«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1985, ТОМ 16, ВЫП. 5

УДК 539.17.01

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ LSZ И ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А. А. Архипов, В. И. Саврин

Институт физики высоких энергий, Серпухов

Рассмотрен ряд методов, которые можно использовать для вывода динамических уравнений в квантовой теории поля. Описан новый метод вывода уравнений, основанный на использовании асимптотического условия LSZ, показано, что с помощью этого метода можно получать уравнения как для волновых функций состояний рассеяния, так и для волновых функций связанных состояний.

In our work we consider some techniques that may be appropriate for the derivation of dynamic equations in quantum field theory. A new method of deriving equations based on the use of LSZ asymptotic condition is described and it is proved that with the help of this method it becomes possible to obtain equations for wave functions both of scattering and bound states.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена описанию различных методов, которые можно использовать для вывода динамических уравнений в квантовой теории поля. Динамические уравнения в квантовой теории поля занимают одно из центральных мест. В начале 50-х годов Солпитером и Бете с помощью диаграммной техники Фейнмана было выведено четырехмерное полностью релятивистское уравнение для волновой функции связанного состояния двух дираковских частиц с произвольным взаимодействием [1]. Вскоре Гелл-Маном и Лоу был дан формальный вывод уравнения Бете — Солпитера в квантовой теории поля [2]. В ряде последующих работ были предложены другие методы вывода уравнения Бете — Солпитера *. На некоторых из этих методов мы остановимся в данной статье.

Все известные к настоящему времени методы вывода уравнения Бете — Солпитера можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, с помощью которых выводится уравнение Бете — Солпитера для волновой функции состояний рассеяния. При этом, как правило, исходят из волновой функции, выраженной

* Исследованию уравнения Бете — Солпитера посвящен обзор [3], в котором имеется обширная библиография по этой теме.

через матричный элемент от операторов полей, взятых в представлении взаимодействия. Ко второй группе относятся методы, используемые при выводе уравнения Бете — Солпитера для волновой функции связанных состояний. В этих методах исходят из выражения для волновой функции связанного состояния в терминах гейзенберговых операторов полей, и основаны они на исследовании сингулярностей четырехточечных функций Грина по инвариантной массе системы двух частиц.

В настоящей работе мы опишем новый универсальный метод, пригодный для вывода уравнения Бете — Солпитера как для волновой функции состояний рассеяния, так и для волновой функции связанных состояний. Кроме того, указанный метод оказывается очень удобным при выводе выражений для амплитуд рассеяния элементарных частиц на составных системах.

При выводе динамических уравнений мы не будем опираться на какую-либо конкретную модель теории поля, а будем использовать лишь только те факты, которые лежат в основе аксиоматических формулировок квантовой теории поля. Это означает, что мы с самого начала отказываемся от обсуждений, связанных с расходимостями теории и методами их устранения — процедурами перенормировок. Кроме того, мы будем дополнительно предполагать, что существуют вакуумные средние от гейзенберговых операторов полей или функции Грина и матричные элементы, определяющие волновые функции Бете — Солпитера, оставляя, конечно, в стороне вопрос о строгом обосновании такого предположения. Универсальность нашего метода, как мы увидим, будет обусловлена использованием асимптотического условия LSZ [4], справедливость которого мы также будем предполагать.

Приведем краткое содержание настоящей статьи. В разд. 1 рассматривается вывод динамического уравнения Бете — Солпитера для волновой функции системы двух взаимодействующих частиц в рамках аксиоматической формулировки квантовой теории поля в форме Боголюбова. В разд. 2 указанная методика обобщается на системы из трех взаимодействующих частиц. Здесь же подробно обсуждаются граничные условия, отвечающие различным физическим процессам в системе трех частиц. В разд. 3 и 4 излагается формулировка асимптотических условий для элементарных и составных частиц и обсуждается связь асимптотических условий с сингулярностями многочастичных функций Грина. С помощью асимптотических условий проводится последовательный вывод формул для амплитуд физических процессов в системе трех частиц и строится универсальная конструкция для вывода динамических уравнений в квантовой теории поля, описанию которой посвящен разд. 5. В разд. 6 рассмотрены различные итерационные схемы для вычисления основных физических величин. В разд. 7 изложен вывод трехмерного динамического уравнения для волновой функции упругого рассеяния частицы на связанном состоянии двух других частиц.

1. УРАВНЕНИЕ БЕТЕ — СОЛПИТЕРА ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Двухчастичную волновую функцию Бете — Солпитера для состояний рассеяния определим с помощью матричного элемента

$$\Phi_{ab}(x_1x_2) = \langle 0 \mid T(\Phi_a(x_1)\,\Phi_b(x_2)) \mid \Phi_{ab};\ \mathrm{in}\rangle, \tag{1}$$

где $\Phi_a(x_1)$ и $\Phi_b(x_2)$ — гейзенберговы операторы полей частиц a и b; $|\,\Phi_{ab};\ \mathrm{in}\rangle$— вектор состояния, отвечающий асимптотической при $t \to -\infty$ конфигурации двух свободных частиц в in-базисе. Вектор $|\,\Phi_{ab};\ \mathrm{in}\rangle$ можно представить как результат действия операторов рождения на вектор вакуумного состояния

$$|\Phi_{ab};\ \mathrm{in}\rangle = a^{+}_{\mathrm{in}} b^{+}_{\mathrm{in}} |0\rangle.$$

В аксиоматической формулировке квантовых теорий поля [4] асимптотические in- и out-поля определяются через гейзенберговы поля с помощью уравнений Янга — Фельдмана

$$\Phi_a(x) = \varphi_a^{\mathrm{in}}(x) + \int dy D_a^{\mathrm{ret}}(x-y)\, j_a(y) =$$
$$= \varphi_a^{\mathrm{out}}(x) + \int dy D_a^{\mathrm{adv}}(x-y)\, j_a(y),$$

где оператор тока $j_a(x)$ определяется через гейзенбергово поле с помощью равенства $j_a(x) = \hat{K}_x^a \Phi_a(x)$; $\hat{K}_x^a$ — дифференциальный оператор (оператор Клейна — Гордона в случае скалярных частиц, оператор Дирака в случае спинорных частиц и т. д.), удовлетворяющий соотношению $\hat{K}_x^a D_a^{\mathrm{ret}}(x) = \hat{K}_x^a D_a^{\mathrm{adv}}(x) = \delta^4(x)$, причем $D_a^{\mathrm{ret}}(x) = 0$ при $x^0 < 0$, $D_a^{\mathrm{adv}}(x) = 0$ при $x^0 > 0$. Из уравнений Янга — Фельдмана легко увидеть, что асимптотические in- и out-поля удовлетворяют уравнению

$$\hat{K}_x^a \varphi_a^{\mathrm{in}}(x) = 0, \quad \hat{K}_x^a \varphi_a^{\mathrm{out}}(x) = 0.$$

Операторы рождения и уничтожения определяются в терминах асимптотических in- и out-полей и гладких нормированных решений уравнения $\hat{K}_x^a f_a(x) = 0$ [4]. Ниже мы выпишем явные формулы для этих операторов.

Вывод динамического уравнения для волновой функции (1) можно изящно провести, если воспользоваться формулировкой аксиоматической квантовой теории поля в форме Боголюбова [5, 6]. В этом случае гейзенбергово поле может быть выражено в терминах S-оператора и асимптотических полей формулой [6]:

$$\Phi_a(x) = T(\varphi_a^{\mathrm{ex}}(x)\, S)\, S^{+}, \tag{2}$$

где T-произведение понимается следующим образом *: предполагается, что S-оператор является функционалом от асимптотических полей, который можно представить в виде разложения по нормальным произведениям асимптотических полей, после чего T-произведение определяется в соответствии с теоремой Вика о разложении T-произведения по нормальным произведениям; ex — in или out, в зависимости от представления, в котором взят S-оператор. В дальнейшем мы будем использовать out-представление, поэтому в формуле (2) индекс out у асимптотического поля опустим. Можно легко показать, что из соотношения (2) вытекают уравнения Янга — Фельдмана, если отождествить оператор тока $j_a(x)$ с радиационным оператором первого порядка [6]:

$$j_a(x) = \mathrm{i}\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_a(x)}\,S^+.$$

Используя формулу (2), получаем **

$$T(\Phi_a(x_1)\,\Phi_b(x_2)\,\ldots) = T(\varphi_a(x_1)\,\varphi_b(x_2)\,\ldots\,S)\,S^+. \qquad (3)$$

Для T-произведения асимптотических полей имеем стандартное представление

$$T(\varphi_a(x)\,\varphi_a(y)) = :\varphi_a(x)\,\varphi_a(y): + \frac{1}{\mathrm{i}}\,D_a(x-y), \qquad (4)$$

где $D_a(x)$ — причинная функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\hat{K}^a_x D_a(x) = \delta^4(x).$$

С учетом равенства (3) выражение (1) для волновой функции Бете — Солпитера можно переписать в следующем виде:

$$\Phi_{ab}(x_1x_2) = \langle 0 \mid T(\varphi_a(x_1)\,\varphi_b(x_2)\,S) \mid \Phi_{ab};\ \mathrm{out}\rangle, \qquad (5)$$

где мы использовали тот факт, что $\mid \Phi_{ab};\ \mathrm{in}\rangle = S \mid \Phi_{ab};\ \mathrm{out}\rangle$. Если теперь воспользоваться редукционной формулой Боголюбова

$$[F(\varphi),\ a^+] = \int dx\,\frac{\delta F(\varphi)}{\delta\varphi(x)}\,f_a(x),$$

где $F(\varphi)$ — некоторый функционал от асимптотических полей, $f_a(x)$ — гладкое нормированное решение (типа волнового пакета) уравнения $\hat{K}^a_x f_a(x) = 0$, то для волновой функции (5) можно получить следующее выражение:

$$\Phi_{ab}(x_1x_2) = \int dy_1\,dy_2 \left\langle 0 \left| \frac{\delta T\varphi_a(x_1)\,\varphi_b(x_2)\,S}{\delta\varphi_a(y_1)\,\delta\varphi_b(y_2)} \right| 0 \right\rangle \Phi^{(0)}_{ab}(y_1y_2), \qquad (6)$$

* Мы не будем здесь вдаваться в тонкости, связанные с отличием так определенного T-произведения от общепринятого дайсоновского определения T-произведения. Обсуждение этих тонкостей можно найти в [6]. Из этой же работы заимствована используемая нами терминология.

** Формулу (3) можно обосновать в любой перенормируемой теории возмущений.

где $\Phi_{ab}^{(0)}(x_1x_2) = f_a(x_1) f_b(x_2)$ представляет собой волновую функцию начального состояния двух невзаимодействующих частиц.

Двухчастичную (четырехточечную) функцию Грина, определяемую равенством *

$$G_{ab}(x_1x_2;\ y_1y_2) = \mathrm{i}^2 \langle 0|T(\Phi_a(x_1)\Phi_b(x_2)\overline{\Phi}_a(y_1)\overline{\Phi}_b(y_2))|0\rangle =$$
$$= \mathrm{i}^2 \langle 0|T(\varphi_a(x_1)\varphi_b(x_2)\overline{\varphi}_a(y_1)\overline{\varphi}_b(y_2)S)S^+|0\rangle,$$

после частичного раскрытия хронологического произведения можно представить в виде

$$G_{ab}(x_1x_2;\ y_1y_2) =$$
$$= \int dz_1\,dz_2 \left\langle 0 \left| \frac{\delta T(\varphi_a(x_1)\varphi_b(x_2)S)}{\delta\varphi_a(z_1)\delta\varphi_b(z_2)} S^+ \right| 0 \right\rangle D_a(z_1 - y_1) D_b(z_2 - y_2).$$

С помощью полученного равенства теперь нетрудно увидеть, что линейное соотношение (6), связывающее волновую функцию Бете — Солпитера с начальной волновой функцией двух свободных частиц, эквивалентно следующему:

$$\Phi_{ab}(x_1x_2) = [(G_{ab} * D_a^{-1}D_b^{-1}) * \Phi_{ab}^{(0)}](x_1x_2). \tag{7}$$

Операция * означает свертку функций в конфигурационном пространстве.

Раскрывая до конца хронологическое произведение в четырехточечной функции Грина с помощью обобщенной теоремы Вика [5], получаем

$$G_{ab} = G_{ab}^{(0)} + G_{ab}^{(0)} * R_{ab} * G_{ab}^{(0)}, \tag{8}$$

где $G_{ab}^{(0)} = D_aD_b$ — свободная функция Грина двух частиц, а функция R_{ab} имеет следующее строение:

$$R_{ab} = R_a^{(2)}D_b^{-1} + R_b^{(2)}D_a^{-1} + R_{ab}^{(4)}, \tag{9}$$

причем функции

$$R_i^{(2)}(x;\ y) = \frac{1}{\mathrm{i}} \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\overline{\varphi}_i(x)\,\delta\varphi_i(y)} S^+ \right| 0 \right\rangle, \quad i = a,\ b \tag{10}$$

представляют собой вакуумные средние радиационных операторов второго порядка, а функция

$$R_{ab}^{(4)}(x_1x_2;\ y_1y_2) = \frac{1}{i^2} \left\langle 0 \left| \frac{\delta^4 S}{\delta\overline{\varphi}_a(x_1)\,\delta\overline{\varphi}_b(x_2)\,\delta\varphi_a(y_1)\,\delta\varphi_b(y_2)} S^+ \right| 0 \right\rangle \tag{11}$$

есть вакуумное среднее радиационного оператора четвертого порядка.

---

* Черта над оператором поля означает эрмитово сопряжение для операторов заряженных скалярных полей и дираковское сопряжение для операторов спинорных полей. Следует, конечно, иметь в виду, что при наличии спинорных полей функции Грина и связанные с ними величины являются операторами в спиновом пространстве.

После подстановки выражения (8) для двухчастичной функции Грина в линейное соотношение (7) находим

$$\Phi_{ab}(x_1x_2)=\Phi_{ab}^{(0)}(x_1x_2)+(G_{ab}^{(0)}*R_{ab}*\Phi_{ab}^{(0)})(x_1x_2)=$$
$$=\Phi_{ab}^{(0)}(x_1x_2)+(G_{ab}^{(0)}*R_{ab}^{(4)}*\Phi_{ab}^{(0)})(x_1x_2). \tag{12}$$

Второе равенство в соотношении (12) является следствием стабильности одночастичных состояний. Заметим, что из стабильности одночастичных состояний следует *:

$$D_i*R_i^{(2)}*f_i=0,\quad i=a,\ b. \tag{13}$$

Поэтому линейное соотношение (7) можно переписать в виде

$$\Phi_{ab}=(\overline{G}_{ab}*D_a^{-1}D_b^{-1})*\Phi_{ab}^{(0)}, \tag{14}$$

где

$$\overline{G}_{ab}=G_{ab}^{(0)}+G_{ab}^{(0)}*R_{ab}^{(4)}*G_{ab}^{(0)}=G_{ab}-G_{ab}^{(0)}*(R_a^{(2)}D_b^{-1}+R_b^{(2)}D_a^{-1})*G_{ab}^{(0)}. \tag{15}$$

Определим функцию V_{ab} с помощью соотношения

$$R_{ab}^{(4)}=V_{ab}+V_{ab}*G_{ab}^{(0)}*R_{ab}^{(4)}. \tag{16}$$

Подставляя соотношение (16) в формулу (12), приходим к динамическому уравнению для волновой функции Бете — Солпитера

$$\Phi_{ab}(x_1x_2)=\Phi_{ab}^{(0)}(x_1x_2)+(G_{ab}^{(0)}*V_{ab}*\Phi_{ab})(x_1x_2). \tag{17}$$

Неоднородный член в уравнении (17) представляет собой волновую функцию системы двух свободных невзаимодействующих частиц и отвечает граничному условию задачи рассеяния при $x_1^0\to-\infty$, $x_2^0\to-\infty$. Можно легко показать, что функция $R_{ab}^{(4)}$ непосредственно связана с амплитудой упругого рассеяния двух частиц. Действительно, используя редукционные формулы Боголюбова, для матричного элемента S-оператора, отвечающего процессу упругого рассеяния двух частиц, получаем следующее выражение:

$$\langle\Phi_{ab};\ \mathrm{out}\,|S-1|\,\Phi_{ab};\ \mathrm{out}\rangle=$$
$$=i^2\int dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2\overset{*}{f}_a(x_1)\overset{*}{f}_b(x_2)R_{ab}^{(4)}(x_1x_2;\ y_1y_2)f_a(y_1)f_b(y_2).$$

Волновая функция Бете — Солпитера для связанного состояния двух частиц определяется с помощью матричного элемента

$$\Phi_{ab}^A(x_1x_2)=\langle 0\,|T(\Phi_a(x_1)\Phi_b(x_2))|\,\Phi_{ab}^A\rangle, \tag{18}$$

где $\Phi_a(x_1)$ и $\Phi_b(x_2)$ — по-прежнему гейзенберговы операторы полей частиц a и b; $|\,\Phi_{ab}^A\rangle$ — вектор связанного состояния этих же частиц. Для вектора связанного состояния мы будем использовать также обозначение $|\,M_A;\ \mathbf{P},\ \sigma\rangle$, где M_A — масса связанного состояния, $\mathbf{P}$ — полный импульс связанной системы, σ — набор всех остальных

* Условие (13) автоматически выполняется, если функция $R^{(2)}$ в импульсном пространстве имеет нуль второго порядка в точке $p^2=m^2$.

квантовых чисел, непрерывных и дискретных, которые вместе с массой и импульсом полностью характеризуют связанное состояние.

Описанный нами вывод динамического уравнения Бете — Солпитера (17) уже не пригоден для вывода динамического уравнения для волновой функции (18), хотя интуитивно ясно, что волновая функция связанного состояния должна удовлетворять однородному уравнению

$$\Phi^A_{ab}(x_1 x_2) = (G^{(0)}_{ab} * V_{ab} * \Phi^A_{ab})(x_1 x_2). \qquad (19)$$

Понять этот результат можно следующим образом. Введем в уравнении (17) переменные $X = (x_1 + x_2)/2$, $x = x_1 - x_2$ и перейдем к фурье-образу волновой функции по переменной X:

$$\Phi_{ab}(x \mid P) = \int dX \exp(\mathrm{i}\, PX)\, \Phi_{ab}(X, x).$$

Тогда уравнение (17) с учетом трансляционной инвариантности теории можно переписать в следующем виде:

$$\Phi_{ab}(x|P) = \Phi^{(0)}_{ab}(x|P) + \int dy\, dz G^{(0)}_{ab}(P|x;\ y)\, V_{ab}(P|y;\ z)\, \Phi_{ab}(z|P), \qquad (20)$$

где

$$G^{(0)}_{ab}(Xx;\ Yy) = G^{(0)}_{ab}(X - Y|x;\ y) =$$
$$= (2\pi)^{-4} \int dP \exp[-\mathrm{i}P(X-Y)]\, G^{(0)}_{ab}(P|x;\ y); \qquad (21)$$
$$V_{ab}(Xx;\ Yy) = V_{ab}(X - Y \mid x;\ y) =$$
$$= (2\pi)^{-4} \int dP \exp[-\mathrm{i}P(X-Y)] V_{ab}(P \mid x;\ y). \qquad (22)$$

Если $\sqrt{P^2} = M_A < m_a + m_b$, то неоднородный член в уравнении (20), очевидно, обращается в нуль, и мы, таким образом, приходим к однородному уравнению для волновой функции связанного состояния

$$\begin{gathered}\Phi^A_{ab}(x|\mathbf{P}) = \int dy\, dz G^{(0)}_{ab}(P_A|x;\ y)\, V_{ab}(P_A|y;\ z)\, \Phi^A_{ab}(z|\mathbf{P}),\\ P_A^2 = M_A^2,\ P_A^0 \equiv E_A = E(\mathbf{P},\ M_A) = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M_A^2}.\end{gathered} \qquad (23)$$

Однако ясно, что переход к однородному уравнению диктуется еще заданием правильных граничных условий исходя из физической постановки задачи описания связанной системы.

Строгий вывод уравнения (23) основан на исследовании сингулярностей двухчастичной функции Грина по инвариантной массе системы двух частиц, и мы коротко остановимся на нем здесь.

Определим фурье-образ двухчастичной функции Грина

$$(2\pi)^4 \delta^4(P - Q)\, \overline{G}_{ab}(P|x;\ y) =$$
$$= \int dX\, dY \exp(\mathrm{i}PX - \mathrm{i}QY)\, \overline{G}_{ab}(Xx;\ Yy). \qquad (24)$$

Формула обратного преобразования имеет вид

$$\bar{G}_{ab}(Xx;\ Yy) = \bar{G}_{ab}(X - Y|x;\ y) =$$
$$= (2\pi)^{-4} \int dP \exp[-\mathrm{i}P(X - Y)]\, \bar{G}_{ab}(P|x;\ y). \qquad (25)$$

Из выражения для двухчастичной функции Грина через вакуумное среднее от гейзенберговых операторов полей нетрудно увидеть, что величина $\bar{G}_{ab}(P \mid x;\ y)$ содержит полюсную сингулярность при энергии связанного состояния. Более точно для этой величины можно написать следующее представление:

$$\bar{G}_{ab}(P|x;\ y) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\sum\limits_{\sigma} \Phi^{A}_{ab}(x|\mathbf{P},\ \sigma)\, \bar{\Phi}^{A}_{ab}(y|\mathbf{P},\ \sigma)}{2E(\mathbf{P},\ M_A)\,[P^0 - E(\mathbf{P},\ M_A) + \mathrm{i}0]} + \bar{G}^{\mathrm{Reg}}_{ab}(P|x;\ y), \quad (26)$$

где $\bar{G}^{\mathrm{Reg}}_{ab}(P \mid x;\ y)$ уже не содержит полюсной сингулярности при $P^0 = E(\mathbf{P},\ M_A) = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M^2_A}$. Из представления (26) вблизи полюса, отвечающего связанному состоянию, получаем

$$\bar{G}_{ab}(P|x;\ y) = [\mathrm{i}(P^2 - M^2_A + \mathrm{i}0)]^{-1} \sum_{\sigma} \Phi^{A}_{ab}(x|\mathbf{P},\ \sigma)\, \bar{\Phi}^{A}_{ab}(y|\mathbf{P},\ \sigma). \quad (27)$$

Волновые функции $\Phi^{A}_{ab}(x|\mathbf{P},\ \sigma)$ связаны с матричным элементом (18) следующим образом:

$$\langle 0|T(\Phi_a(x_1)\,\Phi_b(x_2))|M_A;\ \mathbf{P},\sigma\rangle = (2\pi)^{-3/2} \exp(-\mathrm{i}PX)\, \Phi^{A}_{ab}(x|\mathbf{P},\sigma);$$
$$\langle M_A;\ \mathbf{P},\ \sigma|T(\bar{\Phi}_a(x_1)\,\bar{\Phi}_b(x_2))|0\rangle = (2\pi)^{-3/2} \exp(\mathrm{i}PX)\, \bar{\Phi}^{A}_{ab}(x|\mathbf{P},\ \sigma).$$

Заметим теперь, что подстановка соотношения (16) в выражении (15) приводит к уравнению для двухчастичной функции Грина

$$\bar{G}_{ab} = G^{(0)}_{ab} + G^{(0)}_{ab} * V_{ab} * \bar{G}_{ab}. \qquad (28)$$

Совершая в этом уравнении преобразование Фурье с помощью формул (21), (22) и (25), получаем

$$\bar{G}_{ab}(P|x;\ y) = G^{(0)}_{ab}(P|x;\ y) +$$
$$+ \int dx'\, dy' G^{(0)}_{ab}(P|x;\ x')\, V_{ab}(P|x';\ y')\, \bar{G}_{ab}(P|y';\ y). \qquad (29)$$

Подставим в уравнение (29) представление (26) для двухчастичной функции Грина, после чего умножим обе части полученного равенства на $(P^2 - M^2_A)$ и перейдем к пределу $P^2 \to M^2_A$. В результате найдем

$$\Phi^{A}_{ab}(x|\mathbf{P},\ \sigma) = \int dx'\, dy' G^{(0)}_{ab}(P_A|x;\ x')\, V_{ab}(P_A|x';\ y')\, \Phi^{A}_{ab}(y'|\mathbf{P},\ \sigma),$$
$$P^2_A = M^2_A. \qquad (30)$$

При выводе уравнения (30) необходимо учесть линейную независимость волновых функций $\Phi_{ab}^{A}(x \mid \mathbf{P}, \sigma)$, отвечающих различным квантовым числам σ.

Уравнение (30) является искомым уравнением Бете — Солпитера для волновой функции связанного состояния. Изложенный строгий вывод уравнения (30) может служить обоснованием эвристических рассуждений об отбрасывании неоднородного члена в уравнении (17) при переходе к описанию связанных состояний двухчастичной системы. Ход рассуждений можно обратить: например, после того как выведено уравнение (30), можно сказать, что для описания состояний рассеяния необходимо от уравнения (30) перейти к неоднородному уравнению с внеинтегральным членом, который правильно бы описывал граничные условия при x_1^0, $x_2^0 \to -\infty$. В этом случае первый метод, с помощью которого было выведено уравнение (17), мог бы служить обоснованием корректности такого перехода.

В следующем разделе мы покажем, как оба эти метода можно использовать при исследовании трехчастичных систем в квантовой теории поля.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Волновую функцию системы трех взаимодействующих частиц определим с помощью матричного элемента

$$\Phi_{abc}(x_1x_2x_3) = \langle 0 \mid T(\Phi_a(x_1)\,\Phi_b(x_2)\,\Phi_c(x_3)) \mid \Phi_{abc};\ \text{in}\rangle =$$
$$= \langle 0 \mid T(\varphi_a(x_1)\,\varphi_b(x_2)\,\varphi_c(x_3)\,S) \mid \Phi_{abc};\ \text{out}\rangle, \qquad (31)$$

где $\Phi_i(x)$, $i = a, b, c$ — гейзенберговы операторы частиц a, b и c; $\varphi_i(x)$ — асимптотические out-поля этих же частиц; $\mid \Phi_{abc};\ \text{in}\rangle$ — вектор состояния, отвечающий асимптотической при $t \to -\infty$ конфигурации трех свободных частиц. Вектор $\mid \Phi_{abc};\ \text{out}\rangle$ можно представить как результат действия операторов рождения на вектор вакуумного состояния

$$|\Phi_{abc};\ \text{out}\rangle = a_{\text{out}}^{+} b_{\text{out}}^{+} c_{\text{out}}^{+} |0\rangle.$$

С помощью редукционных формул Боголюбова, как и в предыдущем случае, нетрудно найти линейное соотношение, связывающее волновую функцию (31) с начальной волновой функцией трех свободных частиц:

$$\Phi_{abc}(x_1x_2x_3) = [(G_{abc} * D_a^{-1} D_b^{-1} D_c^{-1}) * \Phi_{abc}^{(0)}](x_1x_2x_3), \qquad (32)$$

где $\Phi_{abc}^{(0)}(x_1x_2x_3) = f_a(x_1)\,f_b(x_2)\,f_c(x_3)$ представляет собой волновую функцию начального состояния трех невзаимодействующих частиц; $D_i(x)$, $i = a, b, c$ — причинные функции Грина, определяемые выше соотношением (4); G_{abc} — трехчастичная (шеститочечная) функция

Грина, определяемая с помощью матричного элемента

$$G_{abc}(x_1x_2x_3;\ y_1y_2y_3)=$$
$$= i^3 \langle 0|T\,\Phi_a(x_1)\,\Phi_b(x_2)\,\Phi_c(x_3)\,\overline{\Phi}_a(y_1)\,\overline{\Phi}_b(y_2)\,\overline{\Phi}_c(y_3))|0\rangle =$$
$$= i^3 \langle 0|T\,(\varphi_a(x_1)\,\varphi_b(x_2)\,\varphi_c(x_3)\,\overline{\varphi}_a(y_1)\,\overline{\varphi}_b(y_2)\,\overline{\varphi}_c(y_3)\,S)\,S^+|0\rangle.$$

Раскрывая хронологическое произведение операторов поля с помощью обобщенной теоремы Вика, получаем следующее выражение для трехчастичной функции Грина:

$$G_{abc}=G_{abc}^{(0)}+G_{abc}^{(0)} * R_{abc} * G_{abc}^{(0)}, \tag{33}$$

где $G_{abc}^{(0)}=D_aD_bD_c$ — свободная функция Грина трех частиц, а функция R_{abc} имеет структуру

$$R_{abc}=R_a^{(2)}D_b^{-1}D_c^{-1}+D_a^{-1}R_b^{(2)}D_c^{-1}+D_a^{-1}D_b^{-1}R_c^{(2)}+$$
$$+R_{ab}^{(4)}D_c^{-1}+R_{bc}^{(4)}D_a^{-1}+R_{ac}^{(4)}D_b^{-1}+R_{abc}^{(6)}.$$

Функции $R_i^{(2)}$, $i=a,\ b,\ c$, и $R_{ij}^{(4)}$, $(ij)=ab,\ bc,\ ac$, определяются формулами (10) и (11), а функция R_{abc}^6 есть вакуумное среднее радиационного оператора шестого порядка:

$$R_{abc}^{(6)}(x_1x_2x_3;\ y_1y_2y_3)=$$
$$=\frac{1}{i^3}\left\langle 0\left|\frac{\delta^6 S}{\delta\overline{\varphi}_a(x_1)\,\delta\overline{\varphi}_b(x_2)\,\delta\overline{\varphi}_c(x_3)\,\delta\varphi_a(y_1)\,\delta\varphi_b(y_2)\,\delta\varphi_c(y_3)}\,S^+\right|0\right\rangle.$$

Подставим выражение (33) в соотношение (32). В результате получим

$$\Phi_{abc}(x_1x_2x_3)=\Phi_{abc}^{(0)}(x_1x_2x_3)+(G_{abc}^{(0)} * R_{abc} * \Phi_{abc}^{(0)})\,(x_1x_2x_3)=$$
$$=\Phi_{abc}^{(0)}(x_1x_2x_3)+(G_{abc}^{(0)} * \overline{R}_{abc} * \Phi_{abc}^{(0)})\,(x_1x_2x_3), \tag{34}$$

где $\overline{R}_{abc}=R_{ab}^{(4)}D_c^{-1}+R_{bc}^{(4)}D_a^{-1}+R_{ac}^{(4)}D_b^{-1}+R_{abc}^{(6)}$. Во втором равенстве соотношения (34) мы снова, как и при выводе формулы (12), воспользовались стабильностью одночастичных состояний. С учетом стабильности одночастичных состояний соотношение (32) также можно переписать в виде

$$\Phi_{abc}=(\overline{G}_{abc} * D_a^{-1}D_b^{-1}D_c^{-1}) * \Phi_{abc}^{(0)}, \tag{35}$$

где

$$\overline{G}_{abc}=G_{abc}^{(0)}+G_{abc}^{(0)} * \overline{R}_{abc} * G_{abc}^{(0)}=$$
$$=G_{abc}-G_{abc}^{(0)} * (R_a^{(2)}D_b^{-1}D_c^{-1}+D_a^{-1}R_b^{(2)}D_c^{-1}+D_a^{-1}D_b^{-1}R_c^{(2)}) * G_{abc}^{(0)}. \tag{33a}$$

Введем функцию V_{abc} с помощью равенства

$$\overline{R}_{abc}=V_{abc}+V_{abc} * G_{abc}^{(0)} * \overline{R}_{abc}. \tag{36}$$

Тогда соотношение (34) можно записать в виде динамического уравнения для волновой функции системы трех частиц

$$\Phi_{abc}(x_1x_2x_3)=\Phi_{abc}^{(0)}(x_1x_2x_3)+(G_{abc}^{(0)} * V_{abc} * \Phi_{abc})\,(x_1x_2x_3). \tag{37}$$

Уравнение (37) является основным интегральным уравнением в теории рассеяния трех частиц. С помощью редукционных формул Боголюбова можно легко показать, что функция $\overline{R}_{abc}$ непосредственно связана с амплитудой упругого рассеяния трех частиц. Более точно для матричного элемента S-оператора, отвечающего процессу упругого рассеяния трех частиц, справедливо следующее представление:

$$\langle \Phi'_{abc};\ \text{out} | S-1 | \Phi_{abc};\ \text{out} \rangle = \int (dx)\,(dy)\, \overset{*}{f'_a}(x_1)\, \overset{*}{f'_b}(x_2) \times$$

$$\times\, \overset{*}{f'_c}(x_3)\, R^{(6)}_{abc}(x_1x_2x_3;\ y_1y_2y_3)\, f_a(y_1)\, f_b(y_2)\, f_c(y_3), \tag{38}$$

где мы ввели сокращенное обозначение

$$(dx) = dx_1\, dx_2\, dx_3,\quad (dy) = dy_1\, dy_2\, dy_3.$$

Волновая функция связанного состояния трех частиц, определяемая с помощью матричного элемента

$$\Phi^A_{abc}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0 \mid T\,(\Phi_a(x_1)\, \Phi_b(x_2)\, \Phi_c(x_3)) \mid \Phi^A_{abc} \rangle,$$

где $|\, \Phi^A_{a\,bc} \rangle$ — вектор связанного состояния частиц a, b и c, будет удовлетворять однородному уравнению

$$\Phi^A_{abc}(x_1x_2x_3) = (G^{(0)}_{abc} * V_{abc} * \Phi^A_{abc})\,(x_1x_2x_3). \tag{39}$$

В подтверждение этого результата можно привести интуитивные соображения, аналогичные тем, которые мы отмечали в двухчастичном случае. Можно проделать строгий вывод уравнения (39) для волновой функции связанного состояния трех частиц, но мы не будем на нем останавливаться, поскольку он основан, по существу, на тех же рассуждениях, которые использовались нами в предыдущем разделе при выводе однородного уравнения для волновой функции связанного состояния двух частиц.

В трехчастичном случае возникает следующее новое обстоятельство: дело в том, что однородному уравнению (39) удовлетворяет не только волновая функция связанного состояния трех частиц. Например, волновая функция, отвечающая асимптотической при $t \to -\infty$ конфигурации, когда две частицы находятся в связанном состоянии, а третья частица — свободная, также удовлетворяет однородному уравнению (39). Действительно, определим волновую функцию состояния рассеяния, когда в начальном состоянии две частицы, скажем a и b, образуют составную систему, а третья частица c — свободная, с помощью матричного элемента

$$\Phi^A_{(ab)c}(x_1x_2x_3) = \langle 0 \mid T\,(\Phi_a(x_1)\, \Phi_b(x_2)\, \Phi_c(x_3)) \mid \Phi^A_{ab}\Phi_c;\ \text{in} \rangle, \tag{40}$$

где $|\, \Phi^A_{a\,b}\Phi_c;\ \text{in} \rangle$ — вектор связанного состояния частиц a и b и невзаимодействующей с ними частицы c.

Перейдем в уравнении (37) к переменным $X = (x_1 + x_2)/2$, $x = x_1 - x_2$, а третью координату оставим неизменной и соверши··

преобразование Фурье по переменной X. В результате получим

$$\Phi_{abc}(xx_3 \mid P) = \Phi^{(0)}_{abc}(xx_3 \mid P) + (G^{(0)}_{abc} * V_{abc} * \Phi_{abc})(xx_3 \mid P). \quad (41)$$

Если $\sqrt{P^2} = M_A < m_a + m_b$, то неоднородный член в уравнении (41) обращается в нуль и, следовательно, волновая функция (40) также удовлетворяет однородному уравнению (39). Легко понять, что волновые функции $\Phi^B_{a(bc)}$, $\Phi^C_{b(ac)}$ также будут удовлетворять однородному уравнению (39). Это обстоятельство говорит о том, что уравнения типа Бете — Солпитера в данном случае не имеют однозначных решений и выбор последних следует производить с помощью наложения дополнительных условий. В нерелятивистской теории рассеяния это обстоятельство было впервые замечено Л. Д. Фаддеевым [7]. Им же были выведены динамические уравнения (уравнения Фаддеева), свободные от указанного недостатка.

Возвращаясь к выводу динамического уравнения (37), нетрудно выяснить причину, которая приводит к указанной выше неоднозначности. Основное интегральное уравнение (37) с самого начала по сути его вывода приспособлено для описания процессов упругого рассеяния трех частиц и малопригодно для исследования процессов с участием связанных систем. Неоднородный член в уравнении (37), представляющий собой волновую функцию системы трех свободных частиц, правильно описывает граничное условие в задаче упругого рассеяния трех частиц и совершенно не пригоден для задания граничного условия, отвечающего асимптотической при $t \to -\infty$ конфигурации, в которой имеется связанная система двух частиц и невзаимодействующая с ними третья частица. Один из способов решения проблемы правильного задания граничных условий состоит в перестройке основного динамического уравнения (37).

Принимая во внимание сделанное замечание, рассмотрим вывод динамического уравнения для волновой функции (40). С этой целью введем функцию $V_{(ab)c}$ с помощью соотношения

$$\overline{R}_{abc} - R^{(4)}_{ab} D_c^{-1} = V_{(ab)c} + V_{(ab)c} * G^{(0)}_{abc} * \overline{R}_{abc}.$$

Подставляя это соотношение в равенство (34), получаем

$$\Phi_{abc}(x_1x_2x_3) = \Phi_{ab}(x_1x_2)\,\Phi^{(0)}_c(x_3) + $$
$$+ (G^{(0)}_{abc} * V_{(ab)c} * \Phi_{abc})(x_1x_2x_3), \quad (42)$$

где

$$\Phi_{ab}(x_1x_2) = \Phi^{(0)}_{ab}(x_1x_2) + [(D_aD_b) * R^{(4)}_{ab} * \Phi^{(0)}_{ab}](x_1x_2).$$

Уравнение (42) эквивалентно исходному уравнению (37), однако от уравнения (42) теперь легко перейти к динамическому уравнению для волновой функции (40), описывающей процесс развала связанного состояния. Для этого достаточно неоднородный член в уравнении (42) положить равным $\Phi^A_{ab}(x_1x_2)\,\Phi^{(0)}_c(x_3)$, где Φ^A_{ab} — волновая функция связанного состояния частиц a и b. В результате мы приходим к уравнению

$$\Phi^A_{(ab)c}(x_1x_2x_3) = \Phi^A_{ab}(x_1x_2)\,\Phi^{(0)}_c(x_3) + (C^{(0)}_{abc} * V_{(ab)c} * \Phi^A_{(ab)c})(x_1x_2x_3). \quad (43)$$

Легко понять, что волновая функция (40), удовлетворяющая уравнению (43), будет описывать процесс развала связанного состояния частиц a и b в результате его взаимодействия с частицей c. Неоднородный член в уравнении (43) задает правильное граничное условие при $t \to -\infty$, а наличие свободной функции Грина $G^{(0)}_{abc}$ в ядре этого уравнения обеспечивает асимптотическую при $t \to +\infty$ конфигурацию трех свободных частиц.

Если определить функцию $R_{(ab)c}$ с помощью равенства

$$R_{(ab)c} = V_{(ab)c} + V_{(ab)c} * G^{(0)}_{abc} * R_{(ab)c},$$

то уравнение (43) можно переписать в виде следующего соотношения:

$$\Phi^A_{(ab)c}(x_1x_2x_3) = \Phi^A_{ab}(x_1x_2)\,\Phi^{(0)}_c(x_3) + (G^{(0)}_{abc} * R_{(ab)c} * \Phi^A_{ab}\Phi^{(0)}_c)(x_1x_2x_3).$$

Ниже мы покажем, что функция $R_{(ab)c}$ непосредственно связана с амплитудой процесса развала связанного состояния, причем для матричного элемента S-оператора, отвечающего указанному процессу, можно написать следующее выражение:

$$\langle\Phi_{abc};\ \mathrm{out}|S-1|\Phi^A_{ab}\Phi_c;\ \mathrm{out}\rangle = \frac{1}{i}(f^*_a f^*_b f^*_c) * R_{(ab)c} * (\Phi^A_{ab} f_c).$$

Для описания процесса упругого рассеяния на связанном состоянии удобнее произвести другую перестройку основного интегрального уравнения для волновой функции системы трех частиц. Рассмотрим для определенности процесс упругого рассеяния частицы c на связанном состоянии частиц a и b. Если подставить равенство (36) в выражение для трехчастичной функции Грина $\overline{G}_{abc}$, то придем к уравнению для функции Грина

$$\overline{G}_{abc} = G^{(0)}_{abc} + G^{(0)}_{abc} * V_{abc} * \overline{G}_{abc}, \quad (44)$$

которое можно переписать в эквивалентной форме

$$\overline{G}_{abc} = \overline{G}^{(0)}_c + \overline{G}^{(0)}_c * \overline{V}_c * \overline{G}_{abc}, \quad (45)$$

где $\overline{V}_c = V_{abc} - V_{ab}D^{-1}_c$, $\overline{G}^0_c = \overline{G}_{ab}D_c$, причем $\overline{G}_{ab}$ удовлетворяет уравнению (28). Подставляя уравнение (45) в соотношение (35), получаем уравнение для волновой функции системы трех частиц в виде

$$\Phi_{abc}(x_1x_2x_3) = \Phi^{(0)}_{(ab)c}(x_1x_2x_3) + (\overline{G}^{(0)}_c * \overline{V}_c * \Phi_{abc})(x_1x_2x_3), \quad (46)$$

где

$$\Phi^{(0)}_{(ab)c}(x_1x_2x_3) = [(\overline{G}^{(0)}_c * G^{(0)-1}_{abc}) * \Phi^{(0)}_{abc}](x_1x_2x_3) = \Phi_{ab}(x_1x_2)\,\Phi^0_c(x_3).$$

Для описания процесса упругого рассеяния на связанном состоянии неоднородный член в уравнении (46) необходимо заменить $\Phi^A_{ab} \times$

$\times\Phi_c^{(0)}$, где Φ_{ab}^A — волновая функция связанного состояния частиц a и b, задав тем самым правильное граничное условие при $t\to-\infty$. Функция Грина $\overline{G}_c^{(0)}$, стоящая в ядре уравнения (46), будет обеспечивать требуемое для данной задачи граничное условие при $t\to+\infty$.

Определим функцию $R^{c;c}$ с помощью уравнения

$$R^{c;c}=\overline{V}_c+\overline{V}_c*\overline{G}_c^{(0)}*R^{c;c}.$$

Тогда уравнение (46) можно переписать в виде следующего равенства:

$$\Phi_{abc}=\Phi_{ab}^A\Phi_c^{(0)}+\overline{G}_c^{(0)}*R^{c;c}*(\Phi_{ab}^A\Phi_c^{(0)}).$$

Функция $R^{c;c}$ непосредственно связана с амплитудой упругого рассеяния частицы c на связанном состоянии частиц a и b. Соответствующий матричный элемент S-оператора выражается через функцию $R^{c;c}$ с помощью формулы

$$\langle\Phi_{(ab)c}^B;\ \mathrm{out}|S-1|\Phi_{(ab)c}^A;\ \mathrm{out}\rangle=-\mathrm{i}\,(\overset{*}{\Phi_{ab}^B f_c})*R^{c;c}*(\Phi_{ab}^A f_c).$$

Рассмотренные примеры указывают на общую схему построения динамических уравнений. В общем случае задачу можно сформулировать следующим образом: написать динамическое уравнение, решение которого непосредственно связано с амплитудой перехода системы из состояния, характеризуемого волновой функцией $\Phi_\beta^{(0)}$, в состояние с волновой функцией $\Phi_\alpha^{(0)}$. Индексы α и β пробегают значения a, b, c, abc так что, например, $\alpha=c$ означает, что частица c в состоянии $\Phi_c^{(0)}$ является свободной: $\Phi_c^{(0)}(x_1x_2x_3)=\Phi_{ab}^A(x_1x_2)\,f_c(x_3)$, аналогично $\Phi_a^{(0)}(x_1x_2x_3)=f_a(x_1)\,\Phi_{bc}^B(x_2x_3)$, $\Phi_b^{(0)}(x_1x_2x_3)=\Phi_{ac}^C(x_1x_3)\times\times f_b(x_2)$. Волновая функция $\Phi_{abc}^{(0)}(x_1x_2x_3)=f_a(x_1)\,f_b(x_2)\,f_c(x_3)$ описывает состояние трех свободных частиц.

Будем исходить из основного интегрального уравнения (37) для волновой функции состояния рассеяния трех частиц. Перестройку этого уравнения осуществим, использовав представление для трехчастичной функции Грина в форме

$$\overline{G}_{abc}=\overline{G}_\beta^{(0)}+\overline{G}_\alpha^{(0)}*R^{\alpha;\beta}*\overline{G}_\beta^{(0)},\tag{47}$$

где $G_a^{(0)}=\overline{G}_{bc}D_a$; $\overline{G}_b^{(0)}=\overline{G}_{ac}D_b$; $\overline{G}_c^{(0)}=\overline{G}_{ab}D_c$; $\overline{G}_{abc}^{(0)}=D_aD_bD_c$.

Определим функцию $V^{\alpha;\beta}$ с помощью равенства

$$R^{\alpha;\beta}=V^{\alpha;\beta}+V^{\alpha;\beta}*\overline{G}_\alpha^{(0)}*R^{\alpha;\beta}.$$

Тогда соотношение (47) можно переписать в виде уравнения для трехчастичной функции Грина

$$\overline{G}_{abc}=\overline{G}_\beta^{(0)}+\overline{G}_\alpha^{(0)}*V^{\alpha;\beta}*\overline{G}_{abc}.$$

Подставляя это уравнение в соотношение (35), получаем уравнение для волновой функции в виде

$$\Phi_{abc}=\Phi_\beta+\overline{G}_\alpha^{(0)}*V^{\alpha;\beta}*\Phi_{abc},\tag{48}$$

где $\Phi_\beta = (\overline{G}_\beta^{(0)} * G_{abc}^{(0)-1}) * \Phi_{abc}^{(0)}$. Искомое уравнение получается из уравнения (48), если в качестве Φ_β взять волновую функцию асимптотического состояния $\Phi_\beta^{(0)}$, совпадающую с той из волновых функций, описанных выше, которая в рассматриваемой задаче задает граничное условие при $t \to -\infty$.

Функция $R^{\alpha;\beta}$ непосредственно связана с амплитудой перехода системы из начального асимптотического состояния с волновой функцией $\Phi_\beta^{(0)}$ в конечное асимптотическое состояние с волновой функцией $\Phi_\alpha^{(0)}$. Матричный элемент S-оператора, отвечающий указанному процессу, записывается следующим образом:

$$\langle \Phi_\alpha^{(0)};\ \mathrm{out}\ | S-1 | \Phi_\beta^{(0)};\ \mathrm{out}\rangle = \frac{1}{i}\overline{\Phi}_\alpha^{(0)} * R^{\alpha;\beta} * \Phi_\beta^{(0)}. \tag{49}$$

На релятивистский случай легко переносится известная из нерелятивистской теории рассеяния схема Фаддеева [7]. Для этого запишем функцию V_{abc}, определяемую с помощью равенства (36), в виде

$$V_{abc} = V_{ab}D_c^{-1} + V_{bc}D_a^{-1} + V_{ac}D_b^{-1} + V_0, \tag{50}$$

где V_0 — та часть функции V_{abc}, которая не сводится непосредственно к двухчастичным взаимодействиям в системе. Соотношение (50) по заданным функциям V_{abc}, V_{ab}, V_{bc}, V_{ac}, по существу, определяет функцию V_0. По каждой из этих функций находится функция R_α, $\alpha = a,\ b,\ c,\ 0$, с помощью уравнений

$$R_\alpha = V_\alpha + V_\alpha * G_{abc}^{(0)} * R_\alpha = V_\alpha + R_\alpha * G_{abc}^{(0)} * V_\alpha, \tag{51}$$

так что $R_c = R_{ab}^{(4)}D_c^{-1}$, $R_b = R_{ac}^{(4)}D_b^{-1}$, $R_a = R_{bc}^{(4)}D_a^{(-1)}$, $R_0 = V_0 + V_0 * G_{abc}^{(0)} * R_0 = V_0 + R_0 * G_{abc}^{(0)} * V_0$.

Следуя Фаддееву, введем функции $M_{\alpha;\beta}$ с помощью соотношений

$$M_{\alpha;\beta} = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} + V_\alpha * \overline{G}_{abc} * V_\beta. \tag{52}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{\alpha;\beta} M_{\alpha;\beta} = \overline{R}_{abc}. \tag{53}$$

Из определения (52) функций $M_{\alpha;\beta}$ и уравнения (44) для трехчастичной функции Грина получаем

$$M_{\alpha;\beta} = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} + V_\alpha * G_{abc}^{(0)} * \sum_\gamma M_{\gamma;\beta}.$$

Умножим левую и правую части полученного равенства на $(1 + R_\alpha * G_{abc}^{(0)})$. Принимая во внимание соотношение (51), получаем систему уравнений для величин $M_{\alpha;\beta}$:

$$M_{\alpha;\beta} = R_\alpha \delta_{\alpha\beta} + R_\alpha * G_{abc}^{(0)} * \sum_{\gamma\neq\alpha} M_{\gamma;\beta}. \tag{54}$$

Функции $M_{\alpha;\beta}$ в отличие от введенных выше функций $R^{\alpha;\beta}$ не связаны простыми формулами с амплитудами физических процессов в системе трех частиц. Единственное простое соотношение (53) указывает на непосредственную связь этих величин с амплитудой упругого рассеяния трех частиц.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ *LSZ* И АМПЛИТУДЫ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим теорию нейтральных скалярных частиц. Пусть $f_m(x)$ — гладкое отрицательно-частотное решение уравнения Клейна — Гордона

$$(\Box_x + m^2)\, f_m(x) = 0.$$

Обозначим $f_{m;\alpha}(x)$ полную ортонормированную систему гладких отрицательно-частотных решений уравнения Клейна — Гордона. Условие ортогональности записывается в форме

$$\mathrm{i}\int d^3\mathbf{x}\, \overset{*}{f}_{m;\,\alpha}(x)\, \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0} f_{m;\,\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Условие полноты имеет вид

$$\mathrm{i}\sum_\alpha f_{m;\,\alpha}(x)\, \overset{*}{f}_{m;\,\alpha}(y) = D^{(-)}(m;\ x-y),$$

где $D^{(-)}(m;\ x-y)$ — отрицательно-частотная часть перестановочной функции скалярного поля. Для практических целей мы будем использовать предельный случай гладких решений уравнения Клейна — Гордона в форме плоских волн

$$f_{m;\alpha}(x) \to f_{m;\mathbf{p}}(x) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-\mathrm{i}\, px), \qquad (55)$$
$$p^0 = E(\mathbf{p},\ m) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

При этом условие ортогональности записывается как

$$\mathrm{i}\int d^3\mathbf{x}\, \overset{*}{f}_{m;\,\mathbf{p}}(x)\, \overleftrightarrow{\partial_0} f_{m;\,\mathbf{q}}(x) = 2E(\mathbf{p},\ m)\, \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q}),$$

а условие полноты в виде

$$\mathrm{i}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E(\mathbf{p},\, m)} f_{m;\,\mathbf{p}}(x)\, \overset{*}{f}_{m;\,\mathbf{p}}(y) = D^{(-)}(m;\ x-y).$$

Определим сглаженные операторы поля с помощью формул

$$a_t^{(-)}(f_{m;\,\alpha}) = \mathrm{i}\int\limits_{x^0=t} d^3\mathbf{x}\, \overset{*}{f}_{m;\,\alpha}(x)\, \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi_a(x) \equiv a_t^{(-)\alpha}; \qquad (56)$$

$$a_t^{(+)}(f_{m;\,\alpha}) = \mathrm{i}\int\limits_{x^0=t} d^3\mathbf{x}\, \Phi_a(x)\, \overleftrightarrow{\partial_0} f_{m;\,\alpha}(x) \equiv a_t^{(+)\alpha}, \qquad (57)$$

где $\Phi_a(x)$ — гейзенбергов оператор поля частицы a: $f_{m;\alpha}(x)$ — гладкое нормированное отрицательно-частотное решение уравнения Клейна — Гордона. Легко установить, что гейзенбергов оператор поля можно выразить в терминах сглаженных операторов

$$\Phi_a(x) = \sum_\alpha a_t^{(-)\alpha} f_{m;\,\alpha}(\mathbf{x},\ t) + a_t^{(+)\alpha *} f_{m;\,\alpha}(\mathbf{x},\ t).$$
$$(x^0 = t)$$

Асимптотическое условие LSZ формулируется как условие слабой сходимости сглаженных операторов поля

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \langle\psi_1| a_t^{(\pm)}(f_{m;\,\alpha})|\psi_2\rangle &= \langle\psi_1| a_{\mathrm{out}}^{(\pm)}(f_{m;\,\alpha})|\psi_2\rangle; \\ \lim_{t\to-\infty} \langle\psi_1| a_t^{(\pm)}(f_{m;\,\alpha})|\psi_2\rangle &= \langle\psi_1| a_{\mathrm{in}}^{(\pm)}(f_{m;\,\alpha})|\psi_2\rangle \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

для любых нормированных векторов состояния $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$. В формулировке асимптотического условия операторы $a_{\mathrm{in,out}}^{(\pm)}(f)$ определяются по формулам (56) и (57), в которых гейзенбергов оператор поля $\Phi_a(x)$ следует заменить операторами асимптотических in- и out-полей $\varphi_a^{\mathrm{ex}}(x)$, удовлетворяющих свободному уравнению Клейна — Гордона. Отсюда, в частности, следует независимость операторов $a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}^{(\pm)}$ от времени.

С помощью асимптотического условия (58) в работе [4] была получена редукционная формула, позволяющая выразить матричные элементы оператора рассеяния S через вакуумные средние от хронологического произведения гейзенберговых операторов поля. Для частного случая, когда в начальном и конечном состояниях имеются только две свободные частицы, редукционная формула имеет вид

$$\begin{aligned} \langle\Phi_{ab}^{\mathrm{out}};\ \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|S-1|\Phi_{ab}^{\mathrm{out}};\ \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\rangle = i^4 \int dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2 \overset{*}{f}_{m_a;\,\mathbf{p}_1}(x_1)\times \\ \times \overset{*}{f}_{m_b;\,\mathbf{p}_2}(x_2) \overrightarrow{K}_{x_1}^{m_a} \overrightarrow{K}_{x_2}^{m_b} \langle 0|T(\Phi_a(x_1)\Phi_b(x_2)\Phi_a(y_1)\Phi_b(y_2))|0\rangle\times \\ \times \overleftarrow{K}_{y_1}^{m_a}\overleftarrow{K}_{y_2}^{m_b} f_{m_a;\,\mathbf{q}_1}(y_1) f_{m_b;\,\mathbf{q}_2}(y_2), \end{aligned} \tag{59}$$

где $K_x^m = (\Box_x + m^2)$ — дифференциальный оператор Клейна — Гордона, а направление стрелок над ним указывает на порядок его действия. Если в формулу (59) подставить соотношение (8) и воспользоваться свойством причинных функций Грина $\overrightarrow{K}_x^a D_a(x-y) = D_a(x-y)\overleftarrow{K}_y^a = \delta^4(x-y)$, то для матричного элемента S-оператора, соответствующего процессу упругого рассеяния двух частиц, получим

$$\begin{aligned} \langle\Phi_{ab}^{\mathrm{out}};\ \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|S-1|\Phi_{ab}^{\mathrm{out}};\ \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\rangle = i^2 \int dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2 \overset{*}{f}_{m_a;\,\mathbf{p}_1}(x_1) \overset{*}{f}_{m_b;\,\mathbf{p}_2}(x_2)\times \\ \times R_{ab}^{(4)}(x_1x_2;\ y_1y_2) f_{m_a;\,\mathbf{q}_1}(y_1) f_{m_b;\,\mathbf{q}_2}(y_2). \end{aligned} \tag{60}$$

Из редукционной формулы (59), таким образом, вытекает, что амплитуды физических процессов, когда в начальном и конечном состояниях имеются только свободные частицы, непосредственно связаны с одночастичными сингулярностями функций Грина. Еще раз подчеркнем, что при выводе редукционной формулы (59), из которой получено выражение (60), существенно используется асимптотическое условие (58).

Выражение (60) для матричного элемента S-матрицы можно получить, не прибегая к редукционной формуле (59). С этой целью запишем соотношение (8) в развернутой форме

$$\begin{aligned} & i^2 \langle 0 \mid T\,(\Phi_a(x_1)\,\Phi_b(x_2)\,\Phi_a(y_1)\,\Phi_b(y_2)) \mid 0 \rangle = \\ & = D_a(x_1 - y_1)\,D_b(x_2 - y_2) + (2\pi)^{-16} \times \\ & \times \int dp_1\,dp_2\,dk_1\,dk_2 \exp(-i\,p_1x_1 - i\,p_2x_2) \times \\ & \quad \times D_a(p_1)\,D_b(p_2)\,R_{ab}(p_1p_2;\ k_1k_2) \times \\ & \quad \times D_a(k_1)\,D_b(k_2) \exp(i\,k_1y_1 + i\,k_2y_2), \end{aligned} \tag{61}$$

где $D_a(p) = (m_a^2 - p^2 - i0)^{-1}$ — фурье-образ причинной функции Грина. Возьмем в этом равенстве определенную последовательность времен $x_1^0 > x_2^0 > y_1^0 > y_2^0$ и перейдем к сглаженным операторам поля по формулам (56) и (57), после чего устремим $x_1^0,\ x_2^0 \to +\infty$, а $y_1^0,\ y_2^0 \to -\infty$. Тогда с учетом асимптотического условия (58) в левой части соотношения (61) получим

$$\lim_{\substack{x_1^0,\, x_2^0 \to +\infty \\ y_1^0,\, y_2^0 \to -\infty}} \langle 0 | a_{x_1^0}^{(-)} b_{x_2^0}^{(-)} a_{y_1^0}^{(+)} b_{y_2^0}^{(+)} | 0 \rangle = \langle \Phi_{ab}^{\text{out}};\ \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | \Phi_{ab}^{\text{in}};\ \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \rangle.$$

В правой части равенства (61) воспользуемся предельными соотношениями

$$\lim_{t\to+\infty} i \int\limits_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int\limits_{y^0=-t} d^3\mathbf{y} \overset{*}{f}_{m;\,\mathbf{p}}(x) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0} D(x-y) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y^0} f_{m;\,\mathbf{q}}(y) = 2E(\mathbf{p},\ m)\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q}); \tag{62}$$

$$\lim_{t\to+\infty} i \int\limits_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \overset{*}{f}_{m;\,\mathbf{p}}(x) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk^0 D(k) \exp(-ikx) = (2\pi)^{5/2}\, i\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k}). \tag{63}$$

$$\lim_{t\to-\infty} i \int\limits_{y^0=t} d^3\mathbf{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk^0 D(k) \exp(iky) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y^0} f_{m;\,\mathbf{q}}(y) = (2\pi)^{5/2}\, i\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}). \tag{64}$$

В результате в правой части равенства (61) получаем

$$i^2 2E(\mathbf{p}_1,\ m_a)\,\delta^3(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\,2E(\mathbf{p}_2,\ m_b)\,\delta^3(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2) + i^4(2\pi)^{-6} R_{ab}^{(4)}(\tilde{p}_1\tilde{p}_2;\ \tilde{q}_1\tilde{q}_2),$$

где тильда означает, что соответствующий импульс лежит на массовой поверхности, $\tilde{p}_1^2 = m_a^2 = \tilde{q}_1^2$, $\tilde{p}_2^2 = m_b^2 = \tilde{q}_2^2$, и мы учли стабильность одночастичных состояний. Таким образом, после предельного перехода $x_1^0, x_2^0 \to +\infty$, $y_1^0, y_2^0 \to -\infty$ в равенстве (61) согласно описанной выше процедуре находим

$$\langle \Phi_{ab}^{\text{out}};\ \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | \Phi_{ab}^{\text{in}};\ \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\rangle = 2E(\mathbf{p}_1,\ m_a)\,\delta^3(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\,2E(\mathbf{p}_2,\ m_b)\,\delta^3(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2) + \\ + \mathrm{i}^2(2\pi)^{-6}R_{ab}^{(4)}(\tilde{p}_1\tilde{p}_2;\ \tilde{q}_1\tilde{q}_2). \tag{65}$$

Последнее слагаемое в (65), очевидно, равно

$$\mathrm{i}^2\int dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2\,\overset{*}{f}_{m_a;\,\mathbf{p}_1}(x_1)\,\overset{*}{f}_{m_b;\,\mathbf{p}_2}(x_2)\,R_{ab}^{(4)}(x_1x_2;\ y_1y_2)\times \\ \times f_{m_a;\,\mathbf{q}_1}(y_1)\,f_{m_b;\,\mathbf{q}_2}(y_2),$$

что в точности совпадает с выражением (60).

Проделанный вывод формулы (65) позволяет последовательно проследить связь асимптотического условия LSZ с одночастичными сингулярностями функций Грина.

Исходя из представления (33) для трехчастичной функции Грина таким же способом можно легко получить выражение для амплитуды упругого рассеяния трех частиц. Для этого необходимо в левой и правой частях соотношения (33) провести процедуру сглаживания с помощью формул (56) и (57) и совершить предельный переход

$$x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0 \to +\infty,\quad y_1^0,\ y_2^0,\ y_3^0 \to -\infty.$$

Используя асимптотическое условие (58) и предельные соотношения (62) — (64), получаем

$$\langle \Phi_{abc}^{\text{out}};\ \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 | \Phi_{abc}^{\text{in}};\ \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\rangle = 2E(\mathbf{p}_1,\ m_a)\,\delta^3(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1)\,2E(\mathbf{p}_2,\ m_b)\times \\ \times\delta^3(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2)\,2E(\mathbf{p}_3,\ m_c)\,\delta^3(\mathbf{p}_3-\mathbf{q}_3) + \\ + \mathrm{i}^2(2\pi)^{-6}R_{ab}^{(4)}(\tilde{p}_1\tilde{p}_2;\ \tilde{q}_1\tilde{q}_2)\,2E(\mathbf{p}_3,\ m_c)\,\delta^3(\mathbf{p}_3-\mathbf{q}_3) + \\ + \mathrm{i}^2(2\pi)^{-6}R_{bc}^{(4)}(\tilde{p}_2\tilde{p}_3;\ \tilde{q}_2\tilde{q}_3)\,2E(\mathbf{p}_1,\ m_a)\,\delta^3(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_1) + \\ + \mathrm{i}^2(2\pi)^{-6}R_{ac}^{(4)}(\tilde{p}_1\tilde{p}_3;\ \tilde{q}_1\tilde{q}_3)\,2E(\mathbf{p}_2,\ m_b)\,\delta^3(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2) + \\ + \mathrm{i}^3(2\pi)^{-9}R_{abc}^{(6)}(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3;\ \tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3). \tag{66}$$

Последнее слагаемое в формуле (66) совпадает с выражением (38), в котором в качестве волновых функций $f_a(x)$ следует взять плоские волны (55).

Покажем теперь, как с помощью изложенного метода можно получать выражения для амплитуд других возможных процессов в системе трех частиц. Рассмотрим процесс рассеяния частицы c на связанном состоянии частиц a и b. В этом случае удобно исходить из представления (47) для трехчастичной функции Грина при $\alpha =$

$= \beta = c$:

$$\overline{G}_{abc} = \overline{G}_c^{(0)} + \overline{G}_c^{(0)} * R^{c;\,c} * \overline{G}_c^{(0)}. \tag{67}$$

Напомним, что $\overline{G}_c^{(0)} = \overline{G}_{ab} D_c$, где $\overline{G}_{ab}$ — двухчастичная функция Грина.

Следуя работе [8], запишем выражение для трехчастичной функции Грина, выделив явно полюсы, отвечающие связанным состояниям частиц a и b:

$$\overline{G}_{abc}(x_1x_2x_3;\; y_1y_2y_3) = \mathrm{i}\,(2\pi)^{-5} \int dP\, dQ \exp(-\mathrm{i}PX + \mathrm{i}QY) \times$$
$$\times [2E_{ab}^B (E_{ab}^B - P^0 - \mathrm{i}0)\, 2E_{ab}^A (E_{ab}^A - Q^0 - \mathrm{i}0)]^{-1} \sum_{\sigma'\sigma} \Phi_{ab}^B (x|\mathbf{P},\ \sigma') \times$$
$$\times \langle \Phi_{ab}^B;\ \mathbf{P},\ \sigma' | T(\Phi_c(x_3)\Phi_c(y_3)) | \Phi_{ab}^A;\ \mathbf{Q},\ \sigma\rangle \overline{\Phi}_{ab}^A (y|\mathbf{Q},\ \sigma) + \ldots, \tag{68}$$

где волновые функции связанных состояний определяются с помощью матричных элементов

$$\langle 0| T(\Phi_a(x_1)\Phi_b(x_2)) | \Phi_{ab}^B;\ \mathbf{P},\ \sigma\rangle = (2\pi)^{-3/2} \exp(-\mathrm{i}PX)\, \Phi_{ab}^B (x|P,\ \sigma);$$
$$\langle \Phi_{ab}^A;\ \mathbf{Q},\ \sigma | T(\Phi_a(y_1)\Phi_b(y_2)) |0\rangle = (2\pi)^{-3/2} \exp(\mathrm{i}QY)\, \overline{\Phi}_{ab}^A (y|\mathbf{Q},\ \sigma);$$
$$X = (x_1 + x_2)/2,\ x = x_1 - x_2;$$
$$Y = (y_1 + y_2)/2,\ y = y_1 - y_2;$$
$$E_{ab}^A = E(\mathbf{Q},\ M_A) = \sqrt{\mathbf{Q}^2 + M_A^2};$$
$$E_{ab}^B = E(\mathbf{P},\ M_B) = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M_B^2}.$$

Для двухчастичной функции Грина $\overline{G}_{ab}$ будем использовать представление в виде

$$\overline{G}_{ab}(x_1x_2;\; y_1y_2) = \mathrm{i}\,(2\pi)^{-4} \int dP \times$$
$$\times \exp(-\mathrm{i}P(X - Y))\, [2E_{ab}^B (E_{ab}^B - P^0 - \mathrm{i}0)]^{-1} \times$$
$$\times \sum_{\sigma} \Phi_{ab}^B (x|\mathbf{P},\sigma)\, \overline{\Phi}_{ab}^B (y|\mathbf{P},\sigma) + \ldots = \mathrm{i}\,(2\pi)^{-4} \int dQ \exp[-\mathrm{i}Q(X - Y)] \times$$
$$\times [2E_{ab}^A (E_{ab}^A - Q^0 - \mathrm{i}0)]^{-1} \sum_{\sigma} \Phi_{ab}^A (x|\mathbf{Q},\ \sigma)\, \overline{\Phi}_{ab}^A (y|\mathbf{Q},\ \sigma) + \ldots$$

Введем фурье-образ трехчастичной функции Грина по переменным X и Y:

$$\overline{G}_{abc}(P|xx_3;\; yy_3|Q) = \int dX\, dY \exp(\mathrm{i}PX - \mathrm{i}QY)\, \overline{G}_{abc}(Xxx_3;\; Yyy_3). \tag{69}$$

Используя выражение (68), можно легко увидеть, что фурье-образ (69) трехчастичной функции Грина имеет полюсы, отвечающие связанным состояниям частиц a и b, и вблизи этих полюсов для него справедливо представление

$$\bar{G}_{abc}(P|xx_3;\quad yy_3|Q)|_{\substack{P^0\to E^B_{ab}\\ Q^0\to E^A_{ab}}} = \mathrm{i}\,(2\pi)^3\,[(M_B^2-P^2-\mathrm{i}0)\,(M_A^2-Q^2-i0)]^{-1}\times$$

$$\times\sum_{\sigma'\sigma}\Phi^B_{ab}(x|\mathbf{P},\sigma')\,\langle\Phi^B_{ab};\ \mathbf{P},\sigma'|T(\Phi_c(x_3)\,\Phi_c(y_3))|\,\Phi^A_{ab};\ \mathbf{Q},\sigma\rangle\,\overline{\Phi}{}^A_a\ (y|\mathbf{Q},\sigma).$$

Сделаем преобразование Фурье по переменным X и Y в равенстве (67). В результате мы придем к соотношению, в левой и правой частях которого имеются полюсы, соответствующие связанным состояниям частиц a и b. Умножая обе части полученного соотношения на $(M_B^2-P^2)\,(M_A^2-Q^2)$ и переходя к пределу $P^2\to M_B^2$ $Q^2\to M_A^0$, получаем

$$\begin{aligned}
&\langle\Phi^B_{ab};\ \mathbf{P},\ \sigma'|T(\Phi_c(x_3)\,\Phi_c(y_3))|\Phi^A_{ab};\ \mathbf{Q},\ \sigma\rangle=\\
&=\frac{1}{\mathrm{i}}D_c(x_3-y_3)\,\delta_{AB}\delta_{\sigma\sigma'}2E^A_{ab}\delta^3(\mathbf{P}-\mathbf{Q})+\\
&+\mathrm{i}\int(dx')\,(dy')\,\overline{\Phi}{}^B_{ab}(x_1'x_2'|\mathbf{P},\ \sigma')\,D_c(x_3-x_3')\,R^{c;\,c}(x_1'x_2'x_3';\ y_1'y_2'y_3')\times\\
&\times\Phi^A_{ab}(y_1'y_2'|\mathbf{Q},\ \sigma)\,D_c(y_3'-y_3).
\end{aligned}\tag{70}$$

Теперь уже не представляет труда найти выражение для амплитуды рассеяния частицы c на связанном состоянии частиц a и b. Возьмем в соотношении (70) последовательность времен $x_3^0>y_3^0$ и проведем процедуру сглаживания с помощью формул (56) и (57), после чего устремим $x_3^0\to+\infty$, $y_3^0\to-\infty$. Воспользовавшись асимптотическим условием (58) и предельным соотношением (62), найдем

$$\begin{aligned}
&\langle\Phi^B_{ab(c)};\ \mathbf{P},\ \sigma',\ \mathbf{p};\ \mathrm{out}|\Phi^A_{(ab)c};\ \mathbf{Q},\ \sigma,\ \mathbf{q};\ \mathrm{in}\rangle=\\
&=\delta_{AB}\delta_{\sigma\sigma'}2E^A_{ab}\delta^3(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\,2E(\mathbf{p};\ m_c)\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})-\\
&-\mathrm{i}\int(dx)\,(dy)\,\overline{\Phi}{}^B_{ab}(x_1x_2|\mathbf{P},\ \sigma')\,\overset{*}{f}_{m_c;\,\mathbf{p}}(x_3)\times\\
&\times R^{c;\,c}(x_1x_2x_3;\ y_1y_2y_3)\,\Phi^A_{ab}(y_1y_2|\mathbf{Q},\ \sigma)\,f_{m_c;\,\mathbf{q}}(y_3).
\end{aligned}$$

Полученное выражение для амплитуды рассеяния на связанном состоянии представляет собой, очевидно, развернутую запись формулы (49) при $\alpha=\beta=c$. Легко понять также, что с помощью описанного метода можно получить выражения для амплитуд произвольных процессов в системе трех частиц и, таким образом, полностью обосновать формулу (49).

Рассмотренный нами вывод формул для амплитуд процессов с участием связанных состояний двух частиц был основан на исследовании сингулярностей трехчастичной функции Грина по переменной, которая является инвариантной массой двухчастичных подсистем. Исследуя эти сингулярности, мы нашли явные выражения для амплитуд указанных процессов. Кроме того, мы выяснили, что амплитуды физических процессов с асимптотическими состояниями только свободных частиц связаны с одночастичными сингулярностями функций Грина, и показали, каким образом одночастичные сингулярности связаны с асимптотическим условием LSZ. Эти результаты наводят на мысль о возможности обобщения асимптотического условия LSZ, которое позволило бы учитывать наличие связанных состояний. Дальнейшее изложение будет посвящено формулировке такого асимптотического условия.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим прежде всего вопрос о нормировке волновых функций Бете — Солпитера для связанных состояний. Представление (27) для двухчастичной функции Грина вблизи полюса, отвечающего связанному состоянию двух частиц, является билинейным по волновым функциям Бете — Солпитера. Поэтому представление (27), по существу, уже фиксирует нормировку волновых функций Бете — Солпитера для связанных состояний.

Напишем формальное тождество

$$\overline{G}_{ab}(P|x;\ y)=\int dx'\,dy'\overline{G}_{ab}(P|x;\ x')\,\overline{G}^{-1}_{ab}(P|x';\ y')\,\overline{G}_{ab}(P|y';\ y), \tag{71}$$

где $\overline{G}_{ab}(P\mid x;\ y)$ является трансляционно-инвариантной частью двухчастичной функции Грина и определяется через полную функцию Грина двух частиц по формуле (24). Подставляя в (71) представление (26) и приравнивая вычеты при полюсах в левой и правой частях полученного равенства, приходим к условию нормировки для волновой функции связанного состояния

$$\int dx\,dy\overline{\Phi}^{A}_{ab}(x|\mathbf{P},\ \sigma')\,N_A(\mathbf{P}|x;\ y)\,\Phi^{A}_{ab}(y|\mathbf{P},\ \sigma)=\mathrm{i}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{72}$$

где $\Phi^{A}_{ab}(x\mid\mathbf{P},\ \sigma)$, очевидно, является трансляционно-инвариантной частью волновой функции Бете — Солпитера, и мы ввели обозначение

$$N_A(\mathbf{P}|x;\ y)=\frac{\partial}{\partial P^2}\,\overline{G}^{-1}_{ab}(P|x;\ y)|_{P^2=M_A^2}.$$

При выводе условия нормировки (72) мы учли линейную независимость волновых функций $\Phi^{A}_{ab}(x\mid\mathbf{P},\ \sigma)$, отвечающих различным квантовым числам σ.

Аналогично можно получить условие ортогональности волновых функций, отвечающих различным значениям квадрата инвариантной массы системы двух частиц. Для этого запишем уравнение для волновой функции связанного состояния в виде

$$\overline{G}^{-1}_{ab}(P_B)*\Phi^{B}_{ab}=0,\quad P_B^2=M_B^2 \tag{73}$$

и рассмотрим формальное тождество

$$\overline{G}_{ab}(P) * \overline{G}_{ab}^{-1}(P) * \Phi_{ab}^{B} = \Phi_{ab}^{B}. \tag{74}$$

Умножая (73) слева на $\overline{G}_{ab}(P)$ и вычитая полученное равенство из тождества (74), получаем

$$\overline{G}_{ab}(P) * \frac{\overline{G}_{ab}^{-1}(P) - \overline{G}_{ab}^{-1}(P_B)}{P^2 - M_B^2} * \Phi_{ab}^{B} = \frac{\Phi_{ab}^{B}}{P^2 - M_B^2}.$$

Подставляя сюда представление (27) и переходя к пределу $P^2 \to M_A^2$, получаем условие ортогональности волновых функций

$$\int dx\, dy \overline{\Phi}_{ab}^{A}(x|\mathbf{P},\ \sigma')\, W_{AB}(\mathbf{P}|x;\ y)\, \Phi_{ab}^{B}(y|\mathbf{P},\ \sigma) = i\delta_{AB}\delta_{\sigma\sigma'},$$

где мы ввели обозначение

$$W_{AB}(\mathbf{P}|x;\ y) = \frac{\overline{G}_{ab}^{-1}(P_A|x;\ y) - \overline{G}_{ab}^{-1}(P_B|x;\ y)}{P_A^2 - P_B^2};$$

$$P_A^2 = M_A^2, \quad P_B^2 = M_B^2.$$

Легко видеть, что

$$W_{AA}(\mathbf{P}|x;\ y) = W_{AB}(\mathbf{P}|x;\ y)|_{P_A^2 \to P_B^2} = N_A(\mathbf{P}|x;\ y).$$

Для полной волновой функции Бете — Солпитера условие нормировки, таким образом, можно записать в следующем виде:

$$\int dx\, dy N_A(\mathbf{P}|x;\ y) \int d^3\mathbf{X} \overline{\Phi}_{ab}^{A}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma') \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0} \Phi_{ab}^{A}(Xy|\mathbf{Q},\ \sigma) =$$
$$= 2E(\mathbf{P},\ M_A)\, \delta^3(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\, \delta_{\sigma\sigma'}.$$

Определим новые функции $\overline{U}_{ab}^{A}$ и V_{ab}^{A} с помощью формул

$$\overline{U}_{ab}^{A}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma) = \int dy \overline{\Phi}_{ab}^{A}(Xy|\mathbf{P},\ \sigma)\, N_A(\mathbf{P}|y;\ x); \tag{75}$$

$$V_{ab}^{A}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma) = \int dy N_A(\mathbf{P}|x,\ y)\, \Phi_{ab}^{A}(Xy|\mathbf{P},\ \sigma). \tag{75a}$$

Тогда условие нормировки можно переписать в двух эквивалентных формах

$$\int dx \int d^3\mathbf{X} \overline{U}_{ab}^{A}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma') \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0} \Phi_{ab}^{A}(Xx|\mathbf{Q},\ \sigma) =$$
$$= 2E(\mathbf{P},\ M_A)\, \delta^3(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\, \delta_{\sigma\sigma'} =$$
$$= \int dx \int d^3\mathbf{X} \overline{\Phi}_{ab}^{A}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma') \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0} V_{ab}^{A}(Xx|\mathbf{Q},\ \sigma).$$

Перейдем теперь непосредственно к формулировке асимптотического условия для составных частиц. Волновую функцию Бете — Солпитера для связанных состояний определим с помощью матричного элемента

$$\left.\begin{aligned}\langle 0|T(\Phi_a(X+x/2)\Phi_b(X-x/2))|\Phi^A_{ab}\rangle=\Phi^A_{ab}(Xx);\\ \langle\Phi^A_{ab}|T(\Phi_a(X+x/2)\Phi_b(X-x/2))/0\rangle=\overline{\Phi}^A_{ab}(Xx),\end{aligned}\right\}\qquad(76)$$

где $|\Phi^A_{ab}\rangle$ — вектор связанного состояния двух частиц a и b с инвариантной массой M_A.

Пусть $\overline{U}^A_{ab}$ и V^A_{ab} — гладкие по переменной X функции, удовлетворяющие условию нормировки

$$\int dx\int d^3\mathbf{X}\overline{U}^A_{ab}(Xx)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0}\Phi^A_{ab}(Xx)=$$
$$=\int dx\int d^3\mathbf{X}\overline{\Phi}^A_{ab}(Xx)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0}V^A_{ab}(Xx)=1.$$

Рассмотрим билокальную конструкцию вида

$$A(Xx)=T(\Phi_a(X+x/2)\Phi_b(X-x/2)).$$

Конструкция такого типа использовалась в работах [9—11] для построения локальных операторов поля составных частиц. in- и out-Поля составных частиц определяются, как и в случае элементарных частиц, с помощью уравнения Янга — Фельдмана

$$A(Xx)=A_{\mathrm{in}}(Xx)+\int dYD^{\mathrm{ret}}_A(X-Y)J(Yx)=$$
$$=A_{\mathrm{out}}(Xx)+\int dYD^{\mathrm{adv}}_A(X-Y)J(Yx),$$

где оператор тока определяется равенством

$$J(Xx)=(\Box_X+M^2_A)A(Xx).$$

Определим сглаженные операторы поля составной частицы с помощью формул

$$A^{(-)}_t(\Phi^A_{ab})=\int dx\int\limits_{X^0=t}d^3\mathbf{X}\overline{U}^A_{ab}(Xx)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0}A(Xx);\qquad(77)$$

$$A^{(+)}_t(\Phi^A_{ab})=\int dx\int\limits_{X^0=t}d^3\mathbf{X}A(Xx)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0}V^A_{ab}(Xx)\qquad(78)$$

и потребуем, чтобы выполнялись условия слабой сходимости *

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\langle\psi_1|A^{(\pm)}_t(\Phi^A_{ab})|\psi_2\rangle=\langle\psi_1|A^{(\pm)}_{\mathrm{out}}(\Phi^A_{ab})|\psi_2\rangle;\\ \lim_{t\to-\infty}\langle\psi_1|A^{(\pm)}_t(\Phi^A_{ab})|\psi_2\rangle=\langle\psi_1|A^{(\pm)}_{\mathrm{in}}(\Phi^A_{ab})|\psi_2\rangle\end{aligned}\right\}\qquad(79)$$

---

* Такое асимптотическое условие в неявной форме использовалось в [12]. См. также [13].

для любых нормированных векторов $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$. Операторы $A^{(\pm)}_{\text{in,out}}(\Phi^A_{ab})$ определяются по формулам (77) и (78), в которых билокальный оператор $A(Xx)$ следует заменить оператором $A_{\text{in,out}}(Xx)$. Операторы $A_{\text{in,out}}(Xx)$, как нетрудно увидеть, удовлетворяют свободному уравнению Клейна — Гордона

$$(\Box_X + M_A^2)\, A_{\text{in, out}}(Xx) = 0.$$

Сглаженные операторы $A^{(\pm)}_{\text{in,out}}(\Phi^A_{ab})$ можно интерпретировать как операторы рождения и уничтожения связанных in- и out-состояний с волновой функцией $\Phi^A_{a\,b}$.

Для практических целей нам достаточно будет использовать волновые функции Бете — Солпитера в представлении плоских волн. Иначе говоря, для волновых функций связанных состояний мы будем использовать выражение (76), в котором вектор связанного состояния имеет вид

$$|\Phi^A_{ab}\rangle = |M_A;\ \mathbf{P},\ \sigma\rangle.$$

Соответственно для функций $\overline{U}^A_{ab}$ и $V^A_{a\,b}$ мы будем использовать выражения (75) и (75а).

Представляет интерес сравнить формулировку асимптотического условия в форме (79) с асимптотическим условием, сформулированным в работе [9].

Пусть $f_{M_A}(X)$ — гладкое отрицательно-частотное решение уравнения Клейна — Гордона $(\Box_X + M_A^2)\, f_{M_A}(X) = 0$, нормированное условием

$$i \int d^3\mathbf{X} \overset{*}{f}_{M_A}(X) \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial X^0}} f_{M_A}(X) = 1.$$

Введем сглаженные операторы поля по формуле

$$\left.\begin{aligned} A_t^{(-)}(x) &= i \int\limits_{X^0 = t} d^3\mathbf{X} \overset{*}{f}_{M_A}(X) \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial X^0}} A(Xx) \equiv A_t^{(-)}(f_{M_A};\ x);\\ A_t^{(+)}(x) &= i \int\limits_{X^0 = t} d^3\mathbf{X} A(Xx) \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial X^0}} f_{M_A}(X) \equiv A_t^{(+)}(f_{M_A};\ x). \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Асимптотическое условие, сформулированное в работе [9], предполагает существование слабых пределов

$$\left.\begin{aligned} \langle\psi_1|A_t^{(\pm)}(x)|\psi_2\rangle &\xrightarrow[t\to+\infty]{} \langle\psi_1|A^{(\pm)}_{\text{out}}(x)|\psi_2\rangle;\\ \langle\psi_1|A_t^{(\pm)}(x)|\psi_2\rangle &\xrightarrow[t\to-\infty]{} \langle\psi_1|A^{(\pm)}_{\text{in}}(x)|\psi_2\rangle \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

для любых нормированных векторов $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$. Операторы $A^{(\pm)}_{\text{in,out}}(x)$ определяются с помощью формул (80), в которые вместо оператора $A(Xx)$ следует подставить асимптотические поля

$A_{\text{in,out}}(Xx)$, удовлетворяющие по переменной X свободному уравнению Клейна — Гордона.

В работе [9] было показано, что операторы $A^{(\pm)}_{\text{in,out}}(f_{M_A};x)$ допускают факторизованное представление в форме

$$A^{(-)}_{\text{in, out}}(f_{M_A};\,\mathrm{P};\ x) = A^{(-)}_{\text{in, out}}(\mathbf{P})\,\Phi^A_{ab}(x|\mathbf{P});$$

$$A^{(+)}_{\text{in, out}}(f_{M_A};\,\mathrm{P};\ x) = A^{(+)}_{\text{in, out}}(\mathbf{P})\,\overline{\Phi}^A_{ab}(x|\mathbf{P}),$$

где $A^{(\pm)}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{P})$ — операторы рождения и уничтожения связанного состояния с импульсом $\mathbf{P}$, удовлетворяющие каноническим перестановочным соотношениям

$$[A^{(-)}_{\text{in,out}}(\mathbf{P}),\ A^{(+)}_{\text{in,out}}(\mathbf{Q})] = 2E(\mathbf{P},\ M_A)\,\delta^3(\mathbf{P}-\mathbf{Q}),$$

все остальные коммутаторы равны нулю, $\Phi^A_{ab}(x\mid\mathbf{P})$ — волновая функция Бете — Солпитера. Таким образом, асимптотическое условие (81) в представлении плоских волн можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\langle\psi_1|A^{(-)}_t(f_{M_A};\,\mathrm{P};\ x)|\psi_2\rangle \xrightarrow[t\to\mp\infty]{} \langle\psi_1|A^{(-)}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{P})|\psi_2\rangle\,\Phi^A_{ab}(x|\mathbf{P});\\
&\langle\psi_1|A^{(+)}_t(f_{M_A};\,\mathrm{P};\ x)|\psi_2\rangle \xrightarrow[t\to\mp\infty]{} \langle\psi_1|A^{(+)}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{P})|\psi_2\rangle\,\overline{\Phi}^A_{ab}(x|\mathbf{P}).
\end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

Если принять во внимание, что асимптотическое условие (81) выполняется равномерно по переменной x, и учесть условие нормировки для волновой функции связанного состояния, то легко увидеть, что из асимптотического условия (82) можно получить асимптотическое условие в форме (79). Другими словами, мы имеем следующее важное утверждение: в представлении плоских волн из асимптотического условия (81) вытекает справедливость асимптотического условия (79).

Перепишем формулы (77) и (78) в представлении плоских волн

$$A^{(-)}_t(\Phi^A_{ab}(|\mathbf{P},\ \sigma)) \equiv A^{(-)}_t(\mathbf{P},\ \sigma) =$$
$$= \int dx\,dy N_A(\mathbf{P}|x;\ y)\int\limits_{X^0=t} d^3\mathbf{X}\overline{\Phi}^A_{ab}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0}A(Xy); \qquad (83)$$

$$A^{(+)}_t(\Phi^A_{ab}(|\mathbf{P},\ \sigma)) \equiv A^{(+)}_t(\mathbf{P},\ \sigma) =$$
$$= \int dx\,dy N_A(\mathbf{P}|x;\ y)\int\limits_{X^0=t} d^3\mathbf{X}A(Xx)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0}\Phi^A_{ab}(Xy|\mathbf{P},\ \sigma). \qquad (83a)$$

Операторы $A^{(\pm)}_{\text{in,out}}(\mathbf{P},\ \sigma)$ строятся по тем же формулам с заменой оператора $A(Xx)$ операторами асимптотических полей $A_{\text{in,out}}(Xx)$. При этом легко понять, что для операторов асимптотических полей можно написать следующее представление:

$$A_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(Xx)=\sum_{\sigma}\int\frac{d^3\mathbf{P}}{2E(\mathbf{P},\ M_A)}[A^{(-)}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{P},\sigma)\,\Phi^A_{ab}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma)+$$

$$+A^{(+)}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{P},\ \sigma)\,\overline{\Phi}^A_{ab}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma)]. \qquad (84)$$

Представление (84) согласуется с отмеченным выше результатом работы [9], если учесть, что волновая функция Бете — Солпитера допускает факторизованное представление

$$\Phi^A_{ab}(Xx\mid\mathbf{P},\ \sigma)=f_{M_A;\,\mathbf{P}}(X)\,\Phi^A_{ab}(x\mid\mathbf{P},\sigma),$$

где

$$f_{M_A;\,\mathbf{P}}(X)=(2\pi)^{-3/2}\exp(-\mathrm{i}\,PX);$$

$$P^0=E(\mathbf{P},\ M_A)=\sqrt{\mathbf{P}^2+M_A^2}.$$

С помощью асимптотического условия (79), используя метод работы [4], можно получить различные редукционные формулы. Например, имеем

$$\langle\psi_1|A^{(-)}_{\text{out}}(\mathbf{P},\ \sigma)\,T(\Phi_1(y_1)\ \dots\ \Phi_n(y_n))|\psi_2\rangle-$$

$$-\langle\psi_1|T(\Phi_1(y_1)\ \dots\ \Phi_n(y_n))\,A^{(-)}_{\text{in}}(\mathbf{P},\ \sigma)|\psi_2\rangle=$$

$$=\int dx\,dyN_A(\mathbf{P}|x;\ y)\int dX\overline{\Phi}^A_{ab}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma)\,\overrightarrow{K}^{M_A}_X\langle\psi_1|T(\Phi_a(X+y/2)\times$$

$$\times\langle\Phi_b(X-y/2)\,\Phi_1(y_1)\ \dots\ \Phi_n(y_n))|\psi_2\rangle$$

или

$$\langle\psi_1|A^{(+)}_{\text{out}}(\mathbf{P},\ \sigma)\,T(\Phi_1(y_1)\ \dots\ \Phi_n(y_n))|\psi_2\rangle-$$

$$-\langle\psi_1|T(\Phi_1(y_1)\dots\ \Phi_n(y_n))\,A^{(+)}_{\text{in}}(\mathbf{P},\ \sigma)|\psi_2\rangle=$$

$$=\int dx\,dy\,N_A(\mathbf{P}|y;\ x)\int dx\langle\psi_1|T(\Phi_a(X+y/2)\,\Phi_b(X-y/2)\,\Phi_1(y_1)\ \dots$$

$$\dots\ \Phi_n(y_n))|\psi_2\rangle\,\overleftarrow{K}^{M_A}_X\Phi^A_{ab}(Xx|\mathbf{P},\ \sigma).$$

В качестве другого примера на применение асимптотического условия (79) рассмотрим вывод формулы для амплитуды рассеяния на связанном состоянии. Для этой цели запишем соотношение (67) в развернутой форме

$$\overline{G}_{abc}(x_1x_2x_3;\ y_1y_2y_3)=\overline{G}_{ab}(x_1x_2;\ y_1y_2)\,D_c(x_3-y_3)+$$

$$+\int(dx')(dy')\,\overline{G}_{ab}(x_1x_2;\ x_1'x_2')\,D_c(x_3-x_3')\,R^{c;\,c}(x_1'x_2'x_3';\ y_1'y_2'y_3')\times$$

$$\times G_{ab}(y_1'y_2';\ y_1y_2)\,D_c(y_3'-y_3). \qquad (85)$$

Используя представление для функций Грина через вакуумное среднее от хронологического произведения гейзенберговых операторов полей частиц, с помощью асимптотического условия (79) нетрудно показать, что выполняются следующие предельные соотношения:

$$\lim_{t\to-\infty}\int dx\,dyN_A(\mathrm{Q}|y;\ x)\int\limits_{Y^0=t} d^3\mathrm{Y}\overline{G}_{ab}(y_1'y_2';\ Yy)\times$$

$$\times\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial Y^0}\Phi^A_{ab}(Yx\,|\mathrm{Q},\ \sigma)=\mathrm{i}^2\Phi^A_{ab}(y_1'y_2'|\mathrm{Q},\ \sigma);\qquad(86)$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int dx\,dyN_B(\mathbf{P}|y;\ x)\int\limits_{X^0=t} d^3X\overline{\Phi}^B_{ab}(Xy|\mathbf{P},\ \sigma')\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial X^0}\overline{G}_{ab}(Xx;\quad x_1'x_2')=$$

$$=\mathrm{i}^2\overline{\Phi}^B_{ab}(x_1'x_2'/\mathbf{P},\ \sigma').\qquad(87)$$

Рассмотрим в соотношении (85) последовательность времен $X^0>$ $>x_3^0>y_3^0>Y^0$ и проведем процедуру сглаживания по координатам X и Y с помощью формул (83) и (83а) и по координатам $\mathbf{x}_3$ и $\mathbf{y}_3$ с помощью формул (56), (57), после чего устремим X^0, $x_3^0\to+\infty$ и Y^0, $y_3^0\to-\infty$. С учетом предельных соотношений (62), (86) и (87) получим

$$\langle\Phi^B_{(ab)c};\ \mathbf{P},\ \sigma',\ \mathbf{p};\ \mathrm{out}|\Phi^A_{(ab)c};\ \mathbf{Q},\ \sigma,\ \mathbf{q};\ \mathrm{in}\rangle=$$

$$=\delta_{AB}\delta_{\sigma\sigma'}2E(\mathbf{P},\ M_A)\,\delta^3(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\,2E(\mathbf{p},\ m_c)\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})-$$

$$-\mathrm{i}\int(dx)(dy)\overline{\Phi}^B_{ab}(x_1x_2|\mathbf{P},\ \sigma')\overset{*}{f}_{m_c;\,\mathbf{p}}(x_3)\times$$

$$\times R^{c|c}(x_1x_2x_3;\ y_1y_2y_3)\,\Phi^A_{ab}(y_1y_2|\mathbf{Q},\ \sigma)\,f_{m_c;\,\mathbf{q}}(y_3),$$

что совпадает с полученным ранее выражением для амплитуды рассеяния на связанном состоянии. Очевидно, таким же способом можно получить выражения для амплитуд произвольных процессов в системе трех частиц. Таким образом, асимптотическое условие в форме (79) полностью решает поставленную в конце предыдущего раздела задачу.

5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ *LSZ* И ВЫВОД ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В предыдущих разделах мы установили, каким образом асимптотические условия, сформулированные в виде (58) и (79), связаны с определенными сингулярностями функций Грина. В этом разделе мы хотим показать, что применение асимптотических условий приводит, кроме того, к универсальному методу вывода динамических уравнений в квантовой теории поля. Универсальность метода заключается в том, что с его помощью можно получать как уравнения для волновой функции состояний рассеяния, так и уравнения для волновых функций связанных состояний. Поскольку функции Грина содержат полную информацию о системе, то вывод уравнений для волновых функций представляется естественным строить исходя из уравнений для функций Грина.

Суть метода, который мы хотим здесь описать, состоит в том, чтобы исходя из уравнений для функций Грина и применяя должным образом асимптотические условия, получать динамические уравнения для волновых функций. Следует заметить, что динамические уравнения, рассмотренные нами в разд. 1 и 2, тоже, по существу, получались как следствия соответствующих уравнений для функций Грина.

Рассмотрим вывод уравнения Бете — Солпитера. Будем исходить из уравнения (28) для двухчастичной функции Грина, которое мы перепишем в развернутой форме

$$\begin{aligned}\overline{G}_{ab}(x_1x_2;\ y_1y_2) = D_a(x_1-y_1)\,D_b(x_2-y_2) + \\ + \int (dx')\,(dy')\,D_a(x_1-x_1')\,D_b(x_2-x_2')\times \\ \times V_{ab}(x_1'x_2';\ y_1'y_2')\,\overline{G}_{ab}(y_1'y_2';\ y_1y_2).\end{aligned} \tag{88}$$

Проведем в этом уравнении процедуру сглаживания по переменным $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ с помощью формулы (57), после чего устремим $y_1^0\to-\infty$, $y_2^0\to-\infty$. Используя предельные соотношения

$$\lim_{y^0\to-\infty}\int d^3\mathbf{y}D(x-y)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}}f_{m;\,\mathbf{q}}(y) = f_{m;\,\mathbf{q}}(x); \tag{89}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{y_1^0\to-\infty\\ y_2^0\to-\infty}}\int d^3\mathbf{y}_1\int d^3\mathbf{y}_2\overline{G}_{ab}(x_1x_2;\ y_1y_2)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_1^0}}\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_2^0}}f_{m_a;\,\mathbf{q}_1}(y_1)\,f_{m_b;\,\mathbf{q}_2}(y_2) = \\ = \Phi_{ab}(x_1x_2|\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2),\end{aligned} \tag{90}$$

получаем уравнение Бете — Солпитера для волновой функции состояния рассеяния

$$\begin{aligned}\Phi_{ab}(x_1x_2\mid\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2) = \Phi_{ab}^{(0)}(x_1x_2\mid\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2) + \\ + \int (dx')\,(dy')\,D_a(x_1-x_1')\,D_b(x_2-x_2')\times \\ \times V_{ab}(x_1'x_2';\ y_1'y_2')\,\Phi_{ab}(y_2'y_2'\mid\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2),\end{aligned}$$

где

$$\Phi_{ab}^{(0)}(x_1x_2|\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2) = f_{m_a;\,\mathbf{q}_1}(x_1)\,f_{m_b;\,\mathbf{q}_2}(x_2);$$

$$\Phi_{ab}(x_1x_2\mid\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2) = \langle 0\mid T(\Phi_a(x_1)\,\Phi_b(x_2))\mid\Phi_{ab};\ \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2,\ \mathrm{in}\rangle.$$

Исходя из того же уравнения (88) можно получить динамическое уравнение для волновой функции Бете—Солпитера связанного состояния. Для этого проведем в уравнении (88) процедуру сглаживания по переменной $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)/2$ с помощью формулы (83а) и перейдем к пределу $Y^0\to-\infty$. Используя предельное соотношение (86) и учитывая, что неоднородный член в уравнении (88) в пределе $Y^0\to-\infty$ дает нулевой вклад, получаем однородное уравнение

Бете — Солпитера

$$\Phi^A_{ab}(x_1x_2|\mathbf{P},\ \sigma)=\int(dx')(dy')D_a(x_1-x_1')D_b(x_2-x_1')V_{ab}(x_1'x_2';\ y_1'y_2')\times$$
$$\times\Phi^A_{ab}(y_1'y_2'|\mathbf{P},\ \sigma).$$

В качестве другого примера рассмотрим вывод уравнения (43) для волновой функции, описывающей процесс развала связанного состояния. Подставляя определение функции $V_{(ab)c}$ в выражение (33а), получаем уравнение для функции Грина системы трех частиц в форме

$$\overline{G}_{abc}(x_1x_2x_3;\ y_1y_2y_3)=\overline{G}_{ab}(x_1x_2;\ y_1y_2)D_c(x_3-y_3)+$$
$$+\int(dx')(dy')D_a(x_1-x_1')D_b(x_2-x_2')\times$$
$$\times D_c(x_3-x_3')V_{(ab)c}(x_1'x_2'x_3';\ y_1'y_2'y_3')\overline{G}_{abc}(y_1'y_2'y_3';\ y_1y_2y_3).$$

Совершим в этом уравнении процедуру сглаживания по переменной $\mathbf{Y}=(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)/2$ с помощью формулы (83а) и по переменной $\mathbf{y}_3$ с помощью формулы (57) и устремим $Y^0\to-\infty$, $y_3^0\to-\infty$. С учетом предельных соотношений (89) и (86) получаем

$$\Phi^A_{(ab)c}(x_1x_2x_3|\mathbf{Q},\ \sigma,\ \mathbf{q})=\Phi^A_{ab}(x_1x_2|\mathbf{Q},\ \sigma)f_{m_c;\mathbf{q}}(x_3)+$$
$$+\int(dx')(dy')D_a(x_1-x_1')D_b(x_2-x_2')\times$$
$$\times D_c(x_3-x_3')V_{(ab)c}(x_1'x_2'x_3';\ y_1'y_2'y_3')\Phi^A_{(ab)c}(y_1'y_2'y_3'|\mathbf{Q},\ \sigma,\ \mathbf{q}),\qquad(91)$$

где

$$\Phi^A_{(ab)c}(x_1x_2x_3|\ \mathbf{Q},\ \sigma,\ \mathbf{q})=\langle 0|T(\Phi_a(x_1)\Phi_b(x_2)\Phi_c(x_3))|\Phi^A_{(ab)c};\mathbf{Q},\ \sigma,\ \mathbf{q};\ \mathrm{in}\rangle.$$

Уравнение (91) было получено нами в разд. 2 с помощью эвристических рассуждений. Метод, основанный на применении асимптотических условий, доставляет нам строгий вывод уравнения (91). Очевидно, что указанным методом можно получить также строгое обоснование других динамических уравнений, выведенных нами в разд. 2.

6. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ $R^{\alpha;\,\beta}$

Выше было показано, что функции $R^{\alpha;\beta}$, введенные в разд. 2 с помощью соотношения (47), непосредственно связаны с амплитудами физических процессов, в которых система из начального состояния, характеризуемого волновой функцией $\Phi_\beta^{(0)}$, переходит в конечное состояние с волновой функцией $\Phi_\alpha^{(0)}$. Функции $R^{\alpha;\beta}$ с помощью соотношения (47) задают определенное представление для функции Грина системы трех частиц. Рассмотрим несколько эквивалентных представлений для трехчастичной функции Грина:

$$\overline{G}_{abc} = \overline{G}_{\alpha}^{(0)} + \overline{G}_{\alpha}^{(0)} * R^{(+)\alpha;\,\beta} * \overline{G}_{\beta}^{(0)}; \tag{92}$$

$$\overline{G}_{abc} = \overline{G}_{\beta}^{(0)} + \overline{G}_{\alpha}^{(0)} * R^{(-)\alpha;\,\beta} * \overline{G}_{\beta}^{(0)}; \tag{93}$$

$$G_{abc} = \overline{G}_{\alpha}^{(0)}\delta_{\alpha\beta} + \overline{G}_{\alpha}^{(0)} * R^{\alpha;\,\beta} * \overline{G}_{\beta}^{(0)}. \tag{94}$$

Каждое из этих представлений определяет свою функцию $R^{\alpha;\,\beta}$ и, обратно, каждая из функций $R^{\alpha;\beta}$ с помощью соотношений (92), (93) и (94) задает определенное представление для функции Грина трех частиц. Из сравнения различных представлений для трехчастичной функции Грина находим связь между различными функциями $R^{\alpha;\beta}$:

$$R^{\alpha;\,\beta} = (1-\delta_{\alpha\beta})\,\overline{G}_{\beta}^{(0)-1} + R^{(+)\alpha;\,\beta} = (1-\delta_{\alpha\beta})\,\overline{G}_{\alpha}^{(0)-1} + R^{(-)\alpha;\,\beta}. \tag{95}$$

Откуда следует, что

$$\overline{\Phi}_{\alpha}^{(0)} * R^{\alpha;\,\beta} * \Phi_{\beta}^{(0)} = \overline{\Phi}_{\alpha}^{(0)} * R^{(+)\alpha;\,\beta} * \Phi_{\beta}^{(0)} = \overline{\Phi}_{\alpha}^{(0)} * R^{(-)\alpha;\,\beta} * \Phi_{\beta}^{(0)},$$

т. е. для вычисления амплитуд физических процессов мы можем использовать любую из функций $R^{\alpha;\beta}$. Этот факт означает, что функции $R^{\alpha;\beta}$, $R^{(+)\alpha;\beta}$, $R^{(-)\alpha;\beta}$ — физически эквивалентны. Сравнивая, например, представление (94) с представлением (33а), находим

$$R^{\alpha;\,\beta} = (1-\delta_{\alpha\beta})\,G_{abc}^{(0)-1} + \overline{R}_{abc} - R_{\alpha}\delta_{\alpha\beta} - R_{\alpha} * G_{abc}^{(0)} * R^{\alpha;\,\beta} -$$

$$- R^{\alpha;\,\beta} * G_{abc}^{(0)} * R_{\beta} - R_{\alpha} * G_{abc}^{(0)} * R^{\alpha;\,\beta} * G_{abc}^{(0)} * R_{\beta}.$$

Полученное соотношение можно использовать для построения итерационной схемы, позволяющей вычислять функции $R^{\alpha;\beta}$ в терминах основных функций теории — вакуумных средних радиационных операторов.

Для вычисления функций $R^{\alpha;\beta}$ можно воспользоваться также динамическими схемами, заимствованными из нерелятивистской теории рассеяния трех частиц. Например, исходя из определений функций $R^{(\pm)\alpha;\beta}$ и уравнения для трехчастичной функции Грина в форме

$$\overline{G}_{abc} = \overline{G}_{\alpha}^{(0)} + \overline{G}_{\alpha}^{(0)} * \overline{V}_{\alpha} * \overline{G}_{abc} = \overline{G}_{\alpha}^{(0)} + \overline{G}_{abc} * \overline{V}_{\alpha} * \overline{G}_{\alpha}^{(0)},$$

где $\overline{V}_{\alpha} = V_{abc} - V_{\alpha}$ (напомним, что индекс α пробегает значения a, b, c, 0), легко установить, что для функций $R^{(\pm)\alpha;\beta}$ справедливо следующее представление:

$$R^{(+)\alpha;\,\beta} = \overline{V}_{\alpha} + \overline{V}_{\alpha} * \overline{G}_{abc} * \overline{V}_{\beta};$$

$$R^{(-)\alpha;\,\beta} = \overline{V}_{\beta} + \overline{V}_{\alpha} * \overline{G}_{abc} * \overline{V}_{\beta}.$$

Подставляя сюда равенства

$$\overline{V}_{\alpha} * \overline{G}_{abc} * V_{\gamma} = R^{(+)\alpha;\,\gamma} * G_{abc}^{(0)} * R_{\gamma};$$

$$V_{\gamma} * \overline{G}_{abc} * \overline{V}_{\beta} = R_{\gamma} * G_{abc}^{(0)} * R^{(-)\gamma;\,\beta};$$

приходим к уравнениям * для функций $R^{(\pm)\alpha;\beta}$:

$$R^{(+)\alpha;\,\beta}=\overline{V}_\alpha+\sum_{\gamma\neq\beta}R^{(+)\alpha;\,\gamma}*G^{(0)}_{abc}*R_\gamma; \tag{96}$$

$$R^{(-)\alpha;\,\beta}=\overline{V}_\beta+\sum_{\gamma\neq\alpha}R_\gamma*G^{(0)}_{abc}*\ R^{(-)\gamma;\,\beta}. \tag{97}$$

Отсюда с учетом соотношения (95) получаем уравнения ** для функций $R^{\alpha;\beta}$:

$$R^{\alpha;\,\beta}=(1-\delta_{\alpha\beta})\,G^{(0)^{-1}}_{abc}+\sum_{\gamma\neq\alpha}R_\gamma*G^{(0)}_{abc}*R^{\gamma;\,\beta}=$$

$$=(1-\delta_{\alpha\beta})\,G^{(0)^{-1}}_{abc}+\sum_{\gamma\neq\beta}R^{\alpha;\,\gamma}*G^{(0)}_{abc}*R_\gamma. \tag{98}$$

Уравнения (96) — (98) могут служить основой для построения итераций к функциям $R^{\alpha;\,\beta}$. Система уравнений (98) является в особенности удобной для построения итерационной схемы тогда, когда функцией R_0 можно пренебречь. В этом случае, итерируя систему уравнений (98), мы получаем выражения для величин $R^{\alpha;\beta}$ только в терминах функций $R_\alpha \alpha=(a,\ b,\ c)$, которые являются вакуумными средними радиационных операторов четвертого порядка.

7. ВЫВОД ТРЕХМЕРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ НА СВЯЗАННОМ СОСТОЯНИИ

Динамические уравнения, рассмотренные в настоящей статье, являются четырехмерными и явно релятивистски-инвариантными. Поэтому для исследования структуры ядер этих уравнений можно использовать методы релятивистской квантовой теории поля. Например, в случае малой константы связи можно использовать известный из квантовой электродинамики метод инвариантной теории возмущений. Многие рассмотренные нами соотношения могут служить основой для вывода трехмерных уравнений, если воспользоваться для этой цели методом одновременной редукции, развитым в работах [12, 16, 17], истоки которого восходят к работе А. А. Логунова и А. Н. Тавхелидзе по квазипотенциальному подходу в квантовой теории поля [18].

В работе [12] с использованием метода одновременной редукции было получено одновременное уравнение для волновой функции упругого рассеяния частицы на связанном состоянии двух других частиц. Сейчас мы заново выведем это уравнение, используя для этой цели описанный нами выше метод вывода динамических уравнений в квантовой теории поля.

---

* Уравнения (96) и (97) являются, очевидно, релятивистским обобщением уравнений работы [14].

** Уравнения (98) в нерелятивистской теории рассеяния трех частиц были получены в работе [15].

Будем исходить из соотношения (85). Проведем в этом соотношении процедуру сглаживания по переменным $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ и $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2$ с помощью формул (83) и (83а), а по координате $\mathbf{y}_3$ с помощью формулы (57) и устремим $X^0 \to +\infty$, Y^0, $y_3^0 \to -\infty$. Учитывая предельные соотношения (86), (87) и (89), получаем

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{ab}^A;\ \mathbf{P};\ \text{out} | \Phi_c(x_3) | \Phi_{(ab)c}^A;\ \mathbf{Q},\ \mathbf{q};\ \text{in}\rangle &= \\ = 2E(\mathbf{P},\ M_A)\,\delta^3(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\, f_{m_c;\,\mathbf{q}}(x_3) &- \\ - \int dx_3'\,dy_3' D_c(x_3 - x_3')\, R_A^{c;\,c}(\mathbf{P}|x_3';\ y_3'|\mathbf{Q})\, f_{m_c;\,\mathbf{q}}(y_3'),&\end{aligned} \tag{99}$$

где мы ввели обозначения

$$R_A^{c;\,c}(\mathbf{P}|x_3';\ y_3'|\mathbf{Q}) = \int dx_1'\,dx_2'\,dy_1'\,dy_2' \overline{\Phi}_{ab}^A(x_1'x_2'|\mathbf{P}) \times \\ \times R^{c;\,c}(x_1'x_2'x_3';\ y_1'y_2'y_3')\,\Phi_{ab}^A(y_1'y_2'|\mathbf{Q})$$

и рассмотрели для простоты случай связанного состояния с нулевыми квантовыми числами σ.

Определим фурье-образы

$$D_c(x_3 - y_3) = (2\pi)^{-4} \int dp D_c(p) \exp[-\mathrm{i}\, p\,(x_3 - y_3)];$$

$$R_A^{c;\,c}(\mathbf{P}\,|\,p;\ q\,|\,\mathbf{Q}) = \int dx_3\,dy_3 \exp(\mathrm{i}px_3 - \mathrm{i}qy_3)\, R_A^{c;\,c}(\mathbf{P}\,|\,x_3;\ y_3\,|\,\mathbf{Q})$$

и совершим трехмерное преобразование Фурье в соотношении (99) по переменной $\mathbf{x}_3$. В результате найдем

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{ab}^A;\ \mathbf{P};\ \text{out}\,|\,\Phi_c(\mathbf{p},\ t)\,|\,\Phi_{(ab)\,c}^A;\ \mathbf{Q},\ \mathbf{q};\ \ \text{in}\,\rangle &= 2E(\mathbf{P},\ M_A)\,\delta^3(\mathbf{P}-\mathbf{Q}) \times \\ \times (2\pi)^{3/2}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \exp[-\mathrm{i}E(\mathbf{q},\ m_c)\,t] &- \\ -(2\pi)^{-5/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 D_c(p) \exp(-\mathrm{i}p^0 t)\, R_A^{c;\,c}(\mathbf{P}\,|\,p;\ \tilde{q}\,|\,\mathbf{Q}).&\end{aligned} \tag{100}$$

Введем новые функции

$$\left.\begin{aligned}\langle \Phi_{ab}^A; \mathbf{P}; \text{out}\,|\,\Phi_c(\mathbf{p},t)\,|\,\Phi_{(ab)\,c}^A;\ \mathbf{Q},\ \mathbf{q},\ \text{in}\,\rangle \exp[-\mathrm{i}E(\mathbf{P},\ M_A)\,t] &= \\ = (2\pi)^3\,\delta^3(\mathbf{P}+\mathbf{p}-\mathbf{Q}-\mathbf{q})\,2E(\mathbf{P},\ M_A)\,\chi_{\mathbf{Q};\,\mathbf{q}}(\mathbf{p},\ t),& \\ -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp^0 D_c(p)\, R_A^{c;\,c}(\mathbf{P}\,|\,p;\ \tilde{q}\,|\,\mathbf{Q}) &= \\ = \frac{(2\pi)^3\,\delta^3(\mathbf{P}+\mathbf{p}-\mathbf{Q}-\mathbf{q})\,T(\mathbf{p};\ \mathbf{q}\,|\,\mathbf{Q}+\mathbf{q})}{E^2(\mathbf{p},\ m_c)-[E-E(\mathbf{P},\ M_A)]^2-\mathrm{i}0},&\end{aligned}\right\} \tag{101}$$

где $E = E(\mathbf{q},\ m_c) + E(\mathbf{Q},\ M_A)$ — энергия начального состояния, и мы учли тот факт, что в силу трансляционной инвариантности функция $R_A^{c;\,c}$ содержит четырехмерную δ-функцию $\delta^4(P + p - Q - q)$. В терминах введенных функций соотношение (100) переписывается в виде

$$\chi_{\mathbf{Q},\mathbf{q}}(\mathbf{p}, t) = \chi^{(0)}_{\mathbf{Q},\mathbf{q}}(\mathbf{p}, t) + \{2E(P, M_A)[E^2(\mathbf{p}, m_c) - (E - E(\mathbf{P}, M_A))^2 - i0]\}^{-1} \int d\mathbf{k} T(\mathbf{p}; \mathbf{k} \mid \mathbf{Q}+\mathbf{q}) \chi^{(0)}_{\mathbf{Q},\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t), \quad (102)$$

где $\chi^{(0)}_{\mathbf{Q},\mathbf{q}}(\mathbf{p}, t) = (2\pi)^{-3/2}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \exp(-i Et)$, причем $\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{q} - \mathbf{p}$. Соотношение (102) удобно записать в символической форме

$$\chi_{\mathbf{Q},\mathbf{q}} = \chi^{(0)}_{\mathbf{Q},\mathbf{q}} + \tilde{G}^{(0)}_c T \chi^{(0)}_{\mathbf{Q},\mathbf{q}},$$

где оператору $\tilde{G}^{(0)}_c$ отвечает ядро

$$\tilde{G}^{(0)}_c(\mathbf{p}; \mathbf{k} \mid \mathbf{Q}+\mathbf{q}) = \frac{\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})}{2E_A[E^2(\mathbf{p}, m_c) - (E-E_A)^2 - i0]}.$$

Введем функцию V с помощью соотношения

$$T = V + V\tilde{G}^{(0)}_c T.$$

Тогда волновая функция $\chi_{\mathbf{Q},\mathbf{q}}$ будет удовлетворять уравнению

$$\chi_{\mathbf{Q},\mathbf{q}} = \chi^{(0)}_{\mathbf{Q},\mathbf{q}} + \tilde{G}^{(0)}_c V \chi_{\mathbf{Q},\mathbf{q}},$$

которое, как уже отмечалось, было получено в работе [12] другим способом. Легко убедиться в том, что введенная соотношением (101) функция $T(\mathbf{p}; \mathbf{k} \mid \mathbf{Q}+\mathbf{q})$ на энергетической поверхности

$$E(\mathbf{P}, M_A) + E(\mathbf{p}, m_c) = E(\mathbf{K}, M_A) + E(\mathbf{k}, m_c) = E,$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{Q}+\mathbf{q}-\mathbf{k}$, $\mathbf{P} = \mathbf{Q}+\mathbf{q}-\mathbf{p}$ — совпадает с амплитудой упругого рассеяния частицы c на связанном состоянии частиц a и b в инвариантной нормировке. По этой причине функцию $\chi_{\mathbf{Q},\mathbf{q}}$ мы называем волновой функцией упругого рассеяния на связанном состоянии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы стремились показать, что исходя из самой общей структуры локальной квантовой теории поля можно получать простые и наглядные соотношения, имеющие смысл динамических уравнений. С этой целью нами предложен оригинальный метод вывода динамических уравнений типа Бете — Солпитера и продемонстрирована универсальность этого метода, которая заключается в том, что он пригоден для вывода динамических уравнений как для волновых функций состояний рассеяния, так и для волновых функций связанных состояний. Кроме того, с помощью развитой нами методики можно получать последовательные формулы для амплитуд рассеяния элементарных частиц на составных системах и составных систем друг на друге, и, следовательно, эту методику можно использовать в релятивистской ядерной физике, а также в кварковой физике элементарных частиц.

При формулировке указанного метода мы не опирались на какую-либо конкретную модель квантовой теории поля, не прибегали к таким понятиям, как лагранжиан взаимодействия, а использовали лишь только те факты, которые лежат в основе аксиоматических формулировок квантовой теории поля. При таком подходе ядра получаемых динамических уравнений определяются вне рамок теории возмущений, что в конечном итоге может доставить привлекательную возможность для построения динамического аппарата теории сильных взаимодействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Salpeter E., Bethe H.**— Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 1232—1242.
2. **Gell-Mann M., Low F. E.**— Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 350—354.
3. **Nakanishi N.**— Progr. of Theoret. Phys. Suppl., 1969, N 43, p. 1—81.
4. **Lehman H., Symanzik K., Zimmerman W.**— Nuovo cimento, 1955, v. 1, p. 205—255; Ibid., 1957, v. 6, p. 319—333.
5. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
6. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
7. **Фаддеев Л. Д.**— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1459—1467; Тр. МИАН, 1963, т. 69.
8. **Mandelstam S.**— Proc. Roy. Soc., 1955, v. 233A, p. 248—266.
9. **Zimmerman W.**— Nuovo cimento, 1958, v. 10, p. 597—614.
10. **Haag R.**— Phys. Rev., 1958, v. 112, p. 669—673.
11. **Nishijima K.**— Phys. Rev., 1956, v. 111, p. 995—1011.
12. **Архипов А. А., Саврин В. И.**— ТМФ, 1974, т. 19, с. 310—324.
13. **Huang K., Weldon H. A.**— Phys. Rev., 1976, v. D11, p. 257—278.
14. **Lovelace C.**— Phys. Rev., 1964, v. 135B, p. 1225—1249.
15. **Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W.**— Nucl. Phys., 1967, v. B2, p. 167—180.
16. **Логунов А. А., Саврин В. И., Тюрин Н. Е., Хрусталев О. А.**— ТМФ, 1971, т. 6, с. 157—165.
17. **Архипов А. А., Саврин В. И.**— ТМФ, 1973, т. 16, с. 728—338; 1975, т. 24, с. 78—89, 303—314.
18. **Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.**— Nuovo cimento, 1963, v. 29, p. 380—399.