

ГЕТЕРОФАЗНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А. С. Шужовский, В. И. Юкалов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор основных экспериментальных данных по наблюдению гетерофазных состояний в различных физических системах. Описаны феноменологические теории и подходы к изучению динамики гетерофазных зародышей. Исследовано принципиальное содержание концепции квазисредних Н. Н. Боголюбова и на ее основе сформулированы принципы микроскопической равновесной теории гетерофазных состояний. На примере модельных задач теории магнетизма, сверхпроводимости и релятивистской ядерной физики рассмотрены особенности поведения термодинамических характеристик гетерофазных систем.

In this paper the review of basic experimental data on observations of heterophase states in different physical systems is given. Phenomenological theories and approaches to consider dynamics of heterophase nuclei are described. The essence of the Bogolubov concept of quasiverages is analysed, using which the principles of a microscopic equilibrium theory of heterophase states are formulated. Peculiarities of the thermodynamic behaviour of heterophase systems are illustrated by model examples of the theory of magnetism, superconductivity and relativistic nuclear physics.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время исследованию фазовых переходов и связанных с ними критических явлений уделяется большое внимание. Вызвано это, главным образом, следующими обстоятельствами. Во-первых, изучение фазовых переходов в конденсированных средах заметно влияет на развитие современной техники и технологии. Во-вторых, само понятие фазового перехода и методы его теории проникли и в последние годы прочно укоренились в самых различных областях физики — в квантовой теории поля, физике элементарных частиц, физике ядра и т. д. При этом особенно важно то, что фазовые переходы и критические явления, происходящие в разных по своей физической природе системах, обладают общими чертами и могут описываться в рамках единого подхода. Это обстоятельство позволяет трактовать теорию фазовых переходов как самостоятельную дисциплину.

Традиционный подход связан с рассмотрением фазовых переходов между чистыми (однородными в смысле фазового состава) состояниями и критических явлений, обусловленных гомогенными флуктуациями, т. е. коллективными возбуждениями в чистой фазе. Такие критические явления удаётся описать с помощью подхода Фишера —

Вайдома—Каданова—Вильсона [1, 2], тесно связанного с методом ренорм-группы Боголюбова—Ширкова [3, 4].

В то же время в целом ряде случаев удается экспериментально наблюдать явление взаимного проникновения и равновесного сосуществования разных фаз. Так, при приближении воды к температуре кипения в ней наблюдаются макроскопические пузырьки пара. Выше 0°C вода представляет собой равновесную смесь воды и льда, присутствующего в макроскопическом количестве, но не наблюдаемого обычными способами из-за быстрых флуктуаций в объеме системы. Именно наличие льда, имеющего иную упаковку молекул, чем вода, позволяет объяснить известную аномалию плотности воды в интервале температур от 0 до 4°C .

Подобного рода смеси фаз — гетерофазные состояния — наблюдаются в самых различных системах: в сверхпроводниках, магнетиках, сегнетоэлектриках, кристаллах, жидкостях и т. д. Упомянутые флуктуации плотности воды выше 0°C имеют прямую аналогию с флуктонами Д. И. Блохинцева в ядрах [5]. Идеи о гетерофазности нашли свое применение и в традиционной теории ядра в связи с проблемой промежуточных значений моментов тяжелых ядер [6]. Наконец, предсказанное А. М. Балдиным и подтвержденное экспериментально существование мультикварковых объектов в ядрах [7] можно трактовать как гетерофазное состояние кварковой материи [8].

Экспериментальное и теоретическое изучение гетерофазных состояний ведется уже не один десяток лет. Первые феноменологические теории состояний, являющихся равновесной смесью фаз, были предложены в 30-е годы [9]. Понятие гетерофазных флуктуаций было введено в конце 30-х годов Я. И. Френкелем, работы которого положили начало исследованию кинетики зародышей конкурирующих фаз. Интересный и важный подход, учитывающий идеи скейлинга, был развит в середине 60-х годов Фишером [10, 11] («капельная модель»). Широкое распространение в последнее время получили исследования кинетики гетерофазных систем, включая моделирование на ЭВМ [12, 13].

Однако лишь сравнительно недавно удалось развить микроскопическую теорию гетерофазного состояния [14—22]. В основе этой теории лежит концепция квазисредних Н. Н. Боголюбова [23, 24], играющая фундаментальную роль в теории фазовых переходов. Эта концепция позволяет конструктивно разрешить проблему неоднозначности выбора пространства состояний макроскопической системы [25] и трактовать фазовый переход как спонтанное нарушение симметрии.

Развитый на основе концепции квазисредних метод микроскопического описания гетерофазных состояний позволяет с единой точки зрения рассматривать совершенно различные по своей физической природе системы. По существу, указанный метод представляет собой общий подход к построению микроскопических моделей гетерофазных состояний в физических системах и позволяет понять причины их

возникновения. При этом важным обстоятельством является то, что для вычисления конкретных характеристик гетерофазной системы можно использовать любые из известных методов статистической механики.

Настоящая работа представляет собой попытку последовательного изложения современного состояния физики гетерофазных систем, включая экспериментальные результаты, феноменологию, динамические подходы (в том числе моделирование на ЭВМ), концепцию квазисредних Н. Н. Боголюбова для глобальных и локальных нарушений симметрии, принципы микроскопической теории гетерофазных состояний и примеры ее применения для различных физических объектов.

1. НАБЛЮДЕНИЕ ГЕТЕРОФАЗНЫХ СОСТОЯНИЙ

Выше мы уже сказали о том, что гетерофазные состояния — равновесные смеси фаз — наблюдаются в самых разных физических системах. Здесь мы рассмотрим ряд примеров, подтверждающих это утверждение.

Сверхпроводники. Как известно, сверхпроводящее состояние характеризуется наличием конденсатного состояния «электронной жидкости», распространяющегося на весь объем системы [26, 27]. Такой конденсат образован куперовскими парами, но вплоть до очень низких температур в системе сохраняется «нормальная жидкость» — макроскопическая доля электронов, не входящая в конденсат. Свойства таких электронов ничем не отличаются от их свойств в нормальном состоянии. Нормальная жидкость также распространена на весь объем системы (в сверхпроводниках первого рода). Иначе говоря, фазовые компоненты в сверхпроводнике перемешаны. Таким образом, сверхпроводимость представляет собой замечательный пример гетерофазного состояния.

Подобная двухжидкостная картина лежит в основе феноменологических теорий Гортера — Казимира [9], Лондонов [28], нелокального обобщения теории Лондонов, предпринятого Пиппардом [29], а также теории Гинзбурга — Ландау [30]. Такое представление о сверхпроводниках хорошо подтверждается экспериментально.

Прежде всего следует отметить наблюдения довольно значительной низкотемпературной теплопроводности, которую не всегда можно объяснить лишь одним фононным вкладом [31] *. В значительной мере такая теплопроводность связана с нормальными электронами. Особенно наглядно это иллюстрируется исследованиями зависимости теплопроводности от концентрации примесей в сверхпроводниках. Оказывается, что увеличение количества примесей в монокристаллах олова ниже 3,72 К ведет к увеличению теплопроводности за счет рассеяния нормальных электронов на примесях [32].

* Сверхпроводящие (конденсатные) электрон не могут переносить тепло.

В переохлажденном нормальном состоянии (во внешнем магнитном поле) в олове и алюминии удается наблюдать зародыши сверхпроводящей фазы [33].

В области, заключенной между значениями верхнего и нижнего критических полей, сверхпроводники второго рода представляют собой термодинамически равновесное состояние, в котором электронные компоненты (сверхпроводящая и нормальная) локализуются в пространстве [34]. Это явление наблюдается различными методами, простейший из которых связан с использованием эффекта Фарадея в стекле, содержащем парамагнитную примесь азотнокислого церия и помещенном на гладкую поверхность сверхпроводника [35]. Приложение магнитного поля приводит к вращению плоскости поляризации падающего на стекло плоскополяризованного света в областях, в которых магнитный поток проникает в глубь образца (сверхпроводящие области). При этом нормальные области кажутся темными.

Большой интерес вызывает эксперимент Стауденманна [36] по изучению распределения плотности валентных электронов для разных температур в кристаллах V_3Si методом рентгеновской дифракции. Было показано, что разным фазам соответствует совершенно разная картина электронных связей в кристалле. Так, связь между атомами Si и V — V-цепочкой, существующая при комнатной температуре, отсутствует при 13,5 К, т. е. в сверхпроводящей фазе (последняя возникает ниже точки перехода 16,85 К). К сожалению, эксперименты проводились лишь для двух значений температур (13,5 и 300 К). Подчеркнем, что изучение зависимости распределения электронной плотности от температур в широком интервале, включающем точку перехода, позволило бы получить детальную информацию о механизме зарождения фаз и фазовом переходе. Эта методика, позволяющая «увидеть» взаимодействия в кристалле, так сказать, изнутри, представляется весьма перспективной для исследования фазовых переходов не только в сверхпроводниках, но, например, в соединениях ванадия, претерпевающих переход металл — диэлектрик, и магнетиках на основе $3d$ -элементов. Особенно удобным представляется сочетание методов рентгеновской дифракции с рассеянием нейтронов, так как использование последнего позволяет точно фиксировать положение ядер, что необходимо для правильной обработки рентгеновских данных*.

Прежде чем перейти к обсуждению других объектов, отметим, что из сказанного выше следует существование гетерофазных состояний в сверхпроводниках при переходе как первого, так и второго рода. Мы специально подчеркиваем это обстоятельство, так как традиционно принято связывать гетерофазные явления только с переходами первого рода, что далеко не всегда согласуется с экспериментальными данными.

* Мы благодарны Л. А. Асланову за обсуждения проблемы рентген-нейтронного эксперимента

Магнетики. В магнетиках также наблюдается равновесная смесь разных фаз. Укажем, например, эксперименты по спиновому эху в методе ЯМР для соединений кобальта $\text{CoTi}_{1-x}\text{Al}_x$ и $\text{CoTi}_{1-y}\text{Ga}_y$ [37—39], в которых было показано, что ниже точки Кюри при определенных x и y имеет место сосуществование «магнитного» и «немагнитного» Со [39] (в этих соединениях магнитные моменты локализованы в узлах Со, что подтверждается экспериментами по дифракции нейтронов [40]). Измерения намагниченности показывают, что при $x \sim 0,57 \div 0,6$ и $y \sim 0,6 \div 0,7$ и температуре 4,2 К спонтанная намагниченность весьма далека от насыщения, хотя соответствующие точки Кюри превосходят 100 К. Это также свидетельствует о частичном разупорядочении, т. е. о присутствии парамагнитных областей (немагнитного Со) [39].

В кристалле Au_4Mn с помощью отжига от начального состояния с температурой 753 К можно приготовить ферромагнитное состояние, разбавленное областями антиферромагнитного упорядочения или, возможно, парамагнитными областями [41]. В таком ферромагнетике точка Кюри порядка 120 К, что примерно в два раза ниже, чем для обычных образцов. Намагниченность вблизи основного состояния здесь также вдвое меньше намагниченности обычных образцов при той же температуре. Аналогичный эффект имеет место и для Cu_3Mn [42].

В ферро- и антиферромагнитных кристаллах DyH_2 и EuV_6 также имеет место частичное разупорядочение ниже точки Кюри, проявляющееся в аномальном поведении намагниченности, имеющей максимум ниже точки перехода, и теплоемкости [43—45] (см. также [46]).

Подчеркнем, что и в магнетиках гетерофазные состояния не связаны с переходами первого рода.

Сегнетоэлектрики. Методом ядерного квадрупольного резонанса в кристаллах HCl и смешанных кристаллах HCl—DCl удалось не только обнаружить гетерофазные флуктуации, но и определить температурную зависимость средней концентрации сегнетоэлектрических кластеров вблизи перехода [47, 48]. Такие кластеры возникают в указанных соединениях примерно на 0,5 К выше точки перехода, т. е. в параэлектрической фазе [48].

Недавно было показано также, что гетерофазные состояния играют важную роль при переполаризации сегнетоэлектриков [49].

Кристаллы. Кристалл представляет собой периодически упорядоченное состояние системы частиц, обладающее ярко выраженной симметрией, тогда как в жидкой фазе такая симметрия отсутствует. Поэтому частицы, перемещающиеся из одного узла в другой узел решетки кристалла при самодиффузии, должны рассматриваться как элемент жидкой фазы. Реально существующие кристаллы в большей или меньшей степени обладают чертами твердых (локализованных) и жидких (нелокализованных) веществ. Делокализация частиц, связанная с их перескоками из узла в узел, особенно заметна у квантовых кристаллов [50]. Нечто подобное должно наблюдаться и в кристаллизующихся нейтронных звездах [51].

Однако элементы локализации (кристаллического состояния) наблюдаются и в жидкой фазе [52]. Так, исследование распространения гиперзвука в переохлажденной воде (бидистиллят) при температуре -27°C позволяют выделить гетерофазное состояние — смесь воды и льда [53], проявляющееся в аномальном поведении теплоемкости, теплопроводности, изотермической сжимаемости (см. также [54, 55]).

При структурных переходах (изменение характера упорядочения в кристалле) также могут иметь место гетерофазные состояния. Так, поведение центрального фононного пика для SrTiO_3 объясняется наличием гетерофазных флуктуаций (зародышей конкурирующей фазы) в довольно широкой температурной области вблизи точки структурного перехода [56].

Ядерные системы. При бесконечно малом изменении частоты вращения может наблюдаться качественное изменение в поведении углового момента ядра. Например, при частоте вращения, примерно равной $0,28 \text{ МэВ}$, имеет место скачок углового момента ядра ^{152}Dy , интерпретируемый как фазовый переход [57]. По-видимому, это предположение справедливо, так как состояния ядра ^{152}Dy выше и ниже этой точки различаются качественно: при малых значениях частоты ядро сферическое, тогда как при достижении точки перехода возникает деформация и ядро становится эллиптическим. Объяснение этого явления связано с механизмом спаривания нуклонов, впервые предложенным Н. Н. Боголюбовым [58] (см. также [59]). Ниже частоты фазового перехода Ω_0 вследствие спаривания нуклонов ядро находится в состоянии бозе-конденсата, тогда как выше Ω_0 вращение разрушает спаривание, что и приводит к скачку углового момента [57].

Не всегда, однако, при малых значениях частоты вращения угловой момент ядер равен нулю [6]. Такое поведение свидетельствует о наличии помимо конденсатного состояния еще и некоторой доли неспаренных нуклонов, т. е. зародыша фазы, образующейся при больших значениях частоты вращения. Именно такие нуклоны и создают ненулевое значение углового момента [6].

Другим примером гетерофазных состояний в ядерных системах могут служить кластеры, возникающие в нуклонной материи при повышении плотности [60], что, по-видимому, подтверждается экспериментами по взаимодействию тяжелых ионов с энергиями около 2 ГэВ [61].

Деконфайнмент и мультикварковые состояния. Изучение проблемы деконфайнмента в квантовой хромодинамике позволяет сделать вывод о возможности возникновения мультикварковых состояний при повышении температуры и плотности адронной системы [62, 63]. Система нуклонов может перейти в шестикварковое состояние, девятикварковое состояние и т. д. вплоть до деконфайнмента. Различные состояния из указанной последовательности можно интерпретировать как фазовые состояния кварковой материи.

В то же время предсказанный А. М. Балдиным [64] и открытый

экспериментально [65] кумулятивный эффект был первым сигналом о существовании в ядрах (нуклонных системах) мультикварковых состояний, т. е. зародышей других фаз. Впоследствии наличие в ядрах шестикваркового и, возможно, девятикваркового состояний было подтверждено различными экспериментами [66—69], наиболее убедительными из которых представляются работы по глубокоупругому рассеянию лептонов на ядрах [66, 68, 69] (см. также [70]).

Таким образом, приведенные примеры показывают, что гетерофазные состояния действительно реализуются в различных физических системах и не связаны с каким-то определенным типом фазового перехода, например с переходом первого рода.

2. РАВНОВЕСНЫЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Как уже упоминалось во введении, первая феноменологическая модель гетерофазного состояния была предложена в 1934 г. Гортером и Казимиром [9] в связи с разработкой термодинамики сверхпроводящего фазового перехода. Идеи двухжидкостной модели Гортера—Казимира просты, наглядны и могут быть применены к феноменологическому описанию гетерофазных состояний в произвольных системах. Изложим вкратце основные принципы этого подхода.

Рассмотрим систему, в которой при определенных условиях может реализоваться одно из n фазовых состояний (чистых фаз). Обозначим $G_i(\Theta, x)$ — свободную энергию единицы объема (или потенциал Гиббса) i -й фазы ($i = 1, \dots, n$). Здесь Θ — температура, имеющая размерность энергии ($\Theta = k_B T$), и x — внешние параметры системы, например действующие на нее поля. Пусть в системе реализуется гетерофазное состояние, представляющее собой равновесную смесь из n фаз. Через w_i обозначим относительную долю частиц, находящихся в i -й фазе:

$$w_i = N_i/N, \quad (1)$$

где $N = \sum_i N_i$ — полное число частиц в системе.

Ясно, что

$$\sum_i w_i = 1 \quad (2)$$

Основное предположение теории Гортера—Казимира [9] (см. также [27, 31]) состоит в том, что существуют функции $\varphi_i(w_i)$ такие, что свободная энергия единицы объема гетерофазного состояния есть

$$G(\{w_i\}; \Theta, x) = \sum_i \varphi_i(w_i) G_i(\Theta, x). \quad (3)$$

При этом параметры w_i находятся самосогласованным образом как функции Θ и x из условия минимальности $G(\{w_i\}; \Theta, x)$, соответствующего предположению о равновесии гетерофазного состояния.

Ясно, что задача на минимум должна решаться при условии (2) и решения типа $w_j \equiv 1$, $w_{i \neq j} \equiv 0$ должны сравниваться с другими (нетривиальными) решениями. Во всех случаях устойчивым будет то состояние (чистое или смешанное), свободная энергия которого имеет наименьшее из возможных значений при данных Θ и x .

В случае сверхпроводника $n = 2$ (существуют только две фазы — сверхпроводящая $i = 1$ и нормальная $i = 2$). Потенциал Гиббса сверхпроводящих электронов принимается равным [9, 27, 31]

$$G_1(\Theta) = -g = \text{const.}$$

Для нормальной электронной компоненты потенциал Гиббса имеет тот же вид, что и для обычных электронов в нормальном металле

$$G_2(\Theta) = -\frac{1}{2} \gamma \Theta^2,$$

где γ — постоянная Зоммерфельда.

Обозначим $w_1 \equiv w$; тогда в силу (2) $w_2 \equiv 1 - w$. Сделаем замечание относительно выбора функций $\varphi_i(w_i)$. Ясно, что единственная возможность определения вида функций $\varphi_i(w_i)$ связана с подгонкой по каким-либо экспериментальным данным. Такой способ выбора оставляет известный произвол в определении гетерофазной свободной энергии (3). Простейший выбор этих функций в случае сверхпроводника состоит в следующем [9]:

$$\varphi_1(w) = w; \quad \varphi_2(1-w) = (1-w)^\alpha,$$

причем параметр α полагают обычно равным $1/2$, чтобы обеспечить разумное согласие с экспериментальными данными.

Подставляя эти соотношения в выражение для полной свободной энергии (3) и минимизируя по w , находим

$$w = 1 - \gamma^2 \Theta^4 / 16g^2.$$

Если теперь предположить, что выше Θ_c реализуется чистая нормальная фаза [9, 27, 31], т. е. что $w \rightarrow 0$ при $\Theta \rightarrow \Theta_c$, то

$$g = \gamma \Theta_c^2 / 4.$$

Будем далее считать, что при $\Theta \rightarrow 0$ $w \rightarrow 1$ и воспользуемся термодинамическим соотношением, получающимся из эффекта Мейснера [31],

$$G_2(\Theta) - G_1(\Theta) = H_c^2 / 8\pi,$$

где $H_c = H_c(\Theta)$ — критическое магнитное поле. Имеем отсюда

$$w = 1 - (\Theta / \Theta_c)^4$$

и

$$H_c(\Theta) = H_0 [1 - (\Theta / \Theta_c)^2]; \quad H_0 = \sqrt{g / 8\pi} = \Theta_c \sqrt{\gamma / 32\pi}.$$

Последнее соотношение достаточно хорошо согласуется с экспериментом [27, 31]. Из полученных соотношений можно определить

и другие термодинамические характеристики рассматриваемого состояния. Например, для теплоемкости имеем

$$C = -\Theta \frac{\partial^2 G}{\partial \Theta^2} = 3\gamma\Theta_c(\Theta/\Theta_c)^3.$$

Такая кубическая зависимость теплоемкости лишь грубо согласуется с результатами эксперимента [31], указывающего на наличие экспоненциальной зависимости.

В дальнейшем предпринимались попытки улучшения результатов для сверхпроводников, получаемых в рамках модели Гортера—Казимира [71]. Двухжидкостную модель применяли также в теории сверхпроводников второго рода в связи с проблемой движения вихревых нитей [72, 73].

Очевидно, теорию Гортера—Казимира можно улучшить, перейдя к вычислению свободных энергий фазовых компонент на основе микроскопических моделей. Упомянем в этой связи модель, предложенную И. Н. Михайловым с соавторами [6] для объяснения промежуточных значений углового момента тяжелых ядер. Предполагалось, что такое ядро содержит как конденсатную (сверхтекучую), так и нормальную компоненты, причем полный гамильтониан выбирался в матричном виде

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & \Delta \\ \Delta & H_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где H_i — гамильтонианы соответствующих компонент и Δ — феноменологический член, описывающий взаимодействие между компонентами. Вид этого члена и концентрации компонент здесь также определялись с помощью подгонки, так что модель работы [6] можно рассматривать как полуфеноменологический вариант теории Гортера—Казимира.

Наиболее слабым местом теории Гортера—Казимира является предположение о том, что зависимость от параметров w_i входит в выражение для полной свободной энергии (3) в виде некоторых факторов. Ниоткуда, однако, не следует, что зависимость столь тривиальна. Строго говоря, более последовательно было бы определить полную свободную энергию соотношением

$$G(\{w_i\}; \Theta, x) = \sum_i G_i(w_i; \Theta, x), \quad (5)$$

а функции $G_i(w_i; \Theta, x)$ искать из микроскопических соображений. К обсуждению этого вопроса мы вернемся ниже при рассмотрении микроскопической теории гетерофазных состояний.

Вместе с тем несомненным достоинством теории Гортера—Казимира является правильное отображение качественной картины гетерофазного состояния на термодинамическом уровне. Особенно плодотворной представляется идея о введении дополнительного параметра w , определяемого самосогласованным образом, из условия равнове-

сия. В современной теории фазовых переходов каждой фазе сопоставляют параметр порядка: в сверхпроводнике это щель ($\Delta = 0$ в нормальной фазе и $\Delta \neq 0$ в сверхпроводящей), в ферромагнетике — намагниченность ($M = 0$ в парамагнитной фазе и $M \neq 0$ в ферромагнитной) и т. д. Однако в гетерофазном состоянии, являющемся равновесной смесью фаз, обычных параметров порядка явно недостаточно. Необходим еще некий дополнительный параметр: показывающий, какая часть частиц системы находится в данной фазе. Именно таким специфическим гетерофазным параметром и является w .

Приведем еще один пример применения теории Гортера — Казимира — реакцию слияния трехкварковых мешков (барионов) в шестикварковые мешки $3q + 3q \leftrightarrow 6q$. Такой процесс, по-видимому, может иметь место в ядерной материи при повышении ее плотности или увеличении температуры [8]. Если представить себе материю как кварк-глюонную систему, то образование связанных состояний (нуклонов, шестикварков и т. д.) можно интерпретировать как конденсацию кварков, аналогичную конденсации капель жидкости из газа. Поэтому нуклонные и шестикварковые состояния можно рассматривать как разные фазы кварковой материи [8].

Пусть число трехкварковых мешков есть N_{3q} , а шестикварковых мешков — N_{6q} . Полное число кварков в системе

$$N = 3N_{3q} + 6N_{6q}.$$

Тогда концентрация барионной фазы, определенная в соответствии с (1):

$$w = 3N_{3q}/N.$$

Потенциал Гиббса гетерофазной барион-шестикварковой смеси имеет вид, согласующийся с (5):

$$G = \mu_{3q}N_{3q} + \mu_{6q}N_{6q}.$$

Здесь μ_i — химические потенциалы компонент. Из условия равновесия гетерофазной системы

$$(\delta G)_{\Theta, p} = 0$$

имеем

$$\mu_{3q}\delta N_{3q} + \mu_{6q}\delta N_{6q} = 0.$$

Учитывая сохранение полного числа кварков N , имеем отсюда соотношение

$$2\mu_{3q}(\Theta, p, w) = \mu_{6q}(\Theta, p, w), \quad (6)$$

которое можно использовать как уравнение для определения $w = w(\Theta, p)$. Для этого необходимо иметь явные выражения для μ_i , которые можно получить либо из феноменологических соображений на основе экспериментальных данных, либо с помощью микроскопической модели. Этот последний способ мы обсудим ниже при рассмотрении микроскопической теории гетерофазных состояний.

Рассмотрим еще один вариант феноменологической равновесной теории гетерофазных состояний — так называемый капельный подход Фишера [10, 11, 74]. Основная идея этого подхода состоит в том, что любую конфигурацию частиц в данном состоянии какой-либо системы можно составить из совокупности отдельных «капель» — достаточно больших областей с определенным термодинамическим состоянием. Например, в ферромагнетике, основное состояние которого соответствует полному упорядочению магнитных моментов, капли представляют собой области обратного намагничивания, существование которых при ненулевых температурах приводит к уменьшению средней намагниченности [74]. Иначе говоря, капли можно рассматривать как зародыши некоторого иного состояния в данной фазе.

Простейший вариант модели связан с предположением об отсутствии взаимодействия [11]. В этом случае уравнение состояния системы, содержащей n капель, можно записать в виде [11, 74]

$$p/\Theta = V^{-1} \ln \Xi(z, \Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (q_n(\Theta)/V) z^n.$$

Здесь p — давление; V — объем; Ξ — большая статистическая сумма системы; $z = e^{\mu/\Theta}$ — активность (μ — химический потенциал) и $q_n(\Theta)$ — статистическая сумма n -частичной капли. Очевидно,

$$F_n = -\Theta \ln [q_n(\Theta)/V],$$

где F_n — свободная энергия капли. Далее делается предположение о наличии в F_n объемного вклада

$$F_n^{(1)} = n(E_1 - S_1),$$

где E_1 — энергия связи частицы в капле и S_1 — соответствующая энтропия поверхностного вклада

$$F_n^{(2)} = S(n)(E_2 - S_2),$$

где $S(n)$ — эффективная площадь поверхности капли, выбираемая в виде

$$S(n) \approx an^\sigma, \quad a = \text{const}, \quad \sigma \in (0, 1)$$

(для двумерной системы $\sigma \approx 1/2$, а для трехмерной $\sigma \approx 2/3$ [11]); E_2 — поверхностная энергия, обусловленная уменьшением энергии связи на поверхности, и S_2 — поверхностная энтропия [74], а также «геометрического вклада»

$$F_3 = -\tau \ln n + \ln q_0,$$

введение которого обусловлено необходимостью специального выбора поверхности [11]. Здесь τ — параметр, значение которого предполагается большим 1 [11], и $q_0 = \text{const}$ — амплитудный фактор в $q_n(\Theta)$.

Теперь уравнение состояния принимает вид

$$p/\Theta = q_0 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\tau} x^{n\sigma} y^n, \quad (7)$$

$$x \equiv \exp \{-a (E_2 - S_2)/\Theta\}, \quad y \equiv z \exp \{(E_0 - S_0)/\Theta\}.$$

Для плотности $\rho = z \frac{d}{dz} (p/\Theta)$ отсюда получаем

$$\rho = q_0 \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\tau} x^{n\sigma} y^n. \quad (8)$$

Основным достижением рассматриваемой модели является то, что все критические индексы можно, исходя из (7), (8), выразить теперь через параметры σ и τ . Учитывая определение критических индексов (см., например, [75])

$$\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C}{\ln(-\varepsilon)}, \quad \varepsilon \equiv \frac{\Theta - \Theta_c}{\Theta_c},$$

$$\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Delta\rho}{\ln(-\varepsilon)}, \quad \gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln K_0}{\ln(-\varepsilon)},$$

где C — теплоемкость, $\Delta\rho$ — изменение плотности, K_0 — изотермическая сжимаемость ($K_0 \equiv \rho^{-1} (\partial\rho/\partial p)_\Theta$), из (7) и (8) можно получить [11]

$$\alpha = 2 - (\tau - 1)/\sigma, \quad \beta = (\tau - 2)/\sigma, \quad \gamma = (3 - \tau)/\sigma$$

Отсюда $\sigma = 1/(\beta + \gamma)$. Выбранные выше значения σ достаточно хорошо согласуются с известными результатами для двумерной модели Изинга и с некоторыми экспериментальными результатами для трехмерных реальных газов [74]. Однако все еще остается известный произвол в выборе параметра τ .

Для капельной модели получают известные соотношения для критических индексов и, кроме того, можно показать, что вытекающее из (7), (8) уравнение состояния удовлетворяет гипотезе однородности [74]. На основе капельного подхода изучалось критическое поведение в разных системах [74, 76]. Отметим здесь работу Вагнера, применившего этот подход к исследованию трехмерной модели Изинга на сжимаемой решетке в линейном по смещению спинов приближении [77]. В дальнейшем было предпринято усовершенствование капельного подхода за счет учета взаимодействия между каплями [78].

Капельный подход Фишера представляет собой попытку рассмотрения критических флуктуаций на микроскопическом языке, однако содержит много феноменологических допущений (выбор свободной энергии капли). Кроме того, «капли», как уже говорилось, представляют собой области упорядочения, направленного иначе, чем в остальном объеме системы (область обратной намагниченности в ферромагне-

тике). С другой стороны, если одна из фаз представляет собой упорядоченное состояние, а другая — разупорядоченное, то естественно говорить о гетерофазных флуктуациях как о зародышах разупорядочения в упорядоченной фазе (рис. 1). Именно о такой картине идет речь в модели Гортера — Казимира, и такие состояния мы будем рассматривать ниже.

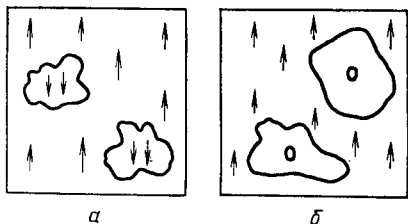


Рис. 1. Капли Фишера (а) и зародыши парамагнитной фазы (б) в ферромагнетике

3. ДИНАМИКА ГЕТЕРОФАЗНЫХ СОСТОЯНИЙ

Простейшие варианты динамической теории гетерофазных состояний также связаны с феноменологической концепцией «капель» одной фазы в другой. Так, в классической теории Беккера — Деринга [79] рассматривается капля, представляющая собой группу из n сильно-взаимодействующих между собой частиц и слабо взаимодействующих с остальной системой (аналог капли Фишера). Динамика таких капель подчинена уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \bar{w}_n(t)}{\partial t} + \frac{\partial J_n}{\partial n} = 0, \quad (9)$$

где $\bar{w}_n(t)$ — концентрация капель из n частиц и J_n — ток капель:

$$\left. \begin{aligned} J_n &= -R_n w_n \nabla (\bar{w}_n(t)/w_n); \\ w_n &= w_1 e^{-F_n/\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь w_1 — плотность числа одиночных частиц («мономеров»), параметр R_n пропорционален площади поверхности капли и F_n — энергия образования n -частичного кластера. Параметры w_1 , R_n , F_n являются феноменологическими. Главным недостатком такого подхода является возможность рассмотрения динамики кластеров только одного размера, тогда как каплями других размеров пренебрегают [80].

Отметим, что соотношения типа (9), (10) могут быть получены также в рамках статистической механики из первых принципов [81].

Другие варианты динамических теорий, связанные с использованием уравнения непрерывности (9) и капельного подхода Фишера, развивались в [82, 83] (см. также обзор [84]).

Используется также подход, основанный на применении кинетического уравнения типа Master Equation [80]:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = - \int_0^t d\tau \sum_{x'} \{w_{t, \tau}(x \rightarrow x') P(x, \tau) - w_{t, \tau}(x' \rightarrow x) P(x', \tau)\}. \quad (11)$$

Здесь $P(x, t)$ — вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии x , и $w_{t,\tau}(x \rightarrow x')$ — вероятность перехода из состояния x в состояние x' , которая обычно выбирается марковской [80]:

$$w_{t,\tau}(x \rightarrow x') = \delta(t - \tau) w(x \rightarrow x').$$

В случае динамической гетерофазной системы каждый кластер (капля) описывается набором «кластерных координат» $\{n, s, \{\alpha\}\}$, где n — число частиц или объем кластера, s — «основные» координаты (площадь поверхности кластера, кинетическая энергия и т. д.) и $\{\alpha\}$ — набор некоторых «неосновных» координат. Для полного набора кластерных координат переменная x в (11) может быть определена как [80]

$$x = (\{n_1, s_1, \{\alpha_1\}\}, \{n_2, s_2, \{\alpha_2\}\} \dots). \quad (12)$$

Подчеркнем, что в понятие кластера здесь обычно вкладывают тот же смысл, что и в понятие капли Фишера [80], хотя определение (12) оставляет известный произвол.

Такой подход применялся, в частности, к исследованию релаксационных явлений в одномерных системах [85, 86].

Оба упомянутых подхода к описанию кинетики гетерофазных систем имеют дело с классическим описанием. По-видимому, это оправдано для большинства конденсированных сред. Исключение составляют квантовые кристаллы, в которых при низких температурах имеет место своеобразная квантовая диффузия [87, 88], а возможно даже и сверхтекучесть [87].

Чтобы лучше пояснить различие между гомофазными и гетерофазными состояниями, рассмотрим классические кинетические уравнения для неравновесных функций распределения. Пусть система состоит из одинаковых частиц, связанных парным взаимодействием $\Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Уравнение для одночастичной функции распределения $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ имеет вид [89]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad (13)$$

где \mathbf{p} — импульс;

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \equiv \int f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}',$$

$f_2(\cdot)$ — двухчастичная функция распределения, обладающая симметрией относительно перестановки переменных $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \leftrightarrow (\mathbf{r}', \mathbf{p}')$. Кроме того, должны выполняться условия нормировки

$$\int f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = N, \quad \int f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' = N^2.$$

Чтобы замкнуть уравнение (13), воспользуемся расщеплением Тябликова [90]

$$f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', t) \approx f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f_1(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|),$$

где $g(\cdot)$ — некоторая сглаживающая функция.

Далее перейдем к эффективному потенциалу взаимодействия (псевдопотенциалу), определив его уравнением

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\Phi}(r) = g(r) \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r)$$

с граничными условиями

$$\tilde{\Phi}(r_0) = \Phi(r_0) = 0.$$

Отсюда

$$\tilde{\Phi}(r) = \int_{r_0}^r g(r) \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} dr.$$

Сглаживающую функцию можно, например, выбрать в виде

$$g(r) = \exp\{-\Phi(r)/\gamma\}, \quad \gamma > 0.$$

Часто, однако, выбирается не сглаживающая функция, а сам псевдопотенциал из феноменологических соображений, как, например, в теории ядра [91].

Теперь интеграл взаимодействия в (13) имеет вид

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \tilde{\Phi}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) f_1(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) d\mathbf{r}' dp'. \quad (14)$$

Соотношения (13), (14) задают нелинейное интегродифференциальное уравнение для одночастичной функции распределения. Такое уравнение, как известно, может иметь бесконечно много различных решений. Однако все его решения можно разбить на два класса, физически отличающихся друг от друга. Решения первого класса описывают элементарные возбуждения, т. е. соответствуют гомофазным флуктуациям. Решения второго класса являются солитонными и отвечают гетерофазным зародышам. Здесь имеется прямая аналогия с тем, что из одних и тех же уравнений в теории конденсации комплексного поля можно получить и голдстоуновские возбуждения, и вихревые нити, подобные вихревым нитям в сверхтекучей бозежидкости.

Гомофазные решения ищутся как отклонения от равновесного распределения с функцией $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, удовлетворяющей стационарному уравнению [уравнение (13) с $\frac{\partial}{\partial t} f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0$]:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t).$$

Теперь с помощью (13), (14) нетрудно получить уравнение для $\varphi(\cdot)$.

В отличие от гомофазных решений, гетерофазные (солитонные) решения описывают уже не элементарные, а макроскопические возбуждения, состоящие из большого числа частиц. Такие объекты могут иметь весьма различную природу, быть, например, квантованными вихрями (включая точечные вихри в ${}^3\text{He}$ — «буджумы») [92], доменами или доменными стенками [93] и т. д.

Уравнения (13), (14) содержат класс решений солитонного типа, имеющих форму автомодельных волн:

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{p}), \quad (15)$$

распространяющихся в пространстве со скоростью \mathbf{v} . Действительно, совершая замену $\xi = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, можно преобразовать (14) к виду

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f(\xi, \mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial \xi} U(\xi) \equiv I(\xi, \mathbf{p});$$

$$U(\xi) \equiv \int \tilde{\Phi}(|\xi - \xi'|) f(\xi', \mathbf{p}') d\xi' d\mathbf{p}'.$$

Вместо (13) имеем теперь уравнение

$$\left(\frac{\mathbf{p}}{m} - \mathbf{v}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \mathbf{p}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} I(\xi, \mathbf{p}) = 0,$$

решением которого как раз и являются автомодельные волны (15). Такие решения соответствуют стабильным солитонам, т. е. уединенным волнам, не меняющим своей формы при движении.

Вообще говоря, реальные гетерофазные зародыши не стабильны — не существуют вечно и неизменно, но могут расти, менять свою форму, сливаться с другими зародышами, распадаться, уменьшаться, исчезать. Поэтому таким зародышам более естественно сопоставлять так называемые квазисолитоны (нестабильные солитоны). Отметим, что в настоящее время известно много нелинейных уравнений с квазисолитонными решениями, обладающими богатой и чрезвычайно интересной динамикой [94].

Другим подходом, получившим широкое распространение в последнее время, является моделирование динамики гетерофазных состояний на ЭВМ. Наиболее наглядным подходом здесь является метод молекулярной динамики, состоящий в интегрировании на ЭВМ ньютоновских уравнений движения для достаточно большого числа частиц, связанных парным взаимодействием и помещенных в конечный объем. При этом число частиц в объеме может быть действительно большим. Так, удалось получить результат для 1372 частиц в кубическом ящике, взаимодействие между которыми описывается потенциалом Леннарда — Джонса [84]. Изменение размеров кубического ящика при заданных параметрах потенциала позволяет моделировать изменение плотности, т. е. рассматривать разные фазы и переход по плотности типа жидкость — газ. Разумеется, в реальных жидкостях и газах число частиц значительно больше 1372. Поэтому для улучшения согласия с реальной ситуацией обычно делается периодическое продолжение, позволяющее, в частности, учесть вклад неоднородностей, размеры которых превышают размеры кубического ящика [84].

Такой подход позволяет моделировать зарождение одной фазы в другой (явление нуклеации), определять значение плотностей нуклеации, являющихся границами области сосуществования фаз (гетерофазного состояния).

В таких машинных экспериментах можно менять число частиц, размеры и геометрию полости, потенциал взаимодействия и даже форму частиц [95].

Еще один способ моделирования на ЭВМ связан с использованием метода Монте-Карло [13] на основе алгоритма Метрополиса [96]. В этом подходе задается начальное состояние системы из N частиц в некоторой области V , например пространственная или плоская решетка, моделирующая однородный кристалл при некоторой фиксированной температуре. Если $U(\xi)$ — потенциальная энергия рассматриваемой системы в конфигурации $\xi = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, то плотность вероятности такой конфигурации есть

$$P(\xi) = e^{-U(\xi)/\Theta} / \int e^{-U(\xi)/\Theta} d\xi,$$

а средняя энергия определяется соотношением

$$\langle U \rangle = - \int U(\xi) P(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Начальное состояние возмущается случайным смещением Δ и вычисляется потенциальная энергия такого возмущения δU . Если $\delta U < 0$, то выбирается новая конфигурация, для которой снова генерируется случайное смещение. Такой процесс моделирует эволюцию из начальной «неравновесной» конфигурации к состоянию равновесия. Параметр смещения Δ при этом выбирается из условия оптимизации сходимости средних (16) к равновесному среднему.

Аналогичный подход используется в задачах квантовой теории поля на решетке [97].

Отметим, что такой подход позволяет достаточно хорошо моделировать, например, процесс плавления перегретого леннард-джонсовского кристалла [98] и показывает, что такой процесс связан с развитием зародышей жидкой фазы.

В заключение приведем еще один способ моделирования фазового перехода кристалл — жидкость с использованием чисто механической модели. Система представляет собой совокупность «частиц» (молекул), расположенных в конечной области на плоскости. Каждая частица есть равносторонний треугольник, выполненный из достаточно твердого материала. Взаимодействие между частицами осуществляется при их столкновениях. Движение частиц вызывается случайными колебаниями плоскости. Например, это может быть какая-либо ткань, натянутая на динамик, генерирующий случайный шум. Изменение числа треугольников в области конечного размера моделирует изменение плотности.

При наибольшей плотности конфигурация частиц будет отвечать плотной упаковке (рис. 2, *a*), которую можно сопоставить кристаллической фазе. При небольшом уменьшении плотности будем иметь более реалистическую картину кристалла: треугольники в среднем упорядочены, но совершают некоторые колебания относительно положений равновесия — узлов решетки, совпадающих с центрами шести-

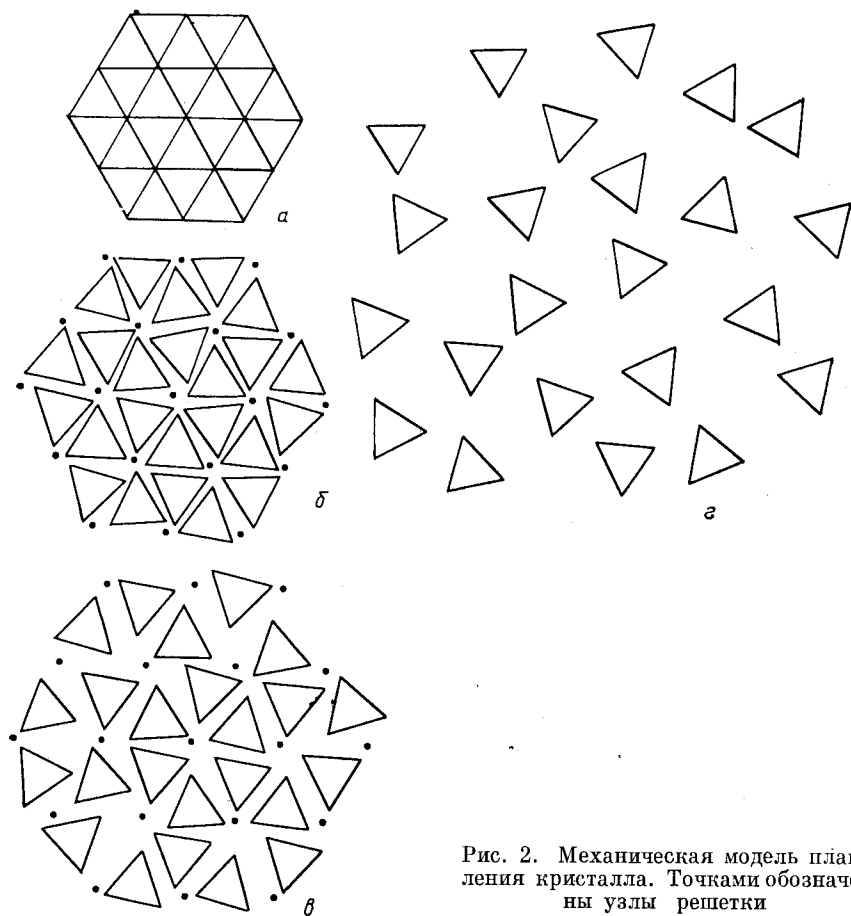


Рис. 2. Механическая модель плавления кристалла. Точками обозначены узлы решетки

угольников (рис. 2, б). Дальнейшее уменьшение плотности приведет к тому, что при сохранении общей упорядоченной картины отдельные треугольники начнут перескакивать от узла к узлу, постепенно мигрируя по кристаллу (рис. 2, в). Усредняя движение таких мигрирующих частиц по достаточно большому промежутку времени, мы получим как бы движение жидкой компоненты в кристалле. Наконец, при дальнейшем уменьшении плотности упорядочение исчезает совсем и наступает чисто жидкая фаза (рис. 2, г).

Будучи заснятым на кинолентку, такой процесс весьма наглядно демонстрирует существование гетерофазного состояния — смеси жидкость — кристалл в достаточно широком интервале значений плотности*.

* Авторы глубоко признательны А. Навроцеку за возможность увидеть описанную выше модель в действии.

4. КОНЦЕПЦИЯ КВАЗИСРЕДНИХ БОГОЛЮБОВА

Прежде чем приступить к формулировке принципов равновесной микроскопической теории гетерофазных состояний, остановимся на рассмотрении концепции квазисредних Боголюбова [23, 24]. Эта концепция, составляющая основу теории фазовых переходов, позволяет установить связь между термодинамическими понятиями фазы, условиями устойчивости равновесного состояния и микроскопическим описанием, основанным на выборе пространства состояний и представлений алгебры операторов.

Проанализируем принципиальное содержание концепции квазисредних на простейшем примере модели Изинга [25], допускающей как классическое, так и квантовое рассмотрение. Гамильтониан модели имеет вид

$$H_N = -\frac{1}{4} \sum_{ff'} J_{ff'} \sigma_f^z \sigma_{f'}^z, \quad (17)$$

где индексы f, f' — узлы решетки, полное число которых равно N ; σ_f^z — z -компонента оператора Паули, и обменный интеграл соответствует ферромагнитному случаю: $J_{ff'} = J_{f'f} \geq 0$, $J_{ff} = 0$.

Для рассмотрения концепции квазисредних совершенно неважно, как проводится суммирование в (17) и какова размерность решетки. Гамильтониан (17) инвариантен относительно группы Z_2 , состоящей из тождественного преобразования $\sigma_f^z \rightarrow \sigma_f^z$ и инверсии $\sigma_f^z \rightarrow -\sigma_f^z$. Спиновые функции, описывающие состояния со спином вверх и вниз в f -м узле, будем обозначать соответственно

$$\psi_{f+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_f = \begin{matrix} \uparrow \\ f \end{matrix}, \quad \psi_{f-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_f = \begin{matrix} f \\ \downarrow \end{matrix}.$$

Эти функции образуют базис в пространстве \mathcal{E}_f^2 . Полное N -частичное пространство состояний для гамильтониана (17) есть

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{f=1}^N \mathcal{E}_f^2 = (\mathcal{E}^2)^N. \quad (18)$$

В этом пространстве возможны состояния со спинами, ориентированными вверх:

$$\psi_+^N = \bigotimes_{f=1}^N \psi_{f+} = \begin{matrix} \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ 1 \ 2 \dots N \end{matrix}, \quad (19)$$

со спинами, ориентированными вниз:

$$\psi_-^N = \bigotimes_{f=1}^N \psi_{f-} = \begin{matrix} 1 \ 2 \dots N \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \end{matrix}, \quad (20)$$

и с разориентированными спинами

$$\psi_0^N = \begin{matrix} \uparrow 2 \uparrow \\ 1 \downarrow 3 \end{matrix} \dots \begin{matrix} N \\ \downarrow \end{matrix}. \quad (24)$$

Подчеркнем, что последовательное расположение спинов в символической записи в правых частях соотношений (19) — (21) соответствует способу нумерации узлов в решетке произвольной размерности, но отнюдь не имеет в виду только линейную цепочку.

Функции (19) — (21) являются собственными для оператора приведенного спина

$$\sigma = N^{-1} \sum_{f=1}^N \sigma_f^z,$$

причем

$$(\psi_{\pm}^N, \sigma \psi_{\pm}^N) = \pm 1, \quad (\psi_0^N, \sigma \psi_0^N) = 0.$$

Для модели Изинга можно ввести понятие элементарного возбуждения состояния ψ^N , определяя его как переворот одного спина относительно ψ^N — флипфон [25]. Флипфонное возбуждение над состоянием ψ_{\pm}^N описывается функцией

$$\psi_{\pm}^N(f) = \overset{\uparrow}{1} \cdots \overset{\uparrow}{f-1} \overset{\uparrow}{f} \underset{\downarrow}{f+1} \cdots \overset{\uparrow}{N}.$$

Аналогичным образом можно определить и функцию многофлипфонного возбуждения $\psi_{\pm}^N(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Очевидно,

$$\psi_{\pm}^N(12 \dots N) = \psi_{\pm}^N, \quad \psi_{\pm}^N(246 \dots) = \psi_0^N.$$

Действуя таким образом, можно убедиться, что все функции пространства (18) преобразуются одна в другую с помощью последовательности флипфонных состояний. Отметим, что флипфонные возбуждения над упорядоченными состояниями ψ_{\pm}^N , ψ_0^N соответствуют возникновению разупорядоченных кластеров и кластеров перевернутых спинов (областей «противонамагничения», т. е. капель Фишера), а флипфонные возбуждения в случае неупорядоченного состояния ψ_0^N эквивалентны появлению упорядоченных кластеров. Состояния ψ_{\pm}^N и ψ_0^N являются вакуумными, так как из них с помощью элементарных возбуждений можно построить полное пространство состояний и энергия элементарных возбуждений над ними неотрицательна. Из состояния ψ_0^N также можно построить полное пространство (18), однако оно является лишь псевдовакуумным, так как энергия элементарного возбуждения над ним неположительна. В модели Изинга с конечным N любая функция из пространства (18) может служить псевдовакуумом.

Термодинамические характеристики системы с гамильтонианом определяются с помощью операции

$$\text{Sp} \dots e^{-H_N/\Theta}, \tag{22}$$

где Sp берется по произвольному базису некоторого пространства. Рассмотренная нами система при конечном N имеет единственный унитарно неприводимый базис (т. е. такой базис, который не приводится к другому унитарным преобразованием). Следовательно, такая

система имеет единственную свободную энергию (при $\Theta > 0$)

$$F = -\Theta N^{-1} \ln \text{Sp } e^{-H_N/\Theta}. \quad (23)$$

Именно с единственностью унитарно неприводимого базиса связано отсутствие фазового перехода в системе с конечным N .

Иначе обстоит дело в термодинамическом пределе, когда $N \rightarrow \infty$. Обозначим пределы соответствующих функций следующим образом:

$$\psi_{\pm}^N(f_1 \dots f_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_{\pm}^N(f_1 \dots f_n). \quad (24)$$

Таких состояний, очевидно, существует бесконечно много. Таким образом, отправляясь от любой из трех функций $\psi_{\pm}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_{\pm}^N$, с помощью флиптонных возбуждений можно построить три различных счетных базиса $\{\psi_{\pm}^N(f_1 \dots f_n)\}$, на которые натягиваются сепарабельные гильбертовы пространства. Мы выбираем здесь эти три состояния: ψ_+ , ψ_- , ψ_0 , так как только они обладают свойством трансляционной инвариантности, присущим гамильтониану (17).

Итак, в термодинамическом пределе мы имеем вместо единственного пространства (18) уже три пространства: \mathcal{H}_+ , \mathcal{H}_- , \mathcal{H}_0 с трансляционно-инвариантными вакуумами (псевдоваккумами). Подчеркнем, что эти пространства взаимно ортогональны (соответствующие псевдоваккумы унитарно неприводимы).

Теперь уже операцию (22) можно производить на разных пространствах, что приводит к неединственности свободной энергии (23) и других термодинамических величин.

Рассмотрим свойства симметрии каждого из пространств. У состояния ψ_+ нарушена Z_2 -симметрия. Все флиптонные возбуждения над ψ_+ задают функции, принадлежащие одному и тому же пространству \mathcal{H}_+ . В соответствии с концепцией квазисредних будем считать, что каждая термодинамическая фаза обладает определенной симметрией, отличающей ее от других фаз. Тогда можно сказать, что пространству \mathcal{H}_+ соответствует упорядоченная фаза со средним спином

$$\langle \sigma \rangle_+ = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\text{Sp } \sigma e^{-H_N/\Theta}}{\text{Sp } e^{-H_N/\Theta}} \right\}_{(+)}$$

(намагниченностью), направленным вверх. При $\Theta = 0$

$$\langle \sigma \rangle_+ |_{\Theta=0} \equiv \langle \psi_+, \sigma \psi_+ \rangle = 1.$$

Включение температуры $\Theta > 0$ приводит к появлению флиптонных возбуждений, соответствующих состояниям из того же самого пространства \mathcal{H}_+ . Такие возбуждения, описываемые функциями одного пространства с заданной симметрией, являются гомофазными флуктуациями в однородной фазе.

В состоянии ψ_- также нарушена Z_2 -симметрия. Пространство \mathcal{H}_- соответствует упорядоченной фазе со средним спином, направленным

вниз:

$$\langle \sigma \rangle_{\theta=0} \equiv \langle \psi_-, \sigma \psi_- \rangle = -1.$$

Два рассмотренных состояния обычно называют ферромагнитными. Подчеркнем, что эти состояния отличаются лишь направлением намагниченности, тогда как свободная энергия (23) и другие термодинамические величины для них имеют одинаковые значения (при одной и той же температуре Θ). Такая картина соответствует макроскопическому вырождению.

Псевдовакуум ψ_0 обладает Z_2 -симметрией, вследствие которой

$$\langle \sigma \rangle_0 |_{\theta=0} = \langle \psi_0, \sigma \psi_0 \rangle = 0.$$

Более того, $\forall \Theta \langle \sigma \rangle_0 = 0$. Такое поведение соответствует парамагнитной (разупорядоченной) фазе.

Ясно, что флиппонные возбуждения над ψ_+ и ψ_- могут привести к частичному разупорядочению спинов, в случае же ψ_0 — наоборот, к частичному упорядочению. Однако нельзя сказать (что, к сожалению, иногда делается), что области элементарных возбуждений соответствуют зародышам одной фазы в другой. Мы уже выяснили, что все флиппонные возбуждения над некоторым состоянием принадлежат одному пространству состояний и поэтому соответствуют лишь одной-единственной фазе с определенным свойством симметрии. Такие области есть гомофазные флуктуации. Кроме того, по определению фаза всегда макроскопична, тогда как размеры флиппонных областей микроскопичны.

Пространства \mathcal{H}_+ , \mathcal{H}_- и \mathcal{H}_0 описывают, таким образом, чистые фазы.

Теперь мы можем определить три свободные энергии (23) и вообще три набора термодинамических величин, соответствующих разным фазам. Какой же из них следует предпочесть другим? Ответ на этот вопрос также дает концепция квазисредних, в соответствии с которой следует выбрать то состояние, которое при заданных условиях (определенная температура и т. д.) термодинамически наиболее выгодно, т. е. обладает наименьшей свободной энергией.

При низких температурах в модели (17), как известно, выгодно упорядоченное состояние (именно поэтому состояние ψ_0 является псевдовакуумом), тогда как при высоких — разупорядоченное (рис. 3, а). Ситуация, изображенная на рис. 3, а, соответствует фазовому переходу непрерывного типа, при котором выше критической точки свободные энергии упорядоченного и разупорядоченного состояний совпадают. При переходах первого рода такого совпадения нет (рис. 3, б). Это последнее обстоятельство подчеркивает важность учета помимо вакуумов еще и псевдовакуумов, соответствующих разупорядочению.

Ниже точки фазового перехода физическая система, описываемая моделью Изинга, должна находиться в одном из двух состояний:

\mathcal{H}_+ или \mathcal{H}_- . Но в каком именно? Ведь эти состояния термодинамически эквивалентны (имеют одинаковую свободную энергию). Физически такое вырождение снимается за счет внешних и внутренних причин. Внешние причины связаны с наличием малых внешних возмущений, например слабых внешних полей [24]. Внутренние причины связаны с тем, что состояние равновесия является математической идеализацией, результатом усреднения по бесконечному временному интервалу [99]. Система, наблюдаемая за конечный промежуток времени, строго говоря, неравновесна. В ней флуктуационным

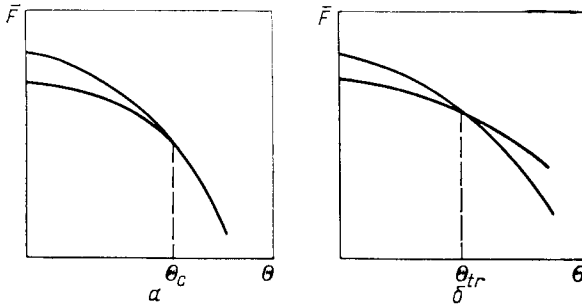


Рис. 3. Температурная зависимость свободной энергии при переходе второго (а) и первого (б) родов

образом возникают различные состояния. Большую часть времени система будет проводить в том из состояний \mathcal{H}_+ , \mathcal{H}_- , которое возникнет первым, т. е. с равновесной точки зрения она самопроизвольно перейдет в одно из состояний с нарушенной Z_2 -симметрией.

Переход системы с гамильтонианом, инвариантным относительно некоторой группы симметрии, в состояние, не инвариантное относительно этой группы, принято называть спонтанным нарушением симметрии. В соответствии с концепцией квазисредних, сопоставляющей фазу свойствам симметрии пространства состояний макроскопической системы, спонтанное нарушение симметрии есть фазовый переход.

Математический прием, позволяющий снять макроскопическое вырождение, был развит Н. Н. Боголюбовым [23, 24] и сводится к бесконечно малому затравочному нарушению симметрии за счет включения в гамильтониан дополнительного члена, имеющего физический смысл слабого внешнего поля или источников [100]. В дальнейшем были разработаны и другие способы введения квазиусреднения [25, 101], среди которых важное место занимает метод Боголюбова (мл.) [102] (см. также [103]), вводящий процедуру квазиусреднения с помощью асимптотического нарушения канонических перестановочных соотношений, т. е. введения унитарно неэквивалентных представлений операторов.

Рассмотрим другие примеры. Так, в модели Гейзенберга с гамильтонианом

$$H = - \sum_{j j'} J_{j j'} S_j S_{j'}, \quad (25)$$

где S_j — векторный оператор спина в j -м узле, имеет место инвариантность относительно группы $SU(2)$ [104]. Поэтому при $N \rightarrow \infty$ здесь имеется уже не два эквивалентных вакуума («вверх» и «вниз»), как в модели Изинга (17), а континуум таких вакуумов, каждый из которых характеризуется единичным вектором e , задающим некоторое направление в трехмерном пространстве спинов [19, 20]. Вектор e , определенный двумя сферическими углами, фиксирует направление намагниченности в системе. Так как значения углов непрерывно меняются на некотором множестве, возникает континуум вакуумов ψ_e . Над каждым вакуумом можно построить пространство состояний \mathcal{H}_e , аналогичное пространствам \mathcal{H}_{\pm} в модели Изинга. Здесь, правда, элементарные возбуждения уже, как известно, не будут флиппонами [105]. Как и в случае модели Изинга, для (25) также можно ввести пространство \mathcal{H}_0 с разупорядоченными направлениями. Кроме того, можно построить пространства, не имеющие аналогий в модели Изинга. Например, пространства типа $\mathcal{H}_{e_1 e_2 \dots e_n}$ ($n \geq 1$), порожденные псевдовакуумами, меняющими свое направление на различных макроскопических участках системы. Если ввести переменную φ , принадлежащую множеству:

$$\varphi = \{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n : n \geq 1, \varphi_j = 0, e_j\},$$

то различные допустимые пространства можно обозначать \mathcal{H}_{φ} (сюда входят и пространства типа $\mathcal{H}_{e_1 e_2 \dots e_n}$, соответствующие всевозможным смешанным состояниям). Общее пространство состояний строится как прямой интеграл [19, 20]

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}_{\varphi} d\varphi, \quad (26)$$

где

$$\int d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \int d\varphi_1 \dots d\varphi_n, \quad \int d\varphi_j = 1 + \int de_j.$$

Таким образом, здесь имеет место континуум упорядоченных термодинамически эквивалентных состояний и неупорядоченное (парамагнитное) состояние, т. е. существует возможность фазового перехода — спонтанного нарушения симметрии при некоторой температуре.

Еще одним важным примером является модель Боголюбова — Бардина — Купера — Шриффера (БКШ) в теории сверхпроводимости

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^{\dagger} a_k - \sum_{k k'} J_{k k'} a_k^{\dagger} a_{-k}^{\dagger} a_{-k'} a_{k'}, \quad (27)$$

где a_k^+ (a_{-k}^+) — оператор рождения электрона с импульсом k и спином вверх (вниз); взаимодействуют лишь электроны с противоположно направленными спинами и импульсами [26]. Сходные модели используются также в теории ядра [59]. Такая модельная задача допускает квазиспиновую формулировку [106, 107]. Действительно, имеет место соответствие

$$\sigma_{\bar{k}}^- = a_k^+ a_{-k}^+, \quad \sigma_k^+ = a_{-k} a_k, \quad \sigma_k^z = \hat{1} - 2(a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}),$$

$$\sigma^{\pm} \equiv (\sigma^x \pm i\sigma^y)/2,$$

где σ^α ($\alpha = x, y, z$) — операторы Паули и $\hat{1}$ — единичный оператор.

Как нетрудно видеть, гамильтониан (27) инвариантен относительно группы $U(1)$; поэтому здесь, как и в модели Гейзенберга, имеется континуум вакуумов, характеризуемых непрерывным параметром $\varphi \in [0, 2\pi]$ — полярным углом в xy -плоскости пространства квазиспинов.

Пусть ψ — вектор из пространства \mathcal{E}^2 и 1_φ — единичный вектор трехмерного пространства квазиспинов, проекция которого на плоскость xy имеет направление φ . Если $\psi_{\varphi k}$ — одночастичный вакуум в направлении φ , то уравнение

$$(\sigma_k \cdot 1_\varphi) \psi_{\varphi k} = \psi_{\varphi k}$$

определяет $\psi_{\varphi k}$ с точностью до фазового множителя $e^{i\varphi}$ [108]. N -частичный вакуум есть

$$\Psi_\varphi = \bigotimes_k \psi_{\varphi k}, \quad \Psi_\varphi \in \mathcal{H} = \bigotimes_k \mathcal{E}_k^2 = (\mathcal{E}^2)^N.$$

Для скалярного произведения в \mathcal{H} имеем [108, 109]

$$(\Psi_\varphi | \Psi_{\varphi'}) = \prod_k e^{i\varphi k} \sqrt{\frac{1 + 1_\varphi \cdot 1_{\varphi'}}{2}} = e^{i \sum_k \varphi k} \left(\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)^N,$$

откуда следует, что при $N \rightarrow \infty$ вакуумы с разными значениями φ , φ' ортогональны. Поэтому на пространствах \mathcal{H}_φ , получаемых из вакуумов ψ_φ с помощью элементарных возбуждений, называемых боголонами [110], реализуются унитарно неэквивалентные представления канонических перестановочных соотношений алгебры локальных наблюдаемых [109].

Как и в рассмотренных выше случаях, здесь также можно ввести пространство \mathcal{H}_0 неупорядоченных состояний, обладающих $U(1)$ -инвариантностью, описывающее нормальную фазу. Простейший способ квазиусреднения для такой модели связан с ее линейризацией, т. е. с введением аппроксимирующего гамильтониана, позволяющего получить точное (при $N \rightarrow \infty$) решение [101].

Итак, концепция квазисредних дает нам строгое определение фазы как макроскопического состояния с определенной симметрией и позволяет конструктивно разрешить проблему неоднозначности

выбора пространства состояний в соответствии с требованием термодинамической выгоды.

Проведенное выше рассмотрение позволяет также сформулировать необходимое и достаточное условие фазового перехода. Такое условие состоит: 1) из наличия в системе макроскопического вырождения; 2) из выгоды спонтанного нарушения симметрии при одних значениях термодинамических переменных и из невыгоды такого нарушения при других.

Отметим, что не всегда свойства симметрии так просто определить, как в рассмотренных выше примерах. В ряде случаев, например для перехода жидкость — пар, приходится вводить понятие скрытой симметрии [111].

5. ЛОКАЛЬНЫЕ НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ

В предыдущем разделе мы подробно рассмотрели случай так называемого глобального нарушения симметрии, когда такое нарушение охватывает сразу весь объем системы. Иначе говоря, переход происходит между чистыми фазовыми состояниями. Однако, как показывает проведенное в разд. 1 рассмотрение экспериментальных данных, такая ситуация реализуется далеко не всегда и в ряде случаев имеет место проникновение одной фазы в другую, т. е. только локальное нарушение симметрии. Идеи описания состояний с локально нарушенной симметрией восходят к работе Н. Н. Боголюбова [112].

Исследуем такие состояния для рассмотренных в предыдущем разделе примеров. Для модели Изинга (17), например, отправляясь от состояния ψ_{+0}^N , можно с помощью флиптонных возбуждений построить состояние

$$\psi_{+0}^{NN_1} = \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & 2 & \cdots & N_1 \downarrow & \downarrow & & \cdots & N \end{matrix}$$

образованное из N_1 узлов с упорядоченными спинами и $N_2 = N - N_1$ узлов с разупорядоченными спинами. В таком состоянии энергия флиппона зависит от его локализации: флиппон, возникающий в области упорядочения, имеет положительную энергию, а в области разупорядочения — отрицательную. Аналогичным образом можно построить состояния $\psi_{+0}^{NN_1}$. Термодинамический предельный переход для таких функций можно определить так, чтобы $N_1 \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ одновременно. Из полученного таким образом состояния

$$\psi_{+0} = \lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ N_2 \rightarrow \infty}} \psi_{+0}^{NN_1}, \quad N_1 + N_2 = N, \quad N_1/N_2 \rightarrow \text{const}$$

с помощью флиптонных возбуждений можно построить счетный базис $\{\psi_{+0}(f_1 \dots f_n)\}$ и натянуть на него сепарабельное пространство \mathcal{H}_{+0} . Варьируя расположение упорядоченных и разупорядоченных областей на решетке и меняя значения N_1 и N_2 при условии $N_1 + N_2 = N$, можно получить (при $N \rightarrow \infty$) счетное множество пространств

типа \mathcal{H}_{+0} , которое мы будем обозначать $\{\mathcal{H}_{+0}\}$. Аналогичным образом можно построить множество пространств $\{\mathcal{H}_{-0}\}$. Отметим, что псевдовакуумы ψ_{+0}, ψ_{-0} уже не обладают трансляционной инвариантностью, так как описываемые ими гетерофазные состояния пространственно неоднородны (в фазовом смысле). Как нетрудно убедиться, пространства из множеств $\{\mathcal{H}_{+0}\}, \{\mathcal{H}_{-0}\}$ ортогональны пространствам $\mathcal{H}_{+}, \mathcal{H}_{-}, \mathcal{H}_0$ и между собой.

Для модели Изинга (17) гетерофазные состояния, соответствующие смеси ферромагнитного и парамагнитного состояний, задаются на пространствах $\mathcal{H}_{+0}, \mathcal{H}_{-0}$. В случае модели Гейзенберга (25) гетерофазным состояниям отвечают пространства типа $\mathcal{H}_{e_1 \dots e_n}$. Аналогичные пространства состояний можно построить и для модели сверхпроводника (27).

Как же ввести процедуру квазиусреднения для смешанных состояний? Выше мы говорили о том, что простейший способ глобального нарушения симметрии состоит во включении в гамильтониан дополнительного члена типа внешнего поля или источников [23, 24]. В случае модели Изинга (17), например, достаточно перейти к гамильтониану

$$H_N(B) = -\frac{1}{4} \sum_{ff'} J_{ff'} \sigma_f \sigma_{f'} - \sum_f B \sigma_f, \quad (28)$$

где B — бесконечно слабое внешнее магнитное поле. Теперь гамильтониан Изинга (28) уже не Z_2 -инвариантен и описывает только упорядоченную фазу.

Если нарушение симметрии носит не глобальный, а локальный характер, то соответствующее поле также должно быть локальным

$$H_N(B) = -\frac{1}{4} \sum_{ff'} J_{ff'} \sigma_f \sigma_{f'} - \sum_f B_f \sigma_f, \quad (29)$$

где

$$B_f = \begin{cases} B, & f \in \tilde{V} \subset V, \\ 0, & f \in V \setminus \tilde{V}. \end{cases}$$

Здесь V — полный объем системы из спинов (множество узлов решетки), а \tilde{V} — часть объема, содержащая N_1 спинов в упорядоченном состоянии. Здесь, как обычно [23, 24], предполагается, что $B \rightarrow 0$ после того, как $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, введение локальных полей (источников) представляет собой простой, хотя и не единственный способ реализации процедуры квазиусреднения для смешанных состояний макроскопических систем.

В заключение этого раздела отметим, что идея о локальном нарушении симметрии используется также и в квантовой теории поля [113].

Перейдем теперь к рассмотрению принципов равновесной микроскопической теории гетерофазных состояний.

6. ПРИНЦИП РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

Итак, мы убедились в том, что, оставаясь в рамках пространств, соответствующих чистым фазам, невозможно описать гетерофазные состояния. Вообще говоря, рассмотрение полной картины фазовых переходов должно включать в себя возможность образования как чистых, так и смешанных фазовых состояний. Адекватное полное пространство состояний можно построить следующим образом.

Снова рассмотрим модель Изинга (17). Пусть ферромагнитное состояние отвечает упорядочению спинов вверх (вакуум ψ_+). Очевидно, в расширенном пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_0 \quad (30)$$

существуют состояния как чистых ферромагнитных и парамагнитных фаз, так и гетерофазной смеси, описываемой множеством $\{\mathcal{H}_{+0}\}$. Для описания картины ферромагнитная фаза — ферромагнитная фаза с макроскопическими состояниями разупорядочения — парамагнитная фаза такое расширенное пространство (30) является полным.

Так как пространства-сомножители в (30) ортогональны (см. разд. 4), на каждом из них реализуется унитарно неэквивалентное представление операторов σ , которое можно построить с помощью операции ортогонального проектирования

$$P_i \mathcal{H} = \mathcal{H}_i \quad (i = +, 0). \quad (31)$$

Представление оператора σ_f на i -м пространстве-сомножителе в (30) есть

$$\sigma_{fi} = \sigma_f P_i. \quad (32)$$

На каждом из пространств, следовательно, можно построить представление гамильтониана Изинга (17):

$$H_i = H(\sigma_i),$$

заменяв в (17) $\sigma_f \rightarrow \sigma_{fi}$. Из соображений общности дополним оператор H_i членом, содержащим химический потенциал:

$$H_i \rightarrow H_i(\mu) = H_i - N_i \mu_i \otimes \hat{1}_i,$$

где N_i — число частиц в i -й фазе; μ_i — соответствующий химический потенциал и $\hat{1}_i$ — единичный оператор в i -м пространстве-сомножителе в (30). Введение такого члена позволяет учесть возможность перехода частиц из одного чистого фазового состояния в другое.

Гамильтониан на пространстве (30) можно теперь определить следующим образом:

$$H(\mu) = H_+ \otimes \hat{1}_0 + \hat{1}_+ \otimes H_0 \equiv H_+ \oplus H_0. \quad (33)$$

Ясно, что такое определение полного гамильтониана соответствует структуре расширенного пространства (30).

Для гамильтониана (33) стандартным образом можно определить термодинамический потенциал

$$\Omega(\Theta, \mu) = -\Theta \ln \text{Sp} e^{-H(\mu)/\Theta} \quad (\mathcal{H})$$

В силу определений (30), (33) имеем отсюда

$$\left. \begin{aligned} \Omega(\Theta, \mu) &= \Omega_+(\Theta, \mu) + \Omega_0(\Theta, \mu); \\ \Omega_i &\equiv -\Theta \ln \text{Sp} e^{-H_i(\mu)/\Theta} \quad (\mathcal{H}_i) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Такая фазовая аддитивность имеет место и для других термодинамических потенциалов (свободная энергия, внутренняя энергия и т. д.). Напомним, что предположение о фазовой аддитивности термодинамических потенциалов заложено в феноменологических теориях гетерофазных состояний (см. разд. 2). В микроскопической теории такая аддитивность является следствием расширения пространства состояний.

В общем случае, если в системе имеется n фаз, расширенное пространство имеет вид

$$\mathcal{H} = \bigotimes_i^n \mathcal{H}_i,$$

а соответствующий гамильтониан и термодинамический потенциал по аналогии с (33), (34) определяется как

$$\left. \begin{aligned} H(\mu) &= \bigoplus_i^n H_i(\mu); \\ \Omega(\Theta, \mu) &= \sum_i^n \Omega_i(\Theta, \mu); \quad \Omega_i = -\Theta \ln \text{Sp} e^{\frac{-H_i(\mu)}{\Theta}} \quad (\mathcal{H}_i) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

При этом для равновесной смеси фаз (гетерофазного состояния) должно выполняться также условие равновесия

$$\mu_i = \mu_j, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (36)$$

(см. разд. 2).

Отметим, что идея о расширении пространств состояний для описания гетерофазных систем была предложена в [14]. В этой связи укажем также работы [19, 20, 22, 114—118].

7. ПРИНЦИП ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ФАЗ

Вернемся к проблеме построения представления гамильтониана для определенной фазы. В рассматриваемом примере модели Изинга для описания смеси парамагнитной и ферромагнитной фаз проще всего воспользоваться методом локального квазиусреднения, вводя в соответствии с (29) упорядочение спинов в некотором объеме \tilde{V} . Но каким образом следует выбирать этот объем \tilde{V} ?

В разд. 1 в связи с обсуждением экспериментов мы отмечали, что каждая из фазовых компонент распространяется обычно на весь объем системы. Это означает, что объем \tilde{V} , занимаемый ферромагнитной компонентой, может располагаться в полном объеме системы V произвольным образом — может образовывать, например, одну макроскопическую область или несколько таких областей, разделенных парамагнитными областями, хотя среднее значение объема \tilde{V} при заданных условиях должно, по-видимому, сохраняться. Таким образом, в (29) мы имеем уже бесконечный набор объемов $\{\tilde{V}_\alpha\}$, соответствующих упорядоченной фазовой компоненте. Можно сказать, что индекс α , характеризующий способ выбора $\tilde{V}_\alpha \subset V$, соответствует времени, а различные конфигурации фазовых компонент в полном объеме системы — динамической картине гетерофазных флуктуаций.

Так как при описании фазовых переходов и состояний системы нас прежде всего интересуют равновесные термодинамические характеристики, следует, очевидно, провести усреднение по всем возможным конфигурациям фазовых компонент в (29). По смыслу это соответствует усреднению по бесконечно большому времени наблюдения за системой.

Разумеется, для модели Изинга время носит условный характер. В более реалистических случаях, соответствующих солитонной динамической картине гетерофазных флуктуаций, описанной в разд. 3, считая, что время измерения какой-либо величины (пусть даже локальной) много больше времени жизни квазисолитонов или что в системе содержится большое количество хаотически распределенных солитонов, можно пренебречь подробностями их движения [119]. С этой целью необходимо провести усреднение по солитонам или квазисолитонам. При этом, естественно, каждый квазисолитон, интерпретируемый как зародыш термодинамической фазы, должен иметь время жизни большее, чем время установления локального равновесия.

Посмотрим, как можно реализовать такое усреднение. Пусть система из N частиц описывается гамильтонианом H_N . Тогда среднее значение от оператора \mathcal{O} , соответствующего наблюдаемой величине, есть, как известно,

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{N, t} = \text{Sp } \rho_N(t) \mathcal{O},$$

где $\rho_N(t)$ — статистический оператор, удовлетворяющий уравнению Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_N(t) = [H_N, \rho_N(t)].$$

Если измерение длится, как мы уже говорили, в течение времени Δt , гораздо большего времени жизни отдельного зародыша (квазисолито-

на), представляет интерес временное среднее

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{N, t} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle \mathcal{O} \rangle_{N, \tau} d\tau. \quad (37)$$

Вместо усреднения по времени (37) согласно эргодической гипотезе [99] можно перейти к усреднению по ансамблю. Для того чтобы сделать это, вспомним, что гамильтониан системы, как и другие операторы физических величин, является функционалом от полевых операторов ψ :

$$H_N = H_N \{\psi\}, \quad \mathcal{O} = \mathcal{O} \{\psi\}.$$

Теперь среднее по ансамблю можно задать как функциональный интеграл [120]

$$\langle \mathcal{O} \rangle_N = Z_N^{-1} \int e^{-H_N \{\psi\} / \Theta} \mathcal{O} \{\psi\} D \{\psi\}, \quad (38)$$

где статистическая сумма

$$Z_N = \int e^{-H_N \{\psi\} / \Theta} D \{\psi\}.$$

Мы пишем здесь $D \{\psi\}$, подразумевая, что интегрирование надо вести по полевым операторам как рождения, так и уничтожения независимо, но с учетом коммутационных свойств.

К сожалению, представление среднего в форме континуального интеграла (38), на чем, собственно, и основана статистическая физика солитонов [121], предполагает, что явный вид солитонных решений для физических полей известен. В настоящее время солитонную статистику умеют строить лишь для некоторых классических одномерных систем. При этом ансамбль солитонов обычно представляют как идеальный газ. Однако если число зародышей велико, пренебрегать их взаимодействием уже нельзя.

При более реалистическом рассмотрении следовало бы отделить солитонные степени свободы от несолитонных, представив множество всех возможных полей $\{\psi\}$ как объединение солитонного и несолитонного подмножеств

$$\{\psi\} = \{\psi_{\text{sol}}\} \cup \{\tilde{\psi}\},$$

так что при этом

$$D \{\psi\} = D \{\psi_{\text{sol}}\} D \{\tilde{\psi}\},$$

а затем проинтегрировать статистическую сумму по солитонным степеням свободы и определить эффективный гамильтониан $\tilde{H}_N \{\tilde{\psi}\}$ как функционал от несолитонных полей. После этого можно выполнить интегрирование по $\{\psi_{\text{sol}}\}$ в (38) и определить эффективный оператор $\tilde{\mathcal{O}} \{\tilde{\psi}\}$.

По-видимому, реализация подобной программы в достаточно общем случае вряд ли возможна. По сложности эта задача сравнима с обо-

снованием статистической механики исходя из уравнений Ньютона.

Поэтому здесь мы сделаем предположение о перемешивании [14, 115, 118], согласно которому после интегрирования по солитонным степеням свободы эффективная система должна представлять собой смесь термодинамических фаз и задаваться на расширенном пространстве состояний. При этом полевой оператор смешанной системы представляется прямой суммой

$$\tilde{\Psi} = \bigoplus_i \tilde{\Psi}_i,$$

где Ψ_i — полевые операторы чистых фаз. В ряде случаев с целью сохранения правильной нормировки операторов удобно провести ренормировку вида [22, 118]

$$\tilde{\Psi}_i \rightarrow \sqrt{w_i} \Psi_i \quad (w_i \equiv N_i/N), \quad (39)$$

так чтобы

$$H_{N_i} \{\tilde{\Psi}_i\} \rightarrow H_N \{\Psi_i\}.$$

Такая ренормировка приводит к появлению в гамильтониане факторов w_i , имеющих смысл фазовой вероятности или концентрации. По сути дела это те же фазовые концентрации, что и возникавшие в теории Гортера — Казимира (см. разд. 2). Появление таких множителей в гамильтониане нетрудно понять, если снова вернуться к модели Изинга (29). При переходе к расширенному пространству и представлению соответствующей фазы мы имеем в гамильтониане выражение вида

$$\sum_{1 \leq f \leq N_i} \sigma_{fi}, \quad \sum_{1 \leq f, f' \leq N_i} \sigma_{fi} \sigma_{f'i}.$$

Производя усреднение по всем способам выбора множества V_i , мы заменяем суммы эквивалентными выражениями [22]

$$w_i \sum_{1 \leq f \leq N} \sigma_{fi}, \quad w_i^2 \sum_{1 \leq f, f' \leq N} \sigma_{fi} \sigma_{f'i},$$

сохраняя нормировку операторов Паули σ_{fi} на единицу. Можно и не вводить концентрацию w_i в гамильтониан явным образом, а работать с операторами, имеющими нестандартную нормировку. При таком подходе величины w_i появятся при определении средних [114].

Таким образом, переход к равновесному описанию гетерофазного состояния на расширенном пространстве потребовал привлечения следующих гипотез:

гипотезы стационарности

$$(\mathcal{O})_{Nt} = (\mathcal{O})_N,$$

т. е. результат наблюдения не зависит от времени его начала;

гипотезы эргодичности

$$(\mathcal{O})_N = [\mathcal{O}]_N,$$

что позволяет заменить временные средние средними по ансамблю;
гипотезы перемешивания

$$[\mathcal{O}]_N = \langle \tilde{\mathcal{O}} \rangle_N,$$

позволяющей перейти от изучения динамики солитонов к рассмотрению гетерофазных средних от операторов типа (39).

8. ПРИНЦИП КОНКУРЕНЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, попытаемся ответить на вопрос: какие физические причины вызывают появление гетерофазных состояний?

Ясно, что возникновение таких состояний не может быть связано лишь с изменением температуры. Во-первых, как мы видели выше, такие изменения порождают только гомофазные флуктуации. Во-вторых, гетерофазные состояния при фазовых переходах наблюдаются, по-видимому, не всегда.

Здесь уместно напомнить, что при описании фазовых переходов в рамках статистической механики обычно используют модельные гамильтонианы, при построении которых допускают ряд упрощений, сохраняя только те взаимодействия, которые приводят к фазовому переходу, и сознательно опуская остальные. Так, в теории сверхпроводимости исходят из модели ББКШ (27), взаимодействие в которой обусловлено фрелиховским электрон-фононным механизмом [26]. При этом кулоновское отталкивание электронов обычно опускают. Модельная задача с гамильтонианом (27) допускает, как известно, точное (при $N \rightarrow \infty$) решение, описывающее фазовый переход между чистыми фазовыми состояниями [101]. Если к этой модельной задаче применить принцип расширения пространств и принцип перемешивания, то точное решение не изменится — фазы все равно останутся чистыми. Иной результат будет иметь место при включении в рассмотрение кулоновского отталкивания электронов даже в простейшем приближении [21]. Оказывается, что поведение термодинамических величин и возникновение гетерофазного состояния существенно зависит от соотношения между эффективным спариванием, обусловленным фрелиховским механизмом притяжения, и кулоновским отталкиванием [21, 22].

В приведенном примере фрелиховское взаимодействие ведет к фазовому переходу — возникновению упорядоченного состояния куперовских пар, а кулоновское отталкивание противодействует такому упорядочению, конкурирует с ним. Отметим, что при рассмотрении модели (27) с кулоновским взаимодействием без учета возможного расширения пространства состояний удается показать, что

наличие кулоновского отталкивания ведет к уменьшению эффективного притяжения [26].

Аналогичная конкуренция взаимодействий имеет место и в других физических системах. Например, при описании ферромагнитного упорядочения пользуются обычно моделью Гейзенберга (25), в гамильтониане которой сохранено лишь так называемое обменное взаимодействие $J_{ff'}$, связанное с кулоновским взаимодействием электронов соседних узлов

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

и определенное матричным элементом следующего вида [22, 122],

$$J_{ff'} = \langle f, f' | \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | f, f' \rangle,$$

где $|f\rangle$ — функции Ванье. Помимо такого члена при переходе к квазиспиновому формализму в построении модели Гейзенберга из полярной модели металла [122] в гамильтониан должен войти C -числовой член вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \sum_{ff'} \left\{ L_{ff'} - \frac{1}{2} J_{ff'} \right\}; \\ L_{ff'} = \langle f, f' | \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | f', f \rangle, \end{aligned} \quad (40)$$

учитывающий наличие «прямого» отталкивания электронов, конкурирующего с упорядочивающим обменным взаимодействием. При рассмотрении фазовых переходов в рамках обычных подходов этот член опускают, считая, что он лишь перенормирует энергию основного состояния [105]. При расширении пространства состояний и перемешивании, как мы увидим ниже, наличие этого члена ведет к появлению гетерофазных состояний и позволяет объяснить ряд особенностей термодинамического поведения магнетиков (см. [17, 20, 22, 46, 123, 124]).

В моделях ядер, основанных на гипотезе спаривания [59], наличие разупорядочения, по-видимому, в первую очередь связано с конечностью системы.

В гетерофазных мультикварковых системах конкурируют притяжение на больших расстояниях и отталкивание мешков, ведущих себя подобно твердым сферам [8].

Таким образом, рассмотрение задачи о гетерофазном состоянии требует помимо расширения пространств состояний и перемешивания фаз также и некоторой модификации моделей — учету помимо упорядочивающих также и конкурирующих с ними разупорядочивающих взаимодействий.

Перейдем теперь к рассмотрению моделей конкретных физических систем.

9. МОДЕЛИ ГЕТЕРОФАЗНЫХ СОСТОЯНИЙ

В этом разделе в качестве примера рассмотрим модели гетерофазных состояний для ферромагнетиков, сверхпроводников и мультикварковых образований в ядерной материи. При этом мы будем следовать нашим работам [7, 20—22, 38, 46, 118, 123, 124]. По аналогии можно описать гетерофазные состояния и в других системах, в частности в кристаллах [14—16, 18, 19, 114], антиферромагнетиках [125], сегнетоэлектриках [126, 127], в том числе и в метастабильных веществах [128, 129].

Начнем с модели гетерофазного ферромагнетика. В предыдущем разделе мы указали на то, что стандартный гамильтониан Гейзенберга (25) следует дополнить членом (40). При этом исходная $SU(2)$ -инвариантность естественно сохраняется. В соответствии с принципом расширения будем определять гамильтониан на пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e \otimes \mathcal{H}_o,$$

где \mathcal{H}_e — пространство состояний с выделенным направлением e в трехмерном пространстве квазиспиновых переменных, соответствующее ферромагнитной фазе, и \mathcal{H}_o — пространство разупорядоченных состояний, соответствующее парамагнитной фазе.

Далее, имея представления S_{fi} квазиспиновых переменных на каждом из пространств-сомножителей, можно построить соответствующие представления гамильтониана Гейзенберга

$$H_i = \frac{1}{2} \sum_{ff'} \left(L_{ff'} - \frac{1}{2} J_{ff'} \right) \hat{1}_i - \sum_{ff'} J_{ff'} S_{fi} S_{f'i}. \quad (41)$$

Здесь, очевидно, каждое суммирование \sum_f должно относиться лишь к тем узлам $f \in V_i$, которые принадлежат областям i -й фазы, причем значения координат, входящих в V_i , должны меняться в зависимости от времени. Учитывая принцип перемешивания фаз (см. разд. 7), полный гамильтониан гетерофазного ферромагнетика можно представить в виде [17]

$$H = \bigoplus_i H_i;$$

$$H_i = (w_i^2 A/2 - w_i \mu_i) \hat{1}_i - w_i^2 \sum_{ff'} J_{ff'} S_{fi} S_{f'i}, \quad (42)$$

где μ_i — химический потенциал соответствующей фазы; w_i — фазовая концентрация.

Задачу с модельным гамильтонианом (42) можно теперь исследовать с помощью любого из известных методов квантовой теории магнетизма. Однако чтобы подчеркнуть принципиальное отличие, возникающее при описании гетерофазного состояния, мы здесь воспользуемся простейшим приближением среднего поля. Подчеркнем, что метод среднего поля приводит к точному при $N \rightarrow \infty$ результату

в случае так называемого дальнего действия, когда

$$(\forall f, f') J_{ff'} > 0, \lim_{N \rightarrow \infty} J_{ff'} = 0, \lim_{N \rightarrow \infty} J < \infty, J = \sum_g J_g, \quad g = |f - f'|.$$

В этом случае исходный гамильтониан (42) эквивалентен аппроксимирующему гамильтониану

$$H^{\text{app}} = \bigoplus_i H_i^{\text{app}};$$

$$H_i^{\text{app}} = (w_i^2 A / 2 - w_i \mu_i) \hat{1}_i - w_i^2 \sum_{ff'} J_{ff'} (2S_{fi} - \langle S_i \rangle) \langle S_i \rangle \quad (43)$$

в том смысле, что они определяют одинаковые значения термодинамических потенциалов [20]. Здесь $\langle S_i \rangle$ — средний спин в i -й фазе, величина которого не зависит от f в силу трансляционной инвариантности на решетке. Ясно, что для парамагнитной фазы $\langle S_p \rangle = 0$, тогда как для ферромагнитной фазы $\langle S_F \rangle$ может отличаться от нуля.

Стандартным способом для ферромагнитного среднего спина получаем уравнение

$$\langle S_F \rangle = \frac{1}{2} \text{th} (Jw^2 \langle S_F \rangle / \Theta), \quad (44)$$

где w обозначено w_F и $\langle S_F \rangle$ — модуль среднего спина. Из условия (36) совместно с условием нормировки

$$w_F + w_p = 1$$

(см. разд. 2) получается следующее выражение:

$$w (\equiv w_F) = A - J \langle S_p \rangle^2 / 2 (A - J \sum_i \langle S_i \rangle^2).$$

Учитывая равенство $\langle S_p \rangle = 0$, получаем отсюда

$$w = A / 2 (A - J \langle S_F \rangle^2). \quad (45)$$

Как нетрудно видеть, соотношения (44), (45) представляют собой замкнутую систему уравнений, решения которой определяют возможные термодинамические состояния рассматриваемой системы.

Для полной свободной энергии на спин имеем

$$\bar{F} = \bar{F}_F + \bar{F}_p = A (w^2 - w + 1/2) + w^2 J \langle S_F \rangle^2 - \Theta \ln [4 \text{ch} (w^2 J \langle S_F \rangle / \Theta)]. \quad (46)$$

Теперь можно исследовать вопрос о реализации того или иного фазового состояния. При этом, исследуя возможные решения системы (44), (45), необходимо принимать также во внимание решения, соответствующие чистым фазам, т. е. с $w \equiv 0$ (парамагнетик) и с $w \equiv 1$ (чистый ферромагнетик).

Отметим, что характер решений качественно зависит от соотношения между константами связи J и A , т. е. от вкладов за счет обмен-

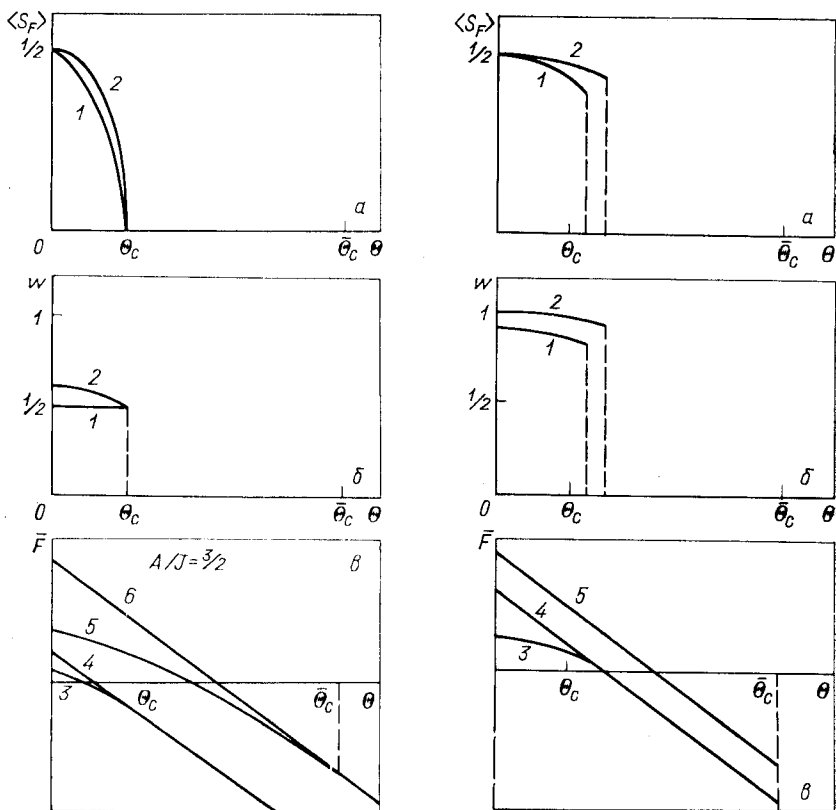


Рис. 4. Температурная зависимость среднего спина (а) ферромагнитной концентрации (б) и свободной энергии (в) гетерофазного ферромагнетика при $A \geq 3J/2$:

1 — $A \rightarrow +\infty$; 2 — $A/J = 3/2$; 3 — гетерофазное состояние; 4 — $w \equiv 1/2$, $\langle S_F \rangle \equiv 0$; 5 — обычное решение ($w = 1$); 6 — $w \equiv 0$, $\langle S_F \rangle \equiv 0$

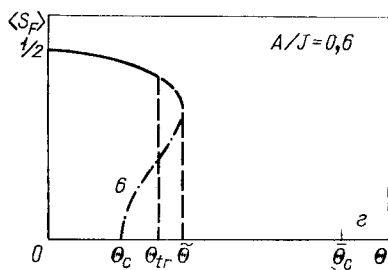


Рис. 5. Температурная зависимость параметров порядка и свободной энергии в случае $J/2 < A < 3J/2$:

1 — $A/J = 0,8$; 2 — $A/J = 0,6$; 3 — гетерофазное решение; 4 — $w \equiv 1/2$, $\langle S_F \rangle \equiv 0$; 5 — $w \equiv 0$, $\langle S_F \rangle \equiv 0$; 6 — неустойчивое решение

ного и конкурирующего с ним прямого взаимодействий соответственно. Рассмотрим следующие ситуации.

1) $A \geq 3J/2$. В этом случае в системе происходит фазовый переход второго рода в критической точке

$$\Theta_c = J/8 \quad (47)$$

(рис. 4). При этом ферромагнитное состояние (состояние с $\langle S_F \rangle \neq 0$) ниже Θ_c вплоть до нулевой температуры содержит макроскопическую долю парамагнитного состояния, концентрация которой определяется величиной $1 - w$. Иначе говоря, ниже Θ_c имеет место гетерофазное состояние, представляющее собой равновесную смесь ферромагнитной и парамагнитной фаз.

Выше Θ_c оказывается выгодным состояние с нулевой средней намагниченностью (парамагнетик), в котором, однако, $w = 1/2$ (рис. 4, в). Иначе говоря, половина частиц по-прежнему относится к ферромагнитной фазе, хотя дальний порядок отсутствует. Такой результат может интерпретироваться как проявление ближнего порядка выше Θ_c .

2) $J/2 < A < 3J/2$. Фазовый переход между двумя гетерофазными состояниями (ферромагнетик с зародышами парамагнитной фазы и парамагнетик с ферромагнитными зародышами типа ближнего порядка) является переходом первого рода и реализуется при температуре $\Theta_{tr} > \Theta_c$ (рис. 5). По мере уменьшения значения A температура перехода растет. Температура Θ_{tr} определяется уравнением

$$A \langle S_F \rangle_{tr} + J \langle S_F \rangle_{tr}^3 + A \frac{\ln(1 - 4 \langle S_F \rangle_{tr}^2)}{\operatorname{Ar} \operatorname{th} 2 \langle S_F \rangle_{tr}} = 0;$$

$$\Theta_{tr} = \frac{JA^2 \langle S_F \rangle_{tr}}{4(A - J \langle S_F \rangle_{tr}^2) \operatorname{Ar} \operatorname{th} 2 \langle S_F \rangle_{tr}}.$$

Выше Θ_{tr} возможно магнитное состояние, существующее до температуры абсолютной потери устойчивости $\tilde{\Theta}$, определяемой условиями

$$\frac{\partial w}{\partial \Theta} = \infty, \quad \frac{\partial \langle S_F \rangle}{\partial \Theta} = \infty \quad (\Theta = \tilde{\Theta}).$$

Такое поведение соответствует возможности температурного гистерезиса (кривая 6).

3) $0 \leq A \leq J/2$. Фазовый переход также является переходом первого рода. При конечной температуре $\Theta_n \leq \Theta_{tr}$ параметр w достигает значения, равного единице. Иначе говоря, ниже Θ_n реализуется чистое ферромагнитное состояние. В этой точке, которую можно интерпретировать как температуру нуклеации (зародышеобразования), имеются особенности (изломы) среднего спина и концентрации (рис. 6). При $A = J/2$ $\Theta_n = 0$. При A/J , являющемся корнем уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{A}{J} = \frac{\sqrt{A/2J}}{\operatorname{Ar} \operatorname{th} \sqrt{2A/J}} \ln \operatorname{ch} \operatorname{Ar} \operatorname{th} \sqrt{2A/J},$$

температура нуклеации достигает значения

$$\Theta_n = \Theta_{tr} = \sqrt{AJ/2} / \text{Arth} \sqrt{2A/J}.$$

Иначе говоря, при таких A/J точка нуклеации совпадает с точкой фазового перехода и ферромагнитная фаза является чистой. При дальнейшем уменьшении A/J температура перехода продолжает расти, достигая при $A = 0$ значения

$$\bar{\Theta}_c = J/2,$$

соответствующего точке фазового перехода в обычной модели Гейзенберга, вычисленной методом среднего поля. При $A = 0$ фазовый переход снова становится переходом второго рода между чистыми фазами.

Таким образом, проведенное выше расширение модели Гейзенберга включает в себя помимо гетерофазных решений также и обычную ситуацию.

4) $A < 0$. В этом случае существует решение, соответствующее фазовому переходу второго рода в точке Θ_c (47) в гетерофазное состояние. Однако в отличие от случая 1) здесь ферромагнитная концентрация w уменьшается с умень-

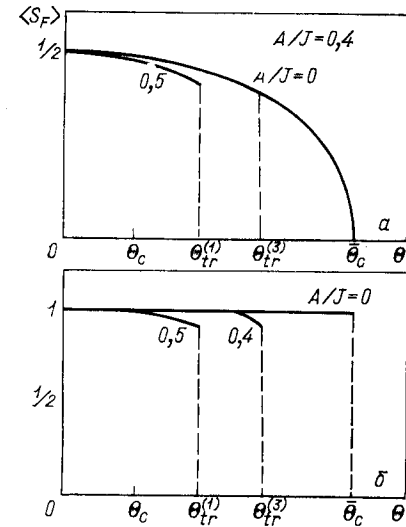


Рис. 6. Температурная зависимость параметров порядка для $0 \leq A \leq J/2$

шением температуры, тогда как значение среднего спина при этом растет (рис. 7). Такое решение является равновесным, но не устойчивым, так как

$$\partial^2 \bar{F} / \partial w^2 < 0.$$

Соответствующее состояние системы может быть лишь метастабильным. Устойчивым здесь является решение, соответствующее чистым фазам и переходу второго рода в точке $\bar{\Theta}_c$.

Проведенное рассмотрение позволяет сделать вывод о том, что фазовая концентрация w гетерофазной системы действительно является дополнительным параметром порядка, с изменением которого связан еще один специфический фазовый переход, происходящий в точке нуклеации. Выше мы отметили наличие особенностей (изломов) двух параметров порядка в этой точке. Рассмотрим теперь поведение других термодинамических величин.

Намагниченность гетерофазной системы должна, очевидно, опре-

деляться соотношением

$$M = \langle S_F \rangle_w \quad (48)$$

(средний спин, помноженный на вероятность его нахождения в системе). Иначе говоря, намагниченность является не просто параметром порядка, а произведением двух параметров порядка. Температурная зависимость M для разных значений $\nu = A/J$ приведена на рис. 8.

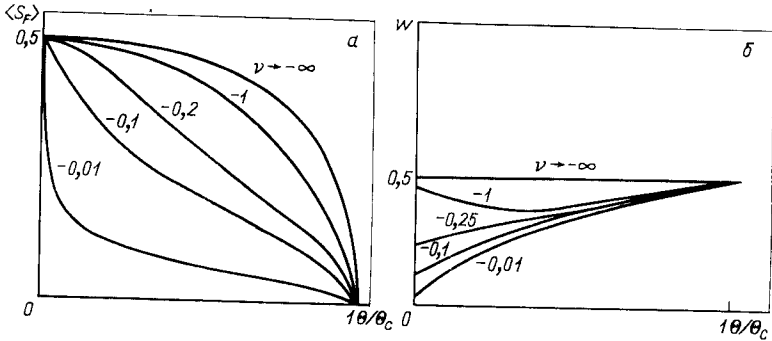


Рис. 7. Температурная зависимость среднего спина (а) и концентрации ферромагнитной фазы (б) при отрицательных значениях параметра $\nu \equiv A/J$

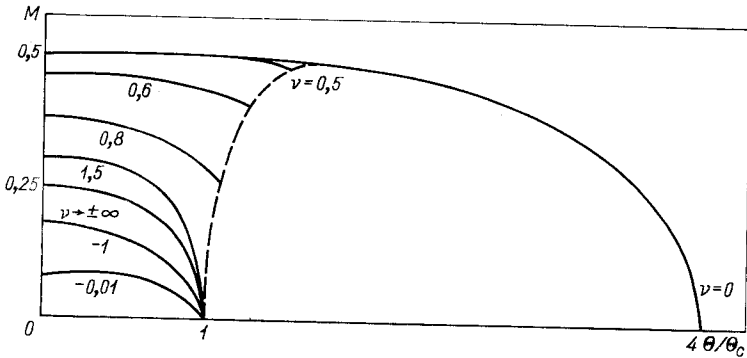


Рис. 8. Зависимость удельной намагниченности от температуры

При $A/J > 1/2$ намагниченность основного состояния не достигает намагниченности насыщения, что, как уже говорилось в разд. 1, наблюдается в некоторых ферромагнетиках.

При $A < 0$ рост среднего спина с понижением температуры при одновременном уменьшении ферромагнитной концентрации w может привести к появлению широкого максимума намагниченности (48) (рис. 8), также наблюдаемого в ряде частично разупорядоченных ферро- и антиферромагнетиков [43—46].

В точке нуклеации Θ_n намагниченность (48) имеет излом.

Энтропия гетерофазной системы определяется соотношением

$$\bar{S} = \ln \left[4 \operatorname{ch} \frac{Jw^2\sigma}{2\Theta} \right] - \frac{Jw^2\sigma^2}{2} \quad (\sigma \equiv 2 \langle S_F \rangle).$$

Ее температурная зависимость для разных A/J приведена на рис. 9.

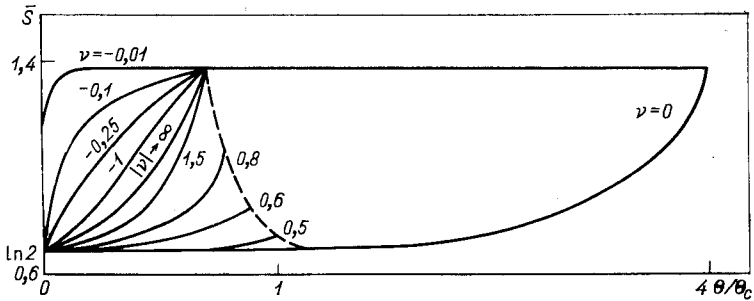


Рис. 9. Зависимость удельной энтропии от температуры при различных значениях параметра ν

Теплоемкость $C_{B=0}$ при нулевом внешнем поле есть

$$C_B = \frac{4A^4 J^2 \sigma^2 (1-\sigma)^2}{\Theta (4A - J\sigma^2) [\Theta (4A - J\sigma^2)^2 - 2JA^2 (1-\sigma^2) (4A + 3J\sigma^2)]}$$

(рис. 10). Как нетрудно видеть, в точке нуклеации имеется дополнительный скачок теплоемкости. Подобная картина наблюдается, например, в соединении CdCr_2S_4 [130].

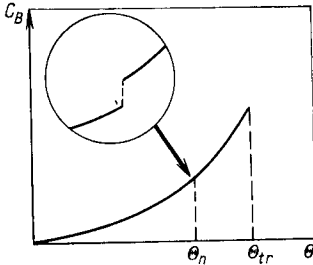


Рис. 10. Поведение теплоемкости системы в точке нуклеации

Перейдем теперь к рассмотрению еще одного примера — модели гетерофазного сверхпроводника [21, 22]. В предыдущем разделе указывалось, что применение принципов расширения пространств и перемешивания к стандартной модели ББКШ не приводит к описанию устойчивого гетерофазного состояния.

Покажем, что это действительно так. Для простоты воспользуемся квазиспиновой формулировкой задачи [107, 108]. Тогда с учетом сказанного выше гамильтониан рассматриваемой системы может быть представлен в виде [21]

$$H = \bigoplus_i H_i;$$

$$H_i = \frac{w_i}{2} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \{ \hat{1} - \sigma_i^z(\mathbf{k}) \} - \frac{w_i^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} J(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \sigma_i^-(\mathbf{k}) \sigma_i^+(\mathbf{k}'), \quad (49)$$

где $\varepsilon(\mathbf{k}) = k^2/2m - \mu$, $J(\cdot)$ — ядро эффективного парного взаимодействия и σ_i^{\pm} — представление паулевских операторов для i -й фазы. Структура пространств, соответствующих фазам i , была рассмотрена в разд. 5.

Определим обычным образом термодинамический потенциал

$$\Omega = \Omega_s + \Omega_n; \quad \Omega_i \equiv -\Theta \ln \text{Sp} e^{-H_i/\Theta}.$$

Учитывая, что

$$w_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \mu} / \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad (i = s, n),$$

и производя формальное дифференцирование, находим

$$w_i = w_i \sum_{\mathbf{k}} \{ \langle \sigma_i^z(\mathbf{k}) \rangle - 1 \} / \sum_i w_i \sum_{\mathbf{k}} \{ \langle \sigma_i^z(\mathbf{k}) \rangle - 1 \}. \quad (50)$$

Условие минимальности свободной энергии [см. (36)] имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} J(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \{ \langle \sigma_s^-(\mathbf{k}) \sigma_s^+(\mathbf{k}') \rangle + \langle \sigma_n^-(\mathbf{k}) \sigma_n^+(\mathbf{k}') \rangle \} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \{ \langle \sigma_n^z(\mathbf{k}) - \sigma_s^z(\mathbf{k}) \rangle \} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} J(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \langle \sigma_n^-(\mathbf{k}) \sigma_n^+(\mathbf{k}') \rangle. \end{aligned} \quad (51)$$

Уравнения (50), (51) позволяют определить μ и w_s . Кроме того, необходимо также определить обычный параметр порядка (щель)

$$\Delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} J(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \xi(\mathbf{k}); \quad \xi(\mathbf{k}') = \langle \sigma_s^{\pm}(\mathbf{k}') \rangle.$$

Отметим, что $\xi(\mathbf{k})$ — вещественный параметр в силу выбора пространства \mathcal{H}_s как \mathcal{H} ($\varphi = 0$).

Итак, нам нужно вычислить средние $\langle \sigma_i^z(\mathbf{k}) \rangle$ и $\langle \sigma_n^-(\mathbf{k}) \sigma_n^+(\mathbf{k}') \rangle$. Вследствие градиентной инвариантности нормальных состояний

$$\langle \sigma_n^+(\mathbf{k}) \rangle = 0, \quad \langle \sigma_n^-(\mathbf{k}) \sigma_n^+(\mathbf{k}') \rangle = 0, \quad \langle \sigma_n^z(\mathbf{k}') \rangle = \text{th} \frac{(1-w_s)\varepsilon(\mathbf{k})}{2\Theta}.$$

Для определения средних по сверхпроводящим состояниям воспользуемся методом вычисления квазисредних, связанным с асимптотическим нарушением перестановочных соотношений (см. разд. 5). Введем операторные конструкции

$$\gamma^-(\mathbf{k}) = u^2(\mathbf{k}) \sigma_s^-(\mathbf{k}) - v^2(\mathbf{k}) L^2 \sigma_s^+(\mathbf{k}) + 2u(\mathbf{k})v(\mathbf{k}) L \sigma_s^z(\mathbf{k});$$

$$\gamma^+(\mathbf{k}) = u^2(\mathbf{k}) \sigma_s^+(\mathbf{k}) - v^2(\mathbf{k}) \sigma_s^-(\mathbf{k}) L^2 + 2u(\mathbf{k})v(\mathbf{k}) \sigma_s^z(\mathbf{k}) L,$$

где $L = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sigma(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{i}}_x / \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{k})$ и коэффициенты преобразования удовлетворяют условиям

$$u^2(\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k}) = 1;$$

$$u^2(\mathbf{k}) - v^2(\mathbf{k}) = \frac{w_s \varepsilon(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})}; \quad E(\mathbf{k}) = \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) w_s^2 + \Delta^2 w_s^4}.$$

Опуская громоздкие вычисления, основанные на методе работ [102, 103], воспроизведем лишь конечный результат:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_s^z(\mathbf{k}) \rangle &= \frac{w_s \varepsilon(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} \operatorname{th} \frac{E(\mathbf{k})}{2\Theta}; \\ \langle \sigma_s^\pm(\mathbf{k}) \rangle &= \frac{w_s^2 \Delta(\mathbf{k})}{2E(\mathbf{k})} \operatorname{th} \frac{E(\mathbf{k})}{2\Theta}; \\ \langle \sigma_s^-(\mathbf{k}) \sigma_s^+(\mathbf{k}) \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{w_s \varepsilon(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} \operatorname{th} \frac{E(\mathbf{k})}{2\Theta} \right\}.\end{aligned}$$

Теперь соотношения (50), (51) и уравнение для щели могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}w_s &= \frac{w_s \sum_k \left\{ 1 - w_s \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} \operatorname{th} \frac{E(\mathbf{k})}{2\Theta} \right\}}{w_s \sum_k \left\{ 1 - w_s \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} \operatorname{th} \frac{E(\mathbf{k})}{2\Theta} \right\} + (1 - w_s) \sum_k \left(1 - \operatorname{th} \frac{(1 - w_s) \varepsilon(\mathbf{k})}{2\Theta} \right)}; \\ w_s &= \frac{w_s}{2V} \sum_k \left\{ 1 - \frac{w_s \varepsilon(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} \operatorname{th} \frac{E(\mathbf{k})}{2\Theta} \right\}; \\ \Delta(\mathbf{k}) &= \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{w_s^2 J(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta(\mathbf{k}')}{E(\mathbf{k}')} \operatorname{th} \frac{E(\mathbf{k}')}{2\Theta}.\end{aligned}\quad (52)$$

Система (52) допускает три набора решений, характеризующихся значением параметра w_s , а именно:

- а) $w_s \equiv 0$;
- б) $w_s \equiv 1$;
- в) $w_s \neq 0; 1$.

В первом случае $\Delta(\mathbf{k}) \equiv 0$ для всех температур, т. е. сверхпроводящая компонента в системе отсутствует. Такое решение, как известно [26], неустойчиво при достаточно низких температурах. Случай б) соответствует чисто сверхпроводящему состоянию. При этом уравнение для щели в (52) переходит в стандартное уравнение теории ББКШ.

Рассмотрим теперь ситуацию в). При $\Delta \rightarrow 0$ получаем из первого уравнения в (52):

$$(1 - w_c) \sum_k \left\{ 1 - \operatorname{th} \frac{(1 - w_c) \varepsilon(\mathbf{k})}{2\tilde{\Theta}_c} \right\} = w_c \sum_k \left\{ 1 - \operatorname{th} \frac{w_c \varepsilon(\mathbf{k})}{2\tilde{\Theta}_c} \right\},$$

где $\tilde{\Theta}_c$ — критическая температура и w_c — критическое значение сверхпроводящей концентрации. Очевидно, $w_c = 1/2$. Поэтому в приближении Бардина, когда [27]

$$J(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \begin{cases} J = \text{const} & |\varepsilon(\mathbf{k})| \leq \hbar\omega_0, \\ 0 & |\varepsilon(\mathbf{k})| > \hbar\omega_0, \end{cases}$$

имеет для $\tilde{\Theta}_c$:

$$\tilde{\Theta}_c = \frac{2\theta^C}{\pi} w_c \hbar \omega_0 e^{-1/J\rho_0 w_c}. \quad (53)$$

Здесь $C = 0,5772$ —число Эйлера и $\rho_0 = \frac{mk_0}{2\pi^2 \hbar^3}$ —плотность состояний на поверхности Ферми, где

$$\sqrt{2m(\mu - \hbar\omega_0)} < k_0 < \sqrt{2m(\mu + \hbar\omega_0)}, \quad \mu > \hbar\omega_0.$$

Отсюда

$$\tilde{\Theta}_c = 0,567 \hbar \omega_0 e^{-2/J\rho_0},$$

что значительно ниже критической температуры в стандартной теории [26, 27]: $\Theta_c = 1,134 \hbar \omega_0 \exp(-1/J\rho_0)$. Заметим, что точная формула (53) хорошо согласуется с феноменологическим результатом, установленным в [131].

Рассмотрим теперь энергию основного состояния в модели (49). Переходя к интегрированию по \mathbf{k} и пределу при $\Theta \rightarrow 0$, получаем

$$E_0 = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} (1 - w_0) \left(\frac{1}{2m} \frac{k_0^5}{5} - \frac{k_0^3}{3} \mu_0 \right) + \mu_0 N + \\ + \frac{V w_0}{2\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{k_+^5 + k_-^5}{10m} - \frac{k_+^3 + k_-^3}{3} \mu_0 \right) - V \rho_0 w_0 \hbar \omega_0 \sqrt{(\hbar \omega_0)^2 + \Delta_0^2 w_0^2},$$

где $k_0 = \sqrt{2m\mu_0}$. Рассмотрим E_0 как функцию w_0 . Как нетрудно видеть, E_0 убывает с ростом w_0 , достигая наименьшего значения при $w_0 = 1$. Таким образом, основное состояние, соответствующее случаю в), оказывается неустойчивым.

В предыдущем разделе мы уже говорили, что устойчивость гетерофазного состояния связана с учетом кулоновского взаимодействия. Вклад последнего в (49) описывается слагаемым [26]

$$H_i^c = \frac{1}{2V} \sum_{q \neq 0} w_i^2 U(\mathbf{q}) \rho_i^+(\mathbf{q}) \rho_i(\mathbf{q}),$$

где $U(\mathbf{q}) = 4\pi e^2/q^2$ и оператор $\rho_i(\mathbf{q})$ описывает фурье-компоненту пространственной плотности электронов соответствующей фазы.

Посмотрим сначала, к каким качественным изменениям должно привести включение кулоновского члена. Теперь условие равенства химических потенциалов может быть представлено в виде

$$2w_s \sum_i \langle Q_i - I_i \rangle = \langle T_n - T_s \rangle + 2 \langle Q_n - T_n \rangle, \quad (54)$$

где

$$T_i = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \langle 1 - \sigma_i^z(\mathbf{k}) \rangle; \\ I_i = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} J(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \langle \sigma_i^-(\mathbf{k}) \sigma_i^+(\mathbf{k}') \rangle; \\ Q_i = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}} U(\mathbf{q}) \langle \rho_i^+(\mathbf{q}) \rho_i(\mathbf{q}) \rangle.$$

Так как средние в (54) являются функциями температуры, то это соотношение можно использовать для определения точки нуклеации Θ_n , соответствующей условию $w_s(\Theta_n) = 1$. Очевидно,

$$2 \{Q_s(\Theta_n) - I_s(\Theta_n)\} = T_n(\Theta_n) - T_s(\Theta_n). \quad (55)$$

В точке Θ_n должен иметь место излом параметра порядка (щели) и, по-видимому, скачок теплоемкости (ср. случай ферромагнетика). Из (55) видно, что значение Θ_n зависит от соотношения между кулоновским отталкиванием и эффективным спариванием электронов.

Гетерофазное состояние в низкотемпературной фазе будет устойчивым, когда

$$2 \sum_i (Q_i - I_i) + T'_s - T'_n + 2w_s \sum_i (Q'_i - I'_i) \geq 2(Q'_n - T'_n), \quad (56)$$

где $X'_i \equiv \frac{dX_i}{dw_s}$. Исследование соотношения (56) представляет собой весьма сложную математическую проблему и, к сожалению, может быть выполнено лишь приближенными методами, развитыми к настоящему времени для задач с кулоновским взаимодействием. Так как нас прежде всего интересует качественный результат, воспользуемся самым грубым приближением и заменим энергию кулоновского взаимодействия, приходящуюся на электрон, постоянной величиной $\frac{1}{2}Q$ [21, 22]. Тогда вместо (56) в основном состоянии имеем

$$2Q - \frac{1}{4} Q^2 \nu \rho_0 w_0^2 - \Delta_0 \frac{\nu}{J} \geq 0, \quad (57)$$

где ν — удельный объем. Ясно, что всегда можно выбрать Q так, чтобы удовлетворить неравенство (57). Таким образом, включение кулоновского взаимодействия действительно приводит к стабилизации гетерофазного состояния даже при $\Theta = 0$.

В двух предыдущих примерах фазовая концентрация w_i вводилась непосредственно в гамильтониан с помощью ренормировки типа (39). Ниже мы рассмотрим пример, в котором вычисление w_i производится иным способом. Исследуем шестикварковую примесь в нуклонной системе [8].

Будем считать, что ядерная материя представляет собой систему взаимодействующих кварков, причем взаимодействие приводит к образованию квазичастичных возбуждений, характеризующихся связанными состояниями из трех, шести и т. д. кварков. С этой точки зрения нуклон представляет собой квазичастичное возбуждение. В общем случае интересующие нас различные состояния кварковой материи характеризуются параметром n — числом кварков, образующих связанный кластер (частицу). При $n = 3$ мы будем говорить о фазе нуклонов, при $n = 6$ — о фазе шестикварков и т. д. Параметр n характеризует способ упорядочения кварков в кластеры, т. е. способ организации данного фазового состояния кварковой материи. Поэтому n можно считать некоторым параметром порядка.

В силу сказанного выше каждому значению $n = 3, 6, 9 \dots$ должно соответствовать пространство состояний \mathcal{H}_n , причем состояния с разным значением n взаимно ортогональны.

Очевидно, учет всех без исключения свойств реальной кварковой системы привел бы к невероятному усложнению математической формулировки проблемы, тем более что в настоящее время механизм образования конфайнмента еще не вполне ясен. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть «упрощенную» модель, позволяющую учесть наиболее важные черты системы, связанные с изучаемым явлением [8].

Основное наше предположение состоит в том, что существуют n -кварковые кластеры и что их описание можно строить в соответствии с теорией мешков [132, 133]. Тогда представление полного гамильтониана для n -й фазы может быть записано в виде

$$H_n = \sum_{\mathbf{k}} (\sqrt{\mathbf{k}^2 + M_n^2} - \mu_n) a_n^+(\mathbf{k}) a_n(\mathbf{k}) + \Phi_n. \quad (58)$$

Здесь \mathbf{k} — импульс мешка; M_n — его масса; μ_n — химический потенциал n -й фазы; $a_n^+(\mathbf{k})$, $a_n(\mathbf{k})$ — операторы рождения, уничтожения кластера (мешка) из n кварков с импульсом \mathbf{k} и Φ_n — оператор энергии взаимодействия мешков данного типа. Ясно, что при $n = 3, 9$ операторы a^+ , a являются фермиевскими, а при $n = 6, 12$ — бозевскими. Отсюда следует вывод о том, что в основном состоянии фазы с $n = 6$ и $n = 12$ находятся в состоянии бозе-конденсата.

В соответствии с приведенным выше определением фазовая концентрация есть

$$w_n = \frac{n}{N} \sum_{\mathbf{k}} \langle a_n^+(\mathbf{k}) a_n(\mathbf{k}) \rangle. \quad (59)$$

Для простоты ограничимся рассмотрением лишь двух фаз с $n = 3$ и $n = 6$ (нуклоны и шестикварки) и будем считать взаимодействие контактным взаимодействием твердых сфер. Фазу нуклонов мы будем рассматривать как совокупность мешков с квантовыми числами нуклона и массой

$$M_3 = \frac{3x_0 - z_0 + \alpha_c \Delta_3}{R_3} + BV_3, \quad (60)$$

определяемой в стандартной теории [134—136]. Здесь V_3 — объем сферического мешка радиусом R_3 ; x_0/R_3 — кинетическая энергия кварка в мешке; $-z_0/R_3$ — энергия нулевых мод поля в мешке, член $\alpha_c \Delta_3$ учитывает энергию одноглюонного обмена и параметр B определяет давление в мешке.

В свою очередь, фаза шестикварков представляет собой совокупность мешков с массой [136]

$$M_6 = \frac{6x_0 - z_0 + \alpha_c \Delta_6}{R_6} + BV_6. \quad (61)$$

Мы ограничиваемся рассмотрением шестикварковых мешков с квантовыми числами дейтрона и собственным объемом V_6 . Разумеется, отказавшись от рассмотрения динамической картины взаимодействующих кварков и мешков, мы тем самым исключили возможность исследования микроскопического механизма образования шестикварков из нуклонов. Однако предположение о существовании двух фаз и их описание с помощью представления о газе мешков позволяет, в известном смысле, эффективно учесть существование такого механизма и изучать вопрос о термодинамической выгодности того или иного фазового состояния в зависимости от внешних условий.

В соответствии со сказанным выше мы предполагаем, что операторы (58) реализуют представления «истинного» кваркового гамилтониана на пространствах состояний \mathcal{H}_3 и \mathcal{H}_6 с соответствующими свойствами симметрии, причем $\mathcal{H}_3 \cap \mathcal{H}_6 = \emptyset$. Термодинамический потенциал такой системы есть

$$\Omega \equiv -\Theta \ln \text{Sp}_{(\mathcal{H})} e^{-H/\Theta} = \Omega_3 + \Omega_6;$$

$$\Omega_i \equiv -\Theta \ln \text{Sp}_{(\mathcal{H}_i)} e^{-H_i/\Theta}, \quad i = 3, 6.$$

Пусть в системе объема V содержится N кварков. Будем считать, что мешки при взаимодействии друг с другом представляют собой твердые сферы с собственным объемом v_i . Ясно, что такие мешки будут двигаться не в полном объеме V , а лишь в некоторой «свободной» части, величину которой можно определить как

$$V' = v - \frac{1}{3} w N v_3 - \frac{1}{6} (1-w) N v_6,$$

где

$$w = N_3/N$$

— параметр, определяющий концентрацию адронной фазы (N_3 — число кварков в мешках, составляющих нуклонную подсистему). Очевидно, что концентрация шестикварковой фазы в этом случае есть $1 - w$, так как $N_3 + N_6 = N$. Здесь имеется прямая аналогия с газом Ван-дер-Ваальса, в уравнении состояния которого также имеется параметр, учитывающий невозможность проникновения твердых сфер друг в друга.

Исследуем теперь поведение термодинамических функций рассматриваемой системы в основном состоянии, т. е. при $\Theta = 0$. Прежде всего совершим стандартный переход от суммирования по (k, s) в ферми-системе к интегрированию:

$$\sum_{k, s} \dots \rightarrow g \frac{V'}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \dots = g \frac{V'}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 \dots,$$

где импульс Ферми k_F определяется из условия

$$\sqrt{k_F^2 + M_3^2} = \mu_3.$$

Кроме того, для числа нуклонов в системе имеем

$$\begin{aligned} \frac{N_3}{3} &\equiv \lim_{\Theta \rightarrow 0} \sum_{k, s} \left\{ \exp \frac{-(\sqrt{k^2 + M_3^2} - \mu_3)}{\Theta} + 1 \right\}^{-1} = \\ &= g_3 \frac{V'}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 = \frac{g_3 V'}{6\pi^2} k_F^3, \text{ где } g_3 = 2(2s + 1) = 4. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$k_F = \left(\frac{\pi^2}{2} \frac{N_3}{V'} \right)^{1/3}.$$

Из определения термодинамического потенциала Ω_3 имеем при $\Theta = 0$

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \sum_{k, s} (\sqrt{k^2 + M_3^2} - \mu_3) = \frac{g_3 V'}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 (\sqrt{k^2 + M_3^2} - \mu_3) = \\ &= \frac{g_3 V'}{16\pi^2} \left[k_F (2k_F^2 + M_3^2) \sqrt{k_F^2 + M_3^2} - M_3^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + M_3^2}}{M_3} \right] - \frac{g_3 V'}{6\pi^2} k_F^3 \mu_3. \end{aligned}$$

Что же касается шестикварковой подсистемы с гамильтонианом, то, как указывалось выше, при $\Theta = 0$ она находится в состоянии бозе-конденсата с $\mu_6 = M_6$ и $\Omega_6 = 0$.

Практически вместо термодинамического потенциала Ω , являющегося функцией V и μ , удобнее пользоваться свободной энергией $F = \Omega + \mu N$, являющейся функцией V и N . Тогда полная свободная энергия есть

$$F = F_3 + F_6,$$

причем

$$F_3 = \frac{V'}{4\pi^2} \left[k_F (2k_F^2 + M_3^2) \sqrt{k_F^2 + M_3^2} - M_3^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + M_3^2}}{M_3} \right]$$

и

$$F_6 = \frac{N - N_3}{6} M_6.$$

Так как, строго говоря, кварковая материя должна характеризоваться очень большими значениями V и N ($V \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$), то имеет смысл рассмотреть плотность свободной энергии в системе, т. е. свободную энергию в расчете на кварк:

$$f \equiv \frac{F}{N} = \frac{F_3 + F_6}{N} = f_3 + f_6.$$

Ее можно рассматривать как функцию переменных v' и w , где

$$v' = V'/N.$$

Как известно, наиболее устойчивым состоянием системы является такое, свободная энергия которого минимальна. В нашем случае

свободным параметром, по которому следует минимизировать функцию $f(v', w)$ является концентрация адронной компоненты w , связанная с концентрацией шестикварковой компоненты w_6 соотношением $w_6 = 1 - w$. Из указанного условия имеем

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{k_F}{w} v' \left[1 - \frac{w}{3v'} \left(\frac{v_6}{2} - v_3 \right) \right] \left[(6k_F^2 + M_3^2) \sqrt{k_F^2 + M_3^2} + \frac{(2k_F^2 + M_3^2) k_F^2 - M_3^4}{\sqrt{k_F^2 + M_3^2}} \right] + \frac{f_3}{v'} \left(\frac{v_6}{2} - v_3 \right) - \frac{M_6}{2} = 0, \quad (62)$$

причем

$$k_F = \left(\frac{\pi^2}{2} \frac{w}{v'} \right)^{1/3}. \quad (63)$$

Система уравнений (62), (63) позволяет определить концентрацию адронной компоненты w как функцию переменных параметров мешков

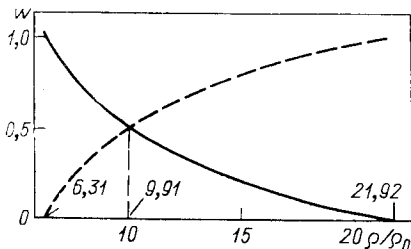


Рис. 11. Зависимость концентраций нуклонной и шестикварковой компонент от плотности в системе: сплошная кривая соответствует нуклонной фазе; пунктирная — шестикварковой

и переменной v' , связанной с плотностью системы соотношением

$$\rho = \frac{w(M_3 - M_6/2) + M_6/2}{3v' + wv_3 + \frac{1-w}{2} v_6}. \quad (64)$$

Перейдем теперь к непосредственному расчету зависимости концентрации w от параметров системы и исследованию фазовых переходов. С этой целью выберем числовые значения параметров в формулах (60) и (61) в соответствии со стандартной теорией мешков [134—136]: $x_0 = 2,04$; $\alpha_c = 0,55$; $B^{1/4} = 146$ МэВ; $\Delta_3 = 1,44$; $\Delta_6 \approx 0,48$. Значение собственного объема v_3 соответствует объему кора, определяемому из данных по нуклон-нуклонному рассеянию. Значение v_6 в этом случае можно определить, воспользовавшись известным в теории мешков соотношением между радиусами протона и шестикварка [135]

$$R_6^3/R_3^3 = M_6/M_3.$$

Теперь можно определить зависимость плотности свободной энергии и концентрации w от плотности системы ρ . На рис. 11 приведен результат расчета зависимости $w(\rho)$ по формуле (64). Значение ρ

измеряется в единицах нормальной ядерной плотности:

$$\rho = m\rho_0,$$

где m — цена деления и $\rho_0 = 1,23 \cdot 10^9$ (МэВ)⁴. Как нетрудно видеть, при изменении ρ от ρ_0 до $6,31\rho_0$ параметр $w(\rho) = 1$, что соответствует чистой адронной фазе. При значениях плотности $\rho \geq 6,31\rho_0$ в системе возникает шестикварковая компонента. При дальнейшем увеличении плотности все большее число кварков переходит из адронной фазы в шестикварковую. При $\rho \geq 21,92\rho_0$ в системе вообще не остается адронов: $w(\rho) = 0$, что соответствует чистой шестикварковой фазе. Таким образом, при $6,31\rho_0 \leq \rho \leq 21,92\rho_0$ в системе возможно гетерофазное состояние — равновесная смесь нуклонной и шестикварковой фазовых компонент.

Чтобы убедиться в термодинамической выгодности гетерофазного состояния, рассмотрим поведение плотности свободной энергии $f(\rho, w(\rho))$ и плотностей свободных энергий чистых фаз f_3 и f_6 соответственно. Результаты таких расчетов приведены на рис. 12.

Как видно из рис. 12, в области $6,31\rho_0 < \rho < 21,92\rho_0$ плотность свободной энергии, соответствующая гетерофазному состоянию (толстая сплошная кривая), имеет наименьшее значение, тогда как для $\rho_0 \leq \rho \leq 6,31\rho_0$ минимальна плотность свободной энергии адронной фазы (тонкая сплошная кривая), а при $\rho > 21,92\rho_0$ — шестикварковой фазы (пунктирная кривая). Таким образом, сначала в системе существует чистая адронная фаза, которая при плотности $\rho = \rho_{c1} \equiv 6,31\rho_0$ переходит в равновесную смесь адронов и шестикварков, и, наконец, при $\rho \geq \rho_{c2} \equiv 21,92\rho_0$ реализуется чистая шестикварковая фаза (f_6 минимальна). Значения плотности ρ_{c1} и ρ_{c2} соответствуют точкам фазового перехода типа нуклеации (иначе говоря, в этих точках возникают зародыши конкурирующего фазового состояния). В рассмотренной модели эти переходы являются переходами первого рода, так как в них имеет место излом функции $\partial f / \partial v'$. Фазовый переход первого рода между чистыми фазами адронов и шестикварков при $\rho_c = 9,91\rho_0$ не реализуется при устойчивом равновесии системы (соответствующая плотность свободной энергии чистых фаз больше, чем для гетерофазного состояния).

Таким образом, рассмотрение «наивной» модели с гамильтонианом (58) позволяет установить термодинамическую выгодность состояния адроны + шестикварки, возникающего из чистой адронной фазы при повышении плотности. Зависимость концентрации шестикварко-

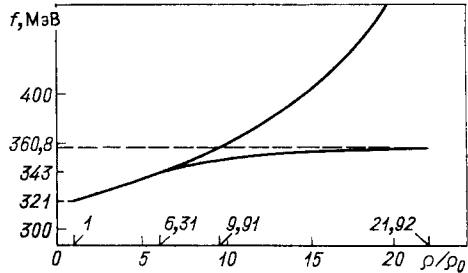


Рис. 12. Поведение удельных свободных энергий фазовых состояний системы при изменении ее плотности

вой примеси от плотности, приведенная на рис. 11, может быть использована для качественного сравнения с экспериментом.

Тот факт, что точка нуклеации $3 \leftrightarrow (3 + 6)$ соответствует достаточно высокому значению плотности, обусловлен излишней упрощенностью модели. По-видимому, включение в рассматриваемую схему ядерных сил, например, посредством перехода к модели «*little bag*» [133] приведет к уменьшению значения ρ_{c1} . Аналогичный результат может быть получен и в предложенной модели для ненулевой температуры. Кроме того, существенное упрощение модели связано с предположением о постоянстве собственных объемов мешков.

В действительности мешки должны представлять собой не твердые сферы, а нечто вроде мыльных пузырей, собственный объем которых зависит от внешних условий. Учет сжимаемости мешков также должен сказаться на критических плотностях ρ_{c1} и ρ_{c2} .

Весьма интересно, что точка нуклеации ρ_{c2} лежит значительно выше точки перехода между чистыми фазами. Таким образом, наличие гетерофазного состояния приводит к затягиванию перехода в чистую шестикварковую фазу. То же может относиться и к другим более тяжелым мультикварковым состояниям. Иначе говоря, наличие гетерофазных состояний может сильно сдвинуть в область высоких плотностей точку перехода в чистую фазу свободной движущихся кварков. Необходимо подчеркнуть, что в системе с постоянной плотностью при повышении температуры существование гетерофазных состояний также может привести к затягиванию перехода в фазу чистой кварк-глюонной плазмы, т. е. принятая сейчас температура такого перехода $T \sim 200$ МэВ может оказаться сильно заниженной. Отметим, что полученные результаты могут быть использованы для расчета структурных функций. При этом структурную функцию для гетерофазной смеси можно определить как

$$f = wf_3 + (1 - w)f_6,$$

где f_n — структурные функции для чистых фаз, определяемые стандартным образом. Подчеркнем, что в силу (14) функция f является функцией плотности. Последнее обстоятельство открывает возможность исследования так называемых A -зависимостей [137].

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем краткий итог проведенного в настоящей работе рассмотрения различных подходов к описанию динамических и равновесных свойств гетерофазных состояний в физических системах.

Описание поведения зародышей одной фазы в другой за малые времена основывается, главным образом, на применении феноменологических кинетических уравнений и моделирования на ЭВМ с использованием методов молекулярной динамики и Монте-Карло. Особенно перспективным представляется подход, связанный с изучением динамики квазисолитонов, применение которого, однако, ослож-

няется отсутствием результатов в трехмерном случае, соответствующем большинству реальных систем.

Концепция квазисредних Боголюбова, лежащая в основе современной теории фазовых переходов, позволяет рассматривать равновесные гетерофазные состояния как макроскопические состояния с различной симметрией. При этом важную роль играет принцип расширения пространств состояний, введение которого очевидно с математической точки зрения. Принцип перемешивания имеет более гипотетический характер; его обоснование тесно связано с исследованием процесса установления равновесия в динамической макроскопической системе и может составить самостоятельную проблему эргодической теории. Принцип конкуренции взаимодействий имеет наглядный физический смысл и позволяет установить истинную причину возникновения гетерофазных состояний.

Подчеркнем, что изложенный здесь подход к изучению равновесных свойств гетерофазных состояний по существу представляет собой метод построения микроскопических моделей таких состояний и обладает известной универсальностью. Сформулированные выше принципы можно применять к объектам различной физической природы; при этом необходимые вычисления могут производиться на основе известных методов и приближений, так как улучшение согласия с экспериментальными результатами связано здесь в первую очередь с расширением модели, а не с усовершенствованием расчетов.

Авторы глубоко признательны Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание, поддержку и полезные обсуждения. Вопросы, изложенные в настоящем обзоре, в разное время обсуждались с А. М. Балдиным, В. Г. Барьяхтаром, Н. Н. Боголюбовым (мл.), П. Н. Боголюбовым, А. В. Ведяевым, Х. Капелем, В. К. Лукьяновым, В. А. Матвеевым, Л. Мюнхофом, С. В. Пелетминским, Д. Пушкарковым, М. Разетти, Б. И. Садовниковым, Р. Стичкомбом, Д. Тер Хааром, А. И. Титовым, С. Фраундорфом, Н. А. Черниковым, Д. В. Ширковым, И. Р. Юхновским, которым мы, пользуясь случаем, выражаем глубокую благодарность. Мы также признательны за сотрудничество А. М. Ахметели, Е. К. Башкирову, М. И. Бокию, В. Б. Кислинскому, Р. Г. Назмитдинову и А. В. Чижову, совместно с которыми был получен ряд использованных в обзоре результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильсон К., Коугт Дж. Ренормализационная группа и ϵ -разложение: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
2. Ма Ш. К. Современная теория критических явлений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
3. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
4. Ширков Д. В. ОИЯИ, Е2-83-790, Дубна, 1983.
5. Блохинцев Д. И.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 1295.
6. Janssen D., May F. R., Mikhailov I. N., Nazmitdinov R. G.— Phys. Lett. B, 1978, v. 73B, p. 271.

7. Baldin A. M.— Prog. in Particles and Nuclear Phys., 1980, v. 4, p. 95.
8. Балдин А. М., Назмитдинов Р. Г., Чижов А. В. и др.— В кн.: VII Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. ОИЯИ, Д1-2-84-599, Дубна, 1984, с. 531.
9. Goerter C. J., Casimir H. V. G.— Phys. Z., 1934, v. 35, p. 963; Z. techn. Phys., 1934, v. 15, p. 539.
10. Фишер М. Природа критического состояния: Пер. с англ.: М.: Мир, 1968.
11. Fisher M. E.— Physics, 1967, v. 3, p. 255.
12. Binder K.— J. Phys. (Paris), 1980, v. C4, p. 51.
13. Abraham F. F.— Phys. Rep., 1981, v. 80, p. 339.
14. Юкалов В. И.— ТМФ, 1976, т. 26, с. 403.
15. Юкалов В. И.— ТМФ, 1976, т. 28, с. 92.
16. Yukalov V. I.— Physica A, 1977, v. 81, p. 249.
17. Шумовский А. С., Юкалов В. И.— ДАН СССР, 1980, т. 252, с. 581.
18. Yukalov V. I.— Physica A, 1981, v. 108, p. 402.
19. Yukalov V. I.— Physica A, 1982, v. 110, p. 247.
20. Shumovsky A. S., Yukalov V. I.— Physica A, 1982, v. 110, p. 518.
21. Шумовский А. С., Юкалов В. И.— ДАН СССР, 1982, 266, с. 320.
22. Шумовский А. С., Юкалов В. И.— В кн.: II Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-81-758, Дубна, 1982, с. 238.
23. Bogolubov N. N.— Physica, 1960, v. 26S, p. 1.
24. Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Избр. труды. Т. III. Киев: Наукова думка, 1971.
25. Боголюбов Н. Н. (мл.), Шумовский А. С., Юкалов В. И.— ТМФ, 1984, т. 60, с. 432.
26. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В. Новый метод в теории сверхпроводимости. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
27. Шриффер Дж. Сверхпроводимость. М.: Наука, 1970.
28. London F. Superfluids. V. 1. N. Y.: Wiley, 1950.
29. Pippard A. B.— Proc. Roy. Soc., 1953, v. A216, p. 547.
30. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.— ЖЭТФ, 1950, т. 20, с. 1064.
31. Линтон Э. Сверхпроводимость: Пер. с англ. М.: Мир, 1971.
32. Guenault A. M.— Proc. Roy. Soc., 1961, v. A262, p. 420.
33. Faber T. E.— Proc. Roy. Soc., 1957, v. A241, p. 531.
34. Сен-Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость второго рода: Пер. с англ. М.: Мир, 1970.
35. Alers P.— Phys. Rev., 1957, v. 105, p. 104.
36. Staundenmann J.— Sol. State Comm., 1978, v. 26, p. 461.
37. Endo K., An I., Shinogi A.— J. Phys. F, 1977, v. 7, p. L99.
38. Shinogi A., Endo K., An I. C. e. a.— J. Phys. Soc. Jap., 1977, v. 43, p. 1453.
39. Endo K., Ooiwa K., Shinogi A. e. a.— J. Magn. Magn. Mat., 1983, v. 31—34, p. 75.
40. Webster P. J., Ziebeck R. A.— J. Phys. Chem. Solids, 1973, v. 34, p. 1647.
41. Suzuki H., Harada J.— J. Magn. Magn. Mat., 1983, v. 31—34, p. 69.
42. Kouvel J. S.— J. Phys. Chem. Solids, 1963, v. 24, p. 795.
43. Friedt J. M., Shenoy G. K., Dunlap B. D., Aldred A. T.— Phys. Rev. B, 1979, v. 20, p. 251.
44. Fisk Z., Tohnston D. C., Gornut B. e. a.— J. Appl. Phys., 1979, v. 50, p. 1911.
45. Fujita T., Suziki M., Isikawa Y.— Sol. State Comm., 1980, v. 33, p. 947.
46. Shumovsky A. S., Yukalov V. I.— Chem. Phys. Lett., 1981, v. 83, p. 582.
47. Rigamonti A., Brookeman J. R.— Phys. Rev. B, 1980, v. 21, p. 2681.
48. Brookman J., Rigamonti A.— Phys. Rev. B, 1980, v. 24, p. 4925.
49. Розенман Г. И., Охадкин В. А., Чепелев Ю. Л., Шур В. Я.— Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 39, с. 397.
50. Silvera I. F.— Rev. Mod. Phys., 1980, v. 52, p. 393.

51. Брук Ю. М., Кугель К. И.— Астрофизика, 1976, т. 12, с. 351.
 52. Steffen B., Hosemann R.— Phys. Rev., 1976, v. B13, p. 3232.
 53. Maisano G., Migliardo P., Aliotta F. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, p. 1025.
 54. D'Arrigo G.— J. Chem. Phys., 1981, v. 75, p. 921.
 55. Angell C. A.— In: Water: A Comprehensive Treatise. N. Y.: Plenum, 1982, v. 7, p. 1.
 56. Cook H. E.— Phys. Rev. B, 1977, v. 15, p. 1477.
 57. Fräüendorf S. Lecture Notes. New-Orlean, 1983.
 58. Боголюбов Н. Н.— ДАН СССР, 1958, т. 119, с. 52.
 59. Соловьев В. Г. Теория атомного ядра. М.: Наука, 1981.
 60. Ropke G., Munchow L., Schulz H.— Nucl. Phys., 1982, v. A379, p. 536.
 61. Jain P. L., Das G.— Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, p. 306.
 62. Kagiyaama S., Hirooka S., Kikukawa H., Kikukawa J.— Prog. Theor. Phys., 1983, v. 69, p. 579.
 63. Baum G. Quark Matter Formation and Heavy Ion Collisions. University of Bielefeld, West Germany, 1982.
 64. Балдин А. М. Краткие сообщения по физике, 1971, т. 18, с. 465.
 65. Балдин А. М., Гиордэнеску Н., Зубарев В. П. и др.— ЯФ, 1975, т. 21, с. 1008.
 66. Aubert J. J. e.a.— Phys. Lett., 1983, v. 123B, p. 275.
 67. Arnold R. G., Chertok B. T., Dally E. B. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 776.
 68. Савин И. А.— В кн.: Тр. VI Международного семинара по избранным проблемам физики высоких энергий. ОИЯИ, Д1-2-84-728, Дубна, 1981, с.223.
 69. Bodek A., Giokaris N., Atwood W. B. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, p. 1431.
 70. Балдин А. М., Панебратцев Ю. А., Ставинский В. С. Препринт ОИЯИ, P1-84-185, Дубна, 1984,
 71. Бардин Дж.— В кн.: Физика низких температур; Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1959, с. 12.
 72. Bardeen J., Stephen M. J.— Phys. Rev., 1965, v. 140, p. 1197.
 73. Vinen W. F., Warren A. C.— Proc. Phys. Soc., 1967, v. 91, p. 409.
 74. Фишер М.— В кн.: Устойчивость и фазовые переходы; Пер. с англ. М.: Мир, 1973, с. 245.
 75. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления: Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
 76. Kiang C. S., Stauffer D.— Z. Phys., 1970, v. 235, p. 130.
 77. Wagner H.— Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 31, p. 261.
 78. Feldernhof B. U., Fisher M. E.— Ann. Phys. (N. Y.), 1970, v. 58, p.176, 217, 268,
 79. Nucleation/Ed. by A. C. Zettlemoyer. N. Y.: M. Dekker, 1969.
 80. Binder K., Stauffer D.— Adv. Phys., 1976, v. 25, p. 343.
 81. Langer J. S.— Ann. Phys. (N. Y.), 1969, v. 54, p. 232.
 82. Eggington A., Kiang C. S., Stauffer D., Walker G. H.— Phys. Rev. Lett., 1971, v. 26, p. 820.
 83. Kiang C. S., Stauffer D., Walkers e.a.— J. Atoms. Sci., 1971, v. 28, p. 1112.
 84. Abraham F. F.— Phys. Rep., 1979, v. 53, p. 93.
 85. Krumhansl J. A., Schrieffer J. R.— Phys. Rev. B, 1975, v. 11, p. 3535.
 86. Kretchmer R., Binder K., Stauffer D.— J. Stat. Phys., 1976, v. 15, p. 276.
 87. Андреев А. Ф.— УФН, 1976, т. 118, с. 251.
 88. Пушкарёв Д.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 1755; 1975, т. 68, с. 1471.
 89. Улезбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике: Пер. с англ. М.: Мир, 1965.
 90. Тябликов С. В.— ЖЭТФ, 1950, т. 20, с. 16.
 91. Negele J. W.— Rev. Mod Phys., 1982, v. 54, p. 913.
 92. Воловик Г. Е.— УФН, 1984, т. 143, с. 73.

93. Гуревич А. В., Минц Р. Г.— УФН, 1984, т. 142, с. 61.
94. Маханьков В. Г.— ЭЧАЯ, 1983, т. 14, с. 123.
95. Лагарьков А. Н., Сергеев В. М.— УФН, 1978, т. 21, с. 566.
96. Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N. e.a.— J. Chem. Phys., 1953, v. 21, p. 1087.
97. Pietarinen E.— В кн.: Международная школа по физике высоких энергий. ОИЯИ, Д24-83-179, Дубна, 1983, с. 393.
98. Barker J. A., Henderson D., Abraham F. F.— Physica A, 1981, v. 106, p. 226.
99. Боголюбов Н. Н. История и методология естественных наук. Вып. 30. М.: Изд. МГУ, 1983, с. 3.
100. Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И. Некоторые вопросы статистической механики. М.: Высшая школа, 1975.
101. Боголюбов Н. Н. (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974.
102. Bogolubov N. N. (jr.)— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1.
103. Боголюбов Н. Н. (мл.), Шумовский А. С. Тр. МИАН, Т. 136, М.: Наука, 1975, с. 351.
104. Гриб А. А. Проблема инвариантности вакуума в квантовой теории поля. М.: Атомиздат, 1978.
105. Тябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. М.: Наука, 1975.
106. Боголюбов Н. Н.— ЖЭТФ, 1968, т. 34, с. 73.
107. Bogolubov N. N. (jr.), Shumovsky A. S.— Indian J. Pure Appl. Phys., 1970, v. 8, p. 121.
108. Thirring W., Wehrl A.— Comm. Math. Phys., 1967, v. 4, p. 303.
109. Haag R.— Nuovo cimento, 1962, v. 25, p. 287.
110. Маттук Р. Д. Фейнмановские диаграммы в проблеме многих тел: Пер. с англ. М.: Мир, 1969.
111. Widom B., Rowlinson J.— J. Chem. Phys., 1970, v. 52, p. 1670.
112. Bogolubov N. N.— Nuovo cimento, 1958, v. 7, p. 794.
113. Kogut J. B.— Rev. Mod. Phys., 1979, v. 51, p. 659.
114. Юкалов В. И.— В кн.: Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-11490, Дубна, 1978, с. 437.
115. Yukalov V. I.— Physica, 1980, v. A100, p. 431.
116. Yukalov V. I.— Phys. Lett., 1981, v. 83A, p. 26.
117. Yukalov V. I. Preprint Oxford. Univ., DTP 21-81, Oxford, 1981.
118. Шумовский А. С., Юкалов В. И. XV Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий. ОИЯИ, Д2-483179, Дубна, 1983, с. 223.
119. Yukalov V. I.— Phys. Lett., 1981, v. 81A, p. 249.
120. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
121. Bishop A. R., Krumhansl J. A., Trullinger S. E.— Physica, 1980, v. 1D, p. 1.
122. Боголюбов Н. Н. Лекции по квантовой статистике. Избр. труды. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970.
123. Akhmeteli A. M., Shumovsky A. S., Yukalov V. I. Preprint of Univ. of Oxford, DTP 45/81, Oxford, 1981.
124. Ахметели А. М., Шумовский А. С., Юкалов В. И.— В кн.: II Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-81-758, Дубна, 1982, с. 300.
125. Кудрявцев И. К., Шумовский А. С., Юкалов В. И.— Там же, с. 318.
126. Башкиров Е. К., Юкалов В. И.— В кн.: Применение методов классической и квантовой теории к решению физических задач. Куйбышев, 1983, с. 99.
127. Башкиров Е. К., Юкалов В. И.— В кн.: III Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-84-407, Дубна, 1984, с. 15.

128. Yukalov V. I.— *Phys. Lett.*, 1981, v. 81A, p. 433.
129. Кислинский В. Б., Юкалов В. И.— В кн.: III Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-84-407, Дубна, 1984, с. 74.
130. Борухович А. С. и др. *ФТТ*, 1974, т. 16, с. 2084.
131. Surma M.— *Phys. Stat. Sol.*, 1983, v. B116, p. 465.
132. Bogolubov P. N. *Ann. Inst. Henri Poincare*, 1967, v. 8, p. 163.
133. Thomas A. W.— In: *Advances in Nuclear Physics*. Vol. 13, N. Y.: Plenum Press, 1984, p. 1.
134. Chodos A.e.a.— *Phys. Rev.*, 1974, v. D9, p. 3471.
135. Jaffe R. L.— *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v. 38, p. 195.
136. Matveev V. A., Sorba P.— *Lett. Nuovo cimento*, 1977, v. 20, p. 435.
137. Lukyanov V. K., Titov A. I.— *Proc. Intern. Conf. of Extreme States in Nucl. Syst.* Dresden, 1980, v. 2, p. 60.