«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1986, ТОМ 17, ВЫП. 1

УДК 530.12:531.51

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили

Институт физики высоких энергий, Серпухов

Дается развернутое изложение релятивистской теории гравитации (РТГ) предложенной авторами работ [1]. В этих работах РТГ построена однозначно на основе принципа относительности и принципа геометризации с помощью представления о гравитационном поле как физическом поле в духе Фарадея — Максвелла, обладающем энергией, импульсом и спинами 2 и 0. В теории строго выполняются законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения для вещества и гравитационного поля, вместе взятых. Теория объясняет всю имеющуюся совокупность гравитационных экспериментов. При анализе развития Вселенной теория приводит к выводу, что Вселенная является бесконечной и плоской, и предсказывает в ней существование большой скрытой массы вещества. Эта недостающая масса почти в 40 раз превышает количество вещества, которое сегодня наблюдается во Вселенной. РТГ предсказывает, что гравитационный коллапс, который для сопутствующего наблюдателя происходит за конечное собственное время, не приводит к бесконечному сжатию вещества, а останавливается при определенном конечном значении плотности тела. Поэтому согласно РТГ никаких объектов (черных дыр), в которых происходит гравитационное сжатие вещества до бесконечной плотности, не может быть в природе.

This paper covers a detailed presentation of the relativistic theory of gravity (RTG) proposed by the authors of the ref. [1]. In those, the RTG is unambiguously constructed on the basis of the special relativity and geometrization principle. A gravitational field is treated there as the Faraday-Maxwell spin-2 and spin-0 physical field, possessing energy and momentum. In our theory, the conservation laws are rigorously fulfilled for both the energy-momentum and angular momentum of matter and a gravitational field taken together. The theory explains the whole set of experiments on gravity available. In the analysis of the Universe evolution, the theory brings about the conclusion on flatness and infinity of the Universe and predicts the existence of a large hidden matter mass in it. This missing matter mass is about 40 times the amount of matter observed today in the Universe.

The RTG predicts the gravitational collapse (which for a material observer happens in a finite eigentime) not to lead to an infinite contraction of matter, but stop at a definite finite density. Therefore according to RTG, any objects (black holes), in which the gravitational compression of the matter proceeds up to infinite density, cannot exist in the Nature.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изложению основ релятивистской теории гравитации (РТГ), построенной нами в [1]. Прежде чем перейти к изложению основ РТГ, коротко остановимся на обсуждении некоторых принципиальных положений, связанных с общей теорией относительности (ОТО).

При создании общей теории относительности Эйнштейн исходил из принципа эквивалентности сил инерции и тяготения. Принцип эквивалентности сил сформулирован им следующим образом [2, с. 423]: «... для бесконечно малой области координаты всегда можно выбрать таким образом, что гравитационное поле будет отсутствовать в ней». В формулировке принципа эквивалентности Эйнштейн уже отошел от представления гравитационного поля как поля Фарадея — Максвелла. В дальнейшем это нашло отражение во введенной им псевдотензорной характеристике гравитационного поля τ_p^l. Позднее Шредингер [4] показал, что при соответствующем выборе системы координат все компоненты псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля τ_p^l вне шара обращаются в нуль. Эйнштейн по этому поводу писал [2, с. 627]: «Что же касается соображений Шредингера, то их убедительность заключается в аналогии с электродинамикой, в которой напряжения и плотность энергии любого поля отличны от нуля. Однако я не могу найти причину, почему так же должно обстоять дело и для гравитационных полей. Гравитационные поля можно задавать, не вводя напряжений и плотности энергии». Отсюда видно, что Эйнштейн сознательно отошел от концепции гравитационного поля как физического поля Фарадея — Максвелла, так как это поле как материальную субстанцию никогда нельзя устранить выбором системы отсчета.

Поскольку в ОТО отсутствует понятие плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля, то в ней нельзя ввести закон сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых. Именно Гильберт первый подчеркнул это обстоятельство. Он писал [5]: «Я утверждаю ..., что для общей теории относительности, т.е. в случае общей инвариантности гамильтоновой функции, уравнений энергии, которые... соответствуют уравнениям энергии в ортогонально-инвариантных теориях, вообще не существует, я даже мог бы отметить это обстоятельство как характерную черту общей теории относительности». Некоторые авторы не понимают этого до сих пор, другие понимают и рассматривают это как важнейший принципиальный шаг, который сделала ОТО, низвергнув такие понятия, как энергия. Отказ от понятий плотности энергии-импульса гравитационного поля приводит в ОТО к невозможности локализации энергии гравитационного поля. Но отсутствие локализации энергии поля и законов сохранения ведет к отсутствию понятия гравитационных волн и потока гравитационного излучения. Это значит, что перенос гравитационной энергии в пространстве от одного тела к другому невозможен.

Согласно идеологии ОТО следует, что принцип относительности неприменим для гравитационных явлений. Именно в этом центральном пункте почти 70 лет назад Эйнштейн и Гильберт совершили при построении ОТО принципиальный отход от специальной теории относительности, который и привел к отказу от законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения, а также к возникновению нефизических понятий о нелокализуемости гравитационной энергии и многому другому, что не имеет отношения к гравитации. Эти два великих ученых покинули удивительной простоты пространство Минковского, обладающее максимальной (десятипараметрической) группой движения пространства, и вошли в дебри римановой геометрии, которые затянули последующие поколения физиков, занимающихся гравитацией.

Итак, приняв ОТО, мы должны отказаться как от фундаментального принципа — закона сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля, так и от концепции классического поля. Но это очень большая потеря и мы были бы слишком легкомысленны, если бы без должных экспериментальных оснований согласились на нее. Отсюда один выход — отказаться от ОТО.

В [6—11] было показано, что, поскольку ОТО не имеет и не может иметь законов сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых, инертная масса, определенная в теории Эйнштейна, не имеет физического смысла, поток гравитационного излучения, как он определен в ОТО, всегда может быть уничтожен соответствующим выбором допустимой системы отсчета, а следовательно, квадрупольная формула Эйнштейна для излучения гравитационного поля не является следствием ОТО. Из общей теории относительности в принципе не следует, что двойная система теряет энергию из-за гравитационного излучения. ОТО не имеет классического ньютоновского предела, а следовательно, не удовлетворяет одному из наиболее фундаментальных принципов физики — принципу соответствия. Вот к чему приводит отсутствие в ОТО законов сохранения энергии-импульса, если отказаться от догматизма, серьезно вдуматься в существо проблемы и провести детальный анализ.

Все это свидетельствует о том, что ОТО не может быть физической теорией, поскольку она с точки зрения физики логически противоречива, а поэтому она и приводит к ряду выводов, противоречащих опыту. С другой стороны она содержит и нечто привлекательное — представление о римановой геометрии пространства-времени. Задача построения теории гравитации на базе полевых представлений в духе Фарадея — Максвелла с использованием эффективного риманова пространства-времени, которая удовлетворяла бы всем требованиям, предъявляемым к физической теории, является насущной проблемой.

В основе нашей теории в противоположность ОТО лежит принцип относительности, который был выдвинут Анри Пуанкаре как всеобщий принцип для всех физических процессов и сформулирован следующим образом [12]: «Законы физических явлений будут одинаковыми как для покоящегося наблюдателя, так и для наблюдателя, находящегося в состоянии равномерного поступательного движения, так что мы не имеем и не можем иметь никаких средств, чтобы различить, находимся ли мы в таком движении или нет».

В такой формулировке, казалось бы, принцип относительности нельзя применить к ускоренным системам отсчета. Более того, Эйнштейн утверждал, что в этом случае обязательно необходимо перейти к ОТО. Однако это неправильно. Как показано в [13, с. 126], открытие Пуанкаре и Минковским псевдоевклидовой геометрии пространства-времени позволяет сформулировать обобщенный принцип относительности: «...какую бы физическую систему отсчета мы ни избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчета, так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся». Это означает, что при описании физических явлений в пространстве Минковского в зависимости от физической задачи мы можем выбрать любую подходящую систему отсчета, адекватную данной задаче, а следовательно, и задать соответствующий метрический тензор γ_{lp} пространства Минковского. Почему Эйнштейн не понял этого? По-видимому, это объясняется тем, что теорию относительности он воспринимал только через постулат о постоянстве скорости света в галилеевых координатах, а ускоренные системы отсчета — на основании принципа эквивалентности отождествлял с гравитацией.

В основе нашей теории лежит представление о гравитационном поле как физическом поле в духе Фарадея — Максвелла, обладающем энергией, импульсом и моментом количества движения. Таким образом, гравитационное поле аналогично всем другим физическим полям и характеризуется своим тензором энергии-импульса системы. Гравитационное поле мы рассматриваем как физическое поле со спинами 2 и 0, причем асимптотически свободное гравитационное поле имеет спиральность ± 2. Геометрия пространства-времени для всех физических полей является псевдоевклидовой (пространство Минковского).

Таким образом, законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения для замкнутой системы строго выполняются. В этом состоит другое принципиальное отличие нашей теории от ОТО Эйнштейна.

Другим важнейшим вопросом, возникающим при построении теории гравитации, является вопрос о взаимодействии гравитационного поля с веществом. Гравитационное поле, как мы сейчас представляем, является универсальным: оно действует на все виды вещества одинаково. В основу теории положим принцип геометризации [13, 14], согласно которому уравнения движения вещества под действием тензорного гравитационного поля Φ^{ik} в пространстве Минковского с метрическим тензором γ^{ik} могут быть тождественно представлены как уравнения движения вещества в эффективном римановом пространстве-времени с метрическим тензором g^{ik}, зависящим от гравитационного поля Φ^{ik} и метрического тензора γ^{ik}. Тем самым мы вводим представление об эффективном римановом пространстве полевой природы. Это силовое пространство создается в РТГ со строгим соблюдением законов сохранения и возникает из-за наличия гравитационного поля и определенного, универсального характера его действия на вещество. Кривизна этого динамического риманова пространства как вторичное возникает в силу принципа геометризации и является следствием действия гравитационного поля. Конечно это силовое риманово пространство в общем случае не обладает какой-либо группой движения.

На основании пространства Минковского и принципа геометризации плотность лагранжиана можно представить в виде

$$L = L_g(\tilde{\gamma}^{ik}, \tilde{\Phi}^{ik}) + L_M(\tilde{g}^{ik}, \Phi_A),$$

где $\tilde{\Phi}^{ik} = \sqrt{-\gamma}\Phi^{ik}$ — плотность тензора полевой переменной гравитационного поля Φ^{ik}, $\tilde{g}^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik}$ — плотность метрического тензора риманова пространства g^{ik}; $\tilde{\gamma}^{ik} = \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{ik}$ — плотность метрического тензора пространства Минковского, а Φ_A — поля вещества.

В данной теории плотность лагранжиана гравитационного поля L_g зависит от метрического тензора γ^{ik} и гравитационного поля Φ^{ik}, поэтому она принципиально отличается от ОТО, где плотность лагранжиана зависит только от метрического тензора риманова пространства g^{ik}. Таким образом, плотность лагранжиана гравитационного поля в нашей теории не полностью геометризована, тогда как в ОТО она полностью геометризована.

Как будет показано далее, представление о гравитационном поле, обладающем плотностью энергии-импульса и спинами 2 и 0, в соединении с принципом геометризации позволяет однозначно построить релятивистскую теорию гравитации (РТГ). Такая теория изменяет сложившиеся под влиянием ОТО представления о пространстве-времени, выводит нас из дебрей римановой геометрии и по духу соответствует современным теориям в физике элементарных частиц. Как следствие данной теории, общий принцип относительности Эйнштейна лишен физического смысла и не имеет никакого содержания [15]. При изложении далее ряда проблем следуем [11].

1. КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРИНЦИПЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Во введении мы указали на те логические предпосылки, которые с необходимостью должны были приводить (и действительно приводят) к ряду трудностей в ОТО. Ранее эти вопросы подробно обсуждались в [4—11, 15]. В данном разделе мы намерены, следуя [6—11], рассмотреть некоторые из них и показать несостоятельность ОТО в преодолении этих трудностей.

Начнем с обсуждения принципа эквивалентности. В научной литературе до настоящего времени нет единства мнений по вопросам о содержании принципа эквивалентности и его роли в ОТО. Одни считают его основополагающим в ОТО, другие отмечают его ограниченный характер. Сам Эйнштейн на первой стадии создания своей теории в качестве наводящего соображения использовал формальную аналогию между полями сил инерции и гравитационным полем. Действительно, по своему воздействию на механическое движение тел эти поля демонстрируют много общего: движение тел под действием гравитационного поля неотличимо от их движения в соответствующим образом подобранной неинерциальной системе отсчета; в обоих полях ускорение тел не зависит от их массы и состава. Последнее обстоятельство дало основания Эйнштейну для утверждения о точном равенстве пассивной гравитационной и инертной масс тел, а также натолкнуло его на формулировку принципа эквивалентности.

Он писал [2, с. 227]: «Излагаемая теория возникла на основе убеждения, что пропорциональность инертной и тяжелой масс является точным законом природы, который должен находить свое отражение уже в самих основах теоретической физики. Это убеждение я стремился отразить в ряде предыдущих работ, в которых делалась попытка свести тяжелую массу к инертной; это стремление привело меня к гипотезе о том, что поле тяжести (однородное в бесконечно малом объеме) физически можно полностью заменить ускоренной системой отсчета. Наглядно эту гипотезу можно сформулировать так: наблюдатель, находящийся в закрытом ящике, никаким способом не может установить, покоится ящик в статическом гравитационном поле или же находится в пространстве, свободном от гравитационных полей, но движется с ускорением, вызываемым приложенными к ящику силами (гипотеза эквивалентности)».

Таким образом, с точки зрения Эйнштейна, единственное различие между полями сил инерции и гравитационным полем состоит в различной внешней причине, их вызывающей: первые являются следствием неинерциальности используемой наблюдателем системы отсчета, в то время как источником вторых служат материальные тела. Однако эти поля, по мнению Эйнштейна, оказывают эквивалентное влияние на ход всех физических процессов, и поэтому в остальных отношениях они являются неразличимыми. Это утверждение, в свою очередь, создало иллюзию о возможности исключения влияния гравитационного поля на все физические явления, по аналогии с уничтожением полей сил инерции, путем преобразования координат пространства-времени.

Характерным в этом смысле является высказывание Паули [16, с. 204]: «Первоначально принцип эквивалентности был установлен лишь для однородных полей тяготения. В общем случае он может быть сформулирован так: для бесконечно малой области четырехмерного мира (т.е. для области, столь малой, что пространственно-временными изменениями силы тяжести в ней можно пренебречь) всегда существует такая система координат K_0 (X_1, X_2, X_3, X_4), в которой сила тяжести не влияет ни на движение материальной точки, ни на любые другие физические процессы. Коротко говоря, в бесконечно малой области мира любое поле тяготения может быть уничтожено с помощью преобразования координат». Аналогичные утверждения можно найти и у Эйнштейна [2, с. 423]: «... для бесконечно малой области координаты всегда можно выбрать таким образом, что гравитационное поле будет отсутствовать в ней. Тогда можно считать,что в такой бесконечно малой области выполняется специальная теория относительности. Тем самым общая теория относительности связывается со специальной теорией относительности, и результаты последней переносятся на первую».

Впоследствии эти ошибочные утверждения почти без изменений перекочевали и в ряд учебников. Однако силы инерции и силы гравитации являются совершенно разными по своей природе, поскольку тензор кривизны для первых тождественно равен нулю, а для вторых — отличен от нуля. Следовательно, влияние первых на все физические процессы можно полностью устранить во всем пространстве (глобально) переходом к инерциальной системе отсчета, в то время как влияние вторых может быть устранено лишь в локальных областях пространства и не для всех физических процессов, а лишь для простейших, в уравнения которых не входит кривизна пространства-времени.

Поэтому, с одной стороны, принцип эквивалентности для процессов с участием частиц высших спинов несправедлив, поскольку в уравнения для этих полей тензор кривизны входит явным образом. С другой, принцип эквивалентности неприменим и к протяженным телам, имеющим достаточные размеры для того, чтобы сказывалась девиация геодезических, соответствующих крайним точкам тела. Поскольку в уравнение девиации входит тензор кривизны, то силы инерции и силы тяготения будут не эквивалентны и для механического движения протяженного тела.

Основная заслуга в выяснении этих обстоятельств принадлежит Эддингтону [17, с. 74], который указывал, что «принцип эквивалентности сыграл большую роль при построении общей теории относительности, но теперь, когда мы уже выработали новый взгляд на природу мира, он стал менее необходим... Он по существу представляет собой гипотезу, которая должна проверяться опытным путем каждый раз, как только представится возможность. Кроме того, этот принцип нужно считать скорее догадкой, чем догмой, не допускающей исключений. Возможно, что некоторые явления определяются сравнительно простыми уравнениями, в которые не входят компоненты кривизны мира; эти уравнения имеют одинаковый вид для плоских и для искривленных областей мира. Именно к таким уравнениям и применим принцип эквивалентности». Однако утверждать о полной эквивалентности описания физических явлений в гравитационном поле и в неинерциальной системе отсчета псевдоевклидова пространства-времени нельзя, так как «... существуют и более сложные явления, подчиняющиеся уравнениям, в которые входят компоненты кривизны мира. Члены, содержащие эти компоненты, будут отсутствовать в уравнениях, описывающих эксперименты, произведенные в плоских областях; при переходе же к общему случаю эти члены должны быть вновь восстановлены. Очевидно, должны существовать такие явления, которые позволяют отличать плоский мир от искривленного; в противном случае, мы не могли бы ничего знать о кривизне мира. К этим явлениям принцип эквивалентности не применим».

Таким образом, принцип эквивалентности, понимаемый как возможность исключения гравитационного поля в бесконечно малой области, не является правильным, поскольку кривизну пространства-времени, если она имеется, исключить каким-либо выбором системы координат, даже с заданной точностью, невозможно. Кроме того, гравитационное поле и поля сил инерции оказывают одинаковое влияние не на все физические процессы.

Следует отметить, что впоследствии Эйнштейн пересмотрел свою точку зрения на принцип эквивалентности и не утверждал более о полной эквивалентности полей сил инерции с гравитационным полем, указав на то, что поля сил инерции (неинерциальные системы) отсчета) представляют собой лишь частный случай гравитационных полей, удовлетворяющих условиям Римана $R^i_{nml} = 0$. Он писал [3, с. 661]: «Существует частный случай пространства, физическую структуру которого (поле) мы можем предполагать точно известной, основываясь на специальной теории относительности. Это случай пустого пространства, в котором нет ни электромагнитных полей, ни вещества. Оно полностью определяется своим «метрическим» свойством: пусть dx_0, dy_0, dz_0, dt_0 — разности координат двух бесконечно близких точек (событий); тогда величина

$$ds^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 - dt_0^2 \qquad (1)$$

может быть измерена и ее значение не зависит от конкретного выбора инерциальной системы. Если в этом пространстве ввести новые координаты x_1, x_2, x_3, x_4 посредством преобразования общего вида, то величина ds^2 для этой же пары точек будет иметь вид

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \qquad (2)$$

(здесь подразумевается суммирование по i и k от 1 до 4), причем $g_{ik} = g_{ki}$. Тогда величины g_{ik}, которые образуют «симметричный тензор» и являются непрерывными функциями $x_1, \ldots, x_4$, описывают, согласно «принципу эквивалентности», частный случай гравитационного поля [а именно, поле, которое можно вновь преобразовать к виду (1)]. Если воспользоваться работами Римана по метрическим пространствам, то свойства такого рода поля g_{ik} можно точно охарактеризовать («условием Римана»).

Однако мы ищем условия, которым удовлетворяют гравитационные поля «общего» вида. Естественно предположить, что их также можно описать, как тензорные поля типа g_{ik}, которые, вообще говоря, не допускают преобразования линейного элемента к виду (1), т. е. удовлетворяют не условию Римана, а более слабым условиям, также не зависящим, подобно условию Римана, от выбора координат (т. е. инвариантным относительно преобразования общего вида). Простые формальные соображения приводят к более слабым условиям, которые тесно связаны с условием Римана. Эти условия и являются искомыми уравнениями для чисто гравитационного поля (в отсутствие вещества и электромагнитных полей)».

Таким образом, *Эйнштейн изменил физический смысл принципа эквивалентности, хотя это обстоятельство, по-видимому, для многих так и осталось незамеченным.*

Однако в период создания ОТО Эйнштейн всецело руководствовался принципом эквивалентности в его первоначальной формулировке, который, следовательно, сыграл эвристическую роль при построении теории [2, с. 400]: «Вся теория возникла на основе убеждения, что в гравитационном поле все физические процессы протекают совершенно так же, как и без гравитационного поля, но в соответствующим образом ускоренной (трехмерной) системе координат («гипотеза эквивалентности»)».

Так как в то время благодаря открытию Минковского было известно, что различным системам отсчета соответствует различная (и в общем случае недиагональная) метрика пространства-времени, то Эйнштейн и Гроссман [2, с. 399] пришли к выводу, что полевой переменной для гравитационного поля следует считать метрический тензор риманова пространства-времени, который должен определяться распределением и движением материи.

Таким образом, возникла идея о связи геометрии пространства-времени с материей.

Исходя из этих соображений, Эйнштейн и Гроссман чисто интуитивно пытались установить вид уравнений, связывающих компоненты метрического тензора риманова пространства-времени с тензором энергии-импульса вещества. После долгих безуспешных попыток такие уравнения были найдены Эйнштейном в конце 1915 г.

Поскольку эти уравнения на основе вариационных принципов были получены несколько ранее и математиком Д. Гильбертом, мы их будем называть уравнениями Гильберта — Эйнштейна.

Здесь особо следует подчеркнуть, что метрический тензор риманова пространства не может являться характеристикой гравитационного поля, поскольку его асимптотика зависит от произвола в способе выбора трехмерной (пространственной) системы координат. Именно в этом месте находятся истоки глубокого заблуждения, которое в течение многих десятилетий было тормозом для построения теории гравитации.

2. ПСЕВДОТЕНЗОРЫ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ОТО

Эйнштейн считал, что в ОТО гравитационное поле совместно с веществом должно обладать каким-либо законом сохранения [2, с. 299]: «... безусловно следует требовать, чтобы вещество и энергия вместе удовлетворяли законам сохранения импульса и энергии». По мнению Эйнштейна, эта задача была полностью решена на основе «законов сохранения», использующих в качестве энергетически-импульсной характеристики гравитационного поля псевдотензор энергии-импульса.

Для получения таких законов сохранения обычно [18] поступают следующим образом. Если уравнения Гильберта — Эйнштейна записать в виде

$$-\frac{c^4}{8\pi G}\, g\left[R^{ik}-\frac{1}{2}\, g^{ik}R\right]=-gT^{ik}, \tag{1}$$

где $g = \det g_{ik}$, R^{ik} — тензор Риччи, а T^{ik} — тензор энергии-импульса вещества, то левую часть можно тождественно представить в виде суммы двух нековариантных величин:

$$-\frac{c^4}{8\pi G}\, g\left[R^{ik}-\frac{1}{2}\, g^{ik}R\right]=\frac{\partial}{\partial x^l}\, h^{ikl}+g\tau^{ik}, \tag{2}$$

где $\tau^{ik} = \tau^{ki}$ — псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля, а $h^{ikl} = -h^{ilk}$ — псевдотензор спина.

Используя тождество (2), уравнения Гильберта — Эйнштейна (1) можно записать в другом, эквивалентном виде:

$$-g\,(T^{ik}+\tau^{ik})=\frac{\partial}{\partial x^l}\, h^{ikl}. \tag{3}$$

В силу очевидного равенства

$$\frac{\partial}{\partial x^k\,\partial x^l}\, h^{ikl}=0 \tag{4}$$

из уравнений Гильберта — Эйнштейна (3) следует дифференциальный закон сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\,[-g\,(T^{ik}+\tau^{ik})]=0, \tag{5}$$

который с формальной точки зрения аналогичен закону сохранения энергии-импульса в электродинамике.

В соответствии с этой аналогией «поток энергии» гравитационного излучения через элементарную площадь dS_α в ОТО определяется выражением:

$$dI = c\,(-g)\tau^{0\alpha}dS_\alpha.$$

Выбрав в качестве поверхности интегрирования сферу радиуса r ($dS_\alpha = -r^2 n_\alpha d\Omega$), получим «интенсивность гравитационного излучения» в элемент телесного угла $d\Omega$:

$$\frac{\partial I}{\partial \Omega} = -cr^2(-g)\,\tau^{0\alpha} n_\alpha. \tag{6}$$

Соотношение (5) в ОТО используется и для получения интегральных «законов сохранения энергии-импульса» системы, состоящей из вещества и гравитационного поля. Для этого обычно [2, 18] интегрируют выражение (5) по некоторому объему и полагают, что потоки вещества через поверхность, ограничивающую объем интегрирования, отсутствуют:

$$\frac{d}{dt}\int(-g)\,[T^{0i}+\tau^{0i}]\,dV = -\oint(-g)\,\tau^{\alpha i}\,dS_\alpha. \tag{7}$$

Эйнштейн [2, с. 645] считал, что правая часть этого соотношения при $i = 0$ «наверняка представляет собой потерю энергии материальной системой»

$$-\frac{dE}{dt} = \oint(-g)\,\tau^{0\alpha}\,dS_\alpha. \tag{8}$$

При отсутствии «потоков энергии-импульса» гравитационного поля через поверхность, ограничивающую объем интегрирования, из выражения (7) получают закон сохранения энергии-импульса системы:

$$P^i = \frac{1}{c}\int(-g)\,[T^{0i}+\tau^{0i}]\,dV = \text{const}. \tag{9}$$

С помощью уравнений Гильберта — Эйнштейна (3) соотношение (9) может быть переписано в виде

$$P^i = \frac{1}{c}\oint h^{0i\alpha}\,dS_\alpha = \text{const}. \tag{10}$$

По мнению Эйнштейна [2, с. 652], четыре величины P^i представляют собой энергию ($i = 0$) и импульс ($i = 1, 2, 3$) физической системы. При этом обычно утверждается [18, с. 362], что «величины же P^i — 4-импульс поля и материи — имеют вполне определенный смысл, оказываясь не зависящими от выбора системы отсчета как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений». Однако, как мы покажем ниже, это утверждение является неправильным.

На основании такого определения энергии-импульса системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, в ОТО вводится понятие инертной массы m_i системы:

$$m_i = \frac{1}{c}P^0 = \frac{1}{c^2}\int(-g)\,[T^{00}+\tau^{00}]\,dV = \frac{1}{c^2}\oint h^{00\alpha}\,dS_\alpha. \tag{11}$$

Выражения, аналогичные соотношениям (5)—(11), могут быть получены и при записи уравнений Гильберта — Эйнштейна в смешанных компонентах:

$$\sqrt{-g}\,[T_i^n+\tau_i^n]=\partial_m\sigma_i^{mn}.$$

Выбор псевдотензоров энергии-импульса гравитационного поля в большой степени зависел от наклонностей авторов и, как правило, осуществлялся на основе вторичных свойств. Так, выбирая h^{ikl} в виде

$$h^{ikl}=\frac{c^4}{16\pi G}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[-g\,(g^{ik}g^{ml}-g^{il}g^{mk})\right], \tag{12}$$

мы получаем симметрический псевдотензор Ландау — Лифшица, содержащий только первые производные от метрического тензора:

$$\begin{aligned}\tau^{ik}=\frac{c^4}{16\pi G}\{&(2\Gamma^n_{ml}\Gamma^p_{np}-\Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn}-\Gamma^n_{nl}\Gamma^p_{mp})\,(g^{il}g^{mk}-g^{ik}g^{ml})+\\&+g^{il}g^{mn}\,(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^k_{np}\Gamma^p_{ml}-\Gamma^k_{ml}\Gamma^p_{np})+\\&+g^{kl}g^{mn}\,(\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{pl}-\Gamma^i_{np}\Gamma^p_{ml}-\Gamma^i_{ml}\Gamma^p_{np})+\\&+g^{ml}g^{np}\,(\Gamma^i_{nl}\Gamma^k_{mp}-\Gamma^i_{ml}\Gamma^k_{np})\},\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\Gamma^k_{mn}=\frac{1}{2}g^{kp}\,(\partial_m g_{pn}+\partial_n g_{pm}-\partial_p g_{mn}).$$

Выбирая

$$\sigma_k^{ni}=\frac{c^4 g_{km}}{16\pi G\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^l}\left[-g\,(g^{mi}g^{nl}-g^{mn}g^{il})\right], \tag{14}$$

мы приходим к псевдотензору Эйнштейна:

$$\begin{aligned}\tau_k^i=\frac{c^4\sqrt{-g}}{16\pi G}\{&-2\Gamma^i_{ml}\Gamma^l_{kp}g^{mp}+\Gamma^l_{ml}\Gamma^m_{kp}g^{ip}+\Gamma^l_{lm}\Gamma^i_{kp}g^{mp}+\\&+\Gamma^l_{kl}\Gamma^i_{mp}g^{mp}-\Gamma^l_{kl}\Gamma^p_{mp}g^{mi}-\delta^i_k\,[g^{mp}\Gamma^l_{mp}\Gamma^n_{ln}-g^{nl}\Gamma^p_{ml}\Gamma^m_{pn}]\},\end{aligned} \tag{15}$$

который совпадает с каноническим (псевдо)тензором энергии-импульса, получаемым из нековариантной плотности лагранжиана гравитационного поля:

$$L_g=\sqrt{-g}\,g^{li}\,[\Gamma^n_{pi}\Gamma^p_{nl}-\Gamma^n_{li}\Gamma^p{}_p].$$

При

$$\sigma_k^{ni}=\frac{c^4\sqrt{-g}}{16\pi G}\,g^{mi}g^{nl}\,[\partial_l g_{km}-\partial_m g_{kl}] \tag{16}$$

мы имеем псевдотензор Лоренца

$$\tau_k^i=\frac{c^4\sqrt{-g}}{16\pi G}\,[\partial_k\Gamma^l_{pl}g^{pi}-\partial_k\Gamma^i_{mp}g^{mp}-\delta^i_k R], \tag{17}$$

который совпадает с каноническим (псевдо) тензором энергии-импульса, получаемым на основе нековариантного метода бесконечно-малых смещений из ковариантной плотности лагранжиана гравитационного поля $L_g = \sqrt{-g}R$.

Изучим свойства введенных в теории Эйнштейна «энергетически-импульсных» величин на примерах определения «инертной массы» сферически симметричного источника. Для определенности все расчеты будем проводить по симметрическому псевдотензору Ландау—Лифшица (13).

3. ИНЕРТНАЯ МАССА В ОТО

Равенство инертной и гравитационной масс одного и того же тела Эйнштейн рассматривал как точный закон природы, который должен найти отражение в его теории. В настоящее время принято считать доказанным, что в ОТО гравитационная масса (или, как ее иногда называют, тяжелая масса) системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, равна ее инертной массе. Такое утверждение содержится в работах Эйнштейна [2], Толмена [19] и Вейля [20]. Впоследствии «доказательство» этой теоремы с различными видоизменениями было проведено и рядом других авторов [18, 21, 22].

Однако этот вывод является неправильным. Следуя [9], покажем, в чем состоит его ошибочность.

Тяжелая масса M произвольной физической системы, покоящейся как целое относительно галилеевской на бесконечности шварцшильдовской системы координат, определялась Эйнштейном [2, с. 660] как величина, стоящая множителем при члене $-2\,G/(c^2r)$ в асимптотическом выражении ($r \to \infty$) для компоненты g_{00} метрического тензора риманова пространства-времени:

$$g_{00} = 1 - \frac{2G}{c^2r} M.$$

Несколько иное определение гравитационной массы дал Толмен [19]:

$$M = \frac{c^2}{4\pi G} \int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV. \tag{18}$$

Из этих определений непосредственно следует, что гравитационная масса при преобразованиях трехмерных координат не изменяется, поскольку как компонента R_0^0 тензора Риччи, так и компонента g_{00} метрического тензора преобразуются аналогично скалярам.

Эти определения в случае статического сферически-симметричного источника эквивалентны. Покажем теперь, что они эквивалентны и для любых статических систем. Чтобы в этом убедиться, запишем компоненту R_0^0 в виде:

$$R_0^0 = g^{0i} \left[\frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{0i}^l - \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{pi}^p + \Gamma_{0i}^n \Gamma_{np}^p - \Gamma_{pi}^n \Gamma_{n0}^p \right].$$

После тождественных преобразований из этого выражения получим:

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [\sqrt{-g}\, g^{0n} \Gamma_{0n}^\alpha] - g^{0i} \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{ni}^n - \\ - \frac{1}{2} \Gamma_{ni}^0 \frac{\partial g^{ni}}{\partial x^0} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^0} [\sqrt{-g}\, g^{0n} \Gamma_{0n}^0]. \quad (19)$$

Поскольку для статических систем последними тремя членами в (19) можно пренебречь, то из выражения (18) имеем:

$$M = \frac{c^2}{4\pi G} \oint dS_\alpha \sqrt{-g}\, g^{0n} \Gamma_{0n}^\alpha. \quad (20)$$

Так как достаточно далеко от статической системы ее метрика с заданной точностью может быть описана метрикой Шварцшильда, то выражение (20) принимает вид:

$$M = -\frac{c^2}{8\pi G} \lim_{r\to\infty} \oint dS^\alpha g^{00} \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{00}. \quad (21)$$

Поскольку подынтегральное выражение в соотношении (18) является скаляром при любых преобразованиях трехмерной системы координат, то и гравитационная масса M не будет зависеть от выбора координат. В шварцшильдовских координатах из выражения (21) имеем:

$$M = \frac{c^2}{2G} \lim_{r\to\infty} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} g_{00} \right) = \frac{c^2}{2G} \lim_{r\to\infty} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(1 - \frac{2G}{c^2 r} M \right) \right].$$

Таким образом, гравитационная масса любой статической системы, согласно определению Толмена, является множителем при члене $-2\, G/(c^2 r)$ в асимптотическом выражении для компоненты g_{00} метрического тензора риманова пространства-времени. Следовательно, определения тяжелой массы, данные Эйнштейном и Толменом, для статических систем совпадают.

Понятие инертной массы физической системы в ОТО Эйнштейн тесно связывал с понятием энергии этой системы [2, с. 660]: «... величина, которую мы интерпретировали как энергию, играет также роль инертной массы, в соответствии со специальной теорией относительности». Поскольку в ОТО расчет энергии системы Эйнштейн предложил проводить с использованием псевдотензоров энергии-импульса, то и вычисления инертной массы осуществляются на основе выражения (11).

Определим в соответствии с этим соотношением инертную массу сферически-симметричного источника гравитационного поля и изучим ее трансформационные свойства при преобразованиях координат.

В изотропных декартовых координатах метрика риманова пространства-времени имеет вид:

$$g_{00}=\frac{(1-r_g/4r)^2}{(1+r_g/4r)^2}\,;\quad g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}(1+r_g/4r)^4. \tag{22}$$

Здесь $r_g=2GM/c^2$.

Эти координаты являются асимптотически галилеевскими, поскольку при $r\to\infty$ справедливы оценки:

$$g_{00}=1+O\left(\frac{1}{r}\right);\ g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right). \tag{23}$$

Используя ковариантные компоненты метрики (22), из выражения (12) имеем:

$$h^{00\alpha}=\frac{c^4}{16\pi G}\frac{\partial}{\partial x^\beta}[g_{11}g_{22}g_{33}g^{\alpha\beta}].$$

Подставляя это выражение в соотношение (10), учитывая, что

$$dS_\alpha=-\frac{x_\alpha}{r}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \tag{24}$$

и проводя интегрирование по бесконечно удаленной поверхности, получаем:

$$P^0=\frac{c^3}{16\pi G}\lim_{r\to\infty}r^2\int\frac{x_\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial x^\beta}[-g_{11}g_{22}g_{33}g^{\alpha\beta}]\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \tag{25}$$

Таким образом, компонента P^0 не зависит от компоненты g_{00} метрического тензора риманова пространства-времени. Из выражения (22) и (25) с учетом соотношений:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}f(r)=-\frac{x_\beta}{r}\frac{\partial}{\partial r}f(r), \tag{26}$$

где $x_\alpha x^\alpha=-r^2$, для компоненты P^0 энергии-импульса системы имеем

$$P^0=c^3r_g/2G=Mc. \tag{27}$$

Именно это совпадение инертной массы с тяжелой массой давало основание для утверждений о их равенстве в общей теории относительности [18, с. 424]: «... $P^\alpha=0$, $P^0=Mc$ — результат, который естественно было ожидать. Он является выражением факта равенства, как говорят, «тяжелой» и «инертной» масс («тяжелой» называют массу, определяющую создаваемое телом гравитационное поле,— это та масса, которая входит в метрический тензор в гравитационном поле или, в частности, в закон Ньютона; «инертная» же масса определяет соотношение между импульсом и энергией тела и, в частности, энергия покоя тела равна этой массе, умноженной на c^2)».

Однако такое утверждение Эйнштейна [2, с. 660] и других авторов [17—19, 21, 22] неправильно. Как легко убедиться, энергия системы, а следовательно, и ее инертная масса (11) не имеют никакого физического смысла, поскольку они зависят даже от выбора трехмерной системы координат.

Действительно, элементарным требованием, которому должно удовлетворять определение инертной массы, является условие независимости ее от выбора трехмерной системы координат, что имеет место в любой физической теории. Однако в ОТО определение (11) инертной массы этому требованию не удовлетворяет.

Покажем, например, что в случае решения Шварцшильда инертная масса (11) может принимать любые значения в зависимости от выбора системы пространственных координат. Для этого совершим переход от трехмерных декартовых координат x_C^α к другим координатам x_H^α, связанным со старыми координатами соотношением:

$$x_C^\alpha = x_H^\alpha (1 + f(r_H)), \tag{28}$$

где

$$r_H = \sqrt{x_H^2 + y_H^2 + z_H^2},$$

а $f(r_H)$ — произвольная несингулярная функция, удовлетворяющая условиям:

$$f(r_H) \geqslant 0; \quad \lim_{r_H \to \infty} f(r_H) = 0; \quad \lim_{r_H \to \infty} r_H \frac{\partial}{\partial r_H} f(r_H) = 0. \tag{29}$$

Легко убедиться, что преобразование (28) соответствует изменению арифметизации точек трехмерного пространства вдоль радиуса: $r_C = r_H [1 + f(r_H)]$.

Чтобы преобразование (28) имело обратное преобразование и являлось взаимно однозначным, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\frac{\partial r_C}{\partial r_H} = 1 + f + r_H f' > 0,$$

где

$$f' = \frac{\partial}{\partial r_H} f(r_H).$$

Тогда и якобиан преобразования будет отличен от нуля:

$$J = \det \left\| \frac{\partial x_C}{\partial x_H} \right\| = (1 + f)^2 \frac{\partial r_C}{\partial r_H} \neq 0.$$

В частности, всем поставленным требованиям удовлетворяет функция,

$$f(r_H) = \alpha^2 \sqrt{\frac{8GM}{c^2 r_H}} [1 - \exp(-\varepsilon^2 r_H)], \tag{30}$$

где α и ε — произвольные числа, отличные от нуля.

Поскольку в данном случае

$$\frac{\partial r_C}{\partial r_H}=1+\alpha^2\sqrt{\frac{8GM}{c^2 r_H}}\left[\frac{1}{2}+\left(\varepsilon^2 r_H-\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\varepsilon^2 r_H\right)\right]>0,$$

то r_C — монотонная функция r_H. Легко убедиться, что $f(r_H)$ является неотрицательной, несингулярной функцией во всем пространстве. Якобиан преобразования в этом случае строго больше единицы:

$$J=(1+f)^2\frac{\partial r_C}{\partial r_H}>1.$$

Поэтому преобразование (28) с функцией $f(r_H)$, определенной выражением (30), имеет обратное преобразование и является взаимно однозначным.

Очевидно, что при преобразовании (28) гравитационная масса (18) не изменяется. Вычислим теперь инертную массу (11) в новых координатах x_H^α. Используя закон преобразования метрического тензора

$$g_{ni}^H=\frac{\partial x_C^l}{\partial x_H^n}\frac{\partial x_C^m}{\partial x_H^i}g_{ml}^C\left(x_C\left(x_H\right)\right), \tag{31}$$

находим компоненты метрики Шварцшильда (22) в новых координатах. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} g_{00}&=\left[1-\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^2\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^{-2};\\ g_{\alpha\beta}&=\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^4\Big\{-\delta_{\alpha\beta}(1+f)^2-x_\alpha^H x_\beta^H\times\\ &\quad\times\left[(f')^2+\frac{2}{r_H}f'(1+f)\right]\Big\}.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Определитель метрического тензора (32) равен:

$$\begin{aligned} g=&-g_{00}\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^{12}(1+f)^4\times\\ &\times\left[(1+f)^2+r_H^2(f')^2+2r_H f'(1+f)\right].\end{aligned} \tag{33}$$

Следует особо отметить, что метрика (32) является асимптотически галилеевской:

$$\lim_{r_H\to\infty}g_{00}=1;\quad \lim_{r_H\to\infty}g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}.$$

В частном случае, когда функция f задана соотношением (30) и $r_H\to\infty$, метрика риманова пространства-времени будет иметь следующую асимптотику:

$$g_{00}\simeq 1+O\left(\frac{1}{r_H}\right);\quad g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_H}}\right)\right]. \tag{34}$$

Для контравариантных компонент метрики (32) имеем:

$$g^{00}=\frac{1}{g_{00}}; \quad g^{\alpha\beta}=\gamma^{\alpha\beta}A+x_H^\alpha x_H^\beta B, \tag{35}$$

где введены обозначения:

$$A=(1+f)^{-2}\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^{-4};$$

$$B=\frac{r_H(f')^2+2f'(1+f)}{r_H\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^4(1+f)^2\left[(1+f)^2+r_H^2(f')^2+2r_Hf'(1+f)\right]}.$$

Подставив выражения (33) и (35) в соотношение (25), получим:

$$P^0=\frac{c^3}{16\pi G}\lim_{r_H\to\infty} r_H^2\int\frac{x_\alpha^H}{r_H}\frac{\partial}{\partial x_H^\beta}\left\{\gamma^{\alpha\beta}(1+f)^2\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^8\times\right.$$
$$\times\left[(1+f)^2+r_H^2(f')^2+2r_Hf'(1+f)\right]+$$
$$\left.+\frac{x_H^\alpha x_H^\beta}{r_H^2}(1+f)^2\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^8\left[r_H^2(f')^2+2r_Hf'(1+f)\right]\right\}dV.$$

В силу соотношений (26) отсюда имеем

$$P^0=\frac{c^3}{2G}\lim_{r_H\to\infty}\left\{r_H^3(f')^2(1+f)^2\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^8+\right.$$
$$\left.+r_g(1+f)^2(1+f+r_Hf')\left[1+\frac{r_g}{4r_H(1+f)}\right]^7\right\}. \tag{36}$$

Учитывая асимптотическое выражение (29) для f, получаем окончательно*:

$$P^0=\frac{c^3}{2G}\lim_{r_H\to\infty}\{r_g+r_H^3(f')^2\}. \tag{37}$$

Таким образом, инертная масса существенно зависит от скорости стремления f' к нулю при $r_H\to\infty$. В частности, выбирая функцию $f(r_H)$ в виде (30), из выражения (37) имеем:

$$m_i=M(1+\alpha^4). \tag{38}$$

Отсюда следует, что для инертной массы (11) системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, в ОТО можно получить, ввиду произвольности величины α любое наперед заданное число $m_i\geqslant M$ в зависимости от выбора пространственных координат, хотя гравитационная (18) масса M этой системы, а следовательно, и все три эффекта ОТО останутся при этом неизменными. Отметим также, что при более сложных преобразованиях пространственных координат, остав-

* См. также Mфller C. Atti del convegno sulla relativitá generale: problemi dell energia e ondre grabitazionali, V II, Roma, 1964, t. 1, p. 21.

ляющих метрику асимптотически галилеевской, инертная масса (11) системы может принимать любые наперед заданные значения, как положительные, так и отрицательные.

Таким образом, мы видим, что в ОТО инертная масса, впервые введенная Эйнштейном и заимствованная впоследствии многими авторами [17—19, 21, 22], зависит от выбора трехмерной системы координат, а поэтому она не имеет никакого физического смысла. Следовательно, и утверждения о равенстве «инертной» и «тяжелой» масс в теории Эйнштейна также не имеют никакого физического смысла. Это равенство имеет место в узком классе трехмерных систем координат, а так как инертная (11) и гравитационная (18) массы имеют различные трансформационные законы, то при переходе к другим трехмерным системам координат их равенство уже не выполняется.

Кроме того, это определение инертной массы в ОТО не удовлетворяет принципу соответствия с теорией Ньютона. Действительно, ввиду того что инертная масса в теории Эйнштейна зависит от выбора трехмерной системы координат, ее выражение в общем случае произвольной трехмерной системы координат не перейдет в соответствующее выражение теории Ньютона, в которой инертная масса не зависит от выбора пространственных координат. Таким образом, в ОТО отсутствует классический ньютоновский предел, а следовательно, она не удовлетворяет и принципу соответствия. Отсюда следует, что ОТО не только логически противоречива с точки зрения физики, но и прямо противоречит экспериментальным данным о равенстве инертной и активной гравитационных масс.

В этой связи возникает вопрос: почему же до сих пор не была вскрыта бессмысленность определения (10) энергии-импульса системы и ее инертной массы в ОТО?

Это можно объяснить только тем, что обычно все вычисления энергии-импульса и инертной массы проводились в некотором узком классе систем трехмерных координат, в котором совпадение инертной и гравитационной масс имеет место.

В этом же классе координатных систем выражение для инертной массы (11) в ньютоновском приближении совпадает с соответствующим выражением теории Ньютона, что и создало иллюзию наличия классического предела в ОТО. Подумать же о физическом смысле введенной инертной массы (11) в ОТО, по-видимому, считали излишним.

4. О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В ОТО

Приведенным в разд. 3 примером несостоятельности определения инертной массы не исчерпываются все недостатки ОТО, которые связаны с использованием псевдотензора энергии-импульса. Эти недостатки со всеми вытекающими из них последствиями детально рассмотрены в [11]. Не вдаваясь в подробности технического характера, мы обсудим некоторые из них.

Во всех физических теориях, описывающих различные формы материи, одной из важнейших характеристик поля является плотность тензора энергии-импульса, которую обычно получают вариацией плотности лагранжиана поля L по компонентам метрического тензора пространства-времени g_{mn}.

Данная характеристика отражает существование поля: отличие от нуля плотности тензора энергии-импульса в некоторой области пространства-времени является необходимым и достаточным условием наличия в этой области физического поля. При этом энергия-импульс любого физического поля вносит вклад в полный тензор энергии-импульса системы и не обращается в тождественный нуль вне источника поля. Это позволяет рассматривать перенос энергии волнами в духе Фарадея — Максвелла; изучать характер распределения интенсивности поля в пространстве; определять потоки энергии-импульса в процессах излучения и поглощения, а также проводить и другие энергетические расчеты.

В ОТО гравитационное поле не обладает свойствами, присущими другим физическим полям, так как оно лишено такой характеристики.

Действительно, в теории Эйнштейна плотность лагранжиана состоит из двух частей: плотности лагранжиана гравитационного поля $L_g = L_g\,(g_{mn})$, зависящей только от метрического тензора g_{mn}, и плотности лагранжиана вещества $L_M = L_M\,(g_{mn},\ \Phi_A)$, зависящей от метрического тензора g_{mn} и остальных полей материи Φ_A. Таким образом, в ОТО Эйнштейна величины g_{mn} имеют двойной смысл: переменных поля и метрического тензора пространства-времени.

В результате такого физико-геометрического дуализма плотность полного симметрического тензора энергии-импульса (вариация плотности лагранжиана по компонентам метрического тензора) оказывается совпадающей с уравнениями поля (вариацией плотности лагранжиана по компонентам гравитационного поля). Это приводит к тому, что плотность полного симметрического тензора энергии-импульса системы оказывается строго равной нулю

$$T^{ni} + T^{ni}_{(g)} = 0, \tag{39}$$

где $T^{ni} = -2\delta L_M/\delta g_{ni}$ — плотность симметрического тензора энергии-импульса вещества (при этом веществом мы будем считать и все поля материи, кроме гравитационного поля);

$$T^{ni}_{(g)} = -2\,\frac{\delta L_g}{\delta g_{ni}} = -\frac{c^4\sqrt{-g}}{8\pi G}\left[R^{ni} - \frac{1}{2}g^{ni}R\right].$$

Из выражения (39) следует также, что все компоненты плотности симметрического тензора энергии-импульса гравитационного поля $T^{ni}_{(g)}$ равны нулю всюду вне вещества.

Таким образом, уже из этих результатов следует, что гравитационное поле в ОТО Эйнштейна не обладает свойствами, присущими другим физическим полям, так как вне источника оно лишено основной физической характеристики — тензора энергии-импульса.

Физической характеристикой гравитационного поля в теории Эйнштейна является тензор кривизны R^i_{klm}. Ясным осознанием этого мы обязаны Сингу [23, с. 8]: «...Если мы принимаем идею о том, что пространство-время является римановым четырехмерным пространством (а если мы релятивисты, так мы должны это сделать), то, очевидно, первая наша задача будет состоять в том, чтобы прочувствовать эту четырехмерность подобно тому, как мореплаватели далеких времен должны были ощутить сферичность океана. И первое, что нам нужно осмыслить — это тензор Римана, поскольку этот тензор и есть гравитационное поле: если он обращается в нуль (и только в этом случае) — поля не существует. И однако, что довольно странно, этот важнейший факт был отодвинут на задний план...». И далее он отмечал: «... В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно; оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя.» Отсутствие такого понимания ведет к непониманию самой сущности теории Эйнштейна.

Таким образом, поскольку гравитационное поле характеризуется тензором кривизны, и только им, в ОТО нельзя ввести какую-либо другую, более простую физическую характеристику этого поля, например псевдотензор энергии-импульса. Поэтому в теории Эйнштейна псевдотензоры энергии-импульса в принципе не имеют никакого отношения к существованию гравитационного поля. Это утверждение имеет характер теоремы, следствием которой является возможность таких ситуаций в ОТО, когда тензор кривизны отличен от нуля, т. е. поле существует, а псевдотензор энергии-импульса равен нулю, и, наоборот, когда тензор кривизны равен нулю, а псевдотензор энергии-импульса не равен нулю. Поэтому всякого рода расчеты, использующие псевдотензоры энергии-импульса, лишены какого-либо смысла.

Общая теория относительности Эйнштейна связывает воедино вещество и гравитационное поле, причем если первое характеризуется, как и во всех теориях, тензором энергии-импульса, т. е. тензором второго ранга, то характеристикой второго является тензор кривизны — тензор четвертого ранга. Из-за различной размерности физических характеристик гравитационного поля и вещества в теории Эйнштейна непосредственно следует, что в ОТО в принципе не существует законов сохранения, связывающих вместе вещество и гравитационное поле. Этот фундаментальный факт, установленный в [5, 8], означает, что теория Эйнштейна построена ценой отказа от законов сохранения вещества и гравитационного поля, вместе взятых.

Физическая характеристика гравитационного поля в ОТО — тензор Риччи отражает скорее способность гравитационного поля изменять энергию-импульс вещества, т. е. отражает силовое воздействие гравитационного поля на вещество, но о потоке энергии, переносимой волной, никакой информации не дает, в результате чего в теории Эйнштейна отсутствует возможность изучать характер распределения интенсивности гравитационного поля в пространстве, определять потоки энергии гравитационных волн через поверхность и т. д.

То, что в рамках ОТО путем использования псевдотензоров находят сохраняющиеся величины для вещества и гравитационного поля, вместе взятых, является глубоким заблуждением.

Действительно, в ОТО исходным соотношением для получения законов сохранения является тождество

$$\partial_n (T_i^n + \tau_i^n) = 0. \tag{40}$$

Если вещество сосредоточено только в объеме V, то из этого соотношения находим

$$\frac{d}{dx^0} \int dV (T_i^0 + \tau_i^0) = -\oint \tau_i^\alpha \, dS_\alpha. \tag{41}$$

В настоящее время получен целый ряд [10, 24—28] точных решений вакуумных уравнений Гильберта — Эйнштейна, для которых напряжения τ_0^α всюду равны нулю. Поэтому для точных волновых решений уравнений Гильберта — Эйнштейна, обращающих в нуль компоненты псевдотензора энергии-импульса, из соотношения (41) следует:

$$\frac{d}{dx^0} \left(\int dV \, [T_0^0 + \tau_0^0] \right) = 0,$$

т. е. энергия вещества и гравитационного поля в объеме V сохраняется. Это означает, что отсутствует поток энергии из объема V, а поэтому на пробные тела, помещенные вне объема, не должно быть никакого воздействия. Такой вывод следует из теории Эйнштейна.

Однако точные волновые решения уравнений Гильберта — Эйнштейна, обращающие в нуль компоненты псевдотензора энергии-импульса, приводят к не равному нулю тензору кривизны R^i_{klm}, следовательно, в силу уравнения

$$\frac{\delta^2 n^i}{\delta s^2} + R^i_{klm} u^k u^l n^m = 0, \tag{42}$$

где n^i — бесконечно малый вектор отклонения геодезических; $u^i = dx^i/ds$ —4-вектор скорости, волны кривизны воздействуют на пробные тела, находящиеся вне объема V, изменяя их энергию.

Таким образом, из двух различных, но точных соотношений ОТО в идеологии Эйнштейна мы приходим к совершенно взаимоисключающим физическим выводам.

Чтобы понять причину этих противоречивых выводов, проанализируем формализм псевдотензоров энергии-импульса в теории Эйнштейна более подробно.

Так как τ^{ni} является псевдотензором, то выбором системы координат все компоненты τ^{ni} в любой точке пространства могут быть обращены в нуль. Уже одно это обстоятельство ставит под сомнение интерпретацию величин τ^{ni} как напряжений и плотности энергии-импульса гравитационного поля.

В этой связи обычно утверждают [21] о принципиальной нелокализуемости энергии гравитационного поля в ОТО, т. е. что локальное распределение энергии гравитационного поля не имеет физического смысла, так как зависит от выбора системы координат, и что только полная энергия замкнутых систем может быть определена. Но и такое утверждение не выдерживает критики.

Действительно, локальное распределение энергии гравитационного поля, определяемой с использованием любого псевдотензора энергии-импульса, зависит от выбора координат и может быть обращено в нуль в любой точке пространства, что обычно истолковывают как отсутствие «плотности энергии» гравитационного поля в этой точке. Гравитационное же поле, описываемое тензором кривизны, переходом к любой допустимой системе координат обратить в нуль нельзя, а следовательно, из-за воздействия волн кривизны на физические процессы нельзя утверждать и об отсутствии гравитационного поля в какой-либо системе координат.

Это наиболее отчетливо видно на примере тех точных волновых решений, у которых компоненты псевдотензора энергии-импульса всюду равны нулю, а волны кривизны имеются. И, наоборот, в случае плоского пространства-времени, когда метрический тензор риманова пространства времени g_{ni} равен метрическому тензору псевдоевклидова пространства-времени γ_{ni}, компоненты псевдотензоров энергии-импульса могут не обращаться в нуль, хотя гравитационное поле отсутствует и все компоненты тензора кривизны равны нулю в любой системе координат.

Так, например [29], в сферической системе координат псевдоевклидова пространства-времени

$$R^i_{klm}=0,\quad g_{00}=1;\quad g_{rr}=-1;\quad g_{\theta\theta}=-r^2;\quad g_{\varphi\varphi}=-r^2\sin^2\theta$$

для компоненты τ^0_0 псевдотензора Эйнштейна имеем:

$$\tau^0_0=-\frac{1}{8\pi}\sin\theta.$$

Очевидно, что $\tau^0_0<0$ и полная энергия гравитационного поля в этой системе координат оказывается бесконечной.

Псевдотензор Ландау — Лифшица в этом же случае демонстрирует иное распределение энергии в пространстве:

$$(-g)\,\tau^{00}=-\frac{r^2}{8\pi}(1+4\sin^2\theta).$$

Из приведенных здесь примеров видно, что псевдотензоры энергии-импульса в теории Эйнштейна не являются физическими характеристиками гравитационного поля и, следовательно, не имеют никакого физического смысла.

Таким образом, в ОТО не существует и не может существовать законов сохранения энергии-импульса гравитационного поля и вещества, вместе взятых. Однако в теориях остальных физических полей имеем единый закон сохранения энергии-импульса и в настоящее время нет никаких экспериментальных данных о его нарушении. Поэтому у нас нет никаких оснований для отказа от него.

В чем выход из создавшейся ситуации? Что мы можем сохранить из великого творения Эйнштейна и Гильберта и от чего должны отказаться, чтобы в новой теории гравитации имели место фундаментальные законы физики — закон сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых.

Чтобы найти ответ на эти вопросы, нам следует внимательно проанализировать существующую глубочайшую связь между законами сохранения энергии-импульса и геометрией пространства-времени.

5. СВЯЗЬ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ С ГЕОМЕТРИЕЙ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

От характера геометрии пространства-времени в большой степени зависит возможность получения законов сохранения для замкнутой системы взаимодействующих полей.

Как известно [30, 31], построение теории любого физического поля может быть проведено на основе лагранжева формализма. В этом случае физическое поле описывается некоторой функцией координат и времени, называемой функцией поля, уравнения для которой могут быть получены из вариационного принципа стационарного действия. Кроме уравнения поля, лагранжев путь построения классической теории волновых полей дает возможность получать и ряд дифференциальных соотношений, носящих название дифференциальных законов сохранения. Эти соотношения являются следствиями инвариантности функций действия при преобразованиях координат пространства-времени и связывают между собой локальные динамические характеристики поля и их ковариантные производные в естественной для них геометрии.

В настоящее время в литературе принято различать два типа дифференциальных законов сохранения: сильные и слабые. Сильным законом сохранения обычно называют дифференциальное соотношение, которое выполняется в силу инвариантности функции действия при преобразовании координат и не требует выполнения уравнений движения для поля. Слабые же законы сохранения могут быть получены из сильных законов сохранения, если учесть уравнения движения для системы взаимодействующих полей.

Следует особо подчеркнуть, что, несмотря на название, дифференциальные законы сохранения в общем случае не утверждают о сохранении чего-либо ни локально, ни глобально. Это просто дифференциальные тождества, связывающие различные характеристики поля, которые выполняются в силу того, что функция действия не изменяется при произвольном преобразовании координат (т. е. являются скаляром). Свое название эти соотношения получили по аналогии с соответствующими дифференциальными законами сохранения в псевдоевклидовом пространстве-времени, в котором из дифференциальных законов сохранения можно получить и соответствующие интегральные законы. Например, записывая закон сохранения полного тензора энергии-импульса системы взаимодействующих полей в декартовой системе координат псевдоевклидова пространства-времени, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} t^{0i} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} t^{\alpha i} = 0.$$

Интегрируя это равенство по некоторому объему и используя теорему Остроградского — Гаусса, получаем:

$$\frac{d}{dx^0} \int dV t^{0i} = -\oint t^{\alpha i}\, dS_\alpha.$$

Это соотношение означает, что изменение энергии-импульса системы взаимодействующих полей в некотором объеме равно потоку энергии-импульса через поверхность, ограничивающую данный объем. Если поток энергии-импульса через некоторую поверхность отсутствует

$$\oint t^{\alpha i}\, dS_\alpha = 0,$$

то мы приходим к закону сохранения полного 4-импульса изолированной системы:

$$\frac{d}{dx^0} P^i = 0, \quad \text{где} \quad P^i = \frac{1}{c} \int t^{0i}\, dV.$$

Аналогичные интегральные соотношения в псевдоевклидовом пространстве-времени можно получить и для момента импульса.

В произвольном же римановом пространстве-времени наличие дифференциального ковариантного уравнения сохранения не гарантирует возможность получения соответствующего интегрального закона сохранения.

Возможность получения интегральных законов в произвольном римановом пространстве-времени целиком предопределяется его геометрией и тесно связана с существованием векторов Киллинга данного пространства-времени или, как иногда говорят, с наличием группы движений в римановом пространстве-времени. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее, поскольку развитый здесь формализм можно использовать для получения интегральных законов сохранения и в произвольных криволинейных системах координат псевдоевклидова пространства-времени.

В произвольном римановом пространстве-времени можно получить ковариантное уравнение сохранения полного тензора энергии-импульса системы:

$$\nabla_l T^{ml} = \partial_l T^{ml} + \Gamma^m_{nl} T^{nl} + \Gamma^l_{ln} T^{mn} = 0. \tag{43}$$

Умножим это уравнение на вектор Киллинга, т. е. на вектор η_m, удовлетворяющий уравнениям Киллинга:

$$\nabla_n \eta_m + \nabla_m \eta_n = 0. \tag{44}$$

В силу симметрии тензора T^{mn} полученное выражение может быть записано в виде

$$\eta_m \nabla_l T^{ml} = \nabla_l [\eta_m T^{ml}] = 0.$$

Используя свойства ковариантной производной, отсюда имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} [\sqrt{-g}\, \eta_m T^{ml}] = 0.$$

Так как левая часть этого равенства является скаляром, то мы можем умножить его на $\sqrt{-g} dV$ и проинтегрировать по некоторому объему. В результате получим интегральный закон сохранения в римановом пространстве-времени:

$$\frac{d}{dx^0} \int \sqrt{-g}\, T^{0m} \eta_m\, dV = -\oint dS_\alpha \sqrt{-g}\, T^{\alpha m} \eta_m. \tag{45}$$

Если поток трехмерного вектора через поверхность, ограничивающую объем, отсутствует, то

$$\int \sqrt{-g}\, T^{0m} \eta_m\, dV = \text{const}. \tag{46}$$

Таким образом, при наличии векторов Киллинга из дифференциального уравнения сохранения (43) можно получить и интегральные законы сохранения (45), (46).

Выясним теперь, при каких ограничениях на метрику риманова пространства-времени уравнения Киллинга (44) имеют решения, т. е. при каких условиях существует вектор, удовлетворяющий уравнениям (44). Заметим, прежде всего, что уравнения Киллинга (44) являются следствием требования обращения в нуль вариации Ли метрического тензора риманова пространства-времени при инфинитезимальных преобразованиях координат

$$x'^n = x^n + \eta^n (x), \tag{47}$$

где $\eta^n (x)$ — бесконечно малый 4-вектор.

Действительно, при таком преобразовании координат вариация Ли метрического тензора

$$\delta_L g_{in} = -\nabla_i \eta_n - \nabla_n \eta_i.$$

Сравнивая это выражение с (44), видим, что уравнения Киллинга требуют обращения в нуль вариации Ли метрического тензора g_{ni}:

$$\delta_L g_{in} = 0.$$

Таким образом, векторы Киллинга описывают бесконечно малые преобразования координат, оставляющие метрику форминвариантной.

Уравнения Киллинга (44) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Согласно общей теории [32, 33] для выяснения условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений в частных производных ее необходимо привести к виду:

$$\frac{\partial\theta^a}{\partial x^i} = \Psi_i^a(\theta^b,\ x^n), \tag{48}$$

где θ^a — неизвестные функции; $i,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$; $a,\ b = 1,\ 2,\ \ldots,\ M$. Тогда условия интегрируемости системы (48) можно получить из равенства

$$\frac{\partial^2\theta^a}{\partial x^i\,\partial x^n} = \frac{\partial^2\theta^a}{\partial x^n\,\partial x^i},$$

заменяя частные производные первого порядка правой частью уравнений (48)

$$\frac{\partial\Psi_i^a}{\partial x^n} + \frac{\partial\Psi_i^a}{\partial\theta^b}\Psi_n^b = \frac{\partial\Psi_n^a}{\partial x^i} + \frac{\partial\Psi_n^a}{\partial\theta^b}\Psi_i^b. \tag{49}$$

Если условия интегрируемости (49) выполняются тождественно в силу уравнений (48), то система (48) называется вполне интегрируемой и ее решение содержит M параметров — максимально возможное для данной системы число произвольных постоянных.

Если же система (48) не является вполне интегрируемой, то ее решение будет содержать меньшее число произвольных постоянных. Определим, при каких условиях решение уравнений Киллинга (44) в римановом пространстве V_N содержит максимально возможное число параметров и чему равно это число.

Все вычисления будем вести в явно ковариантном виде, являющемся ковариантным обобщением приведенной выше схемы нахождения условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений Киллинга (44) к требуемому виду. Продифференцируем ковариантно уравнения Киллинга (44) по переменной x^n. В результате получим:

$$\eta_{i;jn} + \eta_{j;in} = 0.$$

В силу этого уравнения имеем:

$$\eta_{i;jn} + \eta_{j;in} + \eta_{i;nj} + \eta_{n;ij} - \eta_{j;ni} - \eta_{n;ji} = 0.$$

Перегруппировав слагаемые в этом выражении, получим:

$$\eta_{i;jn} + \eta_{i;nj} + (\eta_{j;in} - \eta_{j;ni}) + (\eta_{n;ij} - \eta_{n;ji}) = 0. \tag{50}$$

Однако в силу правила коммутации ковариантных производных имеем:

$$\eta_{i;nj} - \eta_{i;jn} = \eta_k R^k_{inj}. \tag{51}$$

Подставив выражение (51) в соотношение (50), получим

$$2\eta_{i;\,jn} + \eta_k R^k_{inj} + \eta_k R^k_{jin} + \eta_k R^k_{nij} = 0. \tag{52}$$

Воспользовавшись тождеством Риччи

$$R^k_{inl} + R^k_{nli} + R^k_{lin} = 0, \tag{53}$$

имеем

$$\eta_k R^k_{inj} + \eta_k R^k_{jin} = \eta_k R^k_{nij}.$$

Поэтому выражение (52) можно записать в виде

$$\eta_{i;\,jn} = -\eta_k R^k_{nij}.$$

Таким образом, мы имеем следующие ковариантные уравнения:

$$\eta_{i;n} + \eta_{n;i} = 0; \quad \eta_{i;jn} = -\eta_k R^k_{nij}. \tag{54}$$

Преобразуем эту систему ковариантных дифференциальных уравнений в систему, содержащую только первые ковариантные производные. Для этого наряду с N неизвестными компонентами вектора η_m введем неизвестный тензор λ_{im} в соответствии с уравнениями:

$$\eta_{i;m} = \lambda_{im}. \tag{55}$$

Этот тензор содержит N^2 неизвестных компонент, но независимыми среди них являются лишь $N\,(N—1)/2$ компонент, так как этот тензор является антисимметрическим в силу уравнений (44) и (55):

$$\lambda_{mi} + \lambda_{im} = 0. \tag{56}$$

С учетом всего этого искомая система ковариантных дифференциальных уравнений принимает вид:

$$\eta_{m;i} = \lambda_{mi}; \quad \lambda_{mi;j} = \eta_k R^k_{jim}. \tag{57}$$

Таким образом, уравнения Киллинга (44) мы привели к системе специального вида, состоящей из линейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно ковариантных производных первого порядка.

Эта система является ковариантным обобщением системы (48), причем роль неизвестных функций θ^a играют $N\,(N+1)/2$ компонент тензоров η_m и λ_{mi}:

$$\theta^a = \{\eta_m,\ \lambda_{mi}\}.$$

Условие интегрируемости системы (57) можно получить из правила коммутации ковариантных производных, являющегося следствием независимости порядка производных при частном дифференцировании. На основании этого правила имеем:

$$\left.\begin{aligned} \eta_{i;mj}-\eta_{i;jm}&=\eta_k R^k_{imj};\\ \lambda_{im,jl}-\lambda_{im,lj}&=\lambda_{ik}R^k_{mjl}+\lambda_{km}R^k_{ijl}. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Заменяя в левых частях этих равенств первые ковариантные производные их выражения (57) и используя свойство (56) антисимметричности тензора λ_{im}, условия интегрирования системы (57) получаем в виде

$$\lambda_{im;j}-\lambda_{ij;m}=\eta_k R^k_{imj}; \tag{59}$$

$$[\eta_k R^k_{jmi}]_{;l}-[\eta_k R^k_{lmi}]_{;j}=\lambda_{ik}R^k_{m;jl}+\lambda_{km}R^k_{ijl}. \tag{60}$$

Легко убедиться, что первое из этих выражений тождественно выполняется в силу уравнений (57) системы и свойств тензора кривизны. Таким образом, если условие (60) будет тождественно выполняться в силу лишь свойств симметрии риманова пространства-времени, то система (57) будет вполне интегрируемой, а следовательно, решение уравнений Киллинга (44) будет содержать максимально возможное число $M=N(N+1)/2$ произвольных постоянных. Поскольку неизвестные функции η_m; $\lambda_{mi}=-\lambda_{im}$, входящие в систему (57), при этом должны быть независимыми, то левая часть выражения (60) обращается в тождественный нуль лишь при выполнении условий:

$$R^k_{mij;l}-R^k_{lij;m}=0; \tag{61}$$

$$\delta^n_j R^k_{iml}-\delta^k_j R^n_{iml}-\delta^n_i R^k_{jml}+\delta^k_i R^n_{jml}+\delta^n_l R^k_{mij}-\delta^k_l R^n_{mij}-\delta^n_m R^k_{lij}+ \\ +\delta^k_m R^n_{lij}=0. \tag{62}$$

Свертка выражения (62) по индексам l и n с учетом соотношений

$$R^n_{lmn}=R_{lm};\quad R^n_{nml}=0$$

и тождества Риччи (53) дает

$$(N-1)\,R^k_{mij}=\delta^k_j R_{mi}-\delta^k_i R_{jm}.$$

Отсюда следует, что

$$R_{lmij}=\frac{1}{N-1}\,(g_{jl}R_{mi}-g_{il}R_{jm}). \tag{63}$$

Умножив это равенство на g^{mi}, получим

$$NR_{jl}=g_{jl}R.$$

Подставляя это соотношение в выражение (63), получаем условие, в силу которого равенство (62) выполняется тождественно:

$$R_{lmij}=\frac{R}{N(N-1)}[g_{jl}g_{mi}-g_{il}g_{jm}]. \tag{64}$$

Из выражения (64) и уравнения (61) следует требование, которому должна удовлетворять скалярная кривизна:

$$[\delta^k_j g_{im}-\delta^k_i g_{jm}]\frac{\partial}{\partial x^l}R-[\delta^k_j g_{li}-\delta^k_i g_{lj}]\frac{\partial}{\partial x^m}R=0.$$

Умножая это соотношение на $\delta^l_k g^{mi}$, имеем:

$$(N-1)\frac{\partial R}{\partial x^j}=0.$$

Так как в рассматриваемом нами случае $N>1$, то для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы $R=\text{const}$. Следовательно, условия интегрируемости (61) и (62) уравнений Киллинга (44) будут выполняться тождественно, если и только если тензор кривизны риманова пространства-времени имеет вид:

$$R_{lmij}=\frac{R}{N(N-1)}[g_{jl}g_{mi}-g_{il}g_{jm}],$$

где $R=\text{const}$.

Таким образом, уравнения Киллинга тогда и только тогда имеют решения, содержащие максимально возможное число $M=N(N+1)/2$ произвольных постоянных (параметров), когда риманово пространство V_N является пространством постоянной кривизны. Если же пространство V_N не является пространством постоянной кривизны, то число параметров будет меньше.

Следовательно, с математической точки зрения наличие интегральных законов сохранения энергии-импульса и момента импульса является отражением определенных свойств пространства-времени: его свойств однородности и изотропности. Существует три типа четырехмерных пространств, обладающих свойствами однородности и изотропности в такой степени, что они допускают введение десяти интегралов движения для замкнутой системы: пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского), пространство нулевой кривизны (псевдоевклидово пространство) и пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана). Первые два пространства являются бесконечными, имеющими бесконечный объем, третье пространство является замкнутым, имеющим конечный объем, но не имеющим границ.

Найдем теперь вектор Киллинга в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени. Для этого запишем сначала уравнения Киллинга в декартовой системе координат:

$$\partial_i\eta_n+\partial_n\eta_i=0.$$

Следовательно, для определения векторов Киллинга мы имеем систему из десяти линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Решая эту систему по общим правилам, получаем:

$$\eta_i = a_i + \omega_{im} x^m, \tag{65}$$

где a_i — произвольный постоянный бесконечно малый вектор; ω_{im} — произвольный постоянный бесконечно малый тензор, удовлетворяющий условию:

$$\omega_{im} = -\omega_{mi}.$$

Таким образом, решение (65), как и следовало ожидать, содержит все десять произвольных параметров.

Поскольку в выражение (65) входит десять независимых параметров, то фактически мы имеем десять независимых векторов Киллинга, а соотношение (65) представляет собой линейную комбинацию этих десяти независимых векторов.

Выясним смысл этих параметров. Подставив выражение (65) в соотношение (47), получим:

$$x'^n = x^n + a^n + \omega^n_m x^m. \tag{66}$$

Из этого выражения видно, что четыре параметра a^n являются компонентами 4-вектора бесконечно малых трансляций системы отсчета. Три параметра $\omega_{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора поворота на бесконечно малый угол вокруг некоторой оси (так называемые чистые вращения). Три параметра $\omega_{0\beta}$ описывают бесконечно малые повороты в плоскости $x^0 x^\beta$, называемые лоренцевыми вращениями. Так как метрический тензор γ_{mn} форминвариантен относительно трансляций, то псевдоевклидово пространство-время является однородным, его свойства не зависят от того, в какой точке пространства-времени помещено начало координат. Аналогичным образом из форминвариантности метрического тензора γ_{mn} при преобразованиях четырехмерных поворотов следует его изотропность. Это означает, что в псевдоевклидовом пространстве-времени все направления равноправны.

Таким образом, псевдоевклидово пространство-время допускает десятипараметрическую группу движений, состоящую из четырехпараметрической подгруппы трансляций и шестипараметрической подгруппы поворотов. Наличие этой группы движения и существование соответствующих векторов Киллинга гарантирует наличие десяти интегральных законов сохранения энергии-импульса и момента импульса системы взаимодействующих полей.

Действительно, учитывая, что в декартовой системе координат $\sqrt{-\gamma} = 1$ из общего соотношения (45) в случае подгруппы трансляций $\eta_i = a_i$, имеем

$$\frac{d}{dx^0} \int T^{0m} a_m \, dV = -\oint dS_\alpha T^{\alpha m} a_m.$$

Так как a_m — произвольный постоянный вектор, то из этого равенства имеем:

$$\frac{d}{dx^0}\int T^{0m}\,dV = -\oint dS_\alpha T^{\alpha m}.$$

Для изолированной системы взаимодействующих полей выражение в правой части этого соотношения равно нулю, в результате чего ее полный 4-импульс сохраняется

$$P^m = \int T^{0m}dV = \text{const}. \tag{67}$$

Совершенно аналогично при $\eta_n = \omega_{nm}x^m$ получим

$$\frac{d}{dx^0}\int dV T^{0m}x^n\omega_{mn} = -\int dS_\alpha T^{\alpha m}x^n\omega_{mn}.$$

Поскольку постоянный тензор ω_{mn} является антисимметрическим, то отсюда следует интегральный закон сохранения момента импульса:

$$\frac{d}{dx^0}\int dV\,[T^{0m}x^n - T^{0n}x^m] = -\int dS_\alpha\,[T^{\alpha m}x^n - T^{\alpha n}x^m]. \tag{68}$$

Для изолированной системы ее полный момент импульса сохраняется из-за обращения в нуль правой части равенства (68)

$$M^{mn} = \int dV\,[T^{0m}x^n - T^{0n}x^m] = \text{const}. \tag{69}$$

Только для псевдоевклидова пространства-времени имеют место отдельные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения для замкнутой системы. Следует отметить, что решение уравнений Киллинга (44) в произвольных криволинейных координатах псевдоевклидова пространства-времени в силу тензорного характера величин x^i и η^i можно получить из решения (66) этих уравнений в декартовой системе координат. Для этого перейдем в выражении (66) от декартовых координат x^i к произвольным криволинейным координатам x^i_H

$$x^i = f^i\,(x_H).$$

Тогда получим

$$\eta^H_m = \frac{\partial f^i}{\partial x^m_H}\eta_i\,[x\,(x_H)].$$

Таким образом, в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени векторы Киллинга имеют вид:

$$\eta^H_m = \frac{\partial f^i\,(x_H)}{\partial x^m_H}a_i + \frac{\partial f^i\,(x_H)}{\partial x^m_H}\omega_{in}f^n\,(x_H). \tag{70}$$

Обобщение выражений (67)—(69) на случай произвольных криволинейных координат не представляет особого труда. Поступая совершенно аналогично проделанному выше, для 4-импульса изолированной системы получаем:

$$P^i = \int \sqrt{-\gamma(x_H)}\, dx_H^1\, dx_H^2\, dx_H^3\, \frac{\partial f^i(x_H)}{\partial x_H^m}\, T^{0m}(x_H).$$

Антисимметрический тензор момента импульса в этом случае имеет вид:

$$M^{im} = \int \sqrt{-\gamma(x_H)}\, dx_H^1\, dx_H^2\, dx_H^3 T^{0n}(x_H) \times$$
$$\times \left[f^m(x_H) \frac{\partial f^i(x_H)}{\partial x_H^n} - f^i(x_H) \frac{\partial f^m(x_H)}{\partial x_H^n} \right].$$

Таким образом, от характера геометрии пространства-времени зависит возможность получения интегральных законов сохранения. В случае четырех измерений (физическое пространство-время) только пространства постоянной кривизны обладают всеми десятью интегральными законами сохранения, в других же пространствах число их меньше десяти.

Проделанный здесь анализ показывает, что если мы хотим иметь максимальное из возможных число сохраняющихся величин, следует отказаться от римановой геометрии общего вида и для всех полей, включая и гравитационное, в качестве естественной геометрии выбрать одну из перечисленных выше геометрий постоянной кривизны.

Поскольку экспериментальные данные, полученные при изучении сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий, свидетельствуют, что для полей, связанных с этими взаимодействиями, естественная геометрия пространства-времени является псевдоевклидовой, то по крайней мере на данной ступени наших знаний можно считать, что эта геометрия является единой естественной геометрией для всех физических процессов, в том числе и для гравитационных.

Это утверждение составляет одно из основных положений развиваемого нами подхода к теории гравитационного взаимодействия. Совершенно очевидно, что оно приводит к выполнению всех законов сохранения энергии-импульса и момента импульса, обеспечивая существование всех десяти интегралов движения для системы, состоящей из гравитационного поля и остальных полей материи.

Гравитационное поле в нашем подходе аналогично всем другим физическим полям характеризуется своим тензором энергии-импульса, который вносит вклад в полный тензор энергии-импульса системы. В этом состоит основное принципиальное отличие нашего подхода от теории Эйнштейна. Следует также заметить, что в псевдоевклидовом пространстве-времени наряду с общей простотой интегрирование тензорных величин имеет вполне определенный смысл.

Другим ключевым вопросом, возникающим при построении теории гравитационного поля, является вопрос о характере взаимодействия гравитационного поля с веществом. Гравитационное поле при действии на вещество может эффективно изменять его геометрию, если оно входит в члены при высших производных в уравнения движения вещества. Тогда движение материальных тел и других физических полей в псевдоевклидовом пространстве-времени под действием гравитационного поля будет неотличимо от их движения в некотором эффективном римановом пространстве-времени. Из опытных данных следует универсальность действия гравитационного поля на вещество, поэтому эффективное риманово пространство-время будет единым для всего вещества.

Это приводит нас к утверждению, которое мы назовем принципом тождественности (принципом геометризации), определив его следующим образом: уравнения движения вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени с метрическим тензором γ_{ni} могут быть тождественно представлены как уравнения движения вещества в некотором эффективном римановом пространстве-времени с метрическим тензором g_{ni}, зависящим от гравитационного поля и метрического тензора γ_{ni}.

Этот принцип был введен и сформулирован в [14], хотя по существу он уже был высказан в [35]. Он означает, что описание движения вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени физически тождественно описанию движения вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве-времени. При таком подходе гравитационное поле (как физическое поле) при описании движения вещества как бы исключается и его энергия, образно говоря, идет на формирование эффективного риманова пространства-времени.

Таким образом, эффективное риманово пространство-время является своеобразным носителем энергии-импульса. На создание риманова пространства-времени затрачивается столько энергии, сколько ее содержится в гравитационном поле, а поэтому распространение волн кривизны в римановом пространстве-времени отражает обычный перенос энергии гравитационными волнами в псевдоевклидовом пространстве-времени. Это означает, что в нашем подходе волны кривизны в римановом пространстве-времени являются прямым следствием существования гравитационных волн в духе Фарадея — Максвелла, обладающих плотностью энергии-импульса.

Идея о гравитационном поле как физическом поле в духе Фарадея — Максвелла, обладающем плотностью энергии-импульса и спинами 2 и 0, изменяет представления о пространстве-времени и гравитации, сложившиеся под влиянием ОТО. РТГ позволяет описать всю имеющуюся совокупность гравитационных экспериментов, удовлетворяет принципу соответствия и приводит к ряду фундаментальных следствий.

6. ПРИНЦИП ГЕОМЕТРИЗАЦИИ И ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В РТГ

Не ограничивая общности, будем считать, что тензорная плотность метрического тензора риманова пространства-времени $\tilde{g}^{ik}$ является локальной функцией, зависящей от плотности метрического тензора пространства Минковского $\tilde{\gamma}^{ik}$ и плотности тензора гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{ik}$.

Плотность лагранжиана вещества L_M будем считать зависящей только от полей Φ_A, их ковариантных производных первого порядка, а также в силу принципа геометризации от плотности метрического тензора $\tilde{g}^{ik}$. Плотность лагранжиана гравитационного поля будем считать зависящей от плотности метрического тензора $\tilde{\gamma}^{ik}$, его частных производных первого порядка, а также от плотности гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{ik}$ и его ковариантных производных первого порядка по метрике Минковского. Для получения законов сохранения воспользуемся инвариантностью действия при бесконечно малом смещении координат. Поскольку для любой заданной плотности лагранжиана L действие

$$J = \int L d^4x$$

является скаляром, то при произвольном бесконечно малом преобразовании координат вариация δJ будет равна нулю.

Вычислим сначала вариацию действия вещества

$$J_M = \int L_M d^4x$$

при преобразовании

$$x'^i = x^i + \xi^i(x), \tag{71}$$

где $\xi^i(x)$ — бесконечно малый 4-вектор смещения

$$\delta J_M = \int d^4x \left[\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{mn}} \delta_L \tilde{g}^{mn} + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} \delta_L \Phi_A + \mathrm{div}\right] = 0. \tag{72}$$

В (72) div обозначает дивергенциальные члены, которые в данном разделе несущественны для нашего рассмотрения.

Эйлерова вариация определена, как обычно,

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_n \frac{\partial L}{\partial(\partial_n \varphi)} + \partial_n \partial_k \frac{\partial L}{\partial(\partial_n \partial_k \varphi)} - \ldots$$

Вариации $\delta_L \tilde{g}^{mn}$, $\delta_L \Phi_A$ при преобразовании координат (71) легко вычисляются, если использовать их закон преобразования

$$\delta_L \tilde{g}^{mn} = \tilde{g}^{kn} D_k \xi^m + \tilde{g}^{km} D_k \xi^n - D_k (\xi^k \tilde{g}^{mn}); \tag{73}$$

$$\delta_L \Phi_A = -\xi^k D_k \Phi_A + F_{A;\,k}^{B;\,n} \Phi_B D_n \xi^k. \tag{74}$$

Здесь и далее D_k — ковариантная производная по метрике Минковского. Подставив эти выражения в (72) и проинтегрировав по частям, получим

$$\delta J_M = \int d^4x \left\{ -\xi^m \left[D_k \left(2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{mn}} \tilde{g}^{kn} \right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - D_m \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{lp}} \right) \tilde{g}^{lp} + D_k \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F_A^B;\ {}^k_m\Phi_m \right) + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_m \Phi_A \right] + \mathrm{div} \right\} = 0.$$

Из-за произвольности вектора ξ^m из условия $\delta J_M = 0$ находим сильное тождество

$$D_k \left(2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{mn}} \tilde{g}^{kn} \right) - D_m \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{lp}} \right) \tilde{g}^{lp} \equiv$$
$$\equiv - D_k \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F_A^B;\ {}^k_m\Phi_B \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_m \Phi_A, \tag{75}$$

справедливое независимо от выполнения уравнений движения для полей.

Введем обозначения

$$T_{mn} = 2 \frac{\delta L_M}{\delta g^{mn}}; \quad T^{mn} = -2 \frac{\delta L_M}{\delta g_{mn}} = g^{mk} g^{np} T_{kp}; \tag{76}$$

$$\tilde{T}_{mn} = 2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{mn}}; \quad \tilde{T}^{mn} = -2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}_{mn}} = \tilde{g}^{mk} \tilde{g}^{np} \tilde{T}_{kp}. \tag{77}$$

T_{mn} является плотностью тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве и называется плотностью тензора Гильберта.

Учитывая (77), левую часть соотношения (75) можно представить в следующем виде:

$$D_k (\tilde{T}_{mn} \tilde{g}^{kn}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{kp} D_m \tilde{T}_{kp} = \partial_k (\tilde{T}_{mn} \tilde{g}^{kn}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{kp} \partial_m \tilde{T}_{kp}.$$

Правая часть этого равенства легко приводится к форме

$$\partial_k (\tilde{T}_{mn} \tilde{g}^{kn}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{kp} \partial_m \tilde{T}_{kp} = \tilde{g}_{mn} \nabla_k \left(\tilde{T}^{kn} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{kn} \tilde{T} \right), \tag{78}$$

где $\tilde{T} = \tilde{g}_{kp} \tilde{T}^{kp}$, а ∇_k — ковариантная производная по метрике риманова пространства.

На основании (78) сильное тождество (75) можно записать в виде

$$\tilde{g}_{mn} \nabla_k \left(\tilde{T}^{kn} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{kn} \tilde{T} \right) = - D_k \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F_A^B;\ {}^k_m\Phi_B \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_m \Phi_A. \tag{79}$$

В силу принципа наименьшего действия уравнения движения для полей вещества имеют вид

$$\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} = 0. \tag{80}$$

Учитывая эти уравнения, из (79) найдем слабое тождество

$$\nabla_m \left(\tilde{T}^{mn} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{mn} \tilde{T}\right) \equiv 0. \tag{81}$$

Заметим, что плотность тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве T^{mn} связана с $\tilde{T}^{mn}$ соотношением

$$\sqrt{-g}\, T^{mn} = \tilde{T}^{mn} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{mn} \tilde{T}. \tag{82}$$

Поэтому из выражения (81) получаем ковариантное уравнение сохранения вещества в римановом пространстве

$$\nabla_m T^{mn} = 0. \tag{83}$$

Если число уравнений для поля вещества равно четырем, то в этом и только в этом случае вместо уравнений для этого поля (80) всегда можно пользоваться эквивалентными уравнениями (83).

Вариацию интеграла действия (72) можно записать в эквивалентном виде

$$\delta J_M = \int d^4x \left\{ \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{\Phi}^{mn}} \delta_L \tilde{\Phi}^{mn} + \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{\gamma}^{mn}} \delta_L \tilde{\gamma}^{mn} + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} \delta_L \Phi_A + \mathrm{div} \right\} = 0. \tag{84}$$

При этом вариации $\delta_L \tilde{\Phi}^{mn}$, $\delta_L \tilde{\gamma}^{mn}$ при преобразовании координат (71) равны:

$$\delta_L \tilde{\Phi}^{mn} = \tilde{\Phi}^{kn} D_k \xi^m + \tilde{\Phi}^{km} D_k \xi^n - D_k (\xi^k \tilde{\Phi}^{mn}); \tag{85}$$

$$\delta_L \tilde{\gamma}^{mn} = \tilde{\gamma}^{kn} D_k \xi^m + \tilde{\gamma}^{km} D_k \xi^n - \tilde{\gamma}^{mn} D_k \xi^k. \tag{86}$$

Подставляя выражения для вариаций $\delta_L \tilde{\Phi}^{mn}$, $\delta_L \tilde{\gamma}^{mn}$, $\delta_L \Phi_A$ в (84) и интегрируя по частям, в силу произвольности ξ^m получаем сильное тождество

$$D_k \left(2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{\Phi}^{mn}} \tilde{\Phi}^{kn}\right) - D_m \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi^{kp}}\right) \tilde{\Phi}^{kp} + D_k \left(2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{\gamma}^{mn}} \tilde{\gamma}^{kn}\right) -$$
$$- D_m \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{\gamma}^{kp}} \tilde{\gamma}^{kp}\right) \equiv - D_k \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B\ k}_{A\ m} \Phi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_m \Phi_A, \tag{87}$$

которое, как и (75), справедливо, независимо от выполнения уравнений движения вещества и гравитационного поля.

Для любого лагранжиана введем некоторые обозначения и соотношения, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$\tilde{t}^{mn} \equiv -2 \frac{\delta L}{\delta \tilde{\gamma}_{mn}}; \quad t^{mn} \equiv -2 \frac{\delta L}{\delta \gamma_{mn}}; \tag{88}$$

$$t^{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \left(\tilde{t}^{mn} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{mn} \tilde{t}\right). \tag{89}$$

Так как L_M в силу принципа геометризации зависит от $\tilde{\gamma}^{mn}$ только через $\tilde{g}^{mn}$, легко найти связь между $\tilde{t}_{(M)mn}$ и $\tilde{T}_{mn}$:

$$\tilde{t}_{(M)mn}=2\,\frac{\delta L_M}{\delta\tilde{\gamma}^{mn}}=\tilde{T}_{kp}\,\frac{\partial\tilde{g}^{kp}}{\partial\tilde{\gamma}^{mn}}. \tag{90}$$

Здесь учтено определение (77).

Принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial\tilde{g}^{kp}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}}\equiv-\tilde{\gamma}^{ml}\tilde{\gamma}^{nq}\,\frac{\partial\tilde{g}^{pk}}{\partial\tilde{\gamma}^{lq}},$$

на основании (88) находим

$$\tilde{t}^{mn}_{(M)}=-\tilde{T}_{pk}\,\frac{\partial\tilde{g}^{pk}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}}. \tag{91}$$

Учитывая в (91) тождество (77), а также соотношение

$$-\tilde{g}_{lp}\tilde{g}_{qk}\,\frac{\partial\tilde{g}^{lq}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}}=\frac{\partial\tilde{g}_{pk}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}},$$

из (91) получаем

$$\tilde{t}^{mn}_{(M)}=\tilde{T}^{pk}\,\frac{\partial\tilde{g}_{pk}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}}. \tag{92}$$

Теперь, сравнивая тождества (79) и (87) с учетом (88), находим

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn}-\frac{1}{2}\,\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right)=\tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn}_{(M)}-\frac{1}{2}\,\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}_{(M)}\right)+$$
$$+D_k\left(2\,\frac{\delta L_M}{\delta\tilde{\Phi}^{mn}}\,\tilde{\Phi}^{kn}\right)-D_m\left(\frac{\delta L_M}{\delta\tilde{\Phi}^{kp}}\right)\tilde{\Phi}^{kp}. \tag{93}$$

Аналогично из инвариантности действия гравитационного поля $J_g=\int L_g d^4x$ относительно преобразований координат (71) имеем

$$\tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn}_{(g)}-\frac{1}{2}\,\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}_{(g)}\right)+D_k\left(2\,\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{\Phi}^{mn}}\,\tilde{\Phi}^{kn}\right)-$$
$$-D_m\left(\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{\Phi}^{kp}}\right)\tilde{\Phi}^{kp}=0 \tag{94}$$

Складывая выражения (93) и (94), находим

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn}-\frac{1}{2}\,\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right)=\tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn}-\frac{1}{2}\,\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}\right)+$$
$$+D_k\left(2\,\frac{\delta L}{\delta\tilde{\Phi}^{mn}}\,\tilde{\Phi}^{kn}\right)-D_m\left(\frac{\delta L}{\delta\tilde{\Phi}^{kp}}\right)\tilde{\Phi}^{kp}. \tag{95}$$

Здесь и далее

$$\tilde{t}^{kn} = \tilde{t}^{kn}_{(g)} + \tilde{t}^{kn}_{(M)}. \tag{96}$$

Из принципа наименьшего действия уравнения для гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta L}{\delta\tilde{\Phi}^{mn}} = \frac{\delta L_g}{\delta\tilde{\Phi}^{mn}} + \frac{\delta L_M}{\delta\tilde{\Phi}^{mn}} = 0. \tag{97}$$

Учитывая эти уравнения, из (95) получаем важнейшее равенство

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right) = \tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}\right). \tag{98}$$

Так как плотность полного тензора энергии-импульса в пространстве Минковского дается формулой

$$\sqrt{-\gamma}\, t^{kn} = \tilde{t}^{kn} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}, \tag{99}$$

то, используя это выражение, а также (82), соотношение (98) запишем в виде

$$D_m t^m_n \equiv \nabla_m T^m_n. \tag{100}$$

Последнее равенство является отражением принципа геометризации: ковариантная дивергенция в псевдоевклидовом пространстве от суммы плотностей тензоров энергии-импульса вещества и гравитационного поля точно равна ковариантной дивергенции в эффективном римановом пространстве только от плотности тензора энергии-импульса вещества. При выполнении уравнений движения вещества имеем

$$D_m t^m_n = \nabla_m T^m_n = 0. \tag{101}$$

Из ковариантного уравнения сохранения вещества в римановом пространстве не ясно, что сохраняется, тогда как из закона сохранения полного тензора энергии-импульса t^m_n в пространстве Минковского ясно, что речь идет о сохранении энергии-импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых. Таким образом, в данной теории риманово пространство возникает как результат воздействия гравитационного поля на все виды материи, поэтому оно является эффективным римановым пространством полевого происхождения. Пространство Минковского находит свое точное физическое отражение в законах сохранения тензора энергии-импульса и момента количества движения вещества и гравитационного поля, вместе взятых.

Поскольку в плоском пространстве существует десять векторов Киллинга, то, следовательно, имеют место и десять сохраняющихся интегральных величин для замкнутой системы полей.

Так как уравнение сохранения полного тензора энергии-импульса в пространстве Минковского

$$D_m t_n^m = D_m \left(t_{(g)\,n}^m + t_{(M)\,n}^m\right) = 0 \tag{102}$$

эквивалентно ковариантному уравнению сохранения вещества в римановом пространстве, а последнее эквивалентно уравнениям движения для вещества, то вместо уравнения движения вещества можно использовать (102).

Следует особо отметить, что как вещество, так и гравитационное поле в данной теории характеризуются тензорами энергии-импульса, а поэтому у нас, в отличие от ОТО, в принципе не возникают какие-либо псевдотензоры, а следовательно, и отсутствуют нефизические понятия о нелокализуемости гравитационной энергии.

Если бы мы, следуя Гильберту и Эйнштейну, взяли плотность лагранжиана гравитационного поля в полностью геометризованном виде, т. е. зависящем только от метрического тензора риманова пространства g^{ik} и их производных, например

$$L_g = \sqrt{-g}\, R$$

(где R — скалярная кривизна риманова пространства), то плотность тензора энергии-импульса свободного гравитационного поля в пространстве Минковского в силу уравнений поля всегда была равна нулю

$$\frac{\delta L_g}{\delta \gamma^{mn}} = \frac{\delta L_g}{\delta g^{pk}} \frac{\partial g^{pk}}{\partial \gamma^{mn}} = 0. \tag{103}$$

Таким образом, на основе пространства Минковского с помощью тензорного физического поля, обладающего энергией и импульсом, в принципе нельзя построить полностью геометризованный лагранжиан гравитационного поля. Поэтому теория, построенная на основе полностью геометризованного лагранжиана, в принципе не может описать физическое гравитационное поле в духе Фарадея — Максвелла в пространстве Минковского. В литературе ранее утверждалось (см., например, [36]), что в пространстве Минковского с помощью тензорного поля спина 2 однозначно находится лагранжиан гравитационного поля ОТО, равный скалярной кривизне R. Однако эти работы не имеют никакого физического содержания, так как для введенного в них гравитационного поля тензор энергии-импульса равен нулю, как это видно из (103). Поэтому эти работы физически бессмысленны и результаты их ошибочны.

7. ОСНОВНОЕ ТОЖДЕСТВО

Как показано в [37], в пространстве Минковского симметричный тензор второго ранга f^{ik} может быть разложен в виде прямой суммы неприводимых представлений: одного представления — со спином 2, одного — со спином 1 и двух — со спином 0

$$f^{lm}=[P_2+P_1+P_0+P_{0'}]^{lm}_{ik}f^{ik}, \tag{104}$$

где P_s ($s = 2, 1, 0, 0'$) — проекционные операторы, которые удовлетворяют стандартным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &P_sP^t=\delta^t_sP_t \text{ (здесь по } t \text{ нет суммирования!)};\\ &P^{in}_{s;\,in}=(2s+1);\\ &\sum_s P^{lm}_{s;\,ik}=\frac{1}{2}(\delta^l_i\delta^m_k+\delta^m_i\delta^l_k)\equiv\delta^{lm}_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Операторы P_s удобно сначала записать в импульсном представлении. Для этой цели введем вспомогательные (проекционные) величины:

$$X_{ik}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\gamma_{ik}-\frac{q_iq_k}{q^2}\right);\ Y_{ik}=\frac{q_iq_k}{q^2}. \tag{106}$$

Легко показать, что операторы P_s, удовлетворяющие (105), через (106) могут быть записаны в форме:

$$P^{ml}_{0;\,ni}=X_{ni}X^{lm};\ P^{ml}_{0';\,ni}=Y_{ni}Y^{ml}; \tag{107}$$

$$P^{ml}_{1;\,ni}=\frac{\sqrt{3}}{2}[X^l_iY^m_n+X^m_nY^l_i+X^m_iY^l_n+X^l_nY^m_i]; \tag{108}$$

$$P^{ml}_{2;\,ni}=\frac{3}{2}[X^l_iX^m_n+X^m_iX^l_n]-X_{ni}X^{ml}. \tag{109}$$

Из (107) — (109) видно, что операторы $P^{ml}_{s;ni}$ симметричны по индексам ml и ni.

В x-представлении проекционные операторы P_s являются нелокальными интегродифференциальными операторами

$$(P^{ml}_{s;\,ni}f^{ni})=\int d^4yP^{lm}_{s;\,ni}(x-y)f^{ni}(y).$$

Явные выражения для $P^{lm}_{0;ni}(x)$ и $P^{ml}_{2;ni}(x)$ имеют вид:

$$P^{lm}_{0;\,ni}(x)=\frac{1}{3}[\gamma^{lm}\gamma_{in}\delta(x)+(\gamma^{lm}\partial_i\partial_n+\gamma_{in}\partial^l\partial^m)D(x)+\partial_i\partial_n\partial^l\partial^m\Delta(x)]; \tag{110}$$

$$P^{lm}_{2;\,ni}(x)=\left(\delta^{lm}_{in}-\frac{1}{3}\gamma^{lm}\gamma_{in}\right)\delta(x)+\left[\frac{1}{2}(\delta^l_i\partial^m\partial_n+\delta^m_n\partial^l\partial_i+\delta^l_n\partial^m\partial_i+\right.$$
$$\left.+\delta^m_i\partial^l\partial_n)-\frac{1}{3}(\gamma^{lm}\partial_i\partial_n+\gamma_{in}\partial^l\partial^m)\right]D(x)+\frac{2}{3}\partial^l\partial^m\partial_i\partial_n\Delta(x). \tag{111}$$

В (110) и (111) $D(x)$ является функцией Грина волнового уравнения

$$\Box D(x)=-\delta(x), \tag{112}$$

а $\Delta(x)=\int d^4yD(x-y)D(y)$ и поэтому удовлетворяет уравнению

$$\Box\Delta(x)=-D(x). \tag{113}$$

На основании формул (110)—(113) легко проверить, что операторы P_0 и P_2 являются сохраняющимися, т. е. для этих операторов имеют место тождества:

$$\left.\begin{aligned} \partial_l P^{lm}_{0;\,ni}(x) = \partial^n P^{lm}_{0;\,ni}(x) \equiv 0; \\ \partial_l P^{lm}_{2;\,ni}(x) = \partial^n P^{lm}_{2;\,ni}(x) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

Операторы же P_1 и P'_0, этим свойством не обладают.

Из разложения (104) ясно, что если тензорное поле подчинено уравнению

$$\partial_l f^{lm} = 0, \qquad (115)$$

то в него не войдут представления со спинами 1 и 0′. Это значит, что такое тензорное поле описывает только спины 2 и 0.

В силу (110) — (112) легко убедиться, что оператор

$$\square (2P_0 - P_2)^{mn}_{il} = -(\delta^{mn}_{il} - \gamma^{mn}\gamma_{il}) \, \square \, \delta(x) -$$
$$- (\gamma^{mn}\partial_i\partial_l + \gamma_{il}\partial^m\partial^n) \, \delta(x) + \frac{1}{2}(\delta^n_i\partial^m\partial_l + \delta^m_l\partial^n\partial_i +$$
$$+ \delta^n_l\partial^m\partial_i + \delta^m_i\partial^n\partial_l) \, \delta(x) \qquad (116)$$

является единственным, локальным и сохраняющимся оператором второго порядка.

Действуя этим оператором на функцию

$$\varphi^{il} - \frac{1}{2}\gamma^{il}\varphi,$$

где $\varphi = \gamma_{pq}\varphi^{pq}$, найдем:

$$\Psi^{mn} = \int \square_y \, [2P_0(x-y) - P_2(x-y)]^{mn}_{il} \left(\varphi^{il}(y) - \frac{1}{2}\gamma^{il}\varphi(y)\right) d^4y =$$
$$= \partial_k\partial_p \, [\gamma^{nk}\varphi^{pm} + \gamma^{mk}\varphi^{np} - \gamma^{pk}\varphi^{nm} - \gamma^{mn}\varphi^{pk}]. \qquad (117)$$

Структура (117) для любого симметричного тензорного поля примечательна тем, что она является локальной, линейной, содержит производные только второго порядка и удовлетворяет закону сохранения, т. е. дивергенция от Ψ^{mn} тождественно равна нулю:

$$\partial_m \Psi^{mn} = 0. \qquad (118)$$

В дальнейшем нам понадобится структура (117), написанная в терминах ковариантных по метрике Минковского производных для плотности метрического тензора $\tilde{g}^{lm}$:

$$J^{mn} = D_k D_p \, [\gamma^{np}\tilde{g}^{km} + \gamma^{pm}\tilde{g}^{kn} - \gamma^{kp}\tilde{g}^{mn} - \gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}]. \qquad (119)$$

Из (119) очевидно, что выполняется тождество

$$D_m J^{mn} \equiv 0, \qquad (120)$$

которое мы назовем основным, поскольку оно имеет фундаментальное значение при построении РТГ.

8. УРАВНЕНИЯ РТГ

В ОТО характеристикой гравитационного поля Эйнштейн объявил метрический тензор риманова пространства g^{ik}. Но это было глубоким заблуждением и от него необходимо отказаться, поскольку невозможно накладывать физические граничные условия на поведение g^{ik}, так как их асимптотика зависит от произвола в выборе пространственных систем координат.

В настоящем разделе мы построим в рамках теории относительности и принципа геометризации релятивистские уравнения для вещества и гравитационного поля.

Связь между эффективной метрикой полевого риманова пространства и гравитационным полем всегда можно выбрать в простейшем виде

$$\tilde{g}^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik} = \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{ik} + \sqrt{-\gamma}\, \Phi^{ik}. \tag{121}$$

Полевой переменной гравитационного поля в нашей теории является тензор Φ^{ik}. Мы будем считать, что гравитационное поле в общем случае имеет только спины 2 и 0. Такие физические требования, как мы видели в разд. 7, приводят в галилеевых координатах к следующим четырем уравнениям гравитационного поля:

$$\partial_i \Phi^{ik} = \partial_i \tilde{g}^{ik} = 0. \tag{122}$$

Аналогичные условия иногда использовались ранее [15, 38] в ОТО в качестве особого класса координатных гармонических условий для решения задач островного типа. На важность гармонических координатных условий для решения островных задач особенно обращал внимание В. А. Фок [15, с. 476]. Так, он писал: «Сделанные выше замечания о привилегированном характере гармонической системы координат ни в коем случае не должны быть понимаемы в смысле какого-либо запрещения пользоваться другими координатными системами. Ничто не может быть более чуждым нашей точке зрения, чем такое ее толкование...» и далее: «... существование гармонических координат хотя и является фактом первостепенного теоретического и практического значения, но никоим образом не исключает возможности пользоваться другими не гармоническими координатными системами». С точки зрения нашей теории, Фок при решении островных задач, сам того не сознавая, просто имел дело с обычными галилеевыми координатами в инерциальной системе отсчета, а последние, как известно из теории относительности, конечно, выделены. В расчетах Фока островных систем гармонические условия являлись поэтому не координатными условиями, как он думал, а, как мы увидим из нашей теории, полевыми уравнениями в галилеевых координатах инерциальной системы отсчета. Именно поэтому они и сыграли важную роль в его конкретных расчетах, о чем, конечно, Фок, как, впрочем, и другие, и не подозревал.

Таким образом, Фок рассматривал гармонические условия только как привилегированные координатные условия и не более, причем только для задач островного типа. Это и понятно, ведь он, как и все его великие предшественники, находился в плену римановой геометрии, а она в принципе не давала возможности к более глубокому проникновению в сущность проблемы. Чтобы сделать принципиальный шаг и выдвинуть эти условия, необходимо было отказаться от идеологии ОТО, выбраться из дебрей римановой геометрии, распространить вопреки ОТО принцип относительности на гравитационные явления, ввести представления о гравитационном поле как физическом поле в духе Фарадея — Максвелла, обладающем энергией и импульсом. Это все и осуществлено в нашей теории, причем выбор системы координат у нас произволен и задается только метрическим тензором γ^{ik} пространства Минковского, как это обычно принято в теории элементарных частиц. Уравнения же (122) в нашей теории являются всеобщими и универсальными, поскольку они являются уравнениями гравитационного поля. Они не имеют никакого отношения к выбору системы координат. В пространстве Минковского эти уравнения записываются в ковариантной форме

$$\sqrt{-\gamma}\, D_i \Phi^{ik} = D_i \tilde{g}^{ik} = 0. \tag{123}$$

На основании результатов разд. 7 мы видим, что эти полевые уравнения автоматически исключают из гравитационного тензорного поля спины 1 и 0′. Таким образом, для искомых 14 переменных гравитационного поля и вещества мы уже построили четыре ковариантных уравнения (123). Для построения следующих десяти уравнений воспользуемся простой, но далеко идущей аналогией с электромагнитным полем. Так как любое векторное поле A^n содержит спины 1 и 0, оно может быть разложено как прямая сумма соответствующих неприводимых представлений. Это разложение можно реализовать с помощью введенных в разд. 7 проекционных операторов (106)

$$A^n = X^n_m A^m + Y^n_m A^m, \tag{124}$$

причем оператор X^n_m является сохраняющимся, т. е. удовлетворяет тождествам

$$\partial_n X^n_m = \partial^m X^n_m = 0, \tag{125}$$

а оператор Y^n_m таким свойством не обладает.

Из электродинамики известно, что источником электромагнитного поля A^n является сохраняющийся электромагнитный ток j^n. Поэтому естественно для построения уравнения движения для поля использовать также сохраняющийся оператор X^n_m. Но этот оператор нелокален. Однако на его основе можно построить единственный, содержащий только вторые производные, локальный, линейный и сохраняющийся оператор $\Box X^n_m$. Действуя этим оператором на A^m, получаем выражение, которое в терминах ковариантных производных будет иметь вид:

$$\gamma^{mk} D_m D_k A^n - D^n D_m A^m. \tag{126}$$

Постулируя равенство

$$\gamma^{mk} D_m D_k A^n - D^n D_m A^m = \frac{4\pi}{c} j^n, \tag{127}$$

получаем известные уравнения Максвелла.

Одной из важнейших особенностей уравнения электродинамики (127) является то, что оно инвариантно относительно следующего калибровочного преобразования:

$$A^n \to A^n + D^n \varphi, \tag{128}$$

где φ — произвольная скалярная функция.

Все физические величины не изменяются при калибровочном преобразовании (128). Это означает, что они не зависят от наличия спина 0 в векторном поле A^n. Поэтому калибровочное преобразование может быть выбрано таким образом, чтобы спин 0 из векторного поля был всегда исключен. Последнее означает, что можно ввести условие

$$D_m A^m = 0. \tag{129}$$

Таким образом, в электродинамике условие (129) можно вводить, но можно и не вводить, поскольку спин 0 векторного поля в силу калибровочной инвариантности не сказывается на физических величинах.

Учитывая равенства (129) в (127), находим систему уравнений:

$$\gamma^{mk} D_m D_k A^n = \frac{4\pi}{c} j^n; \quad D_m A^m = 0,$$

которые определяют вектор-потенциал A^n, обладающий только спином 1.

Лагранжев формализм, приводящий к этим результатам, общеизвестен. Заметим, что идея построения теории взаимодействия для векторных полей (как абелевых, так и неабелевых) на базе калибровочной инвариантности оказалась чрезвычайно плодотворной и в настоящее время успешно развивается.

Проблемы, с которыми мы сталкиваемся при построении остальных уравнений для тензорного гравитационного поля, совершенно другого характера, так как его источник — тензор энергии-импульса — неинвариантен относительно калибровочного преобразования поля $\tilde{\Phi}^{ik}$. Более подробно об этом речь пойдет ниже, а сейчас по аналогии с электродинамикой Максвелла построим остальные уравнения для тензорного гравитационного поля. Единственным сохраняющимся тензором второго ранга является тензор энергии-импульса вещества и гравитационного поля в пространстве Минковского t^{mn}, поэтому естественно его взять в качестве полного источника гравитационного поля. Поскольку простейшим, тождественно сохраняющимся тензором, линейным по $\tilde{g}^{mn}$, как мы установили в разд. 7, является величина J^{mn}, то по аналогии с электродинамикой постулируем следующие уравнения:

$$J^{mn} \equiv D_k D_p [\gamma^{kn}\tilde{g}^{pm} + \gamma^{km}\tilde{g}^{pn} - \gamma^{kp}\tilde{g}^{mn} - \gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}] = \lambda (t^{mn}_{(g)} + t^{mn}_{(M)}). \quad (130)$$

Такой вид уравнений, вообще говоря, подразумевает автоматическое выполнение закона сохранения тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля в пространстве Минковского

$$D_m (t^{mn}_{(g)} + t^{mn}_{(M)}) \equiv D_m t^{mn} = 0, \quad (131)$$

а также, как следствие [см. (101)], и выполнение ковариантного закона сохранения вещества в римановом пространстве

$$\nabla_m T^{mn} = 0. \quad (83)$$

Тензор энергии-импульса Гильберта T^{mn} можно задать феноменологически. В этом случае (83) являются уравнениями движения для вещества.

Используя уравнения (123) и (130), получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^{kp} D_k D_p \tilde{g}^{mn} = -\lambda (t^{mn}_{(g)} + t^{mn}_{(M)}); \\ &D_m \tilde{g}^{mn} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (132)$$

Система уравнений (132) и является искомой системой для РТГ.

Роль второго уравнения системы (132) в РТГ существенно отличается от роли (129) в электродинамике. Действительно, хотя левая часть уравнений (130) инвариантна относительно калибровочного преобразования

$$\tilde{g}^{mn} \to \tilde{g}^{mn} + D^m \tilde{\xi}^n + D^n \tilde{\xi}^m - \gamma^{mn} D_k \tilde{\xi}^k, \quad (133)$$

где $\tilde{\xi}^n = \sqrt{-\gamma}\,\xi^n$ — плотность произвольного 4-вектора $\xi^n(x)$, из-за того, что правая часть (130) неинвариантна относительно замены (133), мы не имеем в теории произвола типа (133) и поэтому уравнения (123) не могут быть следствием уравнений (130).

Таким образом, в РТГ уравнения (123) являются дополнительными независимыми динамическими уравнениями гравитационного поля, а не координатными или калибровочными условиями.

Основной вопрос, на который при построении теории необходимо ответить, заключается в том, чтобы выяснить, существует ли плотность лагранжиана для гравитационного поля со спинами 2 и 0, которая автоматически приводила бы на базе принципа наименьшего действия к первому уравнению системы (132).

Общая плотность лагранжиана гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{ik}$, описывающая спины 2 и 0 и квадратичная по первым производным поля, имеет вид:

$$L_g = a\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp}D_l\tilde{g}^{kq}D_p\tilde{g}^{mn} + b\tilde{g}_{kq}D_m\tilde{g}^{pq}D_p\tilde{g}^{km} + \\ + c\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp}D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}. \quad (134)$$

Характерной особенностью этого лагранжиана является то, что свертка ковариантных производных, взятых по метрике Минковского, осуществляется с помощью эффективного метрического тензора $\tilde{g}^{ik}$ риманова пространства.

Ниже мы увидим (см. разд. 10), что это требование для гравитационного поля является следствием принципа геометризации и структуры гравитационного поля, обладающего только спинами 2 и 0.

Система уравнения для гравитационного поля в силу принципа наименьшего действия принимает вид:

$$\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{\Phi}^{ik}} + \frac{\delta L_M}{\delta\tilde{\Phi}^{ik}} \equiv \frac{\delta L_g}{\delta\tilde{g}^{ik}} + \frac{\delta L_M}{\delta\tilde{g}^{ik}} = 0. \quad (135)$$

Здесь учтена связь (121). В (135) L_M является плотностью лагранжиана вещества, а плотность лагранжиана L_g задана формулой (134).

Для того чтобы система уравнений (135) могла быть представлена в форме первого уравнения системы (132), необходимо в плотности лагранжиана (134) постоянные a, b и c выбрать определенным и единственным образом. С этой целью на основании формул (88), (89), (96) и (99) найдем для лагранжиана $L = L_g + L_M$ плотность тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля t^{mn} в пространстве Минковского. Вычисляя вариацию полного лагранжиана по γ_{mn}, получаем:

$$t^{mn} = 2\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{nk}\gamma^{mp} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right)\frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{kp}} + 2bJ^{mn} + \\ + D_p\{(2a+b)[H_k^{pn}\gamma^{km} + H_k^{pm}\gamma^{kn} - H_k^{mn}\gamma^{kp}] - \\ - 2(a+2c)\gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}\tilde{g}_{lq}D_k\tilde{g}^{lq}\}, \quad (136)$$

где $H_k^{pn} = (\tilde{g}^{pl}D_l\tilde{g}^{qn} + \tilde{g}^{nl}D_l\tilde{g}^{pq})\tilde{g}_{qk}$.

Из (136) видно, что уравнения

$$t^{mn} = 2bJ^{mn} + D_p\{(2a+b)[H_k^{pn}\gamma^{km} + H_k^{pm}\gamma^{kn} - H_k^{mn}\gamma^{kq}] - \\ - 2(a+2c)\gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}\tilde{g}_{lq}D_h\tilde{g}^{lq}\} \quad (137)$$

эквивалентны уравнениям поля (135).

Для того чтобы из равенства (131) не возникало какого-либо нового уравнения на поле Φ^{ik}, что в противном случае привело бы к переопределенной системе уравнений, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a, b и c удовлетворяли условиям

$$a = -b/2; \quad c = b/4. \tag{138}$$

При этом выборе постоянных мы имеем тождество

$$D_m t^{mn} \equiv 0.$$

Таким образом, уравнения движения вещества непосредственно следуют из уравнений для гравитационного поля. Учитывая соотношения коэффициентов (138), выражение (137) примет вид

$$D_p D_k (\gamma^{km}\tilde{g}^{pn} + \gamma^{kn}\tilde{g}^{pm} - \tilde{g}^{mn}\gamma^{kp} - \gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}) = \\ = \frac{1}{2b}(t^{mn}_{(g)} + t^{mn}_{(M)}) \equiv \frac{1}{2b}t^{mn}, \tag{139}$$

который совпадает с написанными нами ранее, по аналогии с электродинамикой, уравнениями (130), если положить

$$2b = 1/\lambda.$$

Таким образом, плотность лагранжиана L_g, которая приводит нас к уравнениям поля в форме (139), имеет вид

$$L_g = \frac{1}{2\lambda}\left[\tilde{g}_{kq} D_m \tilde{g}^{pq} D_p \tilde{g}^{km} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp} D_l \tilde{g}^{kq} D_p \tilde{g}^{mn} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp} D_l \tilde{g}^{km} D_p \tilde{g}^{nq}\right]. \tag{140}$$

Из принципа соответствия следует, что постоянная

$$\lambda = -16\pi. \tag{141}$$

Плотность лагранжиана (140) с учетом (141) может быть представлена в виде:

$$L_g = \frac{1}{32\pi}[\tilde{G}^l_{mn} D_l \tilde{g}^{mn} - \tilde{g}^{mn}\tilde{G}^k_{mk}\tilde{G}^l_{nl}], \tag{142}$$

где тензор третьего ранга $\tilde{G}^k_{lm}$ определен по формуле

$$\tilde{G}^k_{lm} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{pk}(D_m \tilde{g}_{lp} + D_l \tilde{g}_{mp} - D_p \tilde{g}_{lm}). \tag{143}$$

Плотность лагранжиана также можно записать в форме

$$L_g = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\, g^{mn}[G^k_{lm}G^l_{nk} - G^l_{mn}G^k_{lk}]. \tag{144}$$

Такой лагранжиан впервые рассматривал Розен [39]. В (144) тензор третьего ранга

$$G^k_{ml} = \frac{1}{2} g^{kp} (D_m g_{pl} + D_l g_{mp} - D_p g_{lm}). \tag{145}$$

С учетом уравнения (123) полная система уравнений РГТ для вещества и гравитационного поля будет:

$$\left. \begin{aligned} &\gamma^{pk} D_p D_k \tilde{g}^{mn} = 16\pi t^{mn}; \\ &D_m \tilde{g}^{mn} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{146}$$

Очевидно, в галилеевой системе координат уравнения (146) примут вид

$$\left. \begin{aligned} &\Box \tilde{g}^{mn} = 16\pi t^{mn}; \\ &\partial_m \tilde{g}^{mn} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{147}$$

Если бы мы ограничились только уравнением (130), то деление метрики риманова пространства на метрику в пространстве Минковского и тензорное гравитационное поле носило бы условный характер и не имело какого-либо физического смысла. Система (123) четырех полевых уравнений принципиально отделяет все, что относится к силам инерции, от всего, что имеет отношение к гравитационному полю. Оба уравнения (146) общековариантны. На поведение гравитационного поля, как обычно, накладываются соответствующие физические условия в заданной, например галилеевой, системе координат. В ОТО невозможно сформулировать физические условия на метрику g^{mn}, оставаясь в римановом пространстве, поскольку асимптотика метрики всегда зависит от выбора трехмерной системы координат.

Найдем теперь явный вид системы уравнений (135). Для лагранжиана (140) можно показать, что

$$\frac{\partial L_g}{\partial \tilde{g}^{mn}} = \frac{1}{16\pi} [G^k_{ml} G^l_{kn} - G^k_{mn} G^l_{kl}];$$

и

$$\frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{g}^{mn})} = \frac{1}{16\pi} \left[G^k_{mn} - \frac{1}{2} \delta^k_m G^l_{nl} - \frac{1}{2} \delta^k_n G^l_{ml} \right].$$

Поэтому

$$\delta L_g / \delta \tilde{g}^{mn} = -\frac{1}{16\pi} R_{mn}, \tag{148}$$

где R_{mn} — тензор кривизны второго ранга риманова пространства и равен

$$R_{mn} = \partial_k G^k_{mn} - \partial_m G^l_{nl} + G^k_{mn} G^l_{kl} - G^k_{ml} G^l_{nk}. \tag{149}$$

Так как в силу (77) и (82)

$$\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{mn}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(T_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} T\right), \tag{150}$$

то из (135) найдем:

$$\sqrt{-g}\, R_{mn} = 8\pi\left(T_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} T\right), \tag{151}$$

т. е. мы пришли к системе уравнений Гильберта — Эйнштейна. В литературе давно известно [19, 39], что лагранжиан (144) приводит к системе (151). Нами же установлено, что для гравитационного поля спинов 2 и 0 плотность лагранжиана гравитационного поля (140) является единственной, которая ведет к самосогласованной системе уравнений поля и вещества (146). Это означает, что уравнения РТГ являются единственными простейшими уравнениями второго порядка.

Ввиду важности этого факта мы приведем и другую форму доказательства эквивалентности уравнений (130) и (151), основанного на прямом вычислении тензорных плотностей $t^{nm}_{(g)}$ и $t^{mn}_{(M)}$ в пространстве Минковского.

На основании формул (88), (89) с учетом связи (121) найдем, что плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Минковского для плотности лагранжиана (140) равна:

$$t^{mn}_{(g)} = -\frac{1}{16\pi} J^{mn} - \frac{\sqrt{-\gamma}}{8\pi}\left(\gamma^{mp}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right) R_{pk}. \tag{152}$$

Здесь у нас, как видим, автоматически возник тензор кривизны второго ранга риманова пространства R_{pk}. Аналогично, используя формулы (88), (89) и (121), а также определение плотности тензора Гильберта (76) для плотности тензора энергии-импульса вещества в пространстве Минковского, находим:

$$t^{mn}_{(M)} = \sqrt{\frac{\gamma}{g}}\left(\gamma^{mp}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right)\left(T_{pk} - \frac{1}{2} g_{pk} T\right). \tag{153}$$

Подставляя (152) и (153) в уравнения поля (130), получаем

$$\left(\gamma^{mp}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{nm}\gamma^{pk}\right)\left[R_{pk} - \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}\left(T_{pk} - \frac{1}{2} g_{pk} T\right)\right] = 0,$$

откуда легко прийти к системе уравнений для гравитационного поля в форме (151).

Таким образом, система уравнений (130) эквивалентна системе уравнений Гильберта — Эйнштейна (151). Полная же система уравнений РТГ для вещества и гравитационного поля (146) эквивалентна системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{-g}\, R_{mn} = 8\pi\left(T_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} T\right); \\ &D_m \tilde{g}^{mn} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

Следует еще раз особо отметить, что второе уравнение системы (154) является всеобщим и универсальным, поскольку это полевые уравнения, описывающие гравитационные поля со спинами 2 и 0. Выбор системы отсчета (или системы координат) задается метрическим тензором пространства Минковского. Следовательно, они не накладывают никаких ограничений на выбор системы координат. Итак, уравнения (123) исключают из плотности тензорного поля $\tilde{\Phi}^{ik}$ спины 1 и 0′, оставляя только спины 2 и 0. Искомые шесть компонент гравитационного поля, соответствующие спинам 2 и 0, и четыре компоненты вещества определяются из первого уравнения системы поля (146) или эквивалентных им уравнений Гильберта — Эйнштейна (151).

Заметим, что некоторые аспекты теории гравитации в пространстве Минковского были рассмотрены в [39, 40]. Даже те авторы, которые выбрали правильное направление, в свое время не поняли этого и пошли по другому пути построения теории гравитации. Однако этот путь не привел их к чему-то законченному.

Из РТГ следует, что решения, удовлетворяющие первому уравнению (154), но не удовлетворяющие второму уравнению (154), не имеют никакого физического смысла. Такова судьба всех имеющихся решений уравнения Гильберта — Эйнштейна. Поэтому необходимо искать такие решения, которые удовлетворяли бы всей системе уравнений (154). Именно только такие решения и имеют физический смысл. Это принципиально и ведет к новым физическим предсказаниям о развитии Вселенной, гравитационном коллапсе, гравитационных волнах и т. д.

В заключение этого раздела сделаем следующее замечание. Система уравнений (123) не является следствием принципа наименьшего действия. Поэтому при применении этого принципа для лагранжиана (134) мы должны были учесть уравнения (123), вводя для этой цели под интегралом действия член вида $\eta_m D_n \tilde{g}^{mn}$, где η_m — множители Лагранжа. Анализ, приведенный в приложении, показывает, что в силу сохранения тензора энергии-импульса, множители Лагранжа η_m могут быть выбраны равными нулю. Поэтому, как в этом разделе, так и в дальнейшем принцип наименьшего действия применяется без привлечения множителей Лагранжа.

9. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КАНОНИЧЕСКИМ ТЕНЗОРОМ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И ТЕНЗОРОМ ГИЛЬБЕРТА

Плотность лагранжиана гравитационного поля зависит от плотности метрического тензора $\tilde{\gamma}^{mn}$, плотности тензорного гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{mn}$ и их первых производных. При преобразовании координат (71) вариация действия δJ_g равна нулю и, следовательно,

$$\delta J_g = \int\limits_{\Omega} d^4x \left[D_k J^k + \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\Phi}^{mn}} \delta_L \tilde{\Phi}^{mn} + \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\gamma}^{mn}} \delta_L \tilde{\gamma}^{mn} \right] = 0. \tag{155}$$

Здесь

$$J^k = -\xi^p \tau_p^k + K_m^{pk} D_p \xi^m, \tag{156}$$

где плотность канонического тензора

$$\tau_p^k = -\delta_p^k L_g + \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{\Phi}^{mn})} D_p \tilde{g}^{mn} = -\delta_p^k L_g + \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{g}^{mn})} D_p \tilde{g}^{mn}, \tag{157}$$

а плотность тензора третьего ранга K_m^{pk} имеет вид

$$K_m^{pk} = 2 \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{\Phi}^{mn})} \tilde{\Phi}^{pn} - \delta_m^p \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{\Phi}^{lq})} \tilde{\Phi}^{lq} + 2 \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{\gamma}^{mn})} \tilde{\gamma}^{pn} - \\ - \delta_m^p \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{\gamma}^{lq})} \tilde{\gamma}^{lq}. \tag{158}$$

Подставляя в выражение (155) формулы для вариаций $\delta_L \tilde{\Phi}^{mn}$, $\delta_L \tilde{\gamma}^{mn}$ (85) и (86), в силу произвольности объема интегрирования Ω получаем тождество

$$\xi^p \left[D_k \tau_p^k + \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\Phi}^{mn}} D_p \tilde{\Phi}^{mn} \right] - K_m^{pk} D_p D_k \xi^m + \\ + D_p \xi^m \left[\tau_m^p - D_k K_m^{pk} - 2 \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\Phi}^{mn}} \tilde{\Phi}^{pn} + \delta_m^p \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\Phi}^{ql}} \tilde{\Phi}^{ql} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\gamma}^{mn}} \tilde{\gamma}^{pn} + \delta_m^p \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\gamma}^{ql}} \tilde{\gamma}^{ql} \right] \equiv 0. \tag{159}$$

Так как вектор смещения ξ^p произволен, из последнего выражения следуют сильные тождества:

$$D_k \tau_p^k \equiv -\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\Phi}^{mn}} D_p \tilde{\Phi}^{mn}; \tag{160}$$

$$\tau_m^k - D_p K_m^{kp} \equiv 2 \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\Phi}^{mn}} \tilde{\Phi}^{kn} - \delta_m^k \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\Phi}^{ql}} \tilde{\Phi}^{ql} + 2 \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\gamma}^{mn}} \tilde{\gamma}^{kn} - \\ - \delta_m^k \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{\gamma}^{ql}} \tilde{\gamma}^{ql}; \tag{161}$$

$$K_m^{kp} \equiv -K_m^{pk}. \tag{162}$$

Поскольку мы имеем связь между плотностью метрического тензора эффективного риманова пространства $\tilde{g}^{mn}$ и плотностью тензорного гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{mn}$:

$$\tilde{g}^{mn}=\tilde{\gamma}^{mn}+\tilde{\Phi}^{mn}, \tag{163}$$

то находим

$$\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{\Phi}^{mn}}=\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{g}^{mn}}; \qquad \frac{\partial L_g}{\partial(\partial_p\tilde{\Phi}^{mn})}=\frac{\partial L_g}{\partial(D_p\tilde{g}^{mn})}.$$

Используя эти равенства, имеем

$$\frac{\partial L_g}{\partial(\partial_p\tilde{\gamma}^{mn})}=\frac{\partial L_g}{\partial(D_p\tilde{g}^{mn})}-\tilde{g}^{qj}\frac{\partial L_g}{\partial(D_k\tilde{g}^{qj})}\frac{\partial\gamma^l_{kl}}{\partial(\partial_p\tilde{\gamma}^{mn})}+\tilde{g}^{qj}\frac{\partial L_g}{\partial(D_k\tilde{g}^{lj})}\frac{\partial\gamma^l_{qk}}{\partial(\partial_p\tilde{\gamma}^{mn})}.$$

Здесь γ^l_{qk} — символы Кристоффеля пространства Минковского:

$$\gamma^l_{qk}=\frac{1}{2}\gamma^{lj}(\partial_q\gamma_{kj}+\partial_k\gamma_{jq}-\partial_j\gamma_{qk}).$$

После элементарных вычислений имеем для K^{kp}_m следующее выражение:

$$\begin{aligned}K^{kp}_m={}&\frac{\partial L_g}{\partial(D_p\tilde{g}^{mn})}\tilde{g}^{kn}-\frac{\partial L_g}{\partial(D_k\tilde{g}^{mn})}\tilde{g}^{pn}+\\&+\tilde{g}^{qn}\tilde{\gamma}_{qm}\left[\frac{\partial L_g}{\partial(D_k\tilde{g}^{ln})}\tilde{\gamma}^{pl}-\frac{\partial L_g}{\partial(D_p\tilde{g}^{ln})}\tilde{\gamma}^{kl}\right]+\\&+\frac{\partial L_g}{\partial(D_l\tilde{g}^{qn})}\tilde{\gamma}_{lm}[\tilde{g}^{kn}\tilde{\gamma}^{pq}-\tilde{g}^{pn}\tilde{\gamma}^{kq}].\end{aligned}\tag{164}$$

Поскольку плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля равна

$$t^k_{(g)m}=2\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{\gamma}^{mn}}\tilde{\gamma}^{kn}-\delta^k_m\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{\gamma}^{pq}}\tilde{\gamma}^{pq}, \tag{165}$$

тождество (161) можно записать в виде

$$t^k_{(g)m}\equiv\tau^k_m-D_pK^{kp}_m-2\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{\Phi}^{mn}}\tilde{\Phi}^{kn}+\delta^k_m\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{\Phi}^{pq}}\tilde{\Phi}^{pq}. \tag{166}$$

Оно и устанавливает связь между плотностью тензора Гильберта в пространстве Минковского и плотностью канонического тензора энергии-импульса.

Для дальнейшего удобно ввести в качестве характеристики гравитационного поля величину

$$\overset{(0)}{t}{}^k_{(g)m}=\tau^k_m-D_pK^{kp}_m, \tag{167}$$

которая в случае свободного гравитационного поля точно совпадает в силу тождества (166) с плотностью тензора энергии-импульса Гильберта.

Систему уравнений гравитационного поля (146) можно записать в несколько другой форме через плотность тензора энергии-импульса Гильберта в римановом пространстве. Для этой цели на основе лагранжиана (142) и (143) вычислим плотность тензора третьего ранга K_m^{pk} по формуле (164).

Учитывая равенство

$$\frac{\partial L_g}{\partial (D_k\tilde{g}^{mn})}=\frac{1}{16\pi}\left[\tilde{G}_{mn}^k+\frac{1}{2}\tilde{g}^{kp}\tilde{g}_{mn}\tilde{G}_{lp}^l\right],$$

имеем

$$16\pi K_m^{pk}=[\tilde{g}^{pn}\tilde{G}_{mn}^k-\tilde{g}^{kn}\tilde{G}_{mn}^p]+\tilde{g}^{nq}\tilde{\gamma}_{qm}[\tilde{\gamma}^{kl}\tilde{G}_{ln}^p-\tilde{\gamma}^{pl}\tilde{G}_{ln}^k]+$$
$$+\tilde{\gamma}_{ml}\tilde{G}_{qn}^l[\tilde{g}^{pn}\tilde{\gamma}^{kq}-\tilde{g}^{kn}\tilde{\gamma}^{pq}].$$

Подставляя в это равенство выражение для $\tilde{G}_{mn}^k$ [см. (143)], находим:

$$16\pi K_m^{pk}=\tilde{g}_{mn}D_q(\tilde{g}^{kq}\tilde{g}^{pn}-\tilde{g}^{pq}\tilde{g}^{kn})-$$
$$-\gamma_{mn}D_q(\tilde{g}^{kq}\gamma^{pn}+\tilde{g}^{pn}\gamma^{kq}-\tilde{g}^{pq}\gamma^{kn}-\tilde{g}^{kn}\gamma^{pq}). \qquad (168)$$

Используя (168), на основании определения (167) для $\overset{(0)}{t}{}_{(g)}{}^k_m$ получаем следующую формулу:

$$\overset{(0)}{t}{}_{(g)m}^{k}=\tau_m^k-\frac{1}{16\pi}D_p\sigma_m^{kp}-\frac{1}{16\pi}\gamma_{nm}J^{kn}, \qquad (169)$$

где плотность антисимметричного тензора

$$\sigma_m^{kp}=\tilde{g}_{mn}D_q(\tilde{g}^{pq}\tilde{g}^{kn}-\tilde{g}^{kq}\tilde{g}^{pn}), \qquad (170)$$

а J^{kn} — известная структура (119).

Выражение (169) нам и понадобится в дальнейшем. В качестве подготовительной работы выведем теперь тождество, часто используемое в литературе. В галилеевых координатах плотность лагранжиана гравитационного поля (142) примет вид:

$$L_g=\frac{1}{32\pi}[\tilde{G}_{mn}^l\partial_l\tilde{g}^{mn}-\tilde{g}^{mn}\tilde{G}_{mk}^k\tilde{G}_{nl}^l],$$

где в данном случае

$$\tilde{G}_{mn}^k=\frac{1}{2}\tilde{g}^{kq}(\partial_m\tilde{g}_{qn}+\partial_n\tilde{g}_{qm}-\partial_q\tilde{g}_{mn}).$$

Величины типа $\tilde{G}_{mn}^k$ являются тензорами третьего ранга относительно линейных преобразований координат, поэтому L_g будет скалярной плотностью относительно этих же преобразований. Из инвариантности действия относительно линейных преобразований имеем

$$\delta J_g = \int\limits_{\Omega} d^4x \left[\partial_k J^k + \frac{\delta L_g}{\delta (\tilde{g}^{mn})} \delta_L \tilde{g}^{mn} \right] = 0. \tag{171}$$

Здесь

$$J^k = -\xi^p \tau_p^k + \tilde{K}_m^{pk} \partial_p \xi^m, \tag{172}$$

где плотность канонического тензора

$$\tau_p^k = -\delta_p^k L_g + \partial_p \tilde{g}^{mn} \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{g}^{mn})}, \tag{173}$$

а плотность тензора третьего ранга $\tilde{K}_m^{pk}$ в этом случае равна:

$$\tilde{K}_m^{pk} = 2 \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{g}^{mn})} \tilde{g}^{pn} - \delta_m^p \frac{\partial L_g}{\partial (\partial_k \tilde{g}^{ql})} \tilde{g}^{ql}. \tag{174}$$

Подставляя в (171) формулу для вариации $\delta_L \tilde{g}^{mn}$ относительно линейных преобразований, в силу произвольности объема интегрирования Ω получаем тождество

$$\xi^p \left[\partial_k \tau_p^k + \frac{\delta L_g}{\delta (\tilde{g}^{mn})} \partial_p \tilde{g}^{mn} \right] +$$
$$+ \partial_p \xi^m \left[\tau_m^p - \partial_k \tilde{K}_m^{pk} - 2 \frac{\delta L_g}{\delta (\tilde{g}^{mn})} \tilde{g}^{pn} + \delta_m^p \frac{\delta L_g}{\delta (\tilde{g}^{kq})} \tilde{g}^{kq} \right] \equiv 0. \tag{175}$$

Отсюда непосредственно следуют тождества

$$\partial_k \tau_p^k \equiv - \frac{\delta L_g}{\delta (\tilde{g}^{mn})} \partial_p \tilde{g}^{mn}; \tag{176}$$

$$\tau_m^k - \partial_p \tilde{K}_m^{kp} \equiv 2 \frac{\delta L_g}{\delta (\tilde{g}^{mn})} \tilde{g}^{kn} - \delta_m^k \frac{\delta L_g}{\delta (\tilde{g}^{ql})} \tilde{g}^{ql}. \tag{177}$$

Поскольку имеет место (148), из тождества (177) получим:

$$\tau_m^k - \partial_p \tilde{K}_m^{kp} = - \frac{\sqrt{-g}}{8\pi} \left[R_m^k - \frac{1}{2} \delta_m^k R \right]. \tag{178}$$

Учитывая равенство

$$\frac{\partial L_g}{\partial (\partial_p \tilde{g}^{mn})} = \frac{1}{16\pi} \left[\tilde{G}_{mn}^p + \frac{1}{2} \tilde{g}^{pq} \tilde{g}_{mn} \tilde{G}_{ql}^l \right]$$

и выражение для $\tilde{G}_{mn}^e$ в галилеевых координатах, после некоторых вычислений находим

$$16\pi \tilde{K}_m^{kp} = \partial_n (\delta_m^p \tilde{g}^{kn} - \delta_m^n \tilde{g}^{kp}) + \sigma_m^{kp}, \tag{179}$$

где σ_m^{kp} — плотность антисимметричного тензора:

$$\sigma_m^{kp} = -\sigma_m^{pk} = \tilde{g}_{mn}\partial_q(\tilde{g}^{pq}\tilde{g}^{kn} - \tilde{g}^{kq}\tilde{g}^{pn}). \tag{180}$$

Подставив выражение для $\tilde{K}_m^{kp}$ в (178), получим тождество:

$$\tau_m^k - \frac{1}{16\pi}\partial_p\sigma_m^{kp} \equiv -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi}\left[R_m^k - \frac{1}{2}\delta_m^k R\right]. \tag{181}$$

В тензоре кривизны всегда можно тождественно, не изменяя его, заменить обычные производные ковариантными по метрике Минковского, поэтому выражение (181) можно записать в ковариантном виде

$$\tau_m^k - \frac{1}{16\pi}D_p\sigma_m^{kp} = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi}\left[R_m^k - \frac{1}{2}\delta_m^k R\right], \tag{182}$$

при этом плотность канонического тензора τ_m^k в (182) будет равна выражению (157), т. е.

$$\tau_m^k = -\delta_m^k L_g + \frac{\partial L_g}{\partial(\partial_k\tilde{g}^{pq})}D_m\tilde{g}^{pq},$$

где плотность лагранжиана L_g будет записана в ковариантных производных по метрике Минковского и иметь вид (142).

Используя тождество (182), мы можем выражение для (169) записать в форме:

$$\overset{(0)}{t}{}_{(g)m}^{k} = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi}\left[R_m^k - \frac{1}{2}\delta_m^k R\right] - \frac{1}{16\pi}\gamma_{mn}J^{nk}. \tag{183}$$

Мы установили ранее, что система уравнений вещества и гравитационного поля (146) эквивалентна системе уравнений (154). С помощью выражения (183) система уравнений вещества и гравитационного поля может быть записана и в другой эквивалентной форме

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{ml}\gamma^{pq}D_pD_q\tilde{g}^{nl} = 16\pi\,(T_m^n + \overset{(0)}{t}{}_{(g)m}^{n});\\ &D_m\tilde{g}^{mn} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{184}$$

Здесь T_m^n — плотность тензора энергии-импульса Гильберта (76) для вещества в римановом пространстве. Совершенно очевидно, что в силу уравнений (184) закон сохранения тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля имеет вид

$$D_n\,(T_m^n + \overset{(0)}{t}{}_{(g)m}^{n}) = 0. \tag{185}$$

Ковариантный закон сохранения вещества в римановом пространстве может быть тождественно представлен в виде:

$$\nabla_n T_m^n = \partial_n T_m^n - \frac{1}{2}T^{nq}\partial_m g_{nq} \equiv D_n T_m^n - G_{mn}^q T_q^n = 0. \tag{186}$$

Сравнив (185) и (186), получим:

$$G^q_{mn}T^n_q = -D_n \overset{(0)}{t}{}^n_{(g)m}. \tag{187}$$

Мы видим из этого выражения, что вещество получает энергию и импульс непосредственно от гравитационного поля, причем суммарный тензор энергии-импульса вещества и гравитационного поля всегда строго сохраняется.

Построение РТГ на основе пространства Минковского и принципа геометризации позволило нам на каждом этапе рассуждений иметь дело только с ковариантными величинами.

10. САМОДЕЙСТВИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ОДНОЗНАЧНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА РТГ

В разд. 8 мы рассмотрели плотность лагранжиана гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{ik}$ (134), описывающую спины 2 и 0 и квадратичную относительно первых производных $D_m\tilde{\Phi}^{lk} \equiv D_m\tilde{g}^{lk}$.

Характерной особенностью этой плотности лагранжиана является то, что свертка ковариантных производных от $\tilde{g}^{lk}$, взятых по метрике Минковского, осуществляется в (134) только с помощью эффективного метрического тензора $\tilde{g}^{ij}$ риманова пространства. Однако свертку ковариантных производных поля $\tilde{g}^{lk}$, взятых по метрике Минковского, можно также совершить с помощью плотности метрического тензора $\tilde{\gamma}^{ij}$. Используя для этой цели минимальное* из возможных число тензорных плотностей $\tilde{\gamma}^{ij}$ и $\tilde{g}^{ij}$, мы придем к следующим, отличным от (134) плотностям лагранжианов для гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{ik}$:

$$L_{g1} = \tilde{\gamma}_{mk}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp}\,(a_1 D_l\tilde{g}^{kq}D_p\tilde{g}^{mn} + c_1 D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}); \tag{188}$$

$$L_{g2} = \tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{\gamma}^{lp}\,(a_2 D_l\tilde{g}^{kq}D_p\tilde{g}^{mn} + c_2 D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}); \tag{189}$$

$$L_{g3} = \tilde{\gamma}_{km}\tilde{\gamma}_{nq}\tilde{g}^{lp}\,(a_3 D_l\tilde{g}^{kq}D_p\tilde{g}^{mn} + c_3 D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}); \tag{190}$$

$$L_{g4} = \tilde{\gamma}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{\gamma}^{lp}\,(a_4 D_l\tilde{g}^{kq}D_p\tilde{g}^{mn} + c_4 D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}); \tag{191}$$

$$L_{g5} = \tilde{\gamma}_{km}\tilde{\gamma}_{nq}\tilde{\gamma}^{lp}\,(a_5 D_l\tilde{g}^{kq}D_p\tilde{g}^{mn} + c_5 D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}). \tag{192}$$

Плотности лагранжианов (188)—(192) также содержат гравитационное поле, несущее только спины 2 и 0, но описываемые ими само-

* Наиболее общая, квадратичная по производным $D_m\tilde{g}^{lk}$ плотность лагранжиана гравитационного поля может быть составлена, если взять свертки еще и с помощью выражений $\tilde{\gamma}_{kp}\tilde{g}^{pl}\tilde{\gamma}_{ln}$, $\tilde{g}_{kp}\tilde{\gamma}^{pl}\tilde{g}_{ln}$, $\tilde{\gamma}^{kp}\tilde{g}_{pl}\tilde{\gamma}^{ln}$ и т. д. Однако это не внесет ничего принципиально нового, поэтому мы ограничиваемся только изучением лагранжианов (134) и (188) — (192).

действия гравитационного поля отличаются от самодействия, содержащегося в плотности лагранжиана (134).

Вычисляя из плотности лагранжианов (188) — (192) на основе формул (88), (89), (96) и (99) вклады в t^{mn} и требуя, чтобы из равенства $D_m t^{mn} = 0$ не возникало нового уравнения на поле Φ^{ik}, находим для коэффициентов a_i и c_i значения

$$a_i = c_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5). \tag{193}$$

Отсюда следует, что среди рассмотренных выше простейших плотностей лагранжианов (134), (188) — (192) только лагранжиан вида (140) приводит нас к совместной системе уравнений (146), описывающей гравитационное поле, обладающее только спинами 2 и 0.

Таким образом, самодействие гравитационного поля не может быть произвольным. Оно определяется тем, что гравитационное поле является полем Фарадея — Максвелла, обладающим энергией-импульсом и спинами 2 и 0, а также тем, что риманово пространство согласно связи (121) возникает как эффективное пространство полевого происхождения.

11. ОБОБЩЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РТГ

В разд. 8 и 10 на основании представления о гравитационном поле как физическом поле в духе Фарадея — Максвелла, обладающем энергией, импульсом и спинами 2 и 0, в рамках принципа относительности была однозначно найдена плотность лагранжиана гравитационного поля L_g (140) в предположении, что она должна быть квадратичной формой относительно первых производных полей, и построена система уравнений движения для гравитационного поля (146).

В настоящем разделе мы покажем, что предложенная нами теория гравитации допускает довольно интересное обобщение, заключающееся в том, что в рамках РТГ можно ввести для гравитона массу покоя m. Как мы увидим далее (см. разд. 16), если предположить, что вся «скрытая масса» вещества во Вселенной связана с существованием гравитационного поля с массой покоя, отличной от нуля, можно получить ограничение сверху на массу гравитона. Это ограничение имеет вид $m \leqslant 10^{-65}$ г.

Не нарушая общих требований РТГ, к лагранжиану (140) можно добавить простейшие члены вида

$$\Lambda \sqrt{-g} \tag{194}$$

и

$$\varkappa_0 \sqrt{-\gamma},\ m^2 \gamma_{mn} \tilde{g}^{mn} \quad \text{и} \quad M^2 g_{mn} \tilde{\gamma}^{mn}. \tag{195}$$

Тогда плотность лагранжиана гравитационного поля может быть представлена как сумма лагранжианов

$$\tilde{L}_g = L_g + \lambda_g, \tag{196}$$

где L_g задано выражением (140), а

$$\lambda_g = \frac{1}{16\pi}\left(\varkappa_0\sqrt{-\gamma} + \Lambda\sqrt{-g} + \frac{1}{2}m^2\gamma_{mn}\tilde{g}^{mn} + \frac{1}{2}M^2 g_{mn}\tilde{\gamma}^{mn}\right). \tag{197}$$

Заметим, что в отличие от ОТО включение в лагранжиан гравитационного поля членов (195) возможно в силу главного постулата нашей теории, утверждающего, что в основе описания всех физических явлений, в том числе и гравитационных, лежит специальный принцип относительности. Вначале может показаться странным включение в лагранжиан λ_g члена $\varkappa_0\sqrt{-\gamma}$, который по существу является постоянным. Однако, как мы увидим ниже, постоянный член необходим, чтобы обеспечить тождественное выполнение уравнения поля в случае, когда отсутствует вещество и гравитационное поле.

В соответствии с принципом геометризации лагранжиан вещества L_M будет зависеть от гравитационного поля Φ^{mn} только через $\tilde{g}^{mn}$. Таким образом, полный лагранжиан РТГ

$$L = \tilde{L}_g + L_M. \tag{198}$$

На основании лагранжиана (198), где $\tilde{L}_g$ задано формулой (196), с учетом связи (121) вычислим плотность энергии импульса вещества и гравитационного поля t^{mn} в пространстве Минковского. Она имеет вид

$$t^{mn} = 2\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{nk}\gamma^{mp} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right)\frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{pk}} - \frac{1}{16\pi}J^{mn} -$$
$$- \frac{1}{16\pi}\left[m^2\tilde{g}^{mn} + \varkappa_0\tilde{\gamma}^{mn} - M^2\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{mp}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right)g_{pk}\right]. \tag{199}$$

В (199) J^{mn} обозначена известная структура (119). В силу принципа наименьшего действия

$$\delta L/\delta\tilde{g}^{pk} = 0. \tag{200}$$

Поэтому из (199) ясно, что уравнения

$$J^{mn} + m^2\tilde{g}^{mn} + \varkappa_0\tilde{\gamma}^{mn} -$$
$$- M^2\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{mp}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right)g_{pk} = -16\pi t^{mn} \tag{201}$$

полностью эквивалентны системе уравнений (200).

Для того чтобы из равенства

$$D_m t^{mn} = 0, \tag{202}$$

где t^{mn} задано выражением (201), не возникало какого-либо нового уравнения на поле Φ^{mn}, необходимо и достаточно потребовать, чтобы соотношение

$$M^2 D_m \left[\left(\gamma^{mp}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk} \right) g_{pk} \right] = 0$$

выполнялось тождественно.

Отсюда находим, что

$$M^2 = 0. \qquad (203$$

Остальные постоянные в лагранжиане (197) Λ, $\varkappa_0$, m^2 условием (202) не определяются, и поэтому имеем

$$\tilde{L}_g = L_g + \frac{1}{16\pi}\left(\varkappa_0 \sqrt{-\gamma} + \Lambda\sqrt{-g} + \frac{1}{2} m^2 \gamma_{pk} \tilde{g}^{pk} \right). \qquad (204)$$

Таким образом, если в основу релятивистской теории гравитации положить лагранжиан $\tilde{L}_g$ вида (204), а лагранжиан вещества выбрать согласно принципу геометризации, то получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^{pk} D_p D_k \tilde{g}^{mn} - m^2 \tilde{g}^{mn} - \varkappa_0 \tilde{\gamma}^{mn} = 16\pi t^{mn}; \\ &D_m \tilde{g}^{mn} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (205)$$

Эквивалентная (205) система уравнений, которые получаются из (200) подстановкой лагранжиана (198), может быть представлена в форме

$$R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R + \frac{1}{2}\Lambda g^{mn} - \frac{m^2}{2}\left(g^{mp} g^{nk} - \frac{1}{2} g^{mn} g^{pk} \right)\gamma_{pk} = \\ = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} T^{mn}; \qquad (206а)$$

$$D_m \tilde{g}^{mn} = 0, \qquad (206б)$$

Так как имеют место тождества

$$\nabla_m \left(R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R \right) \equiv 0; \quad \nabla_m \tilde{g}^{mn} \equiv 0,$$

где ∇_m — ковариантная производная по метрике g^{mn}, то на основании (206а) имеем

$$\frac{m^2}{2}\sqrt{-g}\left(g^{mp} g^{nk} - \frac{1}{2} g^{mn} g^{pk} \right)\nabla_m \gamma_{pk} + 8\pi \nabla_m T^{mn} = 0. \qquad (207)$$

Рассмотрим в (207) член, содержащий $\nabla_m \gamma_{pk}$.

Учитывая равенство

$$\nabla_m \gamma_{pk} = -G^q_{mp}\gamma_{qk} - G^q_{mk}\gamma_{pq},$$

где тензор G^q_{mn} задан формулой (145), находим

$$\left(g^{mp}g^{nk}-\frac{1}{2}g^{mn}g^{pk}\right)\nabla_m\gamma_{pk}\equiv\gamma_{mq}g^{mn}\left(D_pg^{pq}+G^l_{pl}g^{pq}\right). \quad (208)$$

При выводе этого тождества мы воспользовались явным выражением для G^q_{mn} (145). Используя (208) в (207), получаем

$$\frac{1}{2}m^2\sqrt{-g}\gamma_{qm}g^{mn}\left(D_pg^{pq}+G^l_{pl}g^{pq}\right)+8\pi\nabla_mT^{mn}=0. \quad (209)$$

В силу уравнений гравитационного поля (206б)

$$D_p\tilde{g}^{pq}\equiv\sqrt{-g}\left(D_pg^{pq}+G^l_{pl}g^{pq}\right)=0$$

из (209), являющихся следствием (206а), с необходимостью следуют уравнения движения для вещества

$$\nabla_mT^{mn}=0. \quad (83)$$

Таким образом, из уравнений гравитационного поля (206) непосредственно следует выполнимость уравнений для вещества (83). Уравнения (206б) обеспечивают совместность уравнений (206а) с уравнениями вещества. Верно и другое. Если уравнения (206а) и уравнения вещества (83) выполняются, то уравнения (206б) обязательно являются их следствием и, следовательно, такая теория описывает массивное гравитационное поле, обладающее только спинами 2 и 0, поскольку система уравнений (206б) из тензорного поля Φ^{mn} исключает спины 1 и 0′.

При отсутствии вещества и гравитационного поля $\Phi^{mn}=0$ уравнения (206) должны тождественно обращаться в нуль. Это возможно только в том случае, если между m^2 и Λ существует следующее соотношение:

$$\Lambda=-m^2. \quad (210)$$

Другое соотношение, связывающее постоянные $\varkappa_0$ и m^2, может быть получено из анализа лагранжиана $\tilde{L}_g$. Полагая в (204) гравитационное поле равным нулю и принимая во внимание равенство (210), находим:

$$\tilde{L}_g=\lambda_g=\frac{\sqrt{-\gamma}}{16\pi}(\varkappa_0+m^2).$$

При отсутствии вещества и гравитационного поля естественно потребовать, чтобы лагранжиан (198) тождественно обращался в нуль. Это приводит нас к равенству

$$\varkappa_0=-m^2. \quad (211)$$

Таким образом, как показывает проведенный здесь анализ, лагранжиан (197) содержит одну-единственную постоянную, которую мы обозначим m^2.

Выясним теперь физический смысл параметра m^2. Для этой цели рассмотрим уравнение (206а) в приближении слабого поля Φ^{mn}. В галилеевых координатах на основании связи (121) может быть найдено следующее разложение для g^{mn} и g:

$$g^{mn}=\gamma^{mn}+\Phi^{mn}-\frac{1}{2}\gamma^{mn}\Phi^k_k-\frac{1}{2}\Phi^{mn}\Phi^k_k+$$

$$+\frac{1}{4}\gamma^{mn}\left(\Phi_{pq}\Phi^{pq}+\frac{1}{2}\Phi^p_p\Phi^q_q\right)+\ldots; \qquad (212)$$

$$g=-1-\Phi^k_k+\frac{1}{2}\Phi_{pq}\Phi^{pq}-\frac{1}{2}\Phi^p_p\Phi^q_q+\ldots \qquad (213)$$

Используя эти разложения, получаем:

$$R^{mn}\simeq\frac{1}{2}\left(\Box\Phi^{mn}-\frac{1}{2}\gamma^{mn}\Box\Phi^q_q\right),$$

а следовательно,

$$\sqrt{-g}\left(R^{mn}-\frac{1}{2}g^{mn}R\right)\simeq\frac{1}{2}\Box\Phi^{mn}. \qquad (214)$$

В первом порядке по полю Φ^{mn} с учетом (210) и (211) имеем равенство:

$$-\frac{1}{2}m^2\tilde{g}^{mn}-\frac{1}{2}m^2\sqrt{-g}\left(g^{mp}g^{nk}-\frac{1}{2}g^{mn}g^{pk}\right)\gamma_{pk}=-\frac{1}{2}m^2\Phi^{mn}.$$

Таким образом, (206а) в приближении слабого поля примет вид:

$$(\Box-m^2)\Phi^{mn}=0. \qquad (215)$$

Как мы видим, для слабого поля постоянная m является массой покоя гравитона. По ходу отметим также, что в силу (212), (213) имеем для λ_g в низшем порядке следующее выражение:

$$\lambda_g=\frac{m^2}{64\pi}\left(\Phi_{pq}\Phi^{pq}-\frac{1}{2}\Phi^p_p\Phi^q_q\right); \qquad (216)$$

таким образом, в рамках РТГ система уравнений, описывающая гравитационное поле Φ^{mn} с массой покоя, отличной от нуля, будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}&\gamma^{pk}D_pD_k\tilde{\Phi}^{mn}-m^2\tilde{\Phi}^{mn}=16\pi t^{mn};\\&D_m\tilde{\Phi}^{mn}=0\end{aligned}\right\} \qquad (217)$$

или в другой форме записи:

$$\left.\begin{aligned}&\left(R^{mn}-\frac{1}{2}g^{mn}R\right)-\\&-\frac{m^2}{2}\left[g^{mn}+\left(g^{mp}g^{nk}-\frac{1}{2}g^{mn}g^{pk}\right)\gamma_{pk}\right]=\frac{8\pi}{\sqrt{-g}}T^{mn};\\&D_m\tilde{g}^{mn}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (218)$$

Если ранее в РТГ плоская метрика γ^{mn} входила только в уравнения (154), то теперь мы видим, что она входит в оба уравнения (218).

В заключение этого раздела сделаем следующий важный вывод. Если масса покоя гравитона $m = 0$, т. е. если гравитационное взаимодействие является дальнодействующим, то уравнения гравитационного поля (218) переходят в уравнения РТГ (154). Таким образом, для дальнодействующего гравитационного поля космологический член всегда равен нулю.

12. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РТГ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ИЗОЛИРОВАННОГО ТЕЛА

В этом разделе, следуя [15, 19, 41—43], рассмотрим решение уравнений РТГ для тела, обладающего сферической симметрией в случае безмассового гравитационного поля.

В пространстве Минковского выберем сферические координаты

$$t;\ x = r\sin\theta\cos\varphi;\ y = r\sin\theta\sin\varphi;\ z = r\cos\theta. \tag{219}$$

В дальнейшем удобно для координат t, r, θ, φ использовать также обозначения

$$t = x^0,\ r = x^1,\ \theta = x^2,\ \varphi = x^3. \tag{220}$$

Метрический тензор пространства Минковского в координатах (219) имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{00}=1;\ \gamma_{11}=-1;\ \gamma_{22}=-r^2;\ \gamma_{33}=-r^2\sin^2\theta; \\ \gamma^{00}=1;\ \gamma^{11}=-1;\ \gamma^{22}=-\dfrac{1}{r^2};\ \gamma^{33}=-\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}; \end{array}\right\} \tag{221}$$

$\gamma^{mn} = \gamma_{mn} = 0$, если $m \neq n$; $\sqrt{-\gamma} = r^2\sin\theta$, а отличные от нуля символы Кристоффеля равны:

$$\gamma^1_{22} = -r;\ \gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta;\ \gamma^2_{12} = \gamma^3_{13} = \frac{1}{r};\ \gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta;$$
$$\gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta. \tag{222}$$

В формулах (221) и (222) и в дальнейшем в этом разделе числовые индексы обозначают сферические координаты согласно (220).

Интервал для сферически-симметричной и статической массы в римановом пространстве может быть записан в стандартном виде

$$ds^2 = U(r)\,dt^2 - V(r)\,dr^2 - W(r)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2), \tag{223}$$

где $U(r)$, $V(r)$ и $W(r)$ — положительные функции и зависят только от расстояния r пространства Минковского.

Согласно (223) компоненты метрического тензора риманова пространства равны:

$$\left.\begin{aligned}&g_{00}=U(r);\ g_{11}=-V(r);\ g_{22}=-W(r);\ g_{33}=-W(r)\sin^2\theta;\\&g^{00}=\frac{1}{U(r)};\ g^{11}=-\frac{1}{V(r)};\ g^{22}=-\frac{1}{W(r)};\ g^{33}=-\frac{1}{W(r)\sin^2\theta};\\&g^{mn}=g_{mn}=0,\ \text{если}\ m\neq n\quad \sqrt{-g}=\sqrt{UV}W\sin\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(224)$$

Функции $U(r)$, $V(r)$ и $W(r)$ следует определить из уравнений РТГ. Чтобы записать эти уравнения в развернутом виде, найдем сначала плотность метрического тензора $\tilde{g}^{mn}$. Легко показать, что

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{g}^{00}=\sqrt{U^{-1}V}W\sin\theta;\ \tilde{g}^{11}=-\sqrt{UV^{-1}}W\sin\theta;\\&\tilde{g}^{22}=-\sqrt{UV}\sin\theta;\ \tilde{g}^{33}=-\sqrt{UV}\frac{1}{\sin\theta}.\end{aligned}\right\}\qquad(225)$$

Так как второе уравнение (154) может быть представлено в виде

$$D_l\tilde{g}^{lk}=\partial_l\tilde{g}^{lk}+\gamma^k_{mn}\tilde{g}^{mn}=0,$$

то на основании формул (222) и (225) найдем

$$\frac{d}{dr}\left(W\sqrt{UV^{-1}}\right)=2r\sqrt{UV}.\qquad(226)$$

Теперь напишем первое уравнение (154) в терминах функции $U(r)$, $V(r)$ и $W(r)$. С этой целью найдем отличные от нуля компоненты тензора

$$\Gamma^l_{mn}=\frac{1}{2}g^{lk}(\partial_m g_{kn}+\partial_n g_{km}-\partial_k g_{mn});$$

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma^0_{01}=\frac{1}{2U}\frac{dU}{dr};\ \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta;\\&\Gamma^1_{00}=\frac{1}{2V}\frac{dU}{dr};\ \Gamma^2_{12}=\frac{1}{2W}\frac{dW}{dr};\\&\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2V}\frac{dV}{dr};\ \Gamma^3_{13}=\frac{1}{2W}\frac{dW}{dr};\\&\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2V}\frac{dW}{dr};\ \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\theta;\\&\Gamma^1_{33}=-\frac{\sin^2\theta}{2V}\frac{dW}{dr}.\end{aligned}\right\}\qquad(227)$$

Из определения $R^l_k=p^{lp}R_{pk}$, где

$$R_{pk}=\partial_n\Gamma^n_{pk}-\partial_k\Gamma^n_{pn}+\Gamma^n_{pk}\Gamma^m_{nm}-\Gamma^n_{pm}\Gamma^m_{kn},\qquad(228)$$

В силу (227) найдем:

$$R_0^0=\frac{1}{2UV}\frac{d^2U}{dr^2}-\frac{1}{4UV^2}\frac{dU}{dr}\frac{dV}{dr}-\frac{1}{4U^2V}\left(\frac{dU}{dr}\right)^2+\frac{1}{2UVW}\frac{dU}{dr}\frac{dW}{dr}; \tag{229}$$

$$R_1^1=\frac{1}{2UV}\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{WV}\frac{d^2W}{dr^2}-\frac{1}{4VU^2}\left(\frac{dU}{dr}\right)^2-\frac{1}{2VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{4UV^2}\frac{dV}{dr}\frac{dU}{dr}-\frac{1}{2V^2W}\frac{dV}{dr}\frac{dW}{dr}; \tag{230}$$

$$R_2^2=R_3^3=\frac{1}{2VW}\frac{d^2W}{dr^2}-\frac{1}{4V^2W}\frac{dV}{dr}\frac{dW}{dr}-\frac{1}{W}+\frac{1}{4UVW}\frac{dU}{dr}\frac{dW}{dr}; \tag{231}$$

$$R=R_l^l=\frac{1}{UV}\frac{d^2U}{dr^2}-\frac{1}{2UV^2}\frac{dV}{dr}\frac{dU}{dr}-\frac{1}{2U^2V}\left(\frac{dU}{dr}\right)^2+\frac{2}{VW}\frac{d^2W}{dr^2}+$$
$$+\frac{1}{UVW}\frac{dU}{dr}\frac{dW}{dr}-\frac{1}{2VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2-\frac{1}{V^2W}\frac{dV}{dr}\frac{dW}{dr}-\frac{2}{W}; \tag{232}$$

$$R_k^l=0,\ k\neq l. \tag{233}$$

Тогда первое уравнение системы (154) может быть записано в виде:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{-g}\left(R_0^0-\frac{1}{2}R\right)&=8\pi T_0^0;\\ \sqrt{-g}\left(R_1^1-\frac{1}{2}R\right)&=8\pi T_1^1;\\ \sqrt{-g}\left(R_2^2-\frac{1}{2}R\right)&=8\pi T_2^2.\end{aligned}\right\} \tag{234}$$

В дальнейшем мы ограничимся нахождением только внешнего решения. Из (234) видно, что вне вещества имеют место равенства:

$$R_0^0=R_1^1=R_2^2=0. \tag{235}$$

На основании (229)—(231) можно показать, что система уравнений (235) для функций U, V и W эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\frac{dU}{dr}=2a\frac{1}{W}\sqrt{UV}; \tag{236}$$

$$\frac{dW}{dr}=2b\sqrt{UVW}; \tag{237}$$

$$\frac{2ab}{\sqrt{W}}+b^2U=1, \tag{238}$$

причем независимыми являются только два из них. Поэтому ограничимся изучением уравнений (237) и (238). Из этих уравнений находим

$$U(r)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{\sqrt{W}-2ab}{\sqrt{W}}\right); \tag{239}$$

$$V(r)=\left(\frac{d\sqrt{W}}{dr}\right)^2\frac{\sqrt{W}}{\sqrt{W}-2ab}. \tag{240}$$

Заметим, что в формулах (236)—(238) a и b — произвольные постоянные и подлежат дальнейшему определению. Учитывая (239) и (240), получаем:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{\sqrt{W}(\sqrt{W}-2ab)}{\frac{d\sqrt{W}}{dr}}\right]=2r\frac{d\sqrt{W}}{dr}. \tag{241}$$

Решение этого уравнения удобно искать относительно r как функции $\sqrt{W}$.

Следуя Белинфанте [41], введем новые переменные

$$\sqrt{W}=ab\,(x+1) \text{ и } r=xy \tag{242}$$

и в качестве независимой переменной выберем x. Так как

$$\frac{d\sqrt{W}}{dr}=\frac{d\sqrt{W}}{dx}\Big/\frac{dr}{dx}=\frac{ab}{[y+x\,dy/dx]},$$

из (241) найдем

$$(4x^2-2)\frac{dy}{dx}+x(x^2-1)\frac{d^2y}{dx}=0. \tag{243}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y(x)=C_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\right)+C_2, \tag{244}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Возвращаясь к исходным переменным r и $\sqrt{W}$, найдем

$$r=C_1\left(1+\frac{\sqrt{W}-ab}{2ab}\ln\frac{\sqrt{W}-2ab}{\sqrt{W}}\right)+\frac{C_2}{ab}(\sqrt{W}-ab). \tag{245}$$

Так как при $r\to\infty$ необходимо, чтобы $g_{22}\to\gamma_{22}$, то из (221) и (224) мы видим, что в области больших r

$$W\simeq r^2.$$

Рассматривая (245) при больших r и W и учитывая последнее соотношение, находим, что

$$C_2=ab. \tag{246}$$

Пусть теперь $\sqrt{W}\to 2ab$. Тогда, как это следует из (245), $r\to\infty$, если $C_1\neq 0$, что не оправдано с физической точки зрения. Поэтому необходимо положить

$$C_1=0.$$

Таким образом, окончательно находим

$$W(r) = (r + ab)^2; \tag{247}$$

$$U(r) = \frac{1}{b^2}\,\frac{r - ab}{r + ab}; \tag{248}$$

$$V(r) = \frac{r + ab}{r - ab}. \tag{249}$$

Так как при $r \to \infty$ необходимо выполнение предельного перехода $U(r) \to 1$, из (248) получим

$$b = 1. \tag{250}$$

Учитывая выражения (247)—(249) и равенство (250) для интервала (223) вне вещества, находим следующую формулу:

$$ds^2 = \frac{r - a}{r + a}\,dt^2 - \frac{r + a}{r - a}\,dr^2 - (r + a)^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \tag{251}$$

Из принципа соответствия следует, что постоянная a равна активной гравитационной массе рассматриваемого тела:

$$a = m. \tag{252}$$

Для того чтобы более отчетливо показать роль второго уравнения (154), вернемся к системе (236)—(238), которая эквивалентна системе уравнений Гильберта — Эйнштейна вне вещества. Из трех уравнений (236)—(238) независимыми являются только два, поэтому одна из трех функций: $U(r)$, $V(r)$ и $W(r)$ этими уравнениями не определяется. Отождествим $\sqrt{W}$ с r:

$$\sqrt{W} = r. \tag{253}$$

Тогда легко заметить, что система (236)—(238) с учетом (250) и (252) допускает решения:

$$\left.\begin{aligned} &W(r) = r^2;\\ &U(r) = 1 - \frac{2m}{r};\\ &V(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

и, следовательно, интервал (223) запишется в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \tag{255}$$

Это известное решение Шварцшильда.

Из (255) видно, что параметр r приобрел смысл расстояния в римановом пространстве. Таким образом, равенство (253) означает, что мы произвольно отождествили расстояние в пространстве Минковского с расстоянием в римановом пространстве.

В рамках РТГ такое глобальное отождествление расстояний недопустимо. Действительно, в эффективном римановом пространстве расстояние задается метрическим тензором g_{mn}. В силу принципа геометризации эффективное риманово пространство имеет полевое происхождение и поэтому его метрика g_{mn} должна определяться из системы уравнений РТГ. В пространстве Минковского же расстояние фиксируется метрическим тензором γ_{mn}. Как только в пространстве Минковского выбрано r, связь r с расстоянием риманова пространства $\sqrt{W}$ должна однозначно определяться из уравнений РТГ. Поскольку решения (254), полученные в силу связи (253), не удовлетворяют полевому уравнению (226), решение (254), найденное Шварцшильдом, не есть решение системы уравнений РТГ. Для интервала (223) уравнения РТГ дают однозначный ответ и приводят к формуле (251).

В ОТО не существует понятия плоского пространства Минковского. Поэтому входящая в уравнения Гильберта — Эйнштейна (236)—(238) величина r является параметром, не имеющим физического смысла. Тот или иной выбор связи между $W(r)$ и r в ОТО может быть зафиксирован с помощью так называемых координатных условий. Первым был В. А. Фок, который для задач островного типа особое значение придал гармоническим условиям как координатным условиям в ОТО.

Следуя [43], приведем здесь анализ исследования системы уравнений Гильберта — Эйнштейна для сферически-симметричного тела в той последовательности, которая отчетливее всего покажет ограниченный характер идей Фока и то, как это ограничение устраняется в рамках РТГ.

Учитывая потребности следующих разд. 13 и 14 данной работы, рассмотрим интервал более общего вида, чем (223):

$$ds^2 = g_{00}(t, r)\, dt^2 + 2g_{01}(t, r)\, dt\, dr + g_{11}(t, r)\, dr^2 - B^2(t, r)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \quad (256$$

и введем обозначения

$$x^i = (t, r, \theta, \varphi). \quad (257)$$

Перейдем теперь от x^i к переменным ξ^i

$$\xi^i = (\tau, R, \theta, \varphi), \quad (258)$$

полагая

$$t = t(R, \tau), \quad r = r(R, \tau). \quad (259)$$

От функции (259) потребуем, чтобы интервал (256) в терминах ξ^i принял вид

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\omega(\tau, R)}\, dR^2 - B^2(\tau, R)\,[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2]. \quad (260)$$

Из (260) видно, что τ является собственным временем, а R — радиальной переменной в сопутствующей системе координат, т. е. ξ^i — это собственные координаты рассматриваемого тела.

Систему уравнений (123) запишем несколько в другой форме. Для этого обратимся к известному равенству:

$$\Gamma^q_{kl}(x)\, g^{kl}(x) = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^p} [\sqrt{-g(x)}\, g^{pq}(x)], \tag{261}$$

где Γ^q_{kl} определена формулой

$$\Gamma^q_{kl}(x) = \frac{1}{2} g^{qp} (\partial_k g_{pl} + \partial_l g_{pk} - \partial_p g_{kl}),$$

а x^i означают переменные (257). Используя закон преобразования (259), для $\Gamma^q_{kl}(x)\, g^{kl}(x)$ получаем

$$\Gamma^q_{kl}(x)\, g^{kl}(x) = -\frac{1}{\sqrt{-g(\xi)}} \frac{\partial}{\partial \xi^p} \left[\sqrt{-g(\xi)} g^{pk}(\xi) \frac{\partial x^q}{\partial \xi^k}\right]. \tag{262}$$

Сравнивая (261) и (262), найдем

$$\Box x^q = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \frac{\partial}{\partial x^p} [\sqrt{-g(x)}\, g^{pq}(x)]; \quad q = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{263}$$

Здесь $\Box$ — обобщенный оператор Д'Аламбера:

$$\Box\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g(\xi)}} \frac{\partial}{\partial \xi^p} \left[\sqrt{-g(\xi)}\, g^{pq}(\xi) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^q}\right]. \tag{264}$$

В. А. Фок, а еще раньше Де Дондер [38] пользовались нековариантным гармоническим условием вида

$$\frac{\partial}{\partial x^p} [\sqrt{-g(x)}\, g^{pq}(x)] = 0 \tag{265}$$

как привилегированным координатным условием.

На основании равенства (263), условие (265) может быть представлено в форме

$$\Box x^q = 0 \quad q = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{266}$$

Условие (266) нельзя сделать ковариантным в рамках ОТО. В гармонических координатах система уравнений Гильберта — Эйнштейна существенно упрощается, что, по-видимому, побудило Фока назвать эту систему привилегированной. Если бы мы пожелали сохранить условие (265) и сделать его универсальным, то нам необходимо было бы придать ему ковариантный характер. Но эта операция неоднозначна и не может быть осуществлена в рамках ОТО. Решение задачи поиска новых уравнений поля нами найдено, исходя из физической структуры гравитационного поля. Именно на этой основе в разд. 8 мы и получили уравнение (123)

$$\frac{1}{\sqrt{-g(x)}} D_p [\sqrt{-g(x)}\, g^{pq}(x)] = $$
$$= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \partial_p [\sqrt{-g(x)} g^{pq}(x)] + \gamma^q_{mn}(x)\, g^{mn}(x) = 0, \qquad (267)$$

которому с помощью (263) можно придать форму

$$\Box x^q = -\gamma^q{}_n(x) \frac{\partial x^m}{\partial \xi^p} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^l} g^{pl}(\xi). \qquad (268)$$

Здесь $\gamma^q_{mn}(x)$ — символ Кристоффеля пространства Минковского:

$$\gamma^q_{mn}(x) = \frac{1}{2} \gamma^{qp} (\partial_m \gamma_{pn} + \partial_n \gamma_{pm} - \partial_p \gamma_{mn}). \qquad (269)$$

В случае галилеевых координат $\gamma^q_{mn} = 0$ и уравнение (268) совпадает с уравнением (266). Уравнение (268) является ковариантным, отражает структуру гравитационного поля и подчеркивает фундаментальность пространства Минковского. Роль этих уравнений чрезвычайно важна, поскольку они изменяют природу предсказываемых явлений. Возникает новая физика, особенно в области сильных полей. В этом мы убедимся в следующем разделе, когда будем изучать гравитационный коллапс массивных тел, а также в разд. 16 при изучении развития однородной и изотропной Вселенной во времени.

Вернемся теперь к уравнению (268), которое является другой формой записи общековариантного полевого уравнения РТГ (123). Используя для метрического тензора γ^{mn} значение (221), для связности γ^q_{mn} — выражение (222), а для $g^{pl}(\xi)$ — значения согласно выражению интервала (260)

$$\left.\begin{aligned} &g^{00}(\xi) = 1; \quad g^{11}(\xi) = -e^{-\omega}; \quad g^{22}(\xi) = -B^{-2}; \\ &g^{33}(\xi) = -B^{-2}\sin^{-2}\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (270)$$

из (268) находим

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(e^{\frac{\omega}{2}} B^2 \frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(e^{-\frac{\omega}{2}} B^2 \frac{\partial t}{\partial R}\right); \qquad (271)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(e^{\frac{\omega}{2}} B^2 \frac{\partial r}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(e^{-\frac{\omega}{2}} B^2 \frac{\partial r}{\partial R}\right) - 2re^{\frac{\omega}{2}}. \qquad (272)$$

Теперь воспользуемся уравнениями Гильберта — Эйнштейна вне вещества

$$R_{mn} = 0.$$

В терминах $\omega\ (R,\ \tau)$ и $B\ (R,\ \tau)$ они имеют вид:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial R}\right)^2 - e^{\omega} - \left(\left(\frac{\partial B}{\partial \tau}\right)^2 + 2B\frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2}\right) e^{\omega} = 0; \tag{273}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial R^2} - \frac{1}{2} B e^{\omega}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \tau}\right)^2\right) - e^{\omega}\frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial R}\,\frac{\partial \omega}{\partial R} + e^{\omega}\frac{\partial B}{\partial \tau}\,\frac{\partial \omega}{\partial \tau}\right) = 0; \tag{274}$$

$$2\left(\left(\frac{\partial B}{\partial R}\right)^2 + B\frac{\partial^2 B}{\partial R^2}\right) - e^{\omega} - \left(\frac{\partial B}{\partial R}\right)^2 - B\frac{\partial B}{\partial R}\,\frac{\partial \omega}{\partial R} - \left(B\frac{\partial B}{\partial \tau}\,\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial B}{\partial \tau}\right)^2\right) e^{\omega} = 0. \tag{275}$$

Решения этой системы были найдены в [41, 44] и равны

$$B\ (R,\ \tau) = [R^{3/2} - b\tau]^{2/3}; \tag{276}$$

$$\omega\,(R,\ \tau) = \ln R - \frac{2}{3}\ln\,(R^{3/2} - b\tau). \tag{277}$$

Постоянная b определяется из решения системы уравнений Гильберта — Эйнштейна внутри вещества.

Из (276) и (277) легко показать, что

$$(\partial B/\partial R)^2 = e^{\omega}\ . \tag{278}$$

Поэтому на функциях (276), (277) система уравнений (271), (272) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial B}{\partial R} B^2 \frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\left(\frac{\partial B}{\partial R}\right)^{-1} B^2 \frac{\partial t}{\partial R}\right); \tag{279}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial B}{\partial R} B^2 \frac{\partial r}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\left(\frac{\partial B}{\partial R}\right)^{-1} B^2 \frac{\partial r}{\partial R}\right) - 2r\frac{\partial B}{\partial R}. \tag{280}$$

Решения уравнений (279) и (280) устанавливают явную связь координат сопутствующей системы отсчета R и τ с координатами пространства Минковского r и t.

В уравнениях (279), (280) перейдем от переменных R, τ к переменным R, B. Тогда, как показано в [43], решение системы (279) и (280) в переменных R и B может быть представлено в виде

$$t = \frac{1}{b} R^{3/2} + \frac{3}{2b}\int \frac{B^{3/2}\,dB}{\left[\left(\frac{2}{3}\,b\right)^2 - B\right]}; \tag{281}$$

$$r = B - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\,b\right)^2. \tag{282}$$

На основании формул (276), (278), (281) и (282) в силу тензорного закона преобразований для метрических коэффициентов интервала (256) найдем:

$$\left.\begin{aligned} & g_{00}(r,\ t)=\frac{r-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b\right)^2}{r+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b\right)^2};\ g_{01}=0;\\ & g_{11}=-\frac{r+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b\right)^2}{r-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b\right)^2};\quad g_{22}=-\left[r+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b\right)^2\right]^2;\\ & g_{33}=-\left[r+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b\right)^2\right]^2\sin^2\theta. \end{aligned}\right\} \quad (283)$$

Следовательно, в переменных r и t интервал (256) примет вид (251), если положить

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b\right)^2=a, \qquad (284)$$

где в силу принципа соответствия a равна активной гравитационной массе m рассматриваемого тела.

13. ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС

В рамках ОТО приходят к выводу [см. например 18, 42, 45], что если массивная звезда, исчерпав ядерное горючее, не потеряла достаточного количества массы, то никакие силы уже не смогут остановить ее дальнейшее сжатие под действием тяготения и плотность звезды будет стремиться к бесконечности за конечное собственное время. Такой процесс эволюции звезды называют гравитационным коллапсом. Гравитационный коллапс и возникающую сингулярность Уилер рассматривал как «один из величайших кризисов всех времен» фундаментальной физики.

В этом разделе, следуя [43], мы покажем, что РТГ принципиально изменяет весь характер гравитационного коллапса и приводит к явлению гравитационного сдерживания, благодаря которому сжатие массивного тела в сопутствующей системе отсчета останавливается за конечное собственное время и, что самое главное, при этом плотность вещества остается конечной.

Таким образом, предсказание РТГ в корне отличается от предсказания ОТО.

Приведем кратко результаты о коллапсе, которые следуют из ОТО. В сопутствующей системе отсчета для сферически-симметричного тела интервал записывается в форме (260).

В предположении, что давление равно нулю, в [44] найдено точное решение системы уравнений Гильберта — Эйнштейна. Оно имеет вид:

$$B=R\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2/3},\quad R\leqslant R_0; \tag{285}$$

$$B=\left(R^{\frac{3}{2}}-R_0^{\frac{3}{2}}\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2/3},\quad R\geqslant R_0; \tag{286}$$

$$e^{\omega}=\left(\frac{\partial B}{\partial R}\right)^2,$$

где

$$R_0^3=\frac{9}{2}m\tau_0^2. \tag{287}$$

Здесь m — активная гравитационная масса рассматриваемого тела. Из (285), (286) следует, что область изменения τ ограничена сверху значением $\tau=\tau_0$, а для величины $B(R,\tau)$ допустимы все значения от 0 до ∞.

Для плотности вещества в сопутствующей системе отсчета получается формула

$$\varepsilon=\frac{1}{6\pi(\tau-\tau_0)^2}, \tag{288}$$

откуда видно, что коллапс вещества происходит за конечное собственное время τ_0, т.е. плотность вещества ε достигает бесконечного значения за конечный промежуток собственного времени.

По концепции РТГ для гравитационного поля естественной геометрией является геометрия пространства Минковского. Это означает, что компоненты гравитационного поля или в силу связи (121) компоненты метрического тензора риманова пространства g^{mn} помимо уравнений Гильберта — Эйнштейна подчиняются всеобщим полевым уравнениям [см. (123)]:

$$D_m\tilde{g}^{mn}=0.$$

Следовательно, для изучения любой задачи в РТГ необходимо найти совместное решение, удовлетворяющее как первой системе (154), так и второй системе уравнений (154). Это приводит к тому, что собственные переменные R и τ будут функциями переменных пространства Минковского.

В разд. 12 нами уже была найдена эта связь для области $R\geqslant R_0$ и она выражена через формулы (281) и (282). Запишем их явно с учетом (252) и (284)

$$t=\frac{2}{3\sqrt{2m}}[R^{3/2}-B^{3/2}]-2\sqrt{2mB}+2m\ln\frac{\sqrt{B}+\sqrt{2m}}{\sqrt{B}-\sqrt{2m}}; \tag{289}$$

$$r=B-m. \tag{290}$$

Заметим, что (289) точно совпадает с формулой, полученной в [44] из других соображений.

Из (289) непосредственно видно, что при $R \geqslant R_0$ РТГ ограничивает область изменения $B(R, \tau)$ снизу:

$$B(R, \tau) \geqslant 2m, \tag{291}$$

причем точка $B = 2m$ соответствует бесконечному значению переменной t.

На основании (286) и (291) заключаем, что τ никогда не достигает значения τ_0.

С точки зрения внешнего наблюдателя, например, поверхность сферической звезды «радиуса» $R = R_0$ будет приближаться к шварцшильдовой сфере радиусом $B(R_0, \tau) = 2m$ за бесконечное время t, а с точки зрения сопутствующей системы отсчета этот процесс будет происходить за конечное собственное время τ_c, равное

$$\tau_c = \left[1 - \left(\frac{2m}{R_0}\right)^{3/2}\right]\tau_0. \tag{292}$$

Последняя формула легко получается из (286), если учесть (291).

Таким образом, уравнения РТГ (123) ограничивают область изменения собственного времени τ

$$\tau \leqslant \tau_c < \tau_0.$$

Теперь вычислим предельное значение плотности ε. В формуле (288) мы можем воспользоваться выражением (292) для τ_c, поскольку оно справедливо для $R = R_0$. Тогда

$$\varepsilon_{\text{макс}} = 3/32\pi m^2. \tag{293}$$

Отсюда видно, что плотность ε не обращается в бесконечность в силу того, что новые полевые уравнения (123) с необходимостью запрещают собственному времени τ достигать значения τ_0. Следовательно, в сопутствующей системе отсчета процесс останавливается при конечном времени

$$\tau = \tau_c.$$

С точки зрения внешней системы отсчета яркость объекта экспоненциально уменьшается (он чернеет), однако при этом с ним ничего необычного не происходит, так как плотность вещества всегда остается конечной. Например, для массы тела порядка $10^8\ M_\odot$ она равна 2 г/см^3.

Несмотря на то, что гравитационное сжатие массивного тела до размера радиуса Шварцшильда происходит за конечное собственное время $\tau_c < \tau_0$, это отнюдь не означает, что какие-либо объекты в настоящее время могут достигать такого состояния. В РТГ это в принципе невозможно, так как такое состояние является предельным и достигается при условии, когда время t в пространстве Минковского равно бесконечности. Возможность существования реликтовых объектов такого типа не исключается.

Приведем теперь анализ системы уравнений (279) и (280) внутри тела. Напомним, что эта система получена из (123).

Внутри тела следовало бы учесть зависимость в ε не только от τ, но и от R. Но это сильно усложнило бы нахождение точного решения, и поэтому для методических целей рассмотрим простой случай, когда ε зависит только от τ, а значит, решения системы уравнений Гильберта — Эйнштейна внутри тела имеют вид (285) и (278).

Потребуем, чтобы (285) и (278) как функции координат пространства Минковского удовлетворяли системе уравнений (279) и (280). Решая эту систему, мы тем самым найдем явную связь между координатами сопутствующей системы R, $B(R, \tau)$ и координатами пространства Минковского r, t внутри тела.

Как показано в [43], эти решения имеют вид:

$$t=\frac{\xi}{2R\eta}\left[\frac{v_0(\xi+R_0-R)}{\xi+R_0-R}+\frac{v_0(\xi-R_0+R)}{\xi-R_0+R}\right]-\frac{(R_0-R)}{2R\eta}\int\limits_{\xi-R_0+R}^{\xi+R_0-R} dz\,\frac{v_0(z)}{z^2}-$$

$$-\frac{1}{R\eta}\int\limits_{\xi-R_0+R}^{\xi+R_0-R} dz\,\omega_0(z)\,\frac{\xi^2-(R_0-R)^2+z^2}{4z^2}; \qquad (294)$$

$$r=B+\frac{m}{2R_0^3}R^3-\frac{3m}{2R_0}R. \qquad (295)$$

Для сокращения записи в (294) введены следующие обозначения:

$$\eta=(1-\tau/\tau_0);\quad \xi=3\tau_0\eta^{1/3}; \qquad (296)$$

$$v_0(z)=R_0^2\left(\frac{z}{3\tau_0}\right)^3\left\{\frac{2m}{R_0}\ln\frac{z+2R_0}{z-2R_0}+\frac{2}{3}\left(\frac{R_0}{2m}\right)^{1/2}\left[1-\left(\frac{z}{3\tau_0}\right)^3\right]-\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{2m}{R_0}\right)^{1/2}\frac{z}{3\tau_0}\right\}; \qquad (297)$$

$$\omega_0(z)=\frac{1}{R_0}v_0(z)-2\left(\frac{R_0}{3\tau_0}\right)^2\frac{z^3}{z^2-(2R_0)^2}. \qquad (298)$$

При $R=R_0$ решения (294) и (295) переходят в решения (289) и (290) соответственно, и поэтому достаточно проанализировать формулы (294), (295) в области $R<R_0$. Поскольку t должно быть вещественным, из (294) и (296)—(298) находим

$$\xi\geqslant\xi_{\text{мин}}=3R_0-R\geqslant 2R_0\ \left(R_0>\frac{9}{2}m\right). \qquad (299)$$

Максимальное же значение, допустимое для ξ, определяется из (296) и равно $3\tau_0$. Из (294) может быть показано, что при $\xi\to\xi_{\text{мин}}$, t стремится к бесконечности по закону

$$t_{\xi\to\xi_{\text{мин}}}=\frac{\tau_0}{R(\tau_0-\tau)}\left(\frac{R_0}{3\tau_0}\right)^3(3R_0-R)(4m+3\tau_0)\ln\frac{1}{\xi-\xi_{\text{мин}}(R)}.$$

Для различных значений R мы будем иметь различные значения предельного собственного времени $\tau_c(R)$ и, значит, различные предельные плотности ε, соответствующие бесконечному значению переменной t. Это означает, что предельная плотность является функцией радиальной переменной R. Разумеется, наше исследование решения задачи внутри тела имеет только методический интерес. Оно демонстрирует только то, что ограничение для τ, которое возникает при решении уравнений РТГ для внешней задачи, также имеет место и для внутренней задачи. Таким образом, если сохранить название «гравитационный коллапс», то необходимо изменить его физическое содержание, поскольку в РТГ, в отличие от ОТО, оно не ведет к бесконечному значению плотности вещества. Так как плотность вещества в коллапсирующей звезде не очень велика, а в ряде случаев даже мала, ее внутренняя область может быть в принципе наблюдаема из внешней системы отсчета.

Мы рассмотрели модель, когда давление равно нулю, и даже в этом случае отсутствует катастрофически сильное сжатие вещества. В реальных же объектах, надо полагать, процесс гравитационного сжатия будет еще слабее. Поэтому согласно РТГ никаких объектов (черных дыр), в которых происходит гравитационное сжатие вещества до бесконечной плотности, в природе не может быть.

В РТГ возникает новое явление — гравитационное сдерживание. Благодаря именно гравитационному сдерживанию, с учетом механизма образования нейтронных звезд, в природе не могут возникать объекты с плотностью более чем 10^{16} г/см^3. Объекты с бо́льшей плотностью, если они вообще существуют в природе, могут иметь только реликтовое происхождение. Для изучения эволюции коллапсирующего объекта необходимо детальное изучение процессов, происходящих внутри них, с учетом уравнения состояния.

Таким образом, в РТГ в принципе не возникает при гравитационном сжатии сингулярности, а следовательно и отсутствует «величайший кризис всех времен» фундаментальной физики.

14. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ НЕСТАТИЧЕСКОГО, СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В РТГ. ТЕОРЕМА БИРКГОФФА

В общей теории относительности доказывается, что внешнее для нестатического, сферически-симметричного тела гравитационное поле сводится к статическому гравитационному полю, задаваемому метрикой Шварцшильда (255). Это утверждение было доказано Биркгоффом [46]. Однако, как было отмечено в разд. 12, метрика Шварцшильда не удовлетворяет уравнениям РТГ, поэтому возникает необходимость доказательства аналогичной теоремы в рамках РТГ. Следуя [47], ниже покажем, что внешнее гравитационное поле нестатического, сферически-симметричного тела в РТГ статично.

Пусть интервал имеет вид (260). Тогда функции $\omega(\tau, R)$ и $B(\tau, R)$ вне области рассматриваемого тела удовлетворяют следующим уравнениям Гильберта — Эйнштейна:

$$e^{\omega(\tau, R)} = \frac{1}{1+f(R)} \left(\frac{\partial B}{\partial R}\right)^2; \quad \left(\frac{\partial B}{\partial \tau}\right)^2 = f(R) + \frac{2m}{B}, \tag{300}$$

где $f(R) > -1$ — произвольная функция переменной R, а m — положительное постоянное число.

Заметим, что совокупность переменных (τ, R, θ, φ), используемых в представлении (260) для интервала ds^2, является сопутствующими координатами $\xi^i = (\tau, R, \theta, \varphi)$ (см. разд. 12).

Чтобы найти решения, удовлетворяющие не только уравнениям (300), но также и уравнениям РТГ вида (123), нам необходимо перейти от сопутствующих координат к координатам пространства Минковского

$$x^i = (t, r, \theta, \varphi)$$

с помощью замены

$$t = t(\tau, R) \text{ и } r = r(\tau, R), \tag{301}$$

а интервал ds^2 записать в виде

$$ds^2 = g_{tt}\, dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 - B^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \tag{302}$$

В силу тензорного закона преобразования на основании (301) может быть установлена следующая связь между метрическими коэффициентами представлений (260) и (302):

$$\left.\begin{aligned} g^{tt} &= \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial t}{\partial R}\right)^2 e^{-\omega}; \quad g^{tr} = \frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial r}{\partial \tau} - \frac{\partial t}{\partial R}\frac{\partial r}{\partial R} e^{-\omega}; \\ g^{rr} &= \left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 e^{-\omega}; \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{B^2}; \quad g^{\varphi\varphi} = -\frac{1}{B^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned}\right\} \tag{303}$$

Тогда из (123) получим уравнения вида:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[B^2 e^{\frac{\omega}{2}} \frac{\partial t}{\partial \tau}\right] = \frac{\partial}{\partial R}\left[B^2 e^{-\frac{\omega}{2}} \frac{\partial t}{\partial R}\right]; \tag{304}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[B^2 e^{\frac{\omega}{2}} \frac{\partial r}{\partial \tau}\right] = \frac{\partial}{\partial R}\left[B^2 e^{-\frac{\omega}{2}} \frac{\partial r}{\partial R}\right] - 2r e^{\frac{\omega}{2}}. \tag{305}$$

Заметим, что система уравнений (300), (304) и (305) при $f(R) = 0$ совпадает с системой уравнений (278)—(280).

Теперь найдем решения уравнений (304) и (305) для любых значений $f > -1$. Будем искать метрику g^{ik} (303), стационарную по переменной t:

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}(x) = 0. \tag{306}$$

Переходя в (306) к дифференцированию по τ и R, получаем

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial \tau}\frac{\partial r}{\partial R}=\frac{\partial g^{ik}}{\partial R}\frac{\partial r}{\partial \tau}. \qquad (307)$$

Отсюда при $(i,\ k) = (\theta,\ \theta)$ найдем:

$$\frac{\partial B}{\partial \tau}\frac{\partial r}{\partial R}=\frac{\partial B}{\partial R}\frac{\partial r}{\partial \tau},$$

что дает $r = r(B)$. Поэтому решение уравнений (305) ищем в виде $r = r(B)$. Тогда получим

$$\frac{\partial^2 r}{\partial B^2}(B^2-2mB)+\frac{\partial r}{\partial B}(2B-2m)-2r=0;$$
$$B\geqslant 2m.$$

Это уравнение имеет единственное регулярное решение вида [15, 43]

$$r = B - m; \quad r\geqslant m. \qquad (308)$$

Так как g^{tt} в силу (306) должна быть функцией от r, а также полагая $g^{tr} = 0$ с учетом (303) и (308), получаем следующие соотношения для $\partial t/\partial\tau$ и $\partial t/\partial R$:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2-\left(\frac{\partial t}{\partial R}\right)^2\left(\frac{\partial B}{\partial R}\right)^{-2}(1+f)=g^{tt}(r)\equiv H(B);\\ \frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial B}{\partial \tau}-\frac{\partial t}{\partial R}\left(\frac{\partial B}{\partial R}\right)^{-1}(1+f)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (309)$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\sqrt{1+f}\,\Psi(B);\quad \frac{\partial t}{\partial R}=\frac{\partial B}{\partial \tau}\frac{\partial B}{\partial R}\frac{\Psi(B)}{\sqrt{1+f}}, \qquad (310)$$

где

$$\Psi(B)=H^{1/2}(B)\Big/\left(1-\frac{2m}{B}\right)^{1/2}.$$

Условие совместности системы (310)

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)=\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial t}{\partial R}\right)$$

позволяет определить функцию $\Psi(B)$, для которой получается уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial B}\left(1-\frac{2m}{B}\right)+\Psi\frac{2m}{B^2}=0.$$

Выбирая в качестве решения этого уравнения функцию

$$\Psi(B) = (1 - 2m/B)^{-1}, \qquad (311)$$

для $H(B)$ находим

$$H(B) = (1 - 2m/B)^{-1}.$$

Тогда из (310) получаем систему для функции t

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \sqrt{1+f}\left(1-\frac{2m}{B}\right)^{-1}; \\ \frac{\partial t}{\partial R} &= \frac{\partial B}{\partial \tau}\frac{\partial B}{\partial R}\left(1-\frac{2m}{B}\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+f}}. \end{aligned}\right\} \tag{312}$$

После квадратуры имеем:

$$t(B, R) = -\sqrt{1+f}\int^{B} dB'\left[\left(f+\frac{2m}{B'}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{2m}{B'}\right)^{-1}\right]. \tag{313}$$

Отсюда при $f > 0$ находим

$$t(B, R) = 2m\ln\frac{\operatorname{th}\frac{\eta}{2}+\operatorname{th} y}{\operatorname{th}\frac{\eta}{2}-\operatorname{th} y} + 2m\operatorname{cth} y\left[(\eta - \operatorname{sh}\eta)\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 y} - \eta\right],$$

где

$$f(R) \equiv \operatorname{sh}^2 y(R);\quad \operatorname{ch}\eta \equiv f\frac{B}{m}+1;$$

$$\operatorname{th}^2\frac{\eta}{2} - \operatorname{th}^2 y = \left(\frac{B}{2m}-1\right)\left(1+\frac{fB}{2m}\right)^{-1}\frac{f}{1+f}.$$

При $f = 0$ выражение для t упрощается и принимает вид (289), уже встречавшийся в разд. 13.

Явный вид $t(B, R)$, когда $f < 0$, мы не приводим из-за громоздкости выражений.

Подставляя (308) и (312) в (303), получаем искомое внешнее решение системы уравнений РТГ (283). Тогда для интервала ds^2 с учетом (284) находим

$$ds^2 = \frac{r-m}{r+m}dt^2 - \frac{r+m}{r-m}dr^2 - (r+m)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{251}$$

Но такое решение имеет статическое, сферически-симметричное тело (см. разд. 12). Следовательно, в РТГ теорема Биркгоффа справедлива: нестатический, сферически-симметричный источник создает вне тела статическое гравитационное поле.

15. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Одной из важнейших в теории гравитации является проблема излучения и приема гравитационных волн.

Всестороннее теоретическое изучение этой задачи сталкивается с рядом трудностей, связанных в основном с сильно нелинейным характером полевых уравнений. Последовательное исследование проблемы гравитационного излучения удается провести до конца лишь в приближении слабого поля. Никому еще не удавалось до сих пор обнаружить гравитационное излучение. Естественно ожидать, что в силу чрезвычайно малой интенсивности гравитационного излучения линеаризованные уравнения поля полностью удовлетворят потребности исследователей, изучающих гравитационные излучения, поступающие к нам от наблюдаемых во Вселенной источников.

Предположим, что во всем пространстве-времени, включая область, занимаемую источником, гравитационное поле $\Phi^{mn}(x)$ мало:

$$|\Phi^{mn}(x)| \ll 1. \tag{314}$$

Как было показано в разд. 11, в декартовой системе координат в приближении слабого поля обобщенная система уравнений РТГ (218) может быть представлена в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\Box\Phi^{mn} - m^2\Phi^{mn} = -16\pi \overset{(0)}{T}{}^{mn};\\ &\partial_m\Phi^{mn} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{315}$$

Если в действительности масса гравитона отлична от нуля, она должна быть очень малой и ее влияние может проявляться только в космологических масштабах.

В этом разделе мы намерены сравнить результаты ОТО и РТГ. Поэтому целесообразно рассмотреть систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\Box\Phi^{mn} = -16\pi \overset{(0)}{T}{}^{mn};\\ &\partial_m\Phi^{mn} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{316}$$

получающуюся из (315) при нулевой массе гравитона. Стоящая в правой части (316) величина $\overset{(0)}{T}{}^{mn}$ получается из тензора энергии-импульса Гильберта для вещества после замены в ней g^{mn} на γ^{mn} и ∇_n на ∂_n. Ковариантный закон сохранения (83) в приближении слабого поля принимает вид

$$\partial_m \overset{(0)}{T}{}^{mn} = 0. \tag{317}$$

Воспользуемся стандартной схемой решений уравнений (316). Представим тензоры $\Phi^{mn}(\mathbf{r}, t)$ и $\overset{(0)}{T}{}^{mn}(\mathbf{r}, t)$ через интегралы Фурье по времени:

$$\Phi^{mn}(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\Phi^{mn}(\mathbf{r}, \omega)\, d\omega; \tag{318}$$

$$\overset{(0)}{T}{}^{mn}(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\overset{(0)}{T}{}^{mn}(\mathbf{r}, \omega)\, d\omega. \tag{319}$$

В силу вещественности $\Phi^{mn}(\mathbf{r}, t)$ и $\overset{(0)}{T}{}^{mn}(\mathbf{r}, t)$ из (318) и (319) имеем

$$\overset{*}{\Phi}{}^{mn}(\mathbf{r}, \omega) = \Phi^{mn}(\mathbf{r}, -\omega); \quad \overset{(0)}{T}{}^{*mn}(\mathbf{r}, \omega) = \overset{(0)}{T}{}^{mn}(\mathbf{r}, -\omega).$$

Подставляя в первое уравнение системы (316) интегральные представления (318) и (319), получаем уравнение

$$(\Delta + \omega^2)\,\Phi^{mn}(\mathbf{r},\ \omega) = 16\pi \overset{(0)}{T}{}^{mn}(\mathbf{r},\ \omega), \tag{320}$$

решение которого хорошо известно:

$$\Phi^{mn}(\mathbf{r},\ \omega) = -4\int \frac{e^{i\omega R}}{R} \overset{(0)}{T}{}^{mn}(\mathbf{r}',\ \omega)\,dV. \tag{321}$$

Здесь

$$R = |\,\mathbf{r}' - \mathbf{r}\,|\,.$$

Для фурье-компонент $\Phi^{mn}(\mathbf{r},\ \omega)$ и $\overset{(0)}{T}{}^{mn}(\mathbf{r},\ \omega)$ из второго уравнения системы (316) и (317) находим

$$i\omega\Phi^{0n}(\mathbf{r},\ \omega) = \partial_\alpha \Phi^{\alpha n}(\mathbf{r},\ \omega); \tag{322}$$

$$i\omega \overset{(0)}{T}{}^{0n}(\mathbf{r},\ \omega) = \partial_\alpha \overset{(0)}{T}{}^{\alpha n}(\mathbf{r},\ \omega). \tag{323}$$

Здесь и далее греческие индексы принимают значения от 1 до 3 включительно. На основании (322) легко выразить $\Phi^{0n}(\mathbf{r},\ \omega)$ через пространственные компоненты $\Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ \omega)$:

$$\Phi^{00}(\mathbf{r},\ \omega) = -\frac{1}{\omega^2}\partial_\alpha\partial_\beta\Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ \omega); \tag{324}$$

$$\Phi^{0\alpha}(\mathbf{r},\ \omega) = -\frac{i}{\omega}\partial_\beta\Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ \omega). \tag{325}$$

Таким образом, решение системы уравнений РТГ (321) имеет только шесть независимых компонент.

Пространственные компоненты коэффициентов Фурье $\Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ \omega)$ удобно записать в форме, которая позволит нам позже наглядно показать квадрупольный характер поля $\Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ t)$. С учетом (323) формулу (321) для пространственных компонент представим в следующем виде:

$$\Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ \omega) = 2\omega^2\left\{\int \frac{e^{i\omega R}}{R}\overset{(0)}{T}{}^{00}(\mathbf{r}',\ \omega)\,x'^\alpha x'^\beta\,dV + \right.$$
$$+\frac{2i}{\omega}\partial_\sigma\int\frac{e^{i\omega R}}{R}\overset{(0)}{T}{}^{0\sigma}(\mathbf{r}',\ \omega)\,x'^\alpha x'^\beta\,dV -$$
$$\left.-\frac{1}{\omega^2}\partial_\sigma\partial_\tau\int\frac{e^{i\omega R}}{R}\overset{(0)}{T}{}^{\sigma\tau}(\mathbf{r}',\ \omega)\,x'^\alpha x'^\beta\,dV\right\}. \tag{326}$$

Теперь воспользуемся произволом в решении системы уравнений (316). В приближении слабого поля $\overset{(0)}{T}{}^{mn}(\mathbf{r},\ t)$ не зависит от $\Phi^{mn}(\mathbf{r},\ t)$. Поэтому если $\Phi^{mn}(\mathbf{r},\ t)$ является решением системы уравнений (316), то решением этой же системы будет и величина

$$\Phi'^{mn}(\mathbf{r},\ t) = \Phi^{mn}(\mathbf{r},\ t) + \partial^m a^n(\mathbf{r},\ t) + \partial^n a^m(\mathbf{r},\ t) -$$
$$-\gamma^{mn}\partial_k a^k(\mathbf{r},\ t), \tag{327}$$

где 4-вектор $a^n(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Box\, a^n(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{328}$$

Здесь уместно подчеркнуть, что (327) является калибровочным преобразованием и не имеет никакого отношения к преобразованиям координат.

Помимо (328) на $a^n(\mathbf{r}, t)$ следует наложить условие, гарантирующее слабость поля $\Phi'^{mn}(\mathbf{r}, t)$. Это означает, что для $\partial^m a^n(\mathbf{r}, t)$ необходимо потребовать выполнения неравенства

$$|\partial^m a^n(\mathbf{r}, t)| \ll 1. \tag{329}$$

Тогда наблюдаемые физические величины в приближении слабого поля на равных правах могут быть вычислены как на основе $\Phi^{mn}(\mathbf{r}, t)$, так и на основе $\Phi'^{mn}(\mathbf{r}, t)$.

Из (327) и (328) для фурье-коэффициентов находим

$$\Phi'^{00}(\mathbf{r}, \omega) = \Phi^{00}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega a^0(\mathbf{r}, \omega) - \partial_\alpha a^\alpha(\mathbf{r}, \omega); \tag{330}$$

$$\Phi'^{0\alpha}(\mathbf{r}, \omega) = \Phi^{0\alpha}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega a^\alpha(\mathbf{r}, \omega) + \partial^\alpha a^0(\mathbf{r}, \omega); \tag{331}$$

$$\begin{aligned}\Phi'^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = \Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) + \partial^\alpha a^\beta(\mathbf{r}, \omega) + \partial^\beta a^\alpha(\mathbf{r}, \omega) -\\ - \gamma^{\alpha\beta}(\partial_\sigma a^\sigma(\mathbf{r}, \omega) - i\omega a^0(\mathbf{r}, \omega));\end{aligned} \tag{332}$$

$$(\omega^2 - \partial_\alpha\partial^\alpha)\, a^n(\mathbf{r}, \omega) = 0. \tag{333}$$

Выберем 4-вектор $a^n(\mathbf{r}, \omega)$ таким образом, чтобы обратились в нуль компоненты $\Phi'^{0\alpha}(\mathbf{r}, \omega)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ и след поля $\Phi'^{mn}(\mathbf{r}, \omega)$, равный $\Phi'^0_0(\mathbf{r}, \omega) + \Phi'^\alpha_\alpha(\mathbf{r}, \omega)$. Условия такого вида для поля $\Phi'^{mn}(\mathbf{r}, \omega)$ называют TT-калибровкой.

На основании формул (324), (325) и (330)—(333) можно показать, что поле $\Phi'^{mn}(\mathbf{r}, \omega)$ будет удовлетворять условиям TT-калибровки, если

$$a^0(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{i}{2\omega}\left[\Phi^{00}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{1}{2}\Phi^n_n(\mathbf{r}, \omega)\right]; \tag{334}$$

$$a^\alpha(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{i}{\omega}\Phi^{0\alpha}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{1}{2\omega^2}\partial^\alpha\left[\Phi^{00}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{1}{2}\Phi^n_n(\mathbf{r}, \omega)\right]. \tag{335}$$

Учитывая выражения (334) и (335), из (332) для $\Phi'^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega)$ вне вещества найдем

$$\begin{aligned}\Phi'^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{1}{\omega^2}(\partial^\alpha\partial_\sigma S^{\sigma\beta}(\mathbf{r}, \omega) + \partial^\beta\partial_\sigma S^{\alpha\sigma}(\mathbf{r}, \omega)) +\\ + \frac{1}{2\omega^2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\sigma\partial_\tau S^{\sigma\tau}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{2\omega^4}\partial^\alpha\partial^\beta\partial_\sigma\partial_\tau S^{\sigma\tau}(\mathbf{r}, \omega),\end{aligned} \tag{336}$$

где введено обозначение

$$S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = \Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}\Phi^\sigma_\sigma(\mathbf{r}, \omega). \tag{337}$$

В (337) $\gamma^{\alpha\beta}$ является пространственной частью метрики Минковского с элементами -1 на диагонали. Легко заметить, что $S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega)$ — бесследовый тензор, т. е.

$$\gamma_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \tag{338}$$

Вернемся теперь к решению (326). Разлагая R^{-1} по степеням r^{-1}, где r — расстояние от центра источника до точки наблюдения поля, и предполагая, что линейные размеры источника значительно меньше чем r, из (326) находим:

$$\Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2\omega^2}{r}\int dV e^{i\omega R} x'^{\alpha} x'^{\beta} \big(\overset{(0)}{T}{}^{00}(\mathbf{r}', \omega) + 2e_\sigma \overset{(0)}{T}{}^{0\sigma}(\mathbf{r}', \omega) + \\ + e_\sigma e_\tau \overset{(0)}{T}{}^{\sigma\tau}(\mathbf{r}', \omega)\big). \tag{339}$$

Здесь $e^\sigma = \frac{x^\sigma}{r'}$, $e_\sigma e^\sigma = -1$. При переходе от (326) к (339) мы опустили неволновые члены, убывающие быстрее, чем r^{-1}. Подставляя (339) в (337), получаем

$$S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2\omega^2}{r}\int dV e^{i\omega R}\left(x'^{\alpha}x'^{\beta} - \frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}x'_\sigma x'^\sigma\right) \times \\ \times [\overset{(0)}{T}{}^{00}(\mathbf{r}', \omega) + 2e_\sigma \overset{(0)}{T}{}^{0\sigma}(\mathbf{r}', \omega) + e_\sigma e_\tau \overset{(0)}{T}{}^{\sigma\tau}(\mathbf{r}', \omega)]. \tag{340}$$

Нетрудно показать, что с точностью до членов порядка r^{-2} имеют место соотношения:

$$\partial_\sigma S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega e_\sigma S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega);$$
$$\partial^\sigma S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega e^\sigma S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega).$$

Это позволяет переписать (336) в виде

$$\Phi'^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) + e^\alpha e_\sigma S^{\sigma\beta}(\mathbf{r}, \omega) + e^\beta e_\sigma S^{\sigma\alpha}(\mathbf{r}, \omega) - \\ - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}e_\sigma e_\tau S^{\sigma\tau}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{2}e^\alpha e^\beta e_\sigma e_\tau S^{\sigma\tau}(\mathbf{r}, \omega). \tag{341}$$

Введя операторы проектирования

$$P^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + e^\alpha e_\beta, \tag{342}$$

удовлетворяющие условиям

$$P^\alpha_\alpha = 2; \quad P^\alpha_\sigma P^\sigma_\beta = P^\alpha_\beta, \tag{343}$$

формулу (341) представим в компактной форме:

$$\Phi'^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \omega) = \left[P^\alpha_\tau P^\beta_\sigma - \frac{1}{2}P^{\alpha\beta}P_{\tau\sigma}\right]S^{\sigma\tau}(\mathbf{r}, \omega). \tag{344}$$

Взяв фурье-интеграл от обеих частей равенства (344), получим

$$\Phi'^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ t)=\left(P^{\alpha}_{\tau}P^{\beta}_{\sigma}-\frac{1}{2}P^{\alpha\beta}P_{\tau\sigma}\right)S^{\sigma\tau}(\mathbf{r},\ t), \tag{345}$$

где $S^{\sigma\tau}(\mathbf{r},\ t)$ в силу (340) имеет вид

$$S^{\sigma\tau}(\mathbf{r},\ t)=-\frac{2}{r}\frac{d^2}{dt^2}\int dV\left(x'^{\sigma}x'^{\tau}-\frac{1}{3}\gamma^{\sigma\tau}x'_{\alpha}x'^{\alpha}\right)\times$$
$$\times[\overset{(0)}{T}{}^{00}(\mathbf{r}',\ t')+2e_{\alpha}\overset{(0)}{T}{}^{0\alpha}(\mathbf{r}',\ t')+e_{\alpha}e_{\beta}\overset{(0)}{T}{}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}',\ t')]_{\text{ret}}. \tag{346}$$

Здесь и в дальнейшем знак ret под интегралом означает, что выражение в квадратной скобке следует брать в запаздывающий момент времени $t'=t-R/c$.

Определим бесследовый тензор обобщенного квадрупольного момента $\mathscr{D}^{\alpha\beta}$ равенством

$$\mathscr{D}^{\alpha\beta}=D^{\alpha\beta}+2e_{\sigma}D^{\alpha\beta\sigma}+e_{\sigma}e_{\tau}D^{\alpha\beta\sigma\tau}, \tag{347}$$

где

$$D^{\alpha\beta}=\int dV\,(3x'^{\alpha}x'^{\beta}-\gamma^{\alpha\beta}x'_{\sigma}x'^{\sigma})\,[\overset{(0)}{T}{}^{00}(\mathbf{r}',\ t')]_{\text{ret}}; \tag{348}$$

$$D^{\alpha\beta\sigma}=\int dV\,(3x'^{\alpha}x'^{\beta}-\gamma^{\alpha\beta}x'_{\tau}x'^{\tau})\,[\overset{(0)}{T}{}^{0\sigma}(\mathbf{r}',\ t')]_{\text{ret}}; \tag{349}$$

$$D^{\alpha\beta\sigma\tau}=\int dV\,(3x'^{\alpha}x'^{\beta}-\gamma^{\alpha\beta}x'_{\nu}x'^{\nu})\,[\overset{(0)}{T}{}^{\sigma\tau}(\mathbf{r}',\ t')]_{\text{ret}}. \tag{350}$$

Тогда из (346) вытекает

$$S^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ t)=-\frac{2}{3r}\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{D}^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ t). \tag{351}$$

Подставляя (351) в (345), для поля $\Phi'^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ \omega)$, удовлетворяющего TT-калибровке, получаем вне вещества основную формулу:

$$\Phi'^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\ t)=-\frac{2}{3r}\left(P^{\alpha}_{\sigma}P^{\beta}_{\tau}-\frac{1}{2}P^{\alpha\beta}P_{\sigma\tau}\right)\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{D}^{\sigma\tau}(\mathbf{r},\ t). \tag{352}$$

Если для источника справедливы оценки

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}\overset{(0)}{T}{}^{00}\right|\gg\left|\frac{d^2}{dt^2}\overset{(0)}{T}{}^{0\tau}\right|\gg\left|\frac{d^2}{dt^2}\overset{(0)}{T}{}^{\tau\sigma}\right|,$$

то в (352) $\mathscr{D}^{\sigma\tau}(\mathbf{r},\ t)$ может быть заменено выражением:

$$D^{\sigma\tau}(\mathbf{r},\ t)=\int dV\,(3x'^{\sigma}x'^{\tau}-\gamma^{\sigma\tau}x'_{\nu}x'^{\nu})\left[\overset{(0)}{T}{}^{00}\left(\mathbf{r}',\ t-\frac{r}{c}\right)\right]. \tag{353}$$

В разд. 11, на основании связи (121), в приближении слабого поля для римановой метрики g^{mn} и детерминанта g нами были получены разложения (212) и (213). Из этих формул в первом порядке по полю Φ^{mn} следует, что

$$g = -1 - \Phi_k^k \tag{354}$$

и

$$g^{mn} = \gamma^{mn} - h^{mn}, \tag{355}$$

где

$$h^{mn} = -\Phi^{mn} + \frac{1}{2}\gamma^{mn}\Phi_k^k. \tag{356}$$

Если в (356) в качестве поля $\Phi^{mn}(\mathbf{r}, t)$ выбрано поле, удовлетворяющее TT-калибровке, то из (356), (352), (353) вытекает

$$h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{3r}\left(P_\sigma^\alpha P_\tau^\beta - \frac{1}{2}P^{\alpha\beta}P_{\sigma\tau}\right)\frac{d^2}{dt^2}D^{\sigma\tau}(\mathbf{r}, t). \tag{357}$$

Для полноты изложения изучим поляризационные свойства поля $h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$. Легко показать, что в силу (342) и (343) имеют место следующие четыре соотношения:

$$\gamma_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$e_\alpha h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \beta = 1, 2, 3.$$

Поэтому из шести компонент поля $h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ независимыми являются только две. Рассмотрим поле $h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ на значительном расстоянии от источника в направлении оси z, что отвечает выбору вектора e^σ в виде: $e^1 = e^2 = 0$, $e^3 = 1$. Для компонент $h^{\alpha\beta}$ тогда получим

$$h^{13} = h^{23} = h^{33} = 0; \quad h^{11} = -h^{22}. \tag{358}$$

Следовательно, в качестве независимых компонент поля $h^{\alpha\beta}$ могут быть выбраны h^{11} и h^{12}.

Установим теперь трансформационные свойства $h^{\alpha\beta}$ при вращении трехмерного пространства вокруг оси z на угол θ. Так как отличные от нуля элементы матрицы вращения вокруг оси z имеют вид

$$\Omega_1^1 = \cos\theta; \quad \Omega_1{}^2 = \sin\theta;$$

$$\Omega_2{}^1 = -\sin\theta; \quad \Omega_2^2 = \cos\theta; \quad \Omega_3^3 = 1,$$

из (358) находим

$$\begin{aligned} h'^{13} &= h'^{23} = h'^{33} = 0; \\ h'^{11} &= -h'^{22} = \cos 2\theta h^{11} - \sin 2\theta h^{12}; \\ h'^{12} &= \sin 2\theta h^{11} + \cos 2\theta h^{12}. \end{aligned} \tag{359}$$

Поскольку вне вещества поле $h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению, то этому же уравнению будет удовлетворять любая линейная комбинация компонент $h^{\alpha\beta}$. Рассмотрим следующие комбинации:

$$h_\pm = h^{11} \pm ih^{12}.$$

Для них из (359) находим закон преобразования

$$h'_{\pm} = e^{\pm 2i\theta} h_{\pm}. \tag{360}$$

Хорошо известно, что если волновая функция Ψ при повороте пространства на угол θ вокруг направления распространения волны преобразуется по закону

$$\Psi' = e^{i\lambda\theta}\Psi,$$

то Ψ является собственной функцией оператора спиральности $\hat{I}_\lambda$ с собственным значением, равным λ.

Следовательно, из (360) заключаем, что функции $h_{\pm}$ являются собственными функциями оператора $\hat{I}_\lambda$ и описывают состояние гравитационного поля со спиральностью $\lambda = \pm 2$ соответственно. Состояния гравитационного поля со спиральностью $\lambda = \pm 1$ и $\lambda = 0$ не имеют физического смысла, поскольку соответствующим калибровочным преобразованием они всегда могут быть обращены в нуль.

Таким образом, поле $h^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ вне вещества описывает физическое гравитационное поле, обладающее только спином 2 и спиральностью ± 2.

Теперь, следуя Эйнштейну [2, с. 631], приведем расчет интенсивности гравитационного излучения в рамках ОТО. Предложенный Эйнштейном метод расчета интенсивности и различные его модификации получили широкое распространение и приводятся во многих статьях и монографиях. В данной работе мы рассмотрим вариант, изложенный в книге Ландау и Лифшица [18]. Хорошо известно, что из уравнения Гильберта — Эйнштейна можно получить следующий дифференциальный закон сохранения:

$$\partial_n \left[-g\left(T^{mn} + \tau^{mn}\right)\right] = 0, \tag{361}$$

где $\tau^{nm} = \tau^{mn}$ — псевдотензор гравитационного поля. Интегрируя (361) по некоторому достаточно большому объему и полагая, что поток вещества через поверхность, ограничивающую объем интегрирования, отсутствует, получаем:

$$\frac{d}{dt}\int (-g)\left[T^{0m} + \tau^{0m}\right] dV = -\oint (-g)\,\tau^{\alpha m}\, dS_\alpha. \tag{362}$$

По Эйнштейну [2, с. 645], правая часть соотношения (362) при $m = 0$ «наверняка представляет потерю энергии материальной системой», и, следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = -\oint (-g)\,\tau^{0\alpha}\, dS_\alpha. \tag{363}$$

Тогда «поток энергии» гравитационного излучения через элементарную площадку dS_α будет определяться формулой

$$dI = (-g)\,\tau^{0\alpha}\, dS_\alpha. \tag{364}$$

Если в качестве поверхности интегрирования выбрать сферу радиуса r $(dS_\alpha = -r^2 e_\alpha d\Omega)$, то для «интенсивности гравитационного излучения» в элементе телесного угла $d\Omega$ получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = -r^2(-g)\,\tau^{0\alpha} e_\alpha. \tag{365}$$

Вычисляя величину $(-g)\,\tau^{0\alpha}$ например, из псевдотензора Ландау — Лифшица [18, с. 360], в приближении слабого поля с использованием (354) и (355) в TT-калибровке найдем:

$$(-g)\,\tau^{0\alpha} = \frac{e^\alpha}{32\pi}\left(\frac{dh^{\mu\nu}}{dt}\right)\left(\frac{dh_{\mu\nu}}{dt}\right). \tag{366}$$

Отсюда формула для интенсивности гравитационного излучения в элементе телесного угла $d\Omega$ принимает вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{r^2}{32\pi}\left(\frac{dh^{\mu\nu}}{dt}\right)\left(\frac{dh_{\mu\nu}}{dt}\right). \tag{367}$$

После подстановки в (367) выражения (357) имеем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{36\pi}\left\{\frac{1}{4}(e_\alpha e_\beta \dddot{D}^{\alpha\beta})^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}^{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta} + e_\alpha e^\beta \dddot{D}_{\beta\sigma}\dddot{D}^{\sigma\alpha}\right\}. \tag{368}$$

Здесь и далее точки над D означают производные по времени t. Интегрируя (368) по угловым переменным с учетом соотношений

$$\int d\Omega e_\alpha e_\beta = -\frac{4\pi}{3}\gamma_{\alpha\beta};$$

$$\int d\Omega e_\alpha e_\beta e_\sigma e_\tau = \frac{4\pi}{15}(\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\tau} + \gamma_{\alpha\sigma}\gamma_{\beta\tau} + \gamma_{\alpha\tau}\gamma_{\beta\sigma}),$$

найдем известную квадрупольную формулу для «полного излучения», впервые установленную Эйнштейном в работе [2, с. 631]:

$$I = \frac{1}{45}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}. \tag{369}$$

Из нее очевидно, что

$$I > 0. \tag{370}$$

Следует, однако, особо подчеркнуть, что хотя формула (369) для интенсивности гравитационного излучения правильная, она не вытекает из ОТО. Действительно, воспроизведенный нами здесь вывод формулы (369) в ОТО основан на определении «потока энергии» посредством выражения (365). Последнее содержит величину $\tau^{0\alpha}$, не являющуюся тензором.

Анализ, проведенный в [6, 11], показал, что в ОТО в зависимости от выбора системы координат интенсивность гравитационного излучения (368) через каждый элемент сферической поверхности произвольного радиуса r, а следовательно, и полная интенсивность через всю сферу в течение любого конечного, наперед заданного промежутка времени могут быть как равными нулю, так и отрицательными, в противовес утверждениям Эйнштейна [2, с. 631].

Выбором допустимой системы отсчета в рамках ОТО, на основе выражения (365) в пределе слабого поля, были найдены следующие формулы для интенсивности гравитационного излучения под телесным углом $d\Omega$ и для полной интенсивности:

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{(1-a^2)}{36\pi}\left\{\frac{1}{4}\left(e_\alpha e_\beta \dddot{D}^{\alpha\beta}\right)^2+\frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}+e_\alpha e^\beta \dddot{D}_{\beta\sigma}\dddot{D}^{\sigma\alpha}\right\} \qquad (371)$$

и

$$I=\frac{(1-a^2)}{45}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}^{\alpha\beta}, \qquad (372)$$

где a — произвольная постоянная. Из (371) и (372) видно, что только при $a=0$ мы получаем формулы (368) и (369). Выбирая, в частности, для a значения, равные $+1$ или -1, найдем, что интенсивность гравитационного излучения $dI/d\Omega$, а также полная интенсивность обратятся в нуль.

Таким образом, мы приходим к заключению, что величины $dI/d\Omega$ и I, определяемые в ОТО согласно Эйнштейну на основе (365) соответствующим выбором допустимой системы координат, могут быть сделаны произвольными по знаку: положительными, отрицательными или равными нулю. Этот факт сам по себе физически бессмыслен, поскольку излучение как объективная физическая реальность не может быть уничтожено никаким допустимым преобразованием координат.

В отличие от ОТО, в рамках РТГ, как мы покажем ниже, не возникают подобные трудности, а формулы (368) и (369) являются строгими следствиями нашей теории.

В основу расчета интенсивности гравитационного излучения положим ковариантный закон сохранения РТГ в форме (185):

$$D_m\left(T^m_n+\overset{(0)}{t}{}^m_{(g)n}\right)=0.$$

В разд. 9 было показано, что такая запись ковариантного закона сохранения тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых, полностью эквивалентна ковариантному закону сохранения (102). Форма записи закона сохранения (185) выбрана нами из чисто технических соображений. Для $\overset{(0)}{t}{}^m_{(g)n}$ мы уже имеем представление (167), в котором явно выделен член *, являющийся ковариантной дивергенцией от антисимметричного по верхним индексам тензора K^{kp}_m и поэтому не дающий вклада в (185). С учетом (167) формула (185) может быть записана в виде

$$D_m\left(T^m_n+\tau^m_n\right)=0, \qquad (373)$$

* Члены, дивергенции от которых тождественно обращаются в нуль в силу их структуры, не приводят к закону сохранения каких-либо величин.

где

$$\tau_n^m = -\delta_n^m L_g + \frac{1}{16\pi}\left[\widetilde{G}_{pq}^m + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{mk}\widetilde{g}_{pq}\widetilde{G}_{kl}^l\right] D_n \widetilde{g}^{pq}. \tag{374}$$

Левая часть выражения (373), в отличие от (361), является истинным тензором, поскольку она есть ковариантная дивергенция по метрике Минковского от тензорных величин T_n^m и τ_n^m. Следовательно, расчет интенсивности (или других характеристик гравитационного поля), основанный на соотношении (373), не будет зависеть от выбора той или иной системы координат. Выбирая декартову систему отсчета, из (373) находим

$$\partial_m (T_n^m + \tau_n^m) = 0. \tag{375}$$

Интегрируя (375) по некоторому достаточно большому объему и полагая, что поток вещества через поверхность, ограничивающую объем интегрирования, отсутствует, получаем

$$\partial_0 \int (T_n^0 + \tau_n^0)\, dV = -\oint \tau_n^\alpha\, dS_\alpha. \tag{376}$$

Так как при $n = 0$ левая часть равенства (376) представляет собой потерю энергии системы, то поток энергии гравитационного излучения через элемент площади dS_α

$$dI = \tau_0^\alpha\, dS_\alpha. \tag{377}$$

Выбрав в качестве поверхности интегрирования сферу радиуса r придем к следующей формуле для интенсивности гравитационного излучения в элемент телесного угла — $d\Omega$:

$$dI/d\Omega = -r^2 \tau_0^\alpha\, dS_\alpha. \tag{378}$$

Чтобы найти явный вид интенсивности (378), необходимо вычислить τ_0^α в приближении слабого поля. Записав предварительно (374) в декартовых координатах и использовав разложения (354) и (355) в приближении слабого поля в TT-калибровке, найдем

$$\tau_0^\alpha = -\frac{1}{16\pi}\partial_0 h^{\sigma\tau}\partial_\sigma h_\tau^\alpha + \frac{1}{32\pi}\partial_0 h^{\sigma\tau}\partial^\alpha h_{\sigma\tau}. \tag{379}$$

Так как с точностью до членов $O(1/r^2)$ имеет место тождество

$$\partial^\alpha h_{\sigma\tau} \equiv e^\alpha \partial_0 h_{\sigma\tau}, \tag{380}$$

а в TT-калибровке

$$\partial_\alpha h^{\alpha\beta} = 0,$$

из (379) получим

$$\tau_0^\alpha e_\alpha = -\frac{1}{32\pi}\partial_0 h^{\sigma\tau}\partial_0 h_{\sigma\tau}. \tag{381}$$

Поэтому формула для интенсивности гравитационного излучения (378) принимает вид

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{r^2}{32\pi}\partial_0 h^{\alpha\beta}\partial_0 h_{\alpha\beta}.$$

Данное выражение с учетом (357) приведет нас к формулам (368) и (369).

Эйнштейн получил правильную формулу из-за того, что в декартовых координатах в РТГ выражения для тензора энергии-импульса совпадают с выражением для псевдотензора энергии-импульса Эйнштейна. При переходе к другим общим допустимым координатам это совпадение уже не имеет места, а потому и приводит в ОТО к возможности уничтожения гравитационного излучения выбором допустимой системы отсчета. Это с физической точки зрения свидетельствует о логической противоречивости ОТО.

16. ОДНОРОДНАЯ И ИЗОТРОПНАЯ ВСЕЛЕННАЯ. ОГРАНИЧЕНИЕ НА МАССУ ГРАВИТОНА

В этом разделе, на основе уравнений (218), рассмотрим однородную и изотропную Вселенную. Интервал для такой Вселенной, как обычно, представим в виде

$$ds^2 = c^2 U(t)\, dt^2 - V(t, r)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{382}$$

где

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

В выражении (382) (ct, x, y, z) являются координатами псевдоевклидова пространства и выбраны согласно значениям $(1, -1, -1, -1)$ метрики Минковского.

Входящие в (382) функции $U(t)$ и $V(t, r)$ при заданном распределении вещества следует определить из системы уравнений (218).

Для упрощения выкладок до сих пор мы использовали систему единиц, в которой $c = \hbar = G = 1$. В данном разделе мы вернемся к системе единиц CGS.

В дальнейшем удобно опираться на систему уравнений (218), записанных в смешанных координатах:

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{-g}\left(R^m_n-\frac{1}{2}\delta^m_n R\right)-\frac{\sqrt{-g}}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left[\delta^m_n+g^{mk}\gamma_{kn}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\delta^m_n g^{pk}\gamma_{pk}\right]=\varkappa T^m_n;\\
&\qquad\qquad D_m\tilde{g}^{mn}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{383}$$

В (383) введено обозначение $\varkappa = 8\pi G/c^2$.

В качестве T_n^m возьмем плотность тензора энергии-импульса идеальной жидкости [15]:

$$T_n^m = \sqrt{-g}\left[\left(\rho + \frac{1}{c^2}p\right)u^m u_n - \delta_n^m \frac{p}{c^2}\right], \tag{384}$$

где $\rho(t)$ — плотность; $p(t)$ — изотропное давление, а u^n — единичный 4-вектор скорости. Согласно (382) имеем:

$$g_{00} = U(t);\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -V(t, r);\ g_{mn} = 0;\ m \neq n; \tag{385}$$

$$g^{00} = \frac{1}{U(t)};\quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -\frac{1}{V(t, r)};\ g^{mn} = 0;\ m \neq n; \tag{386}$$

$$\sqrt{-g} = \sqrt{U(t)\,V^3(t, r)}.$$

Сначала рассмотрим условия, налагаемые вторым уравнением (383) на $U(t)$ и $V(t, r)$. В декартовой системе координат находим:

$$\partial_t \sqrt{U^{-1}(t)\,V^3(t, r)} = 0;\ \partial_x V^{\frac{1}{2}}(t, r) = \partial_y V^{\frac{1}{2}}(t, r) = \partial_z V^{\frac{1}{2}}(t, r) = 0.$$

Отсюда следует важный вывод: функция V не зависит от r и имеет место равенство

$$U(t) = V^3(t). \tag{387}$$

Следовательно, выражение для интервала (382) примет вид

$$ds^2 = c^2V^3(t)\,dt^2 - V(t)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{388}$$

Перейдя к собственному времени τ по формуле

$$V^{3/2}(t)\,dt = d\tau, \tag{389}$$

интервал (388) запишем в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2d\tau^2 - V(\tau)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \\ &= c^2d\tau^2 - V(\tau)\,(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2). \end{aligned} \tag{390}$$

Сравнивая (390) с хорошо известным общим выражением для интервала Робертсона — Уокера

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 - V(\tau)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2\right], \tag{391}$$

где постоянная k принимает значения $0,\ \pm 1$, приходим к заключению, что в РТГ постоянная k однозначно определяется, и ее значение равно нулю.

Таким образом, РТГ в силу уравнений (123) однозначно приводит к предсказанию: Вселенная бесконечна и является «плоской». Поскольку данное заключение является следствием только уравнений (123), этот общий вывод не зависит от значения массы покоя гравитона.

Теперь запишем первое уравнение (383) в терминах $V(t)$, $\rho(t)$ и $p(t)$. В силу (384), (385) и (387) находим:

$$\left(R_0^0-\frac{1}{2}R\right)=\varkappa\rho(t)+\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V^3}-\frac{3}{V}\right)\right]; \tag{392}$$

$$\left(R_1^1-\frac{1}{2}R\right)=-\frac{\varkappa}{c^2}p(t)+\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V^3}+\frac{1}{V}\right)\right]. \tag{393}$$

Параметризуя функцию $V(t)$ в виде

$$V(t)=e^{\mu(t)}$$

для левых частей уравнений (392) и (393), можно получить выражения:

$$\left(R_0^0-\frac{1}{2}R\right)=\frac{3}{4c^2}e^{-3\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2; \tag{394}$$

$$\left(R_1^1-\frac{1}{2}R\right)=\frac{1}{c^2}e^{-3\mu}\left[\frac{d^2\mu}{dt^2}-\frac{3}{4}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2\right]. \tag{395}$$

Перейдя по формуле (389) к собственному времени и полагая

$$e^{\mu(\tau)}=R^2(\tau),$$

получаем

$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2=\frac{1}{3}c^2\varkappa\rho(\tau)+\frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^6}-\frac{3}{R^2}\right)\right]; \tag{396}$$

$$\left(\frac{\ddot R}{R}\right)=-\frac{1}{3}\varkappa c^2\rho(\tau)-\frac{1}{2}\varkappa p(\tau)+\frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(1-\frac{1}{R^6}\right). \tag{397}$$

Здесь и далее точки над R означают производные по собственному времени τ.

Заметим, что выражение в квадратных скобках формулы (396) неотрицательно. Действительно, легко убедиться, что

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^6}-\frac{3}{R^2}\right)=\frac{1}{R^6}(R^2-1)^2\left(R^2+\frac{1}{2}\right)\geqslant 0.$$

В силу этого неравенства уравнение (396) определено для любого значения $R\geqslant 0$.

Введем обозначения

$$H(\tau)=\left(\frac{\dot R}{R}\right). \tag{398}$$

Для настоящего момента развития Вселенной $\tau=\tau_0$ величина $H(\tau_0)$ известна как «постоянная» Хаббла и она положительна. Следовательно, после извлечения корня из (396) необходимо перед корнем выбрать положительный знак:

$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)=\left[\frac{1}{3}\varkappa c^2\rho(\tau)+\frac{1}{6R^6}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2(R^2-1)^2\left(R^2+\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}. \tag{399}$$

Дифференцируя (399) по τ и учитывая (397), после некоторых преобразований получаем

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau} = -\frac{1}{3\left(\rho+\frac{1}{c^2}p\right)}\frac{d\rho}{d\tau}. \tag{400}$$

На основании уравнений (399) и (400) можно сделать ряд общих заключений относительно временного развития однородной и изотропной Вселенной.

Из (399) очевидно, что $\dot{R} > 0$. Следовательно, $R(\tau)$ является монотонно возрастающей функцией времени τ. Так как $\rho + (1/c^2)\,p > 0$, то из (400) имеем $d\rho/d\tau < 0$ и, значит, $\rho(\tau)$ — монотонно убывающая функция времени τ.

Если $m = 0$, а $\rho(\tau)$ для любого конечного значения τ отлична от нуля, то, как видно из (399) и (397), $\dot{R} > 0$, а «ускорение» $\ddot{R} < 0$. Следовательно, в этом случае график функции $R = R(\tau)$ монотонно возрастает и всегда является выпуклым вверх. Поэтому за конечное время $\tau_{\text{мин}}$ в прошлом $R(\tau)$ достигнет своего минимального значения $R_{\text{мин}}(\tau_{\text{мин}}) = 0$. Величина $\tau_{\text{мин}}$ в дальнейшем принята нами за начало отсчета собственного времени τ и поэтому можем положить $\tau_{\text{мин}} = 0$.

В том случае, когда масса гравитона m отлична от нуля, функция $R = R(\tau)$ также возрастает монотонно, причем в области $R(\tau) \leqslant 1$ выпукло вверх. Следовательно, и в этом случае $R(\tau)$ обратится в нуль при некотором значении $\tau_{\text{мин}}$. В области же $R(\tau) > 1$ для уточнения знака $\ddot{R}(\tau)$ требуется дополнительный анализ, поскольку в правой части уравнения (397) наряду с отрицательным членом при $\rho(\tau) + \frac{3}{2}\frac{p(\tau)}{c^2} > 0$ возникает положительный член

$$\frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(1-\frac{1}{R^6}\right).$$

Определим для любого τ критическую плотность формулой

$$\rho_c(\tau) = \frac{3}{\varkappa c^2}H^2(\tau). \tag{401}$$

Тогда в силу (398) и (399) находим

$$\rho_c(\tau) = \rho(\tau) + \frac{1}{2\varkappa R^6}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 (R^2-1)^2\left(R^2+\frac{1}{2}\right). \tag{402}$$

Отсюда видно, что если $m \neq 0$, то

$$\rho_c(\tau) > \rho(\tau), \tag{403}$$

кроме значения времени $\tau = \tau_1$, при котором $R(\tau_1) = 1$. В последнем случае, т. е. когда $R(\tau_1) = 1$,

$$\rho_c(\tau_1) = \rho(\tau_1). \tag{404}$$

Если же $m = 0$, то для любого значения τ РТГ приводит к равенству

$$\rho_c(\tau) = \rho(\tau). \tag{405}$$

Рассмотрим соотношение (402) для настоящего момента времени $\tau = \tau_0$. Естественно положить, что при $\tau = \tau_0\, R(\tau_0) \gg 1$, а следовательно,

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1}{R^6} - \frac{3}{R^2}\right| \ll 1.$$

Тогда из (402) находим:

$$\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \simeq 2\varkappa\,[\rho_c(\tau_0) - \rho_0]. \tag{406}$$

Здесь ρ_0 обозначает плотность вещества в настоящий момент времени $\tau = \tau_0$.

На основании современных наблюдаемых данных

$$\rho_c(\tau_0) \approx 33\rho_0$$

и поэтому из (406) можно получить следующую оценку:

$$2\varkappa\rho_0(\tau_0) \geqslant (mc/\hbar)^2. \tag{407}$$

Это неравенство и определяет верхнюю границу для значения массы гравитона. Если положить

$$\rho_c(\tau_0) \simeq 10^{-29}\ \text{г/см}^3,$$

то из (407) найдем *

$$m \leqslant 0{,}64\cdot 10^{-65}\ \text{г}. \tag{408}$$

Перейдем теперь к исследованию системы уравнений (399) и (400). Эта система неполная, поскольку на три неизвестные функции $R(\tau)$, $\rho(\tau)$ и $p(\tau)$ имеем только два уравнения. В качестве третьего уравнения обычно выбирают уравнение состояния вещества, связывающее между собой $p(\tau)$ и $\rho(\tau)$.

Предполагая, что в начальной стадии развития $\tau \sim 0$ Вселенная находилась в ультрарелятивистском состоянии, можно воспользоваться соотношением

$$p(\tau) = \frac{c^2}{3}\rho(\tau). \tag{409}$$

---

* Аналогичная оценка ранее была найдена из других соображений в работах Гомиде и Д. Ф. Курдгелаидзе (см. **Gomide F. M.**— Nuovo cimento, 1963, v. 30, p. 672; **Курдгелаидзе Д. Ф.**— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 2313).

В настоящий же момент времени $\tau \sim \tau_0$ можно пренебречь давлением, и поэтому в этой стадии развития Вселенной мы положим

$$p(\tau) = 0. \tag{410}$$

Проведем анализ уравнений (399) и (400) по отдельности, когда масса гравитона $m = 0$ и когда она отлична от нуля.

А. Масса гравитона $m = 0$. Для начальной стадии развития Вселенной из уравнений (400), с учетом (409) находим решение

$$\rho(\tau) = a/R^4(\tau), \tag{411}$$

где a — постоянная интегрирования и имеет размерность г/см^3. Из уравнения (399) в этом случае с учетом (411) получим:

$$R(\tau) = \left(\frac{4}{3}\varkappa c^2 a\right)^{1/4} \tau^{1/2}. \tag{412}$$

Формулы (411) и (412) верны для всех тех времен τ, при которых Вселенная находилась в ультрарелятивистском состоянии.

В области времен, когда давлением можно пренебречь, из уравнений (400) находим

$$\rho(\tau) = b/R^3(\tau), \tag{413}$$

а из уравнений (399), с учетом (413), в этом случае имеем

$$R(\tau) = \left(\frac{3}{4}\varkappa c^2 b\right)^{1/3} \tau^{2/3}. \tag{414}$$

В формулах (413) и (414) b — постоянная интегрирования, имеющая размерность г/см^3.

Для целей космологических измерений вводят параметр замедления

$$q(\tau) = -\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)\left(\frac{R}{\dot{R}}\right)^2. \tag{415}$$

На основании (413) легко показать, что

$$q(\tau) = 1/2. \tag{416}$$

Согласно (405) для настоящего момента времени плотность вещества должна быть равна критической плотности $\rho_c(\tau_0) \simeq$ $\simeq 10^{-29}$ г/см^3. Таким образом, РТГ предсказывает существование большой «скрытой массы» Вселенной в какой-либо форме материи. Эта недостающая масса почти в 40 раз больше, чем наблюдаемая нами сегодня во Вселенной масса вещества.

Б. Масса гравитона $m \neq 0$. На ранней стадии развития Вселенной решение уравнения (399) может быть представлено в виде

$$\tau = \int\limits_0^{R(\tau)} dx\, x^2 \left[\frac{1}{3}\varkappa a c^2 x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + x^6 - \frac{3}{2}x^4\right)\right]^{-1/2}. \tag{417}$$

При выводе (417) мы учли соотношение (411), являющееся решением уравнения (400).

Для области значений

$$\left| R^6(\tau) - \frac{3}{2} R^4(\tau) \right| \ll \frac{1}{2} \tag{418}$$

после интегрирования из (417) получим

$$\tau = \frac{1}{4\varkappa a}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{3}{4\varkappa a c^2}\right)^{1/2} (y\sqrt{1+y^2} - \operatorname{sh} y), \tag{419}$$

где

$$y = 2\sqrt{\varkappa a}\left(\frac{\hbar}{mc}\right) R(\tau). \tag{420}$$

В области малых τ из (419) имеем

$$R(\tau) \simeq \left(\sqrt{3}\frac{mc^2}{\hbar}\right)^{1/3} \tau^{1/3}. \tag{421}$$

Сравнивая это выражение с формулой (412), мы видим, что характер поведения $R(\tau)$ при $\tau \to 0$ из-за наличия массы гравитона несколько изменился.

Используя (421), на основании (401) и (411) получаем:

$$\rho_c(\tau) \simeq \frac{1}{3\varkappa c^2}\frac{1}{\tau^2}; \tag{422}$$

$$\rho(\tau) \simeq a\left(\frac{\hbar}{\sqrt{3}\, mc^2}\right)^{4/3} \frac{1}{\tau^{4/3}}. \tag{423}$$

В области времен, когда давлением можно пренебречь, из уравнения (400) для $\rho(\tau)$ получим формулу (413). Тогда решение уравнения (399) при $R \gg 1$ примет вид

$$\tau = \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}} \ln\left[\left(\frac{R(\tau)}{\sigma}\right)^3 \left(2\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon\varkappa c^2\rho(\tau)} + \frac{1}{3}\varkappa c^2 \rho(\tau)\right)\right], \tag{424}$$

где введено обозначение

$$\varepsilon = \frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2. \tag{425}$$

В (424) σ является постоянной интегрирования.

Разрешая (424) относительно $R(\tau)$, получаем:

$$R(\tau) = \sigma\left[2\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon\varkappa c^2\rho} + \frac{1}{3}\varkappa c^2\rho\right]^{-1/3} e^{\sqrt{\varepsilon}\,\tau}. \tag{426}$$

На основании (426) легко показать, что

$$H = \sqrt{\varepsilon + \frac{1}{3}\varkappa c^2 \rho(\tau)}, \tag{427}$$

а в силу (415)

$$q(\tau) = -1 + \frac{3}{2}\,\frac{\varkappa c^2 \rho(\tau)}{\varkappa c^2 \rho(\tau) + 3\varepsilon}. \tag{428}$$

Если для массы гравитона принять значение

$$m = 0{,}64 \cdot 10^{-65}\ \text{г},$$

то из (425) получим

$$\varepsilon = 4{,}3 \cdot 10^{-36}\ \text{с}^{-2}. \tag{429}$$

Тогда для настоящего момента времени развития Вселенной $\tau = \tau_0$ из (427) и (428) с учетом $\rho_0 = 3 \cdot 10^{-31}$ г/см^3 имеем

$$H_0 = 2 \cdot 10^{-18}\ \text{с}^{-1} \sim \sqrt{\varepsilon} \tag{430}$$

и

$$q(\tau_0) = -0{,}94. \tag{431}$$

При $\tau \to \infty$, с учетом того, что плотность вещества $\rho(\tau) \to 0$ с ростом τ, из (426)—(428) найдем:

$$R(\tau) \simeq \sigma\left(\frac{1}{4\varepsilon}\right)^{1/3} e^{\sqrt{\varepsilon}\,\tau}; \tag{432}$$

$$H \simeq \sqrt{\varepsilon} \simeq H_0; \tag{433}$$

$$q = -1. \tag{434}$$

Принимая во внимание соотношение (433), в формуле (432) для $R(\tau)$ получаем

$$R(\tau) \simeq \sigma\left(\frac{1}{4H_0^2}\right)^{1/3} e^{H_0 \tau}.$$

Последнее выражение существенно отличается от формулы (414), которая получена при условии, что масса покоя гравитона равна нулю.

17. ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В РТГ

Постньютоновское приближение применяется для изучения систем островного типа, движущихся с малыми, нерелятивистскими скоростями. В постньютоновском приближении скорость v, гравитационный потенциал U, удельное давление $p/c^2\rho$ и удельная внутренняя энергия Π будут иметь порядок малости:

$$v/c \simeq O(\varepsilon);\ U \simeq O(\varepsilon^2);\ p/\rho c^2 \simeq O(\varepsilon^2);\ \Pi \simeq O(\varepsilon^2). \tag{435}$$

Как показывают экспериментальные данные, значение безразмерного ньютоновского потенциала взаимодействия GM/rc^2, например, на поверхности Солнца (следовательно, и для других небесных тел типа Солнца) не превышает числа $2 \cdot 10^{-6}$, а для Земли на поверхности оно равно $6{,}95 \cdot 10^{-9}$. Для Солнечной системы известно также, что удельное давление $p/c^2\rho$ и удельная внутренняя энергия Π имеют примерно одинаковый порядок малости, равный $\varepsilon^2 \sim 10^{-8}$. Это означает, что в пределах Солнечной системы величина ε может быть использована в качестве параметра разложения ряда теории возмущения постньютоновского вида. При этом можно ожидать, что первые несколько членов этого ряда с достаточно хорошей степенью точности будут описывать всю совокупность явлений Солнечной системы.

Одной из характерных особенностей Солнечной системы является то, что в ней скорость движения вещества в единицах $c = 1$ не превышает ε. Поэтому по порядку величины для пространственных и временных производных можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\frac{\partial}{\partial t} \simeq \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}. \tag{436}$$

Связь (436) означает, что изменение всех величин со временем обусловлено, в первую очередь, движением вещества.

В этом разделе мы построим постньютоновское приближение для уравнений РТГ (154). Даже если масса покоя гравитона отлична от нуля, ввиду ее чрезвычайной малости в пределах Солнечной системы она не будет играть никакой роли и поэтому достаточно ограничиться изучением только уравнений (154).

В дальнейшем для упрощения выкладок удобно работать в системе единиц измерения, в которой $c = 1$.

Будем исходить из разложения:

$$g_{00} + 1 + \overset{(2)}{g}_{00} + \overset{(4)}{g}_{00} + \ldots; \tag{437}$$

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \overset{(2)}{g}_{\alpha\beta} + \overset{(4)}{g}_{\alpha\beta} + \ldots; \tag{438}$$

$$g_{0\alpha} = \overset{(3)}{g}_{0\alpha} + \overset{(5)}{g}_{0\alpha} + \ldots \tag{439}$$

Здесь $\gamma_{\alpha\beta}$ является пространственной частью метрики Минковского γ_{mn}. Символы $\overset{(k)}{g}_{mn}(k = 2, 3, 4\ \ldots)$ в правых частях формул (437)—(439) означают члены порядка ε^k в разложении g_{mn} соответственно. Следует заметить, что при обращении знака времени $t \to -t$ необходимо потребовать замену знака на противоположный и у параметра ε. Поэтому в разложение (437), (438) вошли только четные, а в (439) только нечетные степени параметра ε. То, что в $g_{0\alpha}$ отсутствует член $\overset{(1)}{g}_{0\alpha}$, является естественным, поскольку уже основное (ньютоновское) приближение для $g_{0\alpha}$ должно быть не ниже второго порядка по ε.

Найдем теперь разложение для $g = \det g_{mn}$ и g^{mn}. На основании (437)—(439) может быть показано, что

$$g = -1 - \overset{(2)}{g}_{00} + \overset{(2)}{g}_{11} + \overset{(2)}{g}_{22} + \overset{(2)}{g}_{33} - \overset{(4)}{g}_{00} + \overset{(4)}{g}_{11} + \overset{(4)}{g}_{22} + \overset{(4)}{g}_{33} +$$
$$+ \overset{(2)}{g}_{00}\left(\overset{(2)}{g}_{11} + \overset{(2)}{g}_{22} + \overset{(2)}{g}_{33}\right) - \overset{(2)}{g}_{11}\overset{(2)}{g}_{22} - \overset{(2)}{g}_{11}\overset{(2)}{g}_{33} - \overset{(2)}{g}_{22}\overset{(2)}{g}_{33} + \overset{(2)}{g}{}^2_{12} + \overset{(2)}{g}{}^2_{13} + \overset{(2)}{g}{}^2_{23} + \ldots \tag{440}$$

$$g^{00} = 1 + \overset{(2)}{g}{}^{00} + \overset{(4)}{g}{}^{00} + \ldots; \tag{441}$$

$$g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} + \overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta} + \overset{(4)}{g}{}^{\alpha\beta} + \ldots; \tag{442}$$

$$g^{0\alpha} = \overset{(3)}{g}{}^{0\alpha} + \overset{(5)}{g}{}^{0\alpha} + \ldots, \tag{443}$$

где $\overset{(k)}{g}{}^{mn}$ через $\overset{(k)}{g}_{mn}$ выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(2)}{g}{}^{00} = -\overset{(2)}{g}_{00};\quad \overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta} = -\overset{(2)}{g}_{\sigma\tau}\gamma^{\sigma\alpha}\gamma^{\tau\beta};\\
&\overset{(3)}{g}{}^{0\alpha} = -\overset{(3)}{g}_{0\beta}\gamma^{\alpha\beta};\quad \overset{(4)}{g}{}^{00} = \overset{(2)}{g}{}^2_{00} - \overset{(4)}{g}_{00};\\
&\overset{(4)}{g}{}^{\alpha\beta} = -\gamma^{\alpha\sigma}\gamma^{\beta\tau}\overset{(4)}{g}_{\sigma\tau} + \gamma^{\alpha\omega}\gamma^{\beta\sigma}\gamma^{\lambda\tau}\overset{(2)}{g}_{\sigma\tau}\overset{(2)}{g}_{\omega\lambda};\\
&\overset{(5)}{g}{}^{0\alpha} = -\gamma^{\alpha\beta}\overset{(5)}{g}_{0\beta} + \gamma^{\alpha\beta}\overset{(2)}{g}_{00}\overset{(3)}{g}_{0\beta} + \gamma^{\alpha\tau}\gamma^{\sigma\beta}\overset{(3)}{g}_{0\sigma}\overset{(2)}{g}_{\tau\beta}.
\end{aligned}\right\} \tag{444}$$

Чтобы записать второе уравнение (154) для членов разложения (441)—(443), предварительно найдем $\tilde{g}^{mn}$. Из (440)—(443) имеем:

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \overset{(2)}{\tilde{g}}{}^{00} + \overset{(4)}{\tilde{g}}{}^{00} + \ldots; \tag{445}$$

$$\tilde{g}^{0\alpha} = \overset{(3)}{\tilde{g}}{}^{0\alpha} + \overset{(5)}{\tilde{g}}{}^{0\alpha} + \ldots; \tag{446}$$

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = \tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \overset{(2)}{\tilde{g}}{}^{\alpha\beta} + \overset{(4)}{\tilde{g}}{}^{\alpha\beta} + \ldots, \tag{447}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(2)}{\tilde{g}}{}^{00} = \overset{(2)}{g}{}^{00} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{A};\quad \overset{(4)}{\tilde{g}}{}^{00} = \overset{(4)}{g}{}^{00} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{g}{}^{00}\overset{(2)}{A} + \frac{1}{2}\left(\overset{(4)}{A} - \frac{1}{4}\overset{(2)}{A}{}^2\right);\\
&\overset{(3)}{\tilde{g}}{}^{0\alpha} = \overset{(3)}{g}{}^{0\alpha};\quad \overset{(5)}{\tilde{g}}{}^{0\alpha} = \overset{(5)}{g}{}^{0\alpha} + \frac{1}{2}\overset{(3)}{g}{}^{0\alpha}\overset{(2)}{A};\\
&\overset{(2)}{\tilde{g}}{}^{\alpha\beta} = \overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\overset{(2)}{A};\\
&\overset{(4)}{\tilde{g}}{}^{\alpha\beta} = \overset{(4)}{g}{}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta}\overset{(2)}{A} + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\left(\overset{(4)}{A} - \frac{1}{4}\overset{(2)}{A}{}^2\right).
\end{aligned}\right\} \tag{448}$$

В (448) введены обозначения:

$$\overset{(2)}{A}=\overset{(2)}{g}_{00}-\overset{(2)}{g}_{11}-\overset{(2)}{g}_{22}-\overset{(2)}{g}_{33} \tag{449}$$

и

$$\overset{(4)}{A}=\overset{(4)}{g}_{00}-\overset{(4)}{g}_{11}-\overset{(4)}{g}_{22}-\overset{(4)}{g}_{33}-\overset{(2)}{g}_{00}(\overset{(2)}{g}_{11}+\overset{(2)}{g}_{22}+\overset{(2)}{g}_{33})+ \\ +\overset{(2)}{g}_{11}\overset{(2)}{g}_{22}+\overset{(2)}{g}_{11}\overset{(2)}{g}_{33}+\overset{(2)}{g}_{22}\overset{(2)}{g}_{33}-\overset{(2)}{g}{}^{2}_{12}-\overset{(2)}{g}{}^{2}_{13}-\overset{(2)}{g}{}^{2}_{23}. \tag{450}$$

В галилеевой системе отсчета из второго уравнения системы (154) находим:

$$\frac{1}{2}\,\partial_0\overset{(2)}{g}_{00}-\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\beta}\partial_0\overset{(2)}{g}_{\alpha\beta}=-\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\overset{(3)}{g}_{0\beta}; \tag{451}$$

$$\frac{1}{2}\,\partial_\alpha\overset{(2)}{g}_{00}+\frac{1}{2}\,\gamma^{\sigma\tau}\partial_\alpha\overset{(2)}{g}_{\sigma\tau}=\gamma^{\sigma\tau}\partial_\tau\overset{(2)}{g}_{\alpha\sigma}; \tag{452}$$

$$\partial_0\left[\overset{(2)}{g}{}^{2}_{00}-\overset{(4)}{g}_{00}-\frac{1}{2}\,\overset{(2)}{g}_{00}\overset{(2)}{A}+\frac{1}{2}\left(\overset{(4)}{A}-\frac{1}{4}\,\overset{(2)}{A}{}^{2}\right)\right]=-\partial_\alpha\left(\overset{(5)}{g}{}^{0\alpha}+\frac{1}{2}\,\overset{(3)}{g}{}^{0\alpha}\overset{(2)}{A}\right); \tag{453}$$

$$\partial_\beta\left[\overset{(4)}{g}{}^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\,\overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta}\overset{(2)}{A}+\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\beta}\left(\overset{(4)}{A}-\frac{1}{4}\,\overset{(2)}{A}{}^{2}\right)\right]=\partial_0\overset{(3)}{g}_{0\beta}\gamma^{\beta\alpha}. \tag{454}$$

(k) Теперь запишем первое уравнение системы (154) для величин g_{mn}. Сначала найдем разложение тензора Γ^p_{mn} по степеням ε. Так как в галилеевой системе отсчета

$$\Gamma^p_{mn}=\frac{1}{2}\,g^{pq}\,(\partial_m g_{qn}+\partial_n g_{qm}-\partial_q g_{mn}),$$

то в силу (437)—(439) и (441)—(443) отсюда находим:

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00}=\frac{1}{2}\,\partial_0\overset{(2)}{g}_{00}+\frac{1}{2}\left(\overset{(2)}{g}{}^{00}\partial_0\overset{(2)}{g}_{00}-\overset{(3)}{g}{}^{0\alpha}\partial_\alpha\overset{(2)}{g}_{00}\right)+\dots;\\
&\Gamma^0_{0\alpha}=\frac{1}{2}\,\partial_\alpha\overset{(2)}{g}_{00}+\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\overset{(4)}{g}_{00}+\overset{(2)}{g}{}^{00}\partial_\alpha\overset{(2)}{g}_{00}\right)+\dots;\\
&\Gamma^0_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\overset{(3)}{g}_{0\beta}+\partial_\beta\overset{(3)}{g}_{0\alpha}-\partial_0\overset{(2)}{g}_{\alpha\beta}\right)+\dots;\\
&\Gamma^\alpha_{00}=-\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta\overset{(2)}{g}_{00}-\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta\overset{(4)}{g}_{00}+\\
&\quad+\gamma^{\alpha\beta}\partial_0\overset{(3)}{g}_{0\beta}-\frac{1}{2}\,\overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta}\partial_\beta\overset{(2)}{g}_{00}+\dots;\\
&\Gamma^\alpha_{0\beta}=\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\partial_\beta\overset{(3)}{g}_{\sigma0}+\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\partial_0\overset{(2)}{g}_{\beta\sigma}-\frac{}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\partial_\sigma\overset{(3)}{g}_{0\beta}+\dots;\\
&\Gamma^\alpha_{\beta\omega}=\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\left(\partial_\beta\overset{(2)}{g}_{\sigma\omega}+\partial_\omega\overset{(2)}{g}_{\sigma\beta}-\partial_\sigma\overset{(2)}{g}_{\beta\omega}\right)+\dots
\end{aligned}\right\} \tag{455}$$

На основании (455) уже можно найти нужное нам разложение для тензора кривизны второго ранга R_{mn}. Так как R_{mn} через Γ^p_{kq} выражается формулой (149), после несложных вычислений найдем:

$$\begin{aligned}
R_{00} = &-\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{00} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \overset{(4)}{g}_{00} + \\
&+ \gamma^{\alpha\beta}\partial_0\partial_\alpha \overset{(3)}{g}_{0\beta} - \frac{1}{2}\partial_\alpha\left(\overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta}\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{00}\right) - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_0\partial_0 \overset{(2)}{g}_{\alpha\beta} - \\
&- \frac{1}{4}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{00}\gamma^{\sigma\tau}\partial_\alpha \overset{(2)}{g}_{\sigma\tau} + \frac{1}{4}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \overset{(2)}{g}_{00}\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{00} + \ldots
\end{aligned} \tag{456}$$

$$\begin{aligned}
R_{0\alpha} = &\frac{1}{2}\gamma^{\beta\sigma}\partial_0\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2}\gamma^{\beta\sigma}\partial_0\partial_\alpha \overset{(2)}{g}_{\beta\sigma} + \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\beta \overset{(3)}{g}_{\sigma 0} - \frac{1}{2}\gamma^{\beta\sigma}\partial_\beta\partial_\sigma \overset{(3)}{g}_{0\alpha} + \ldots;
\end{aligned} \tag{457}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} = &-\frac{1}{2}\gamma^{\sigma\tau}\partial_\sigma\partial_\tau \overset{(2)}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma^{\sigma\tau}\partial_\sigma\partial_\alpha \overset{(2)}{g}_{\tau\beta} + \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{\sigma\tau}\partial_\sigma\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{\tau\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\alpha\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{00} - \frac{1}{2}\gamma^{\sigma\tau}\partial_\alpha\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{\tau\sigma} + \ldots
\end{aligned} \tag{458}$$

Учитывая в этих формулах равенства (451) и (452), окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
R_{00} = &-\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{00} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \overset{(4)}{g}_{00} - \frac{1}{2}\partial_0\partial_0 \overset{(2)}{g}_{00} + \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{\sigma\alpha}\gamma^{\tau\beta}\overset{(2)}{g}_{\sigma\tau}\partial_\alpha\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{00} + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \overset{(2)}{g}_{00}\partial_\beta \overset{(2)}{g}_{00} + \ldots;
\end{aligned} \tag{459}$$

$$R_{0\alpha} = -\frac{1}{2}\gamma^{\beta\sigma}\partial_\beta\partial_\sigma \overset{(3)}{g}_{0\alpha} + \ldots; \tag{460}$$

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\gamma^{\sigma\tau}\partial_\sigma\partial_\tau \overset{(2)}{g}_{\alpha\beta} + \ldots \tag{461}$$

Чтобы завершить построение приближенных уравнений РТГ, нам необходимо разложить тензор энергии-импульса вещества в ряд по степеням ε. Для дальнейшего удобно исходить из следующего разложения T^{mn}:

$$\begin{gathered}
T^{00} = \overset{(0)}{T}{}^{00} + \overset{(2)}{T}{}^{00} + \ldots; \quad T^{0\alpha} = \overset{(1)}{T}{}^{0\alpha} + \overset{(3)}{T}{}^{0\alpha} + \ldots; \\
T^{\alpha\beta} = \overset{(2)}{T}{}^{\alpha\beta} + \overset{(4)}{T}{}^{\alpha\beta} + \ldots
\end{gathered} \tag{462}$$

Учитывая (437)—(439), из (462) для T_{mn} находим:

$$T_{00} = \overset{(0)}{T}_{00} + \overset{(2)}{T}_{00} + \ldots; \quad T_{0\alpha} = \overset{(1)}{T}_{0\alpha} + \overset{(3)}{T}_{0\alpha} + \ldots; \quad T_{\alpha\beta} = \overset{(2)}{T}_{\alpha\beta} + \overset{(4)}{T}_{\alpha\beta} + \ldots, \tag{463}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(0)}{T}_{00}=\overset{(0)}{T}{}^{00};\quad \overset{(2)}{T}_{00}=\overset{(2)}{T}{}^{00}+2\overset{(2)}{g}_{00}\overset{(0)}{T}{}^{00};\\ &\overset{(1)}{T}_{0\alpha}=\gamma_{\alpha\beta}\overset{(1)}{T}{}^{0\beta};\quad \overset{(3)}{T}_{0\alpha}=\overset{(3)}{g}_{0\alpha}\overset{(0)}{T}{}^{00}+(\overset{(2)}{g}_{\alpha\beta}+\gamma_{\alpha\beta}\overset{(2)}{g}_{00})\overset{(1)}{T}{}^{0\beta};\\ &\overset{(2)}{T}_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\sigma}\gamma_{\beta\tau}\overset{(2)}{T}{}^{\sigma\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{464}$$

Так как в правой части первого уравнения (154) стоит комбинация

$$S_{mn}=T_{mn}-\frac{1}{2}g_{mn}T, \tag{465}$$

на основании (463), (464) легко найти разложение для компонент S_{mn} по степеням ε. Они имеют вид:

$$S_{00}=\frac{1}{2}\overset{(0)}{T}{}^{00}+\frac{1}{2}(\overset{(2)}{T}{}^{00}+2\overset{(2)}{g}_{00}\overset{(0)}{T}{}^{00}-\gamma_{\alpha\beta}\overset{(2)}{T}{}^{\alpha\beta})+\cdots; \tag{466}$$

$$S_{0\alpha}=\gamma_{\alpha\beta}\overset{(1)}{T}{}^{0\beta}+\cdots; \tag{467}$$

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}={}&-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\overset{(0)}{T}{}^{00}+\left(\gamma_{\alpha\sigma}\gamma_{\beta\tau}-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\tau}\right)\overset{(2)}{T}{}^{\sigma\tau}-\\ &-\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta}\overset{(2)}{T}{}^{00}+\gamma_{\alpha\beta}\overset{(2)}{g}_{00}\overset{(0)}{T}{}^{00}+\overset{(2)}{g}_{\alpha\beta}\overset{(0)}{T}{}^{00})+\cdots \end{aligned} \tag{468}$$

Подставив в первое уравнение (154) найденные выше разложения (459)—(461) и (466)—(468), получим:

$$\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\overset{(2)}{g}_{00}=-8\pi G\overset{(0)}{T}{}^{00}; \tag{469}$$

$$\begin{aligned} &\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\overset{(4)}{g}_{00}+\partial_0\partial_0\overset{(2)}{g}_{00}-\gamma^{\sigma\alpha}\gamma^{\tau\beta}\overset{(2)}{g}_{\sigma\tau}\partial_\alpha\partial_\beta\overset{(2)}{g}_{00}-\\ &-\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\overset{(2)}{g}_{00}\partial_\beta\overset{(2)}{g}_{00}=-8\pi G(\overset{(2)}{T}{}^{00}+2\overset{(2)}{g}_{00}\overset{(0)}{T}{}^{00}-\gamma_{\alpha\beta}\overset{(2)}{T}{}^{\alpha\beta}); \end{aligned} \tag{470}$$

$$\gamma^{\beta\sigma}\partial_\beta\partial_\sigma\overset{(3)}{g}_{0\alpha}=-16\pi G\gamma_{\alpha\beta}\overset{(1)}{T}{}^{0\beta}; \tag{471}$$

$$\gamma^{\sigma\tau}\partial_\sigma\partial_\tau\overset{(2)}{g}_{\alpha\beta}=8\pi G\gamma_{\alpha\beta}\overset{(0)}{T}{}^{00}. \tag{472}$$

Система уравнений (469)—(472) при заданных $\overset{(0)}{T}{}^{00}$, $\overset{(2)}{T}{}^{00}$, $\overset{(1)}{T}{}^{0\beta}$ и $\overset{(2)}{T}{}^{\alpha\beta}$ полностью определяет эффективную риманову метрику g^{mn} в ньютоновском и постньютоновском приближениях.

Полагая

$$\overset{(2)}{g}_{00}=-2U, \tag{473}$$

где U — ньютоновский потенциал взаимодействия, из (469) имеем

$$\nabla^2 U=-4\pi G\overset{(0)}{T}{}^{00}. \tag{474}$$

Решение этого уравнения в предположении, что U исчезает на бесконечности, может быть представлено в виде

$$U = G \int \frac{d^3x' \overset{(0)}{T}{}^{00}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{475}$$

Совершенно анологично из (471) и (472) находим:

$$\overset{(3)}{g}_{0\alpha} = -4G\gamma_{\alpha\beta} \int \frac{d^3x' \overset{(1)}{T}{}^{0\beta}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{476}$$

и

$$\overset{(2)}{g}_{\alpha\beta} = 2G\gamma_{\alpha\beta} \int \frac{d^3x' \overset{(0)}{T}{}^{00}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = 2\gamma_{\alpha\beta}U. \tag{477}$$

Уравнение (470) с учетом (473), (474) и (477) может быть записано в виде

$$\nabla^2 (\overset{(4)}{g}_{00} - 2U^2) = -2\partial_0^2 U + 8\pi G (\overset{(2)}{T}{}^{00} - \gamma_{\alpha\beta} \overset{(2)}{T}{}^{\alpha\beta}). \tag{478}$$

Поскольку $\overset{(4)}{g}_{00}$ должно обращаться в нуль на бесконечности, из (478) находим

$$\overset{(4)}{g}_{00} = 2U^2 + \frac{1}{2\pi} \partial_0^2 \int \frac{d^3x' U(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \\ - 2G \int \frac{dx' (\overset{(2)}{T}{}^{00} - \gamma_{\alpha\beta} \overset{(2)}{T}{}^{\alpha\beta})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{479}$$

Заметим, что в силу (451) и (477) между потенциалом U и $\overset{(3)}{g}_{0\beta}$ существует следующая связь:

$$\partial_0 U = \frac{1}{4} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \overset{(3)}{g}_{0\beta}. \tag{480}$$

Таким образом, мы нашли решения уравнений РТГ для компонент эффективной метрики риманова пространства g_{mn} в следующих порядках:

g_{00} с точностью до ε^4 включительно,

$g_{\alpha\beta}$ с точностью до ε^2 включительно, а

$g_{0\alpha}$ с точностью до ε^3 включительно.

Как мы увидим ниже, такая точность в определении g_{mn} практически достаточна для описания всех гравитационных экспериментов, производимых в пределах Солнечной системы. Поэтому из системы уравнений (451)—(454) достаточно использовать только первые два. Заметим, что в силу (473) и (474) уравнение (452) удовлетворяется автоматически.

Прежде чем приступить к изучению гравитационных эффектов в постньютоновском приближении, нам необходимо выбрать «модель» для вещества. Предположим, что тело находится в состоянии идеальной жидкости. Тогда в качестве T^{mn} может быть взято выражение тензора энергии-импульса для идеальной жидкости:

$$T^{mn} = (p + \rho(1 + \Pi))\, u^n u^m - p g^{mn}. \tag{481}$$

В (481), как обычно, p, ρ и Π обозначены изотропное давление, плотность идеальной жидкости и удельная собственная энергия соответственно, а u^n является 4-вектором скорости.

Для тензора энергии-импульса T^{mn} и для инвариантной плотности ρ имеем следующие точные соотношения:

ковариантный закон сохранения

$$\nabla_m T^{mn} = \partial_m T^{mn} + \Gamma^m_{nk} T^{kn} + \Gamma^n_{nk} T^{mk} = 0 \tag{482}$$

и ковариантное уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_n \left(\sqrt{-g}\rho u^n\right) = 0. \tag{483}$$

В ньютоновском приближении, т. е. когда пренебрегаем силами тяготения:

$$u^0 = 1 + O(\varepsilon^2); \quad u^\alpha = v^\alpha (1 + O(\varepsilon^2)) \tag{484}$$

и поэтому из (481) найдем

$$\overset{(0)}{T}{}^{00} = \rho(1 + O(\varepsilon^2)); \tag{485}$$

$$\overset{(0)}{T}{}^{\alpha\beta} = O(\varepsilon^2); \tag{486}$$

$$\overset{(1)}{T}{}^{0\alpha} = \rho v^\alpha (1 + O(\varepsilon^2)). \tag{487}$$

При выводе (485)—(487) было принято во внимание, что удельное изотропное давление p/ρ имеет порядок ε^2.

Пренебрегая в уравнениях (482) и (483) членами порядка выше, чем ε, для ρ получаем

$$\partial_0 \rho + \partial_\alpha (\rho v^\alpha) = 0. \tag{488}$$

Отсюда мы видим, что в ньютоновском приближении полная масса тела равна интегралу:

$$M = \int \rho d^3x$$

и является сохраняющейся величиной.

Учитывая (485) и (487) в формулах (475), (476) и (477), находим:

$$\overset{(2)}{g}_{00} = -2U; \quad \overset{(2)}{g}_{\alpha\beta} = 2\gamma_{\alpha\beta} U; \quad \overset{(3)}{g}_{0\alpha} = 4\gamma_{\alpha\beta} V^\beta, \tag{489}$$

где

$$U = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'; \tag{490}$$

$$V^\beta = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)\, v^\beta}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'. \tag{491}$$

Следовательно, в приближении (489) метрические коэффициенты эффективного риманова пространства g_{mn} могут быть представлены в виде

$$g_{00} = (1-2U); \quad g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(1+2U); \quad g_{0\alpha} = 4\gamma_{\alpha\beta}V^\beta. \tag{492}$$

Зная метрику в этом приближении на основе уравнений (482) и (483), можно определить компоненты тензора энергии-импульса вещества в следующем приближении. Но для этого необходимо в ньютоновском приближении предварительно найти $\sqrt{-g}u^0$ и компоненты тензора Γ^p_{mn}. В силу (492) и (455) имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{-g} = 1+2U;\\
&u^0 = 1+U-\frac{1}{2}v_\alpha v^\alpha;\\
&\Gamma^0_{00} = -\partial_0 U; \quad \Gamma^0_{0\alpha} = -\partial_\alpha U; \quad \Gamma^\alpha_{00} = \gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta U;\\
&\Gamma^0_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}\partial_0 U + 2(\gamma_{\beta\sigma}\partial_\alpha + \gamma_{\alpha\sigma}\partial_\beta)V^\sigma;\\
&\Gamma^\alpha_{0\beta} = 2\partial_\beta V^\alpha + \delta^\alpha_\beta\partial_0 U - 2\gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\beta\tau}\partial_\sigma V^\tau;\\
&\Gamma^\alpha_{\beta\omega} = \delta^\alpha_\omega\partial_\beta U + \delta^\alpha_\beta\partial_\omega U - \gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\beta\omega}\partial_\sigma U.
\end{aligned}\right\} \tag{493}$$

Тогда ковариантное уравнение сохранения (482) запишется в виде

$$\partial_0 \overset{(2)}{T}{}^{00} + \partial_\alpha \overset{(3)}{T}{}^{0\alpha} - \rho\partial_0 U - 2\rho v^\alpha\partial_\alpha U = O(\varepsilon^5); \tag{494}$$

$$\partial_\beta \overset{(2)}{T}{}^{\alpha\beta} + \partial_0(\rho v^\alpha) + \gamma^{\alpha\beta}\rho\partial_\beta U = O(\varepsilon^4), \tag{495}$$

а уравнение неразрывности (483) примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\partial_0\left(\rho + 3U\rho - \frac{1}{2}\rho v_\alpha v^\alpha\right) + \partial_\alpha\left(\rho v^\alpha + 3\rho v^\alpha U + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\rho v^2 v^\alpha\right)\right] = O(\varepsilon^3). \tag{496}$$

К этим уравнениям следует добавить уравнения движения идеальной жидкости [15]:

$$\hat{\rho}\,(\partial_0 v^\alpha + v^\beta\partial_\beta v^\alpha) = \gamma^{\alpha\beta}(-\hat{\rho}\partial_\beta U + \partial_\beta p) + O(\varepsilon^4); \tag{497}$$

$$\hat{\rho}\,(\partial_0\Pi + v^\beta\partial_\beta\Pi) = -p\partial_\alpha v^\alpha + O(\varepsilon^5), \tag{498}$$

где

$$\hat{\rho} = \sqrt{-g}\rho u^0. \tag{499}$$

Согласно (483) $\hat{\rho}$ является сохраняющейся плотностью массы.

В нужном нам приближении $\hat{\rho}$ допускает разложение:

$$\hat{\rho}=\rho\left(1+3U-\frac{1}{2}v_\alpha v^\alpha\right), \tag{500}$$

и поэтому в (497) и (498) $\hat{\rho}$ может быть заменено инвариантной плотностью ρ. Из системы уравнений (494)—(498) легко найти решения для $\overset{(2)}{T}{}^{00}$, $\overset{(3)}{T}{}^{0\alpha}$ и $\overset{(2)}{T}{}^{\alpha\beta}$. Они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \overset{(2)}{T}{}^{00}&=\rho\,(2U+\Pi-v_\alpha v^\alpha);\\ \overset{(3)}{T}{}^{0\alpha}&=\rho v^\alpha\,(2U+\Pi-v_\beta v^\beta)+pv^\alpha;\\ \overset{(2)}{T}{}^{\alpha\beta}&=\rho v^\alpha v^\beta-\gamma^{\alpha\beta}p. \end{aligned}\right\} \tag{501}$$

Поэтому из (479) для $\overset{(4)}{g}_{00}$ находим:

$$\overset{(4)}{g}_{00}=2U^2+\frac{1}{2\pi}\,\partial_0^2\int\frac{d^3x'U\,(\mathbf{x}',\ t)}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|}-4\Phi_1-4\Phi_2-2\Phi_3-6\Phi_4. \tag{502}$$

Величины Φ_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ имеют вид:

$$\Phi_1=-G\int\frac{\rho v_\alpha v^\alpha}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d^3x';\quad \Phi_2=G\int\frac{\rho U}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|}\,d^3x';$$

$$\Phi_3=G\int\frac{\rho\Pi}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|}\,d^3x';\ \Phi_4=G\int\frac{p\,d^3x'}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|} \tag{503}$$

и называются обобщенными гравитационными потенциалами.

Так как имеет место тождество [48]

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{d^3x'U}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|}\equiv\frac{G}{2\pi}\int\rho\,(\mathbf{x}'',\ t)\,d^3x''\int\frac{d^3x'}{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,||\,\mathbf{x}'-\mathbf{x}''\,|}\equiv$$

$$\equiv-G\int\rho\,(\mathbf{x}'',\ t)\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|\,d^3x'',$$

то для $\overset{(4)}{g}_{00}$ окончательно найдем:

$$\overset{(4)}{g}_{00}=2U^2-G\partial_0^2\int\rho\,(\mathbf{x}',\ t)\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\,d^3x'-4\Phi_1-4\Phi_2-2\Phi_3-6\Phi_4. \tag{504}$$

Объединяя формулы (492) и (504) для метрических коэффициентов тензора эффективного риманова пространства-времени g_{mn} с точностью до постньютоновского приближения включительно, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} g_{00}&=1-2U+2U^2-4\Phi_1-4\Phi_2-2\Phi_3-6\Phi_4-\\ &\quad-G\partial_0^2\int\rho\,(\mathbf{x}',\ t)\,|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|\,d^3x'+O\,(\varepsilon^6); \end{aligned} \tag{505}$$

$$g_{0\alpha}=4\gamma_{\alpha\beta}V^\beta+O\,(\varepsilon^5); \tag{506}$$

$$g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}\,(1+2U)+O\,(\varepsilon^4). \tag{507}$$

До недавнего времени требования, предъявляемые к возможным теориям гравитации, сводились к необходимости получить закон тяготения Ньютона в пределе слабого поля, а также описать три эффекта, которые были доступны наблюдению: гравитационное красное смещение в поле Солнца, искривление луча света, проходящего возле Солнца, и смещение перигелия Меркурия. Недостаточная точность измерения в этих экспериментах, а также их малочисленность явились причиной того, что к настоящему времени мы имеем большое число различных теорий гравитации, успешно объясняющих все эти эффекты.

Для дальнейшего отбора теории гравитации необходимо, с одной стороны, увеличить точность измерения старых и предложить качественно новые эксперименты, а с другой, разработать соответствующий теоретический аппарат, поскольку требования к возможным теориям гравитации явно недостаточны, так как очень большое количество теорий удовлетворяют этим требованиям.

В последнее время в связи с развитием экспериментальной техники, в первую очередь космонавтики, и повышением точности измерений появились новые возможности по более точному измерению параметров орбит планет (и прежде всего Луны), по измерению запаздывания радиосигналов в гравитационном поле Солнца, по проведению новых экспериментов в пределах Солнечной системы. Эти эксперименты позволяют сузить круг жизнеспособных теорий гравитации. Для облегчения сравнения результатов экспериментов, выполненных в пределах Солнечной системы, с предсказаниями различных теорий гравитации, у которых естественной геометрией для движения вещества является риманова геометрия, Нордтведт и Вилл [49] разработали так называемый параметризованный постньютоновский (ППН) формализм.

В этом формализме метрика риманова пространства-времени, создаваемая некоторым телом, состоящим из идеальной жидкости, записывается в виде суммы всевозможных обобщенных гравитационных потенциалов с произвольными коэффициентами, называемыми постньютоновскими параметрами. Используя пересмотренные параметры Вилла — Нордтведта, метрику риманова пространства-времени можно записать в виде

$$g_{00}=1-2U+2\beta U^2-(2\gamma+2+\alpha_3+\xi_1)\Phi_1+\xi_1 A+2\xi_\omega\Phi_\omega-$$
$$-2\left[(3\gamma+1-2\beta+\xi_2)\Phi_2+(1+\xi_3)\Phi_3+3(\gamma+\xi_4)\Phi_4\right]-$$
$$-(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)W^\alpha W_\alpha U+\alpha_2 W^\alpha W^\beta U_{\alpha\beta}-(2\alpha_3-\alpha_1)W^\alpha V_\alpha; \quad (508)$$

$$g_{0\alpha}=\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\xi_1)\gamma_{\alpha\beta}V^\beta+\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\xi_1)N_\alpha-$$
$$-\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)W_\alpha U+\alpha_2 W^\beta U_{\alpha\beta}; \quad (509)$$

$$g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}(1+2\gamma U). \quad (510)$$

Здесь W^{α} — пространственные компоненты скорости системы отсчета относительно некоторой универсальной системы покоя. Для некоторых теорий гравитации — это скорость центра масс Солнечной системы относительно системы покоя Вселенной. В формулы (508), (509) кроме уже введенных выше обобщенных гравитационных потенциалов (490), (491) и (503) вошли еще потенциалы вида:

$$\left.\begin{aligned}
&A = G\int \frac{\rho v_{\alpha} v_{\beta}(x^{\alpha}-x'^{\alpha})(x^{\beta}-x'^{\beta})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{3}}\,d^{3}x';\\
&N_{\alpha} = \gamma_{\alpha\sigma} G\int \frac{\rho v_{\beta}(x^{\beta}-x'^{\beta})(x^{\sigma}-x'^{\sigma})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{3}}\,d^{3}x';\\
&U_{\alpha\beta} = G\int \frac{\rho(x_{\alpha}-x'_{\alpha})(x_{\beta}-x'_{\beta})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{3}}\,d^{3}x';\\
&\Phi_{\omega} = G\int \frac{\rho(\mathbf{x}',t)\,\rho(\mathbf{x}''t)}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|^{3}}\left[\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|}-\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}''}{\mathbf{x}'-\mathbf{x}''}\right](\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d^{3}x'\,d^{3}x''.
\end{aligned}\right\}\qquad(511)$$

Каждой теории гравитации, у которой естественной геометрией для описания движения вещества является риманова геометрия, будет соответствовать свой набор значений десяти постньютоновских параметров β, γ, α_1, α_2, α_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_{ω}. С точки зрения экспериментов, выполненных в Солнечной системе, одна теория гравитации будет отличаться от другой лишь значениями приведенных параметров. Следует отметить, что при сравнении различных теорий гравитации метрический тензор g_{mn} в каждой теории должен быть записан в той же координатной системе, в какой записаны компоненты (508)—(510), иначе какое-либо сравнение постньютоновских параметров теряет смысл, так как различным системам координат соответствуют различные наборы параметров. Поэтому после определения метрического тензора g_{mn}, создаваемого гравитационным полем Солнечной системы, необходимо перейти в «каноническую» координатную систему, в которой метрический тензор g_{mn} примет вид (508)—(510).

Характерной чертой стандартного постньютоновского разложения (508)—(510) является то, что в канонических координатах недиагональные компоненты пространственной части метрического тензора g_{mn} равны нулю, а отличные от нуля компоненты не содержат члены вида

$$\partial_0^2 \int \rho|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\,d^3x'. \qquad (512)$$

Наше решение (505)—(507) для g_{mn}, в отличие от формул (508)—(510), содержит выражение (512) в g_{00}. Поэтому необходимо перейти в ту координатную систему, в которой решения (505)—(507) примут вид (508)—(510). Производя координатное преобразование

$$\left.\begin{aligned}
&x'^0 = x^0 + \xi^0(x);\\
&x'^{\alpha} = x_{\alpha},
\end{aligned}\right\}\qquad(513)$$

где $\xi^0(x) \simeq O(\varepsilon^3)$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} g'_{00} &= g_{00} - 2\partial_0\xi_0(x); \\ g'_{0\alpha} &= g_{0\alpha} - \partial_\alpha\xi_0(x); \\ g'_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{514}$$

Выбирая $\xi_0(x)$ в виде

$$\xi_0(x) = -\frac{G}{2}\partial_0 \int \rho(\mathbf{x}', t)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\,d^3x'$$

из (514) с учетом (505)—(507), для метрических коэффициентов g'_{mn} в канонических координатах найдем выражения:

$$g'_{00} = 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4 + O(\varepsilon^6); \tag{515}$$

$$g'_{0\alpha} = \frac{7}{2}\gamma_{\alpha\beta}V^\beta - \frac{1}{2}N_\alpha + O(\varepsilon^5); \tag{516}$$

$$g'_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(1+2U) + O(\varepsilon^4). \tag{517}$$

При выводе (516) было использовано тождество

$$\partial_\alpha\xi_0 \equiv +\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta}V^\beta - N_\alpha). \tag{518}$$

Сравнивая (515)—(517), полученные в постньютоновском приближении для метрических коэффициентов g'_{mn} в рамках РТГ, с формулами (508)—(510), для постньютоновских параметров находим следующие значения:

$$\gamma = 1;\ \beta = 1;\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_\omega = 0. \tag{519}$$

Попутно отметим, что для случая, когда источником гравитационного поля является статическое сферически-симметричное тело радиуса r_0, метрика (515)—(517) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} g'_{00} &= 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{2M^2G^2}{r^2} + O\left(\frac{G^3M^3}{r^3}\right); \\ g'_{0\alpha} &= 0; \\ g'_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}\left(1 + \frac{2MG}{r}\right) + O\left(\frac{G^2M^2}{r^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{520}$$

где полная масса источника

$$M = 4\pi \int_0^{r_0} \rho\left[1 + \Pi + \frac{3p}{\rho} + 2U\right] r^2\,dr. \tag{521}$$

Для выявления теорий гравитации, которые в постньютоновском пределе позволяют описать все эксперименты, выполненные в Солнечной системе, достаточно определить из всех этих экспериментов значения десяти постньютоновских параметров и отобрать лишь те теории гравитации, постньютоновское приближение которых приводит к значениям параметров, совпадающих с полученными из экспериментов. Тогда все такие теории гравитации будут неразличимыми с точки зрения любых экспериментов, выполненных с постньютоновской точностью. Дальнейший отбор теории гравитации будет связан либо с повышением точности измерения до постпостньютоновского уровня, либо с поиском возможностей изучать свойства гравитационных волн, а также явления в сильных гравитационных полях.

Как показано в работе [50], равенство нулю трех параметров α_1, α_2, α_3 имеет определенный физический смысл: всякая теория гравитации, в которой $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, не обладает предпочтительной универсальной системой покоя в постньютоновском пределе. В этом случае при переходе от универсальной системы покоя к движущейся системе метрика эффективного риманова пространства-времени в постньютоновском пределе является форминвариантной, и скорость W^α новой системы координат относительно универсальной системы покоя в явном виде не будет входить в метрику. Поскольку имеет место (519), к таким теориям относятся как ОТО, так и РТГ.

Определенный физический смысл имеет и линейная зависимость параметров ξ и α. Как показано в [51], при выполнении соотношений *

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0;\ \xi_3 = 0;\ \xi_2 = \xi_\omega; \\ 3\xi_4 + 2\xi_\omega = 0;\ \xi_1 + 2\xi_\omega = 0, \end{aligned}\right\} \tag{522}$$

из постньютоновских уравнений движения можно определить величины, которые в постньютоновском приближении не зависят от времени. Интерпретировать эти величины как энергию-импульс и момент импульса системы (т. е. как интегралы движения), вообще говоря, можно лишь в тех теориях гравитации, которые обладают законами сохранения тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых.

Так, например, в ОТО соотношения (522) выполняются, но не зависящие от времени в постньютоновском приближении величины, как показывает детальный анализ, не являются интегралами движения системы, состоящей из вещества и гравитационного поля.

В РТГ изолированная система имеет в псевдоевклидовом пространстве-времени все десять законов сохранения в их обычном смысле, которые в постньютоновском приближении приводят к десяти интегралам движения системы. Выполнение соотношений (522) в РТГ подтверждает этот вывод.

---

* См. также **Lee D. L., Lightman A. P., Ni W.-T.** — Phys. Rev., 1974, v. D10, p. 1685.

18. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Благодаря опытам Бесселя и Этвеша, проведенным еще в прошлом веке, было установлено, что для тел лабораторных размеров отношение гравитационной массы к инертной массе может отличаться от единицы не более чем 10^{-9}, независимо от вещества, из которого состоит тело. Этот результат произвел глубокое впечатление на Эйнштейна и натолкнул его на формулировку принципа эквивалентности.

В настоящее время из гравиметрических экспериментов установлено, что отклонение от единицы отношения гравитационной массы к инертной массе для тел лабораторных размеров не превышает 10^{-12} (эксперименты группы Брагинского [52]).

Хотя приведенные выше результаты воспринимаются как экспериментальное подтверждение гипотезы о равенстве гравитационной и инертной масс с очень большой точностью, это не означает, что и тела больших размеров имеют совпадающие гравитационную и инертную массы с такой же точностью.

По оценкам Нордтведта [53], для тел лабораторных размеров отношение собственной гравитационной энергии к его полной энергии по порядку величины не более чем 10^{-25}. Поэтому при погрешности измерения, равной 10^{-12}, ничего нельзя сказать о том, как распределяется собственная гравитационная энергия между инертной и гравитационной массами тела.

Для решения вопроса о равенстве гравитационной и инертной масс протяженного тела опытным путем необходимо либо существенно увеличивать точность гравиметрических экспериментов с телами лабораторных размеров, либо проводить измерения с такими телами, например с планетами, у которых отношение собственной гравитационной энергии к полной энергии должно быть существенно выше, чем 10^{-25}. В последнем случае, если гравитационные и инертные массы действительно отличаются между собой, могут быть обнаружены малые возмущения орбиты планеты.

Какой ответ дают ОТО и РТГ по вопросу о равенстве гравитационной и инертной масс?

Из ОТО не следует, что инертная масса равна ее активной гравитационной массе. В ОТО, как это показано в разд. 3, значение инертной массы зависит от выбора координатных осей в трехмерном пространстве, что с физической точки зрения бессмысленно.

Из РТГ следует: активная гравитационная и инертная массы тела равны.

Действительно, поскольку в основе РТГ лежит специальный принцип относительности, инертная масса островной системы строго определена и равна

$$m_i = \int d^3x \, (t^{00}_{(g)} + t^{00}_{(M)}). \tag{523}$$

В силу закона сохранения полного тензора энергии-импульса в пространстве Минковского

$$\partial_m (t^{mn}_{(g)} + t^{mn}_{(M)}) = 0.$$

очевидно, что m_i не зависит от времени. Заметим также, что (523) является скаляром относительно преобразований пространственных координат.

Теперь запишем первое уравнение (146) для поля $\tilde{\Phi}^{00}$ в декартовой системе координат. Так как в этом случае $\tilde{\Phi}^{00} = \Phi^{00}$, имеем

$$\Box \Phi^{00} = 16\pi (t^{00}_{(g)} + t^{00}_{(M)}).$$

Когда величина $t^{00}_{(g)} + t^{00}_{(M)}$ постоянна во времени или очень слабо меняется со временем, так что гравитационное излучение пренебрежимо мало, для Φ^{00} получим уравнение

$$\Delta\Phi^{00} = -16\pi (t^{00}_{(g)} + t^{00}_{(M)}),$$

решение которого представим в виде

$$\Phi^{00} = 4 \int \frac{d^3x' (t^{00}_{(g)} + t^{00}_{(M)})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Отсюда при $|\mathbf{x}| = r \to \infty$ находим

$$\Phi^{00} \simeq 4m_i/r. \tag{524}$$

В силу связи (121) для $\tilde{g}^{00}$ имеем выражение:

$$\tilde{g}^{00} \simeq 1 + 4m_i/r.$$

В то же время, определяя $\tilde{g}^{00}$ из (445), (448) и (489), получаем:

$$\tilde{g}^{00} \simeq 1 + 4U,$$

где U — ньютоновский потенциал. Поскольку (в единицах $c = G = 1$) для U вдали от источника справедливо представление

$$U = M/r,$$

где M по определению гравитационная масса тела, приходим к тождеству

$$m_i \equiv M, \tag{525}$$

что и требовалось доказать.

По ходу отметим, что величина

$$P^n = \int d^3x\, (t^{0n}_{(g)} + t^{0n}_{M}) \tag{526}$$

в рамках РТГ при произвольных преобразованиях координат является 4-вектором энергии-импульса системы. Аналогично момент количества движения системы в РТГ является тензором относительно любых преобразований координат в четырехмерном пространстве Минковского.

Чтобы получить ограничения на значения постньютоновских параметров, накладываемые экспериментами, рассмотрим их в следующей последовательности: сначала рассмотрим стандартные эффекты — отклонение света и радиоволн в поле Солнца, смещение перигелия Меркурия и измерение временной задержки радиосигналов в гравитационном поле Солнца. Далее проанализируем планируемый эксперимент по измерению прецессии гироскопа на околоземной орбите. После этого рассмотрим эффект Нордтведта, а также эффекты с неравенством нулю параметров α_1, α_2, α_3 и ξ_ω.

Отклонение света и радиоволн в гравитационном поле Солнца. При расчетах стандартных эффектов в гравитационном поле Солнца в качестве идеализированной модели Солнца обычно берут статический сферически-симметричный шар радиуса $R_\odot$. Тогда в этом случае метрические коэффициенты эффективного риманова пространства с постньютоновской точностью в области $r > R_\odot$ будут:

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2GM_\odot}{r} + 2\beta\frac{G^2M_\odot^2}{r^2}\,;\\ g_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}\left(1 + 2\gamma\frac{GM_\odot}{r}\right);\\ g_{0\alpha} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (527)$$

где $M_\odot$ — масса Солнца. На основании (527) легко получить выражения для g^{mn}:

$$\left.\begin{aligned} g^{00} &= 1 + \frac{2GM_\odot}{r} + 2\,(2-\beta)\frac{G^2M_\odot^2}{r^2}\,;\\ g^{\alpha\beta} &= \gamma^{\alpha\beta}\left(1 - 2\gamma\frac{GM_\odot}{r}\right);\\ g^{0\alpha} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (528)$$

Заметим, что сферические координаты в псевдоевклидовом пространстве нами выбраны согласно метрике Минковского, имеющей вид (221), и поэтому в формулах (527) и (528) греческие индексы принимают значения (r, θ, φ).

Уравнения движения для материальной частицы или фотона запишем в виде геодезических уравнений в эффективном римановом пространстве с метрикой (527):

$$\frac{D}{d\sigma}\left(\frac{dx^m}{d\sigma}\right) + G^m_{pq}\frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma} = 0, \qquad (529)$$

где σ — параметр, описывающий траекторию.

Для метрики (527) компоненты тензора G^m_{pq}, отличные от нуля с постньютоновской точностью, равны:

$$\left.\begin{aligned}
G^0_{0r} &= \frac{1}{2} g^{00}\partial_r g_{00};\\
G^r_{00} &= -\frac{1}{2} g^{rr}\partial_r g_{00};\\
G^r_{rr} &= \frac{1}{2} g^{rr}\partial_r g_{rr};\\
G^r_{\theta\theta} &= -\frac{1}{2} g^{rr}\partial_r g_{\theta\theta};\\
G^r_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{2} g^{rr}\partial_r g_{\varphi\varphi};\\
G^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta};\\
G^\varphi_{r\varphi} &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi}\partial_r g_{\varphi\varphi}.
\end{aligned}\right\} \qquad (530)$$

Для дальнейшего удобно метрические коэффициенты (527) и (528) записать в другой, эквивалентной постньютоновской точности, форме:

$$\left.\begin{aligned}
g_{00} &= (g^{00})^{-1} = 1 - 2U + 2\beta U^2;\\
g_{rr} &= (g^{rr})^{-1} = -(1 + 2\gamma U);\\
g_{\theta\theta} &= (g^{\theta\theta})^{-1} = -r^2(1 + 2\gamma U) \simeq -(r + \gamma r U)^2;\\
g_{\varphi\varphi} &= (g^{\varphi\varphi})^{-1} = -r^2\sin^2\theta\,(1 + 2\gamma U) \simeq -\sin^2\theta\,(r + \gamma r U)^2,
\end{aligned}\right\} \qquad (531)$$

где

$$U = GM_\odot/r. \qquad (532)$$

Пусть

$$R = r + \gamma r U = r + \gamma G M_\odot. \qquad (533)$$

Тогда имеем:

$$g_{\theta\theta} = (g^{\theta\theta})^{-1} = -R^2; \quad g_{\varphi\varphi} = (g^{\varphi\varphi})^{-1} = -R^2\sin^2\theta. \qquad (534)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
g_{00} &= (g^{00})^{-1} = (1 - 2U + 2\beta U^2) = B(R);\\
g_{rr} &= (g^{rr})^{-1} = -(1 + 2\gamma U) \simeq -(1 + \gamma U)^2 \equiv -A(R)
\end{aligned} \qquad (535)$$

и учитывая, что $\partial/\partial r = \partial/\partial R$, из (530) находим:

$$\left.\begin{aligned}
&G^0_{0r} = \frac{1}{2B(R)}\,\frac{dB(R)}{dR};\\
&G^r_{00} = \frac{1}{2A(R)}\,\frac{dB(R)}{dR};\\
&G^r_{rr} = \frac{1}{2A(R)}\,\frac{dA(R)}{dR};\\
&G^r_{\theta\theta} = -\frac{R}{A(R)};\quad G^r_{\varphi\varphi} = -\frac{R\sin^2\theta}{A(R)};\\
&G^\theta_{r\theta} = G^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{R}.
\end{aligned}\right\} \tag{536}$$

Начиная с этого места мы будем следовать схеме, изложенной в [42]. Запишем геодезические уравнения (529) в развернутом виде:

$$\frac{d^2t}{d\sigma^2} + \frac{1}{B(R)}\,\frac{dB(R)}{dR}\,\frac{dR}{d\sigma}\,\frac{dt}{d\sigma} = 0; \tag{537}$$

$$\frac{d^2R}{d\sigma^2} + \frac{1}{2A(R)}\,\frac{dA(R)}{dR}\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)^2 + \frac{1}{2A(R)}\,\frac{dB(R)}{dR}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 - {}$$
$$- \frac{R}{A(R)}\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 - \frac{R\sin^2\theta}{A(R)}\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0; \tag{538}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} + \frac{2}{R}\,\frac{dR}{d\sigma}\,\frac{d\theta}{d\sigma} = 0; \tag{539}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} + \frac{2}{R}\,\frac{dR}{d\sigma}\,\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0. \tag{540}$$

Поскольку поле изотропно, без ограничения общности мы можем рассматривать только те траектории, которые лежат в экваториальной плоскости. Следовательно, мы можем в уравнениях (538), (539) положить $\theta = \pi/2$. Тогда в этом случае уравнение (539) выполняется тождественно, а уравнение (538) примет вид:

$$\frac{d^2R}{d\sigma^2} + \frac{1}{2A(R)}\,\frac{dA(R)}{dR}\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2A(R)}\,\frac{dB(R)}{dR}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 - \frac{R}{A(R)}\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0. \tag{541}$$

Из (537) и (540) легко найти, что

$$dt/d\sigma = C/B(R) \tag{542}$$

и

$$R^2 d\varphi/d\sigma = J, \tag{543}$$

где C и J — постоянные интегрирования и являются интегралами движения рассматриваемой задачи. Однако переопределением параметра σ всегда можно добиться, чтобы постоянная C в (542) равнялась единице. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем использовать равенство:

$$dt/d\sigma = 1/B\,(R). \tag{544}$$

Подставляя соотношения (543) и (544) в уравнения (541), а полученное выражение умножая на $2A(R)dR/d\sigma$, после несложных преобразований находим:

$$\frac{d}{d\sigma}\left[A\,(R)\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)^2+\frac{J^2}{R^2}-\frac{1}{B\,(R)}\right]=0.$$

Откуда следует, что

$$A\,(R)\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)^2+\frac{J^2}{R^2}-\frac{1}{B\,(R)}=-E \tag{545}$$

также является интегралом движения данной задачи. Найдем теперь связь между собственным временем τ и параметром траектории движения σ. Собственное время τ определим из интервала

$$d\tau^2=g_{00}\,dt^2+g_{rr}\,dR^2+g_{\theta\theta}\,d\theta^2+g_{\varphi\varphi}\,d\varphi^2, \tag{546}$$

где метрические коэффициенты заданы через формулы (534), (535). Поскольку $\theta=\pi/2$, с учетом соотношений (543)—(545) из (546) имеем

$$d\tau^2 = E d\sigma^2. \tag{547}$$

Так как для безмассовых частиц $d\tau^2 = 0$, отсюда видим, что для фотона

$$E=0. \tag{548}$$

Если масса покоя частиц отлична от нуля, то из (547) следует неравенство $E>0$. На основании (544) и (547) можно связать между собой собственное время τ и временную координату пространства Минковского t:

$$d\tau^2 = EB^2\,(R)\,dt^2. \tag{549}$$

Аналогично из (543) и (545), исключив параметр σ с помощью (544), найдем

$$R^2\frac{d\varphi}{dt}=JB\,(R); \tag{550}$$

$$\frac{A\,(R)}{B^2\,(R)}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{J^2}{R^2}-\frac{1}{B\,(R)}+E=0. \tag{551}$$

Так как $A\,(R)>0$, для разрешимости уравнений (551) необходимо, чтобы имело место неравенство

$$J^2/R^2+E\leqslant 1/B\,(R). \tag{552}$$

Система уравнений (550), (551) решается в квадратурах, если исключить переменную t. Определяя из (550) dt и подставляя в (551), получаем

$$\frac{A(R)}{R^4}\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{R^2}-\frac{1}{J^2B(R)}+\frac{E}{J^2}=0. \tag{553}$$

Отсюда решение, выражающее φ через R, может быть представлено в виде

$$\varphi=\pm\int\frac{A^{1/2}(R)\,dR}{R^2}\left[\frac{2}{J^2B(R)}-\frac{E}{J^2}-\frac{1}{R^2}\right]^{-1/2}. \tag{554}$$

Теперь формулы (553) и (554) следует записать в терминах r. В силу (533) и (535) находим:

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}-\frac{(1+\gamma U)^2}{J^2B(r)}+\frac{E(1+\gamma U)^2}{J^2}=0 \tag{555}$$

и

$$\varphi=\pm\int\frac{dr}{r^2}\left[\frac{(1+\gamma U)^2}{J^2B(r)}-\frac{E(1+\gamma U)^2}{J^2}-\frac{1}{r^2}\right]^{-1/2}. \tag{556}$$

Соотношение (556) определяет форму траектории движения частиц в гравитационном поле Солнца в постньютоновском приближении.

Пусть нас интересует задача описания траектории частиц, поступающих из удаленных областей и проходящих мимо Солнца. Поместим начало отсчета координатной системы в центр Солнца. Предположим, что интересующая нас частица движется в экваториальной плоскости (xy) параллельно оси x, от положительной бесконечности в сторону отрицательной бесконечности. Поскольку отсчет угла φ ведется от положительного направления оси x, то очевидно, что $\varphi(+\infty)=0$.

Если бы не происходило отклонения траектории частиц в гравитационном поле Солнца, то изменение угла φ на протяжении всего движения составило бы π, так как $\varphi(-\infty)-\varphi(\infty)=\pi$. Однако в результате воздействия гравитационного поля траектория частиц отклоняется от прямолинейного движения. Поэтому меру этого отклонения будем характеризовать величиной

$$\delta\varphi=\Delta\varphi-\pi. \tag{557}$$

На значительном расстоянии от Солнца, т. е. при $r\to\infty$, из (535) находим, что $A(\infty)=B(\infty)=1$. Тогда из (551) получим

$$(dr/dt)^2=1-E. \tag{558}$$

Так как в области $r\to\infty$ частица движется свободно, то ее скорость $dr/dt=v$ постоянна и, следовательно, $E=\text{const}$, что полностью согласуется со смыслом величины E как интеграла движения. Поскольку для фотона (в единицах $c=1$) $v=1$, то $E=0$. Для материальной частицы $v<1$, и поэтому $E<1$.

Пусть r_0 — ближайшее расстояние от центра Солнца до траектории частицы. Тогда для интеграла движения J из (555) в силу $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{r=r_0} = 0$ находим

$$J = r_0\ [1 + \gamma U(r_0)] \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + v^2\right)^{1/2}. \tag{559}$$

Учитывая это выражение в (556), получаем:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{dr'}{r'} \left[\frac{B(r_0)}{[1-(1-v^2)B(r_0)]} \left(\frac{r'}{r_0}\right)^2 \frac{A^2(r')}{A^2(r_0)} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{B(r')} - E\right) - 1\right]^{-1/2}. \tag{560}$$

Для фотона отсюда находим:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{dr'}{r'} \left[\left(\frac{r'}{r_0}\right)^2 \frac{B(r_0)}{B(r')} \frac{A^2(r')}{A^2(r_0)} - 1\right]^{-1/2}. \tag{561}$$

В первом порядке по $M_\odot G/r_0$ из (561) получим:

$$\varphi(r_0) = (M_\odot G/r_0)(1+\gamma) + \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что полное изменение угла $\varphi(r)$, когда фотон совершает путь от бесконечности до точки $r = r_0$, а затем уходит в бесконечность, равно значению $2\varphi(r_0)$. Поэтому для $\Delta\varphi$ имеем:

$$\Delta\varphi = 2[\varphi(r_0) - \varphi(+\infty)] = \frac{2M_\odot G}{r_0}(1+\gamma) + \pi.$$

Подставляя это выражение в (557) для отклонения $\delta\varphi$ с точностью до членов порядка $GM_\odot/r_0$ включительно, получаем окончательную формулу

$$\delta\varphi = \frac{4M_\odot G}{r_0}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right). \tag{562}$$

Выбирая в качестве r_0 радиус Солнца, из (562) найдем:

$$\delta\varphi = 1{,}75''\left(\frac{1+\gamma}{2}\right). \tag{563}$$

Анализ экспериментальных результатов, полученных при наблюдении в гравитационном поле Солнца искривления лучей света далеких звезд, а также радиоволн, излучаемых квазарами, дает основание считать [54], что постньютоновский параметр $\gamma = 1 \pm 0{,}2$.

Смещение перигелия Меркурия. Пусть частица с массой $m \neq 0$ совершает движение по замкнутой кривой вокруг Солнца. Для описания этого движения применим общие формулы (555) и (556). Как и в предыдущем пункте этого раздела, начало координатной системы поместим в центр Солнца, а экваториальную плоскость (xy) совместим с плоскостью движения частиц. Так как траектория замкнутая, то существует два значения $r(\varphi)$, для которых $dr/d\varphi = 0$. Обозначим их $r_\pm$. Тогда из (555) имеем:

$$\frac{1}{r_\pm^2} - \frac{A^2(r_\pm)}{J^2 B(r_\pm)} + \frac{EA^2(r_\pm)}{J^2} = 0.$$

Отсюда мы можем определить значение интегралов движения J и E:

$$J^2 = \frac{r_+^2 r_-^2 A(r_+) A(r_-)}{B(r_+) B(r_-)} \frac{B(r_+) - B(r_-)}{r_+^2 A(r_+) - r_-^2 A(r_-)}; \tag{564}$$

$$E = \frac{1}{r_+^2 A(r_+) - r_-^2 A(r_-)} \left[\frac{r_+^2 A(r_+)}{B(r_+)} - \frac{r_-^2 A(r_-)}{B(r_-)}\right]. \tag{565}$$

Угол $\varphi(r)$, на который повернется радиус-вектор положения частицы $\mathbf{r}$, отсчитанный от направления $\mathbf{r} = \mathbf{r}_-$ согласно (556), можно вычислить по формуле

$$\varphi(r) = \varphi(r_-) + \int\limits_{r_-}^{r} \frac{dr'}{r'^2} \left[\frac{A(r')}{J^2 B(r')} - \frac{EA(r')}{J^2} - \frac{1}{r'^2}\right]^{-1/2}. \tag{566}$$

Полагая здесь $r = r_+$ и учитывая соотношения (564), (565), после несложных, но длинных вычислений в постньютоновском приближении найдем

$$\varphi(r_+) - \varphi(r_-) \approx \pi + \frac{\pi M_\odot G}{(1 - e^2) L}(2 + 2\gamma - \beta). \tag{567}$$

Здесь L — большая полуось, а e — эксцентриситет орбиты.

Изменения угла φ при движении частицы от положения $r = r_-$ до положения $r = r_+$ и обратно от положения $r = r_+$ до положения $r = r_-$ должны быть равны. Поэтому полное изменение угла φ при одном обороте будет:

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{2\pi M_\odot G}{(1 - e^2) L}(2 + 2\gamma - \beta). \tag{568}$$

Отсюда видно, что орбита движения частиц незамкнута. Она прецессирует в сторону движения частицы, и мерой прецессии в постньютоновском приближении является величина

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi = \frac{2\pi G M_\odot}{(1 - e^2) L}(2 + 2\gamma - \beta). \tag{569}$$

На смещение перигелия Меркурия, кроме наличия постньютоновских поправок в уравнении движения, влияет еще ряд факторов. К их числу относятся: притяжение со стороны планет Солнечной системы, наличие квадрупольного момента у Солнца. Единственным неопределенным фактором среди них является значение квадрупольного момента Солнца; влияние всех других факторов можно рассчитать с достаточной точностью.

Суммарное смещение перигелия Меркурия, вызываемое наличием квадрупольного момента J_2 у Солнца и постньютоновскими поправками в уравнении движения, равно

$$\delta\varphi = 42{,}98\,[(2 + 2\gamma - \beta)/3] + 1{,}3\cdot 10^5 J_2$$

(в единицах угловых секунд за столетие). Из результатов наблюдений следует [54], что $\delta\varphi = 41{,}4 \pm 0{,}9$ угловых секунд за столетие.

Измерения видимой формы Солнца, проделанные Дикке и Гольденбергом [55], для J_2 дали значение $J_2 = (2{,}5 \pm 0{,}2) \times 10^{-5}$, а более поздние измерения Хилла с сотр. [56, 57] показали, что $J_2 < < 0{,}5\cdot 10^{-5}$. Сравнение наблюдаемых смещений перигелиев Меркурия и Марса [58] дали оценку $J_2 < 3\cdot 10^{-5}$.

Таким образом, из-за отсутствия прямых измерений квадрупольного момента Солнца остается большая неопределенность в значении β, определяемом по смещению перигелия Меркурия: $\beta = 1^{+0{,}4}_{-0{,}2}$ при условии, что $\gamma = 1$.

Временная задержка радиосигналов в поле Солнца. Другим независимым способом определения постньютоновского параметра γ является измерение временной задержки радиосигналов в поле Солнца [59]. Этот эффект состоит в том, что время распространения радиосигналов, посылаемых с Земли, до отражателя, расположенного в другой части Солнечной системы, и обратно, измеренное часами, находящимися на Земле, отличается от этого же процесса, происходящего в отсутствие гравитационного поля.

Если в качестве отражателя взять Меркурий, когда он находится в верхнем соединении, и траектория радиосигнала касается Солнца, время запаздывания максимально и может быть вычислено с помощью (551).

Как показано в [57], оно равно

$$\Delta t_{\text{макс}} \simeq 4GM_\odot(1+\gamma)\left[1 + \ln\frac{2\sqrt{r_З r_М}}{r_\odot}\right] \simeq \frac{1+\gamma}{2}\cdot 260\ \text{мкс},$$

что превышает соответствующий результат ОТО на 20 мкс.

Таким образом, уже в Солнечной системе РТГ предсказывает результат, доступный экспериментальной проверке и отличный от предсказания ОТО.

Ввиду принципиальности данного вывода представляется крайне важным проведение тщательных экспериментов по измерению времени запаздывания.

Прецессия гироскопа, движущегося по орбите. Если параметры α_1, α_2, α_3 равны нулю, то измерение прецессии гироскопа, движущегося по орбите вокруг Земли, будет третьим независимым способом измерения параметра γ.

Согласно [60], угловая скорость прецессии гироскопа, находящегося на круговой орбите в поле Земли,

$$\Omega = \frac{2\gamma+1}{2} m \frac{[\mathbf{rv}]}{r^3} + \frac{\gamma+1}{2r^3}\left(-\mathbf{J} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{Jr})}{r^2}\right),$$

где m — масса Земли; $\mathbf{v}$ — линейная скорость гироскопа относительно центра Земли; $\mathbf{J}$ — момент импульса Земли; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой находится гироскоп. Уровень современного развития техники позволяет надеяться, что этот эксперимент будет осуществлен в ближайшем будущем.

Эффект Нордтведта и лазерная локация Луны. В последнее время некоторые исследователи [61—63] сосредоточили свое внимание на установлении соотношений между инертной и гравитационной массами одного и того же тела в различных теориях гравитации и поиске возможностей для проверки на эксперименте этих соотношений.

В любой теории гравитации, как считал Бонди [64], мы можем различить три вида массы, согласно измерениям, по которым они определяются: инертную массу m_i, пассивную гравитационную массу m_p и активную гравитационную массу m_a.

Инертная масса — это масса, которая входит (и определяется им) во второй закон Ньютона:

$$m_i a^\alpha = F^\alpha.$$

Пассивная гравитационная масса — это масса, на которую действует гравитационное поле, т. е. масса, определяемая выражением:

$$F^\alpha = -m_p \nabla^\alpha U.$$

Активная гравитационная масса — это масса, которая является источником гравитационного поля.

В ньютоновской механике третий закон Ньютона требует равенства активной и пассивной масс $m_a = m_p$ независимо от размера и состава тела; равенство инертной массы с двумя остальными принимается как эмпирический факт.

В теории Эйнштейна для точечных тел имеет место равенство инертной и пассивной гравитационных масс. При этом равенство активной и пассивной гравитационных масс не постулируется.

В некоторых теориях гравитации все три массы одного и того же тела могут различаться. Поэтому возникает необходимость установить соответствие между этими тремя массами с помощью эксперимента.

Как уже указывалось в начале этого раздела, попытки измерения отношения пассивной гравитационной массы к инертной массе для тел любых лабораторных размеров [52] дали лишь частичный ответ на поставленный вопрос, так как точность экспериментов была заведомо недостаточной, чтобы определить, в каком соотношении входят в эти массы собственная гравитационная энергия тела, энергия упругих деформаций и т. п.

Так как отношение собственной гравитационной энергии тела к его массе возрастает с ростом размеров тела, целесообразнее для указанных целей использовать протяженные тела — планеты.

Однако поскольку гравиметрическое измерение отношения пассивной гравитационной массы протяженного тела (планеты) к его инертной массе невозможно, возникла необходимость теоретического изучения движения протяженных тел в гравитационном поле других тел с целью выяснения тех особенностей в движении протяженного тела, к которым может привести возможное неравенство его инертной и гравитационной масс.

Одной из таких особенностей является эффект возможного отклонения на постньютоновском уровне движения центра масс протяженного тела от движения по геодезической риманова пространства-времени. На возможность такого эффекта обратил внимание Дикке [61], высказав предположение, что отношение гравитационной массы к инертной массе для астрономических тел может слегка отличаться от единицы, если собственная гравитационная энергия всех этих тел изменяется при изменении их положения в гравитационном поле других тел. Впоследствии этот эффект исследовали Нордтведт [63], Вилл [65] и Дикке [62].

Нордтведт [63] на модели когерентных частиц весьма детально изучил этот эффект (который вследствие этого получил название эффекта Нордтведта) и показал его возможность в некоторых метрических теориях гравитации.

Вилл [65] на основе расчета движения протяженного тела в гравитационном поле покоящегося массивного точечного источника пришел к выводу, что тензор пассивной гравитационной массы протяженного тела в постньютоновском приближении произвольной метрической теории гравитации имеет вид

$$\frac{m^{\alpha\beta}}{M} = -\gamma^{\alpha\beta}\left[1-(4\beta-\alpha_1-\gamma-3-\xi_1+\alpha_2)\,\Omega^{\nu}_{\nu}\right]- \\ -(\alpha_2+\xi_2-\xi_1)\,\Omega^{\alpha\beta}, \tag{570}$$

где Ω^{ν}_{ν} и $\Omega^{\alpha\beta}$ — постньютоновские поправки:

$$\left.\begin{aligned} \Omega^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2M}\int \frac{\rho\rho'\,(x^{\alpha}-x'^{\alpha})\,(x^{\beta}-x'^{\beta})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,d^3x\,d^3x'; \\ \Omega^{\nu}_{\nu} &= \frac{1}{2M}\int \frac{\rho\rho'\,d^3x\,d^3x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \end{aligned}\right\} \tag{571}$$

При таком подходе наличие постньютоновских поправок в выражении (570) интерпретировалось как результат нарушения в некоторых теориях гравитации на постньютоновском уровне равенства пассивной гравитационной и инертной масс протяженного тела. Кроме того, утверждалось, что равенство инертной и пассивной гравитационной масс в постньютоновском приближении будет означать, что центр масс протяженного тела движется по геодезической риманова пространства-времени.

Однако в условиях реального эксперимента определить, движется или не движется центр масс протяженного тела по геодезической риманова пространства-времени, также довольно трудно. Поэтому предлагалось определить из экспериментов значения всех необходимых постньютоновских параметров и, используя формулу Вилла (570), дать ответ на ставшие уже академическими вопросы о соотношении между тензором пассивной гравитационной массы протяженного тела и его инертной массой, а также о характере движения центра масс этого тела относительно геодезической риманова пространства-времени.

В результате расчета движения системы Земля — Луна в гравитационном поле Солнца Нордтведт [63] указал на ряд возможных аномалий в движении Луны, наблюдение которых может дать возможность измерить различные комбинации постньютоновских параметров. Одной из таких аномалий является поляризация орбиты Луны в направлении Солнца с амплитудой $\delta r = \eta L$, где L — константа порядка 10 м, а

$$\eta = -\frac{1}{3}(\xi_2 + \alpha_2 - \xi_1) + (4\beta - \xi_1 - \gamma - \alpha_1 + \alpha_2 - 3) - \frac{10}{3}\xi_\omega. \quad (572)$$

Для обнаружения этого эффекта был проведен анализ данных, полученных при лазерной локации Луны. В результате этого анализа одна из групп [66] пришла к выводу, что

$$\eta = 0 \pm 0{,}03. \quad (573)$$

Другая группа [67] получила близкий результат:

$$\eta = -0{,}001 \pm 0{,}015. \quad (574)$$

Используя эти оценки и теоретическую формулу Вилла (570) для тензора пассивной гравитационной массы, авторы работ пришли к выводу, что отношение пассивной гравитационной массы протяженного тела к его инертной массе близко к единице:

$$\left|\frac{m_p^{\alpha\beta}}{M} - \delta^{\alpha\beta}\right| < 1{,}5\cdot 10^{-11}.$$

Таким образом, данные, полученные при лазерной локализации Луны, казалось бы, позволяют утверждать (и эти выводы были сделаны в научной литературе [54, 66, 67]), что в постньютоновском приближении пассивная гравитационная масса протяженного тела равна его инертной массе и центр масс протяженного тела движется по геодезической риманова пространства-времени.

Однако, как показано в работе [51], формула (570), полученная Виллом, ошибочна. Поэтому и интерпретация результатов измерения величины η (573), (574), содержащаяся в [66, 67] и основанная на использовании этой формулы, является неправильной.

Эффекты, связанные с наличием предпочтительной системы отсчета. Теории гравитации, у которых хотя бы один из параметров α_1, α_2, α_3 отличается от нуля, обладают предпочтительной системой отсчета. Предсказания таких теорий гравитации относительно стандартных эффектов могут совпадать с результатами наблюдений только в том случае, если Солнечная система является предпочтительной системой отсчета. Однако разумнее предполагать, что Солнечная система, движущаяся относительно других звездных систем, ничем не выделена по сравнению с ними, а поэтому не может быть предпочтительной универсальной системой покоя для таких теорий. Так как предпочтительная система покоя должна быть выделенной чем-то по сравнению с другими системами, то разумнее связывать эту систему с центром масс Галактики или даже Вселенной. В этом случае Солнечная система будет находиться в движении относительно предпочтительной системы покоя со скоростью $v \simeq 10^{-3}$ с того же порядка величины, что и орбитальная скорость Солнечной системы относительно центра Галактики. В этом случае возможно наблюдение ряда эффектов, связанных с движением относительно предпочтительной системы покоя [54], что позволяет оценить параметры α_1, α_2, α_3.

В теориях гравитации с предпочтительной системой покоя постоянная тяготения G, измеряемая в гравиметрических экспериментах, будет зависеть от движения Земли относительно такой системы.

Для относительной величины $\Delta G/G$ имеем [54]:

$$\frac{\Delta G}{G} = \left(\frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3 - \alpha_1\right) \boldsymbol{\omega}\mathbf{v} + \frac{1}{4}\alpha_2 \left[(\mathbf{v}\mathbf{e}_r)^2 + 2(\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}_r)(\mathbf{v}\mathbf{e}_r) + (\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}_r)^2\right],$$

где $\mathbf{v}$ — орбитальная скорость Земли вокруг Солнца; $\boldsymbol{\omega}$ — скорость Солнца относительно предпочтительной системы покоя; $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный от гравиметра к центру Земли.

Вследствие вращения Земли вокруг своей оси вектор $\mathbf{e}_r$ изменяет свою ориентацию относительно векторов $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$, что приводит к периодическому изменению скалярных произведений $\mathbf{v}\mathbf{e}_r$ и $\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}_r$ с периодом, примерно равным 12 ч. Это приводит к соответствующим периодическим изменениям значения ускорения свободного падения: для точки наблюдения, находящейся на широте θ, имеем:

$$\frac{\Delta g}{g} \approx 3\alpha_2 \cdot 10^{-8} \cos^2\theta.$$

Вилл [68, 69], анализируя результаты гравиметрических экспериментов, нашел, что относительные изменения g не превышают 10^{-11}:

$$\left|\frac{\Delta g}{g}\right| < 10^{-11}.$$

Отсюда получаем оценку:

$$|\alpha_2| < 3\cdot 10^{-4}.$$

Движение Земли вокруг Солнца также приводит к периодическому изменению $\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}$ с периодом порядка года. Эта вариация вызывает сжатие и расширение Земли, что, в свою очередь, приводит к периодическим изменениям угловой скорости вращения Земли из-за изменения ее момента инерции:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = 3\cdot 10^{-9}\left(\alpha_3 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \alpha_1\right).$$

Из результатов наблюдений следует, что

$$\left|\alpha_3 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \alpha_1\right| < 0{,}02.$$

Движение Солнечной системы относительно центра Вселенной может приводить к аномальному смещению перигелиев планет. Для Меркурия [69] дополнительный вклад в смещение перигелия (в угловых секундах за столетие) имеет вид:

$$\delta\varphi_0 = -123\alpha_1 + 92\alpha_2 + 1{,}4\cdot 10^5\alpha_3 + 63\xi_\omega.$$

Сравнение с наблюдениями и объединение всех оценок параметров α дает:

$$|\xi_\omega| < 2\cdot 10^{-3};\ |\alpha_1| < 10^{-3};\ |\alpha_2| < 4\cdot 10^{-2};\ |\alpha_3| < 2\cdot 10^{-7}.$$

В РТГ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, и поэтому все эти эффекты отсутствуют.

Отношение активной и пассивной гравитационных масс. Для активной гравитационной массы в постньютоновском приближении Нордтведт [70] получил следующее выражение:

$$m_a = m_i + 2\left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{\xi_1}{2} - \xi_4\right)E_{\mathrm{kin}} + \xi_3 E_{\mathrm{int}} + (4\beta - 2\xi_2 - 3 - \gamma)\,\Omega - \\ - \xi_1 E^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta, \tag{575}$$

где $\mathbf{e}_\alpha$ — единичный вектор, вдоль линий соединяющий массивное тело с точкой, в которой измеряется его поле;

$$E_{\mathrm{kin}} = -\frac{1}{2}\int \hat{\rho} v_\alpha v^\alpha\, d^3x;\quad E_{\mathrm{int}} = \int \hat{\rho}\Pi\, d^3x;$$

m_i — инертная масса тела,

$$m_i = \int \hat{\rho}\left(1 - \frac{1}{2}v_\alpha v^\alpha + \Pi - \frac{1}{2}U\right) d^3x;$$

$$E^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\int \hat{\rho} v^\alpha v^\beta\, d^3x.$$

В РТГ из (575) имеем

$$m_a = m_i.$$

Эффекты анизотропии относительно центра Галактики. В тех теориях гравитации, у которых параметр $\xi_\omega \neq 0$, возможны эффекты анизотропии, вызываемые влиянием гравитационного поля Галактики [71].

Если считать, что масса Галактики M сосредоточена в центре Галактики на расстоянии R от Солнечной системы, то гравитационное поле Галактики приведет к периодическим изменениям показаний гравиметра с периодом 12 ч:

$$\frac{\Delta G}{G} = \xi_\omega \left(1 - \frac{3K}{mr^2}\right) \frac{M}{R} (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_R)^2,$$

где K — момент инерции; m — масса и r — радиус Земли; $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный от гравиметра к центру Земли; $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$.

Другим эффектом является аномальное смещение перигелий планет, обусловленное анизотропией, вызываемой Галактикой:

$$\delta\varphi_0 = \frac{\pi\xi_\omega}{2} \frac{M}{R} \cos^2\beta \cos^2(\omega - \lambda),$$

где λ и β — угловые координаты центра Галактики; ω — угол перигелия планеты в геоцентрических координатах.

Сравнение с наблюдениями дает в качестве верхнего предела для ξ_ω оценку:

$$|\xi_\omega| < 10^{-3}.$$

В РТГ $\xi_\omega = 0$ и все эффекты анизотропии, вызываемые гравитационным полем Галактики, отсутствуют.

19. ПОСТНЬЮТОНОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ В РТГ

Ковариантный закон сохранения (102) для плотности полного тензора энергии-импульса t^{mn} в псевдоевклидовом пространстве-времени запишем в декартовых координатах:

$$\partial_m t^{mn} = \partial_m [t^{mn}_{(g)} + t^{mn}_{(M)}] = 0. \tag{576}$$

На основании этого соотношения легко получить соответствующий интегральный закон сохранения

$$-\partial_0 \int dV t^{0n} = \oint dS_\alpha t^{\alpha n}. \tag{577}$$

Если поток энергии вещества и гравитационного поля через поверхность, ограничивающую объем интегрирования в (577), отсутствует, то

$$\oint dS_\alpha t^{n\alpha} = 0, \tag{578}$$

и мы приходим к закону сохранения полного 4-импульса изолированной системы

$$dP^n/dt = 0,$$

где

$$P^n = \int dV t^{0n}. \tag{579}$$

В этом случае в силу симметрии плотности полного тензора энергии-импульса t^{mn} сохраняется также и тензор момента импульса системы:

$$dM^{ni}/dt = 0,$$

где

$$M^{ni} = \int dV \, [x^n t^{0i} - x^i t^{0n}]. \tag{580}$$

Из сохранения компонент $M^{0\alpha}$ следует, что центр масс изолированной системы, определяемый формулой

$$X^\alpha = \frac{\int x^\alpha t^{00} \, dV}{\int t^{00} \, dV} = \frac{P^\alpha t - M^{0\alpha}}{P^0}, \tag{581}$$

совершает равномерное прямолинейное движение со скоростью

$$\frac{d}{dt} X^\alpha = \frac{P^\alpha}{P^0}. \tag{582}$$

Таким образом, для описания движения изолированной системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, достаточно определить 4-импульс P^n (579). Следует отметить, что в любой реальной системе из-за движения ее составных частей может происходить излучение гравитационных волн; любая реальная система обменивается с другими системами веществом как в форме электромагнитного излучения, так и в форме частиц, атомов и т. д. Поэтому в общем случае пренебрегать потоками энергии вещества и гравитационного излучения нельзя. Существуют астрофизические процессы, в которых эти потоки энергии играют ведущую роль, именно их учет и позволяет понять и предсказать многие астрофизические явления.

Но вместе с тем для систем, у которых потоки энергии вещества и гравитационного поля малы, условие изолированности (578) выполняется с некоторой степенью точности. Тогда с той же степенью точности мы можем утверждать о сохранении 4-импульса этой системы. К таким системам относятся системы, для которых применим постньютоновский формализм.

Чтобы найти явный вид 4-импульса P^n в постньютоновском приближении, будем исходить из тождества (100). Запишем это тождество в декартовой системе координат

$$\partial_m t_n^m \equiv \nabla_m T_n^m. \tag{583}$$

Умножая обе стороны (583) на dV и интегрируя по некоторому достаточно большому объему, получаем

$$\partial_0 \int t_n^0 dV + \oint t_n^\alpha \, dS_\alpha = \int \nabla_m T_n^m \, dV. \tag{584}$$

Полагая

$$\oint t_n^\alpha \, dS_\alpha = 0, \tag{585}$$

находим

$$\partial_0 P_n = \int \nabla_m T_n^m \, dV, \tag{586}$$

где в силу определения (579)

$$P_n = \gamma_{nk} \int dV t^{0k}. \tag{587}$$

С той точностью, с которой поток энергии вещества и гравитационного излучения через поверхность, ограничивающую объем интегрирования в (584), отсутствует, т. е. имеет место (585), соотношение (586) является точным.

Теперь воспользуемся формулой (586) для определения явного вида 4-импульса P_n. Это будет возможно, если правую часть равенства (586) представим в виде производной по времени от некоторого выражения.

Так как в данном разделе мы ставим перед собой задачу нахождения интегралов движения в постньютоновском приближении, рассмотрим правую часть (586) в этом приближении.

Запишем покомпонентно выражение $\nabla_m T^{mk}$:

$$\nabla_m T^{m0} = \partial_0 T^{00} + \partial_\alpha T^{\alpha 0} + \Gamma_{00}^0 T^{00} + 2\Gamma_{0\alpha}^0 T^{\alpha 0} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 T^{\alpha\beta}; \tag{588}$$

$$\nabla_m T^{m\alpha} = \partial_0 T^{0\alpha} + \partial_\nu T^{\nu\alpha} + \Gamma_{00}^\alpha T^{00} + 2\Gamma_{0\nu}^\alpha T^{\nu 0} + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha T^{\beta\nu}. \tag{589}$$

Здесь

$$\Gamma^k_{pq} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_p g_{lq} + \partial_q g_{lp} - \partial_l g_{pq}). \tag{590}$$

Используя постньютоновское разложение метрики (505)—(507), а также соотношение

$$\partial^\alpha \partial_0 \int dV \rho |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = N^\alpha - V^\alpha + O(\varepsilon^5),$$

из (590) с требуемой точностью найдем:

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = -\frac{\partial U}{\partial t} + O(\varepsilon^5);\quad \Gamma^0_{0\alpha} = -\partial_\alpha U + O(\varepsilon^4);\\
&\Gamma^\alpha_{\beta\nu} = (\delta^\alpha_\beta \partial_\nu U + \delta^\alpha_\nu \partial_\beta U - \gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\beta\nu}\partial_\sigma U) + O(\varepsilon^4);\\
&\Gamma^\alpha_{0\beta} = \delta^\alpha_\beta \frac{\partial U}{\partial t} + 2(\partial_\beta V^\alpha - \gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\beta\tau}\partial_\sigma V^\tau) + O(\varepsilon^5);\\
&\Gamma^0_{\alpha\beta} = 0(\varepsilon^3);\quad \Gamma^\alpha_{00} = 4\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + (1 - 2U)\partial^\alpha U -\\
&- \frac{1}{2}\partial^\alpha [2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - \Phi_4] +\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(N^\alpha - V^\alpha) + O(\varepsilon^6).
\end{aligned}\right\} \tag{591}$$

Кроме того, из (485)—(487), (500) и (501) с постньютоновским приближением имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&T^{00} = \hat{\rho}\left[1 + U + \Pi - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right) + O(\varepsilon^4);\\
&T^{0\alpha} = \hat{\rho} v^\alpha \left[1 + \Pi + U - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right] + p v^\alpha + O(\varepsilon^5);\\
&T^{\alpha\beta} = \hat{\rho} v^\alpha v^\beta \left(1 - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu + \Pi + U + \frac{p}{\hat{\rho}}\right) - \gamma^{\alpha\beta} p + O(\varepsilon^6).
\end{aligned}\right\} \tag{592}$$

Подставив выражения (591) и (592) в (588), получим

$$\begin{aligned}
\nabla_m T^{m0} = {} & \frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{\rho}\left(1 + \Pi + U - \frac{1}{2} v_\alpha v^\alpha\right)\right] +\\
& + \partial_\alpha \left[\hat{\rho} v^\alpha \left(1 + U + \Pi - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right) + p v^\alpha\right] - \hat{\rho}\frac{\partial U}{\partial t} -\\
& - 2\hat{\rho} v^\alpha \partial_\alpha U + O(\varepsilon^5).
\end{aligned} \tag{593}$$

Аналогично после подстановки в (589) выражений (591) и (592) найдем

$$\nabla_m T^{m\alpha} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{\rho} v^\alpha \left(1 + \Pi + U - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right) + p v^\alpha\right] + \partial_\beta \left[p v^\alpha v^\beta - p\gamma^{\alpha\beta} + \hat{\rho} v^\alpha v^\beta \left(1 + \Pi + U - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right)\right] + \frac{7}{2} \hat{\rho} \frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + \hat{\rho}\left(1 + \Pi + U - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right) \partial^\alpha U - 4\hat{\rho} U \partial^\alpha U + \hat{\rho}\partial^\alpha [2\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3 + 3\Phi_4] + 2\hat{\rho} v^\alpha \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\rho}\frac{\partial N^\alpha}{\partial t} + 4\hat{\rho} v^\beta (\partial_\beta V^\alpha - \partial^\alpha V_\beta) + p\partial^\alpha U + 2\hat{\rho} v^\alpha v^\beta \partial_\beta U + \hat{\rho} v^2 \partial^\alpha U + O(\varepsilon^6). \tag{594}$$

Формулы (593) и (594) могут быть упрощены, если принять во внимание уравнение неразрывности (483) и ньютоновские уравнения движения для упругого тела

$$\hat{\rho}\frac{dv^\alpha}{dt} = -\hat{\rho}\partial^\alpha U + \partial^\alpha p; \quad \hat{\rho}\frac{d\Pi}{dt} = -p\partial_\nu v^\nu \tag{595}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + v_\beta \partial^\beta$, а также соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\beta V_\alpha - \partial_\alpha V_\beta = \partial_\beta N_\alpha - \partial_\alpha N_\beta; \\ &\hat{\rho}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\hat{\rho} U] + \\ &+ \frac{1}{8\pi}\partial^\alpha\left[\partial_\alpha U \frac{\partial U}{\partial t} - U\partial_\alpha \frac{\partial U}{\partial t}\right]; \end{aligned}\right\} \tag{596}$$

В результате получим:

$$\nabla_m T^{m0} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{\rho}\left(1 + \Pi - \frac{1}{2}U - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right)\right] + \partial_\alpha\left[\hat{\rho} v^\alpha\left(1 + \Pi + U - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right) + p v^\alpha - \frac{1}{8\pi}\partial^\alpha U \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{8\pi} U \partial^\alpha \frac{\partial U}{\partial t}\right] + O(\varepsilon^4); \tag{597}$$

$$\nabla_m T^{m\alpha} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{\rho} v^\alpha \left(1 + \Pi + U - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right) + p v^\alpha + \frac{1}{2}\hat{\rho}(N^\alpha - V^\alpha)\right] + \partial_\beta\left[\hat{\rho} v^\alpha v^\beta\left(1 + \Pi + U - \frac{1}{2} v_\nu v^\nu\right) + p v^\alpha v^\beta - p(1 + 2U)\gamma^{\alpha\beta} + \hat{\rho} v^\beta (N^\alpha - V^\alpha)\right] + 4\hat{\rho}\frac{dV^\alpha}{dt} + 2\hat{\rho}\frac{d}{dt}(U v^\alpha) + \hat{\rho}\partial^\alpha U + 2\hat{\rho} U \partial^\alpha U + \hat{\rho}\left(\Pi + 2v^2 + \frac{3p}{\hat{\rho}}\right)\partial^\alpha U - 4\hat{\rho} v^\beta \partial^\alpha V_\beta - \frac{1}{2}\hat{\rho} v^\beta \partial_\beta (N^\alpha - V^\alpha) + \hat{\rho}\partial^\alpha [2\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3 + 3\Phi_4] + O(\varepsilon^6). \tag{598}$$

Подставляя эти выражения в правую часть (586) и учитывая тождества:

$$\left.\begin{aligned}
&\int dV\rho\,[\Pi\partial_\beta U+\partial_\beta\Phi_3]\equiv 0;\\
&\int dV\rho\,[U\partial_\beta U+\partial_\beta\Phi_2]\equiv 0;\\
&\int dV\,[p\partial_\beta U+\rho\partial_\beta\Phi_4]\equiv 0;\\
&\int dV\,[V^2\partial_\beta U+\partial_\beta\Phi_1]\equiv 0;\\
&\int dV\rho v^\beta\partial_\beta\,(N^\alpha-V^\alpha)\equiv 0;\\
&\int dV\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\partial^\alpha U=2\int dV\hat{\rho}\,[v^\alpha U+N^\alpha]\equiv 0;\\
&\int dV\hat{\rho}V^\alpha\equiv-\int dV\hat{\rho}v^\alpha U;\\
&\int dV\rho\partial_\beta U\equiv 0;\\
&\int dV\rho v_\nu\partial_\beta V^\nu=\int dV\rho v_\nu\partial_\beta N^\nu\equiv 0,
\end{aligned}\right\}\qquad(599)$$

а также принимая во внимание, что интегралы по объему от пространственной дивергенции после преобразования их в поверхностные исчезают, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}P^0=\frac{\partial}{\partial t}\int dV\hat{\rho}\left(1+\Pi-\frac{1}{2}U-\frac{1}{2}v_\nu v^\nu\right);\qquad(600)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_\alpha=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int dV\left[\hat{\rho}v_\alpha\left(1+\Pi-\frac{1}{2}U-\frac{1}{2}v_\alpha v^\nu\right)+pv_\alpha+\frac{1}{2}\hat{\rho}N_\alpha\right].\qquad(601)$$

При получении последней формулы мы воспользовались тем обстоятельством, что в выражении (598) опускание и поднятие индексов уже осуществляется метрическим тензором пространства Минковского.

Из (600) и (601) окончательно находим:

$$P^0=\int dV\hat{\rho}\left[1+\Pi-\frac{1}{2}U-\frac{1}{2}v_\nu v^\nu\right]\qquad(602)$$

и

$$P^\alpha=\int dV\left[\hat{\rho}v^\alpha\left(1+\Pi-\frac{1}{2}U-\frac{1}{2}v_\nu v^\nu\right)+pv^\alpha+\frac{1}{2}\hat{\rho}N^\alpha\right].\qquad(603)$$

20. ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ

Изучим теперь характер постньютоновского движения двух протяженных тел в создаваемом ими гравитационном поле. Будем считать, что оба тела состоят из идеальной жидкости, занимают объемы V_1 и V_2 и находятся друг от друга на расстоянии R, значительно превышающем их линейные размеры L_1 и L_2: $L_1/R \sim L_2/R \sim \varepsilon$. Для простоты предположим, что вещество в каждом из тел распределено сферически-симметрично и внутренние движения его пренебрежимо малы.

Сохраняющуюся плотность массы идеальной жидкости в рассматриваемом нами случае можно записать в виде

$$\hat{\rho}\,(x,\,t) = \hat{\rho}_1\,(x,\,t) + \hat{\rho}_2\,(x,\,t), \tag{604}$$

где плотность $\hat{\rho}_1\,(x,\,t)$ отлична от нуля в объеме V_1, а плотность $\hat{\rho}_2\,(x,\,t)$ — в объеме V_2.

Учитывая соотношение

$$\frac{d}{dt}\int \hat{\rho} f\,(v^\alpha,\,U,\,V^\alpha)\,dV = \int \hat{\rho}\left[\frac{df}{dt} + fO\,(\varepsilon^2)\right] dV, \tag{605}$$

а также равенство (604), проинтегрируем постньютоновские уравнения движения идеальной жидкости (598) по объему, занимаемому первым телом. Поскольку $\nabla_m T^{m\alpha} = 0$, в результате получим:

$$\frac{d}{dt}\,P^\alpha_{(1)} = F^\alpha_{(1)}, \tag{606}$$

где постньютоновские выражения для импульса первого тела $P^\alpha_{(1)}$ и действующей на него силы $F^\alpha_{(1)}$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
P^\alpha_{(1)} &= \int \hat{\rho}_1 \Big\{ v^\alpha \Big[1 + \Pi + 3U + \frac{1}{2}\,v^2 + \frac{p_1}{\hat{\rho}_1} + O\,(\varepsilon^4)\Big] + \\
&+ \frac{1}{2} N^\alpha + \frac{7}{2}\,V^\alpha \Big\}\,d^3x;\\
F^\alpha_{(1)} &= -\int \hat{\rho}_1 \Big\{ \Big[1 - U + \Pi + \frac{3}{2}\,v^2 + \frac{3p_1}{\hat{\rho}_1}\Big]\,\partial^\alpha U + \\
&+ 2\partial^\alpha\Phi_1 + 2\partial^\alpha\Phi_2 + \partial^\alpha\Phi_3 + 3\partial^\alpha\Phi_4 - \\
&- \frac{7}{2}\,v^\beta\partial^\alpha V_\beta - \frac{1}{2}\,v^\beta\partial^\alpha N_\beta \Big\}\,d^3x.
\end{aligned}\right\} \tag{607}$$

Интегрируя (598) по объему, занимаемому вторым телом имеем:

$$\frac{d}{dt}\,P^\alpha_{(2)} = F^\alpha_{(2)}. \tag{608}$$

Выражения для импульса второго тела и действующей на него силы аналогичны соотношениям (607):

$$\left.\begin{aligned}
P^{\alpha}_{(2)} &= \int \hat{\rho}_2 \left\{ v^{\alpha} \left[1 + \Pi + 3U + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_2}{\hat{\rho}_2} + O(\varepsilon^4) \right] + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} N^{\alpha} + \frac{7}{2} V^{\alpha} \right\} d^3x; \\
F^{\alpha}_{(2)} &= - \int \hat{\rho}_2 \left\{ \left[1 - U + \Pi + \frac{3}{2} v^2 + \frac{3p_2}{\hat{\rho}_2} \right] \partial^{\alpha} U + \right. \\
&+ 2\partial^{\alpha}\Phi_1 + 2\partial^{\alpha}\Phi_2 + \partial^{\alpha}\Phi_3 + 3\partial^{\alpha}\Phi_4 - \frac{7}{2} v^{\beta}\partial^{\alpha}V_{\beta} - \\
&\left. - \frac{1}{2} v^{\beta}\partial^{\alpha}N_{\beta} \right\} d^3x.
\end{aligned}\right\} \qquad (609)$$

Используя равенства (599) и (605), а также (500), легко убедиться, что $F^{\alpha}_{(1)} + F^{\alpha}_{(2)} = 0$. Поэтому полный импульс двойной системы, как и следовало ожидать, сохраняется.

Поместим начало координат в центр масс двойной системы. Радиус-вектор центра масс первого тела в этой системе координат обозначим $Y^{\alpha}_{(1)}$, второго тела $Y^{\alpha}_{(2)}$, а их разность $Y^{\alpha}_{(1)} - Y^{\alpha}_{(2)} = R^{\alpha}$. Тогда для радиус-вектора $X^{\alpha}_{(1)}$ произвольной точки первого тела имеем $X^{\alpha}_{(1)} = x^{\alpha}_{(1)} + Y^{\alpha}_{(1)}$, где $x^{\alpha}_{(1)}$ — радиус-вектор той же точки, но в системе координат, начало которой помещено в центр масс первого тела. Аналогичное соотношение можно написать и для радиус-вектора любой точки второго тела.

В системе координат, связанной с центром масс рассматриваемой двойной системы, имеем:

$$\begin{aligned}
&\int \hat{\rho}_1 X^{\alpha}_{(1)} \left[1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} U + O(\varepsilon^4) \right] d^3x + \\
&+ \int \hat{\rho}_2 X^{\alpha}_{(2)} \left[1 + \Pi + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} U + O(\varepsilon^4) \right] d^3x = 0.
\end{aligned} \qquad (610)$$

Так как радиус-векторы $Y^{\alpha}_{(1)}$ и $Y^{\alpha}_{(2)}$ в силу их определения удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
Y^{\alpha}_{(1)} &\int \hat{\rho}_1 \left[1 + \Pi - \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} v^2 + O(\varepsilon^4) \right] d^3x = \\
&= \int \hat{\rho}^1 X^{\alpha}_{(1)} \left[1 + \Pi - \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} v^2 + O(\varepsilon^4) \right] d^3x; \\
Y^{\alpha}_{(2)} &\int \hat{\rho}_2 \left[1 + \Pi - \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} v^2 + O(\varepsilon^4) \right] d^3x = \\
&= \int \hat{\rho}_2 X^{\alpha}_{(2)} \left[1 + \Pi - \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} v^2 + O(\varepsilon^4) \right] d^3x,
\end{aligned}$$

то отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}
&\int \hat{\rho}_1 x_1^\alpha \left[1+\Pi+\frac{v^2}{2}-\frac{1}{2}U+O(\varepsilon^4)\right] d^3x = 0;\\
&\int \hat{\rho}_2 x_2^\alpha \left[1+\Pi+\frac{v^2}{2}-\frac{1}{2}U+O(\varepsilon^4)\right] d^3x = 0;\\
&Y^\alpha_{(1)} \int \hat{\rho}_1 \left[1+\Pi+\frac{v^2}{2}-\frac{1}{2}U+O(\varepsilon^4)\right] d^3x +\\
&+Y^\alpha_{(2)} \int \hat{\rho}_2 \left[1+\Pi+\frac{v^2}{2}-\frac{1}{2}U+O(\varepsilon^4)\right] d^3x = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (611)$$

Найдем уравнения движения центров масс каждого тела. Учитывая соотношения (604) и (500), обобщенные потенциалы, входящие в выражения (607), перепишем в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&U=\tilde{U}-3\tilde{\Phi}_2-\frac{1}{2}\tilde{\Phi}_1+\int \frac{\hat{\rho}_2 d^3y}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}+\frac{1}{2}\int \frac{\hat{\rho}_2 v_\alpha v^\alpha}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}d^3y-\\
&-3\int \frac{\hat{\rho}_1'\hat{\rho}_2''+\hat{\rho}_2'\hat{\rho}_1''+\hat{\rho}_2'\hat{\rho}_2''}{|\mathbf{X}-\mathbf{X}'|\,|\mathbf{X}'-\mathbf{X}''|} d^3X'd^3X''+O(\varepsilon^6);\\
&\Phi_1=\tilde{\Phi}_1-\int \frac{\hat{\rho}_2 v_\alpha v^\alpha}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}d^3y+O(\varepsilon^6);\\
&\Phi_2=\tilde{\Phi}_2+\int \frac{[\hat{\rho}_1'\hat{\rho}_2''+\hat{\rho}_2'\hat{\rho}_1''+\hat{\rho}_2'\hat{\rho}_2'']\,d^3X'd^3X''}{|\mathbf{X}-\mathbf{X}'|\,|\mathbf{X}'-\mathbf{X}''|}+O(\varepsilon^6);\\
&\Phi_3=\tilde{\Phi}_3+\int \frac{\hat{\rho}_2\Pi d^3y}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}+O(\varepsilon^6);\\
&\Phi_4=\tilde{\Phi}_4+\int \frac{p_2 d^3y}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}+O(\varepsilon^6);\\
&V^\alpha=\tilde{V}^\alpha-\int \frac{\hat{\rho}_2 v^\alpha d^3y}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}+O(\varepsilon^5);\\
&N^\alpha=\tilde{N}^\alpha+\int \frac{\hat{\rho}_2 v_\beta (X^\beta-y^\beta)(X^\alpha-y^\alpha)}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|^3}d^3y+O(\varepsilon^5),
\end{aligned}\right\} \quad (612)$$

где для собственных гравитационных потенциалов первого тела введены следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{U}=\int \frac{\hat{\rho}_1}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}d^3y; \quad \tilde{\Phi}_1=-\int \frac{\hat{\rho}_1 v_\alpha v^\alpha}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}d^3y;\\
&\tilde{\Phi}_2=\int \frac{\hat{\rho}_1\tilde{U}}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}d^3y; \quad \tilde{\Phi}_3=\int \frac{\hat{\rho}_1\Pi d^3y}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|};\\
&\tilde{\Phi}_4=\int \frac{p_1 d^3y}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}; \quad \tilde{V}^\alpha=-\int \frac{\hat{\rho}_1 v^\alpha}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|}d^3y;\\
&\tilde{N}^\alpha=\int \frac{\hat{\rho}_1 v_\beta (X^\beta-y^\beta)(X^\alpha-y^\alpha)}{|\mathbf{X}-\mathbf{y}|^3}d^3y.
\end{aligned}\right\} \quad (613)$$

Введем обозначения

$$m_1 = \int \hat{\rho}_1 d^3x; \quad m_2 = \int \hat{\rho}_2 d^3x \tag{614}$$

для масс покоя частиц первого и соответственно второго тела. Эти массы в силу уравнения неразрывности (483) не зависят от времени.

Разложим каждое слагаемое в выражениях (607) по степеням $1/R$ с точностью $O(1/R^4)$. Для этого используем следующие разложения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|} = \frac{1}{R} + \frac{R_\nu (x_1^\nu - x_2^\nu)}{R^3} + \frac{1}{2}\frac{(x_{1\nu}-x_{2\nu})(x_1^\nu - x_2^\nu)}{R^3} + \\
&+\frac{3}{2}\frac{[R_\nu(x_1^\nu - x_2^\nu)]^2}{R^5} + O\left(\frac{1}{R^4}\right);\\
&\frac{(X_1^\alpha - X_2^\alpha)(X_1^\beta - X_2^\beta)}{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|^3} = \frac{R^\alpha R^\beta}{R^3} + \frac{3R^\alpha R^\beta R_\nu (x_1^\nu - x_2^\nu)}{R^5} + \\
&+\frac{3}{2}\frac{R^\alpha R^\beta (x_{1\nu}-x_{2\nu})(x_1^\nu - x_2^\nu)}{R^5} + \frac{15}{2}\frac{R^\alpha R^\beta [R_\nu (x_1^\nu - x_2^\nu)]^2}{R^7} + \\
&+\frac{R^\alpha (x_1^\beta - x_2^\beta) + R^\beta (x_1^\alpha - x_2^\alpha)}{R^3} + \frac{3R^\alpha R_\nu (x_1^\nu - x_2^\nu)(x_1^\beta - x_2^\beta)}{R^5} + \\
&+\frac{3R^\beta R_\nu (x_1^\nu - x_2^\nu)(x_1^\alpha - x_2^\alpha)}{R^5} + \frac{(x_1^\alpha - x_2^\alpha)(x_1^\beta - x_2^\beta)}{R^3} + O\left(\frac{1}{R^4}\right);\\
&\frac{X_1^\alpha - X_2^\alpha}{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|^3} = \frac{R^\alpha}{R^3} + \frac{3R^\alpha R_\nu (x_1^\nu - x_2^\nu)}{R^5} + \frac{x_1^\alpha - x_2^\alpha}{R^3} + O\left(\frac{1}{R^4}\right);\\
&\frac{(X_1^\alpha - X_2^\alpha)(X_1^\beta - X_2^\beta)(X_1^\nu - X_2^\nu)}{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|^5} = \frac{R^\alpha R^\beta R^\nu}{R^5} + \frac{R^\alpha R^\beta (x_1^\nu - x_2^\nu)}{R^5} + \\
&+\frac{R^\alpha R^\nu (x_1^\beta - x_2^\beta)}{R^5} + \frac{R^\beta R^\nu (x_1^\alpha - x_2^\alpha)}{R^5} + \\
&+\frac{5R^\alpha R^\beta R^\nu R_\lambda (x_1^\lambda - x_2^\lambda)}{R^7} + O\left(\frac{1}{R^4}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{615}$$

Вводя обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega_{(1)}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2m_1}\int \frac{\hat{\rho}_1\hat{\rho}_1'(x_\alpha - x'^\alpha)(x^\beta - x'^\beta)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x';\\
&\Omega_{(2)}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2m_2}\int \frac{\hat{\rho}_2\hat{\rho}_2'(x^\alpha - x'^\alpha)(x^\beta - x'^\beta)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x';\\
&P_{(1)} = \frac{1}{m_1}\int p_1 d^3x; \quad P_{(2)} = \frac{1}{m_2}\int p_2 d^3x;\\
&\Pi_{(1)} = \frac{1}{m_1}\int \hat{\rho}_1 \Pi d^3x; \quad \Pi_{(2)} = \frac{1}{m_2}\int \hat{\rho}_2 \Pi d^3x;\\
&n^\alpha = R^\alpha/R; \quad \Omega = \Omega_\alpha^\alpha,
\end{aligned}\right\} \tag{616}$$

используя выражения (612), (615) и учитывая тривиальные соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{m}\int \frac{\hat\rho\,\hat\rho' x^\beta (x^\alpha - x'^\alpha)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\, d^3x d^3x' = -\Omega^{\alpha\beta};\\ &\int \hat\rho_1 x_1^\alpha d^3x = M_1 L_1 O(\varepsilon^2), \end{aligned}\right\} \qquad (617)$$

получаем ряд равенств, необходимых для дальнейшего:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \hat\rho_1 v^\alpha \left[1 + \Pi + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p_1}{\hat\rho_1}\right] d^3x =\\
&= m_1 V^\alpha_{(1)}\left[1 + \Pi_{(1)} + P_{(1)} + \frac{V^2_{(1)}}{2} + O(\varepsilon^4)\right];\\
&\int \hat\rho_1 v^\alpha U d^3x = m_1 V^\alpha_{(1)}\left[2\Omega_{(1)} + \frac{m_2}{R} + O(\varepsilon^4)\right];\\
&\int \hat\rho_1 V^\alpha d^3x = -m_1\left[2\Omega_{(1)} V^\alpha_{(1)} + \frac{m_2}{R} V^\alpha_{(2)} + O(\varepsilon^4)\right];\\
&\int \hat\rho_1 N^\alpha d^3x = m_1\left[-2\Omega^{\alpha\beta}_{(1)} V_{(1)\beta} + \frac{m_2}{R} n^\alpha n_\beta V^\beta_{(2)} + O(\varepsilon^5)\right];\\
&\int \hat\rho_1 \partial^\alpha U d^3x = \frac{m_1 m_2}{R^2}\left\{n^\alpha\left[1 - 6\Omega_{(2)} - \frac{1}{2}V^2_{(2)} - \frac{3m_2}{R} + O(\varepsilon^3)\right] -\right.\\
&\left. - 3n_\beta \Omega^{\alpha\beta}_{(1)}\right\} - 3\int \hat\rho_1 \partial^\alpha \widetilde\Phi_2 d^3x - \frac{1}{2}\int \hat\rho_1 \partial^\alpha \widetilde\Phi_1 d^3x;\\
&\int \hat\rho_1 v^\beta \partial^\alpha N_\beta d^3x = \frac{m_1 m_2}{R^2}\{[V^\alpha_{(1)} V^\nu_{(2)} + V^\alpha_{(2)} V^\nu_{(1)}]\, n_\nu +\\
&+ 3n^\alpha n_\nu V^\nu_{(1)} n_\beta V^\beta_{(2)} + O(\varepsilon^4)\};\\
&\int \hat\rho_1 v^\beta \partial^\alpha V_\beta d^3x = -\frac{m_1 m_2}{R^2}[n^\alpha V^\beta_{(1)} V_{(2)\beta} + O(\varepsilon^4)];\\
&\int \hat\rho_1 U \partial^\alpha U d^3x = \frac{m_1 m_2}{R^2}\left[2n^\alpha \Omega_{(1)} - n_\nu \Omega^{\nu\alpha}_{(1)} + n^\alpha \frac{m_2}{R} + O(\varepsilon^4)\right] +\\
&+ \int \hat\rho_1 \partial^\alpha \widetilde U \widetilde U d^3x;\\
&\int \hat\rho_1 \Pi \partial^\alpha U d^3x = \frac{m_1 m_2}{R^2}[n^\alpha \Pi_{(1)} + O(\varepsilon^4)] + \int \hat\rho_1 \Pi \partial^\alpha \widetilde U d^3x;\\
&\int \hat\rho_1 v^2 \partial^\alpha U d^3x = \frac{m_1 m_2}{R^2}[n^\alpha V^2_{(1)} + O(\varepsilon^4)] + \int \hat\rho_1 v^2 \partial^\alpha \widetilde U d^3x;\\
&\int p_1 \partial^\alpha U d^3x = \frac{m_1 m_2}{R^2}[n^\alpha P_{(1)} + O(\varepsilon^4)] + \int p_1 \partial^\alpha \widetilde U d^3x;\\
&\int \hat\rho_1 \partial^\alpha \Phi_1 d^3x = \frac{m_1 m_2}{R^2}[n^\alpha V^2_{(1)} + O(\varepsilon^4)] + \int \hat\rho_1 \partial^\alpha \widetilde\Phi_1 d^3x;\\
&\int \hat\rho_1 \partial^\alpha \Phi_2 d^3x = \frac{m_1 m_2}{R^2}\left[n^\alpha\left(2\Omega_{(2)} + \frac{m_1}{R}\right) + n_\nu \Omega^{\nu\alpha}_{(1)} + O(\varepsilon^4)\right] +\\
&+ \int \hat\rho_1 \partial^\alpha \widetilde\Phi_2 d^3x;
\end{aligned}\right\} \qquad (618)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int \hat{\rho}_1\partial^\alpha\Phi_3 d^3x=\frac{m_1m_2}{R^2}[n^\alpha\Pi_{(2)}+O(\varepsilon^4)]+\int\hat{\rho}_1\partial^\alpha\widetilde{\Phi}_3d^3x;\\&\int \hat{\rho}_1\partial^\alpha\Phi_4 d^3x=\frac{m_1m_2}{R^2}[n^\alpha P_{(2)}+O(\varepsilon^4)]+\int\hat{\rho}_1\partial^\alpha\widetilde{\Phi}_4d^3x,\end{aligned}\right\}$$

где $V^\alpha_{(1)}$ и $V^\alpha_{(2)}$ — скорости центров масс первого и, соответственно, второго тел:

$$V^\alpha_{(1)}=\frac{d}{dt}Y^\alpha_{(1)};\quad V^\alpha_{(2)}=\frac{d}{dt}Y^\alpha_{(2)}.$$

Подставляя разложения (618) в выражения (607) и учитывая соотношения (599), которым удовлетворяют собственные потенциалы (613) первого тела, получаем:

$$\left.\begin{aligned}&P^\alpha_{(1)}=m_1\left\{\left[1+\Pi_{(1)}-\Omega_{(1)}+P_{(1)}+\frac{1}{2}V^2_{(1)}+\frac{3m_2}{R}\right]V^\alpha_{(1)}-\right.\\&\left.-\Omega^{\alpha\beta}_{(1)}V_{(1)\beta}+\frac{1}{2}\frac{m_2}{R}[n^\alpha n_\nu V^\nu_{(2)}-7V^\alpha_{(2)}]+O(\varepsilon^5)\right\};\\&F^\alpha_{(1)}=-\frac{m_1m_2}{R^2}\left\{n^\alpha\left[1-2\Omega_{(1)}-2\Omega_{(2)}+\Pi_{(1)}+\Pi_{(2)}+3P_{(1)}+\right.\right.\\&+3P_{(2)}+\frac{3}{2}V^2_{(1)}+\frac{3}{2}V^2_{(2)}-\frac{3}{2}n_\nu V^\nu_{(1)}n_\beta V^\beta_{(2)}+\frac{7}{2}V^\beta_{(1)}V_{(2)\beta}-\\&\left.\left.-\frac{m_1+m_2}{R}\right]-\frac{1}{2}[V^\alpha_{(1)}V^\beta_{(2)}+V^\alpha_{(2)}V^\beta_{(1)}]n_\beta+O(\varepsilon^4)\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(619)$$

Совершенно аналогичные выражения имеем и для второго тела:

$$\left.\begin{aligned}&P^\alpha_{(2)}=m_2\left\{\left[1+\Pi_{(2)}-\Omega_{(2)}+P_{(2)}+\frac{1}{2}V^2_{(2)}+\frac{3m_1}{R}\right]V^\alpha_{(2)}-\right.\\&\left.-\Omega^{\alpha\beta}_{(2)}V_{(2)\beta}+\frac{1}{2}\frac{m_1}{R}[n^\alpha n_\beta V^\beta_{(1)}-7V^\alpha_{(1)}]+Q(\varepsilon^5)\right\};\\&F^\alpha_{(2)}=-F^\alpha_{(1)}.\end{aligned}\right\}\quad(620)$$

Использовав ньютоновскую теорему вириала

$$\Omega^{\alpha\beta}_{(1)}=\gamma^{\alpha\beta}P_{(1)};\ \Omega_{(1)}=3P_{(1)};\ \Omega^{\alpha\beta}_{(2)}=\gamma^{\alpha\beta}P_{(2)};\quad \Omega_{(2)}=3P_{(2)}$$

и введя обозначения

$$M_1=m_1[1+\Pi_{(1)}-\Omega_{(1)}];\ M_2=m_2[1+\Pi_{(2)}-\Omega_{(2)}]\qquad(621)$$

для полных масс покоя каждого из тел, выражения (619) и (620) запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&P^{\alpha}_{(1)}=M_1\left\{V^{\alpha}_{(1)}\left[1+\frac{1}{2}V^2_{(1)}-\frac{1}{2}\frac{M_2}{R}\right]+\frac{7}{2}\frac{M_2}{R}\left(V^{\alpha}_{(1)}-V^{\alpha}_{(2)}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{M_2}{R}n^{\alpha}n_{\beta}V^{\beta}_{(2)}+O(\varepsilon^5)\right\};\\
&P^{\alpha}_{(2)}=M_2\left\{V^{\alpha}_{(2)}\left[1+\frac{1}{2}V^2_{(2)}-\frac{1}{2}\frac{M_1}{R}\right]+\frac{7}{2}\frac{M_1}{R}\left(V^{\alpha}_{(2)}-V^{\alpha}_{(1)}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{M_1}{R}n^{\alpha}n_{\beta}V^{\beta}_{(1)}+O(\varepsilon^5)\right\};\\
&F^{\alpha}_{(1)}=-\frac{M_1M_2}{R^2}\left\{n^{\alpha}\left[1+\frac{3}{2}V^2_{(1)}+\frac{3}{2}V^2_{(2)}+\frac{7}{2}V^{\beta}_{(1)}V_{(2)\beta}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{M_1+M_2}{R}-\frac{3}{2}V^{\nu}_{(1)}n_{\nu}V^{\beta}_{(2)}n_{\beta}\right]-\frac{1}{2}\left[V^{\alpha}_{(1)}V^{\beta}_{(2)}+V^{\alpha}_{(2)}V^{\beta}_{(1)}\right]n_{\beta}+O(\varepsilon^3)\right\}.
\end{aligned}\right\}\qquad(622)$$

Входящие в эти выражения характеристики первого и второго тел не являются независимыми, а кроме уравнений движения (606) и (608) связаны еще и с третьим из соотношений (611). С учетом выражений (612), (618) и (621) данное соотношение принимает вид

$$\begin{aligned}
&M_1Y^{\alpha}_{(1)}\left[1+\frac{1}{2}V^2_{(1)}-\frac{1}{2}\frac{M_2}{R}+O(\varepsilon^4)\right]+\\
&+M_2Y^{\alpha}_{(2)}\left[1+\frac{1}{2}V^2_{(2)}-\frac{1}{2}\frac{M_1}{R}+O(\varepsilon^4)\right]=0.
\end{aligned}\qquad(623)$$

Уравнения движения (606) и (608) с учетом выражений (622) и (623) позволяют определить в постньютоновском приближении движение каждого из тел. Как и в ньютоновской механике, в рассматриваемом нами случае уравнения движения двух тел удобно свести к уравнению движения одного тела в поле неподвижного гравитирующего центра. Для этого все величины (622) необходимо выразить в относительных координатах R^{α} и v^{α}:

$$Y^{\alpha}_{(1)}=R^{\alpha}+Y^{\alpha}_{(2)};\qquad V^{\alpha}_{(1)}=v^{\alpha}+V^{\alpha}_{(2)}$$

Подставив эти соотношения в выражение (623), получим

$$\begin{aligned}
Y^{\alpha}_{(2)}=&-\frac{M_1}{M_1+M_2}R^{\alpha}\left[1+\frac{M_2(M_2-M_1)}{2(M_1+M_2)^2}v^2-\right.\\
&\left.-\frac{M_2-M_1}{2(M_1+M_2)}\frac{M_2}{R}+O(\varepsilon^4)\right].
\end{aligned}\qquad(624)$$

Тогда для радиус-вектора центра масс первого тела имеем

$$\begin{aligned}
Y^{\alpha}_{(1)}=&\frac{M_2}{M_1+M_2}R^{\alpha}\left[1+\frac{M_1(M_1-M_2)}{2(M_1+M_2)^2}v^2-\right.\\
&\left.-\frac{M_1-M_2}{2(M_1+M_2)}\frac{M_1}{R}+O(\varepsilon^4)\right].
\end{aligned}\qquad(625)$$

Скорости центров масс тела могут быть выражены через относительные координаты двумя способами: либо непосредственно дифференцированием соотношений (624) и (625) по времени и учетом уравнений движения центров масс тел в ньютоновском приближении, либо из условия равенства нулю суммарного импульса тел. Так как равенство $P^{\alpha}_{(1)} + P^{\alpha}_{(2)} = 0$ является следствием выражения (623), то в обоих случаях, естественно, мы придем к одному и тому же результату:

$$\left.\begin{aligned} V^{\alpha}_{(1)} &= \frac{M_2}{M_1+M_2} v^{\alpha}\left[1 + \frac{M_1(M_1-M_2)}{2(M_1+M_2)^2}\left(v^2 - \frac{M_1+M_2}{R}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{M_1M_2(M_1-M_2)}{2(M_1+M_2)^2 R} n^{\alpha}n_{\beta}v^{\beta} + O(\varepsilon^5)\right]; \\ V^{\alpha}_{(2)} &= -\frac{M_1}{M_1+M_2} v^{\alpha}\left[1 + \frac{M_2(M_2-M_1)}{2(M_1+M_2)^2}\left(v^2 - \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{M_1+M_2}{R}\right) + \frac{M_1M_2(M_2-M_1)}{2(M_1+M_2)^2 R} n^{\alpha}n_{\beta}v^{\beta} + O(\varepsilon^5)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (626)$$

Подставив соотношения (626) в выражения (622), получим:

$$\left.\begin{aligned} P^{\alpha}_{(1)} &= -P^{\alpha}_{(2)} = \frac{M_1M_2}{M_1+M_2} v^{\alpha}\left[1 + \frac{M_1^3+M_2^3}{2(M_1+M_2)^3} v^2 + \right. \\ &\left. + \frac{3M_1^2+7M_1M_2+3M_2^2}{(M_1+M_2)R}\right] + \frac{M_1^2M_2^2}{(M_1+M_2)^2 R} n^{\alpha}n_{\beta}v^{\beta} + O(\varepsilon^5); \\ F^{\alpha}_{(1)} &= -F^{\alpha}_{(2)} = -\frac{M_1M_2}{R^2}\left\{n^{\alpha}\left[1 + \frac{3M_1^2+7M_1M_2+3M_2^2}{2(M_1+M_2)^2} v^2 + \right.\right. \\ &\left. + \frac{3M_1M_2}{2(M_1+M_2)^2}(n_{\beta}v^{\beta})^2 - \frac{M_1+M_2}{R}\right] + \\ &\left. + \frac{M_1M_2}{(M_1+M_2)^2} v^{\alpha}n_{\beta}v^{\beta} + O(\varepsilon^5)\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (627)$$

Таким образом, в относительных переменных уравнения движения (606) и (608) принимают одинаковый вид. Вводя обозначения

$$M = M_1 + M_2;\ m = M_1M_2/(M_1 + M_2),$$

имеем

$$\begin{aligned} m\frac{d}{dt}&\left\{v^{\alpha}\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3m}{M}\right)v^2 + \frac{3M+m}{R}\right] + \right. \\ &\left. + \frac{m}{R} n^{\alpha}n_{\nu}v^{\nu} + O(\varepsilon^5)\right\} = -\frac{Mm}{R^2}\left\{n^{\alpha}\left[1 - \frac{M}{R} + \frac{1}{2}\left(3 + \frac{m}{M}\right)v^2 + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{3m}{2M}(n_{\nu}v^{\nu})^2\right] + \frac{m}{M} v^{\alpha}n_{\nu}v^{\nu} + O(\varepsilon^4)\right\}. \end{aligned}$$

Использовав ньютоновское приближение

$$m\frac{dv^{\alpha}}{dt} = -\frac{Mm}{R^2}\left[n^{\alpha} + O(\varepsilon^2)\right], \qquad (628)$$

отсюда получим:

$$\frac{dv^\alpha}{dt} = -\frac{M}{R^2}\left\{n^\alpha\left[1-\left(4+\frac{2m}{M}\right)\frac{M}{R}+\left(1+\frac{3m}{M}\right)v^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3m}{2M}(n_\nu v^\nu)^2\right]+\left(4-\frac{2m}{M}\right)v^\alpha n_\nu v^\nu + O(\varepsilon^4)\right\}. \qquad (629)$$

В трехмерном векторном виде это уравнение дает:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{M\mathbf{R}}{R^3}\left[1-\left(4+\frac{2m}{M}\right)\frac{M}{R}+\left(1+\frac{3m}{M}\right)v^2-\right.$$
$$\left.-\frac{3m}{2M}\left(\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R}\right)^2\right]+\left(4-\frac{2m}{M}\right)\frac{M}{R^3}\mathbf{v}(\mathbf{R}\mathbf{v})+O(\varepsilon^6). \qquad (630)$$

Умножая уравнение (630) на вектор $\mathbf{R}$ векторно, имеем:

$$\left[\mathbf{R}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right] = \left(4-\frac{2m}{M}\right)\frac{M}{R^3}(\mathbf{R}\mathbf{v})\,[\mathbf{R}\mathbf{v}]+O(\varepsilon^6).$$

С учетом ньютоновского приближения уравнений движения (628) это соотношение можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left\{[\mathbf{R}\mathbf{v}]\left[1+\frac{2M}{R}\left(2-\frac{m}{M}\right)+O(\varepsilon^4)\right]\right\}=0.$$

Отсюда следует, что выражение в фигурных скобках является первым интегралом уравнений движения (629):

$$[\mathbf{R}\mathbf{v}]\left[1+\frac{2M}{R}\left(2-\frac{m}{M}\right)+O(\varepsilon^4)\right]=\mathbf{C}_5=\mathrm{const}. \qquad (631)$$

Умножая этот интеграл скалярно на радиус-вектор $\mathbf{R}$, получаем:

$$\mathbf{C}_5\mathbf{R}=0.$$

Следовательно, в РТГ траектория постньютоновского движения двойной системы лежит в плоскости, нормаль к которой направлена вдоль вектора $\mathbf{C}_5$.

Найдем уравнение этой траектории. Вводя в плоскости траектории полярные координаты R и φ, из соотношения (631) имеем:

$$R^2\dot{\varphi}\left[1+\frac{2M}{R}\left(2-\frac{m}{M}\right)+O(\varepsilon^4)\right]=C_5, \qquad (632)$$

где $C_5 = |\mathbf{C}_5|$. Запишем также уравнение для радиальной компоненты ускорения:

$$\ddot{R}-R\dot{\varphi}^2=-\frac{M}{R^2}\left[1-\left(4+\frac{2m}{M}\right)\frac{M}{R}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{7m}{2M}-3\right)\dot{R}^2+\left(1+\frac{3m}{M}\right)R^2\dot{\varphi}^2+O(\varepsilon^4)\right]. \qquad (633)$$

Используя выражение (632) и вводя обозначения $u = M/R$, $u' = du/d\varphi$, уравнение (633) преобразуем к виду, аналогичному формуле Бине:

$$u''\left[1-4u\left(2-\frac{m}{M}\right)\right]-u'^2\left(1+\frac{3m}{M}\right)+ \\ +u+\left(\frac{m}{M}-9\right)u^2-\frac{M^2}{C_5^2}\left[1-\left(4+\frac{2m}{M}\right)u\right]=O(\varepsilon^5). \tag{634}$$

Так как входящие в это уравнение величины являются малыми, то для его решения можно воспользоваться методом последовательных приближений. Разложим величины u и M^2/C_5^2 в ряды по малому параметру ε^2:

$$\left.\begin{aligned} u &= \overset{(1)}{u}+\overset{(2)}{u}+\ldots, \\ \frac{M^2}{C_5^2} &= \frac{M^2}{C_6^2}\,[1+C_7+\ldots], \end{aligned}\right\} \tag{635}$$

где

$$\overset{(1)}{u}\sim O(\varepsilon^2);\ \overset{(2)}{u}\sim O(\varepsilon^4);\ \frac{M^2}{C_6^2}\sim O(\varepsilon^2);\ C_7\sim O(\varepsilon^2).$$

Подставляя разложения (635) в уравнение (634), в первом порядке имеем:

$$\overset{(1)}{u}{}''+\overset{(1)}{u}=\frac{M^2}{C_6^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\overset{(1)}{u}=\frac{M^2}{C_6^2}\,[1+\mathrm{e}\cos\varphi].$$

Таким образом, в первом приближении при $\mathrm{e}<1$ траектория движения двойной системы представляет эллипс. Выражая константу интегрирования C_6^2 через параметр эллипса p, получаем:

$$\overset{(1)}{u}=\frac{M}{p}\,[1+\mathrm{e}\cos\varphi].$$

Во втором приближении уравнение (634) дает:

$$\overset{(2)}{u}{}''+\overset{(2)}{u}=\frac{M}{p}\,C_7+\frac{M^2}{p^2}\left(5-\frac{3m}{M}\right)+\frac{M^2\mathrm{e}^2}{p^2}\left(1+\frac{3m}{M}\right)+ \\ +\frac{6M^2\mathrm{e}}{p^2}\cos\varphi+\frac{3Mm\mathrm{e}^2}{4p^2}\cos 2\varphi.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\overset{(2)}{u}=\frac{M}{p}\,[C_7+C_8\cos\varphi]+\frac{M^2}{p^2}\left(5-\frac{3m}{M}\right)+ \\ +\frac{M^2\mathrm{e}^2}{p^2}\left(1+\frac{3m}{4M}\right)+\frac{3M^2\mathrm{e}}{p^2}\,\varphi\sin\varphi-\frac{mM\mathrm{e}^2}{4p^2}\cos 2\varphi.$$

Переопределяя ньютоновские выражения для p и e, имеем окончательно:

$$u=\frac{M}{R}=\frac{M}{p}\left\{1+\mathrm{e}\cos\varphi+\frac{M}{p}\left[-3+\frac{m}{M}+\left(1+\frac{9m}{4M}\right)\mathrm{e}^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(7-\frac{2m}{M}\right)\mathrm{e}\cos\varphi+3\mathrm{e}\varphi\sin\varphi-\frac{m\mathrm{e}^2}{4M}\cos 2\varphi\right]\right\}. \qquad (636)$$

Так как найденное решение справедливо лишь при выполнении условия $|m\mathrm{e}\varphi/p|\ll 1$, то его можно записать в виде

$$u=\frac{M}{p}\left\{1+\mathrm{e}\cos\left(\varphi-\frac{3M}{p}\varphi\right)+\frac{M}{p}\left[-3+\frac{m}{M}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1+\frac{9m}{4M}\right)\mathrm{e}^2+\frac{1}{2}\left(7-\frac{2m}{M}\right)\mathrm{e}\cos\varphi-\frac{m\mathrm{e}^2}{4M}\cos 2\varphi\right]\right\}. \qquad (637)$$

Из этого выражения следует, что траектория представляет собой незамкнутую кривую, перицентры которой (т. е. точки траектории, находящиеся на кратчайшем расстоянии от начала полярной системы координат) с ростом полярного угла φ систематически смещаются в область больших значений угла. Действительно, как легко убедиться, положение перицентров траектории с постньютоновской степенью точности определяется условием

$$\varphi_n-\frac{3M}{p}\varphi_n=2\pi n,$$

где n — номер перицентра. Отсюда легко найти, что n-й перицентр траектории расположен при значении полярного угла, равном

$$\varphi_n\simeq 2\pi n\left(1+\frac{3M}{p}\right).$$

Таким образом, согласно РТГ смещение перицентра двойной системы за один оборот равно

$$\delta\varphi=\varphi_n-\varphi_{n-1}-2\pi=6\pi M/p,$$

что находится в соответствии с результатами измерений смещений перигелиев Меркурия и Марса. Подставив выражение (637) в соотношение (632), получим:

$$R^2\dot{\varphi}=\sqrt{Mp}\left[1-\frac{M}{p}\mathrm{e}\left(4-\frac{2m}{M}\right)\cos\varphi\right].$$

Теперь мы можем найти относительную скорость двойной системы как функцию полярного угла. Если декартовы компоненты радиус-вектора R^α записать в виде

$$R^\alpha=R\left[\delta_1^\alpha\cos\varphi+\delta_2^\alpha\sin\varphi\right],$$

то после несложных вычислений выражение для относительной скорости можно привести к виду

$$v^\alpha = \sqrt{\frac{P}{M}}\left[1 - \frac{M}{p}e\left(4 - \frac{2m}{M}\right)\cos\varphi\right]\times$$
$$\times\{\delta_1^\alpha[-u\sin\varphi - u'\cos\varphi] + \delta_2^\alpha[u\cos\varphi - u'\sin\varphi]\}.$$

Подставляя в это выражение соотношение (636) и ограничиваясь постньютоновскими членами, имеем:

$$v^\alpha = \sqrt{\frac{M}{p}}\left\{-\delta_1^\alpha \sin\varphi + \delta_2^\alpha(e + \cos\varphi) + \right.$$
$$+\delta_1^\alpha\frac{M}{p}\left[-3e\varphi + \left(3 - \frac{m}{M}\right)\sin\varphi - \left(1 + \frac{21m}{8M}\right)e^2\sin\varphi + \right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{M}\right)e\sin 2\varphi - \frac{me^2}{8M}\sin 3\varphi\right] + \delta_2^\alpha\frac{M}{p}\left[-\left(3 - \frac{m}{M}\right)\cos\varphi - \right.$$
$$\left.\left.-\left(3 - \frac{31m}{8M}\right)e^2\cos\varphi + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{M}\right)e\cos 2\varphi + \frac{me^3}{8M}\cos 3\varphi\right]\right\}. \qquad (638)$$

Траектории каждого из тел, а также скорости центров их масс могут быть получены из выражений (624)—(626), (636) и (638).

21. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕТЕРСА—МЭТЬЮЗА В РТГ

Как известно, в научной литературе, наряду с ОТО, активно обсуждаются и другие варианты теории гравитационного взаимодействия. Анализ теорий гравитации в последнее время в основном проводился по двум направлениям. В работах первого направления выяснялось их соответствие различным общетеоретическим требованиям: полнота теории и ее самосогласованность, ковариантность их основных уравнений и дополнительных условий, анализ решения проблемы энергии-импульса гравитационного поля и другие аналогичные вопросы. Эти работы позволили существенно уменьшить число теорий, подлежащих дальнейшему рассмотрению, и вместе с тем выявили логические противоречия (и в первую очередь принципиальное отсутствие законов сохранения вещества и гравитационного поля, вместе взятых) в ОТО с точки зрения физики.

В работах другого направления проводился анализ соответствия между предсказаниями различных теорий гравитации и результатами гравитационных экспериментов, а также поиск тех экспериментальных ситуаций, в которых разные теории должны давать различающиеся предсказания. Интерес исследователей к этим вопросам особенно возрос после достижения экспериментальной техникой постньютоновского уровня точности и построения параметризованного постньютоновского формализма — основного теоретического аппарата, применяемого для анализа постньютоновских эффектов.

Работы этого направления позволили провести дальнейшее сужение круга жизнеспособных теорий гравитации, претендующих на описание физической реальности.

В настоящее время, в связи с открытием двойной пульсарной системы PSR 1913 + 16 и возможным существованием других подобных систем, в научной литературе изучаются перспективы использования результатов их наблюдений в качестве нового экспериментального теста для различных теорий гравитации. Интерес исследователей к этим системам обусловлен в основном двумя причинами. Во-первых, в случае компактных двойных систем, содержащих пульсар, имеется возможность в результате статистического анализа пульсарного излучения определить с высокой точностью параметры орбиты каждого из компонентов системы. Во-вторых, характеристики двойных компактных систем (массы компонентов, сравнимые с массой Солнца, размеры орбиты — порядка радиуса Солнца, малые периоды обращения и достаточно большие значения эксцентриситета) делают эти системы наиболее благоприятными объектами для наблюдения ряда тонких гравитационных эффектов, в том числе позволяют проводить косвенное измерение потерь энергии такой системой на гравитационное излучение.

Кроме того, в перспективе ожидается появление возможностей для прямой регистрации излучаемых двойными системами гравитационных волн. Тогда выяснение диаграммы направленности и спектральных характеристик гравитационного излучения еще больше расширит использование результатов наблюдения этих систем в качестве решающего теста для большинства теорий гравитации.

Для анализа излучательной способности компактных двойных систем в различных теориях гравитации и сравнения с результатами наблюдений Вилл [72] предложил использовать следующее общее выражение для потери энергии двойной системой на гравитационное излучение:

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{8m^2M^2}{15R^4}\left[k_1v^2-k_2\left(\frac{R_\alpha v^\alpha}{R}\right)^2+\frac{5}{8}k_d\,(\Omega_1-\Omega_2)^2\right], \qquad (639)$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты Петерса — Мэтьюза; k_d— коэффициент дипольного излучения; m и M — приведенная и соответственно полная масса системы; R — расстояние между телами; v и $R_\alpha v^\alpha/R$ — полная и радиальная относительные скорости тел системы; Ω_1 и Ω_2, как обычно, определяются соотношением (571).

При таком подходе каждой теории гравитации будет соответствовать определенный набор значений коэффициентов k_1, k_2, k_d, характеризующий ее в приближении слабых гравитационных волн, в такой же степени, в какой набор постньютоновских параметров характеризует ее постньютоновский предел. Сравнение же этих коэффициентов с коэффициентами, найденными из экспериментов, позволит выяснить соответствие между предсказаниями каждой теории гравитации и результатами наблюдений.

Как следует из выражения (639), потери энергии двойной системой на гравитационное излучение в общем случае не являются знакоположительными: при $k_1 < k_2$ или при $k_d < 0$ в случае некоторых двойных систем правая часть соотношения (639) может стать отрицательной. Поэтому в тех теориях гравитации, у которых $k_1 < k_2$ или $k_d < 0$, может происходить излучение гравитационных волн, переносящих отрицательную энергию, что является физически бессмысленным, а поэтому такие теории сразу же должны быть отброшены.

После того как из результатов наблюдений за двойными системами типа PSR 1913 + 16 будут найдены значения коэффициентов k_1, k_2 и k_d, требования к возможным теориям гравитации существенно возрастут.

Определим значения этих коэффициентов в РТГ. Для этого рассмотрим две нейтронные звезды, движущиеся по орбите в создаваемом ими гравитационном поле, и вычислим потери энергии этой системой на гравитационное излучение. В соответствии с принятой в таких случаях моделью системы будем считать, что обе звезды сферически-симметричны и являются статическими. Кроме того, предположим, что создаваемые ими гравитационные поля имеют такое значение, которое позволяет для определения движения тел системы использовать постньютоновский формализм.

Так как в компактных двойных системах собственный гравитационный потенциал на поверхности каждого из тел U_c значительно больше потенциала гравитационного взаимодействия U_b, то в дальнейшем будем считать, что $\Omega \sim U_c \sim \varepsilon$, $U_b \sim \varepsilon^2$. Это означает, что отношение характерных размеров L каждого из тел к расстоянию между ними R по порядку величины должно совпадать с ε: $L/R \sim \varepsilon$.

Компоненты гравитационного поля (345) удобно записать в виде

$$\Phi^{\alpha\beta}(r,\ t) = -\frac{2}{r}\left[P^\alpha_\nu P^\beta_\mu - \frac{1}{2}P^{\alpha\beta}P_{\mu\nu}\right]\ddot{E}^{\mu\nu}(r,\ t), \tag{640}$$

где r — расстояние от центра масс двойной системы до точки наблюдения;

$$E^{\mu\nu} = \int dV\left(X^\nu X^\mu - \frac{1}{3}\gamma^{\mu\nu}X_\alpha X^\alpha\right)[q]_{\text{ret}}. \tag{641}$$

Здесь

$$q = T^{00} + 2n_\alpha T^{0\alpha} + n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta},\ \text{а}\ n^\alpha = X^\alpha/|\mathbf{X}|. \tag{642}$$

Найдем постньютоновское разложение величины q. Использовав для тензора энергии-импульса разложение (592), получим:

$$q = \hat{\rho}\left[1 + \frac{1}{2}v^2 + \Pi + U + \frac{p}{\hat{\rho}} + 2n_\nu v^\nu + (n_\nu v^\nu)^2 + O(\varepsilon^4)\right]. \tag{643}$$

Так как в выражение (641) входит запаздывающее значение величины (643), то, учитывая оценку $v \sim \varepsilon$, мы должны разложить $[q]_{\text{ret}}$

в окрестности запаздывающего времени $t' = t - r$:

$$[q]_{\text{ret}} = q(t') - \dot{q}(t')\, n_\nu X^\nu + \frac{1}{2}\ddot{q}(t')\,(n_\nu X^\nu)^2 + \rho O(\varepsilon^4),$$

где X^ν — радиус-вектор точек тел в системе отсчета, связанной с центром масс двойной системы. Из выражений (643) и (595) следует, что

$$[q]_{\text{ret}} = \hat{\rho}\left[1 + \frac{1}{2}v^2 + \Pi + U + \frac{p}{\hat{\rho}} + 2n_\nu v^\nu + (n_\nu v^\nu)^2 + \right.$$
$$\left. + 2n_\beta X^\beta n_\nu \partial^\nu U\right] + n_\nu X^\nu \partial_\beta(\hat{\rho} v^\beta) + \frac{1}{2}(n_\nu X^\nu)^2\, \partial_\beta \partial_\alpha(\hat{\rho} v^\alpha v^\beta) -$$
$$- \frac{1}{2}(n_\nu X^\nu)^2\, \partial_\beta\left[-\hat{\rho}\partial^\beta U + \partial^\beta p\right] +$$
$$+ 2n_\nu n_\beta X^\beta \partial_\alpha(\hat{\rho} v^\alpha v^\nu) - 2n_\beta X^\beta n_\nu \partial^\nu p + \hat{\rho} O(\varepsilon^3). \qquad (644)$$

Подставляя соотношение (644) в выражение (641), интегрируя его и учитывая, что для статических сферически-симметричных тел справедливы равенства

$$P_{(i)} = \frac{1}{3}\Omega_{(i)}, \quad \Omega^{\alpha\beta}_{(i)} = \frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}\Omega_{(i)},$$

в относительных переменных (624) — (626) получаем:

$$E^{\alpha\beta} = m\left[1 + \frac{4}{3}\left(\frac{M_2\Omega_1 + M_1\Omega_2}{M}\right)\right] \times$$
$$\times R^\alpha R^\beta \left\{1 + \left(1 - \frac{3m}{M}\right)\frac{v^2}{2} + \frac{M_2 - M_1}{M}\, n_\nu v^\nu + \left(1 - \frac{2m}{M}\right)\frac{M}{R}\right\} +$$
$$+ m\left(1 - \frac{3m}{M}\right) v^\alpha v^\beta (n_\nu R^\nu)^2 + m\,\frac{M_1 - M_2}{M}\, n_\nu R^\nu (v^\alpha R^\beta + v^\beta R^\alpha) + mR^2 O(\varepsilon^3), \qquad (645)$$

где

$$M = M_1 + M_2; \quad m = M_1 M_2 / M.$$

Используя ньютоновский интеграл энергии

$$\frac{v^2}{2} - \frac{M}{R} = E = \text{const} + O(\varepsilon^4) \qquad (646)$$

и вводя обозначение

$$\tilde{m} = m\left[1 + \left(1 - \frac{3m}{M}\right)E + \frac{4}{3}\left(\frac{M_2\Omega_1 + M_1\Omega_2}{M}\right)\right], \qquad (647)$$

выражение (645) для дальнейшего удобно записать в виде

$$E^{\alpha\beta} = \tilde{m} R^\alpha R^\beta \left\{1 + \left[2 - \frac{5m}{M}\right]\frac{M}{R} + \frac{M_2 - M_1}{M}\, n_\nu v^\nu\right\} +$$
$$+ m\,\frac{(M_1 - M_2)}{M}\, n_\nu R^\nu (v^\alpha R^\beta + v^\beta R^\alpha) +$$
$$+ m\left(1 - \frac{3m}{M}\right) v^\alpha v^\beta (n_\nu R^\nu)^2 + mR^2 O(\varepsilon^3). \qquad (648)$$

Чтобы определить компоненты гравитационного поля, дважды продифференцируем выражение (648) по времени и после учета постньютоновских уравнений движения (629) подставим его в соотношение (640). В результате получим:

$$\Phi^{\alpha\beta}=-\frac{2\tilde{m}}{r}\left[P^{\alpha}_{\mu}P^{\beta}_{\varepsilon}-\frac{1}{2}P^{\alpha\beta}P_{\mu\varepsilon}\right]\times$$
$$\times\Big\{2v^{\mu}v^{\varepsilon}\Big[1+\left(2-\frac{5m}{M}\right)\frac{M}{R}-2\left(1-\frac{3m}{M}\right)\frac{M}{R^3}(n_\nu R^\nu)^2+$$
$$+\left(1-\frac{3m}{M}\right)(n_\nu v^\nu)^2+\frac{M_1-M_2}{M}n_\nu v^\nu\Big]+$$
$$+\frac{M}{R^3}(R^\mu v^\varepsilon+R^\varepsilon v^\mu)\Big[\left(3-\frac{10m}{M}\right)R_\nu v^\nu-4\left(1-\frac{3m}{M}\right)R_\nu v^\nu n_\delta v^\delta-$$
$$-\frac{3(M_1-M_2)}{M}n_\nu R^\nu-3\left(1-\frac{3m}{M}\right)(n_\nu R^\nu)^2\frac{R_\delta v^\delta}{R^2}\Big]+$$
$$+\frac{MR^\mu R^\varepsilon}{R^3}\Big[-2+3\left(2+\frac{3m}{M}\right)\frac{M}{R}-\left(4+\frac{m}{M}\right)v^2+$$
$$+6\left(1-\frac{3m}{M}\right)\frac{(R_\nu v^\nu)^2}{R^2}+2\left(1-\frac{3m}{M}\right)M\frac{(n_\nu R^\nu)^2}{R^3}-$$
$$-\frac{3(M_1-M_2)}{M}\frac{R_\nu v^\nu n_\delta R^\delta}{R^2}\Big]+O(\varepsilon^5)\Big\}. \qquad (649)$$

Для определения коэффициентов k_1, k_2 и k_d в РТГ нам следует оставить в выражении (649) лишь члены, имеющие порядок величины $m\varepsilon^2/r$:

$$\Phi^{\alpha\beta}=-\frac{4m}{r}\left[P^{\alpha}_{\tau}P^{\beta}_{\sigma}-\frac{1}{2}P^{\alpha\beta}P_{\tau\sigma}\right]\left\{v^\tau v^\sigma-\frac{MR^\tau R^\sigma}{R^3}+O(\varepsilon^3)\right\}.$$

Дифференцируя это равенство по времени и учитывая, что в TT-калибровке $\Phi^{mn}=-h^{mn}$ [см. (356)], после подстановки в соотношение (367) получаем следующее выражение для интенсивности излучения энергии гравитационных волн двойной компактной системой в РТГ:

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{m^2M^2}{\pi R^6}\Big\{4v^2R^2-4R^2(n_\nu v^\nu)^2-4v^2(n_\nu R^\nu)^2+$$
$$+4(n_\nu v^\nu)^2(n_\beta R^\beta)^2-\frac{15}{4}(R_\nu v^\nu)^2-6R_\nu v^\nu n_\beta v^\beta R_\alpha n^\alpha+$$
$$+\frac{6}{R^2}R_\nu v^\nu n_\beta v^\beta(R_\alpha n^\alpha)^3+\frac{3}{2R^2}(R_\nu v^\nu)^2(R_\alpha n^\alpha)^2+$$
$$+\frac{9}{4R^4}(R_\nu v^\nu)^2(R_\alpha n^\alpha)^4\Big\}.$$

Интегрируя это соотношение по телесному углу и учитывая, что

$$\left.\begin{aligned}&\int d\Omega n^\alpha n^\beta = -\frac{4\pi}{3}\gamma^{\alpha\beta};\\&\int d\Omega n^\alpha n^\beta n^\nu n^\delta = \frac{4\pi}{15}[\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\nu\delta}+\gamma^{\alpha\nu}\gamma^{\beta\delta}+\gamma^{\alpha\delta}\gamma^{\beta\nu}];\\&\int d\Omega n^\alpha n^\beta n^\nu = 0,\end{aligned}\right\}$$

получаем выражение для потерь энергии двойной компактной системы на гравитационное излучение:

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{8}{15}\frac{m^2M^2}{R^6}[12v^2R^2-11(R_\nu v^\nu)^2]. \qquad (650)$$

Сравнивая выражения (639) и (650), имеем: $k_1 = 12$; $k_2 = 11$; $k_d = 0$.

Таким образом, в РТГ дипольное гравитационное излучение отсутствует, а коэффициенты Петерса — Мэтьюза находятся в соответствии с результатами наблюдения двойной пульсарной системы PSR 1913 + 16.

Заметим, что для потери энергии двойной компактной системы в декартовых координатах в ОТО мы также прийдем к формуле (650), так как в этих координатах выражение для псевдотензора энергии-импульса Эйнштейна совпадает с тензором энергии-импульса гравитационного поля РТГ. Однако при переходе к другим общим допустимым координатам это совпадение уже не имеет места, и поэтому формула для потери энергии (650) не следует из ОТО.

Да и вообще о какой формуле для излучения в ОТО может идти речь, если гравитационное поле можно уничтожить в ОТО выбором допустимой системы отсчета. Здесь мы имеем дело с одним из глубоких и принципиальных заблуждений в теоретической физике. По-видимому, это связано с тем, что догматизм и вера так глубоко проникли в ОТО и так сильно укоренились там, что идеи Эйнштейна долго не получали критического анализа и необходимого творческого развития. Но потребуется еще не мало времени, чтобы этот догматизм стал достоянием только истории.

22. КАЛИБРОВОЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ОДНОЗНАЧНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА РТГ

Сформулируем калибровочный принцип и на его основе построим плотность лагранжиана гравитационного поля РТГ. Предлагаемый здесь общий путь построения теории приведет нас к плотности лагранжиана (140) (см. ниже). Кроме того, будет выявлен следующий важный факт: риманова геометрия пространства-времени однозначно определяется только при наличии вещества; в противном случае из-за калибровочного произвола она в принципе не может быть фиксирована гравитационными полями.

Введем калибровочное преобразование гравитационного поля:

$$\delta_\varepsilon\tilde{\Phi}^{mn}=\delta_\varepsilon\tilde{g}^{mn}=\tilde{g}^{ml}D_l\varepsilon^n+\tilde{g}^{nl}D_l\varepsilon^m-D_l(\varepsilon^l\tilde{g}^{mn}). \qquad (651)$$

Заметим, что калибровочное преобразование для поля $\tilde{\Phi}^{mn}$ существенно отличается от его координатного преобразования (85). Поэтому калибровочные преобразования (651) являются надкоординатными. Можно показать, что определенные через (651) операторы δ_ε образуют алгебру Ли. Легко убедиться, что при калибровочном преобразовании (651) плотность лагранжиана (140) изменяется по закону

$$L_g \to L_g + D_k Q^k(x), \tag{652}$$

где

$$Q^k(x) = -\varepsilon^k L_g - \frac{1}{16\pi}\left[D_n \varepsilon^p D_p \tilde{g}^{nk} + \varepsilon^k D_n D_p \tilde{g}^{np} - D_p(\varepsilon^p D_n \tilde{g}^{nk})\right]. \tag{653}$$

Требование, чтобы при калибровочном преобразовании (651) плотность лагранжиана гравитационного поля изменялась только на дивергенцию, можно выдвинуть в качестве **калибровочного принципа**. Лагранжиан РТГ (140) этому принципу удовлетворяет. Ниже мы покажем, что если исходные требования РТГ выполнены, то выдвинутый здесь калибровочный принцип, примененный к плотностям лагранжианов общего вида, но квадратичных по первым производным $D_p\tilde{g}^{mn}$, однозначно приводит нас к лагранжиану (140).

Общее соотношение, которому должна удовлетворять плотность лагранжиана, преобразующаяся согласно калибровочному принципу, получается из условия обращения в нуль действия при изменении поля $\tilde{\Phi}^{mn}$ (651). Оно имеет вид [73]

$$\nabla_l \left(2\frac{\delta L_g}{\delta g_{il}}\right) \equiv 0. \tag{654}$$

Тождество (654) отражает требование на структуру плотности лагранжиана гравитационного поля L_g. Легко убедиться, что этому тождеству удовлетворяет любая скалярная плотность, зависящая только от g_{ik} и его производных. Простейшими плотностями такого вида являются

$$L_g = \sqrt{-g} \tag{655}$$

и

$$L_g = \sqrt{-g}R, \tag{656}$$

где R — скалярная плотность риманова пространства-времени. Можно показать, что при преобразовании (651) выражения (655) и (656) изменяются соответственно по закону

$$\sqrt{-g} \to \sqrt{-g} - D_k(\varepsilon^k\sqrt{-g}); \tag{657}$$

$$\sqrt{-g}R \to \sqrt{-g}R - D_k(\varepsilon^k\sqrt{-g}R). \tag{658}$$

Выбор плотности лагранжиана, зависящей только от g_{ik} и его производных, в силу равенства (103) не удовлетворяет нашим исходным требованиям, поскольку в этом случае гравитационное поле не будет полем типа Фарадея — Максвелла. Поэтому в соответствии с нашими представлениями необходимо построить плотность лагранжиана, зависящую как от g_{ik}, так и от γ_{ik} и их первых производных. Оказывается, что такое решение существует и оно единственное.

Из требования релятивистской инвариантности общая плотность лагранжиана гравитационного поля, квадратичная по первым производным $D_p\tilde{g}^{mn}$, может быть представлена в виде *

$$\mathcal{L}_g = \sum_{i=1}^{5} a_i L_i + \sum_{j=1}^{6} L_{gj}, \tag{659}$$

* Как и в разд. 10 (см. примечание на с. 61), для свертки индексов мы берем минимально возможное число тензоров $\tilde{\gamma}_{mn}$ и $\tilde{g}_{mn}$.

где

$$\left.\begin{array}{l} L_1=\tilde{g}_{kq}D_m\tilde{g}^{pq}D_p\tilde{g}^{mk}; \quad L_2=\tilde{g}^{lp}D_l\tilde{g}^{mn}D_p\tilde{g}_{mn};\\ L_3=\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp}D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}; \quad L_4=\tilde{g}_{km}D_p\tilde{g}^{pk}D_n\tilde{g}^{mn};\\ L_5=\tilde{g}_{mn}D_pg^{pk}D_kg^{mn}; \end{array}\right\} \qquad (660)$$

$$L_{g6}=b_6\tilde{\gamma}_{mk}D_q\tilde{g}^{kq}D_n\tilde{g}^{mn}+c_6\tilde{\gamma}_{mn}D_p\tilde{g}^{pq}D_q\tilde{g}^{mn}, \qquad (661)$$

а плотности лагранжианов L_{gj} ($j=1, \ldots, 5$) имеют вид (188) — (192); a_i, b_j и c_j — произвольные числа.

При калибровочном преобразовании (651) изменение плотности лагранжианов (660) может быть представлено в виде

$$\delta_\varepsilon L_i=D_kQ^k_{(i)}+\varepsilon^k(x)\,(\alpha^{(i)}_k+\beta^{(i)}_k+\sigma^{(i)}_k); \quad i=1, \ldots, 5, \qquad (662)$$

а изменение плотности лагранжианов (188)—(192) и (661)—в виде

$$\delta_\varepsilon L_{gj}=D_k\theta^k_{(j)}+\varepsilon^k(x)\,[b_j\,(U^{(j)}_k+V^{(j)}_k+W^{(j)}_k)+c_j\,(X^{(j)}_k+Y^{(j)}_k+Z^{(j)}_k)];$$
$$j=1, 2, \ldots, 6. \qquad (663)$$

В (662) структуры $\alpha^{(i)}_k$ равны [73]:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^{(1)}_k=2\tilde{g}^{pl}g_{km}D_lD_nD_p\tilde{g}^{mn};\\ \alpha^{(2)}_k=-2\alpha^{(1)}_k-\dfrac{1}{2}\,\alpha^{(3)}_k;\\ \alpha^{(3)}_k=-4\tilde{g}^{pl}\tilde{g}_{mn}D_kD_pD_l\tilde{g}^{mn};\\ \alpha^{(4)}_k=\alpha^{(1)}_k;\\ \alpha^{(5)}_k=-\dfrac{1}{4}\,\alpha^{(3)}_k-2D_kD_lD_p\tilde{g}^{pl}. \end{array}\right\} \qquad (664)$$

Остальные структуры из-за громоздкости их выражений здесь не приводим. Отметим только, что $U^{(j)}_k$ и $X^{(j)}_k$ содержат ковариантные производные от $\tilde{g}^{mn}$ третьего порядка, $\beta^{(i)}_k$, $V^{(j)}_k$ и $Y^{(j)}_k$ содержат вторые и первые производные и, наконец, структуры $\sigma^{(i)}_k$, $W^{(j)}_k$ и $Z^{(j)}_k$ — производные только первого порядка.

На основании (662) и (663) из (659) получим:

$$\delta_\varepsilon\mathscr{L}_g=D_k\,[\sum_{i=1}^{5}a_iQ^k_{(i)}+\sum_{j=1}^{6}\theta^k_{(j)}]+\varepsilon^k(x)\,\Big\{\sum_{i=1}^{5}a_i\,(\alpha^{(i)}_k+\beta^{(i)}_k+\sigma^{(i)}_k)+$$
$$+\sum_{j=1}^{6}[b_j\,(U^{(j)}_k+V^{(j)}_k+W^{(j)}_k)+c_j\,(X^{(j)}_k+Y^{(j)}_k+Z^{(j)}_k)]\Big\}. \qquad (665)$$

Отсюда видно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы плотность лагранжиана $\mathscr{L}_g$ при калибровочном преобразовании (651) изменялась только на дивергенцию, является тождественное обращение в нуль выражения

$$\sum_{i=1}^{5}a_i\,(\alpha^{(i)}_k+\beta^{(i)}_k+\sigma^{(i)}_k)+\sum_{j=1}^{6}b_j\,(U^{(j)}_k+V^{(j)}_k+W^{(j)}_k)+$$
$$+c_j\,(X^{(j)}_k+V^{(j)}_k+Z^{(j)}_k)\equiv 0. \qquad (666)$$

Поскольку группы структур $(\alpha_k^{(i)}, U_k^{(j)}, X_k^{(j)})$, $(\beta_k^{(i)}, V_k^{(j)}, Y_k^{(j)})$ и $(\sigma_k^{(i)}, W_k^{(j)}, Z_k^{(j)})$ отличаются друг от друга тем, что содержат разные порядки производных от $\tilde{g}^{mn}$, из (666) следуют отдельные тождества:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i\alpha_k^{(i)} + \sum_{j=1}^{6} (b_jU_k^{(j)} + c_jX_k^{(j)}) \equiv 0; \qquad (667)$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i\beta_k^{(i)} + \sum_{j=1}^{6} (b_jV_k^{(j)} + c_jY_k^{(j)}) \equiv 0; \qquad (668)$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i\sigma_k^{(i)} + \sum_{j=1}^{6} (b_jW_k^{(j)} + c_jZ_k^{(j)}) \equiv 0. \qquad (669)$$

В структуры $U_k^{(j)}$ и $X_k^{(j)}$ входит метрический тензор пространства Минковского [73], а $\alpha_k^{(i)}$ не содержит его, поэтому в силу отсутствия возможной компенсации членов этих структур тождество (667) разбивается на два тождества:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i\alpha_k^{(i)} \equiv 0; \qquad (670)$$

$$\sum_{j=1}^{6} (b_jU_k^{(j)} + c_jX_k^{(j)}) \equiv 0. \qquad (671)$$

Учитывая (664), из (670) получаем:

$$\alpha_k^{(1)}(a_1 - 2a_2 + a_4) + \alpha_k^{(3)}\left(a_3 - \frac{1}{2}a_2\right) + a_5\alpha_k^{(5)} \equiv 0.$$

Так как структуры $\alpha_k^{(1)}$, $\alpha_k^{(3)}$ и $\alpha_k^{(5)}$ независимы, то отсюда следует:

$$a_1 - 2a_2 + a_4 = 0, \quad a_3 - \frac{1}{2}a_2 = 0, \quad a_5 = 0. \qquad (672)$$

В [73] показано, что структуры $U_k^{(j)}$ и $X_k^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, 6)$ также являются независимыми, поэтому из (671) получаем:

$$b_j = c_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, 6). \qquad (673)$$

На основании (672) и (673) из тождества (668) и (669) имеем:

$$a_1\left(\beta_k^{(1)} + \frac{1}{2}\beta_k^{(2)} + \frac{1}{4}\beta_k^{(3)}\right) + a_4\left(\frac{1}{2}\beta_k^{(2)} + \frac{1}{4}\beta_k^{(3)} + \beta_k^{(4)}\right) \equiv 0; \qquad (674)$$

$$a_1\left(\sigma_k^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma_k^{(2)} + \frac{1}{4}\sigma_k^{(3)}\right) + a_4\left(\frac{1}{2}\sigma_k^{(2)} + \frac{1}{4}\sigma_k^{(3)} + \sigma_k^{(4)}\right) \equiv 0. \qquad (675)$$

Поскольку имеют место тождества [73]

$$\beta_k^{(1)} + \frac{1}{2}\beta_k^{(2)} + \frac{1}{4}\beta_k^{(3)} \equiv 0; \qquad (676)$$

$$\sigma_k^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma_k^{(2)} + \frac{1}{4}\sigma_k^{(3)} \equiv 0, \qquad (677)$$

коэффициент a_1 из (674) и (675) не определяется и является произвольным. Его значение необходимо найти из принципа соответствия.

Используя (677) в (675), получаем:

$$a_4(\sigma_k^{(4)} - \sigma_k^{(1)}) \equiv 0. \qquad (678)$$

Выражение $(\sigma_k^{(4)} - \sigma_k^{(1)})$ не равно нулю тождественно [73], поэтому из (678) с необходимостью следует:

$$a_4 \equiv 0.$$

Тогда из (672) находим:

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1, \quad a_3 = \frac{1}{4} a_1, \; a_4 = 0, \; a_5 = 0. \tag{679}$$

Очевидно, для значений коэффициентов (673) и (679) из (659) получим:

$$\mathscr{L}_g = a_1 \left[\tilde{g}_{kq} D_m \tilde{g}^{pq} D_p \tilde{g}^{mk} + \frac{1}{2} \tilde{g}^{lp} D_l \tilde{g}^{mn} D_p \tilde{g}_{mn} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} \tilde{g}_{km} \tilde{g}_{nq} \tilde{g}^{lp} D_l \tilde{g}^{km} D_p \tilde{g}^{nq} \right], \tag{680}$$

а из (665) имеем:

$$\delta_\varepsilon \mathscr{L}_g = a_1 D_k \left(Q^k_{(1)} + \frac{1}{2} Q^k_{(2)} + \frac{1}{4} Q^k_{(3)} \right). \tag{681}$$

Выбирая коэффициент a_1 из принципа соответствия

$$a_1 = -\frac{1}{32\pi},$$

мы приходим к лагранжиану РТГ (140). Можно показать, что

$$-\frac{1}{32\pi} \left(Q^k_{(1)} + \frac{1}{2} Q^k_{(2)} + \frac{1}{4} Q^k_{(3)} \right) = Q^k(x),$$

где $Q^k(x)$ задано формулой (653).

Таким образом, калибровочное преобразование гравитационного поля (651) позволило однозначно установить характер самодействия поля Φ^{ik} и структуру лагранжиана — результаты, которые были получены в разд. 8 и 10 из других соображений.

Уравнения РТГ при наличии вещества не допускают калибровочных преобразований (651). Этим они отличаются от калибровочных преобразований в электродинамике, которые имеют место и для взаимодействующих полей. В отсутствие вещества калибровочные преобразования (651) не изменяют уравнений гравитационного поля, но приводят к изменению интервала риманова пространства-времени, а следовательно, и его геометрических характеристик. Можно убедиться, что

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_\varepsilon ds^2 = dx^i\, dx^k \delta_\varepsilon g_{ik};\\
&\delta_\varepsilon R_{ik} = -R_{il} D_k \varepsilon^l - R_{kl} D_i \varepsilon^l - \varepsilon^l D_l R_{ik};\\
&\delta_\varepsilon R_{iklm} = -R_{qklm} D_i \varepsilon^q - R_{iqlm} D_k \varepsilon^q - R_{ikqm} D_l \varepsilon^q -\\
&\quad - R_{iklq} D_m \varepsilon^q - \varepsilon^q D_q D_{iklm}.
\end{aligned}\right\} \tag{682}$$

Именно в этом пункте проявляется основное отличие преобразований (651) от калибровочной инвариантности в электродинамике, где калибровочные преобразования не изменяют физически наблюдаемых величин. **Геометрия пространства-времени однозначно определяется только в прусутсвии вещества, поскольку именно в этом случае калибровочный произвол отсутствует.** В нашей теории уравнения движения вещества являются следствиями десяти уравнений для гравитационного поля (130). Если бы мы ограничились только уравнениями (130), то для десяти переменных гравитационного поля Φ^{ik} и четырех переменных, характеризующих вещество, мы имели бы только десять уравнений. Для полноты системы необходимо еще четыре ковариантных уравнения поля. Такие уравнения нами введены в разд. 8. Они имеют вид (123) и определяют структуру гравитационного поля, как поля типа Фарадея — Максвелла, обладающего спинами 2 и 0. Уравнения (123) являются всеобщими и универсальными и не имеют никакого отношения к координатным условиям Фока и Де Дондера, поскольку выбор системы координат в РТГ полностью задается метрическим тензором γ^{ik} пространства Минковского. Для гравитационного поля вне вещества уравнения (123) сужают класс возможных калибровочных преобразований, накладывая на $\varepsilon^l(x)$ условие

$$g^{mn} D_m D_n \varepsilon^l(x) = 0. \tag{683}$$

Таким образом, калибровочный принцип в соединении с представлениями о гравитационном поле как физическом поле Фарадея—Максвелла, обладающем энергией импульсом и спинами 2 и 0, однозначно приводит к системе уравнений РТГ.

В заключение отметим, что рассмотренный в данном разделе калибровочный произвол (682) имеет место и в ОТО. Поэтому наши выводы об определенности геометрии относятся и к ОТО.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Постулированная нами для гравитационного поля система уравнений (123) не является следствием принципа наименьшего действия. Поэтому эти уравнения, как всеобщие и универсальные, должны приниматься во внимание как «дополнительные условия» при применении принципа наименьшего действия. Другими словами, мы должны вариацию действия

$$J = \int L\, d^4x \tag{П.1}$$

по полям $\tilde{\Phi}^{mn}$ или в силу связи (121) по $\tilde{g}^{mn}$ производить на многообразии, определяемом системой уравнений (123).

Хорошо известно, что подобная вариационная задача решается методом лагранжевых множителей. Стандартный прием этого метода заключается в том, что под интегралом действия (П.1) к лагранжиану L следует добавить член вида $\eta_m D_n \tilde{g}^{mn}$, где η_m — множитель Лагранжа, и принцип наименьшего действия применять к выражению

$$J = \int (L + \eta_m D_n \tilde{g}^{mn})\, d^4x. \tag{П.2}$$

Поскольку при варьировании (П.2) независимо друг от друга варьируются как η_m, так и все компоненты тензорной плотности $\tilde{g}^{mn}$, найдем

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{mn}} - \frac{1}{2}(D_n \eta_m + D_m \eta_n) = 0, \tag{П.3}$$

$$D_n \tilde{g}^{mn} = 0. \tag{П.4}$$

Дальнейший анализ проведем на примере лагранжиана $L = L_g + L_M$, где L_g задано формулой (140), а L_M — лагранжиан вещества.

Вычисляя для $L + \eta_m D_n \tilde{g}^{mn}$ полный тензор энергии-импульса t^{mn} по формулам (88), (89), получаем

$$t^{mn} = (-1/16\pi) J^{mn} + D_k \{[\tilde{g}^{kn}\gamma^{ml} + \tilde{g}^{km}\gamma^{nl} - \tilde{g}^{mn}\gamma^{kl}]\, \eta_l\} +$$
$$+ 2\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{ml}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{lk}\right)\left[\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{kl}} - \frac{1}{2} D_l \eta_k - \frac{1}{2} D_k \eta_l\right].$$

Отсюда мы видим, что если имеет место (П.3), то

$$t^{mn} = (-1/16\pi)\, J^{mn} + D_k\, [\eta_l\, (\tilde{g}^{kn}\gamma^{ml} + \tilde{g}^{km}\, \gamma^{nl} - \tilde{g}^{mn}\, \gamma^{k}{}_{l}]. \tag{П.5}$$

Так как

$$D_m t^{mn} = 0,$$

из (П.5) с учетом (П.4) находим

$$\tilde{g}^{km} D_m D_k \eta^n = 0.$$

Следовательно, множители Лагранжа η^n могут быть выбраны равными нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Логунов А. А., Власов А. А.**— ТМФ, 1984, т. 61, с. 3; **Власов А. А., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.**— Там же, с. 323; **Логунов А. А., Мествиришвили М. А.**— Там же, с. 327.
2. **Эйнштейн А.** Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965.
3. **Эйнштейн А.** Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966.
4. **Schrödinger E.**— Phys. Z., 1918, v. 19, p. 4.
5. **Hilbert D.** Goettingen Nachrichten, 4. Goettingen, 1917; **Klein F.** Gesammelte mathematische Abhandlurden. B. Springer, 1921.
6. **Власов А. А., Денисов В. И.**— ТМФ, 1982, т. 53, с. 406.
7. **Денисов В. И., Логунов А. А.**— ТМФ, 1980, т. 43, с. 187.
8. **Денисов В. И., Логунов А. А.**— ТМФ, 1980, т. 45, с. 291.
9. **Денисов В. И., Логунов А. А.**— ТМФ, 1982, т. 51, с. 163.
10. **Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.**— ТМФ, 1977, т. 33, с. 174.
11. **Денисов В. И., Логунов А. А.** Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 21, М.: ВИНИТИ, 1982.
12. **Poincaré H.** Bull. des Sciences Math., 1904, v. 28, ser. 2, p. 302.
13. **Логунов А. А.** Лекции по теории относительности. М.: Изд-во МГУ, 1985.
14. **Логунов А. А. и др.**— ТМФ, 1979, т. 40, с. 291.
15. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.
16. **Паули В.** Теория относительности: Пер. с нем. М.: Наука, 1983.
17. **Эддингтон А. С.** Теория относительности: Пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1934.
18. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. М.: Наука, 1973.
19. **Толмен Р.** Относительность, термодинамика и космология: Пер. с англ. М.: Наука, 1974.
20. **Weyl H.** Zeit. Materie. Berlin, Springer Verlag, 1923.
21. **Меллер К.** Теория относительности: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975.
22. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация. Т. 1, 2: Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
23. **Синг Дж.** Общая теория относительности: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
24. **Рудаков Л. И.**— ДАН СССР, 1971, т. 197, с. 1045.
25. **Широков М. Ф.**— ДАН СССР, 1970, т. 195, с. 814.
26. **Широков М. Ф., Будько Л. И.**— ДАН СССР, 1967, т. 172, с. 326.
27. **Brdicka M.**— Proc. Roy Irish Acad., 1951, ser. A, v. 54, p. 137.
28. **Точные** решения уравнений Эйнштейна/Д. Крамер и др.; Под ред. Э. Шмутцера: Пер. с англ. М.: Энергоиздат, 1982.
29. **Bauer H.**— Phys. Z., 1918, v. 19, p. 163.
30. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
31. **Новожилов Ю. В.** Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.
32. **Эйзенхардт Л. П.** Непрерывные группы преобразования: Пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1947.
33. **Понтрягин Л. С.** Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
34. **Петров А. З.** Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
35. **Логунов А. А., Фоломешкин В. В.**— ТМФ, 1977, т. 32, с. 291.
36. **Ogievetsky V. I., Polubarinov I. V.**— Ann. Phys., 1965, v. 35, p. 167; Препринт ОИЯИ Р-2106, Дубна, 1965.

37. **Fronsdal C.**— Sup. Nuovo cimento, 1958, v. 9, p. 416; **Barnes K. J.**— J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 788.
38. **De-Donder.** La Gravifique Einsteinienne, Paris, 1921; Teorie des Champs Gravifiques. Paris, 1926; **Fock V. A.**— J. Phys., 1939, v. 1, p. 81; Rev. Modern. Phys., 1957, v. 29, p. 235.
39. **Rosen N.**— Phys. Rev., 1940, v. 57, p. 147; Ann. Phys., 1963, v. 22, p. 1.
40. **Papapetrou A.**— Proc. Roy Irish Acad., 1948, v. A52, p. 11; **Gupta S.**— Proc. Roy Soc., 1952, v. A65, p. 608; **Kohler H.**— Z. Phys., 1954, v. 131, p. 571; v. 134, p. 286; Ibid., p. 306; **Thirring W.**— Ann. Phys., 1961, v. 16, p. 69.
41. **Belinfante F. J., Garrison J. C.**— Phys. Rev., 1962, v. 125, p. 1124; **Belinfante F. J.**— Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 793.
42. **Вайнберг С.** Гравитация и космология: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
43. **Власов А. А., Логунов А. А.**— ТМФ, 1985, т. 63, с. 3.
44. **Oppenheimer J. R., Snyder H.**— Phys. Rev., 1939, v. 56, p. 455.
45. **Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.** Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1967.
46. **Birkhoff G.** Relativity and Modern Physics. Harvard Univ. Press, 1923.
47. **Власов А. А., Логунов А. А.** Гравитационное поле нестатического сферически-симметричного тела в релятивистской теории гравитации. М.: изд. МГУ, 1985.
48. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
49. **Nordtvedt K. (Jr.), Will C. M.**— Astrophys. J., 1972, v. 177, p. 757.
50. **Will C. M.**— Astrophys. J., 1971, v. 169, p. 125.
51. **Денисов В. И., Логунов А. А. и др.**— Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1985, т. 167, с. 108.
52. **Брагинский В. Б., Панов В. И.**— ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 873.
53. **Nordtvedt K. (Jr.).**— Phys. Rev., 1968, v. 169, p. 1014.
54. **Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж.** Гравитация. Т. 3: Пер. с англ. М.: Мир, 1977; **Will C. M.** General relativity/Ed. by S. W. Hawking, W. Israel. Cambridge, Univers. Press, 1979, p. 24.
55. **Dicke R. H., Goldenberg H. M.**— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 18, p. 313.
56. **Hill H. A., Clayton P. D. e. a.**— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 1497.
57. **Логунов А. А., Лоскутов Ю. М.** Препринт ИФВЭ ОТФ 85—183, Серпухов, 1985.
58. **Shapiro I. e. a.**— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1594; General Relat. and Grav., 1972, v. 3, p. 135.
59. **Shapiro I.**— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 789.
60. **O'Conell R. F.** General Relat. and Grav., 1972, v. 3, p. 123.
61. **Dicke R. H.** The lecture on gravitation.— In: Proc. of the Intern. School of Physics «Enrico Fermi». N.Y., Academic Press, 1962, p. 16.
62. **Dicke R. H.** General Relativity: survea and experimental test.— In.: Gravitation and the Universe. Philadelphia, 1969, p. 19.
63. **Nordtvedt K. (Jr.).**— Phys. Rev., 1968, v. 169, p. 1014; 1973, v. 7, p. 2347; 1968, v. 169, p. 1017.
64. **Bondi H.**— Rev. Mod. Phys., 1967, v. 29, p. 423.
65. **Will C. M.**— Astrophys. J., 1971, v. 163, p. 611.
66. **Williams J. C., Eckhard D. H. e. a.**— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 551.
67. **Shapiro I., Counselman C. C., King R. W.**— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 555.
68. **Will C. M.** Astrophys. J., 1971, v. 169, p. 141.
69. **Will C. M.** Theory and experiment in gravitational physics. Cambridge, Univers. Press, 1981.
70. **Nordtvedt K. (Jr.).**— Phys. Rev., 1969, v. 180, p. 1293.
71. **Will C. M.**— Astrophys. J., 1973, v. 185, p. 31.
72. **Will C. M.**— Astrophys. J., 1977, v. 214, p. 826.
73. **Логунов А. А., Мествиришвили М. А.** Препринт ИФВЭ ОТФ 85—181, Серпухов, 1985.