\widetilde{H}^s_T$ задается формулой $|u|_s = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(\cdot,\ t)\|_s$.

2. $\widetilde{H}^{s,k}_T = C^k\,(0,\ T;\ H^s)$ содержит такие u, что $\partial_t^j u \in \widetilde{H}^s_T$ при $0 \leqslant j \leqslant k$, и имеет норму

$$|u|_{s,k} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T}\ \sup_{0 \leqslant j \leqslant k} \|\partial_t^j u(\cdot,\ t)\|_s.$$

В следующей лемме сформулированы хорошо известные свойства пространств Соболева [59], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть $s \geqslant 1$ и $k \geqslant 0$. Тогда а) $f \in H^s \Rightarrow f,\ f',\ \ldots,\ f^{(s-1)}$ являются ограниченными равномерно-непрерывными функциями, стремящимися к нулю при $x \to \pm\infty$; б) $f,\ g \in H^s \Rightarrow fg \in H^s$; в) $u \in H^{s,k} \Rightarrow \partial_x^j \partial_t^l u$ являются ограниченными непрерывными функциями на $R \times [0,\ T]$ (равномерно-непрерывными при $T < \infty$), стремящимися к нулю при $x \to \pm\infty$ (равномерно при $T < \infty$), $0 \leqslant j \leqslant s - 1$; $0 \leqslant l \leqslant k$; г) $u,\ v \in \widetilde{H}^{s,k}_T \Rightarrow uv \in \widetilde{H}^{s,k}_T$.

Запишем (2) в виде $(1 - \partial_x^2)\,u_t = -\partial_x\,(u + (1/2)\,u^2)$. Отсюда формально получается интегральное уравнение

$$u(x,\ t) = g(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi)\left\{u(\xi,\ \tau) + \frac{1}{2} u^2(\xi,\ \tau)\right\} d\xi\,d\tau, \qquad (26)$$

где $K(x) = \frac{1}{2}\,(\operatorname{sgn} x)\,e^{-|x|}$; $g(x) = u(x,\ 0)$. Применяя к (26) принцип сжимающих отображений, можно показать, что существует некоторое $T > 0$, для которого задача Коши $u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$; $u(x,\ 0) = g(x) \in H^s$, $s \geqslant 2$; $x \in R$; $0 \leqslant t \leqslant T$ имеет единственное решение $u(x,\ t) \in \widetilde{H}^1_T$. Из закона сохранения $\int (u^2 + u_x^2)\,dx = \int (g^2 + g'^2)\,dx$ вытекает, что $T = \infty$. Кроме того, применяя индукцию и лемму 1, получаем, что для каждого $0 < T < \infty$ $u \in \widetilde{H}^s_T$. Дифференцируя (26) по времени, имеем

$$u_t = \int K(x - y)\,(u + (1/2)\,u^2)\,dy.$$

Используя преобразование Фурье, можно показать, что свертка с K отображает непрерывно H^s на H^{s+1} и тем самым $\widetilde{H}^s_T$ на $\widetilde{H}^{s+1}_T$.

Индуктивно, если допустим, что $\partial_t^j u \in \widetilde{H}_T^{s+1}$; $1 \leqslant j \leqslant k$, то в силу леммы 1 $\partial_t^k = (u + (1/2)\, u^2) \in \widetilde{H}_T^s$ и, следовательно, из представления $\partial_t^{k+1} = \int K\,(x-y)\, \partial_T^k\, (u + (1/2)\, u^2)\, dy$ вытекает, что $\partial_t^{k+1}\, u \in \widetilde{H}_T^{s+1}$. Таким образом, получается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $g\,(x) \in H^s$, $s \geqslant 2$. Тогда задача Коши

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0; \quad u\,(x,\,0) = g\,(x),\; x \in R; \quad t \geqslant 0 \tag{27}$$

имеет единственное решение $u\,(x,\,t)$, которое принадлежит $\widetilde{H}_T^s$ для любого конечного $T > 0$. Кроме того, $\partial_t^j u \in \widetilde{H}^{s+1}$, $j \geqslant 1$.

Для того чтобы доказать аналогичную теорему существования для уравнения КдФ в [20], рассматривается следующая регуляризованная задача:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - \varepsilon u_{xxt} = 0; \quad u\,(x,0) = g\,(x),\; x \in R; \quad t \geqslant 0;$$
$$0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{28}$$

Если сделать замену переменных

$$v\,(x,\,t) = \varepsilon u\,(\varepsilon^{1/2}\,(x-t),\; \varepsilon^{3/2} t), \tag{29}$$

то (28) трансформируется в задачу (27) и, следовательно, из теоремы 3 вытекает теорема существования для задачи (28).

Следствие 1. Пусть $g \in H^s$, $s \geqslant 2$. Тогда существует единственное решение $u\,(x,\,t)$ задачи (28), которое принадлежит $\widetilde{H}_T^s$ для любого конечного $T > 0$. Кроме того, $\partial_t^l u \in \widetilde{H}_T^{s-l}$, $0 \leqslant l \leqslant s$.

Следствие 2. Пусть $g \in C^\infty$ и вместе со всеми производными принадлежит L_2 (множество таких функций мы будем обозначать через H^∞). Тогда задача (28) имеет единственное решение $u \in C^\infty$, которое вместе со всеми временны́ми и пространственными производными принадлежит $\widetilde{H}_T$ для любого конечного T.

Далее, чтобы в (28) сделать предельный переход при $\varepsilon \to 0$, необходимо получить априорные оценки по ε.

Используя законы сохранения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [u^2\,(x,\,t) + \varepsilon u_x^2\,(x,\,t)]\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [g\,(x)^2 + \varepsilon g'\,(x)^2]\, dx\,;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[u_x^2 - \frac{1}{3}\, u^3\right] dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[g'\,(x)^2 - \frac{1}{3}\, g\,(x)^3\right] dx,$$

нетрудно вывести оценку.

Лемма 2. Пусть $g \in H^\infty$. Тогда для всех $t > 0$ независимо от $0 < \varepsilon \leqslant 1$ имеет место оценка

$$\|\, u \,\|_1 \leqslant \alpha\,(\|\, g \,\|_1), \tag{30}$$

где α: $R^+ \to R^+$ является непрерывной, монотонно возрастающей функцией и $\alpha(0) = 0$.

Из (30) вытекает, что

$$\sup_{x\in R,\ t\geqslant 0} |u(x, t)| \leqslant \|u\|_1 \leqslant \alpha(\|g\|_1). \tag{31}$$

Лемма 3. Пусть $g \in H^\infty$; $0 < T < \infty$. Тогда существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(T, \|g\|_3)$ такое, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$; $t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\|u\|_2 \leqslant \alpha_1(\|g\|_3), \tag{32}$$

где α_1: $R^+ \to R^+$ является непрерывной, монотонно возрастающей функцией и $\alpha_1(0) = 0$.

Доказательство. Приведем основные моменты получения оценки (32). Из (28) после несложных вычислений выводится равенство

$$V(t) = V(0) - \varepsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [3u_t u_{xx}^2 + 3u^2 u_x u_{xt} + 6u_x u_{xx} u_{xt}]\, dx\, d\tau, \tag{33}$$

где

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{9}{5} - 3\varepsilon u\right) u_{xx}^2 - 3uu_x^2 + \frac{1}{4} u^4 + \frac{9}{5} \varepsilon u_{xxx}^2\right] dx.$$

В силу (31) существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполняется $1 \leqslant 9/5 - 3\varepsilon u \leqslant 13/5$. Тогда из (33) вытекает неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}^2\, dx \leqslant V(0) + 3 \int_{-\infty}^{\infty} |u|\,|u_x|^2\, dx + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |3u_t u_{xx}^2 + 3u^2 u_x u_{xt} + 6u_x u_{xx} u_{xt}|\, dx\, d\tau.$$

Отсюда после длинных, но несложных вычислений можно получить систему интегральных неравенств

$$\left.\begin{aligned} D^2 &= (a/(1-\varepsilon^{1/2}))^4 + (\varepsilon^{1/2} 4c/b) \int_0^t D^2 B\, d\tau; \\ B^2 &\leqslant (b/(1-\varepsilon^{1/2}))^2 + (2c/a) \int_0^t D^{1/2} B^2\, d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где $D(t)^2 = C + \|u\|_2^2$ [C обозначает константу, зависящую монотонно только от $\|g\|_3$ и $C(0) = 0$];

$$B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + \varepsilon u_{xt}^2)\, dx.$$

Константы a, b, c не зависят от $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 < 1$. Очевидно, не уменьшая общности, можно считать, что a, b и c монотонно возрастают в зависимости от $\| g \|_3$; $a(0) = b(0) = 0$; $D(0) = (\| g \|_2^2 + C)^{1/2} < a^2$ и $B(0) < b$. В силу последних двух неравенств нетрудно вывести, что для любого $0 \leqslant t < \infty$

$$D(t) < \overline{D}(t) = (a/(1 - \varepsilon^{1/2} \exp[ct]))^2; \quad B < \overline{B} = b \exp[ct]/(1 - \varepsilon^{1/2} \exp[ct]), \tag{35}$$

где $\overline{D}(t)$ и $\overline{B}(t)$ являются решениями (34) в случае, когда в системе (34) имеет место знак равенства.

Выбираем $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $1 - \varepsilon^{1/2} \exp[cT] \geqslant 1/2$; $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, и пусть $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_0 = \varepsilon_0(T, \| g \|_3)$ (константа c зависит только от $\| g \|_3$). Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ из (35) видно, что D и B ограничены на $[0, T]$ гранью, зависящей только от T и $\| g \|_3$. Отсюда, используя равенство $a(0) = 0$, получаем оценку (32). Лемма доказана.

Умножая регуляризованное уравнение на $u_{(2m)} = \partial_x^{2m} u$ и интегрируя по R, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{(m)}^2 + \varepsilon u_{(m+1)}^2]\, dx = - \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(m+1)} u_{(m)}\, dx. \tag{36}$$

Индуктивно, используя правило Лейбница, из (36) можно вывести следующую лемму.

Лемма 4. Пусть $g \in H^\infty$; $0 < T < \infty$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ в соответствии с леммой 3. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ решение $u(x, t)$ ограничено в $\widetilde{H}_T^m$, $m \geqslant 3$ гранью, зависящей только от T, ε_0, $\| g \|_m$ и $\varepsilon^{1/2} \| g \|_{m+1}$.

Следствие. Решение $u(x, t)$ ограничено в $\widetilde{H}_T^{k, l}$ независимо от $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ для всех k, l и T.

Идея дальнейших рассуждений состоит в следующем. Пусть $g(x) \in H^s$; $s \geqslant 3$. С помощью свертки с соответственно подобранной гладкой функцией регуляризуем g. Получаем гладкую функцию g_ε. Далее решаем задачу (28) с $u_\varepsilon(x, 0) = g_\varepsilon(x)$ и, используя полученные априорные оценки, показываем, что при $\varepsilon \to 0$ решения $u_\varepsilon(x, t)$ строго сходятся в соответствующих функциональных пространствах к решению $u(x, t)$ уравнения КдФ, $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$; $u(x, 0) = g(x)$.

Определим регуляризацию g_ε на g (в дальнейшем $\hat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f): $\hat{g}_\varepsilon(k) = \varphi(\varepsilon^{1/6} k)\, \hat{g}(k)$, где φ — четная C^∞-функция; $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$; $\varphi(0) = 1$, причем функция $\psi(k) = 1 - \varphi(k)$ имеет в нуле нуль бесконечного порядка и, кроме того, φ стремится экспоненциально к нулю при $k \to \pm\infty$. Например, мы можем положить $\varphi(k) = \exp[-r(k)]$; $r(k) = k^2 \exp[-1/k^2]$.

Из свойства функции φ следует, что $g_\varepsilon(x) \in H^\infty$. Тогда в силу утверждения следствия 1 из теоремы 3 задача

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - \varepsilon u_{xxt} = 0;\ u(x, 0) = g_\varepsilon,\ x \in R;\ t \geqslant 0;\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1 \tag{37}$$

имеет единственное решение $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t, \varepsilon)$, которое вместе со всеми своими производными принадлежит $\widetilde{H}_T$ для всех $T > 0$.

Используя равенство Парсеваля, нетрудно вывести следующую лемму.

Лемма 5. Пусть $g(x) \in H^s$, $s \geqslant 3$. Тогда имеют место следующие оценки:

а) $\varepsilon^{(1/6)j} \| g_\varepsilon \|_{s+j} \leqslant C \| g \|_s \Rightarrow \| g_\varepsilon \|_{s+j} = O(\varepsilon^{-(1/6)j})$, $j = 1, 2\ldots$;
б) $\| g - g_\varepsilon \|_{s-j} = o(\varepsilon^{(1/6)j})$, $j = 1, 2, \ldots, s$;
в) $\| g - g_\varepsilon \|_s = o(1)$.

Оценки б) и в) выполняются равномерно на сходящейся последовательности в H^s. Оценка а) выполняется равномерно на ограниченном подмножестве H^s. Оценка б) тоже будет выполняться равномерно на ограниченном подмножестве H^s, если заменить в б) o на O. Из лемм 4 и 5 вытекает:

Следствие 1. Пусть $g(x) \in H^s$, $s \geqslant 3$. Тогда u_ε ограничено в $\widetilde{H}^s_T$, $0 < T < \infty$, независимо для достаточно малых ε. Кроме того, $\varepsilon^{m/6} u_\varepsilon$ ограничено в $\widetilde{H}^{s+m}_T$, $m \geqslant 1$, независимо для достаточно малых ε.

Следствие 2. $\partial_t u_\varepsilon$ ограничено в $\widetilde{H}^{s-3}_T$ и $\varepsilon^{\frac{1}{6}m}\ \partial_x^{s+m-3}\, \partial_t u_\varepsilon$ ограничены в $\widetilde{H}_T$, $0 < T < \infty$, $m = 1, 2, \ldots, 5$, независимо для достаточно малых ε.

Теперь мы докажем основную лемму.

Лемма 6. Пусть $g(x) \in H^s$, $s \geqslant 3$. Тогда $\{u_\varepsilon\}$ является обобщенной последовательностью (о. п.) Коши в $\widetilde{H}^s_T$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Положим $u = u_\varepsilon$ и $v = u_\delta$, где $\delta \leqslant \varepsilon$. Достаточно показать, что, выбирая достаточно малое ε, можно сделать $\| u - v \|_s$ сколь угодно малым равномерно по $t \in [0, T]$. Очевидно, $w = u - v$ удовлетворяет уравнению

$$\left.\begin{aligned} w_t + \left(uw + \frac{1}{2} w^2\right)_x + w_{xxx} - \delta w_{xxt} = (\varepsilon - \delta)\, u_{xxt}, \\ w(x, 0) = g_\varepsilon(x) - g_\delta(x) = h(x). \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Умножая уравнение (38) на $w_{(2j)} = \partial_x^{2j} w$, $j \leqslant s$, интегрируя по R, а потом по $[0, t]$ и используя интегрирование по частям, получаем

$$V_j(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [w_{(j)}^2 + \delta w_{(j+1)}^2]\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [h_{(j)}^2 + \delta h_{(j+1)}^2]\, dx -$$
$$-2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(uw + \frac{1}{2} w^2\right)_{(j+1)} - (\varepsilon - \delta)\, u_{t,\,(j+2)}\right] w_{(j)}\, dx\, d\tau. \tag{39}$$

Рассмотрим случай $s=3$. При $s>3$ доказательство можно сделать индуктивно.

Пусть $j=0$. Тогда (39) запишется в форме

$$V_0(t)^2 = V_0(0)^2 + 2\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(w_x + \frac{1}{2}u_x\right) w^2\right] dx\, d\tau + $$
$$+ 2(\varepsilon - \delta) \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u_{xxt} w\, dx\, d\tau. \tag{40}$$

Для достаточно малых ε в силу следствий 1 и 2 (леммы 5) $\left| w_x + \frac{1}{2}u_x \right|$ и $\varepsilon^{1/3} \| u_{xxt} \|$ ограничены на $[0, T]$ гранью, зависящей только от T и $\| g \|_3$. Следовательно, из (40) вытекает неравенство

$$v_0(t) \frac{dv_0(t)}{dt} \leqslant Cv_0(t)\,(V_0(t) + \varepsilon^{2/3}).$$

Интегрируя это неравенство, получаем $\| w \| \leqslant V_0(t) \leqslant V_0(0) \times \exp[CT] + \varepsilon^{2/3}(\exp[CT] - 1)$, $t \in [0, T]$, и так как $V_0(0) \leqslant \| g_\delta - g \|_1 + \| g_\varepsilon - g \|_1 \leqslant C\varepsilon^{1/3}$ [лемма 5б)], то получаем

$$\| w \| \leqslant C\varepsilon^{1/3}. \tag{41}$$

Из оценки (41) вытекает, что $\{u_\varepsilon\}$ является о. п. Коши в $\widetilde{H}_T$. Проводя аналогичные вычисления для $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$, получаем оценки

$$\| w \|_1 \leqslant C\varepsilon^{1/3}; \quad \| w \|_{xx} \leqslant C\varepsilon^{1/6};$$
$$\| w_{xxx} \| \leqslant V_3(0) \exp[CT] + \varepsilon^{1/6}(\exp[CT] - 1). \tag{42}$$

С другой стороны, опять применяя лемму 5 и неравенство треугольника, имеем

$$V_3(0) \leqslant \| h \|_3 + \delta^{1/2} \| h \|_4 \leqslant \| g - g_\varepsilon \|_3 +$$
$$+ \| g - g_\delta \| + \delta^{1/2} \| g_\delta \|_4 + \varepsilon^{1/2} \| g_\varepsilon \|_4 \leqslant \| g - g_\varepsilon \|_3 + \| g - g_\delta \|_3 + C\varepsilon^{1/3}.$$

Отсюда видно, что $V_3(0) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а следовательно, и $\| w_{xxx} \| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Это вместе с (42) показывает, что $\{u_\varepsilon\}$ является о. п. Коши $\widetilde{H}_T^s$ в случае $s=3$.

Следствие. $\{u_t(x, t, \varepsilon)\}$ является о. п. Коши в $\widetilde{H}^{s-3}_T$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 4. Пусть $g \in H^s$, где $s \geqslant 3$. Тогда задача Коши (1) имеет единственное решение, которое принадлежит $\widetilde{H}_T^s$ для любого конечного $T > 0$.

Доказательство. Единственность доказывается стандартным образом.

Существование решения нетрудно доказать в свете предыдущих рассмотрений. Пусть g_ε обозначает регуляризацию функции g, а $u_\varepsilon(x, t)$ — соответствующее решение регуляризованной задачи

(37). В силу утверждения леммы 6 и ее следствия при $\varepsilon \to 0$; $u_\varepsilon \to u$ в $\widetilde{H}^s_T$ и $\partial_t u_\varepsilon \to v$ в $\widetilde{H}^{s-3}_T$. Отсюда вытекает, что $\partial_x (u_\varepsilon^2) \to \partial_x (u^2)$ в $\widetilde{H}^{s-1}_T$ и $\partial_x^3 u_\varepsilon \to \partial_x^3 u$ в $\widetilde{H}^{s-3}_T$. Из следствия 2 леммы 5 вытекает, что $\varepsilon\partial_x^2\, \partial_t u_\varepsilon \to 0$ в $\widetilde{H}_T \Rightarrow \varepsilon\partial_x^2\, \partial_t u_\varepsilon \to 0$ в смысле распределений. Так как $u_\varepsilon \to u$ в $\widetilde{H}^s_T$, то $u_\varepsilon \to 0$ в смысле распределений и, следовательно, $\partial_t u_\varepsilon \to \partial_t u$ в смысле распределений и $v = u_t$. Таким образом, делая предельный переход в (37), получаем, что в смысле распределений $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$; $u(x, 0) = g(x)$. Отсюда, так как $u \in \widetilde{H}^s_T$ и $u_t \in \widetilde{H}^{s-3}_T$, ясно, что $u(x, t)$ является L_2 — решением задачи (1), если $s = 3$, и классическим решением в случае $s > 3$ [термин L_2-решение означает, что все члены в уравнении являются L_2-функциями от x и уравнение (1) удовлетворяется для каждого t почти всюду по x].

Пусть $u_N(x, t)$ обозначает решение (1) на $R \times [0, N]$, где $N = 1, 2 \ldots$ Определим на $R \times [0, \infty)$ функцию $u(x, t) = u_N(x, t)$ при $t \leqslant N$. В силу единственности функция $u(x, t)$ корректно определена и представляет глобальное решение (1), которое принадлежит $\widetilde{H}^s_T$ для любого конечного T. Теорема доказана.

Известно [60], что для уравнения КдФ существует бесконечная последовательность полиномиальных законов сохранения, которую можно записать в форме

$$I_k(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [u_k^2 - c_k u u_{(k-1)}^2 + Q_k(u, \ldots, u_{(k-2)})]\, dx,$$

где $k = 0, 1 \ldots$; Q_k имеет ранг $k + 2$. Согласно определению Миуры и др. [61] полиномиальный ранг для уравнения КдФ определяется следующим образом: ранг слагаемого

$$u_{(0)}^{a_0} u_{(1)}^{a_1} \ldots u_{(p)}^{a_p} = \sum_{i=0}^{p} \left(1 + \frac{1}{2} i\right) a_i$$

и ранг полинома является максимумом рангов своих слагаемых.

Теорема 5. Пусть $g \in H^s$, $s \geqslant 3$, и пусть $u(x, t)$ является соответствующим решением (1) на $R \times [0, \infty)$. Тогда $I_k(u)$, $k = 1, 2, \ldots, s$, существуют и не зависят от времени.

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ является решением регуляризованной задачи (37). Для краткости вместо u_ε будем писать u. $dI_k/dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{grad}\ I_k)\, u_t\, dx$. Сюда подставим $u_t = -uu_x - u_{xxx} + \varepsilon u_{xxt}$.

$$\frac{dI_k}{dt} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{grad}\, I_k)(-uu_x - u_{xxx})\, dx + \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{grad}\, I_k)\, u_{xxt}\, dx. \qquad (43)$$

В силу определения I_k и так как $u \in H^\infty$, для каждого фиксированного t $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{grad} I_k)(-uu_x - u_{xxx}) = 0$. Тогда из (43) вытекает, что

$$\frac{dI_k}{dt} = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial Q_k}{\partial u_{(j)}} u_{t,(j+2)} + 2u_{(k)} u_{t,(k+2)} - c_k u_{xxt} u_{(k-1)}^2 - \\ - 2c_k u u_{t,(k+1)} u_{(k-1)} \Big\} dx. \tag{44}$$

Интегрируя (44) по частям, а потом по $[0, t]$, нетрудно получить равенство

$$J_k(u) = J_k(g_\varepsilon) + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial Q_k}{\partial u_{(j)}} u_{t,(j+2)} + \\ + c_k \left[2u_x u_{(k-1)} u_{t,k} - u_{xxt} u_{(k-1)}^2 + u_t u_{(k)}^2\right] \Big\} dx\, d\tau. \tag{45}$$

В силу леммы 5 $J_k(g_\varepsilon) \to I_k(g)$ при $\varepsilon \to 0$, $k = 1, \ldots, s$. Кроме того, из следствия 1 леммы 5 вытекает, что $J_k(u_\varepsilon) \to I_k(u)$ при $\varepsilon \to 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$, где u — решение (1), существующее в силу теоремы 3. Используя следствия 1 и 2 леммы 5, получаем, что интеграл в правой части формулы (45) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, переходя к пределу в (45) при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $I_k(u) = I_k(g)$, $k = 1, 2, \ldots, s$, для каждого t.

Используя теорему 5, индуктивно можно доказать следующее утверждение.

Следствие. Пусть $g \in H^s$; $s \geqslant 3$, и пусть $u(x, t)$ является соответствующим решением (1). Тогда $\| u \|_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, равномерно ограничены по $t \in [0, \infty)$. Другими словами, для $g \in H^s$, $s \geqslant 3$, существует единственное глобальное решение $u(x, t)$ задачи Коши (1), которое принадлежит пространству $\widetilde{H}^s_\infty$. Кроме того, если $s - 3l \geqslant 0$, то $\partial_t^l u$ принадлежит $\widetilde{H}^{s-3l}$.

Пусть $g(x) \in H^s$, $s \geqslant 3$. Тогда в силу следствия теоремы 5 $U(g) = u(x, t)$ отображает H^s в пространство

$$Y_{s,\infty} = \{u \in \widetilde{H}^s_\infty : \partial_t^l u \in \widetilde{H}^{s-3l}_\infty,\ s - 3l \geqslant 0\}.$$

Простой пример показывает, что U не является непрерывным. Действительно, уравнение (1) имеет решение вида уединенной волны $u_c(x, t) = \Phi_c(x - ct) = 3c \operatorname{sch}^2 \left(\frac{1}{2} c^{1/2}(x - ct)\right)$. Простые оценки показывают, что $\Phi_c \to \Phi_d$ в H^s при $c \to d$ в R. А с другой стороны, нетрудно найти

$$\lim_{t \to \infty} \| u_c - u_d \|^2 = \| \Phi_c \|^2 + \| \Phi_d \|^2.$$

Следовательно, u_c не стремится к u_d в L_2 (а значит, и в H^s) равномерно по $t \in [0, \infty)$.

Однако если рассматривать конечный интервал времени, имеет место теорема 6.

Теорема 6. Пусть $0 < T < \infty$, и пусть $u(x, t) = U_g : H^s \to Y_{s,T}$, $g \in H^s$; $s \geqslant 3$; u — сужение на $[0, T]$ единственного глобального решения u уравнения (1). Тогда U является непрерывным.

Доказательство. Отметим, что для этого достаточно доказать, что U: $H^s \to \widetilde{H}^s_T$ является непрерывным. Из метода индукции и уравнения (1) будет следовать, что U: $H^s \to Y_{s,T}$ тоже является непрерывным.

Пусть $g_n \to g$ в H^s, $s \geqslant 3$. Необходимо показать, что $u^n = U(g_n) \to u = U(g)$ в $\widetilde{H}^s_T$ или, другими словами, $\| u^n - u \|_s \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Имеем

$$\| u^n - u \|_s \leqslant \| u^n - u^n_\varepsilon \|_s + \| u''_\varepsilon - u_\varepsilon \| + \| u_\varepsilon - u \|_s. \tag{46}$$

Здесь u_ε и u^n_ε — решения регуляризованной задачи (37) с гладкими g_ε и $g_{n\varepsilon}$. Припоминая доказательство леммы 6, имеем оценку при $\delta \leqslant \varepsilon$:

$$\| u_\delta - u_\varepsilon \|_s \leqslant C\varepsilon^{1/6} + C(\| g - g_\varepsilon \|_s + \| g - g_\delta \|_s).$$

Устремляя $\delta \to 0$ в этом неравенстве, получаем, что для $t \in [0, T]$

$$\| u - u_\varepsilon \|_s \leqslant C(\varepsilon^{1/6} + \| g - g_\varepsilon \|_s); \ \| u^n - u^n_\varepsilon \|_s \leqslant C(\varepsilon^{1/6} + \| g_n - g_{n\varepsilon} \|_s). \tag{47}$$

В доказательстве леммы 6 константы C зависели только от T и $\| g \|_s$, а так как $\| g_n \|_s \leqslant M$ ($g_n \to g$ в H^s), в (47) можно считать константу C не зависящей от n. В силу леммы 5 $\| g - g_\varepsilon \|_s$ и $\| g_n - g_{n\varepsilon} \|_s$, $n = 1, 2 \ldots$, стремятся равномерно к нулю при $\varepsilon \to 0$. Тогда оценки (47) показывают, что $\| u^n - u^n_\varepsilon \|_s \to 0$; $\| u - u_\varepsilon \|_s \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$ и по $n = 1, 2 \ldots$, и, следовательно, из (46) видно, что, для того чтобы получить утверждение теоремы, достаточно доказать, что $\| u^n_\varepsilon - u_\varepsilon \|_s \to 0$ при $n \to \infty$ для фиксированного ε равномерно по $t \in [0, T]$.

Доказательство этого факта подобно доказательству леммы 6. Применяя трансформацию (29), сведем регуляризованную задачу (37) к задаче

$$v_t + v_x + vv_x - v_{xxt} = 0; \ v(x, 0) = h(x) = \varepsilon g_\varepsilon(x). \tag{48}$$

Пусть v^n и v являются решениями (48) соответственно для $h_n(x) = \varepsilon g_{n\varepsilon}(x)$ и $h(x) = \varepsilon g_\varepsilon(x)$. Тогда если мы докажем, что $v^n \to v$ в $\widetilde{H}^s_R$ для произвольного конечного R, то, обращая (29) (ε — фиксированное), получаем, что $u^n_\varepsilon \to u_\varepsilon$ в $\widetilde{H}^s_T$.

В силу леммы 5 $g_{n\varepsilon} \to g_\varepsilon$ в H^k для всех $k \geqslant 0$ (при $k > s$ сходимость зависит от ε). По доказанному v^n, $v \in \widetilde{H}_R^{\infty,\infty}$ для всех $0 < R < \infty$.

Пусть $w^n = v^n - v$. Тогда w^n удовлетворяет уравнению

$$\left.\begin{aligned} &w_t^n + w_x^n + w^n w_x^n + (vw^n)_x - w_{xxt}^n = 0;\\ &w^n(x, 0) = h_n - h(x) = f_n(x), \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где $f_n \to 0$ в H^r для всех $r \geqslant 0$. Умножая (49) на $w_{(2j)}^n$, интегрируя по R и по $[0, t]$, после соответствующего интегрирования по частям получаем

$$W_j(t) = W_j(0) + (-1)^{j+1}\, 2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [w^n w_x^n + (vw^n)_x]\, dx\, d\tau, \tag{50}$$

где $W_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [(w_{(j)}^n)^2 + (w_{(j+1)}^n)^2]\, dx.$

Далее, используя (50) и применяя рассуждения, подобные доказательству леммы 6, можно получить, что $\| v^n - v \|_k = \| w^n \|_k \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на ограниченном временно́м интервале для всех $k \geqslant 0$. Теорема доказана.

Отметим, что попутно мы доказали следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $g(x) \in H^s$, $s \geqslant 2$. Решение задачи Коши (27) $u(x, t)$ (соответственно $\partial_t^l u$, $l > 0$) зависит непрерывно в $\widetilde{H}_T^s$ (соответственно $\widetilde{H}_T^{s+1}$), $T < \infty$, от начальных данных g в H^s. Если рассматривать обобщенные решения задачи Коши (1) и (27), то теоремы 3, 4, 6, 7 могут быть усилены (см. [20]) следующим образом.

Предложение 3. а) Пусть $g \in H^s$, где $s \geqslant 1$. Тогда существует решение (в смысле распределений) $u(x, t)$ задачи Коши (1), которое принадлежит $L_\infty([0, \infty); H^s)$. Если $s \geqslant 2$, u является единственным, $u \in \widetilde{H}_\infty^s$ и $\partial_t^l u \in \widetilde{H}_\infty^{s-3l}$ при $s - 3l \geqslant 0$.

б) Пусть g_1 и $g_2 \in H^s$, $s \geqslant 2$, и пусть u_1 и u_2 — соответствующие решения 1). Тогда существуют константы M_k, $k = 0, 1, \ldots, s$, такие, что

$$\| u_1 - u_2 \|_k \leqslant M_k \| g_1 - g_2 \|_k \tag{51}$$

для всех $t \in [0, T]$. M_k зависят от T, $\| g_1 \|_k$ и $\| g_2 \|_k$ при $k \geqslant 2$ и от T, $\| g_1 \|_2$ и $\| g_2 \|_2$ при $k = 0,1$.

в) Если $s \geqslant 2$ и $u(x, t)$ — решение (1), то $V(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, t)\, dx$ и $M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 - (1/3)\, u^3)\, dx$ не зависят от $t \geqslant 0$.

Предложение 4. а) Пусть $g \in H^s$, где $s \geqslant 1$. Тогда существует единственное решение (в смысле распределений) $u(x, t)$ задачи Коши (27), которое принадлежит $\tilde{H}^1_\infty$ и $\tilde{H}^s_T$ для каждого $0 < T < \infty$.

б) Пусть g_1 и $g_2 \in H^s$, $s \geqslant 1$, и пусть u_1 и u_2 — соответствующие решения (27). Тогда существуют константы N_k, $k = 0, 1, \ldots, s$, такие, что

$$\| u_1 - u_2 \|_k \leqslant N_k \| g_1 - g_2 \|_k \tag{52}$$

для всех $t \in [0, T]$. N_k зависят от T, $[g_1]_k$ и $\| g_2 \|_k$ при $k \geqslant 1$, а N_0 зависит от T, $\| g_1 \|_1$ и $\| g_2 \|_1$.

в) Если $s \geqslant 1$ и $u(x, t)$ — решение (27), то $E(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (u^2 + u_x^2)\, dx$ и $M(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 - (1/3)\, u^3)\, dx$ не зависят от $t \geqslant 0$.

II. Устойчивость формы решения вида уединенной волны. В этом пункте мы будем доказывать устойчивость решений

$$\Phi(z) = 3c\, \mathrm{sch}^2 [c^{1/2} z],\quad \Psi(z) = 3c\, \mathrm{sch}^2 [c^{1/2} z/2\, (1 + c)^{1/2}],$$

где $c > 0$; $z = x - (1 + c)\, t$, уравнений (5) (КдФ) и (2) (ББМ) относительно псевдометрики (6) $d(f, g)$.

Теорема 8. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\bar{\delta} > 0$ такое, что если $u(x, t)$ — решение (5) при $u(x, 0) = g(x) \in H^2$ и $\| \Phi(x) - g(x) \|_1 \leqslant \bar{\delta}$, то $d(u, \Phi) \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.

Теорема 9. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\bar{\delta} > 0$ такое, что если $u(x, t)$ — решение (58) при $u(x, 0) = g(x) \in H^1$ и $\| \Psi(x) - g(x) \|_1 \leqslant \bar{\delta}$, то $d(u, \Psi) \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.

Доказательство теоремы 8. Сначала будем доказывать теорему при дополнительном предположении, что $g \in H^\infty = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H^k$ и $V(g) = V(\Phi)$.

Зададим $T_0 > 0$. В силу предложения 3б) существует $\delta_0 = \delta_0(T_0, \| \Phi \|_2, \| g \|_2)$ такое, что если $\| g - \Phi \|_1 \leqslant \delta$, имеет место

$$\| \Phi(x - (1 + c)\, t) - u(x, t) \| < 2V(\Phi),\ t \in [0, T_0]. \tag{53}$$

Лемма 7. Пусть $v(x, t) = \Phi(x - (1 + c)\, t + b)$ и u — решение (5). Допустим, что для некоторого $t_0 \geqslant 0$ $\| u(\cdot, t_0) - v(\cdot, t_0) \| < 2V(\Phi)$. Тогда

$$\inf_{y \in R} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{u(x, t_0) - \Phi(x + y)\}^2\, dx \tag{54}$$

достигается в конечной точке.

Действительно, функция $\rho(y) = \int [u(x, t_0) - \Phi(x + y)]^2 dx$ непрерывна и $\lim \rho(y) = \int u^2(x, t_0)\, dx + \int \Phi^2 dx = 2V(\Phi)$ при $y \to \pm\infty$; кроме того, $\rho(y_0) < 2V(\Phi)$, где $y_0 = (1 + c)\, t_0 - b$. Отсюда в силу непрерывности $\rho(y)$ вытекает утверждение леммы.

В соответствии с (59) и леммой 7 inf в (61) достигается в конечной точке $a = a(t)$, $t \in [0, T_0]$. Положим $h(x, t) = u(x, t) - \Phi(x + a)$ и оценим снизу $\Delta M = M(u) - M(\Phi)$. Используя условия

$$V(u) - V(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} (2\Phi h + h^2)\, dx = 0, \tag{55}$$

запишем ΔM в виде

$$\Delta M = \int_{-\infty}^{\infty} \left[h_x^2 + (c - \Phi)\, h^2 - \frac{1}{3} h^3\right] dx.$$

Зафиксируем $t \in [0, T_0]$, и пусть $h(x, t) = f(x) + g(x)$, где $f(x) = f(-x)$; $g(x) = -g(-x)$. Тогда

$$\Delta M = 2\int_0^{\infty} [f_x^2 + (c - \Phi) f^2]\, dx + 2\int_0^{\infty} [g_x^2 + (c - \Phi) g^2]\, dx - \\ - \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} h^3\, dx = I_1 + I_2 + I_3. \tag{56}$$

Имеем оценку

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [f_x^2 + (c - \Phi) f^2]\, dx \geqslant c_1 \int_{-\infty}^{\infty} (f_x^2 + cf^2)\, dx - c_2 \| h \|^3, \tag{57}$$

где положительные константы c_1 и c_2 зависят только от c. Оценку (57) можно вывести, применяя спектральную теорию к задаче на собственные значения: $\rho'' + [20\operatorname{sch}^2(x) + \lambda]\, \rho = 0$; $\rho'(0) = 0$; ρ ограничена на $[0, \infty)$, при этом используется условие (55). Далее условие стационарности

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - \Phi(x + a)]^2\, dx = \inf_{y \in R} \int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - \Phi(x + y)]^2\, dx \tag{58}$$

используется при оценке I_2. Дифференцируя по a (58), получаем условие $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \Phi'(x + a)\, dx = 0$. Используя это условие и опять применяя спектральную теорию к задаче на собственные значения

$$\Theta'' + (\Phi(x) + \lambda c)\Theta = 0,\ \Theta(0) = 0,\ \Theta \text{ ограничена на } [0, \infty),$$

выводим оценку

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [g_x^2 + (c - \Phi) g^2]\, dx \geqslant \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (g_x^2 + cg^2)\, dx \geqslant c_3 \| g \|_1^2;$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \min(1, c). \tag{59}$$

Обозначим X множество тех $t \geqslant 0$, для которых inf в (58) достигается в конечной точке. Очевидно, что X содержит интервал $[0, T_0]$.

Объединяя (57), (59) и $(-I_3) = \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \leqslant \frac{1}{3} \| h \|_1 \| h \|^2$, получаем оценку снизу для ΔM

$$\Delta M \geqslant c_4 \| h \|_1^2 - c_5 \| h \|_1 \| h \|^2, \tag{60}$$

где $t \in X$ и положительные константы c_4 и c_5 зависят только от c. Обозначим $A = A(t) = \| h \|$ и $B = B(t) = \| h_x \|$. Тогда из (60) вытекает

$$\Delta M \geqslant c_4 (A^2 + B^2) - c_5 (A + B) A^2. \tag{61}$$

Так как $u(\cdot, t)$ непрерывно отображает $[0, \infty)$ в $L_2(R)$, то имеет место лемма 8.

Лемма 8.

$$A(t) = \inf_{y \in R} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - \Phi(x + y)]^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

является непрерывной функцией $t \geqslant 0$.

Положим $\| \Phi - g \|_1 = \delta$. Тогда в силу инвариантности ΔM относительно времени для всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\Delta M \leqslant m\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 = \gamma(\delta) = \gamma, \quad m = \max(1, c). \tag{62}$$

Другими словами, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} [h_x + (c - \Phi) h^2 - \frac{1}{3} h^3]\, dx \leqslant \gamma$ и, следовательно,

$$B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h_x^2\, dx \leqslant \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{3} h^3 + (\Phi - c) h^2\right] dx \leqslant \gamma + \frac{1}{3}(A + B) A^2 + 2cA^2.$$

Решая это квадратичное неравенство относительно B, получаем

$$B\leqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}A^2+\left[\frac{1}{9}A^4+4\left(\gamma+\frac{1}{3}A^3+2cA^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=F(A). \qquad (63)$$

Подставим (63) в (61)

$$\gamma\geqslant\Delta M\geqslant c_4(A^2+B^2)-c_5[A+F(A)]A^2\geqslant$$
$$\geqslant A^2[c_4-c_5F(A)]-c_5A^3=G(A). \qquad (64)$$

Выберем δ_1 так, чтобы $F(0)=(\gamma(\delta))^{1/2}<c_4/c_5$ при $\delta<\delta_1$. Тогда $G'(A)>0$ на некотором интервале $(0, A_0)$ и функция $G(A)$ будет расти от нуля до $G_m=G(A_0)$. Так как G_m растет при $\gamma\to 0$, то существует такое δ_2, что $\gamma(\delta)<G_m$ при $\delta<\delta_2$. Тогда в силу непрерывности функции $A(t)$ из (64) вытекает, что $A(t)\leqslant A_\gamma$, где A_γ — наименьший положительный корень $G(A)=\gamma$. Отметим, что A_γ не зависит от $t\in X$. Отсюда, возвращаясь к (64), получаем

$$c_4B^2\leqslant\gamma+c_5[A+F(A)]A^2\leqslant\gamma+c_5[A_\gamma+F(A_\gamma)]A_\gamma^2;$$
$$\|h\|_1^2=A^2+B^2\leqslant A_\gamma^2+(1/c_4)\{\gamma+c_5[A_\gamma+F(A_\gamma)]A_\gamma^2\}.$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $\varepsilon<V(\Phi)$. Так как $A_\gamma\to 0$ при $\gamma\to 0$, то для $\varepsilon>0$ выберем δ_3 таким образом, чтобы при $\delta<\delta_3$ выполнялось условие

$$A_\gamma^2+\frac{1}{4}\{\gamma+c_5[A_\gamma+F(A_\gamma)]A_\gamma^2\}\leqslant\varepsilon^2.$$

Тогда при $\delta<\bar\delta=\min(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ получим

$$d(u, \Phi)\leqslant\|h\|_1\leqslant\varepsilon,\ t\in X. \qquad (65)$$

Теперь покажем, что $X=[0, \infty)$. Действительно, $X\supset[0, T_0]$, и если допустим противное, что существует максимальное $T_1<\infty$, $X\supset[0, T_1)$, то при $t<T_1$ в силу (65) будем иметь

$$A(t)=\inf_{y\in R}\int_{-\infty}^{\infty}[u(x, t)-\Phi(x+y)]^2\,dx\leqslant d(u, \Phi)\leqslant\varepsilon<V(\Phi).$$

Так как A — непрерывная функция $t\geqslant 0$, то существует $T>0$ такое, что $A(t)<2V(\Phi)$ при $t\in[T_1, T_1+T]$. Таким образом, мы достигли противоречия в силу утверждения леммы 7. Следовательно, $T_1=\infty$ и $X=[0, \infty)$.

Теперь освободимся от ограничения $V(\Phi)=V(u)$. Напомним, что $V(\Phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^2\,dx=24c^{3/2}$. Полагая $\|\Phi-g\|_1=\delta$, определим Φ_δ с соответствующей c_δ так, чтобы $V(\Phi_\delta)=V(u)$, и обозначим

$b(\delta)=c^{1/2}_{\delta}$; $b(0)=c^{1/2}$. Нетрудно подсчитать, что имеют место оценки

$$24\,|\,b(\delta)-b(0)\,|\,(b(\delta)^2+b(\delta)\,b(0)+b(0)^2)\leqslant 4\sqrt{6}\,b(0)^{3/2}\,\delta+\delta^2; \tag{66}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\Phi-\Phi_\delta)^2\,dx=24\,|\,b(\delta)-b(0)\,|\,(b(\delta)\,b(0)+|\,b(0)^2-b(\delta)^2\,|); \tag{67}$$

$$\int(\Phi'-\Phi'_\delta)^2\,dx\leqslant\frac{24}{5}\,|\,b0-b(\delta)\,|\times$$
$$\times\{b(0)\,b(\delta)\,(b(0)^2+b(0)\,b(\delta)+b(\delta)^2)+|\,b(0)^4-b(\delta)^4\,|\}. \tag{68}$$

Далее, так как $d(\Phi,\Phi_\delta)$ не зависит от t, имеем

$$d(\Phi,\Phi_\delta)\leqslant\|\Phi-\Phi_\delta\|_1\,|_{t=0}. \tag{69}$$

Пусть $\varepsilon>0$. Покажем, что существует такое δ_4, что если $\delta<\delta_4$, то $d(u,\Phi_\delta)<\varepsilon/2$. Допустим противное. Это означает, что существуют $\delta_n\to 0$ и $d(u,\Phi_{\delta_n})\geqslant\varepsilon/2$. Но неравенство (66) показывает, что $\lim\limits_n b(\delta_n)=b(0)$. Отсюда, используя изложенные выше рассуждения, получим, что $\gamma_n(\delta_n)<G^{(n)}_m$ при $n>N$ и $\lim\limits_n\{A^2_{\gamma_n}+(1/c^{(n)}_{14})[\gamma_n+c^{(n)}_5[A_{\gamma_n}+F_n(A_{\gamma_n})]\,A^2_{\gamma_n}]\}=0$. А это в силу (65) противоречит нашему допущению.

Используя оценки (66) — (68), выберем δ_5 так, чтобы при $\delta<\delta_5$ $\|\Phi-\Phi_\delta\|_1\,|_{t=0}<\varepsilon/2$. Тогда при $\delta<\bar\delta=\min(\delta_4,\delta_4)$ из (69) и неравенства треугольника получаем $d(u,\Phi)\leqslant d(u,\Phi_\delta)+d(\Phi_\delta,\Phi)<\varepsilon$. Пусть теперь $u(x,0)=g(x)\in H^2$. В соответствии с леммой 5 построим последовательность $\{g_n\}$, $g_n\in H^\infty$, $g_n\to g$ в H^2 при $n\to\infty$; $\|\Phi-g_n\|_1<\bar\delta$ и $\|g_n\|_2\leqslant\|g\|_2$ для всех n. Так как $\|\Phi-g_n\|_1<\bar\delta$, то в силу доказанного для всех $t\geqslant 0$ выполняется

$$d(u_n,\Phi)\leqslant\varepsilon, \tag{70}$$

$d(u_n,\Phi)\to d(u,\Phi)$ для каждого $t\geqslant 0$, так как $u_n(\cdot,t)\to u(\cdot,t)$ в H^2 [предложение 4б)]. Делая предельный переход в (70), получаем окончательно $d(u,\Phi)\leqslant\varepsilon$. Теорема доказана полностью. ∎

Доказательство теоремы 9 можно провести аналогичным образом, оценивая

$$\Delta M=M(u)-M(\Psi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[(1+c)\,h_x^2+(c-\Psi)\,h^2+\frac{1}{3}\,h^3\right]dx$$

при условии

$$E(g)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(g_x^2+g^2)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\Psi_x^2+\Psi^2)\,dx=E(\Psi).$$

Оценка ΔM получается при помощи спектральной теории, и, как раньше, существенную роль играет условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - \Psi(x+a)]^2\, dx = \inf_{y \in R} \int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - \Phi(x+y)]^2\, dx.$$

Аналог леммы 7 получается при помощи предложения 4. Далее рассуждения подобны доказательству теоремы 8, при этом вместо предложения 3 используется предложение 4.

Таким образом, мы показали устойчивость формы уединенной волны для уравнения КдФ относительно H^2-возмущений, которые малы в H^1. Для уравнения ББМ устойчивость формы уединенной волны имеет место относительно H^1-возмущений, которые малы в H^1.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

I. Доказательство предложения 1.

Лемма 9. а) Пусть $d_q^2(u, \varphi) < 2q \| \varphi \|^2$. Тогда inf в (14) достигается в конечной точке (η, ζ);

б) $dq(u, \varphi)$ является непрерывной функцией $t \in [0, \infty)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 7 и 8.

Зафиксируем $t \in [0, \infty)$, и пусть минимум в (14) достигается в точке $(\eta, \zeta) = (\eta(t), \zeta(t))$. Чтобы оценить $\Delta M = M(u) - M(\varphi)$, положим $u(x, t) = e^{i\eta}\varphi(x - \zeta, t) + h(x, t)$ и обозначим

$$F(s) = -\frac{1}{p+1} | e^{i\eta}\varphi + hs |^{2(p+1)}; \quad \xi = \omega(x - \zeta) + (\alpha - \omega^2)t + \eta.$$

Тогда

$$\frac{1}{p+1}(-| u |^{2(p+1)} + | \varphi |^{2(p+1)}) = F(1) - F(0) =$$
$$= F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + F''(s) - F''(0),$$

где

$$0 \leqslant s \leqslant 1; \; F'(0) = -2 | \varphi |^{2p} \operatorname{Re}(e^{i\eta}\varphi\bar{h});$$
$$\frac{1}{2}F''(0) = -| \varphi |^{2p} [p \operatorname{Re}(h^2 e^{-2i\xi}) + (p+1) | h |^2].$$

Подставляя и интегрируя по частям в слагаемых, содержащих h_x и $\bar{h}_x$, получаем

$$\Delta M = 2 \operatorname{Re} \int e^{i\eta}\bar{h} [-\varphi_{xx} + (a + \alpha + \omega^2 - | \varphi |^{2p})\varphi + 2i\omega\varphi_x]\, dx +$$
$$+ \int [| h_x |^2 + (a + \alpha + \omega^2 - (p+1) | \varphi |^{2p}) | h |^2 - 2i\omega\bar{h}_x h -$$
$$- p | \varphi |^{2p} \operatorname{Re}(h^2 e^{-2i\xi})]\, dx + \frac{\int F''(s) - F''(0)}{2} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Дифференцируя 2 раза по x в (8) и используя условие, что r удовлетворяет уравнению

$$r''=(a+\alpha)r-r^{2p+1};\quad (r')^2=(a+\alpha)r^2-\frac{r^{2p+2}}{p+1},\tag{71}$$

получаем, что $I_1=0$.

В I_2 положим $h=(h_1+\mathrm{i}h_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}$. Получим

$$I_2=\int[h_{1x}^2+(a+\alpha-(2p+1)r^{2p})h_1^2]\,dx+$$
$$+\int[h_{2x}^2+(a+\alpha-r^{2p})h_2^2]\,dx=M_1+M_2.$$

Рассмотрим самосопряженные в $L_2(R)$ операторы L_1 и L_2, порожденные дифференциальными выражениями

$$L_1=-\frac{d^2}{dx^2}+a+\alpha-(2p+1)r^{2p};\quad L_2=-\frac{d^2}{dx^2}+a+\alpha-r^{2p}.$$

Непрерывный спектр L_1 и L_2 совпадает с множеством $[a+\alpha,\ \infty)$. Используя (71), нетрудно проверить, что L_1 имеет собственные числа $\lambda_0=-p(p+2)(a+\alpha)$ и $\lambda_1=0$ с собственными функциями $\varphi_0=r^{p+1}$ и $\varphi_1=r'$. L_2 имеет собственное число нуль с собственной функцией r. Если $p\geqslant 1$, то это все собственные числа L_1 и L_2. Если $0<p<1$, кроме того, существует конечное число положительных собственных чисел операторов L_1 и L_2. Самым малым из них является $p(2-p)(a+\alpha)$ [с собственными функциями

$$r^{p+1}-\frac{2(a+\alpha)(p+1)}{p+2}r^{1-p}$$

для L_1 и $r^{-p}r'$ для L_2]. В дальнейшем, применив спектральное разложение операторов L_1 и L_2, мы получим оценку снизу для M_1 и M_2. Оценка M_1 является более сложной из-за существования отрицательного собственного числа λ_0 у оператора L_1.

А. Оценка для M_2. Теперь воспользуемся тем, что inf правой части (14) достигается в точке (η,ζ) и, следовательно, производная по η в этой точке равна нулю. Отсюда мы получим дополнительное условие, связывающее h_2 и собственную функцию r:

$$\int[(r^{2p}+\omega^2-a-\alpha+q)\,rh_2+2\omega r'h_1]\,dx=0.\tag{72}$$

Полагая в (72) $h_2=\beta r+\Theta$, где $\beta=\mathrm{const}$; $\int r\Theta\,dx=0$, получаем

$$\beta\left(\frac{p(a+\alpha)}{p+2}+\omega^2+q\right)\|r\|^2+\int(r^{2p+1}\Theta+2\omega r'h_1)\,dx=0;$$

следовательно,

$$|\beta|\,\|r\|\leqslant\frac{\|r^{2p+1}\|\,\|\Theta\|+2\omega\|r'\|\,\|h_1\|}{[p(a+\alpha)(p+2)^{-1}+\omega^2+q]\,\|r\|}\leqslant K_0(\|\Theta\|+\|h_1\|),\quad (73)$$

где $K_0 = K_0(q)\to 0$ при $q\to\infty$.

Так как Θ ортогональна к собственной функции r, то из спектрального разложения оператора L_2 вытекает, что $M_2(h_2) = M_2(\Theta)\geqslant\lambda\|\Theta\|^2$, где $\lambda=\lambda(p)$ ($\lambda(p)=p(2-p)(a+\lambda)$ при $0<p<1$; $\lambda(p)=a+\alpha$) при $1\leqslant p\leqslant 3/2$. Тогда в силу (73) получаем нужную оценку

$$M_2\geqslant\frac{\lambda}{2(K_0+1)^2}\|h_2\|^2-\lambda\left(\frac{K_0}{K_0+1}\right)^2\|h_1\|^2.\quad (74)$$

Б. Оценка для M_1. Положим

$$h_1=\beta r^{p+1}+\gamma r'+\Theta_1,\quad r=\nu r^{p+1}+\psi,$$

где

$$\int r^{p+1}\Theta_1\,dx=\int r'\Theta_1\,dx=\int r^{p+1}\psi\,dx=0,\quad \beta,\ \gamma,\ \nu=\mathrm{const}.\quad (75)$$

В силу ортогональности Θ_1 к собственным функциям $\varphi_0=r^{p+1}$ и $\varphi_1=r'$ имеем

$$M_1(h_1)=\lambda_0\beta^2\|r^{p+1}\|^2+M_1(\Theta_1)\geqslant\lambda_0\beta^2\|r^{p+1}\|^2+\lambda\|\Theta_1\|^2.\quad (76)$$

Основной трудностью при оценке M_1 является появление отрицательного члена $\lambda_0\beta^2\|r^{p+1}\|^2$.

Воспользуемся условием $P(u)=\int|h=e^{i\eta}\varphi|^2\,dx=\int|\varphi|^2\,dx= P(u)$ или $\beta\|r^{p+1}\|=-(\nu\|r^{p+1}\|)^{-1}\left(\frac{1}{2}\|h\|^2+\int\psi\Theta_1\,dx\right)$.

Теперь мы докажем, что существует число σ, $0<\sigma<1$, такое, что при $0<p<3/2$ имеет место неравенство

$$(\lambda\nu^2\|r^{p+1}\|^2)^{-1}|\lambda_0|\,\|\psi\|^2\leqslant 1-\sigma.\quad (77)$$

Из (77) вытекает

$$|\lambda_0|\,\beta^2\|r^{p+1}\|^2\leqslant(\nu\|r^{p+1}\|)^{-2}\,[|\lambda_0|\,((\sigma+1)/4\sigma)\,\|h\|^4+$$
$$+|\lambda_0|\,(1+\sigma)\,\|\psi\|^2\|\Theta_1\|^2\leqslant c_0\|h\|^4+\lambda(1-\sigma^2)\|\Theta_1\|^2.\quad (78)$$

Отсюда в силу (76) имеем

$$M_1(h_1)\geqslant\lambda\sigma^2\|\Theta_1\|^2-c_0\|h\|^4.\quad (79)$$

Докажем (77). Так как $\|\psi\|^2=\|r\|^2-\nu^2\|r^{p+1}\|^2$, имеем

$$\|\psi\|^2/\nu^2\|r^{p+1}\|^2=\|r\|^2/\nu^2\|r^{p+1}\|^2-1=$$
$$=\left(\int r^{p+2}\,dx\right)^{-2}\|r\|^2\|r^{p+1}\|^2-1=$$
$$=2/(p+2)\left(\int(\operatorname{ch}y)^{-2/p}\,dy\right)^2\left(\int(\operatorname{ch}y)^{-1-(2/p)}\,dy\right)^{-2}-1.$$

В силу равенства $\int (\operatorname{ch} y)^{-\mu}\, dy = \sqrt{\pi}\Gamma(\mu/2)\,\Gamma((\mu+2)/2)^{-1}$ (77) запишется в виде

$$(|\lambda_0|/\lambda)\,[(2/(p+2))\,(\Gamma(1/p)/\sqrt{p}\,\Gamma(1/p+1/2))^4-1]\leqslant 1-\sigma.$$

Если положим для удобства $s = 1/p$; $s \geqslant 2/3$ и определим $\mu(s)$: $\mu(s) = 2^{-1/4}$ при $s > 1$; $\mu(s) = (2s)^{1/4}(s+1)^{-1/2}$ при $2/3 \leqslant s \leqslant 1$, то верхнее неравенство сводится к $f(s) \equiv \mu(s)\sqrt{s}\Gamma(s)(\Gamma(s+1/2))^{-1} \leqslant \leqslant 1-\sigma$, $s \geqslant 2/3$ (с каким-то другим σ, $0<\sigma<1$). Теперь, применяя формулу Стирлинга, получаем $f(s) \leqslant e^{1/2}\mu(s)\left(1+\frac{1}{2s}\right)^{-s} f_1(s)$, где

$$f_1(s) = \left(1+\frac{12s^2+14\frac{49}{90}s^2+3\frac{3}{4}s+\frac{1}{8}}{288s^5+456s^4+241s^3+40\,(43/45)\,s^2}\right).$$

Исследуя знак производных функций $f_1(s)$ и $f_2(s) = \mu(s) \times \times (1+1/2s)^{-s}$, можно проверить, что f_1 и f_2 являются невозрастающими функциями при $s \geqslant 2/3$. Следовательно,

$$f(s) = e^{1/2} f_2(2/3)\, f_1(2/3) = 0{,}999912\ldots = 1-\sigma.$$

Тем самым оценка (77) доказана. Чтобы получить окончательную оценку для M_1, необходимо в (79) $\|\Theta_1\|$ выразить через $\|h_1\|$. Обозначим $\Theta = h_1 - \gamma r'$. Тогда из (75) и (78) вытекает

$$\|\Theta\|^2 = \beta^2\,\|r^{p+1}\|^2 + \|\Theta_1\|^2 \leqslant (c_0/|\lambda_0|)\,\|h\|^4 + \\ + (\lambda(1-\sigma^2)/|\lambda_0|+1)\,\|\Theta_1\|^2.$$

Отсюда при помощи (79) получаем

$$M_1(h_1) \geqslant (\lambda\sigma^2/2)\,\|\Theta\|^2 - 2c_0\,\|h\|^4. \tag{80}$$

Далее проведем рассуждения, аналогичные изложенным при получении оценки для M_2. Приравнивая нулю производную по η, $d_q^2(u, \varphi)$ в точке минимума, получаем

$$0 = \int [(5\omega^2 - a - \alpha + (2p+1)\,r^{2p} + q)\,r'h_1 + \\ + \omega\,(3\,(\omega^2 - a - \alpha + r^{2p}) + q)\,rh_2]\,dx.$$

Определяя $\int qrh_2\,dx$ из (72) и подставляя в верхнее равенство, получаем

$$\int [(3\omega^2 - a - \alpha + (2p+1)\,r^{2p} + q)\,r'h_1 + \\ + 2\omega\,(\omega^2 - a - \alpha + r^{2p})\,rh_2]\,dx = 0.$$

Отсюда, так как $h_1 = \gamma r' + \Theta$; $\int r'\Theta\, dx = 0$, в силу (75) получим условие

$$\gamma\left(\frac{4p^2+3p}{3p+2}(a+\alpha)+3\omega^2+q\right)\|r'\|^2+$$
$$+\int [(2p+1)\,r^{2p}r'\Theta+2\omega\,(\omega^2-a-\alpha+1^{2p})\,rh_2]\,dx=0.$$

При помощи этого условия, так же как при оценке M_2, получаем $\|h_1\| \leqslant (K_1+1)\,\|\Theta\| + K_1\,\|h_2\|$, где $K_1 = K_1(q) \to 0$ при $q \to \infty$. Подставляя в (80), выводим окончательную оценку для M_1

$$M_1 \geqslant (\lambda\sigma^2/4\,(K_1+1)^2)\,\|h_1\|^2 -$$
$$-(\lambda\sigma^2K_1^2/2\,(K_1+1)^2)\,\|h_2\|^2 - 2c_0\,\|h\|^4. \qquad (81)$$

В. Оценка для ΔM. Объединяя (74) и (81), имеем

$$M_1+M_2\geqslant\lambda\left[\left(\frac{\sigma^2}{4\,(K_1+1)^2}-\frac{K_0^2}{(K_0+1)^2}\right)\|h_1\|^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2\,(K_0+1)^2}-\frac{\sigma^2K_1^2}{2\,(K_1+1)}\right)\|h_2\|^2\right]-2c_0\,\|h\|^4.$$

Зафиксируем q достаточно большое, чтобы $K_0 \leqslant \sigma/4$; $K_1 \leqslant 1/4$. Несложно показать, что, выбирая q, можно положить

$$q = q_0\,[(a+\alpha)^{3/2}+\omega^3]\,(a+\alpha)^{-1/2},$$

где q_0 является константой, зависящей только от p. Тогда получим

$$M_1 + M_2 \geqslant (\lambda\sigma^2/9)\,\|h\|^2 - 2c_0\,\|h\|^4.$$

Однако, оценивая непосредственно I_2, имеем

$$I_2\geqslant\|h_x\|^2+\int [a+\alpha+\omega^2-(2p+1)\,r^{2p}]\,|h|^2-2\,|\omega|\int |h_xh|\,dx\geqslant$$
$$\geqslant(1/2)\,\|h_x\|^2+\int [a+\alpha-\omega^2-(2p+1)\,r^{2p}]\,|h|^2\,dx.$$

Следовательно, $I_2 \geqslant (1/2)\,\|h_x\|^2 - c_1\,\|h\|^2$, где $c_1 = (a+\alpha)\times(2p^2+3p)+\omega^2$.

Пусть $0 < K < 1/2$. Имеем

$$\Delta M\geqslant 2KI_2+(1-2K)\,(M_1+M_2)-|I_3|\geqslant K\,\|h_x\|^2+$$
$$+\left((1-2K)\frac{\lambda\sigma^2}{9}-2Kc_1\right)\|h\|^2-(2c_0\,(1-2k)\,\|h\|^4+|I_3|).$$

Выберем K таким образом, чтобы $2qK = (1-2K)\,\frac{\lambda\sigma}{9} - 2Kc_1$, т. е. $K = (1/2)\,\lambda\sigma^2\,(\lambda\sigma^2+9q+9c_1)^{-1} > 0$. Тогда имеем оценку $\Delta M \geqslant K\,d_q^2\,(u,\varphi) + (qK\,\|h\|^2 - 2c_0\,(1-2K)\,\|h\|^4 - |I_3|)$. Для того чтобы завершить доказательство предложения, мы покажем, что $\delta_0 > 0$ можно выбрать таким образом, что при $d_q\,(u,\varphi) < \delta_0$

слагаемое в скобках будет неотрицательным (до сих пор δ_0 удовлетворяло только условию $\delta_0 \leqslant (2q)^{1/2} \| \varphi \|$, необходимому для леммы 9). Действительно, полагая $z = e^{i\eta} \varphi + hs$, $b = e^{i\eta}\varphi$, имеем

$$\frac{1}{2} |F(s) - F(0)| = ||z|^{2p} (p \operatorname{Re} (h^2 e^{-2i \arg z}) + (p+1) |h|^2) -$$
$$- |b|^{2p} (p \operatorname{Re} (h^2 e^{-2i \arg b}) + (p+1) |h|^2)| \leqslant$$
$$\leqslant (p+1) |h|^2 ||z|^{2p} - |b|^{2p}| + p |h|^2 ||z|^{2p} e^{-2i \arg z} - |b|^{2p} e^{-2i \arg b}|.$$

Так как $|z|^{2p}$ и $|z|^{2p} e^{-2i \arg z}$ являются непрерывными функциями, то можно выбрать δ_1 достаточно малое, чтобы для всех комплексных z, b, $|b| \leqslant \max |\varphi|$; $|z - b| \leqslant \delta_1$ имело место $(1/2) |F(s) - F(0)| \leqslant (K_q/2) |h|^2$. Таким образом, если $d_q(u, \varphi) \leqslant 2^{1/2} q^{1/4} \delta_1$ с учетом неравенства «типа» неравенства Соболева, имеем

$$|z - b| \leqslant |h| \leqslant 2^{(-1/2)} q^{(-1/4)} d_q(u, \varphi) \leqslant \delta_1$$

и, следовательно, $|I_3| \leqslant \frac{K_q}{2} \| h \|^2$. Наконец, если $d_q(u, \varphi) \leqslant \leqslant \frac{q}{2} \left(\frac{k}{c_0} \right)^{1/2}$, то $2c_0 \| h \|^4 \leqslant \frac{2c_0}{q} d_q^2(u, \varphi) \| h \|^2 \leqslant \frac{K_q}{2} \| h \|^2$.

Выбирая $\delta_0 = \min \left((2q)^{1/2} \| \varphi \|, 2^{1/2} q^{1/4} \delta_1, \frac{q}{2} \left(\frac{K}{c_0} \right)^{1/2} \right)$, окончательно получаем: если $d_q(u, \varphi) < \delta_0$; $t \in [0, \infty)$, то $\Delta M \geqslant K d_q^2(u, \varphi)$. Предложение 1 доказано.

II. Доказательство теоремы 1. Сначала мы докажем теорему при дополнительном условии $P(u) = P(\varphi)$. Пусть K, q, δ_0 выбраны в соответствии с предложением 1. Так как ΔM не зависит от t, $t \in \in [0, \infty)$, то существует константа m такая, что $\Delta M \leqslant m d^2(u, \varphi) |_{t=0}$. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $m \geqslant 1$; $q \geqslant 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$; $\delta = \min \left(\left(\frac{K}{mq} \right)^{1/2} \frac{\delta_0}{2}, \left(\frac{K}{m} \right)^{1/2} \varepsilon \right)$, и пусть $d_q(u, \varphi) |_{t=0} < < \delta$. Тогда

$$d_q(u, \varphi) |_{t=0} \leqslant q^{1/2} d(u, \varphi) |_{t=0} < \frac{\delta_0}{2},$$

и из леммы 9б) вытекает, что существует число $T_0 > 0$ такое, что $d_q(u, \varphi) < \delta_0$, $t \in [0, T_0)$. Тогда в силу доказанного предложения $\Delta M \geqslant K d_q^2(u, \varphi)$; $t \in [0, T_0)$.

Пусть $T_{\max}$ является самым большим числом таким, что $\Delta M \geqslant \geqslant K d_q^2(u, \varphi)$; $t \in [0, T_{\max})$. Допустим, что $T_{\max} < \infty$. Тогда при $t \in [0, T_{\max}]$ имеем

$$d_q^2(u, \varphi) \leqslant \frac{\Delta M}{K} \leqslant \frac{m}{K} d^2(u, \varphi) |_{t=0} < \frac{m}{K} \delta^2 \leqslant \frac{\delta_0^2}{4}.$$

Применяя еще раз лемму 9б), получаем, что существует число $T_1 > T_{\max}$ такое, что $d_q(u, \varphi) < \delta_0$; $t \in [0, T_1)$. В силу предложения 1 это противоречит допущенному. Следовательно, $T_{\max} = \infty$;

$$\Delta M \geqslant K\, d_q^2(u, \varphi) \geqslant K\, d^2(u, \varphi);\ t \in [0, \infty).$$

Отсюда

$$d^2(u, \varphi) \leqslant \frac{\Delta M}{K} \leqslant \frac{m}{K}\delta^2 < \varepsilon^2; \quad t \in [0, \infty),$$

и тем самым теорема доказана.

Теперь освободимся от ограничения $P(u) = \|u\|^2 = \|\varphi\|^2 = P(\varphi)$. Имеем $\|\varphi\| = c_p(a+\alpha)^{(2-p)/4p}$, где константа c_p зависит только от p. Пусть φ_β имеет вид (8), (9), где α заменено β и β выбрано так, что $a+\beta > 0$ и $\|\varphi_\beta\| = c_p(a+\beta)^{(2-p)/4p} = \|u\|$.

Обозначим $r_\beta = |\varphi_\beta|$. Тогда, подставляя в интеграл [минимум которого по (η, ζ) является $d^2(\varphi_\beta, \varphi)$] $\eta = (\beta-\alpha)t$; $\zeta = 0$, получаем неравенство

$$d^2(\varphi_\beta, \varphi) \leqslant (\omega^2+1)\|r - r_\beta\|^2 + \|r' + r'_\beta\|^2.$$

Ясно, что если $|\alpha-\beta|$ достаточно маленькое $\left(\text{например, } |\alpha - \beta| \leqslant \frac{a+\alpha}{2}\right)$, имеет место $|r - r_\beta| \leqslant |\alpha-\beta|\,\rho$, где $\rho \in L_2(R)$ и $\|\rho\|$ не зависит от β (эвентуально зависит от α, p и a). Это следует из (3) и из неравенства

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{a+\beta}{a+\alpha} \leqslant \frac{3}{2}. \tag{82}$$

Аналогичное утверждение имеет место и для $|r' - r'_\beta|$. Следовательно, $d(\varphi_\beta, \varphi) \leqslant C|\beta-\alpha|$; $t \in [0, \infty)$, где C не зависит от β, t. Пусть $\varepsilon > 0$. Из неравенства

$$|\,\|\varphi_\beta\| - \|\varphi\|\,| = |\,\|u\| - \|\varphi\|\,| \leqslant d(u, \varphi)|_{t=0} < \delta$$

вытекает

$$\left(1 - \frac{\delta}{\|\varphi\|}\right)^{\frac{4p}{2-p}} \leqslant \left(\frac{\|\varphi_\beta\|}{\|\varphi\|}\right)^{\frac{4p}{2-p}} \leqslant \left(1 + \frac{\delta}{\|\varphi\|}\right)^{\frac{4p}{2p-2}}.$$

Так как $4p/(2-p) \leqslant 12$, из верхнего неравенства вытекает, что $1 - \delta_1 \leqslant (a+\beta)/(a+\alpha) \leqslant 1 + \delta_1$, где $\delta_1 = (1 + \delta/\|\varphi\|)^{12} - 1$. Отсюда $|\beta - \alpha| \leqslant \delta_1(a+\alpha)$ и, следовательно,

$$d(u, \varphi_\beta)|_{t=0} \leqslant d(u, \varphi)|_{t=0} + d(\varphi_\beta, \varphi)|_{t=0} < \delta + C(a+\alpha)\delta_1 = \delta_0.$$

Выберем δ достаточно малым и применим уже доказанную часть теоремы: $d(u, \varphi_\beta)|_{t=0} < \delta_0 \Rightarrow d(u, \varphi_\beta) < \varepsilon/2$, $t \in [0, \infty)$. В силу (82) ясно, что мы можем выбрать δ_0 независимо от β (см. доказательство предложения 1 и вид констант K, q, δ_0).

Тогда, выбирая $\delta > 0$ достаточно малым для всех $t \in [0, \infty)$, получаем

$$d(u, \varphi) \leqslant d(u, \varphi_\beta) + d(\varphi_\beta, \varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + C(a+\alpha)\delta_1 < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

3. КОМПЛЕКСНОЕ МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА

I. Для того чтобы применить теорию абстрактных квазилинейных уравнений, запишем уравнение (15) в векторной форме

$$w_t + 6(w^*, w)_x + w_{xxx} = 0, \; w = (\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u), \tag{83}$$

введем пространство $Z^s = H^s_R \oplus H^s_R$, где H^s_R — вещественное пространство Соболева, и обозначим

$$R(t) = \exp[-tD^3] \oplus \exp[-tD^3], \; D = d/dx$$

сильно непрерывную унитарную группу операторов, действующих в пространстве Z^s. Тогда, подставляя в (83) $w = R(t) v(t)$, получаем квазилинейное эволюционное уравнение [25, 26]

$$dv/dt + A(t, v) v = 0; \; v(0) = (\operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g), \tag{84}$$

где $A(t, y)$ — линейный оператор, зависящий от t и $y \in Z^s$, и $A(t, y) = R(-t)\, a(R(t) y) DR(t)$. Здесь $a(R(t) y)$ — оператор умножения на функцию

$$x \to a((R(t) y)(x)) = [(R(t) y)^* (R(t) y)](x).$$

Если выбрать в качестве $X = Z^0$ и $Y = Z^s$ (в терминологии работы [25]), то условия абстрактной теоремы существования [25] для (84) проверяются так же, как в [26]. Сформулируем результат, который получается для уравнения (15).

Теорема 10. а) Пусть $s > 3/2$. Для каждого $g(x) \in H^s$ существует единственное решение $u(x, t)$, $u(x, 0) = g$ уравнения (15), которое принадлежит классу

$$u \in C([0, T); H^s) \cap C^1([0, T); H^{s-3}); \tag{85}$$

T — зависит только от $\| g \|_s$.

б) Отображение $g \to u$ непрерывно в H^s-норме в том смысле, что если $g_n \to g$ в H^s при $n \to \infty$ и $T' < T$, решение (15) $u_n(x, t)$, $u_n(x, 0) = g_n$ существует при $t \in [0, T']$ для достаточно больших n и $\| u_n - u \|_s$ сходится равномерно по $t \in [0, T']$.

в) T может быть выбрано независимо от s в том смысле, что если u удовлетворяет (85) и $u(x, 0) = g \in H^{s'}$ для некоторого $s' \neq s$, $s' \geqslant 3/2$, то u удовлетворяет (85) и при s' вместо s.

г) Существуют вещественные числа $s_1 \geqslant s_0 > 3/2$ и неубывающая функция α такие, что для каждого $T > 0$ и для каждой функции $u \in C([0, T); H^{s_1})$, удовлетворяющей (15), имеет место

$$\| u(\cdot, t) \|_{s_0} \leqslant \alpha(\| u(\cdot, 0) \|_{s_0}),\quad t \in [0, T).$$

Теорема 11. Пусть имеет место условие (г). Тогда утверждение теоремы 10 выполняются с $T = \infty$.

Лемма 10. Условие г) теоремы 10 выполняется с $s_0 = 2$.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно вытекает из того факта, что нелинейные функционалы $P = \int |u|^2\, dx$;

$$E = \int (|u_x|^2 - |u|^4)\, dx;$$
$$I = \int \{|u_{xx}|^2 - [d/dx(|u|^2)]^2 - 6|u|^2|u_x|^2 + 2|u|^6\}\, dx \qquad (86)$$

инвариантны по времени, когда $u(x, t)$ является решением задачи Коши (15), (16).

Докажем инвариантность по времени P, E и I. Для этого определим регуляризацию g_ε на g так же, как в разд. 1. Имеем $g_\varepsilon \to g$ и H^s, $s \geqslant 2$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда в силу теоремы 10 для каждого $T' < T$ и для достаточно малых ε

$$u_\varepsilon(x, t) \in C([0, T']; H^\infty) \text{ и } \| u_\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \|_s \to 0 \qquad (87)$$

при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in [0, T']$.

Дифференцируя по времени в (86) и используя, что $u_\varepsilon(x, t)$ удовлетворяет (97) в классическом смысле, получаем

$$P(u_\varepsilon) = P(g_\varepsilon);\quad E(u_\varepsilon) = E(g_\varepsilon);\quad I(u_\varepsilon) = I(g_\varepsilon).$$

Делая предельный переход в этих равенствах, в силу (87) получаем инвариантность по времени P, E и I.

Из теоремы 11 и леммы 10 вытекает, что задача Коши (15), (16) имеет единственное глобальное решение u, для которого выполняются утверждения теоремы 10 с $T = \infty$.

II. Доказательство предложения 2.

Лемма 11. а) Пусть $d_q^2(u, \varphi) < 2q \| \varphi \|^2$. Тогда inf в (19) достигается в конечной точке (η, ζ).

б) $d_q(u, \varphi)$ является непрерывной функцией $t \in [0, \infty)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 7 и 8.

Зафиксируем $t \in [0, \infty)$, и пусть минимум в (19) достигается в точке $(\eta, \zeta) = (\eta(t), \zeta(t))$. Чтобы оценить $\Delta M = M(u) - M(\varphi)$, положим $u(x, t) = e^{i\omega\eta}\varphi(x-\zeta, t) + h(x, t)$ и проинтегрируем по частям в слагаемых, содержащих h_x и $\bar{h}_x$; получим

$$\Delta M = M(u) - M(\varphi) = 2\,\mathrm{Re}\int e^{i\omega\eta}[-\varphi_{xx} + (a^2+\omega^2-2|\varphi|^2)\varphi +$$
$$+ 2i\omega\varphi_x]\,\bar{h}\,dx + \int [|h_x|^2 + (a^2+\omega^2-4|\varphi|^2)|h|^2 - 2i\omega\bar{h}_x h -$$
$$-2\,\mathrm{Re}(e^{-2i\omega\eta}\bar{\varphi}^2 h^2)]\,dx - \int |h|^2(4\,\mathrm{Re}(e^{i\omega\eta}\varphi\bar{h}) + |h|^2)\,dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как амплитуда r удовлетворяет уравнениям

$$r'' + 2r^3 - a^2 r = 0; \quad r'^2 = r^2(a^2 - r^2), \tag{88}$$

то нетрудно вывести, что $I_1 = 0$, т. е. φ является стационарной точкой функционала M. Чтобы оценить I_2 снизу, представим $I_2 = \int \bar{h} L h\,dx$, где L — дифференциальный оператор, и применим его спектральное разложение. Для этого мы должны избавиться от инволюции, содержащейся в последнем члене I_2. Сделаем замену переменных, полагая

$$h = (h_1 + i\,h_2)\exp[i\,\omega\,(-x\zeta + (\omega^2 - 3a^2)\,t + \eta)], \tag{89}$$

h_1, h_2 — вещественные функции. Тогда имеем

$$I_2 = \int [h_{1x}^2 + (a^2 - 6r^2)\,h_1^2]\,dx + \int [h_{2x}^2 + (a^2 - 2r^2)\,h_2^2]\,dx = M_1 + M_2.$$

Рассмотрим самосопряженные в $L_2(R)$ операторы L_1 и L_2, порожденные дифференциальными выражениями

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + (a^2 - 6r^2); \quad L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + (a^2 - 2r^2).$$

Непрерывный спектр L_1 и L_2 совпадает с множеством $[a^2, \infty)$. Используя (89), нетрудно проверить, что L_1 имеет собственные числа $\lambda_0 = -3a^2$ и $\lambda_1 = 0$ с собственными функциями $\varphi_0 = r^2$ и $\varphi_1 = r'$. L_2 имеет единственное собственное число нуль с собственной функцией r.

Существование нулевых собственных чисел у L_1 и L_2 является следствием инвариантности (15) относительно сдвига и вращения. Благодаря тому, что метрика (18) дает устойчивость с точностью до сдвига и вращения, удается компенсировать вклад нулевых собственных чисел (см. комментарий в [46]).

Отрицательное собственное число L_1 (и соответствующая собственная функция) отражает характер нелинейности. Например, при степенной нелинейности $|u|^p u_x$ вместо $|u|^2 u_x$ в (15) с ростом p растут норма собственной функции и модуль собственного числа, и с данного момента их вклад нельзя компенсировать положительными членами в разложении. Другими словами, появляется неустойчивость. Как мы увидим, нелинейность $p = 2$ не дает такого эффекта.

А. Оценка для M_2. Так же как для НУШ, из того факта, что производная $d_q^2(u, \varphi)$ по η в точке, в которой достигается минимум, равняется нулю, вытекает условие

$$\int [(q + 2r^2 + \omega^2 - a^2) rh_2 + 2\omega r' h_1]\, dx = 0. \tag{90}$$

Положим $h_2 = \alpha r + \Theta$; $\int \Theta r\, dx = 0$. При помощи (90) мы покажем, что для больших q, $|\alpha|$ малое, т. е. (90) дает в каком-то смысле условие «ортогональности» между h_2 и собственной функцией r. Действительно, подставляя в (90), получаем

$$0 = \alpha \left(q + \omega^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) \| r \|^2 + 2 \int (r^3 \Theta + \omega r' h_1)\, dx,$$

$$|\alpha|\, \| r \| \leqslant [(q + \omega^2 + a^2/3) \| r \|]^{-1} [2 \| r^3 \| \| \Theta \| + $$
$$+ 2 |\omega| \| r' \| \| h_1 \|] \leqslant K_0 (\| \Theta \| + \| h_1 \|),$$

где $K_0 = K_0(q) \to 0$ при $q \to \infty$. Следовательно, $\| h_2 \| \leqslant \alpha \| r \| + + \| \Theta \| \leqslant (K_0 + 1) \| \Theta \| + K_0 \| h \|_1$,

$$\| \Theta \|^2 \geqslant \| h_2 \|^2 / 2 (K_0 + 1)^2 - (K_0/(K_0 + 1)^2) \| h_1 \|^2. \tag{91}$$

Так как Θ ортогональна к собственной функции r оператора L_2, имеем

$$M_2 = \int [h_{2x}^2 + (a^2 - 2r^2) h_2^2]\, dx = \int [\Theta_x^2 + (a^2 - 2r^2) \Theta^2]\, dx \geqslant a^2 \| \Theta \|^2.$$

Отсюда в силу (91) окончательно получаем

$$M_2 \geqslant \frac{a^2}{2 (K_0 + 1)^2} (\| h_2 \|^2 - 2K_0^2 \| h_1 \|^2). \tag{92}$$

Б. Оценка для M_1. Положим $h_1 = \beta r^2 + \gamma r' + \Theta_1$; $r = \nu r^2 + \psi$, где

$$\int \Theta_1 r^2\, dx = \int \Theta_1 r'\, dx = \int \psi r^2\, dx = 0, \ \beta, \ \gamma, \ \nu = \mathrm{const}. \tag{93}$$

В силу ортогональности Θ_1 к собственным функциям $\varphi_0 = r^2$ и $\varphi_1 = r'$ имеем

$$M_1(h_1) = \lambda_0 \beta^2 \| r^2 \|^2 + M_1(\Theta_1) \geqslant -3a^2 \beta^2 \| r^2 \|^2 + a^2 \| \Theta_1 \|^2. \tag{94}$$

Основной трудностью при оценке M_1 (так же как для НУШ) является появление отрицательного члена $\lambda_0 \beta^2 \| r^2 \|^2$. Воспользуемся условием $P(u) = \int | h + e^{i\omega\eta} \varphi |^2\, dx = \int | \varphi |^2\, dx = P(\varphi)$ или $\| h \|^2 = -2 \mathrm{Re} \int \bar{\varphi} h e^{i\omega\eta} dx = -2 \int r h_1\, dx$.

Подставив здесь выражения r и h_1 из (93), получим условие $\nu\beta \| r^2 \|^2 + \int \psi\Theta_1 \, dx = (-1/2) \| h \|^2$, из которого вытекает

$$3\beta^2 \| r^2 \|^2 \leqslant (\nu \| r^2 \|)^{-2} [3 \| h \|^4 + 4 \| \psi \|^2 \| \Theta_1 \|^2]. \tag{95}$$

Мы покажем, что $c_0 = 4 (\nu \| r^2 \|)^{-2} \| \psi \|^2 < 1$. По существу, это единственное место в доказательстве, где мы используем конкретный вид λ_0 и φ_0.

Вычисляя соответствующие интегралы, получаем

$\| r^2 \| = 2a$; $\| r^2 \|^2 = 4/3a^3$; $\| r^{3/2} \|^2 = \pi a^2/2$; $\nu = 3\pi/8a$; $\| \psi \|^2 = \| r \|^2 - \nu^2 \| r^2 \|^2 = a (2 - 3\pi^2/16)$;

$c_0 = 128/3\pi^2 - 4 < 1/3$; $3 (\nu \| r^2 \|)^{-1} = 16/a\pi^2 < 5/3a$.

Подставляя полученные выражения в (95), получаем $3\beta^2 \| r^2 \|^2 \leqslant (5/3a) \| h \|^4 + (1/3) \| \Theta_1 \|^2$, что вместе с (94) дает оценку

$$M_1 \geqslant (2a^2/3) \| \Theta_1 \|^2 - (5a/3) \| h \|^4. \tag{96}$$

Обозначим $\Theta = h_1 - \gamma r' = \beta r^2 + \Theta_1$. Тогда $\| \Theta \|^2 = \beta^2 \| r^2 \|^2 + \| \Theta_1 \|^2 \leqslant (5/9a) \| h \|^4 + (10/9) \| \Theta_1 \|^2$ или $\| \Theta_1 \|^2 \geqslant (9/10) \| \Theta \|^2 - (1/2a) \| h \|^4$. Из последнего неравенства и (96) вытекает

$$M_1 \geqslant (3/5a^2) \| \Theta \|^2 - 2a \| h \|^4. \tag{97}$$

Для того чтобы оценить снизу $\| \Theta \|^2$ через $\| h_1 \|^2$, опять воспользуемся тем, что inf правой части (19) достигается в точке (η, ζ), следовательно, и производная по ζ в этой точке равна нулю. Отсюда получается

$$0 = \int [(3\omega^2 - a^2 + 6r^2 + q) h_1 r' + \omega (\omega^2 - 3a^2 + 6r^2 + q) r h_2] \, dx.$$

Определяя $\int q r h_2 \, dx$ из (90) и подставляя в верхнее равенство, получаем условие

$$\int [(\omega^2 - a^2 + 6r^2 + q) h_1 r' + \omega (4r^2 - 2a^2) r h_2] \, dx = 0.$$

В последнем интеграле положим $h_1 = \gamma r' + \Theta$ и воспользуемся тем, что $\int \Theta r' \, dx = 0$. Будем иметь

$$\gamma \int (\omega^2 - a^2 + 6r^2 + q) r'^2 \, dx + 2 \int [3r^2 r' \Theta + \omega (2r^2 - a^2) r h_2] \, dx = 0.$$

При помощи этого условия, так же как при оценке M_2, получаем $\| \Theta \|^2 \geqslant \| h_1 \|^2/2 (K_1 + 1)^2 - (K_1/(K_1 + 1))^2 \| h_2 \|^2$, где $K_1 = K_1 (q) \to 0$ при $q \to \infty$. Подставляя в (97), выводим окончательную оценку для M_1

$$M_1 \geqslant (3a^2/10 (K_1 + 1)^2) h_1^2 - (3/5a^2) (K_1 (K_1 + 1))^2 \| h_2 \|^2 - 2a \| h \|^4 \tag{98}$$

В. Оценка для ΔM. Объединяя (92) и (98), имеем

$$M_2 + M_1 \geqslant a^2 [(3/10 (K_1 + 1)^2 - (K_0/(K_0 + 1))^2) \| h_1 \|^2 + \\ + (1/2 (K_0 + 1)^2 - (3/5) (K_1 (K_1 + 1))^2) \| h_2 \|^2] - 2a \| h \|^4.$$

Зафиксируем $q = q(a, \omega)$ достаточно большое, чтобы $K_0 \leqslant 1/6$; $K_1 \leqslant 1/6$. Тогда

$$M_1 + M_2 \geqslant \frac{a^2}{5} (\| h_1 \|^2 + \| h_2 \|^2) - 2a \| h \|^4 = \frac{a^2}{5} \| h \|^2 - 2a \| h \|^4.$$

Несложно показать, что, выбирая q, можно выбрать $q = 16a^2 + 2\omega^2$ (соответственно $q = 50a^2$). Однако оценивая непосредственно I_2, имеем

$$I_2 \geqslant \| h_x \|^2 + \int (a^2 + \omega^2 - 4r^2) |h|^2 dx - \\ - 2|\omega| \int |h_x| \, |h| \, dx - 2 \int r^2 |h|^2 dx \geqslant (1/2) \| h_x \|^2 - (\omega^2 + 5h^2) \| h \|^2.$$

Аналогично $|I_3| \leqslant \max(4a |h| + |h|^2) \| h \|^2$. Пусть $0 < K < 1/2$. Имеем

$$\Delta M = 2KI_2 + (1 - 2K)(M_1 + M_2) + I_3 \geqslant \\ \geqslant K \| h_x \|^2 + \left[\frac{a^2}{5} (1 - 2K) - 2K(\omega^2 + 5a^2) \right] \| h \|^2 - \\ - [\max(4a |h| + |h|^2) + 2a(1 - 2K) \| h \|^2] \| h \|^2.$$

Выберем K таким образом, чтобы $2qK = \frac{a^2}{5}(1 - 2K) - 2K \times (\omega^2 + 5a^2)$, т. е. $K = a^2/2 (5q + 26a^2 + 5\omega^2)$. Наконец, из неравенства Соболева вытекает, что $\max |h|^2 \leqslant (4q)^{-1/2} d_q^2 (u, \varphi)$, кроме того, $\| h \|^2 \leqslant q^{-1} d_q^2 (u, \varphi)$. Следовательно, можем выбрать $\delta_0 > 0$, таким образом, чтобы при $d_q(u, \varphi) < \delta_0$ иметь

$$[\max(4a |h| + |h|^2) + 2a(1 - 2K)] \| h \|^2 \leqslant qK$$

[до сих пор δ_0 удовлетворяло только условию $\delta_0 \leqslant (2q)^{1/2} \| \varphi \|$, необходимому для леммы 11a)].

Таким образом, окончательно получаем:
Если $d_q(u, \varphi) < \delta_0$, $t \in [0, \infty)$, то $\Delta M \geqslant K d_q^2 (u, \varphi)$. Предложение 2 доказано.

III. Доказательство теоремы 2. Из предложения 2 [при помощи леммы 11б)] вытекает утверждение теоремы 2 при дополнительном предположении $P(u) = P(\varphi)$ дословно так же, как из предложения 1 вытекало утверждение теоремы 1.

Аналогично можно освободиться от ограничения $P(u) = \| u \|^2 = \| \varphi \|^2 = P(\varphi)$. Действительно, $\| \varphi \| = (2a)^{1/2}$. Положим $b = \| u \|^2/2$, и пусть φ_b имеет вид (17) и $\| \varphi_b \| = \| u \| = (2b)^{1/2}$. Обозначим $r_b = | \varphi_b |$. Тогда, подставляя в интеграл (минимумом которого по (η, ζ) является $d^2(\varphi_b, \varphi))$ $\eta = 2(a^2 - b^2)t$; $\zeta = (b^2 - a^2)t$, получаем неравенство

$$d^2(\varphi_b, \varphi) \leqslant (1 + \omega^2) \| r_b - r \|^2 + \| r_b - r' \|^2.$$

В силу этого неравенства, применяя теорему конечных приращений к $r_b - r$ и $r_b - r'$ при $\frac{1}{2} \leqslant \frac{b}{a} \leqslant \frac{3}{2}$ ($\Leftrightarrow |b - a| \leqslant a/2$), получаем $d(\varphi_b, \varphi) \leqslant |b - a| C$, где $C = C(a, \omega)$ не зависит от b.

Пусть $\varepsilon > 0$. Из неравенства

$$|\, \| \varphi_b \| - \| \varphi \| \,| = |\, \| u \| - \| \varphi \| \,| \leqslant d(u, \varphi) |_{t=0} < \delta$$

вытекает $-(2a)^{-1/2}\delta < (\| \varphi \|)^{-1} \| \varphi_b \| - 1 < (2a)^{-1/2}\delta$, и, следовательно, $1 - \delta_1 < b/a < 1 + \delta_1$, т. е. $|b - a| < a\delta_1$, где $\delta_1 = (1 + (2a)^{-1/2}\delta)^2 - 1$. Таким образом,

$$d(u, \varphi_b)|_{t=0} \leqslant d(u, \varphi)|_{t=0} + d(\varphi, \varphi_b)|_{t=0} < \delta + ac\delta_1 = \delta_0.$$

Выберем δ достаточно малое и применим уже доказанную часть теоремы

$$d(u, \varphi_\beta)_{t=0} < \delta \Rightarrow d(u, \varphi_\beta) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [0, \infty).$$

В силу неравенства $|b - a| \leqslant a/2$ мы можем выбрать δ_0 независимо от b (см. доказательство предложения 2 и вид констант K, q, δ_0). Тогда, выбирая $\delta > 0$ достаточно малое для всех $t \in [0, \infty)$, получаем

$$d(u, \varphi) \leqslant d(u, \varphi_\beta) + d(\varphi_\beta, \varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + ac\delta_1 < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

4. НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ТИПА СТУПЕНЬКИ

I. Теория регулярности для уравнения

$$u_t - u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x, 0) = g(x) \in X^s, \quad s \geqslant 3; \; x \in R; \; t \geqslant 0. \qquad (99)$$

Подобно тому, что делалось в п. I разд. 1, рассмотрим регуляризованную задачу

$$u_t - u^2 u_x + u_{xxx} - \varepsilon^2 u_{xxt} = 0, \quad u(x, 0) = g(x); \quad x \in R; \; t \geqslant 0; \; 0 < \varepsilon \leqslant 1 \qquad (100)$$

и обозначим $\widetilde{X}_T^s = C(0, T; X^s)$ — пространство, состоящее из функций u: $R \times [0, T] \to R$, которые принадлежат X^s при фиксированном $t \in [0, T]$; отображение u: $[0, T] \to X^s$ является непрерывным и ограниченным. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ в (100) сделаем замену $v(x, t) = \varepsilon u(\varepsilon(x - t), \varepsilon^3 t)$. Тогда (100) трансформируется в задачу

$v_t + v_x - v^2 v_x - v_{xxx} = 0$; $v(x, 0) = h(x) = \varepsilon g(\varepsilon x)$. Если $h(x) \in \in X^s$, $s \geqslant 2$, то, сводя эту задачу к интегральному уравнению

$$v(x, t) = h(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)[v(\xi, \tau) - (1/3) v^3(\xi, \tau)]\, d\xi\, d\tau,$$
$$K(x) = (1/2)\operatorname{sgn} x e^{-|x|}$$

и соответствующим образом модифицируя рассуждения, приведенные в разд. 1 относительно уравнения ББМ, получаем, что для достаточно малого T существует единственное решение $v(x, t)$ $(x \in \in R;\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, которое принадлежит $\widetilde{X}_T^s$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x, t) = = -\lim\limits_{x\to-\infty} v(x, t) = c_h$, $t \in [0, T]$. Глобальное решение по времени можно получить, воспользовавшись законом сохранения

$$2(3 - c_h^2)\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} (v^2 - c_h^2)^2\, dx =$$
$$= 2(3 - c_h^2)\int_{-\infty}^{\infty} h_x^2\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} (h^2 - c_h^2)^2\, dx.$$

Далее, используя индукцию и элементарные свойства преобразования Фурье, возвращаясь к задаче (100), получаем следующую лемму.

Лемма 12. Пусть $g(x) \in X^s$, $s \geqslant 2$. Тогда существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (100), которое принадлежит $\widetilde{X}_T^s$ для любого конечного T. Кроме того, $\partial_t^l(u) \in \widetilde{H}_T^{s-l}$, $1 \leqslant l \leqslant s$.

Следствие. Пусть $g \in X^s \bigcap C^\infty$, и пусть g_x вместе со всеми производными принадлежит L_2 (множество таких функций мы будем обозначать X^∞). Тогда всевозможные производные решения $u(x, t)$ задачи (100) принадлежат $\widetilde{H}_T$ для любого конечного T.

Нетрудно показать, что для решения $u(x, t)$ задачи (100) имеет место закон сохранения

$$I_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [u_x^2 + (1/6)(u^2 - c_g^2)^2]\, dx = I_1(g). \tag{101}$$

Умножим (100) на $a = u - g$ и проинтегрируем по R. После интегрирования по частям и с учетом оценок $\int a u_{xxx}\, dx \leqslant \| a \|\, \| g_{xxx} \|$; $\int u^2 u_x a\, dx \leqslant \sup |g|\, \| u^2 - c_g^2 \|\, \| u_x \| + c_g^2 \| g_x \|\, \| a \|$ в силу (101) получим $dE_\varepsilon(a)/dt \leqslant C(E_\varepsilon(a)^{1/2}+1)$; $\|a\|^2 \leqslant \int (a^2+\varepsilon^2 a_x)\,dx = E_\varepsilon(a) \leqslant C \exp[CT]$, что вместе с (101) дает лемму 13.

Лемма 13. Пусть $g \in X^\infty$. Тогда $\|a\|_1 \leqslant C$; $|||u_1||| \leqslant C$ при $t\in[0,T] \Rightarrow \sup|u(x,t)| \leqslant C$ и $(x,t)\in R\times[0,T]$ (независимо от $\varepsilon\in(0,1]$). Константа C зависит от T и $|||g|||_3$.

Подобно тому, как делалось в разд. 1, можно доказать следующие утверждения.

Лемма 14. Пусть даны $T>0$ и $g\in X^\infty$. Тогда существует ε_0 такое, что для всех $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ и $t\in[0,T]$, $|||u|||_2 \leqslant C$.

Лемма 15. Пусть $g\in X^\infty$, $0<T<\infty$. Выберем $\varepsilon_0>0$ в соответствии с леммой 14. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ $u(x,t)$ ограничено в $\tilde X_T^m$, $m\geqslant 3$ гранью, зависящей только от T, ε_0, $|||g|||_m$ и $\varepsilon|||g|||_{m+1}$. Отсюда следует, что $\partial_t^l u$ ограничено в $\tilde H_T^k$ независимо от $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ для всех $l>1$, k и T.

Пусть $g(x)\in X^s$, $s\geqslant 3$. Определим регуляризацию $g_\varepsilon(x) = g(x) + [(1-\varphi(\varepsilon^{1/6}k))\hat g_x(k)/ik]^\vee$. (Напомним, что $\hat f$ $(\check f)$ обозначает преобразование Фурье (обратное преобразование Фурье), а $\varphi(k) = \exp[-r(k)]$; $r(k) = k^2\exp[-1/k^2]$). Из формулы $dg_\varepsilon/dx = [\varphi(\varepsilon^{1/6}k)\,\hat g_x(k)]^\vee$ и свойства функции $\varphi(k)$ вытекает, что $g_\varepsilon(x)\in X^\infty$. Тогда в силу леммы 12 задача (100) с $u(x,0)=g_\varepsilon$ имеет единственное решение $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t,\varepsilon)\in\tilde X_T^m$ для всех m и T. Кроме того, всевозможные пространственные и временные производные $u_\varepsilon(x,t)$ принадлежат $\tilde H_T$. Используя равенство Парсеваля и конструкции g_ε, нетрудно вывести следующие утверждения.

Лемма 16. Пусть $g(x)\in X^s$, $s\geqslant 3$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\varepsilon^{(1/6)j}|||g_\varepsilon|||_{s+j} \leqslant C\,|||g_\varepsilon|||_s \Rightarrow |||g_\varepsilon|||_{s+j} = O(\varepsilon^{-(1/6)j}),\quad j=1,2\ldots;$$
$$|||g-g_\varepsilon|||_{s-j} = \|g-g_\varepsilon\|_{s-j} = O(\varepsilon^{(1/6)j}),\quad j=1,2,\ldots,s;$$
$$|||g-g_\varepsilon|||_s = \|g-g_\varepsilon\|_s = O(1).$$

В силу леммы 15 получаем следствие.

Следствие 1. Пусть $g(x)\in X^s$, $s\geqslant 3$. Тогда независимо для достаточно малых ε u_ε ограничено в $\tilde X_T^s$, $0<T<\infty$; $\varepsilon^{m/6}u_\varepsilon$ ограничено в $\tilde X^{s+m}$, $m\geqslant 1$.

Следствие 2. Пусть $g(x)\in X^s$, $s\geqslant 3$. Тогда независимо для достаточно малых ε $\partial_t u_\varepsilon$ ограничено в $\tilde H_T^{s-3}$; $\varepsilon^{m/6}\partial_x^{s+m-3}\,\partial_t u_\varepsilon$ ограничено в $\tilde H_T$ при $m=1,2,3$; $\varepsilon^{7/6}\partial_x^{s+1}\,\partial_t u_\varepsilon$ и $\varepsilon^{4/3}\,\partial_x^{s+2}\,\partial_t u_\varepsilon$ ограничены в $\tilde H_T$.

Лемма 17. Пусть $g(x)\in X^s$, $s\geqslant 3$. Тогда $\{u_\varepsilon\}$ (соответственно $\{u_t(x,t,\varepsilon)\}$) является о.п. Коши в $\tilde X_T^s$ (соответственно в $\tilde H_T^{s-3}$) при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Пусть $\delta \leqslant \varepsilon$. Так как $c_{g_\varepsilon} = c_{g_\delta} = c_g$, то $w = u_\varepsilon - u_\delta$ принадлежит $\widetilde{H}_T$ вместе со всеми своими производными для любого конечного T и удовлетворяет уравнению

$$w_t - [(1/3)\, w^3 + u_\varepsilon^2 w - u_\varepsilon w^2]_x + w_{xxx} - \delta^2 w_{xxt} = (\varepsilon^2 - \delta^2)\, u_{xxt};$$
$$w(x,\ 0) = g_\varepsilon(x) - g_\delta(x).$$

Исходя из этого уравнения и приводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 6, в силу следствий 1 и 2 леммы 16 получаем, что $|||\, w\, |||_s = \|\, w\, \|_s \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из леммы 17 вытекает (так же как из леммы 6 вытекает теорема 4) следующая теорема.

Теорема 12. Пусть $g(x) \in X^s$, $s \geqslant 3$. Тогда существует единственное глобальное решение $u(x,\ t)$ задачи (99), принадлежащее $\widetilde{X}_T^s$ для любого конечного T.

Пусть $g \in X^\infty$ и u — соответствующее решение (99). Непосредственно можно проверить, что $I_0(u) = \int (u^2 - c_g^2)\, dx = I_0(g)$. Положим

$$v(x,\ t) = u^2(x - c_g^2 t,\ t) + \sqrt{6}\, u_x(x - c_g^2 t,\ t) - c_g^2. \tag{102}$$

Преобразование (102) подобно преобразованию Миуры, и нетрудно убедиться, что $v(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению КдФ:

$$v_t - vv_x + v_{xxx} = 0; \quad v(x,\ 0) = g^2 - c_g^2 + \sqrt{6}\, g_x.$$

Так как $v(x,\ 0) \in H^\infty$, то существует [61] бесконечная последовательность полиномиальных законов сохранения, которую можно записать в форме

$$I_{k-1}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(v_{k-1}^2 + \frac{2k-1}{3}\, vv_{(k-2)}^2 + P(v,\ v_{(1)},\ \ldots,\ v_{(k-3)}) + av^{k+1}\right) dx. \tag{103}$$

Здесь $a \neq 0$. Подставляя (102) в (103), получаем бесконечную последовательность законов сохранения для уравнения (99).

$$I_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[u_x^2 + \frac{1}{6}\, (u^2 - c_g^2)^2\right] dx;$$

$$I_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{u_{(k)}^2 + \left[\frac{2k-1}{3}\, (u^2 - c_g^2) + \frac{2}{3}\, u^2\right] u_{(k-1)}^2 + \right.$$
$$\left. + b\, (u^2 - c_g^2)^{k+1} + Q(u,\ u_{(1)},\ \ldots,\ u_{(k-2)})\right\} dx, \quad b \neq 0;\ k \geqslant 2.$$

Подобно доказательству теоремы 5 можно доказать следующую теорему.

Теорема 13. Пусть $g \in X^s$, $s \geqslant 3$, и пусть $u(x, t)$ — соответствующее решение (99). Тогда $I_k(u)$, $k = 1, \ldots, s$, существуют и не зависят от времени.

Следствие. Пусть $g \in X^s$, $s \geqslant 3$, и пусть $u(x, t)$ — соответствующее решение (99). Тогда $|||u|||_k$, $k = 1, \ldots, s$, равномерно ограничены по $t \in [0, \infty)$. Другими словами, для $g \in X^s$, $s \geqslant 3$, существует единственное глобальное решение $u(x, t)$ задачи Коши (99), которое принадлежит пространству $\widetilde{X}^s_\infty$.

Из этого утверждения вытекает, что $U(g) = u(x, t)$ отображает X^s в пространство $\widetilde{X}^s_\infty$, $s \geqslant 3$. Решение уравнения (99) вида уединенной волны, которое мы рассмотрим в п. II разд. 4 показывает, что U не является непрерывным. Однако, если рассматривать конечный интервал времени, имеет место следующая теорема.

Теорема 14. Пусть $0 < T < \infty$, $g \in X^s$; $s \geqslant 3$ и $u(x, t) = U(g)$: $X^s \to \widetilde{X}^s_T$ — сужение на $[0, T]$ глобального решения u задачи (99). Тогда U является непрерывным.

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы 6.

II. Устойчивость формы решения «вида уединенной волны» для уравнения (99). Для удобства в этом пункте МКдФ (99) будем рассматривать в форме

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0,\ u(x, 0) = g(x) \in X^s;$$
$$s \geqslant 3;\ x \in R;\ t \geqslant 0. \tag{104}$$

Уравнение (104) имеет решение вида уединенной волны: $\varphi(x, t) = \Phi_a(y) = a\,\mathrm{th}(ay)$, где $0 < a < \infty$; $y = x + 2a^2t$. Легко проверяется, что $\Phi_a \to \Phi_b$ в X^s при $a \to b$ в R. Однако $a + b \leqslant \limsup\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{x\in R} |\Phi_a - \Phi_b|$. Следовательно, Φ_a не стремится к Φ_b в $C(R)$ (а значит, и в X^s) равномерно по $t \in [0, \infty)$.

Покажем, что существует такое конечное $\zeta = \zeta(t)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - \varphi(x - \zeta, t)]^2 = \inf_{\zeta\in R} \int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - \varphi(x - \zeta_n, t)]^2\, dx = \alpha(t). \tag{105}$$

Действительно, если $\lim \int [u(x, t) - \varphi(x - \zeta_n, t)]^2 = \alpha$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{\zeta_n\}$ имеет хотя бы одну конечную точку сгущения ζ, для которой выполняется (105). В противном случае, если допустить, что $\lim\limits_n |\zeta_n| = \infty$, то придем к противоречию в силу леммы Фату. Положим $u(x, t) = \varphi(x - \zeta, t) + h(x, t)$.

Тогда на основании того, что интеграл в правой стороне (105) стационарен в точке ζ, получим условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\varphi_x \, dx = 0. \tag{106}$$

Мы покажем, что решение $\varphi(x, t)$ устойчиво в метрике $d(u, \varphi)$, задаваемой формулой (24). В частности, как видно из (23) и (24), это означает, что малое начальное возмущение мало меняет форму φ.

Обозначим $[d(u, \varphi)]_{t=0} = \delta$; $c_g = \lim g(x) = \lim u(x, 0)$ при $x \to \infty$. В силу (23) нетрудно получить оценки

$$[d(u, \Phi_{c_g})]_{t=0} \leqslant [d(u, \Phi_a)]_{t=0} + [d(\Phi_{c_g}, \Phi_a)]_{t=0} \leqslant$$
$$\leqslant \delta + c(c_g - a) \leqslant (1 + c)\,\delta; \tag{107}$$
$$d(u, \Phi_a) \leqslant d(u, \Phi_{c_g}) + d(\Phi_a, \Phi_{c_g}) \leqslant d(u, \Phi_{c_g}) + c\delta, \quad t \geqslant 0, \tag{108}$$

где c — константа.

Теорема 15. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $u(x, t)$ является решением задачи (104) и $d(u, \varphi)\,|_{t=0} < \delta_0$, то $d(u, \varphi) < \varepsilon$ для всех $t \in [0, \infty)$. [Здесь $d(u, \varphi)$ задается формулой (24)].

Доказательство. Существенную роль в доказательстве теоремы 15 будет играть нелинейный функционал

$$M(u) = \int (u_x^2 + (u^2 - a^2))^2\, dx,$$

который не зависит от t, когда u — решение (104) и $\lim u(x, 0) = a$ при $x \to +\infty$. В силу оценок (107) и (108) мы можем считать, не уменьшая общности, что $\lim u(x, 0) = a$ при $x \to +\infty$. Тогда $h \in H^1(R)$, т. е. $|||h|||_1 = \|h\|_1$, так как $\lim u = \lim \varphi = \pm a$ при $x \to \pm\infty$. Запишем $\Delta M = M(u) - M(\varphi)$ в форме

$$\Delta M = \int_{-\infty}^{\infty} [h_x^2 + 2(2 - 3\,\mathrm{ch}^{-2}(ay))\, a^2h^2]\, dx +$$
$$+ 4\int_{-\infty}^{\infty} \varphi h^3\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} h^4\, dx = M_1 + M_2 + M_3. \tag{109}$$

Из (109) в инвариантности ΔM по времени вытекает оценка

$$\Delta M \leqslant m\delta^2 + 2a\sqrt{2}\,\delta^3 + 2^{-1}\delta^4 = \gamma(\delta) = \gamma,$$

где

$$m = \max(1{,}4a^2). \tag{110}$$

Разложим h на четную и нечетную части: $h = f + g$. Можно показать, что имеют место следующие оценки:

$$M_1(g) \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} ((1/2)\, g_x^2 + 2a^2 g^2)\, dx; \quad M_1(f) \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} ((1/2)\, f_x^2 + a^2 f^2)\, dx; \tag{111}$$

$$M_1(h) = M_1(g) + M_1(f) \geqslant \int ((1/2)\, h_x^2 + a^2 h^2)\, dx; \tag{112}$$

$$M_2(h) \geqslant -4a \sup |h| \int_{-\infty}^{\infty} h^2\, dx \geqslant -a\, 2\sqrt{2}\, \| h \|_1 \| h \|^2. \tag{113}$$

Оценки (113) можно вывести, применяя спектральную теорию к задачам на собственные значения: $\psi'' + (12\mathrm{ch}^{-2} x + \lambda)\, \psi = 0$, $\psi(0) = 0$, $0 \leqslant x < \infty$; $\Theta'' + (6\mathrm{ch}^{-2} x + \lambda)\, \Theta = 0$, $\Theta'(0) = 0$; $0 \leqslant \leqslant x < \infty$, при этом используется условие (106).

Обозначим $p = p(t) = \| h_x \|$; $q = q(t) = \| h \|$. Отметим, что $q(t)$ является непрерывной функцией для $t \geqslant 0$. Из (109), (112) и (113) вытекает оценка

$$\Delta M \geqslant l\, (p^2 + q^2) - c_1 (p + q)\, q^2,\ l = \min (1/2,\ a^2)\ c_1 = 2^{3/2} a. \tag{114}$$

Из (109) и (110) вытекает, что

$$p^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h_x^2\, dx \leqslant \gamma + 2aq^2 + 4a\, (p + q)\, q^2.$$

Решая это неравенство относительно p, выводим

$$p \leqslant 2aq + [\gamma + 2a\, (aq^2 + 2q^3 + 2aq^4)]^{1/2} = Y(q). \tag{115}$$

Подставляя (115) в (114), получим

$$\gamma \geqslant \Delta M \geqslant l\, (p^2 + q^2) - c_1 (q + Y(q))\, q^2 \geqslant$$
$$\geqslant q^2 (l - c_1 Y(q)) - c_1 q^3 = Z(q). \tag{116}$$

Выберем δ_1 так, чтобы $Y(0) = \gamma(\delta)^{1/2} < l/c_1$ при $\delta < \delta_1$. Тогда $Z'(q) > 0$ на некотором интервале $(0,\ q_0)$ и, следовательно, функция $Z(q)$ будет расти от нуля до $Z_m = Z(q_0)$. Так как Z_m растет при $\gamma \to 0$, то существует такое δ_2, что $\gamma(\delta) < Z_m$ при $\delta < \delta_2$. Тогда в силу непрерывности $q(t)$ из (116) вытекает, что $q(t) \leqslant q_\gamma$, где q_γ — наименьший положительный корень уравнения $Z(q) = \gamma$. Отметим, что q_γ не зависит от t. Отсюда, возвращаясь к (116), получаем

$$lp^2 \leqslant \gamma + c_1 (v + Y(q))\, q^2 \leqslant \gamma + c_1 (q_\gamma + Y(q_\gamma))\, q_\gamma^2;$$
$$\| h \|_1^2 = p^2 + q^2 \leqslant q_\gamma^2 + (1/l)\, [\gamma + c_1 (q_\gamma + Y(q_\gamma))\, q_\gamma^2] = A(q_\gamma).$$

Так как $q_\gamma \to 0$ при $\gamma \to 0$, то для $\varepsilon > 0$ выберем δ_3 таким образом, чтобы при $\delta < \delta_3$ выполнялось условие $A(q_\gamma) < \varepsilon^2$. Тогда при $d(u,\ \varphi)\,|_{t=0} = \delta < \delta_0 = \min(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)$ получим окончательно $d(u,\ \varphi) = \| h \|_1 < \varepsilon$.

III. Уравнение Клейна—Гордона (25). К1) Допустим, что существует решение (25) вида уединенной волны $\psi(x, t) = \psi(y)$, $y = x - ct$; $|c| \neq 0$; $\lim \psi(x, t) = \psi^{\pm}$ при $x \to \pm\infty$; $|\psi'(y)| > 1$. Для определенности пусть $\psi'(y) > 0$ и, следовательно, $-\infty < \psi^- \leqslant \psi \leqslant \psi^+ < \infty$. Не уменьшая общности, можем считать, что $\psi^{\pm} = \pm 1$. В противном случае, делая замену

$$u = (2v - (\psi^+ + \psi^-))/(\psi^+ - \psi^-);\quad U(u) = 2/(\psi^+ - \psi^-)^2 V(v),$$

приходим к уравнению

$$u_{xt} - U'(u) = 0, \tag{117}$$

имеющему решение $\varphi(x, t) = (2\psi(y) - (\psi^+ + \psi^-))/(\psi^+ - \psi^-)$, $\varphi^{\pm} = \pm 1$; $\varphi' > 0$; $-1 \leqslant \varphi \leqslant 1$.

К2) Пусть u и φ удовлетворяют условиям: u и $\varphi \in C([0, \infty); X^2)$; $\varphi \in X^3$; $\lim u = \lim \varphi = \pm 1$ при $x \to \pm\infty$; $\lim u_t = 0$ при $x \to \pm\infty$. Тогда

$$c\varphi'' = U'(\varphi);\ c(\varphi')^2 = 2U(\varphi)\ (\text{если } U(\pm 1) = 0). \tag{118}$$

Потребуем, чтобы функция U удовлетворяла условиям:
(U1) условие нормировки $U(\pm 1) = 0$;
(U2) с $U(x) \geqslant 0$ при $|x| \leqslant 1$;
(U3) $U \in C^2(R)$ в некоторой окрестности интервала $[-1,1]$;
(U4) с $U''(\pm 1) > 0$;
(U5) с $\int U(u)\,dx < \infty$.

Тогда можно проверить, что $P(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_x^2\,dx$ и $E(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(u)\,dx$ не зависят от времени.

Обозначим

$$M(u) = P + aE = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + aU)\,dx, \tag{119}$$

где $a = 2/c$;

$$dq(u, \varphi)^2 = \inf_{\zeta \in R} \int [(u_x(x, t) - \varphi_x(x - \zeta, t))^2 + q(u(x, t) - \varphi(x - \zeta, t))^2]\,dx. \tag{120}$$

Отметим, что в силу условий К1) и К2) функция $u(x, t) - \varphi(x - \zeta, t) \in C([0, \infty); H^2)$ для любого $\zeta \in R$ и $dq(u, \varphi)$ является непрерывной функцией $t \geqslant 0$. Так же как в п. II разд. 4, можно показать, что существует конечная точка $\zeta = \zeta(t)$, в которой достигается inf в правой части (120).

Положим $u(x, t) = \varphi(x - \zeta, t) + h(x, t)$. Тогда из (U3) вытекает

$$U(u) = U(\varphi) + U'(\varphi) h + (1/2) U''(\varphi + sh) h^2, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1; \tag{121}$$

$$\Delta M = \int \left[h_x^2 + \frac{a}{2} U''(\varphi) h^2 \right] dx + \frac{a}{2} \int [U''(\varphi + sh) - U''(\varphi)] h^2 \, dx. \tag{122}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения $Lf = -f'' + (1/c) \times U''(\varphi) f$, $x \in R$, f ограничена. Из условия (U4) вытекает, что непрерывный спектр оператора L совпадает с множеством $\sigma_c(L) = [\lambda_0, \infty)$, где $\lambda_0 = \min [(1/c) U''(\pm 1), (1/c) U''(-1)] > 0$. Из (118) вытекает, что $\lambda = 0$ является собственным числом L с соответствующей собственной функцией φ', а так как $\varphi' \neq 0$, то, если есть другие собственные числа, они являются положительными.

Обозначим b первое положительное собственное число L или $b = \lambda_0$, если нет других собственных чисел, кроме нуля. Пусть $f \in H'(R)$, и пусть $\int f\varphi' \, dx = 0$. Тогда из спектрального разложения вытекает

$$(f, Lf) = \int_{-\infty}^{\infty} (f'^2 + (a/2) U''(\varphi) f^2) \, dx \geqslant b \int f^2 \, dx. \tag{123}$$

Отметим, что (f, Lf) определено для $f \in D_L$, однако вторая часть оценки вытекает из плотности D_L в $H^1(R)$. Нетрудно убедиться, что b не зависит от t, так как $\int f^2 \, dx$ инвариантен относительно сдвига. Обозначим $q = \max (1/c) U'(s)$. Из (U4) вытекает, что $q > 0$. Пусть $\int f\varphi' (q - (1/c) U''(\varphi)) = 0$, тогда имеет место оценка

$$I_1(f) = \int (f'^2 + (1/c) U''(\varphi) f^2) \, dx \geqslant (b/(1 + Kq)^2) \int f^2 \, dx. \tag{124}$$

Действительно, положим $f = \alpha\varphi' + \Theta$, где $\alpha = \mathrm{const}$ и $\int \Theta\varphi' \, dx = 0$. Тогда в силу (123) имеем

$$I_1(f) = I_1(\Theta) \geqslant b \, \| \Theta \|^2; \tag{125}$$

$$0 = \alpha \int \varphi'^2 (q - (1/c) U''(\varphi)) + \int \Theta\varphi' (q - (1/c) U''(\varphi)).$$

Отсюда вытекает $\| f \| \leqslant | \alpha | \, \| \varphi' \| + \| \Theta \| \leqslant (1 + K_q) \, \| \Theta \|$, где

$$K_q = \| \varphi' \| \, \| \varphi' (q - (1/c) U''(\varphi)) \| / \int \varphi'^2 (q - (1/c) U''(\varphi)) \, dx. \tag{126}$$

Подставляя последнее неравенство в (125), получаем оценку (124). Теперь воспользуемся тем, что минимум в (120) достигается в точке ζ.

Это дает условие $0 = \int h\,[q\varphi' - (1/c)\,U''(\varphi)]\,dx$, и, следовательно, в силу (124) имеем

$$I_1(h) \geqslant (b/(1+K_q)^2)\,\|h\|^2. \tag{127}$$

Из равномерной непрерывности U'' вытекает, что существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$U''(x+\tau) - U''(x) > -bc/(2\,(1+K_q)^2),\ |x| \leqslant 1;\ |\tau| \leqslant \delta_1. \tag{128}$$

Пусть $d_q(u, \varphi) \leqslant \delta_0 = \delta_1 q^{1/4}/\sqrt{2}$. Тогда $\|h\|^2_{L_\infty} \leqslant (2/q)\,d_q^2(u, \varphi) \leqslant \delta_1^2$, и, следовательно, из (127) и (128) вытекает, что, если $d_q(u, \varphi) \leqslant \delta_0$, имеет место оценка

$$\Delta M = I_1 + I_2 \geqslant (b/(2\,(1+K_q)^2))\,\|h\|^2. \tag{129}$$

С другой стороны, используя опять (121) и (128), выводим

$$U(\varphi+h) - U(\varphi) - U'(\varphi)\,h = \frac{h^2}{2}(U''(\varphi+sh) - U''(\varphi)) + {}$$
$$+ U''(\varphi)\frac{h^2}{2} \geqslant -\frac{1}{2}B_1,$$

где

$$B_1 = B + bc/(2\,(1+K_q)^2); \quad -B = \inf_{|x|\leqslant 1} U''(x).$$

Тогда из (122) и (129) вытекает

$$\Delta M \geqslant \max\left\{\frac{b\,\|h\|^2}{2\,(1+K_q)^2},\ \int (h_x^2 + qh^2)\,dx - \left(\frac{B_1}{c} + q\right)\|h\|^2\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \eta \int (h_x + qh^2)\,dx + \left[-\eta\left(\frac{B_1}{c} + q\right) + \right.$$
$$\left. + (1-\eta)\,\frac{b}{2\,(1+K_q)^2}\right]\|h\|^2, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Теперь выберем $\eta = K$, так чтобы второе слагаемое в правой части последнего неравенства равнялось нулю, т. е. $K = b/[2\,(B_2 + q)\,(1+K_q)^2 + b]$, где $B_2 = B_1/c$. Отметим, что $0 < K < 1$, так как

$$q + B_2 = -(1/c)\inf_{|x|\leqslant 1} U''(x) + b/(2\,(1+K_q)^2) + q \geqslant 0.$$

Таким образом, мы получим, что существуют константы δ_0, K и q такие, что при $d_q(u, \varphi) \leqslant \delta_0$ имеем $\Delta M \geqslant K\,d_q^2(u, \varphi)$.

Отсюда вытекает теорема 16.

Теорема 16. Пусть выполняются условия (K1), (K2), (U1) — (U5). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $d(u, \varphi)\,|_{t=0} < \delta$, то $d(u, \varphi) < \varepsilon$ для всех $t \in [0, \infty)$. (Здесь $d(u, \varphi) = \inf_{\zeta\in R} \|u(x, t) - \varphi(x - \zeta, t)\|$.)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Условия, выполнение которых предполагается при доказательстве теорем в обзоре, являются достаточными. По-видимому, в некоторых местах можно ослабить требования к гладкости решения. Однако такие исследования представляли бы больше экзотический интерес, так как условия, формулируемые в обзоре, близки к необходимым.

2. На физическом уровне строгости устойчивость уединенной волны $\varphi_c(x, t)$ исследуется путем поиска решения исходного уравнения в виде $u(x, t) = \varphi_c(x, t) + e^{i\omega t}\psi(x)$. Если в линейном приближении по ψ значения ω оказываются действительными или лежат в верхней полуплоскости, то $\varphi_c(x, t)$ считается устойчивым.

Таким образом, теория Ляпунова об устойчивости по линейному приближению наивно переносится на бесконечномерные пространства, и поэтому не учитывается наличие непрерывного спектра у дифференциального оператора линейной задачи.

В математической литературе многие исследования посвящены строгому аналогу теории Ляпунова в банаховых пространствах (см., например, [62]). В этих работах выводятся разные достаточные условия, при выполнении которых об устойчивости (неустойчивости) нелинейной задачи можно судить по устойчивости (неустойчивости) линейного приближения. Кроме того, при исследовании устойчивости линейного приближения необходимо учитывать и вклад непрерывного спектра дифференциального оператора линейной задачи. Однако для многих важных уравнений математической физики указанные выше достаточные условия не выполняются. Например, для уравнения КдФ решение линеаризованной задачи является неустойчивым (см. [30]). Этот эффект возникает из-за вклада непрерывного спектра дифференциального оператора линейной задачи. Однако решение нелинейной задачи устойчиво, как строго показано в разд. 1 настоящего обзора.

Другой пример. Чен и Кауп [63] при помощи линейной теории приближения получили неустойчивость односолитонного решения уравнения Бенжамена — Оно. Однако Бенет и др. в [64] используя метод Бенжамена, строго доказали устойчивость формы решения нелинейного уравнения Бенжамена—Оно. В этой работе анализируется ошибка Чена и Каупа. И в том и в другом случае вопрос об устойчивости требует строгого рассмотрения и все исследования на интуитивном уровне необходимо трактовать только как эвристические.

3. Выбор метрики (6) и (10) [эквивалентная форма (18)] естествен для уравнения КдФ, ББМ, НУШ и комплексного МКдФ, так как он позволяет сделать вывод об устойчивости уединенной волны в норме пространства Соболева (с точностью до сдвига в вещественном случае и с точностью до сдвига и вращения в комплексном) при достаточно малом начальном возмущении. В частности, в силу

неравенства Соболева получаем малость разницы возмущенного решения и решения уединенной волны в равномерной норме. Этот факт оправдывает использование терминов: устойчивость формы и орбитальная устойчивость формы. Точность до сдвига (до сдвига и вращения в комплексном случае) отражает инвариантность решений указанных выше уравнений относительно сдвига (соответственно сдвига и вращения). Подобный вывод можно сделать в случае устойчивости кинков (рассмотренной в разд. 4) относительно метрики (24). При этом аналогом неравенства Соболева является неравенство (23).

Для доказательств устойчивости уединенных волн, которые мы излагали, характерно наличие нелинейных функционалов, инвариантных относительно времени. При этом существенно, что уединенные волны реализуют условный минимум этих функционалов. Благодаря этому удалось оценить при помощи спектральной теории вторые вариации указанных выше функционалов.

4. Интересно провести строгое исследование устойчивости по отношению к внешним возмущениям, описываемым дополнительными членами в исходном нелинейном уравнении. Методы, используемые в настоящем обзоре, вероятно, не подходят для строгого исследования этого вопроса. Такое исследование выходит за рамки настоящего обзора. Авторам неизвестны строгие исследования в этой области.

5. В. Е. Захаров и А. Б. Шабат [13] применили метод обратной задачи и для решения НУШ при другом знаке нелинейного члена

$$iu_t + u_{xx} + 2u\,(a^2 - |u|^2) = 0; \quad u\,(x,\,0) = g\,(x), \quad a \in R. \tag{130}$$

Для этого уравнения естественно рассматривать не исчезающие на бесконечности начальные условия $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g\,(x) = g^{\pm}$; $|g^+|^2 = |g^-|^2 = a^2$ (см. [65]). Односолитонное решение (130) может быть записано в следующем виде:

$$\varphi\,(x,\ t) = c\left[\frac{1+b}{2} + \frac{1-b}{2}\,\mathrm{th}\,\mu\,(x - 2\nu t)\right]; \qquad b = \left(\frac{\nu + i\mu}{a}\right)^2, \tag{131}$$

где $c \in C$; ν и $\mu \in R$ и $\nu^2 + \mu^2 = a^2$.

Обозначим Y^s, $s \geqslant 1$, множество комплекснозначных функций $f\,(x)$ таких, что для каждой функции $f\,(x)$ существуют константы f^+ и f^-, для которых выполняется

$$\langle f\rangle_s^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} |f\,(x) - f^-|^2\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} |f\,(x) - f^+|\,dx + \sum_{k=1}^{s}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |d^kf/dx^k|^2\,dx < \infty.$$

Линейное пространство Y^s, $s \geqslant 1$, снабженное нормой $|f|_s^2 = |f^+|^2 + \langle f\rangle_s^2$, является банаховым пространством абсолютно непрерывных на любом конечном интервале функций $f(x)$, для которых $\lim f(x) = f^{\pm}$ при $x \to \pm\infty$.

Нетрудно показать, что имеет место оценка

$$|f^{\pm}| \leqslant \sup_{x\in R} |f(x)| \leqslant \mathrm{const}\, |f|_s.$$

Обозначим Y_a^s замкнутое подмножество функции $f \in Y^s$, для которых $|f^+|^2 = |f^-|^2 = a^2$. Пусть

$$g(x) \in Y_a^s,\ s \geqslant 1. \tag{132}$$

Используя регуляризованную задачу

$$\mathrm{i}\,(u_t - \varepsilon u_{xxt}) + u_{xx} + u\,(a^2 - |u|^2) = 0,$$

$$u(x, 0) = g(x) \in Y_a^s;\ 0 < \varepsilon \leqslant 1$$

можно доказать существование глобального решения $u(x, t)$ задачи Коши (130), (132), которое принадлежит $C([0, \infty); Y_a^s)$. Можно предположить, что, применяя спектральную теорию, удастся оценить вторую вариацию функционала

$$M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [|u_x|^2 + (|u^2| - a^2)^2]\, dx$$

($M(u)$ инвариантен по времени, когда $u(x, t)$ — решение (130), [132)] и доказать орбитальную устойчивость $\varphi(x, t)$. Этим вопросам будет посвящена отдельная статья.

6. Вероятно, результаты разд. 2 и 3 можно распространить на более широкий класс уравнений

$$iu_t + u_{xx} + U(|u|)\,u = 0; \qquad u_t + U(|u|)\,u_x + u_{xxx} = 0$$

в том случае, когда нелинейная функция $U(|u|)$: $R^+ \to R$ имеет степенной рост меньше четырех.

7. В ЛТФ ОИЯИ В. К. Мельниковым выполнен цикл работ [66—68], где рассматриваются нелинейные эволюционные уравнения, порождаемые операторным соотношением, обобщающим известное представление Лакса. Им проведено нестандартное исследование этих уравнений методом обратной задачи рассеяния. Так как класс нелинейных уравнений, изученных В. К. Мельниковым, обладает бесконечной серией законов сохранения, кажется возможным провести доказательство глобального существования решения задачи Коши для этих уравнений в различных пространствах Соболева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Whitham G. B.** Linear and Nonlinear Waves. N. Y.: John Wiley, 1974. (Имеется перевод: **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977).

2. **Теория** солитонов. Метод обратной задачи /Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1980.

3. **Solitons** in Action/Ed. by Lonngren K., Scott A. Acad. Press, 1978. (Имеется перевод: Солитоны в действии. М.: Мир, 1981).

4. **Solitons**/Ed. by R. K. Bullough, P. J. Cadrey, Springer, 1980. (Имеется перевод: Солитоны. М.: Мир, 1983).
5. **Scott A. C., Chu F. Y. F., McLaughlin D. W.**— Proc. IEEE, 1973, v. 61, p. 1443. (Имеется перевод: ТИИЭР, 1973, т. 61, № 10, с. 79).
6. **Makhankov V.**— Phys. Repts., 1978, v. 35, p. 1.
7. **Makhankov V.**— Comput. Phys. Commun, 1980, v. 21, № 1, p. 1.
8. **Захаров В. Е.**— В кн.: Теория упругих сред с микроструктурой /Под ред. И. А. Кунина. М.: Наука, 1975, с. 82.
9. **Фаддеев Л. Д.** Современные проблемы математики, 1974, т. 3, с. 93.
10. **Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.**— Studies in Appl. Math., 1974, v. 53, p. 249.
11. **Gardner C. S., Creene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.**— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095.
12. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.**— ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 1, с. 118.
13. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.**— ЖЭТФ, 1972, т. 34, с. 62.
14. **Новиков С. П.**— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 3, с. 54.
15. **Марченко В. А.**— Матем. сб., 1974, т. 95 (137), с. 331.
16. **Итс А. Р., Матвеев В. Б.**— ТМФ, 1975, т. 23, № 1, с. 61.
17. **Lax P. D.**— Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, p. 141.
18. **Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.**— Функц. анализ, 1971, т. 5, вып. 4, с. 18.
19. **Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.**— Phil. Trans. Roy Soc. Lond. A, 1972, v. 272, p. 47.
20. **Bona J. L., Smith R.**— Phil. Trans. Roy Soc. Lond., 1975, A, v. 278, p. 555.
21. **Temam R. J.**— Math. Pures et Appl., 1969, v. 48, p. 159.
22. **Dushane T. E.**— Proc. Symp. Pure Math., Am. Math. Soc., 1979, v. 23, p. 303.
23. **Saut J. C., Temam R.**— Israel J. Math., 1976, v. 24, p. 78.
24. **Saut J. C.-J.**— Math. Pures et Appl., 1979, v. 58, p. 21.
25. **Kato T.**— Lecture Notes in Math., 1975, v. 448, p. 25.
26. **Kato T.**— Manuscripta math., 1979, v. 28, p. 89.
27. **Bona J. L., Scott R.**— Duke Math. J., 1976, v. 43, p. 87.
28. **Cohen Murray A.**— Duke Math. J., 1978, v. 45, p. 149.
29. **Jeffrey A., Kakutani T.**— Indiana Univ. Math. J., 1970, v. 20, p. 463.
30. **Scharf G., Wreszinski W. F.**— Ann. Phys., 1981, v. 134, p. 56.
31. **Benjamin T. B.**— Proc. Roy Soc., 1972, v. A238, p. 153.
32. **Bona J. L.**— Proc. Roy Soc. Lond., 1975, v. A344, p. 363.
33. **Benjamin T. B.**— Lect. Appl. Math., AMS, 1974, v. 15, p. 3.
34. **McKean H. P.**— Comm. Pure Appl. Math., 1977, v. 30, p. 347.
35. **McKean H. P., van Moerbeke P.**— Inventiones Math., 1975, v. 30, p. 217.
36. **McKean H. P., Trubowitz E.**— Comm. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, p. 143.
37. **Trubowitz E.**— Ibid., 1977, v. 30, p. 325.
38. **Deift P., Trubowitz E.**— Ibid., 1979, v. 30, p. 347.
39. **Жидков Е. П., Илиев И. Д., Кирчев К. П.** Препринт ОИЯИ, Р5-83-771. Дубна, 1983.
40. **Cazenave T., Lions P. L.**— Comm. Math. Phys., 1982, v. 85, № 4, p. 549.
41. **Berestycki H., Cazenave T.**— Compt. Rend. Acad. Sci., 1981, v. 293, p. 489.
42. **Маханьков В. Г.**— ЭЧАЯ, 1983, т. 14, вып. 1, с. 123.
43. **Ginibre J., Velo G.**— J. Func. Anal., 1979, v. 32, № 1, p. 1.
44. **Ginibre J., Velo G.**— Ann. Inst. H. Poincare, 1978, v. A28, № 3, p. 287.
45. **Strauss W.**— Proc. Internat. Sympos., Inst. Math., Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977, North-Holland Math. Studies, 1978, v. 30, p. 452.
46. **Henry D., Perez J., Wreszinski W. F.**— Comm. Math. Phys., 1982, v. 85, № 3, p. 351.

47. **Fornberg B., Whitham G. B.**— Philos. Trans. Roy Soc. Lond. A, 1978, v. 289, p. 373.
48. **Wedati M.**— J. Phys. Soc. Jpn., 1972, v. 32, p. 1681.
49. **Жидков Е. П., Кирчев К. П.** Препринт ОИЯИ, Р5-81-130. Дубна, 1981; Журн. «Сердика», 1983, т. 9, с. 51.
50. **Жидков Е. П., Илиев И. Д., Кирчев К. П.** Препринт ОИЯИ, Р5-83-812, Дубна, 1983.
51. **Peregrine D. H.**— J. Fluid Mech., 1964, v. 25, p. 321.
52. **Бубнов Б. А.**— ДАН СССР, 1980, т. 251, 4, с. 77.
53. **Гуревич А. В., Питаевский А. П.**— Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 17, вып. 5, с. 268.
54. **Гуревич А. В., Питаевский А. П.**— ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 2, с. 8.
55. **Хруслов Е. Я.**— Матем. сб., 1976, т. 99 (141), с. 261.
56. **Ohmiya M. J.**— J. Math. Tokushima Univ., 1978, v. 12, p. 9.
57. **Жидков Е. П., Кирчев К. П.** Препринт ОИЯИ, Р5-82-183, Дубна, 1982.
58. **Жидков Е. П., Кирчев К. П.** Препринт ОИЯИ, Р5-80-136, Дубна, 1980.
59. **Stein E. M.** Singular Integrals and Diferentiability Properties of Functions. Princeton Math., Ser. № 30, 1970.
60. **Kruskal M. D. e.a.**— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 952.
61. **Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D.**— J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1204.
62. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
63. **Chen H. H., Kaup D. Y.**— Phys. Fluids, 1980, v. 23, p. 235.
64. **Bennet R. W. e.a.**— Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1983, v. 94, p. 351.
65. **Kawata T., Inoue H. J.**— Phys. Soc. Japan, 1978, v. 44, p. 1968.
66. **Мельников В. К.**— Матем. сб., 1979, т. 108, № 3, с. 378.
67. **Мельников В. К.**— ЭЧАЯ, 1980, т. 11, вып. 5, с. 1224.
68. **Мельников В. К.**— Матем. сб., 1983, т. 121 (163), № 4 (8), с. 469.