«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1985, ТОМ 16, ВЫП. 5

УДК 530.145

# СКРЫТЫЕ СИММЕТРИИ И ИХ ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

*Р. П. Зайков*

Институт ядерных исследований и ядерной энергетики, София

Рассматриваются двумерные классические релятивистски-инвариантные интегрируемые (допускающие бесконечное число законов сохранения) теоретико-полевые модели. Показано, что локальные сохраняющиеся токи для модели Тирринга, высшие тензоры энергии-импульса для сигма-моделей, синус-Гордона и Лиувилля и нелокальные сохраняющиеся токи для сигма-моделей (в том числе и суперсимметричной) имеют нетеровский характер. Соответствующие симметрии обычно называют скрытыми, потому что их не закладывали при построении модели. Для указанных выше моделей найден явный вид преобразований скрытых симметрий. Для сигма-моделей, модели Тирринга и всех конформно-инвариантных двумерных моделей выделены также преобразования, генераторы которых образуют бесконечномерную замкнутую алгебру.

We consider classical two-dimensional integrable (admitting infinite set of conserved laws) relativistic models. It is shown that the local conserved currents for the Thirring model and higher energy-momentum tensors for the sigma models, sine-Gordon, Liouville and the nonlocal currents for the sigma models (including the supersymmetric case) have a Noether character. The corresponding transformations usually are called hidden symmetry transformations because such a symmetry is not imposed in constructing the model. For the above mentioned models the explicit form of these transformations is found. For the sigma models, Thirring model, as well as for all two-dimensional conformally invariant models, we separate those transformations whose generators form an infinitedimensional algebra.

## ВВЕДЕНИЕ

Существует большой класс точно решаемых двумерных (с одной временной и одной пространственной координатой) нелинейных уравнений. Эти уравнения применимы как к гидродинамическим процессам, так и к различным явлениям в теории плазмы и нелинейной оптики. К этому классу относятся известные уравнения Кортевега — де-Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус-Гордона. Особый интерес представляют релятивистки-инвариантные нелинейные уравнения, которые сохраняют свою точную интегрируемость и на квантовом уровне. Таким образом, можно построить, по крайней мере, двумерные точно решаемые квантово-полевые модели. Для точно решаемых моделей, как правило, существуют бесконечные серии законов сохранения. Для некоторых моделей, например сигма-моделей, кроме локальных сохраняющихся величин существует еще и бесконечное число нелокальных законов сохранения [1, 2]. Тогда для нахождения точного решения и для соответствующей квантовой задачи можно использовать либо квантовый метод обратной задачи, либо в случае, когда высшие законы сохранения существуют и на квантовом уровне [3, 7], применить метод Замолодчикова [8] для нахождения точной $S$-матрицы.

Здесь мы ограничимся рассмотрением только классических релятивистских двумерных нелинейных точно решаемых уравнений, которые получаются из инвариантного действия и для которых существует бесконечное число сохраняющихся величин. Первая сохраняющаяся величина для этих моделей всегда получается по теореме Нетер как следствие изотопической инвариантности действия (для тока) или трансляционной инвариантности (для импульса). Тогда естественно предположить, что и остальные высшие сохраняющиеся величины имеют также нетеровский характер. Впервые это было показано для нелокальных токов в случае нелинейных сигма-моделей [9—11], где были найдены соответствующие преобразования. В [12] была построена бесконечная замкнутая алгебра генераторов этих преобразований. Из-за того что симметрия относительно таких преобразований не требовалась при построении действия, такая симметрия обычно называется скрытой.

В [13] обсуждается вопрос о существовании скрытых симметрий и найден явный вид преобразований, порождающих локальные сохраняющиеся величины для модели Тирринга [14, 15], сигма-моделей [15], а также для синус-Гордона и Лиувилля. Аналитический вывод коммутационных соотношений преобразований скрытой симметрии для киральных моделей был предложен в [16, 17]. Групповая структура преобразований скрытой симметрии, порождающей дополнительные серии нелокальных сохраняющихся токов для киральных моделей, найденных в [11] (см. также [9] для суперсимметричного случая), была исследована в [18].

Нелокальные сохраняющиеся токи для суперсимметричных сигма-моделей были получены в [19—22], а соответствующие преобразования скрытой симметрии — в [9]. Групповая структура этих преобразований исследовалась в [23, 24].

Необходимо отметить, что задача о нахождении скрытой симметрии указанного выше типа весьма похожа на задачи линеаризации нелинейных уравнений, рассматриваемых в [25, 26].

Все наши рассмотрения проводятся в пространстве Минковского с метрическим тензором $g_{00} = -g_{11} = 1$. Переход к евклидову пространству-времени делается без затруднений.

## 1. ЛОКАЛЬНЫЕ СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Чтобы продемонстрировать существование бесконечного набора локальных сохраняющихся величин, рассмотрим сначала безмассовую модель Тирринга, лагранжиан которой имеет вид

$$\mathscr{L}(x) = \mathrm{i}\,(\bar{\psi}\hat{\partial}\psi) - g\,(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)\,(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi), \tag{1}$$

где $\hat{\partial} = \gamma^{\mu}\partial_{\mu}$, а $\gamma_{\mu}$ — матрицы Дирака, для которых $\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2\,g_{\mu\nu}$. Для удобства здесь и в дальнейшем будем использовать следующее представление для $\gamma$-матриц:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_1\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $C$ — матрица зарядового сопряжения. Как известно, лагранжиан (1) инвариантен относительно обычных и $\gamma_5$ — глобальных калибровочных преобразований. Это можно легко проверить, переходя к переменным на световом конусе

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(x_0 \mp x_1), \tag{3}$$

в которых (1) принимает следующий вид:

$$\mathscr{L}(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi_1^* \overleftrightarrow{\partial_-} \psi_1) + \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi_2^* \overleftrightarrow{\partial_+} \psi_2) + g\,(\psi_1^*\psi_1)\,(\psi_2^*\psi_2). \tag{1a}$$

Здесь $\psi_1$, $\psi_2$ — компоненты двухкомпонентного дираковского спинора $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, а $*$ обозначает комплексное сопряжение. Тогда очевидно, что (1a) инвариантно относительно таких глобальных калибровочных преобразований, которые независимо преобразуют каждую из компонент $\psi$. То же самое относится и к случаю, когда $\psi$ преобразуется по неабелевой калибровочной группе. Тогда по теореме Нетер имеем один сохраняющийся векторный и один сохраняющийся аксиально-векторный ток

$$j_{\mu}(x) = \bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\,(x), \quad j_{\mu}^{5}(x) = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_{\mu}\psi = \varepsilon_{\mu\nu}j^{\nu}(x), \tag{4}$$

$$\partial^{\mu}j_{\mu}(x) = 0, \quad \partial^{\mu}j_{\mu}^{5}(x) = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^{\mu}j^{\nu}(x) = 0. \tag{5}$$

В переменных на световом конусе (3) имеем

$$j_+(x) = \psi_1^*\psi_1(x), \quad j_-(x) = \psi_2^*\psi_2(x), \tag{4a}$$

$$\partial_- j_+ x = 0, \; \partial_+ j_-(x) = 0. \tag{5a}$$

Отметим, что здесь не обсуждается вопрос о существовании соответствующих сохраняющихся зарядов.

Тогда из (5a) следует, что существует бесконечное число локальных сохраняющихся токов [3]:

$$\mathscr{Y}_+^{(k,\,m)}(x) = (\partial_+)^k\,(j_+)^m, \quad \mathscr{Y}_-^{(k,\,m)}(x) = (\partial_-)^k\,(j_-)^m, \tag{6}$$

$$\partial_+\mathscr{Y}_-^{(k,\,m)} = 0, \quad \partial_-\mathscr{Y}_+^{(k,\,m)} = 0. \tag{7}$$

Второй класс моделей, допускающих также бесконечное число локальных сохраняющихся величин, есть нелинейные сигма-модели.

Действие для этих моделей имеет вид

$$S=\frac{1}{2}\int d^2x\,\mathrm{tr}\,\{\partial^\mu g^{-1}(x)\,\partial_\mu g(x)\}=$$
$$=-\frac{1}{2}\int d^2x\,\mathrm{tr}\{A^\mu(x)\,A_\mu(x)\},\tag{8}$$

где поле $g(x)$ принимает свои значения в некоторой компактной группе $G$ или на симметричном пространстве $M = G/H$, где $H$ — подгруппа $G$ [27—29]. В первом случае имеем дело с главным киральным полем, а второй случай включает в себя $O(N)$-, $CP^{N-1}$- и другие киральные модели, для которых

$$g^2(x)=\mathrm{I}$$

и, следовательно, $g^{-1}(x)=g(x)$, т.е. существует представление

$$g(x)=\mathrm{I}-2\mathcal{P}(x),$$

где $\mathcal{P}^2(x)=\mathcal{P}(x)$ — поле с проективными свойствами. В (8) использовано обозначение

$$A_\mu(x)=g^{-1}(x)\,\partial_\mu g(x),\tag{9}$$

что представляет собой нетеровский сохраняющийся ток. Тогда уравнения движения можно записать как условие сохранения тока (9):

$$\partial^\mu A_\mu(x)=0.\tag{10}$$

Тот факт, что (10) на самом деле эквивалентно уравнению движения, проверяется подстановкой (9) в (10) с последующим умножением обеих частей слева на $g(x)$:

$$\Box\, g(x)+g\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g(x)=\Box\, g(x)-\partial^\mu g g^{-1}\partial_\mu g=0.\tag{10a}$$

Итак, мы действительно получили уравнение движения для обобщенных сигма-моделей.

Отметим, что действие (8) конформно-инвариантно, и, следовательно, сохраняющийся тензор энергии импульса

$$T_{\mu\nu}=\mathrm{tr}\,\{\partial_\mu g^{-1}\partial_\nu g+\partial_\nu g^{-1}\partial_\mu g-g_{\mu\nu}\partial g^{-}\partial_\lambda g\}$$

является симметричным тензором со следом нуль, т. е.

$$T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu},\quad T^\mu_\mu=0,\tag{11}$$
$$\partial^\mu T_{\mu\nu}=0.\tag{12}$$

В переменных на световом конусе эти условия принимают весьма простой вид

$$T_{+-}=T_{-+}=0,\tag{11a}$$
$$\partial_- T_{++}=0,\ \partial_+ T_{--}=0.\tag{12a}$$

Из (12a) следует, что величины [4]

$$\mathcal{T}_+^{(k,\,m)}=(\partial_+)^k\,(T_{++})^m,\quad \mathcal{T}_-^{(k,\,m)}=(\partial_-)^k\,(T_{--})^m\tag{13}$$

также сохраняются, т. е.

$$\partial_- \mathcal{T}_+^{(k,\ m)} = 0, \quad \partial_+ \mathcal{T}_-^{(k,\ m)} = 0.$$

Следовательно, для всех конформно-инвариантных моделей, в которых тензор энергии-импульса симметричен и имеет нулевой след, существует бесконечное число локальных сохраняющихся величин.

## 2. НЕЛОКАЛЬНЫЕ СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

В работе [1] было показано, что в случае $O(N)$ нелинейной сигма-модели существует бесконечное число сохраняющихся нелокальных токов. Простое конструктивное доказательство существования бесконечного числа нелокальных сохраняющихся токов для классических нелинейных сигма-моделей было дано в [2]. Приведем здесь это доказательство. Определим матричную ковариантную производную

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x), \tag{14}$$

где $A_\mu(x)$ задано формулой (9). Тогда из (9) и (14) следует, что

$$F_{\mu\nu}(x) = [D_\mu,\ D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu,\ A_\nu] = 0. \tag{15}$$

Кроме того, в случае, когда выполняются уравнения движения, имеет место следующее операторное тождество:

$$\partial^\mu D_\mu X(x) = D^\mu \partial_\mu X(x), \tag{16}$$

где $X(x)$ — произвольная гладкая матричная функция.

Пусть нам задан $k$-й сохраняющийся ток $\mathcal{Y}_\mu^k(x)$, $\partial^\mu \mathcal{Y}_\mu^{(k)} = 0$. Тогда $\mathcal{Y}_\mu^{(k)}$ всегда может быть представлен в виде

$$\mathcal{Y}_\mu^{(k)}(x) = \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \chi^{(k)}(x), \tag{17}$$

где $\chi^{(k)}(x)$ — гладкая матричная функция; $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ и $\varepsilon_{01} = 1$. Сделаем следующее предположение:

$$\mathcal{Y}_\mu^{(k+1)}(x) = D_\mu \chi^{(k)}(x) = (\partial_\mu + A_\mu)\, \chi^{(k)}(x) \qquad (k = 0,\ 1\ \ldots). \tag{18}$$

Докажем, что этот ток также сохраняется, если выполнены уравнения движения (10), т. е.

$$\partial^\mu \mathcal{Y}_\mu^{(k+1)}(x) = \partial^\mu (D_\mu \chi^{(k)}) = D^\mu \partial_\mu \chi^{(k)}(x) =$$
$$= -D_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \mathcal{Y}_\nu^{(k)}(x) = \varepsilon^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \chi^{(k-1)}(x) = 0.$$

Здесь мы использовали нулевую кривизну (15), а также тождество (16), которое выполняется только тогда, когда выполняется уравнение движения. Следовательно, начиная с $\chi^{(0)} = \mathbf{I}$, для которого в силу (18)

$$\mathcal{Y}_\mu^{(1)}(x) = A_\mu(x),$$

получаем бесконечную серию сохраняющихся токов. Например, $k$-й нелокальный ток имеет вид

$$\mathcal{Y}_{\mu}^{(k)}(x)=\varepsilon_{\mu\nu}A^{\nu}\chi^{(k-2)}+A_{\mu}\chi^{(k-1)}, \tag{19}$$

где

$$\chi^{(k)}(x)=\int_{-\infty}^{x_1} dy_1\mathcal{Y}_{0}^{(k)}(x_0,\ y_1). \tag{20}$$

Из (20) следует, что $k$-й сохраняющийся заряд есть значение $\chi^{(k)}(x)$ в точке $x_1=\infty$, т. е. $Q^{(k)}=\chi^{(k)}(x_0,\ \infty)$. И наконец, из (17) и (18) получаем следующую рекуррентную систему дифференциальных уравнений:

$$\partial_{\mu}\chi^{(k+1)}(x)=\varepsilon_{\mu\nu}(\partial^{\nu}+A^{\nu}(x))\,\chi^{(k)}(x). \tag{18a}$$

Условие интегрируемости этой системы имеет вид

$$\partial^{\mu}(\partial_{\mu}+A_{\mu}(x))\,\chi^{(k)}(x)=0, \tag{20a}$$

где мы учли нулевую кривизну (15) и тождество (16).

## 3. БЕСКОНЕЧНОЕ ЧИСЛО СОХРАНЯЮЩИХСЯ ТОКОВ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ СИГМА-МОДЕЛЕЙ

Конструктивное доказательство существования нелокальных сохраняющихся токов, данное в разд. 2 [2], было обобщено для суперсимметричных нелинейных сигма-моделей в [19—22]. Здесь мы приведем доказательство, данное в [20]. Для этого рассмотрим действие двумерной обобщенной суперсимметричной сигма-модели, которое имеет вид [31, 32]:

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int d^2x\,d^2\theta\,\mathrm{tr}\,\{\mathscr{D}^2\mathcal{G}^{-1}(x;\ \theta)\,\mathscr{D}_{\alpha}\mathcal{G}(x;\ \theta)=\\&=-\frac{1}{2}\int d^2x\,d^2\theta\,\mathrm{tr}\,\{(\mathcal{G}^{-1}\mathscr{D}^2\mathcal{G})\,(\mathcal{G}^{-1}\mathscr{D}_{\alpha}\mathcal{G})\},\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\mathscr{D}_{\alpha}=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}+\bar{\theta}\hat{\partial}j_{\alpha},\qquad \hat{\partial}=\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\quad(\alpha=1,\ 2)$$

— суперковариантная производная; для «дираковских» матриц использовано представление (2). Суперполе $\mathcal{G}(x;\ \theta)$ принимает свои значения в некоторой компактной группе $G$ или симметричном пространстве $M=G/H$, где $H$ — подгруппа группы $G$ [28—30]. В первом случае мы имеем дело с главным киральным суперполем, а второй случай включает в себя $O(N)$, $CP^{N-1}$ и другие суперсимметричные обобщения киральных моделей, для которых

$$\mathcal{G}^2(x;\ \theta)=\mathrm{I},\ \text{т. е. }\ \mathcal{G}^{-1}(x;\ \theta)=\mathcal{G}(x;\ \theta).$$

Из действия (21) получаем уравнение движения

$$\mathscr{D}^{\alpha}\mathscr{A}_{\alpha}(x;\ \theta)=0, \tag{22}$$

где

$$\mathscr{A}_{\alpha}(x;\ \theta)=\mathscr{G}^{-1}(x;\ \theta)\,\mathscr{D}_{\alpha}\mathscr{G}(x;\ \theta). \tag{23}$$

Как и в обычном случае, легко проверяется, что уравнение (22) эквивалентно уравнению движения для суперсимметричных киральных моделей

$$\mathscr{D}^{\alpha}\mathscr{D}_{\alpha}\mathscr{G}(x;\ \theta)+\mathscr{G}(x;\ \theta)\,\mathscr{D}^{\alpha}\mathscr{G}^{-1}(x;\ \theta)\,\mathscr{D}_{\alpha}\mathscr{G}(x;\ \theta)=0.$$

В терминах своих компонент поле $\mathscr{G}(x,\ \theta)$ записывается как

$$\mathscr{G}(x;\ \theta)=g(x)+\bar{\theta}\varphi(x)+\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\varkappa(x), \tag{24}$$

где $g(x)$ и $\varkappa(x)$ — скалярные поля, а $\varphi(x)$ — спинорное поле. Подставляя (24) в (23), выражаем компоненты спинорного супертока через компоненты поля

$$\left.\begin{aligned}
&a_{\alpha}(x)=\mathrm{i}g^{-1}(x)\,\varphi_{\alpha}(x);\\
&r(x)=\frac{\mathrm{i}}{2}\,\bar{\varphi}^{-1}(x)\,\gamma_5\varphi(x);\\
&v_{\mu}(x)=g^{-1}(x)\,\partial_{\mu}g(x)-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\bar{\varphi}^{-1}\gamma_{\mu}\varphi(x);\\
&b_{\alpha}(x)=-g^{-1}(x)\,(\hat{\partial}\varphi(x))_{\alpha}-(\gamma^{\mu}\varphi^{-1})_{\alpha}\,\partial_{\mu}g(x)+\\
&+\frac{\mathrm{i}}{2}\,[(\bar{\varphi}\varphi^{-1})\,\varphi_{\alpha}+\varphi_{\alpha}(\bar{\varphi}^{-1}\varphi)],
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — спинорные, $r(x)$ — псевдоскалярная и $v_{\mu}(x)$ — векторная компоненты $\mathscr{A}_{\alpha}(x;\ \theta)$. В силу уравнения (22) скалярная компонента $\mathscr{A}_{\alpha}(x;\ \theta)$ аннулируется, псевдоскалярная компонента остается полностью произвольной, а остальные компоненты удовлетворяют условиям:

$$\mathrm{i}\hat{\partial}a(x)=b(x),\quad \partial^{\mu}v_{\mu}(x)=0. \tag{26}$$

Уравнения (26) в случае, когда $a$, $b$, $v_{\mu}$ и $r$ определены формулой (25), эквивалентны уравнениям движения (22). Однако они выполняются и для любого сохраняющегося супертока.

Как мы видели в разд. 2, необходимым условием для существования бесконечного числа сохраняющихся нелокальных токов была нулевая кривизна. В суперсимметричном случае соответствующий тензор кривизны

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\alpha\beta}&=\{\nabla_{\alpha},\ \nabla_{\beta}\}=\mathscr{D}_{\alpha}\mathscr{A}_{\beta}+\mathscr{D}_{\beta}\mathscr{A}_{\alpha}+\mathscr{A}_{\alpha}\mathscr{A}_{\beta}+\mathscr{A}_{\beta}\mathscr{A}_{\alpha}=\\
&=2\mathrm{i}\,(C\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\,\mathscr{G}^{-1}(x;\ \theta)\,\partial_{\mu}\mathscr{G}(x;\ \theta)\qquad(\alpha,\ \beta=1,\ 2)
\end{aligned} \tag{27}$$

для любого $\alpha$ и $\beta$ вообще не аннулируется. Отличие от нуля некото рых из компонент тензора кривизны $\mathscr{F}_{\alpha\beta}$ есть проявление кручения в суперпространстве:

$$\{\mathscr{D}_\alpha, \mathscr{D}_\beta\} = 2\mathrm{i}\,(C\hat{\partial})_{\alpha\beta}.$$

В (27)

$$\nabla_\alpha = \mathscr{D}_\alpha + \mathscr{A}_\alpha\,(x;\ \theta)$$

обозначена матричная ковариантная производная. Из (22) и (27) следует, что

$$\mathscr{F}_{12} = \mathscr{F}_{21} = \mathscr{D}_1\mathscr{A}_2 + \mathscr{D}_2\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_1\mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_2\mathscr{A}_1 = 0. \tag{28}$$

Легко можно показать, что (28) является достаточным условием для существования сохраняющихся спинорных супертоков:

$$J_\alpha^{(k)}\,(x;\ \theta) = (\gamma_5\mathscr{D})_\alpha\, X^{(k)}\,(x;\ \theta) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{29}$$

где $X^{(k)}$ $(x,\ \theta)$ получается из рекуррентной зависимости

$$\mathscr{D}_\alpha X^{(k)}\,(x;\ \theta) = (\gamma_5\nabla)_\alpha\, X^{(k-1)}\,(x;\ \theta), \quad X^{(0)} = \mathbf{I} \quad (k = 1,\ 2\ \ldots). \tag{30}$$

Мы начинаем здесь с $X^{(0)} = \mathbf{I}$ и при этом из (29) имеем

$$J_\alpha^{(1)}\,(x;\ \theta) = A_\alpha\,(x;\ \theta).$$

Из (27), (28) и (30) получаем, что

$$\mathscr{D}^\alpha J_\alpha^{(k)}\,(x;\ \theta) = 0 \quad (k = 1,\ 2\ \ldots),$$

если выполнены уравнения движения (29), т. е. $\mathscr{D}^\alpha\mathscr{A}_\alpha = 0$.

Необходимо отметить, что для гладких функций $X^{(k)}$, вследствие уравнения движения (22) и условия (28), имеет место следующее тождество:

$$\nabla^\alpha\mathscr{D}_\alpha X^{(k)}\,(x;\ \theta) = \mathscr{D}^\alpha\nabla_\alpha X^{(k)}\,(x;\ \theta) = 0, \tag{31}$$

которое является условием интегрируемости системы (30). Если записать $X^{(k)}\,(x;\ \theta)$ в виде суперполя

$$X^{(k)}\,(x;\ \theta) = \chi\,(x) + \theta^\alpha\varkappa_\alpha\,(x) + \theta^1\theta^2\xi\,(x),$$

рекуррентная зависимость (30) по компонентам имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_\mu\chi^{(k+1)} = \varepsilon_{\mu\nu}\left\{(\partial^\nu + v^\nu(x))\,\chi^{(k)}\,(x) + \frac{1}{2}\bar{a}\,(x)\,\gamma^\nu\varkappa^{(k)}(x)\right\};\\
&\varkappa^{(k+1)}\,(x) = \gamma_5\varkappa^{(k)}\,(x) - \mathrm{i}\,(\gamma_5 a)\,\chi^{(k)}\,(x);\\
&\xi^{(k+1)}\,(x) = \mathrm{i}r\,(x)\,\chi^{(k)}\,(x) -\\
&-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\bar{a}\,(x)\,\gamma_5\varkappa^{(k)}\,(x) + \xi^{(k)}\,(x) \quad (k = 0,\ 1\ \ldots).
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Здесь учтено условие интегрируемости (31), а $a\,(x)$, $v_\mu\,(x)$ и $r\,(x)$ являются компонентами $\mathscr{A}_\alpha\,(x;\ \theta)$, заданными посредством (25).

Решения уравнения (32) для $k=0$, $\chi^{(0)} = \mathbf{I}$, $\varkappa^{(0)} = \xi^{(0)} = 0$ имеют вид

$$\chi^{(1)}(x) = -\int_{-\infty}^{x_1} dy_1 \left(g^{-1}\partial_0 g - \frac{i}{2}\bar{\varphi}^{-1}\gamma_0\varphi\right)(x_0, y_1);$$

$$\varkappa^{(1)}(x) = g^{-1}(\gamma_5\varphi);\ \xi^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\varphi^{-1}\gamma_5\varphi(x).$$

Следовательно, для общего члена последовательности находим:

$$\left.\begin{aligned} &\chi^{(k+1)}(x) = -\int_{-\infty}^{x_1} dy_1 \Big\{\partial_0\chi^{(k)} + \left(g^{-1}\partial_0 g - \frac{i}{2}\bar{\varphi}^{-1}\gamma_0\varphi\right)\chi^{(k)} + \\ &+ \frac{i}{2} g^{-1}\bar{\varphi}\gamma_5\gamma_0\varkappa^{(k)}\Big\}(x_0, y_1); \\ &\varkappa^{(k+1)}(x) = \gamma_5\varkappa^{(k)}(x) + \gamma_5\varphi^{-1}g\chi^{(k)}(x); \\ &\xi^{(k+1)}(x) = \xi^{(k)}(x) - \frac{1}{2}\bar{\varphi}^{-1}\gamma_5\varphi\chi^{(k)}(x) + \frac{1}{2}g^{-1}\bar{\varphi}\gamma_5\varkappa^{(k)}. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Подставляя (33) в (29), получаем соответствующие сохраняющиеся токи.

## 4. СКРЫТЫЕ СИММЕТРИИ В НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ

Как было показано в разд. 1 и 3 первая сохраняющаяся величина из полученных бесконечных серий имеет нетеровский характер. Она является следствием трансляционной или калибровочной инвариантности соответствующего действия, которую мы потребовали при построении модели. Тогда возникает естественный вопрос: существует ли симметрия действия, порождающаяся и высшие сохраняющиеся величины? Эта симметрия не закладывалась в модель, и поэтому мы будем называть ее скрытой симметрией. Сначала рассмотрим общие условия существования такого типа симметрий.

**Условие существования скрытых симметрий.** Предположим, что задан набор полей $\psi_\varkappa(x)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, M$), каждое из которых трансформируется при пространственно-временных преобразованиях:

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu\ (\mu = 0, 1, \ldots, D-1), \quad k \in K \quad (34)$$

в $D$-мерном пространстве-времени и глобальных калибровочных преобразованиях $G$ [$G = U(N)$, $N = 1, 2 \ldots$] по законам

$$\psi'_\varkappa(x) = \psi_\varkappa(x) + \delta_k\psi_\varkappa(x), \quad k \in K$$

и

$$\psi'_\varkappa(x) = U(g)\,\psi_\varkappa(x), \quad g \in G \quad (35)$$

соответственно. Здесь вариации $\delta_k x_\mu$ и $\delta_k\psi_\varkappa$ выражаются через бесконечно малые параметры преобразования формулами:

$$\delta_k x_\mu = X_\mu^{(l)}\delta\omega_l, \quad \delta_k\psi_\varkappa = \Omega_\varkappa^{(l)}\psi_\varkappa\delta\omega_l. \quad (36)$$

Предположим также, что для этих полей существует действие

$$S=\int d^D x L(\psi_\varkappa, \partial_\mu \psi_\varkappa), \tag{37}$$

инвариантное относительно преобразований из группы $G \otimes K$. Здесь $L$ — инвариантная функция Лагранжа, зависящая только от полей $\psi_\varkappa$ и от их первых производных $\partial_\mu \psi_\varkappa$.

Тогда по первой теореме Нетер [33] величина

$$\Theta_\mu^{(l)}=-\frac{\partial L}{\partial \partial^\mu \psi}(\Omega^{(l)}\psi-\partial^\nu \psi X_\nu^{(l)})-X_\mu^{(l)} L(x) \tag{38}$$

сохраняется, если выполнены уравнения движения

$$\frac{\partial L}{\partial \psi}-\partial^\mu \frac{\partial L}{\partial \partial^\mu \psi}=0. \tag{39}$$

Число этих величин равно числу независимых параметров $\delta\omega_l$.

Относительно преобразований скрытой симметрии, расширяющих группу $G \otimes K$, сделаем следующее предположение.

Предположение. Генераторы расширенной группы $G \otimes K$ — функции координат $x$, определяемые условием инвариантности действия

$$\delta S = 0 \tag{40}$$

без введения новых полей.

Здесь, как и обычно, условие (40) обеспечивается инвариантностью функции Лагранжа относительно рассматриваемых преобразований. Таким образом, исходя из заданной конечнопараметрической группы преобразований, мы приходим к некоторым, вообще говоря, бесконечнопараметрическим преобразованиям. Явный вид этих преобразований зависит от рассматриваемой модели и от способа расширения исходной группы. Здесь мы отдельно рассмотрим расширения внутренних и пространственно-временных преобразований.

*Обобщенные калибровочные преобразования.* Расширим глобальные калибровочные преобразования (35) следующим образом:

$$\psi'_\varkappa(x)=\exp\{i\eta_a^{\varkappa,k}(x)\,\omega_a^{\varkappa,k}\}\,\psi_\varkappa(x), \tag{41}$$

где $\eta_a^{\varkappa,k}(x)$ — $N \times N$-матричнозначные функции ($k=0, 1\ldots$; $\varkappa = 1, \ldots, M$). Рассмотрим для простоты случай одного (комплексного поля, т.е. $M=2$ (здесь поле и его комплексно-сопряженное обозначаются различными значениями индекса $\varkappa$). Тогда вариации лагранжиана при бесконечно малых преобразованиях (41) имеют вид

$$\delta L=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\varkappa=1}^{2}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{\varkappa,j}}\delta\psi_{\varkappa,j}+\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_{\varkappa,j}}\partial_\mu(\delta\psi_{\varkappa,j})\right)=$$

$$=i\sum_{j=1}^{N}\sum_{\varkappa=1}^{2}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial \psi_{\varkappa,j}}\psi_{\varkappa,l}+\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi_{\varkappa,j}}\partial_\mu \psi_{\varkappa,l}\right](\eta_a^{\varkappa,k}(x))_{jl}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi_{\varkappa,j}}\psi_{\varkappa,l}\partial_\mu(\eta_a^{\varkappa,k}(x))_{jl}\right\}\delta\omega_a^{k\varkappa}=\mathrm{tr}\,(j^\mu \partial_\mu \eta_a^k)\,\delta\omega_a^k. \tag{42}$$

Здесь $\delta\omega_a^{k,\,1} = -\delta\omega_a^{k,\,2} = \delta\omega_a^k$ и

$$j_\mu^{jl}(x) = \mathrm{i}\left(\frac{\partial L}{\partial\partial^\mu\psi_j}\psi_l - \bar\psi_j\frac{\partial L}{\partial\bar\psi_l}\right) \quad (j,\ l = 1,\ \ldots,\ N)$$

— нетеров сохраняющийся ток, порождаемый инвариантностью лагранжиана относительно глобальных калибровочных преобразований $G$. Последнее означает выполнение равенства

$$\sum_{j,\ l=1}^{N}\sum_{\varkappa=1}^{2}\left(\frac{\partial L_j}{\partial\psi_{j,\,\varkappa}}\psi_{l,\,\varkappa} + \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_{j,\,\varkappa}}\partial_\mu\psi_{l,\varkappa}\right)(\eta_a^{\varkappa,\,k}(x))_{jl}\delta\omega_a^{\varkappa,\,k} = 0,$$

что и было учтено в (42). Следовательно, условие инвариантности лагранжиана относительно преобразований (41) без привлечения компенсирующих полей имеет вид

$$\mathrm{tr}\,\{j^\mu(x)\,\partial_\mu\eta_a^{(k)}(x)\} = 0. \tag{43}$$

Подчеркнем, что при получении (43) не использовались уравнения движения, т.е. (43) обеспечивает инвариантность лагранжиана для любых полей.

Очевидно, что уравнение (43) всегда имеет тривиальное решение, $\eta_a^0 = T_a$, которое приводит к исходной группе $G$. Вопрос о существовании нетривиальных решений обсуждается в разд. 2.

В этом случае имеет место следующая теорема.

**Теорема Нетер:** Для любого обобщенного однопараметрического преобразования калибровочного типа (41), для которого генераторная функция удовлетворяет (42), существует величина

$$\mathscr{Y}_{\mu,\,a}^{(k)}(x) = \mathrm{tr}\,(j_\mu(x)\,\eta_a^{(k)}(x)), \tag{44}$$

которая сохраняется

$$\partial^\mu\mathscr{Y}_{\mu,\,a}^{(k)}(x) = 0,$$

если выполнены уравнения движения (39).

*Обобщенные трансляции.* Напомним, что исходная функция Лагранжа $L(\psi,\,\partial_\mu\psi)$ не зависит явно от $x$. Тогда условие инвариатности действия (34) относительно обобщенных трансляций, когда $\delta x_\mu$ зависит от $x$, а полная вариация поля (33) равна нулю, как и при обычных трансляциях ($\Omega^{(k)} = 0$), имеет вид

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^Dx\,\{\partial^\mu(\delta x_\mu)\,L(x) + \partial^\mu L(x)\,\delta x_\mu + \bar\delta\,L(x)\} = \\ &= \int d^Dx\left\{\partial^\mu(L\delta x_\mu) + \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial_\mu\overline{\delta\varphi} + \frac{\partial L}{\partial\varphi}\bar\delta\varphi\right\} = \\ &= \int d^Dx\left\{\partial^\mu(L\delta x_\mu) - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial^\mu\partial^\nu\varphi\delta x_\nu - \right. \\ &\qquad\left. - \frac{\partial L}{\partial\varphi}\partial^\nu\varphi\delta x_\nu - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\delta x_\nu\right\} = \\ &= \int d^Dx\left\{Lg^{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial_\mu\varphi}\partial^\nu\varphi\right\}\partial_\mu\delta x_\nu = -\int d^Dx T^{\mu\nu}\partial_\mu\delta x_\nu = 0,\end{aligned} \tag{45}$$

где вообще рассматривается $D$-мерное пространство-время и учтена трансляционная инвариантность лагранжиана, т.е.

$$\partial_\mu L\,(x) - \frac{\partial L}{\partial \partial^\nu \varphi}\,\partial_\mu \partial^\nu \varphi - \frac{\partial L}{\partial \varphi}\,\partial_\mu \varphi = 0$$

и

$$\delta\varphi = \varphi'\,(x') - \varphi\,(x') = -\partial^\mu \varphi \delta x_\mu = -X_\mu^{(K)}\,j^\mu \varphi \delta\omega_k \tag{46}$$

является вариацией от поля по форме. Из (44) получаем одно достаточное условие на $X_\mu^{(\varkappa)}$, т. е.

$$T^{\mu\nu}\,\partial_\mu\,X_\nu^{(\varkappa)}\,(x) = 0. \tag{45a}$$

Следовательно, имеет место следующая теорема.

**Теорема Нетер:** Для каждого однопараметрического преобразования (36), генераторы которого удовлетворяют условию (45), т.е. которое сохраняет действие рассматриваемой модели, существует величина

$$T^{\mu\,(\varkappa)}\,(x) = T^{\mu\nu} X_\nu^{(\varkappa)}\,(x), \tag{47}$$

которая сохраняется, т.е.

$$\partial_\mu T^{\mu\,(\varkappa)}\,(x) = 0, \tag{48}$$

когда выполняются уравнения движения.

Уравнение (46) всегда имеет тривиальное решение $X$ = const, которое дает обычные трансляции. Как мы увидим ниже, в некоторых случаях это уравнение имеет также и нетривиальные решения.

*Обобщенные преобразования Лоренца.* В этом случае сделаем дополнительное предположение, что

$$\left.\begin{aligned} X_\mu^{\nu,\,\lambda}\,(x) &= R^{(k)}\,(x)\,[x^\nu \delta_\mu^\lambda - x^\lambda \delta_\mu^\nu], \\ \Omega_{\mu\nu}^{(k)}(x) &= R^{(k)}\,(x)\,[x_\mu \partial_\mu - x_\nu \partial_\mu], \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где $R\,(x)$ — функция, которая определяется из требования инвариантности действия, сводящегося при этом к следующему:

$$M_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu R^{(k)}\,(x) = 0 \quad (k = 0,\ 1\ \ldots). \tag{50}$$

Здесь $M_{\mu\nu\lambda}$ — сохраняющийся тензор релятивистского момента и спина. Отметим, что при получении условия инвариантности (50) использовалась только инвариантность действия относительно обычных преобразований Лоренца. Ясно, что $R^{(0)}$ = const есть тривиальное решение (50). Аналогичным образом могут быть расширены масштабные и специальные конформные преобразования для конформно-инвариантных моделей.

Следовательно, и здесь имеет место следующая теорема.

**Теорема Нетер:** Для любого однопараметрического обобщенного преобразования Лоренца (36), генераторы которого (49) удовлетворяют условиям инвариантности действия (50), существует одна величина

$$M_{\mu\nu\lambda}^{(k)} = M_{\mu\nu\lambda} R^{(k)}\,(x) \quad (k = 0,\ 1\ \ldots), \tag{51}$$

которая сохраняется, т. е.

$$\partial^{\mu} M^{(k)}_{\mu\nu\lambda}(x) = 0,$$

когда выполняются соответствующие уравнения движения.

На генераторные функции $\eta^{(k)}_a(x)$, $X^{(k)}_{\mu}(x)$ и $R^{(k)}(x)$ наложим такие граничные условия, которые обеспечат существование соответствующих интегралов движения:

$$Q^{(k)} = \int d^{D-1}x \mathcal{Y}^{(k)}_0(x), \quad P_{\lambda} = \int d^{D-1}T^{(k)}_{0\lambda}(x),$$

$$M^{(k)}_{\mu\nu} = \int d^{D-1}x M_{0\mu\nu}(x) \quad (k = 0,\ 1\ \ldots),$$

где $\mathcal{Y}^{(k)}_{\mu}$, $T^{(k)}_{\mu\lambda}$ и $M^{(k)}_{\mu\nu\lambda}$ заданы формулами (44), (47), (51) соответственно. Для этой цели достаточно потребовать, чтобы $\eta^{(k)}(x)$, $X^{(k)}_{\mu}(x)$ и $R^{(k)}(x)$ были ограничены на пространственной бесконечности, т. е.

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} |\eta^{(k)}| \leqslant M_1 < \infty, \quad \lim_{x_1 \to \pm\infty} |X^{(k)}_{\mu}| \leqslant M_2 < \infty,$$

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} |R^{(k)}| \leqslant M_3 < \infty. \tag{52}$$

Наконец отметим, что здесь мы потребовали инвариантности действия только в сильном смысле, т.е. $\delta S = 0$. Однако, как известно, можно ослабить это условие, приравняв $\delta S$ интегралу от полной дивергенции некоторого вектора $W^{(k)}_{\mu}$, как, например, в нелинейной сигма-модели

$$\delta S = \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} \{\partial^{\mu} (A_{\mu} \chi^{(k)}_a)\} \delta\omega^{(k)}_a$$

(см. разд. 5). Вид такого вектора необходимо выбирать в зависимости от конкретной модели. В этом случае соответствующие сохраняющиеся величины имеют вид

$$\tilde{\Theta}^{(k)}_{\mu} = \Theta^{(k)}_{\mu} - W^{(k)}_{\mu}, \tag{53}$$

где $\Theta^{(k)}_{\mu}$ задается формулой (38). Кроме того, отметим, что в некоторых случаях решения уравнений (43), (45) и (50) могут быть найдены только на подпространстве решений уравнения движения, т. е. на экстремалях. Как было показано в [33], такая ограниченная симметрия также обеспечивает существование сохраняющихся величин (44), (47), (51).

## 5. НЕТЕРОВСКИЙ ХАРАКТЕР НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СОХРАНЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН

**Обобщенные «локальные» калибровочные преобразования.** Рассмотрим двумерную модель, инвариантную относительно глобальных калибровочных и $\gamma_5$-калибровочных преобразований, для которой, следовательно, ток $j_{\mu}$ и аксиальный ток $j^5_{\mu}$ сохраняются, т. е. выполняются уравнения (5). Примерами здесь могут служить безмассовая модель Тирринга, для которой $j_\mu$ и $j^5_\mu$ задаются формулами (4), а также свободное спинорное поле, модель Швингера и т. д. Отметим, что для всех моделей, удовлетворяющих уравнениям непрерывности (5), имеется бесконечное число законов сохранения, т. е. величины (6) удовлетворяют также уравнениям непрерывности (7). Чтобы получить высшие сохраняющиеся токи (6) по теореме Нетер, рассмотрим следующие калибровочные преобразования:

$$\psi'_\alpha(x)=U_\alpha(x)\,\psi_\alpha(x)=\exp\{i\zeta_\alpha(x)\}\,\psi_\alpha(x)\quad(\alpha=1,\ 2),\tag{54}$$

т. е. спинор $\psi(x)$ преобразуется по-компонентно. Отметим, что преобразования (54) не нарушают релятивистскую инвариантность, поскольку при преобразованиях Лоренца $\psi$ преобразуется по закону

$$\psi_1\to e^{\Lambda/2}\psi_1,\quad \psi_2\to e^{-\Lambda/2}\psi_2,$$

т. е. каждая компонента спинора $\psi$ преобразуется порознь. Условие (43) инвариантности действия относительно преобразований (54) принимает вид

$$\mathrm{tr}\,\{j_+(x)\,\partial_-\zeta_1(x)\}=0,\quad \mathrm{tr}\,\{j_-(x)\,\partial_+\zeta_2(x)\}=0.\tag{55}$$

Общее решение условия (55) задается посредством

$$\zeta_1(x)=F_1(x_+,\ \omega_-^{(k)}),\ \zeta_2(x)=F_2(x_-,\ \omega_+^{(k)}),\tag{56}$$

где $F_{1,2}$ — произвольные скалярные функции, удовлетворяющие граничному условию (52), а $\omega^{(k)}$ — инфинитезимальные тензорные параметры ранга $k$ (лоренцевой размерности $k$). В частности, выберем $F_{1,2}$ в виде

$$\left.\begin{aligned}F_1&=\sum_w h_1^{(-m)}(j_+,\ \ldots)\,\omega_+^{1(m)}+\sum_w h_1^{(m)}(j_+,\ \ldots)\,\omega_-^{1(m)},\\ F_2&=\sum_w h_2^{(-m)}(j_-,\ \ldots)\,\omega_-^{2(m)}+\sum_w h_2^{(m)}(j_-,\ \ldots)\,\omega_-^{2(m)},\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

где из-за того, что скалярные функции $F_{1,2}$ имеют лоренцеву размерность нуль, $h_1^{(-m)}$ и $h_2^{(m)}$ имеют лоренцеву размерность $-m$, $h_2^{(-m)}$ и $h_1^{(m)}$ — размерность $m$ соответственно и $\omega_\pm^{(m)}$ — параметры с лоренцевой размерностью $\pm m$.

Из (57) следует, что локальные полиномиальные сохраняющиеся величины порождаются следующими генераторами:

$$h_1^{(m,n)}(x_+)=(\partial_+)^m\,(j_+)^n;\quad h_2^{(m,n)}(x_-)=(\partial_-)^m\,(j_-)^n.\tag{58}$$

В неабелевом случае токи $j_\mu$ являются матрицами. Тогда генераторы «локальных» калибровочных преобразований (54) имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1^{(m,n)}(x)&=h_{a,1}^{(m,n)}(x_+)\ \omega_-^{a(m+n)};\\ \zeta_2^{(m,n)}(x)&=h_{a,2}^{(m,n)}(x_-)\ \omega_+^{a(m+n)},\end{aligned}\right\}\tag{59}$$

где

$$\left.\begin{aligned}h_{a,1}^{(m,n)}&=(\partial_+)^{k_1}j_+^{l_1}\ldots(\partial_+)^{k_q}j_+^{l_q}T_a\,(\partial_+)^{k_{q+1}}j_+^{l_{q+1}}\ldots(\partial_+)^{k_n}j_+^{l_n},\\ h_{a,2}^{(m,w)}&=(\partial_-)^{k_1}j_-^{l_1}\ldots(\partial_-)^{k_q}j_-^{l_q}T_a\,(\partial_-)^{k_{q+1}}j_-^{l_{q+1}}\ldots(\partial_-)^{k_n}j_-^{l_n}.\end{aligned}\right\}\tag{60}$$

Здесь $k_j$ и $l_j$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} k_j = m, \quad \sum_{j=1}^{n} l_j = n.$$

Тогда теорема Нетер указывает на то, что токи

$$\mathscr{Y}_{a,+}(x) = \mathrm{tr}\,(j_+ h_{a,1}), \quad \mathscr{Y}_{a,-}(x) = \mathrm{tr}\,(j_- h_{a,2}), \tag{61}$$

где $h_{1,2}$, заданные уравнениями (56) — (58) или (60), сохраняются, если выполнены уравнения движения (39).

Отметим, что (57) — (59) удовлетворяют условию инвариантности лагранжиана только на экстремалях. Однако можно выделить класс функций, которые удовлетворяют уравнению (55) с точностью до полной производной для произвольных полевых конфигураций. Очевидно, что в абелевом случае здесь пригодны все $h^{(0,n)}(x)$ (58). В неабелевом случае комбинации

$$h^{(0,\ n)}_{\pm;\ a} = j^n_\pm T_a + T_a j^n_\pm + (n-1)\, j_\pm T_a j^{n-1}_\pm, \tag{60a}$$

построенные из (60), также изменяют лагранжиан на полную производную для произвольных полей $\partial^\mu j_\mu \neq 0$.

**Обобщенные трансляции.** В двумерных конформно-инвариантных теоретико-полевых моделях для тензора энергии-импульса выполняются условия (11), т. е. он является симметричным (улучшенным) и бесследовым. Как видно из разд. 1, в этом случае имеется бесконечное число сохраняющихся величин типа (13).

Чтобы получить величины (13) по теореме Нетер (47), запишем условие инвариантности действия (45) в переменных на световом конусе. В рассматриваемом здесь случае уравнения (45) приобретают весьма простой вид

$$T_{++}\partial_- X^{(k)}_-(x) = 0, \quad T_{--}\partial_+ X^{(k)}_+(x) = 0. \tag{61a}$$

Очевидно, что

$$X_\pm = \mathrm{const}$$

является тривиальным решением (61). Общее решение уравнения (61) задается в виде

$$X^{(k)}_+ = X^{(k)}_+(x_-), \quad X^{(k)}_- = X_-(x_+), \tag{62}$$

где $X_{+(-)}$ — произвольные функции от $x_{+(-)}$ соответственно, которые удовлетворяют граничным условиям (52).

В частном случае (62) могут быть выбраны в виде

$$X^{(k,\ m)}_-(x) = (\partial_+)^k\,(T_{++})^m, \quad X^{(k,\ m)}_+(x) = (\partial_-)^k\,(T_{--})^m. \tag{63}$$

Из (36) и (63) следует, что $\omega^{(k,\ m)}_{+(-)}$ преобразуется как — (+) компонента лоренцева тензора ранга $k + 2m + 1$.

Теорема Нетер дает бесконечное число сохраняющихся величин

$$\mathscr{T}^{(k,\ m)}_+ = T_{++} X^{(k,\ m)}_-, \quad \mathscr{T}^{(k,\ m)}_- = T_{--} X^{(k,\ m)}_+,$$

где $X_{\pm}^{(k,m)}$ заданы формулами (62) или (63). Соответствующие интегралы движения имеют вид

$$P_{+(-)}^{(k,m)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, T_{++(--)} X_{-(+)}^{(k,m)}.$$

Таким образом, мы показали, что и высшие сохраняющиеся тензоры энергии-импульса также могут быть получены из теоремы Нетер. Они порождаются координатными преобразованиями (36), где генераторы $X_{\mu}^{(k)}$ заданы посредством (62) или (63), относительно которых поля $\varphi_j(x)$ преобразуются по закону (46).

Необходимо отметить, что для интегралов движения $P_{\pm}^{(k,m)}$ равны нулю канонические скобки Пуассона

$$\{P_{\pm}^{(k,m)},\ P_{\pm}^{(k',m')}\} = 0,$$

т. е. они находятся в инволюции. Однако генераторы преобразований полей (46)

$$\mathcal{P}_{\pm}^{(k,m)} = X_{\pm}^{(k,m)} \partial_{\pm}$$

вообще не коммутируют между собой относительно обычного коммутатора

$$[\mathcal{P}_{\pm}^{(k,m)}(x),\ \mathcal{P}_{\pm}^{k',m'}(x)] \neq 0.$$

Следовательно, здесь $\mathcal{P}_{\pm}^{(k,m)}$ не являются представлением алгебры интегралов движения. В разд. 8 мы обсудим эту алгебру. Если модель не является конформно-инвариантной, то условие инвариантности запишется в слабом виде, т.е.

$$T^{\mu\nu} \partial_{\mu} X_{\nu}^{(k)}(x) = \partial^{\mu} W_{\mu}^{(k)}(x), \tag{64}$$

где $W_{\mu}$ — произвольная векторная функция.

В качестве примеров рассмотрим модели скалярных полей, для которых лагранжиан имеет вид

$$L(x) = \frac{1}{2} \partial_+ \varphi \partial_- \varphi - V(\varphi),$$

где $V(\varphi)$ — произвольная функция $\varphi$. Соответствующие уравнения движения и тензор энергии-импульса задаются в виде

$$\varphi_{+-} = -\partial V / \partial \varphi, \tag{65}$$

$$T_{++} = \frac{1}{2} (\varphi_+)^2,\ T_{--} = \frac{1}{2} (\varphi_-)^2,\ T_{+-} = T_{-+} = V(\varphi). \tag{66}$$

Решения уравнения (64) будем искать в виде

$$X_{+}^{(k)} = g_{+-} \varkappa_{-}^{(2k)},\ X_{-}^{(k)} = g_{-+} \varkappa_{+}^{(2k)},$$

где $g_{+-} = g_{-+} = 1$ и $\varkappa_{\pm}^{(2k)}$ суть $\pm$ -компоненты тензора с лоренцевой размерностью $\pm 2k$. Явный вид $\varkappa_{\pm}$ зависит от конкретной модели.

Рассмотрим два частных случая. Первый задается взаимодействием $V = \alpha \exp \beta\varphi(x)$, где $\alpha$ — константа связи с размерностью квадрата массы и $\beta$ — безразмерная постоянная. Тогда из (64) с учетом (65) и (66) находим

$$\varkappa_{\pm}^{(2)}(x) = \frac{(\varphi_{\pm\pm})}{(\varphi_{\pm})^2} + \frac{1}{4}\beta^2(\varphi_{\pm})^2 - \beta\varphi_{\pm\pm}. \tag{67}$$

Подставляя последнее в (47), получаем $T_{\pm\pm\pm\pm} = \left(\varphi_{\pm\pm} - \frac{1}{2}\beta(\varphi_{\pm})^2\right)^2$, $T_{\mp\pm\pm\pm} = 0$. Аналогичным образом получаются и остальные генераторы $\varkappa_{\pm}^{(2k)}$.

Второй случай — это модель синус-Гордона [35], для которой $V = \alpha(\cos\beta\varphi - 1)$. Тогда имеем соответственно

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa_{\pm}^{(2)} = \frac{(\varphi_{\pm\pm})^2}{(\varphi_{\pm})^2} - \frac{\beta^2}{4}(\varphi_{\pm})^2, \\ &T_{\pm\pm\pm\pm} = (\varphi_{\pm\pm})^2 - \frac{\beta^2}{4}(\varphi_{\pm})^2, \quad T_{\mp\pm\pm\pm} = \alpha(\varphi_{\pm})^2\cos\beta\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Отметим, что трансляции с генераторами (67) и (68) являются симметриями (в слабом смысле) только на экстремалях.

## 6. НЕТЕРОВСКИЙ ХАРАКТЕР НЕЛОКАЛЬНЫХ СОХРАНЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН

**Обобщенные нелокальные абелевы калибровочные преобразования.** В двумерном пространстве-времени, если $G$ — абелева группа, уравнение (43), в принципе, всегда может быть проинтегрировано. Отметим, что, как было показано выше, для нахождения сохраняющихся токов достаточно иметь явный вид этих решений только в случае $\partial^\mu j_\mu = 0$, т. е. на экстремалях. В последнем случае дифференциальное уравнение характеристик, соответствующее уравнению (43) (для $D = 2$), непосредственно сводится к уравнению для полного дифференциала. Первый интеграл этого уравнения можно записать в виде

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1 j_0(y_1, x_0). \tag{69}$$

Как известно, общее решение (43) имеет вид $\eta(x) = F[\Phi(x)]$, где $F$ — произвольная функция. Из (69) следует, что $\Phi(x_0, \infty) = Q$ есть первый сохраняющийся заряд, и, следовательно, $\eta^{(1)} = \Phi$ удовлетворяет граничному условию (52), если первый заряд существует.

Можно проверить, что скобки Пуассона генераторных функций (69) обращаются в нуль, т. е. они порождают бесконечнопараметрическую абелеву группу. Следовательно, соответствующие им заряды находятся в инволюции.

**Явный вид генераторных функций в неабелевом случае.** В двумерном случае, если калибровочная группа $G$ неабелева, условие инвариантности (43) может быть записано в следующих эквивалентных формах:

$$\partial_\mu \eta_a^{(k)}(x) = \varepsilon_{\mu\nu}\{j^\nu(x),\ \chi_a^{(k)}(x)\}, \tag{70}$$

или

$$\partial_\mu \eta_a^{(k)}(x) = [j_\mu(x),\ \tilde{\chi}_a^{(k)}(x)], \tag{71}$$

где $\eta_a^{(k)}(x)$ и $\chi_a^{(k)}$ — матричные функции, а $\{,\}$, $[,]$ — матричный антикоммутатор и коммутатор соответственно. Ограничение на функции $\chi$ и $\tilde{\chi}$ получаем из условий интегрируемости уравнения (70) и (71), которые имеют вид

$$\partial^\mu \{j_\mu(x),\ \chi_a^{(k)}(x)\} = 0, \tag{72}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu \{j_\nu(x),\ \tilde{\chi}_a^{(k)}(x)\} = 0. \tag{73}$$

На подпространстве решений уравнений движения (когда $\partial^\mu j_\mu = 0$ или $\partial^\mu j_\mu^5 = 0$) обозначим тривиальные решения уравнения (43) $C_a$ и $\tilde{C}_a$ соответственно. Подставляя эти постоянные в правые части (70) и (71) [$C_a$ и $\tilde{C}_a$ удовлетворяют условиям интегрируемости (72) и (73)], получаем следующие решения этих уравнений:

$$\eta_a^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 \{j_0(x_0,\ y_1),\ T_a\}; \tag{74}$$

$$\tilde{\eta}_a^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 [j_0(x_0,\ y_1),\ T_a], \tag{75}$$

где мы подставили $C_a = \tilde{C}_a = T_a$. Подставляя (74) и (75) в выражение для сохраняющегося тока (44), получаем

$$\mathscr{Y}_{\mu,a}^{(1)}(x) = \mathrm{tr}\,(j_\mu(x)\,\eta_a^{(1)}(x)),\quad \tilde{\mathscr{Y}}_{\mu,a}^{(1)}(x) = \mathrm{tr}\,(j_\mu(x)\,\tilde{\eta}^{(1)}(x)).$$

Рассмотрим также модель Гросса — Невье, для которой лагранжиан имеет вид

$$L(x) = \frac{i}{2}\bar{\psi}\hat{\partial}\psi_j + \frac{1}{8N} g_0 (\bar{\psi}_j\psi_j)^2\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

а сохраняющийся ток задается выражением $(j_\mu(x))_{jk} = \bar{\psi}_j\gamma_\mu\psi_k$. Соответствующий аксиальный ток

$$(j_\mu^5)_{jk} = \bar{\psi}_j\gamma_5\gamma_\mu\psi_k = \varepsilon_{\mu\nu}(j^\nu)_{jk}$$

на экстремалях $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$ удовлетворяет соотношению

$$\partial^\mu j_\mu^5(x) = -\frac{g_0}{N} j^\mu(x)\, j_\mu^5(x) = -\frac{g_0}{N}\varepsilon_{\mu\nu} j^\mu(x)\, j^\nu(x). \tag{76}$$

Тогда, по аналогии с киральными моделями,

$$\delta S=\int d^2x\,\mathrm{tr}\,\{j^{\mu}(x)\,\partial_{\mu}\eta^{a}_{(k)}(x)\}\,\delta\omega^{k}_{a}=$$

$$=\varepsilon^{\mu\nu}\int d^2x\,\mathrm{tr}\,\{\partial_{\mu}(j_{\nu}(x)\,\chi^{(k)}_{a}(x))\}\,\delta\omega^{k}_{a}=$$

$$=\varepsilon^{\mu\nu}\int d^2x\,\mathrm{tr}\,\left\{j_{\mu}\left(\partial_{\nu}\chi^{(k)}_{a}+\frac{g_0}{N}\,j_{\nu}\chi^{(k)}_{a}\right)\right\}\delta\omega^{(k)}_{a}, \tag{77}$$

где использовано тождество (76), т. е. $\delta S$ сводится к интегралу от дивергенции только на экстремалях, а $\chi^{(k)}_{a}$ является новым набором функции (см. [35]). При этом существует набор функций, удовлетворяющих (77):

$$\chi^{(k+1)}_{a}(x)=\int_{-\infty}^{x_1} dy_1\left\{\partial_0\chi^{(k)}_{a}(x_0,\ y_1)+\frac{g_0}{N}\,[j_0,\ \chi^{(k)}_{a}]\,(x_0,\ y_1),\right. \tag{78}$$

где $\chi^{(0)}_{a}=T_a$, $\chi^{(-1)}_{a}=0$. Из (53) следует, что соответствующие нелокальные сохраняющиеся токи имеют вид

$$\mathscr{Y}^{(k)}_{\mu,\,a}(x)=\mathrm{tr}\,\{j_{\mu}(x)\,\chi^{(k)}_{a}(x)+\varepsilon_{\mu\nu}\,[j^{\nu}(x),\ \chi^{(k-1)}(x)]\}.$$

Отметим, что преобразования (41) с генераторами (78) являются симметрией в слабом смысле, т. е. только на экстремалях.

**Явный вид генераторных функций для обобщенных нелинейных сигма-моделей.** Как уже отмечалось в разд. 3, имеется простое доказательство существования бесконечного числа нелокальных сохраняющихся токов для обобщенных нелинейных сигма-моделей, которое было предложено в [2]. При этом основным предположением является рекуррентная зависимость (18а), нулевая кривизна (15), а также условие интегрируемости уравнения (18а). Отметим, что (20а) выполнено только на экстремалях $\partial^{\mu}A_{\mu}=0$ для любой гладкой функции $\chi^{(k)}(x)$.

Здесь мы покажем, что все эти токи имеют нетеровский характер, т. е. что они определяются симметрией действия в слабом смысле (до полной дивергенции). Сначала эту задачу решим только на экстремалях, а потом покажем, что существуют нелокальные преобразования, которые являются симметрией действия и для любых полевых конфигураций $\partial^{\mu}A_{\mu}(x)\neq 0$.

Рассмотрим следующие инфинитезимальные преобразования:

$$g'(x)=g(x)+\delta g(x) \tag{79}$$

и потребуем, чтобы $A_{\mu}(x)$ преобразовалось как калибровочное поле, т. е.

$$\delta A_{\mu}(x)=\delta g^{-1}(x)\,\partial_{\mu}g(x)+g^{-1}(x)\,\partial_{\mu}\delta g(x)=\partial_{\mu}\alpha(x)+[A_{\mu},\ \alpha(x)]. \tag{80}$$

Здесь мы подставили

$$\alpha(x)=g^{-1}(x)\,\delta g(x)=\zeta^{(k)}(x)\,\delta\omega_k, \tag{81}$$

где $\zeta^{(k)}(x)$ являются генераторами преобразования (79), $\omega_k$ — соответствующие параметры и $[,]$ — матричный коммутатор. Вариация действия (8) относительно инфинитезимальных преобразований (79) имеет вид

$$\delta S = -\int d^D x \operatorname{tr}\{A^\mu(x)\,\delta A_\mu(x)\} = -\int d^D\,x\ \operatorname{tr}\{A^\mu(x)\,(\partial_\mu \zeta^{(k)}(x) + [A_\mu(x),\ \zeta^{(k)}(x)])\}\,\delta\omega_k = -\int d^D x \operatorname{tr}\{A^\mu(x)\,\partial_\mu \zeta^{(k)}(x)\}\,\delta\omega_k. \quad (82)$$

Следовательно, только такие преобразования, для которых $\operatorname{tr}(A^\mu\,\partial_\mu \zeta^{(k)}) = 0$, сохраняют действия (8), т. е. $\delta S = 0$. В настоящем разделе мы рассмотрим более общий класс преобразований (79), для которых $\delta S$ выражается через интеграл от полной дивергенции. Явный вид этих преобразований может быть определен из следующих предположений.

Предположение I. Вариация действия (8) при преобразованиях (79) может быть представлена как интеграл от полной дивергенции некоторой произвольной функции, т. е.

$$\delta S = \int d^D x \operatorname{tr}\{\partial^\mu K^j_\mu(x,\ g,\ \partial_\nu g)\}\,\delta\omega_j, \quad (83)$$

где $K^j_\mu$ является $D$-векторной функцией, явный вид которой задается вторым предположением.

Предположение II. Ограничимся только такими $D$-векторными матричными функциями $K^j_\mu$, которые представимы в следующей форме:

$$K^j_\mu(x) = A^\nu(x)\,\chi^j_{\mu\nu}(x) \quad (j = 1,\ 2\ \ldots), \quad (84)$$

где $\chi^j_{\mu\nu}(x) = -\chi^j_{\mu\nu}(x)$, т. е. $\chi^j_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор второго ранга с $N \times N$-матричными компонентами. Функции $\chi^j_{\mu\nu}(x)$ связаны с $\zeta_j(x)$ посредством следующей теоремы.

**Теорема I**: Необходимое и достаточное условие для эквивалентности (82) и (83), где $K^j_\mu$ задано формулой (84), состоит в том, что $\zeta^j(x)$ и $\chi^j_{\mu\nu}(x)$ связаны следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\partial_\mu \zeta^j(x) = D^\nu \chi^j_{\mu\nu}(x) = (\partial^\nu + A^\nu(x))\,\chi^j_{\mu\nu}(x). \quad (85)$$

Действительно, подставляя (80) в (82) и учитывая нулевую кривизну, т. е. $F_{\mu\nu}(x) = 0$, получаем (83), где $K_\mu$ определено в (84). И обратно: подставляя (84) в (83), учитывая опять нулевую кривизну $F_{\mu\nu} = 0$ и сравнивая с (82), получаем (85) *.

* Отметим, что все доказанные выше утверждения справедливы также, если заменить (84) $\widetilde{K}^j_\mu(x) = [A^\nu(x),\ \widetilde{\chi}_{\mu\nu}]$.

Для преобразования (79), генераторы которого (81) удовлетворяют уравнению (85), т. е. которые изменяют действие на интеграл от полной дивергенции, имеет место обобщенная теорема Нетер (53).

**Теорема Нетер**: Любому однопараметрическому преобразованию, чьи генераторы удовлетворяют уравнениям (85), т. е. для которых вариация действия представима в виде интеграла от полной дивергенции, соответствует величина

$$\mathcal{Y}_{\mu}^{(k)}(x)=\mathrm{tr}\,\{A_{\mu}(x)\,\zeta^{(k)}(x)+A^{\nu}\chi_{\mu\nu}^{(k)}(x)\},\tag{86}$$

которая сохраняется в слабой форме, т. е. $\partial^{\mu}\mathcal{Y}_{\mu}^{(k)}(x)=0$, когда уравнения движения $\partial^{\mu}A_{\mu}=0$ удовлетворены.

Следовательно, для любых функций $\zeta^{(k)}(x)$ и $\chi_{\mu\nu}^{(k)}(x)$, удовлетворяющих уравнениям (85), имеем один сохраняющийся ток. Уравнение (85) есть дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных и, следовательно, имеет бесконечное число решений. Как будет видно дальше, эти решения являются нелинейными и нелокальными функционалами поля $g(x)$. Из последнего следует, что мы имеем дело с нелинейными и нелокальными преобразованиями (79), чьи генераторные функции, заданные $\zeta$, получаются как решения уравнения (85). Следовательно, проблема нахождения нелокальных токов (86) и генераторов, задающих эти токи, сводится к проблеме решения уравнений (85). Последние уравнения имеют тривиальное решение

$$\zeta^{(0)}(x)=\mathrm{const},\quad \chi_{\mu\nu}^{(0)}=0.\tag{87}$$

Для этого решения ток (86) совпадает с точностью до постоянного множителя с (9). Соответствующие (87) преобразования (79) являются линейными и локальными.

Чтобы найти остальные решения системы (85), необходимо учесть следующие дополнительные условия:

$$D^{\mu}\partial_{\mu}\zeta^{(k)}(x)=0\tag{88}$$

и

$$\partial_{\mu}D^{\lambda}\chi_{\nu\lambda}-\partial_{\nu}D^{\lambda}\chi_{\mu\lambda}=0\tag{89}$$

на функциях $\zeta^{(k)}(x)$ и $\chi_{\mu\nu}^{(k)}$ соответственно. Первое из них является следствием нулевой кривизны (15), а второе является условием интегрируемости системы (85).

В последующем рассмотрении мы ограничимся только двумерным случаем, для которого

$$\chi_{\mu\nu}(x)=\varepsilon_{\mu\nu}\chi(x),\quad \varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu},\quad \varepsilon_{01}=\varepsilon^{10}=1\tag{90}$$

и, следовательно, (85) и (89) принимают вид

$$\partial_{\mu}\zeta(x)=\varepsilon_{\mu\nu}D^{\nu}\chi(x)\tag{91}$$

и

$$D^{\mu}\partial_{\mu}\chi(x)=0,\quad \partial^{\mu}D_{\mu}\zeta(x)=D^{\mu}\partial_{\mu}\zeta(x)=0.\tag{92}$$

Следовательно, в двумерном случае дополнительные условия (88) и условия интегрируемости (89) совпадают по форме. Тот факт, что в двумерном случае $\zeta(x)$ и $\chi(x)$ являются лоренцевыми скалярными матрицами, удовлетворяющими одинаковым уравнениям второго порядка (88) и (92), является весьма полезным для решения уравнения (91). Действительно, если нам известно одно решение $\chi^{(0)}(x)$ уравнения (92), подставляя его в правую часть уравнения (91), определяем функцию $\zeta = \chi^{(1)}$ из уравнения

$$\partial_\mu \chi^{(1)}(x) = \varepsilon_{\mu\nu} D^\nu \chi^{(0)}(x).$$

Из уравнения (91) следует, что $\chi^{(1)}(x)$ также удовлетворяет (92), и, следовательно, ее мы может подставить в правую часть уравнения (91). Таким образом, можно построить бесконечную последовательность функций $\chi^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1 \ldots)$, удовлетворяющих уравнениям (92), причем любые две функции $\chi^{(k)}$ и $\chi^{(k-1)}$ удовлетворяют (91), т. е.

$$\partial_\mu \chi^{(k)}(x) = \varepsilon_{\mu\nu} D^\nu \chi^{(k-1)}(x) \; (k = 0, 1 \ldots). \tag{93}$$

Если найдем $M$ линейно независимых * решений $\chi_m^{(0)}(x)(m = 1, \ldots, M)$, которые не связаны многократным действием (91), мы можем построить посредством указанного выше метода $M$ линейно независимых бесконечных последовательностей $\{\chi_m^{(k)}(x)\; (k = 0, 1 \ldots)\}$. Необходимо отметить, что по известному $\chi^{(k)}$ из уравнения (91) можно определить $\chi^{(k-1)}(x)$. Таким образом, последовательность $\{\chi^{(k)}\}$ может быть продолжена на отрицательные $k$, т. е.

$$\ldots \chi_m^{(-k)}, \ldots, \chi_m^{(-1)}, \chi_m^{(0)}, \chi_m^{(1)}, \ldots, \chi_m^{(k)} \ldots \tag{94}$$

Подставляя (94) в (86), получаем $M$ бесконечных последовательностей сохраняющихся токов

$$\mathcal{Y}_\mu^{(m,k)}(x) = A_\mu(x)\, \chi_m^{(k)}(x) + \varepsilon_{\mu\nu} A^\nu(x)\, \chi_m^{(k-1)}(x). \tag{95}$$

Чтобы найти решения $\chi_m^{(0)}$ уравнения (92), с которых начинается конструирование последовательности (94), рассмотрим следующее более сильное условие:

$$D_\mu \chi_m^{(0)}(x) = \partial_\mu \chi_m^{(0)} + A_\mu(x)\, \chi_m^{(0)}(x) = 0. \tag{96}$$

Отметим, что уравнение (92) эквивалентно следующему уравнению первого порядка:

$$D_\mu \chi_m^{(0)}(x) = \mathbf{C} \mathcal{Y}_\mu^{(m)}(x), \tag{97}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная $N \times N$-матрица и $\mathcal{Y}_\mu^{(m)}(x)$ — некоторый сохраняющийся ток $\partial^\mu \mathcal{Y}_\mu^{(m)} = 0$. Эту возможность обсудим позднее, огра-

*Мы говорим, что последовательности $\{\chi_m^{(k)}\}$ и $\{\chi_l^{(k)}\}$ являются линейно независимыми, если каждая из них содержит не меньше одного элемента $\chi_{l(m)}^{(p)}$, линейно независимого от всех элементов другой последовательности.

ничиваясь сначала случаем $\mathrm{C}=0$, т. е. рассматривая уравнение (96). Отметим, что условие интегрируемости уравнения (96) есть следствие нулевой кривизны (15).

Для системы (96) имеем три линейно независимых решения, которые не связаны многократным действием (93):

а) тривиальное решение

$$\chi_1^{(0)}(x)=0;$$

б) нетривиальные решения, которые могут быть записаны в виде

$$\chi_a^{(0)}(x)=U_\alpha \mathrm{C}_\alpha \quad (a=2,\ 3), \tag{98}$$

где $U_a$ ($a=2$, 3) удовлетворяют уравнению (96) и $\mathrm{C}_a$ есть $N\times N$-постоянная матрица. Уравнение (96) имеет следующие два нетривиальных решения:

$$U_2(x)=g^{-1}(x) \tag{99}$$

и

$$U_3(x)=V(x)\,W(x), \tag{100}$$

где

$$\left.\begin{aligned} V(x)&=P\exp\left\{-\int_{-\infty}^{x_0} dy_0 A_0(y_0,\ x_1)\right\},\\ W(x)&=P\exp\left\{-\int_{-\infty}^{x_1} dy_1\,[V^{-1}\partial_1 V+V^{-1}A_1V](x_0,\ y_1)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Здесь $P$ — вильсоновский оператор упорядочения.

Из (98) — (101), используя развитый выше метод, построим три линейно независимые последовательности функций $\{\chi_m^{(k)}\}$. Из того, что $\chi_m^{(0)}$ ($m=1$, 2, 3) удовлетворяют уравнению (96), следует, что для $k\geqslant 1$ все эти последовательности совпадают. Однако эти последовательности отличаются при $k\leqslant 0$, и поэтому они линейно независимы.

Сначала построим первую серию. Можно проверить, что общий вид $\{\chi_1^{(k)}\}$ задается посредством

$$\left.\begin{aligned} &\chi_1^{(0)}=0;\\ &\chi_1^{(1)}=\mathrm{C}_1;\\ &\ \vdots\\ &\chi_1^{(k)}(x)=\int_{-\infty}^{x_1} dy_1\{\partial_0\chi^{(k-1)}+A_0\chi^{(k-1)}\}(x_0,\ y_1)+\mathrm{C}_k,\end{aligned}\right\} \tag{102}$$

где $\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_2$ . . . есть $N\times N$-постоянные матрицы. Постоянные $\mathrm{C}_k$ из (102) в токах (95) приводят к членам $A_\mu \mathrm{C}_k$, которые сохраняются отдельно. Следовательно, без потери общности постоянные $\mathrm{C}_k$ при $k\geqslant 2$ могут быть опущены в (102).

Функции $\chi^{(k)}(x_0, \infty)$ совпадают с нелокальными сохраняющимися зарядами, найденными в [1, 2].

Чтобы найти остальные две серии, воспользуемся следующей симметрией уравнений (91) и (93). Предположим, что существует несингулярная матрица $U$, удовлетворяющая уравнению (96). Тогда уравнение (91) с помощью подстановки

$$\zeta = U\tilde{\zeta} \text{ и } \chi = U\tilde{\chi}$$

записывается в следующем виде:

$$\partial_\mu \tilde{\chi} = \varepsilon_{\mu\nu} (\partial^\nu + \tilde{A}^\nu) \tilde{\zeta}(x), \tag{103}$$

где

$$\tilde{A}_\mu(x) = -U^{-1} A_\mu(x) U. \tag{104}$$

Из (91) и (104) получаем, что

$$\partial^\mu \tilde{A}_\mu(x) = -U^{-1} \partial^\mu A_\mu U = 0,$$

если уравнение движения (10) выполнено и

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = [\tilde{D}_\mu, \tilde{D}_\nu] = U^{-1}[D_\mu, D_\nu] U = U^{-1} F_{\mu\nu} U = 0.$$

Следовательно, $\tilde{\zeta}$ и $\tilde{\chi}$ так же, как $\zeta$ и $\chi$, удовлетворяют уравнениям (92).

Тогда из (103) следует, что

$$\{\chi_2^{(-k)} = U_2 \tilde{\chi}_2^{(k)}\}, \; \{\chi_3^{(-k)} = U_3 \tilde{\chi}_3^{(k)}\}, \tag{105}$$

где $\tilde{\chi}_a^{(k)}$ можно получить из (102) заменой

$$A_\mu(x) \to -U_\alpha A_\mu U_a^{-1} \quad (a = 2, 3),$$

причем $U_a$ имеет вид (99) — (101).

Подставляя (102) и (105) в (95), получаем три линейно независимые бесконечные серии сохраняющихся токов.

Необходимо отметить, что при получении (102) явно использовались уравнения движения, и поэтому рассматриваемая до сих пор симметрия действия существует только на экстремалях, т. е. когда $\partial^\mu A_\mu(x) = 0$.

Чтобы обобщить эту симметрию для произвольного случая, воспользуемся методом, предложенным в [11, 12]. Это будет сделано в разд. 9.

В конце этого раздела рассмотрим более подробно уравнение (97), из которого можно определить начальные функции $\chi_m^{(0)}(x)$. Из условия интегрируемости системы уравнений (97) получаем следующие ограничения на сохраняющиеся токи $\mathcal{Y}_\mu^{(m)}$, которые фигурируют в правых частях этих уравнений:

$$\varepsilon^{\mu\nu} (\partial_\mu + A_\mu) \mathcal{Y}_\nu^{(m)}(x) = 0. \tag{106}$$

Как следует из (17), любой из полученных выше сохраняющихся токов можно представить в виде $\mathcal{J}_\mu^{(m)} = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\chi^{(m)}(x)$, где функция $\chi^{(m)}(x)$ определяется из уравнения (18а).

Подставляя (17) в (106), получаем

$$(\partial^\mu + A^\mu(x))\,\partial_\mu\chi^{(m)}(x) = 0.$$

Это — условие интегрируемости уравнения (18а), т. е. для всех сохраняющихся токов, построенных из $\chi^{(m)}$, удовлетворяется условие интегрируемости системы (97). Тогда решение уравнения (97) имеет вид

$$\chi_m^{(m)}(x) = \chi^{(0)}\int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1\,(\chi^{(0)})^{-1}\mathcal{J}_1^{(m)} = -\chi^{(0)}\int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1\,(\chi^{(0)})^{-1}\partial_0\chi^{(m)},$$

где $\chi^{(0)}$ — нетривиальное решение соответствующего однородного уравнения (96), которое имеет вид (99) или (100). Используя уравнения (18) и (96), получаем

$$\chi_m^{(m)} = \chi^{(m-1)},$$

т. е. если в правую часть (97) подставить любой из сохраняющихся токов (17), мы получим исходную последовательность функций (102). Чтобы найти новую последовательность, необходимо найти сохраняющиеся величины иного происхождения, удовлетворяющие условию интегрируемости (106).

**Решение уравнения (43) для подпространства с произвольным числом измерений в абелевом случае.** При $D > 2$ уравнение (43) не всегда имеет нетривиальное решение во всем пространстве. Для примера рассмотрим трехмерный случай $D = 3$. Тогда соответствующая характеристическая система уравнений (43) может быть записана в виде

$$j_0\,dx_1 + j_1\,dx_0 = 0,\ j_0\,dx_2 + j_2\,dx_0 = 0. \tag{107}$$

Один первый интеграл системы (107) можно найти, если

$$j_\mu(x) = j_\mu(x_0,\ x_1 + \alpha x_2)\ (\mu = 0,\ 1,\ 2) \tag{108}$$

или

$$j_1(x) + j_2(x) = \frac{j_0}{g}\int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1\partial_0 g\,(x_0,\ y_1 + \alpha x_2), \tag{109}$$

где $\alpha$ — произвольный параметр, а $g$ — произвольная функция. Тогда первый интеграл (107) имеет следующий вид:

$$\Phi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1 j_0\,(x_0,\ y_1 + \alpha x_2),$$

$$\Phi_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1 g\,(x_0,\ y_1 + \alpha x_2)$$

соответственно. Как и в двумерном случае, любая функция этих первых интегралов удовлетворяет уравнению инвариантности (43).

Для четырехмерного случая условия (108) и (109) имеют вид

$$j_\mu(x) = j_\mu(x_0, x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3);$$

$$j_1 + \alpha j_2 + \beta j_3 = \frac{j_0}{g} \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 \partial_0 g(x_0, y_1 + \alpha x_2 + \beta x_3)$$

соответственно. Первые интегралы задаются формулами

$$\Phi_1 = \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 j_0 (x_0, y_1 + \alpha x_2 + \beta x_3),$$

$$\Phi_2 = \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 g (x_0, y_1 + \alpha x_2 + \beta x_3),$$

где $\alpha$, $\beta$ — произвольные параметры, а $g$ — произвольная функция.

Аналогичным образом могут быть получены решения и уравнений (45) и (50) в пространстве с произвольным числом измерений.

## 7. НЕТЕРОВСКИЙ ХАРАКТЕР НЕЛОКАЛЬНЫХ СОХРАНЯЮЩИХСЯ ТОКОВ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИГМА-МОДЕЛЯХ

Как мы видели в разд. 3, для суперсимметричных нелинейных сигма-моделей тоже имеется бесконечное число сохраняющихся нелокальных токов. В настоящем разделе мы обобщим результаты предыдущего раздела на суперсимметричный случай.

Заметим, что, как и в обычном случае, первый сохраняющийся спинорный суперток $k = 1$ (29)

$$\mathcal{Y}_\alpha^{(1)}(x;\ \theta) = \mathcal{A}_\alpha(x;\ \theta) = \mathcal{G}^{-1}(x;\ \theta)\,\mathcal{D}_\alpha \mathcal{G}(x;\ \theta) \quad (\alpha = 1,\ 2) \tag{110}$$

совпадает с (23) и, следовательно, получается по теореме Нетер как следствие инвариантности действия (21) относительно глобальных калибровочных преобразований. Чтобы исследовать происхождение высших сохраняющихся нелокальных токов, сделаем следующее предположение.

П р е д п о л о ж е н и е I. Существуют две функции $X(x;\ \theta)$ и $Y(x;\ \theta)$, являющиеся $N \times N$-матрицами, чьи матричные элементы преобразуются как скалярные суперполя, связанные уравнением:

$$\mathcal{D}_\alpha X(x;\ \theta) = (\gamma_5 \nabla)_\alpha\, Y(x;\ \theta) \quad (\alpha = 1,\ 2). \tag{111}$$

Используя эти функции, определим спинорную величину

$$\mathcal{Y}_\alpha^{(X,Y)}(x;\ \theta) = \mathcal{A}_\alpha(x;\ \theta)\, X(x;\ \theta) + (\gamma_5 \mathcal{A})_\alpha(x;\ \theta)\, Y(x;\ \theta). \tag{112}$$

Тогда легко проверяется, что имеет место следующая теорема.

**Теорема I.** Предположение I является необходимым и достаточным условием для сохранения спинорного супертока (112) в слабом смысле, т. е.

$$\mathscr{D}^{\alpha}\mathscr{Y}_{\alpha}^{X,\,Y}(x;\ \theta)=0,$$

если выполняются уравнения движения (22).

Легко проверяется, что после подстановки

$$X = X^{(k)}\ (x;\ \theta),\ Y = X^{(k-1)}\ (x;\ \theta)\ (k = 1,\ 2\ \ldots) \tag{113}$$

предположение I становится эквивалентным (30), а суперток (112) выражается через линейную комбинацию токов (29). Однако предположение I является более общим, чем (30), потому что оно имеет место не только для счетного множества функций (113). Кроме того, как мы увидим, предположение I позволяет получить супертоки (112) из обобщенной теоремы Нетер [36]. Для этой цели рассмотрим одно «глобальное» калибровочное преобразование поля $\mathscr{G}\ (x;\ \theta)$:

$$\mathscr{G}'\ (x;\ \theta)=\mathscr{G}\ (x;\ \theta)\ U\ (x;\ \theta). \tag{114}$$

Для этого преобразования предполагаем следующее свойство.

Предположение II. Вариация действия (21) при бесконечно малых преобразованиях (114) вообще не аннулируется, а сводится к интегралу полной супердивергенции от некоторой спинорной величины.

Легко можно проверить, что предположение I есть достаточное условие для выполнения предположения II. Действительно, вариация действия при бесконечно малых преобразованиях (114) имеет вид

$$\delta S=-\int d^2xd^2\theta\ \mathrm{tr}\ \{\mathscr{A}^{\alpha}\ (x;\ \theta)\ \delta\mathscr{A}_{\alpha}\ (x;\ \theta)\}=$$

$$=-\int d^2xd^2\theta\ \mathrm{tr}\ \{\mathscr{A}^{\alpha}\ (x;\ \theta)\ \mathscr{D}_{\alpha}X^{(a)}\ (x;\ \theta)\}\ \delta\omega_a=$$

$$=-\int d^2xd^2\theta\ \mathrm{tr}\ \{\mathscr{D}^{\alpha}\ [(\gamma_5\mathscr{A})_{\alpha}\ Y^{(a)}\ (x;\ \theta)]\}\ \delta\omega_a,$$

где использовано предположение I и произведена подстановка

$$\delta\mathscr{A}_{\alpha}=\delta\mathscr{G}^{-1}\mathscr{D}_{\alpha}\mathscr{G}+\mathscr{G}^{-1}\mathscr{D}_{\alpha}\mathscr{G}=\{\mathscr{D}_{\alpha}X^{(a)}+[\mathscr{A}_{\alpha},\ X^{(a)}]\}\ \delta\omega_a.$$

Здесь $\delta\omega_a$ — бесконечно малые параметры, не зависящие от $x$, $\theta$ и $X^{(a)}$ являются генераторными функциями преобразований (114), т. е.

$$X^{(a)}\ (x;\ \theta)=\left.\frac{\partial U}{\partial\omega_a}\right|_{\omega=0}\quad (a=1,\ 2\ \ldots). \tag{115}$$

Как мы увидим, эти генераторы являются вообще нелинейными и нелокальными функционалами поля $\mathscr{G}$.

Из предположения II следует, что имеет место обобщенная теорема Нетер [36].

**Теорема Нетер:** Каждому однопараметрическому нелинейному и нелокальному преобразованию, удовлетворяющему предположению II, соответствует одна сохраняющаяся величина (112).

Явный вид генераторных функций (115) преобразований (114) получен из уравнений (111). Отметим, что преобразования с генераторами $X = \text{const}$ являются точной симметрией действия, т. е. $\delta S = 0$, а соответствующие им токи имеют вид (110). Функции $X = \text{const}$, $Y = 0$ являются тривиальным решением (111). Чтобы отыскать нетривиальные решения уравнения (111), воспользуемся следующими свойствами этих уравнений:

$$\nabla^{\alpha}\mathscr{D}_{\alpha}X\,(x;\ \theta) = \mathscr{D}^{\alpha}\nabla_{\alpha}X\,(x;\ \theta) = 0 \tag{116}$$

и

$$\mathscr{D}^{\alpha}\nabla_{\alpha}Y\,(x;\ \theta) = 0, \tag{116a}$$

где $X$ и $Y$ — гладкие функции. Первое из них, (116), является следствием (22) и (28), а второе, (116a), есть условие интегрируемости уравнения (111).

Уравнения (116) являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Как известно из общей теории дифференциальных уравнений, они имеют несчетное множество решений. Следовательно, из этих решений можно построить бесконечное число сохраняющихся токов (112). Каждому из этих решений соответствует преобразование поля (114). Таким образом, из предположений I и II находим сохраняющиеся величины (112) и преобразования (114), порождающие эти величины. Как мы видели, нахождение бесконечного числа нелокальных сохраняющихся супертоков было сведено к решениям уравнения (111) при ограничении (116) на функции $X$ и $Y$. Здесь существенно будем использовать то, что уравнения (116) для $X$ и $Y$ совпадают. Тогда задачу о нахождении явного вида $X$ и $Y$ можно решить двумя способами:

а) найти все решения (116) и между ними отыскать пары, удовлетворяющие (111);

б) используя подстановку (113), записать предположение (111) в виде (30), т. е. сузить наше рассмотрение до счетного множества функций $X^{(k)}$. Тогда, начав с некоторых независимых решений * $X_m^{(0)}$ ($m = 1, \ldots, M$) уравнений (116), подставим их в правую часть (30). Решая последние уравнения, получаем функции $X_m^{(1)}$, удовлетворяющие также уравнению (116). Следовательно, $X_m^{(1)}$ могут быть снова подставлены в правую часть (30) и т. д.

Таким образом, получаем бесконечные последовательности

$$X_m^{(0)},\ X_m^{(1)},\ X_m^{(2)},\ \ldots,\ X_m^{(k)}\ \ldots \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ M),$$

где каждый элемент удовлетворяет (116) и каждые два соседних элемента $X_m^{(k)}$ и $X_m^{(k+1)}$, по построению, связаны (30). Постоянную

* Т. е. не связанных многократным применением (116).

добавку $\mathbf{C}_k$ к $X^{(k)}$, являющуюся общим решением однородного уравнения

$$\mathscr{D}_\alpha X^{(k)}(x;\ \theta)=0$$

из-за того, что член $\mathscr{A}_\alpha \mathbf{C}_k$ сохраняется отдельно, можно учесть только один раз, например при $k=1$.

Необходимо отметить, что предположение I (30) есть двухсторонняя связь, т. е. по заданным $X$ мы можем также определить $Y$. В последнем случае в общее решение (30) входят решения однородного уравнения

$$(\mathscr{D}_\alpha+\mathscr{A}_\alpha(x;\theta))\,X_m^{(k)}(x;\ \theta)=0. \tag{117}$$

Решения этого уравнения уже не являются постоянными, и поэтому они должны быть учтены.

Таким образом, по заданным $X_m^{(0)}$ определяем $X_m^{(-1)}$, $X_m^{(-2)}$ ... и, следовательно, имеем вообще последовательности

$$\ldots,\ X_m^{(-k)},\ \ldots,\ X_m^{(-1)},\ X_m^{(0)},\ X_m^{(1)},\ \ldots,\ X_m^{(k)}\ \ldots \tag{118}$$

Если для некоторого элемента $X_m^{(l)}$ $(-\infty<l<\infty)$ последовательности (118) удовлетворяется уравнение (117), тогда на этом элементе $X_m^{(l)}$ последовательность (117) можно оборвать.

Для наших целей представляют интерес только линейно независимые последовательности (117). Две последовательности $\{X_l^{(k)}\}$ и $\{X_m^{(k)}\}$ будем считать линейно независимыми, если каждая из них содержит не менее одного элемента $X_l^{(p)}$ $(X_m^{(p)})$, линейно независимого от элемента последовательности $\{X_m^{(k)}\}$ $(\{X_l^{(k)}\})$.

Пользуясь формулой (112), для каждой последовательности (118) ставим в соответствие одну бесконечную серию сохраняющихся супертоков. В случае линейно независимых последовательностей соответствующие им токи также линейно независимы.

Пользуясь описанной выше процедурой, можно найти явный вид каждого члена трех линейно независимых бесконечных серий сохраняющихся супертоков. Для этой цели рассмотрим уравнения (116). Предположим, что мы нашли некоторое число сохраняющихся токов $\mathscr{Y}_\alpha^{(m)}$ $(m=1,\ \ldots,\ M)$. Тогда уравнение (116) эквивалентно системе уравнений первого порядка:

$$\{\mathscr{D}_\alpha+\mathscr{A}_\alpha(x;\ \theta)\}\,X_w^{(0)}(x;\ \theta)=\mathscr{Y}_\alpha^{(m)}(x;\ \theta). \tag{119}$$

Условие интегрируемости системы (119) имеет вид

$$(\mathscr{D}^\alpha+\mathscr{A}^\alpha(x;\ \theta))\,(\gamma_5)_\alpha^\beta\mathscr{Y}_\beta^{(m)}(x;\ \theta)=0,$$

где использовано, что $\mathscr{F}_{\alpha\beta}=0$. Отметим, что, как и в обычном случае, если $\mathscr{Y}_\alpha^{(m)}$ — один из сохраняющихся токов (112), то мы получим из решения (119) ту же самую последовательность $\{X_m^{(k)}\}$, из которой построены токи $\mathscr{Y}_\alpha^{(m)}$. Поэтому ограничим наше рассмотрение только однородным уравнением (117). Последнее уравнение имеет три линейно независимых решения.

Первое решение является тривиальным

$$X_1^{(0)} = 0; \tag{120}$$

второе имеет вид

$$X_2^{(0)} (x;\ \theta) = \mathcal{G}^{-1} (x;\ \theta)\ \mathbf{C}. \tag{121}$$

Чтобы найти третье решение, используем запись предположения I (111) для компонентов [см. формулу (32)].

Тогда, с учетом (22) и (25), уравнения (117) приобретают вид (для $\mathbf{C} = 0$):

$$(\partial_\mu + g^{-1}\, \partial_\mu g)\ \chi^{(0)} (x) = 0; \tag{122а}$$

$$\varkappa^{(0)} (x) = -\varphi^{-1} (x)\ g\ (x)\ \varphi\ (x)\ \chi^{(0)} (x); \tag{122б}$$

$$\xi^{(0)} (x) = -\frac{1}{2}\, g^{-1} (x)\ \overline{\varphi}\ (x)\ \varphi^{-1} (x)\ g\ (x)\ \chi^0 (x). \tag{122в}$$

Сразу проверяется, что (120) и (121) удовлетворяют (122). Более того, интегрируя уравнение (122а), находим еще одно решение

$$\chi_3^{(0)} = VW\mathbf{C}_3, \tag{123}$$

где $\mathbf{C}_3$ — постоянная матрица, а

$$\left.\begin{aligned} V &= P \exp\left\{-\int\limits_{-\infty}^{x_0} dy_0 v_0\ (y_0,\ x_1)\right\}, \\ W &= P \exp\left\{-\int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1\ (V^{-1}\partial_1 V + V^{-1} v_1 V)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Здесь $P$ — вильсоновский оператор упорядочения. Подставляя (124) в (122а), получаем $\varkappa_3^{(0)}$ и $\xi_3^{(0)}$ соответственно.

Решения уравнения (30) заданы уравнением (33). Сохраняющиеся токи (112), соответствующие этой последовательности, в случае, когда $C_1 = \mathbf{I}$, совпадают с точностью до линейных комбинаций с выражениями, найденными в [19—22].

Для построения последовательностей $\{X_2^{(k)}\}$ и $\{X_3^{(k)}\}$ воспользуемся следующей симметрией предположения I.

Предположение (30) обладает следующей симметрией. Допустим, что существует неособая матрица $Y_0\ (x;\ \theta)$, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla_\alpha Y_0 (x;\ \theta) = \{\mathcal{D}_\alpha + \mathcal{A}_\alpha\ (x;\ \theta)\}\ Y_0\ (x;\ \theta) = 0. \tag{125}$$

Тогда представим $X\ (x;\ \theta)$ и $Y\ (x;\ \theta)$ в виде

$$X = Y_0 \widetilde{X},\ \ Y = Y_0 \widetilde{Y}. \tag{126}$$

Подставляя (126) в предположение I, получаем

$$\mathscr{D}_\alpha \tilde{Y}(x,\ \theta) = (\gamma_5)_\alpha^\beta [\mathscr{D}_\alpha + \mathscr{A}_\beta (x;\ \theta)] \tilde{X}(x;\ \theta), \tag{127}$$

где

$$\tilde{\mathscr{A}}_\alpha (x;\ \theta) = -Y_0^{-1} \mathscr{A}_\alpha (x;\ \theta) \tilde{Y}. \tag{128}$$

Легко проверяется, что

$$\mathscr{D}^\alpha \tilde{\mathscr{A}}_\alpha = -Y_0^{-1} \mathscr{D}^\alpha \mathscr{A}_\alpha (x;\ \theta) Y_0, \tag{129а}$$

если выполняются уравнения движения (22) и

$$\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\beta} = Y_0^{-1} \mathscr{F}_{\alpha\beta} Y_0 = \{\tilde{\nabla}_\alpha,\ \tilde{\nabla}_\beta\}. \tag{129б}$$

Следовательно, $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ также должны удовлетворить уравнению второго порядка (116). Отметим, что (126) не является преобразованием подобия.

Тогда достаточно потребовать обратимости матриц $C_2$ и $C_3$ при подстановке (126), т.е.

$$X^{(-k)} (x;\ \theta) = X_a^{(0)} \tilde{X}^{(k)} (x;\ \theta) \quad (a = 2,\ 3). \tag{130}$$

Предположение I принимает вид [см. (127)]:

$$\mathscr{D}_\alpha \tilde{X}_a^{(k)} (x;\ \theta) = (\gamma_5)_\alpha^\beta (\mathscr{D}_\beta + \tilde{\mathscr{A}}_\beta)\ \tilde{X}^{(k-1)} (x;\ \theta) \quad (a = 2,\ 3;\ k = 1,\ 2\ \dots).$$

Следовательно, каждый член последовательности $\{\tilde{X}_a^{(k)}\}$ может быть получен из соответствующего члена $\{X_1^{(k)}\}$ подстановкой (128) $A_\alpha \to -\hat{A}_\alpha$.

Таким образом, можно построить три последовательности $\{X_1^{(k)} \mid k \geqslant 0\}$, $\{X_2^{(-k)} = X_2^{(0)} \tilde{X}_2^{(k)} \mid k \geqslant 0\}$ и $\{X_3^{(-k)} = X_3^{(0)} \tilde{X}_3^{(k)} \mid$ $\mid k \geqslant 0\}$, которые являются линейно независимыми из-за (121), (124) и (125) и не связаны преобразованием подобия. Действительно, из (121) и (126) находим последовательность

$$X_2^{(1)} (x;\ \theta) = \mathscr{G}^{-1} (x;\ \theta)\, C_2,$$

линейно независимую от последовательности $\{X_1^{(k)}\}$, члены которой заданы (125). Этим последовательностям соответствуют три бесконечные серии сохраняющихся нелокальных супертоков.

Сохраняющиеся заряды, которые получаются из супертоков $\mathscr{V}_\alpha^{(k)}$, имеют вид

$$Q^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 V_0^{(k)} (x), \tag{131}$$

т.е. определяются векторной компонентой спинорного супертока. Из (131) следует, что $Q^{(k)}$ являются значениями функций $\chi^{(k)}$ (33) в точке $x_1 = \infty$, т.е. $Q^{(k)} = \chi^{(k)} (x_0,\ \infty)$.

## 8. ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА ЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СКРЫТОЙ СИММЕТРИИ

В настоящем разделе мы изучим групповую структуру преобразований скрытой симметрии, порождающих высшие локальные сохраняющиеся величины, которые были рассмотрены в разд. 5. Обсудим вопрос о калибровочных преобразованиях [54]. Для этой цели рассмотрим коммутатор двух бесконечно малых преобразований:

$$
\begin{aligned}
(U_1U_2-U_2U_1)_{jk}\,\psi_k(x) &= \{\delta_{jl}+\mathrm{i}\,(\eta_a^{(p)})_{jl}\,[\psi_m+\mathrm{i}\,(\eta_b^{(q)})_{mn}\psi_n\delta\omega^{(q)}_{2,\ b}]\,\delta\omega^{(p)}_{1,\ a}\}\times \\
&\times\{\delta_{lk}+\mathrm{i}\,(\eta_d^{(q)})_{lk}\delta\omega^{(q)}_{2,\ b}\}\,\psi_k(x)- \\
&-\{\delta_{jl}+\mathrm{i}\,(\eta_b^{(q)})_{jl}\,[\psi_m+\mathrm{i}\,(\eta_a^{(p)})_{mn}\psi_n\delta\omega^{(p)}_{1,\ a}]\,\delta\omega^{(q)}_{2,\ b}\}\times \\
&\times\{\delta_{lk}+\mathrm{i}\,(\eta_a^{(p)})_{lk}\delta\omega^{(p)}_{1,\ a}\}\,\psi_k(x)= \\
&=\Big\{[\eta_a^{(p)}(x),\ \eta_b^{(q)}(x)]_{jk}+\frac{\partial(\eta_a^{(p)})_{jk}}{\partial\psi_m}(\eta_b^{(q)}\psi)_m- \\
&-\frac{\partial(\eta_b^{(q)})_{jk}}{\partial\psi_m}(\eta_a^{(p)}\psi)_m-(\bar\psi\,(\eta_b^{(q)})^+)_n\,\frac{\partial(\eta_a^{p})_{jk}}{\partial\bar\psi_n}+ \\
&+(\bar\psi\,(\eta_a^{(p)})^+)_n\,\frac{\partial(\eta_b^{q})_{jk}}{\partial\bar\psi_n}\Big\}\,\psi_k(x)\,\delta\omega^{(p)}_{a,\ 1}\delta\omega^{(q)}_{b,\ 2}= \\
&=[\![\eta_a^{(p)}(x),\ \eta_b^{(q)}(x)]\!]_{jk}\psi_k(x)\delta\omega^{(p)}_{1,\ a}\,\delta\omega^{(p)}_{2,\ b},
\end{aligned}
\tag{132}
$$

где введено обозначение $[\![,]\!]$ для коммутатора двух генераторных функций, а $[,]$ обозначает обычный матричный коммутатор. Очевидно, что, если генераторы не зависят от полей, (132) выражается через обычный матричный коммутатор. Из (132) имеем, что, когда исходная группа симметрии рассматриваемой модели является абелевой, абелевой также является и соответствующая группа скрытых симметрий.

Рассмотрим следующие генераторные функции типа (56):

$$\eta^{(\nu)}_{\pm,\ a}(x)=(x_\pm)^\nu T_a, \tag{133}$$

где $\nu$ — любое, вообще говоря, комплексное число. Подставляя (133) в коммутатор (132), имеем

$$
\begin{aligned}
&[\![\eta^{(\nu)}_{\pm,\ a}(x),\ \eta^{(\nu')}_{\pm,\ b}(x)]\!]=[\eta^{(\nu)}_{\pm,\ a}(x),\ \eta^{(\nu')}_{+\!\!\!|,\ b}(x)]= \\
&=(x_\pm)^{\nu+\nu'}\,[T_a,\ T_b]=C_{abc}\,(x_\pm)^{\nu+\nu'}T_c=C_{abc}\eta^{\quad+\nu')}(x),
\end{aligned}
$$

где $C_{abc}$ — структурные постоянные группы $G$. Следовательно, (133) реализует бесконечную алгебру Ли, рассматриваемую в [37, 38]. Отметим, что преобразования (133) с $\mathrm{Re}\,\nu>0$ не удовлетворяют граничному условию (52).

Рассмотрим также преобразования с генераторами

$$(\eta_a^{(0,\,m)})_{jk} = (j^m)_{jl}(T_a)_{lk} = \psi_j\,(\psi^* T_a)_k\,(\psi^*\psi)^{m-1}, \tag{134}$$

$$(\tilde{\eta}_a^{(0,\,m)})_{jk} = \mathrm{tr}\,(j^m)\,(T_a)_{jk}. \tag{135}$$

Легко проверяется, что

$$[\![\eta_a^{(0,\,m)}(x),\ \eta_b^{(0,\,n)}(x)]\!] = C_{abc}\eta_c^{(0,\,m+n)}(x),$$

$$[\![\tilde{\eta}_a^{(0,\,m)}(x),\ \tilde{\eta}_b^{(0,\,n)}(x)]\!] = C_{abc}\tilde{\eta}_c^{(0,\,m+n)}(x),$$

т. е. генераторы $\eta_a^{(0,\,k)}$ и $\tilde{\eta}_a^{(0,\,k)}$ образуют ту же самую бесконечную алгебру Ли, что и генераторы (133).

В заключение отметим, что нам не удалось получить замкнутую алгебру Ли для генераторов (60), реализующих симметрию для произвольных полей. Отметим также, что наше рассмотрение применимо для обоих случаев спиноров с коммутирующими или антикоммутирующими компонентами. В последнем случае число генераторов $\eta_a^{(0,\,k)}$ (134) и (135) является конечным ($k = 0, 1, \ldots, N$).

Рассмотрим также групповую структуру некоторых из преобразований обобщенных трансляций (46). Чтобы получить коммутатор генераторов трансляций (62), возьмем следующий коммутатор:

$$(T_1T_2 - T_2T_1)\,\varphi(x) = \varphi[x + \delta_2(x + \delta_1 x)] - \varphi[x + \delta_1(x + \delta_2 x)] =$$

$$= \left(\frac{\partial X_\mu^{(m)}}{\partial x_\nu} X_\nu^{(n)} - \frac{\partial X_\mu^{(n)}}{\partial x_\nu} X_\nu^{(m)}\right) \partial^\mu \varphi(x)\, \delta\omega_1^{(m)} \delta\omega_2^{(n)}, \tag{136}$$

где $T$ — оператор трансляций, который, действует на $\varphi(x)$ огласно формуле (62). Выберем функции $X_\pm^{(k)}$ в виде

$$X_\pm^{(\nu)} = (x_\pm)^\nu, \tag{137}$$

где $\nu$ — произвольное число. Подставляя (137) в (136), получаем следующую бесконечную алгебру Ли:

$$[\mathcal{P}_\pm^{(\nu)},\ \mathcal{P}_\pm^{(\nu')}] = (\nu - \nu')\ \mathcal{P}_\pm^{(\nu+\nu'-1)}, \tag{138}$$

где

$$\mathcal{P}_\pm^{(\nu)} = (x_\pm)^\nu \partial_\pm.$$

Отметим, что соответствующая алгебра Ли, которую можно получить из (138), если подставить туда полиномиальные генераторы (63), имеет более ложный вид.

## 9. ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ КИРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

В настоящем разделе будет исследована групповая структура нелокальных преобразований (79) в случае обычных киральных моделей. Мы покажем, что из генераторных функций (102) и (105) можно построить несколько серий генераторов, каждая из которых образует бесконечномерную замкнутую алгебру. При этом на каждую из этих серий накладывается естественное граничное условие

$$S_a(x;\lambda)\,|_{x_+=-\infty}=T_a. \tag{139}$$

Здесь $T_a$ — генераторы группы $G$:

$$S_a(x;\lambda)=\chi(x;\lambda)\,T_a\chi^{-1}(x;\lambda), \tag{140}$$

$$\chi(x;\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda^k\chi^{(k)}(x), \tag{141}$$

где $\chi^{(k)}(x)$ заданы (102), если $k>0$, и посредством (105), если $k<0$. Для $\chi^{(0)}$ предположим, что

$$\chi^{(0)}(x)=\alpha I+\beta U_3(x), \tag{142}$$

где $U_3(x)$ задано (100), а $\alpha$ и $\beta$ — произвольные параметры, удовлетворяющие ограничению $\alpha+\beta=1$, которое является следствием граничного условия (139). В случае, когда $\chi^{(k)}=0$ для $k<0$, $\alpha=1$ и $\beta=0$, получаем серию, рассматриваемую в [12] (см. также [16, 17]). Случай, когда $\chi^{(k)}=0$ для $k>0$, $\alpha=0$, $\beta=1$, обсуждался в [18].

Напомним, что явный вид $\chi^{(k)}(x)$ был получен как решение уравнения (18а). Подставляя (141) в (18а), получаем (в переменных на световом конусе)

$$(1\mp\lambda)\,\partial_\pm\chi(x;\lambda)=\pm\lambda A_\pm\chi(x;\lambda).$$

Теперь из условия $\chi(x;\lambda)\chi^{-1}(x;\lambda)=\chi^{-1}(x;\lambda)\chi(x;\lambda)=I$ имеем следующее уравнение для $\chi^{-1}(x;\lambda)$:

$$(1\mp\lambda)\,\partial_\pm\chi^{-1}(x;\lambda)=\mp\lambda\chi^{-1}(x;\lambda)\,A_\pm(x).$$

Последние два уравнения позволяют нам получить уравнения для $S_a$:

$$(1-\lambda)\,\partial_+S_a(x;\lambda)=\lambda\,[A_+(x),\,S_a(x;\lambda)], \tag{143}$$

$$(1+\lambda)\,\partial_-S_a(x;\lambda)=-\lambda\,[A_-(x),\,S_a(x;\lambda)]. \tag{143a}$$

Явный вид $\chi^{-1}(x;\lambda)$ находим как решение соответствующего уравнения для коэффициентных функций $\eta^{(k)}(x)$ лорановского разложения $\chi^{-1}$:

$$\partial_\pm\eta^{(k+1)}(x)=\pm\partial_\pm\eta^{(k)}(x)\mp\eta^{(k)}(x)\,A_\pm.$$

Отметим, что преобразования с генераторами $S_a(x;\lambda)$, удовлетворяющие обоим уравнениям (143), являются симметрией только на экстремалях. Как было показано в [16, 17], если потребовать, чтобы $S_a(x;\lambda)$ удовлетворяло только одному из уравнений (143), то мы будем иметь дело с симметрией для произвольных полевых конфигураций.

Действительно, потребуем, чтобы $S_a$ удовлетворяло только одному уравнению (143). Тогда

$$\delta_a S = \int d^2x \operatorname{tr} \{A^+(x)\, \partial_+ S_a(x;\ \lambda) + A^-(x)\, \partial_- S_a(x;\ \lambda)\} =$$
$$= \varepsilon^{\mu\nu} \int d^2x \partial_\mu \operatorname{tr} \left\{[A_\nu,\ S_a] + \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) \chi^{-1} \partial_\nu \chi T_a\right\}.$$

Следовательно, и в этом случае преобразования (79) являются симметрией действия (в слабом смысле) для произвольных полевых конфигураций.

Чтобы исследовать групповую структуру преобразования (79) с генераторами $S_a(x;\ \lambda)$, рассмотрим коммутатор двух инфинитезимальных преобразований:

$$g(x)\,(U_1^a U_2^b - U_2^b U_1^a) = g(x)\, \{S_a(x;\ \lambda)\, S_b(x;\ \tau) -$$
$$- S_b(x;\ \tau)\, S_a(x;\ \lambda) + \delta_a S_b(x;\ \tau) - \delta_b S_a(x;\ \lambda)\}. \qquad (144)$$

Здесь $\delta_a S_b(x;\ \tau)$ есть преобразования генератора $S_b(x;\ \tau)$ при преобразовании $U_1 = I + S_a(x;\ \lambda)\, \delta\omega_a^1$, т. е.

$$\delta_a S_b(x;\ \tau)\, \delta\omega_a^1 = S_b(g + g S_a \delta\omega_a^1) - S_b(g).$$

Чтобы вычислить коммутатор (144), необходимо найти $\delta_a S_b(x;\ \tau)$. Для этой цели из (143) получаем следующее уравнение для $\delta_a S_b$:

$$(1-\tau)\, \partial_+ \delta_a S_b(x;\ \tau) = \tau \delta_a([A_+,\ S_b(x;\ \tau)]) \times$$
$$\times \frac{\tau}{1-\lambda} [[A_+,\ S_a(x;\ \lambda)]\, S_b(x;\ \tau)] + \tau\, [A_+,\ \delta_a S_b(x;\ \tau)], \qquad (145)$$

где мы использовали калибровочный характер преобразования $A_\mu$ (82) и тождество Якоби. Решение уравнения (145), удовлетворяющее граничному условию

$$\delta_a S_b(x;\ \tau)\, |_{x_+ = -\infty} = \delta_a T_b = 0,$$

имеет вид

$$\delta_a S_b(x;\ \tau) = \frac{\tau}{\lambda - \tau} [S_a(x;\ \lambda) - S_a(x;\ \tau),\ S_b(x;\ \tau)] =$$
$$= \frac{\tau}{\lambda - \tau} \{[S_a(x;\ \lambda),\ S_b(x;\ \tau)] - C_{abc} S_c(x;\ \tau)\}, \qquad (146)$$

Здесь использовано, что

$$[S_a(x;\ \tau),\ S_b(x;\ \tau)] = \chi(x;\ \tau)\, [T_a,\ T_b]\, \chi^{-1}(x;\ \tau) = C_{abc} S_c(x;\ \tau),$$

где $C_{abc}$ — структурные постоянные исходной группы $G$. Теперь, вводя величину [12]

$$\mathcal{T}_a(\lambda) = \int d^2x g(x)\, S_a(x;\ \lambda) \frac{\delta}{\delta g(x)},$$

получаем

$$[\mathcal{T}_a(\lambda),\ \mathcal{T}_b(\tau)] = C_{abc} \int d^2x g \frac{\tau S_c(\tau) - \lambda S_c(\lambda)}{\lambda - \tau} \frac{\delta}{\delta g}. \qquad (147)$$

Отметим, что коммутатор (147) имеет ту же форму, как и в случаях, рассматриваемых в [12], где суммирования в (145) проводятся при $k \geqslant 0$, и в работе [18] — при $k \leqslant 0$. Разлагая обе стороны (147) по степеням $\lambda$ и $\tau$, находим

$$[\mathcal{T}_a^{(k)}, \mathcal{T}_b^{(m)}] = C_{abc}\mathcal{T}_c^{(k+m)} \quad (k, m \geqslant 0), \tag{148}$$

что есть алгебра, полученная в работе [12]. Кроме того, получаем еще следующие ненулевые коммутаторы:

$$[\mathcal{T}_a^{(k)}, \mathcal{T}_b^{(-k)}] = [\mathcal{T}_a^{(-k)}, \mathcal{T}_b^{(k)}] = C_{abc}\mathcal{T}_c^{(0)} \quad (k=0, 1, 2 \ldots); \tag{149а}$$

$$[\mathcal{T}_a^{(-k)}, \mathcal{T}_b^{(-m)}] = -C_{abc}\mathcal{T}_c^{(-k-m)} \quad (k, m=0, 1 \ldots); \tag{149б}$$

$$[\mathcal{T}_a^{(k)}, \mathcal{T}_b^{(-m)}] = C_{abc}(\Theta(m-k)\mathcal{T}_c^{-(m-k)} - \Theta(k-m)\mathcal{T}_c^{(k-m)})$$

$$(k, m=1, 2 \ldots);$$

$$[\mathcal{T}_a^{(k)}, \mathcal{T}_b^{(-)}] = [\mathcal{T}_a^{(0)}, \mathcal{T}_b^{(-k)}] = 0 \quad (k=0, 1 \ldots). \tag{149в}$$

Здесь $\Theta(k)$ — функция Хевисайда $\Theta(k) = 1$, $k \geqslant 0$, и $\Theta(k) = 0$, $k < 0$. Перестановочные соотношения (149а) были получены впервые в [12], а также в [16, 17], где применялось параметрическое представление для генераторов $\mathcal{T}_a$. Алгебраическая структура преобразований (79) с генераторами $\mathcal{T}_a^{(-k)}$ была исследована в (18). Наконец, отметим, что вторая серия генераторных функций (130) дает ту же самую алгебру (149), если потребовать дополнительно, что $g(-\infty, x_-) = \mathrm{I}$. Это является следствием совпадения дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют генераторные функции $\chi_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, 3)$. Отметим также, что преобразование $U_2 = g^{-1}(x)$ переводит ток $A_\mu = g^{-1}\partial_\mu g$ в $-U_2^{-1}A_\mu U_2 = g\,\partial_\mu g^{-1}$, т. е. переводит левый ток в правый.

## 10. ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КИРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Здесь мы только наметим путь обобщения результатов предыдущего раздела на суперсимметричный случай. Введем генераторы

$$\Omega_a(x;\ \theta, \lambda) = X(x;\ \theta, \lambda)\, T_a X^{-1}(x;\ \theta, \lambda), \tag{150}$$

где

$$X(x;\ \theta, \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k X^{(k)}(x;\ \theta), \tag{151}$$

и потребуем для $\Omega_a(x;\ \theta, \lambda)$ выполнения граничного условия (139). Здесь $X^{(k)}$ заданы посредством (33) для $k > 0$ и (130) — для $k < 0$. Для $k=0$ используем комбинацию

$$X^{(0)} = \alpha I + \beta X_3^{(0)}(x;\ \theta), \tag{152}$$

где $X_3^{(0)}$ имеет вид (125). Из уравнения

$$(1-\lambda)\,\mathcal{D}_1 X(x;\ \theta, \lambda) = \lambda \mathcal{A}_1(x;\ \theta)\, X(x;\ \theta, \lambda)$$

получаем следующее уравнение для $\Omega_a(x;\ \theta, \lambda)$:

$$(1-\lambda)\,\mathcal{D}_1 \Omega_a(x;\ \theta, \lambda) = \lambda\,[\mathcal{A}_1(x;\ \theta), \Omega_a(x;\ \theta, \lambda)]. \tag{153}$$

На экстремалях $\Omega_a(x;\ \theta,\ \lambda)$ удовлетворяют также уравнениям

$$(1+\lambda)\,\mathscr{D}_2\Omega_a(x;\ \theta,\ \lambda) = -\lambda\,[\mathscr{A}_2(x;\ \theta),\ \Omega_a(x;\ \theta,\ \lambda)].$$

Для произвольных полевых конфигураций получаем вариацию действия

$$\delta_a S = -\int d^2x d^2\theta\, \mathrm{tr}\,\{\mathscr{A}^\alpha(x;\ \theta)\,\mathscr{D}_\alpha\Omega_a(x;\ \theta,\ \lambda)\} =$$

$$= -\int d^2x d^2\theta\, \mathrm{tr}\left(\mathscr{D}^\alpha\left\{\lambda\left[(\gamma_5\mathscr{A})_\alpha\,\Omega_a + \left(\frac{1}{\lambda}-\lambda\right)X^{-1}\right](\gamma_5\mathscr{D}_\alpha)\,XT_a\right\}\right),$$

и, следовательно, преобразования (134) с генераторами $\Omega_a$, удовлетворяющие уравнениям (153), являются симметрией (в слабом смысле) действия для произвольных полевых конфигураций.

Как и в обычном случае, рассмотрим коммутатор двух инфинитезимальных преобразований (114)

$$\mathscr{G}(x;\ \theta)\,\{U_1(x;\ \theta)\,U_2(x;\ \theta) - U_2(x;\ \theta)\,U_1(x;\ \theta)\} =$$
$$= \mathscr{G}(x;\ \theta)\,\{[\Omega_a(x;\ \theta,\ \lambda),\ \Omega_b(x;\ \theta,\ \tau)] +$$
$$+\,\delta_a\Omega_b(x;\ \theta,\ \tau) - \delta_b\Omega_a(x;\ \theta,\ \lambda)\}\,\delta\omega_a^1\,\delta\omega_b^2.$$

Величина $\delta_a\Omega_b(x,\ \theta,\ \tau)$ получается как решение дифференциального уравнения, которое находим из уравнения (153):

$$(1-\lambda)\,\mathscr{D}_1\,(\delta_a\Omega_b(x;\ \theta,\ \tau)) = \tau\delta_a\,([\mathscr{A}_1(x,\ \theta),\ \Omega_b(x;\ \theta,\ \tau)]) =$$

$$= \frac{\tau}{1-\lambda}\,[[\mathscr{A}_1(x;\theta),\Omega_a(x;\theta,\lambda)],\Omega_b(x;\theta,\ \tau)] + \tau\,[\mathscr{A}_1(x;\ \theta),\ \Omega_b(x;\theta,\tau)]$$

при граничном условии

$$\delta_a\Omega_b(x;\ \theta,\ \tau)\,|_{x_+=-\infty} = \delta_a T_b = 0.$$

Это решение имеет вид

$$\delta_a S_b(x;\ \theta,\ \tau) = \frac{\tau}{\lambda-\tau}\,\{[\Omega_a(x;\ \theta,\ \lambda),\ \ \Omega_b(x;\ \theta,\ \tau)] - C_{abc}\Omega_c(x;\ \theta,\ \tau)\},$$

и, следовательно, оно совпадает по форме с (146). Тогда обозначая

$$\mathscr{T}_a(\lambda) = \int d^2x d^2\theta\,\mathscr{G}(x;\ \theta)\,\Omega_a(x;\ \theta,\ \lambda)\,\frac{\delta}{\delta\mathscr{G}(x;\ \theta)}$$

и раскладывая по степеням $\lambda$ и $\tau$ коммутатор $[\mathscr{T}_a(\lambda),\mathscr{T}_b(\tau)]$, получаем алгебру (148) и (149).

Отметим, что если выбрать $\alpha = 1$, $\beta = 0$ в (152) и $X^{(k)} = 0$ для $k < 0$ в (151), то мы получим алгебру (148), найденную в [23 и 24].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Luscher M., Pohlmeyer K.**— Nucl. Phys., 1978, v. B137, p. 46.
2. **Brezen E.e.a.**— Phys. Lett., 1979, v. 82B, p. 442.
3. **Karowski M.e.a.**— Phys. Lett., 1978, v. 67B, p. 321; **Witten E.**— Nucl. Phys., 1978, v. B142, p. 285.

4. **Кулиш П. П.**— ТМФ, 1976, т. 26, с. 182; **Goldschmidt Y. Y., Witten E.**— Phys. Lett., 1980, v. 91B, p. 392.
5. **Luscer M.**— Nucl. Phys., 1978, v. B135, p. 1.
6. **Nissimov E. R.**— Bulg. J. Phys., 1979, v. 6, p. 6: Nucl. Phys., 1980, v. B163, p. 374; Lett. Math. Phys., 1980, v. 4, p. 405.
7. **Zaikov R. P.** Preprint JINR E2-81-499, Dubna, 1981.
8. **Замолодчиков А. Б., Замолодчиков Ал. Б.** Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 468; Commun. Math. Phys., 1977, v. 55, p. 183; Nucl. Phys., 1978, v. B133, p. 525.
9. **Zaikov R. P.** Preprints JINR E2-80-118, Dubna, 1980; E2-80-196, Dubna, 1980; **Зайков Р. П.**— ТМФ, 1981, т. 48, с. 34.
10. **Dolan L., Roos A.**— Phys. Rev., 1980, v. D22, p. 2018.
11. **Markowsky B. L., Zaikov R. P.**— Commun. JINR E2-80-654, Dubna, 1980.
12. **Dolan L.**— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 1371.
13. **Зайков Р. П.**— ТМФ, 1982, т. 53, с. 238.
14. **Зайков Р. П.** Препринт ОИЯИ Р2-81-493, Дубна, 1981.
15. **Зайков Р. П.** Сообщения ОИЯИ Р2-82-345, Дубна, 1982.
16. **Devichand C., Fairle D.**— Nucl. Phys., 1982, v. B194, p. 232.
17. **Ge M. L., Wu Y.**— Phys. Lett., 1982, v. 108B, p. 412.
18. **Wu Y.**— Nucl. Phys., 1983, v. B211, p. 160.
19. **Corrigan E., Zachos C. K.**— Phys. Lett., 1979, v. 88B, p. 273.
20. **Zaikov R. P.**— Bulg. J. Phys., 1980, v. 7, p. 255.
21. **Curtright T.**— Phys. Lett., 1979, v. 88B, p. 276.
22. **Curtright T., Zachos C. K.**— Phys. Rev., 1980, v. D21, p. 441.
23. **Ling L.e.a.**— Phys. Rev., 1982, v. D25, p. 1080.
24. **Zaikov R. P.** Preprint JINR E2-82-441, Dubna, 1982.
25. **Flato M.e.a.**— Lett. Math. Phys., 1977, v. 2, p. 155.
26. **Flato M.**— Phys. Lett., 1980, v. B94, p. 518.
27. **Golo V., Perelomov A. M.**— Phys. Lett., 1978, v. 79B, p. 112.
28. **Dubois-Violete M., Georgrlin Y.**— Phys. Lett., 1979, v. 82B, p. 251.
29. **Frohlich J.** Preprint THES, Bures-sur-Yvetta, 1979.
30. **Di Vicchia P., Ferrara S.**— Nucl. Phys., 1977, v. B130, p. 93.
31. **Witten E.**— Phys. Rev., 1977, v. D16, p. 299.
32. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
33. **Ибрагимов Н. Х.**— ТМФ, 1969, т. 1, с. 350.
34. **Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.** Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
35. **Curtright T., Zachos C. K.**— Phys. Rev., 1981, v. D24, p. 2661.
36. **Hill E. L.**— Rev. Mod. Phys., 1951, v. 23, p. 353; **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.** Препринт ОИЯИ Р2-12029, Дубна, 1978.
37. **Кац В.**— Изв. АН СССР, 1968, т. 2, с. 1271; **Moody R. J.**— Algebra, 1968, v. 10, p. 211.
38. **Lepowsky J., Wilson R. L.**— Commun. Math. Phys., 1978, v. 62, p. 43.