

УДК 539.144.3

# МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР

*Я. Квасил*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

*Р.Г.Назмитдинов*

Научно-исследовательский институт прикладной физики ТашГУ  
им. В. И. Ленина, Ташкент

Изложен метод, комбинирующий модель принудительного вращения и приближение случайных фаз, для описания коллективных возбуждений вращающихся ядер. Обсуждаются симметрии, сохраняющиеся для вращающихся ядер, их связь с физическими состояниями. Представлены результаты анализа свойств коллективных возбуждений в рамках различных моделей.

The method combining the cranking model with the random phase approximation is suggested for the description of the collective excitations in rotating nuclei. The symmetries of rotating nucleus Hamiltonian are discussed. The result of the analysis of the properties of the collective excitations in the framework of several models are presented.

## ВВЕДЕНИЕ

Важным источником информации о структуре ядра является исследование вращательных состояний [1]. Интерес к их изучению не иссякает более четверти века с момента открытия ротационных полос в ядрах [2]. В значительной степени это обусловлено прогрессом экспериментальной техники, позволяющей исследовать ядра в области предельных угловых моментов (см., например, [3]), когда ядро еще существует как целый объект.

Многие закономерности в спектрах и электромагнитных переходах вращающихся ядер удалось объяснить с помощью обобщенной модели ядра [4]. В ее основе лежит предположение о возможности разделения внутреннего и вращательных движений в ядре. Однако с ростом углового момента, когда центробежные и кориолисовы силы становятся большими, вращение оказывает заметное влияние на внутренние степени свободы [3, 5—9]. В то же время изучение структуры ядра при небольших значениях углового момента показало, что внутреннее движение нуклонов определяется в основном средним полем и корреляциями сверхпроводящего типа [10]. Естественно предположить, что приближение среднего поля является достаточно надежным даже в экстремальных условиях, когда угловой момент настолько велик, что начинает доминировать канал деления в процессе девозбуждения ядра. Простые оценки для ядер редкоземельной

области (рекордные угловые моменты, достигнутые на эксперименте, получены для этой области [6, 11]), показывают, что при максимальных спинах  $I \sim 60\hbar$  для  $A = 150$  вращательная энергия в расчете на один нуклон не превышает 5% энергии связи (около 0,4—0,6 МэВ). Следовательно, можно надеяться, что условия, в которых находится основная часть нуклонов (остов ядра), весьма мало меняются по сравнению с тем, что имеет место при малых спинах [12, 13]. Тогда, очевидно, достаточно оправдано использование моделей, успешно применяемых для исследования структуры ядра при небольших значениях углового момента.

Одной из таковых является модель принудительного вращения (МПВ), впервые предложенная Инглисом [14]. В ней предполагается, что среднее поле ядра вращается с неизменной во времени угловой частотой вращения вокруг выделенного направления. С помощью МПВ удается проанализировать многие свойства вращающихся ядер, используя диаграммы квазичастичных энергий, определенных во внутренней системе координат [15]. Однако, оставаясь в рамках данной модели, можно провести анализ состояний иррадиации и одно-, двухквазичастичной природы. В то же время экспериментальная информация, полученная из анализа  $\gamma$ -спектров быстровращающихся ядер при девозбуждении, свидетельствует о коллективной природе состояний не только вблизи иррадиации, но и при значительных энергиях возбуждения (около 15—20 МэВ над иррадиацией при  $I \sim 60\hbar$  [16]).

С целью описания  $\gamma$ -спектров вблизи иррадиации были проделаны теоретические расчеты [17], в которых нижайшие коллективные возбуждения описываются как малые колебания поперечных осей (прецессия оси вращения) трехосного ротатора [1]. Очевидно, что такое рассмотрение носит феноменологический характер. Поэтому представляется целесообразным развивать микроскопические подходы. Одним из таких подходов является использование самосогласованной модели принудительного вращения и приближение случайных фаз (ПСФ). Этот подход впервые был предложен в [18, 19]. Следует отметить и другие микроскопические подходы [20—22], основанные на методе обобщенной матрицы плотности. Однако они менее развиты, чем излагаемый ниже метод.

В данном обзоре мы ставим своей задачей изложение метода МПВ + ПСФ и его приложений к расчету конкретных характеристик ряда ядер. В первом разделе дается описание метода с учетом влияния условий симметрий на свойства состояний физической природы. Далее (разд. 2) на примере простой модели вращающегося анизотропного осциллятора исследуются свойства когерентных возбуждений: изоскалярных квадрупольных и изовекторных дипольных. Наконец, в разд. 3 дается применение метода МПВ + ПСФ для описания различных характеристик ряда ядер. В заключении кратко суммированы результаты. В приложении А приведены некоторые свойства операторов, используемых в моделях.

## 1. МОДЕЛЬ ПРИНУДИТЕЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ФАЗ

Гамильтониан МПВ и его симметрии. Как уже отмечалось во введении, в МПВ предполагается, что ядро вращается вокруг выделенного направления; обычно это ось  $x$  внутренней и лабораторной систем. Гамильтониан, отвечающий такому вращению и определенный во вращающейся системе координат, имеет вид \*

$$H' = H - \sum_{\tau} \lambda_{\tau} \hat{N}_{\tau} - \Omega \hat{J}_x, \quad (1)$$

где  $H$  — полный ядерный гамильтониан \*\*;  $\hat{N}_{\tau}$  — оператор числа протонов ( $\tau = Z$ ) или нейтронов ( $\tau = N$ );  $\lambda_{\tau}$  — соответствующий химический потенциал;  $\Omega$  — угловая частота вращения;  $\hat{J}_x$  —  $x$ -компонента полного углового момента. Гамильтониан  $H$  содержит внутренние и коллективные степени свободы (связанные с вращением и движением центра масс ядра). Их взаимное разделение представляет в общем случае нетривиальную задачу (см., например, [20, 25]), которая обычно на каком-то этапе предполагает некоторое приближение.

Естественно потребовать от гамильтониана ротационной и трансляционной инвариантности. Кроме того, число частиц в рассматриваемых нами явлениях не меняется. Следовательно,

$$[H, \hat{J}_i] = [H, \hat{P}_i] = [H, \hat{N}_{\tau}] = 0, \quad (2)$$

( $i = x, y, z$ )

где  $\hat{J}_i, \hat{P}_i$  — компоненты полного углового момента и полного импульса ядра в лабораторной системе. Так как

$$\left. \begin{aligned} [\hat{J}_i, \hat{P}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{P}_k, [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{J}_k; \\ [\hat{N}_{\tau}, \hat{J}_i] &= [\hat{N}_{\tau}, \hat{P}_i] = [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

из условия (2) для гамильтониана МПВ следует

$$\left. \begin{aligned} [H', \hat{J}_x] &= 0; [H', \hat{P}_x] = 0; \\ [H', \hat{J}_y] &= -i\Omega \hat{J}_z; [H', \hat{P}_y] = -i\Omega \hat{P}_z; [H', \hat{N}_{\tau}] = 0; \\ [H', \hat{J}_z] &= i\Omega \hat{J}_y; [H', \hat{P}_z] = i\Omega \hat{P}_y. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

\* Более подробно о теоретических и экспериментальных аспектах МПВ можно прочитать в современном обзоре [23].

\*\* Полный ядерный гамильтониан  $H$  в (1) — это гамильтониан ядра в лабораторной системе, но выраженный через переменные вращающейся системы координат. Таким же образом под компонентами импульса  $\hat{P}_i$  ниже подразумеваются переменные вращающейся системы координат [24], т. е.  $\hat{P} \rightarrow \exp(i\hat{J}_x\Omega t) \hat{P} \exp(-i\hat{J}_x\Omega t)$ .

Обычно в полном ядерном гамильтониане  $H$  выделяется среднее поле, которое в конкретных расчетах аппроксимируют некоторым феноменологическим потенциалом, что приводит к нарушению условий симметрий (2). Для восстановления нарушенных симметрий необходимо наложить какие-либо условия на остаточное взаимодействие. Иначе к собственным векторам полного гамильтониана, описывающим внутренние возбуждения ядра, примешиваются нефизические (с точки зрения внутренних степеней свободы) компоненты коллективного характера (см., например, [26—29]). Так как восстановление симметрий, как правило, происходит в рамках приближения, используемого для отыскания собственных мод гамильтониана, ниже мы будем требовать выполнения условий (2) в рамках ПСФ.

Для простоты изложения будем исходить из сферически-симметричного среднего поля. Остаточное взаимодействие возьмем в виде сепарабельных мультиполь-мультипольных сил (дальнодействующая часть) и монопольного спаривания (короткодействующая часть)\*. Отметим, что данный выбор среднего поля и остаточных взаимодействий никак не влияет на общность изложения метода МПВ + ПСФ. В отдельных приложениях этого метода, обсуждаемых ниже, вид среднего поля и остаточных взаимодействий конкретизируется, однако все вычисления будут проведены в рамках схемы, излагаемой в данном разделе.

Итак, рассмотрим ядерный гамильтониан вида:

$$H = \sum_k e_k c_k^+ c_k - \frac{1}{4} \sum_{\tau} G_{\tau} \hat{P}_{\tau}^+ \hat{P}_{\tau} - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1, 2, 3 \dots} \sum_{m=-\lambda}^{\lambda} \kappa_{\lambda} \hat{Q}_{\lambda m}^+ \hat{Q}_{\lambda m}, \quad (5)$$

где \*\*

$$\hat{P}_{\tau}^+ = \sum_{k \in \tau} c_k^+ c_k^+; \quad \hat{Q}_{\lambda m} = \sum_{kl} q_{kl}^{\lambda m} c_k^+ c_l, \quad (6)$$

$$q_{kl}^{\lambda m} = \langle k | r^{\lambda} Y_{\lambda m} | l \rangle;$$

$c_k^+$  ( $c_k$ ) — операторы рождения (уничтожения) частицы в состоянии  $|k\rangle$  сферического ядерного поля и  $c_k^{\pm} = T c_k^{\pm} T^{-1}$  ( $T$  — оператор обращения времени [31]);  $\kappa_{\lambda}$ ,  $G_{\tau}$  — силовые константы соответственно мультиполь-мультипольного взаимодействия и спаривания ( $\tau = N, Z$ ). Суммирование в формуле (6) идет не только по индексам  $l, k$ , но и по  $\bar{l}, \bar{k}$ .

Эксперимент свидетельствует, что большинство атомных ядер в основном состоянии и в состояниях ираст-полосы обладают  $\hat{P}^-$ ,  $\hat{R}_k(\pi)$ -,  $\hat{S}_k \equiv \hat{P} \hat{R}_k^{-1}(\pi)$ -симметриями ( $\hat{P}$  — оператор внутренней четности;  $\hat{R}_k(\pi) = e^{-i\pi \hat{J}_k}$  — оператор поворота вокруг оси  $k$  внутренней системы координат на угол  $\pi$ ), т. е. деформированные ядра обладают деформациями четных мультипольностей. Из-за наличия

\* В [30] обсуждаются некоторые аспекты метода МПВ + ПСФ с использованием несепарабельных сил.

\*\* Все операторы определены в системе с осью квантования  $z$ .

члена  $\Omega \hat{J}_k$  для гамильтониана МПВ (1) имеют место только  $P$ -,  $R_1(\pi)$ -,  $S_1$ -симметрии. Поэтому, следуя работам Гудмана [32, 33], базис одночастичных состояний выбираем из условия, чтобы эти состояния были собственными векторами оператора  $\hat{R}_1^{-1}(\pi) = \hat{R}_x^{-1}(\pi)$

$$e^{i\pi \hat{J}_x} \begin{pmatrix} c_k^+ \\ c_k^- \end{pmatrix} e^{-i\pi \hat{J}_x} = \mp i \begin{pmatrix} c_k^+ \\ c_k^- \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В настоящее время появилось много экспериментальных и теоретических работ (см., например, [34—39] и ссылки в них) о возможности стабильной октупольной деформации ядра, нарушающей внутреннюю зеркальную симметрию ядра. В этом случае имеет место нарушение  $P$ - и  $R_x(\pi)$ -симметрии в отдельности, однако  $S_x$ -симметрия сохраняется. Обобщение метода МПВ + ПСФ на случай стабильной октупольной деформации и физические следствия рассмотрены в [40].

Как показывают расчеты в рамках ПСФ, в отсутствие вращения (см., например, [41]) наиболее важную роль при описании наблюдаемого спектра играют квадрупольные и октупольные возбуждения. Поэтому ниже ограничимся в гамильтониане (5) рассмотрением операторов с мультипольностью  $\lambda$ , равной 2 и 3. С точки зрения внутренней  $R_1$ -симметрии ядра введем следующие комбинации мультипольных операторов:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q}_0^{(+)} = \hat{Q}_{20}; \quad \hat{Q}_1^{(+)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{21} + \hat{Q}_{2-1}); \quad \hat{Q}_1^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{21} - \hat{Q}_{2-1}); \\ \hat{Q}_2^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{22} + \hat{Q}_{2-2}); \quad \hat{Q}_2^{(-)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{22} - \hat{Q}_{2-2}); \\ \hat{F}_0^{(-)} = \hat{Q}_{30}; \quad \hat{F}_1^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{31} - \hat{Q}_{3-1}); \quad \hat{F}_1^{(-)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{32} + \hat{Q}_{3-1}); \\ \hat{F}_2^{(+)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{32} - \hat{Q}_{3-2}); \quad \hat{F}_2^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{32} + \hat{Q}_{3-2}); \\ \hat{F}_3^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{33} - \hat{Q}_{3-3}); \quad \hat{F}_3^{(-)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{33} - \hat{Q}_{3-3}), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

обладающие свойством

$$e^{i\pi \hat{J}_x} \begin{bmatrix} \hat{Q}_m^{(\pm)} \\ \hat{F}_m^{(\pm)} \end{bmatrix} e^{-i\pi \hat{J}_x} = \pm \begin{bmatrix} \hat{Q}_m^{(\pm)} \\ \hat{F}_m^{(\pm)} \end{bmatrix}. \quad (8a)$$

Для дальнейшего гамильтониан (5) удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} H = \sum e_k c_k^+ c_k - \frac{1}{4} \sum_{\tau} G_{\tau} \hat{P}_{\tau}^+ \hat{P}_{\tau} - \frac{\kappa_2}{2} \left[ \sum_{m=0}^2 \hat{Q}_m^{(+)} \hat{Q}_m^{(+)} + \sum_{m=1}^2 \hat{Q}_m^{(-)} \hat{Q}_m^{(-)} \right] - \\ - \frac{\kappa_3}{2} \left[ \sum_{m=1}^3 \hat{F}_m^{(+)} \hat{F}_m^{(+)} + \sum_{m=0}^3 \hat{F}_m^{(-)} \hat{F}_m^{(-)} \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Расчеты в методе МПВ + ПСФ состоят из двух отдельных этапов. Во-первых, решается задача Хартри — Фока — Боголюбова (ХФБ) в приближении МПВ (см., например, обзор [42] и ссылки в нем). В результате получаем квазичастичный спектр для данной вращательной частоты  $\Omega$ . Квазичастичный вакуум  $|\Omega\rangle$  характеризует состояние ядра на ирраст-линии со спином  $I$ , соответствующим среднему значению оператора  $\hat{J}_x$  по состоянию  $|\Omega\rangle$  при заданной частоте вращения  $\Omega$ . Во-вторых, в ПСФ отыскиваются вибрационные моды относительно состояний ирраст-линии (см., например, [18, 19, 24, 29, 43—52]). Ниже оба этапа будут рассмотрены детально. Отметим также, что все рассмотрение, представленное здесь, относится к случаю четно-четных ядер.

**Метод Хартри — Фока — Боголюбова для вращающихся ядер (описание ирраст-линии).** Метод ХФБ успешно используется для описания многих характеристик вращающихся ядер [53—59] и подробно описан в [42] (см. также [60]). Поэтому приведем только основные идеи, необходимые для понимания последующего.

Используя трансформацию Боголюбова, перейдем к операторам квазичастиц  $\alpha_i, \alpha_i^\dagger$ :

$$\alpha_i^\dagger = \sum_k (A_k^i c_k^\dagger + B_k^i c_k); \quad \alpha_i = \sum_k (A_k^{\bar{i}} c_k^\dagger + B_k^{\bar{i}} c_k), \quad (10)$$

где ввиду (7) квазичастичные состояния также являются собственными состояниями оператора  $\hat{R}_1^{-1}(\pi)$

$$e^{i\pi\hat{J}_x} \begin{pmatrix} \alpha_i^\dagger \\ \alpha_i \end{pmatrix} e^{-i\pi\hat{J}_x} = \mp i \begin{pmatrix} \alpha_i^\dagger \\ \alpha_i \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Квазичастичные энергии  $E_i, E_{\bar{i}}$  и коэффициенты трансформации определяются из решения уравнений \*

$$M \begin{pmatrix} A_k^i \\ B_k^i \end{pmatrix} = E_i \begin{pmatrix} A_k^i \\ B_k^i \end{pmatrix}; \quad M \begin{pmatrix} B_k^{\bar{i}} \\ A_k^{\bar{i}} \end{pmatrix} = -E_{\bar{i}} \begin{pmatrix} B_k^{\bar{i}} \\ A_k^{\bar{i}} \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} h^{(1)} \Delta \\ \Delta^+ h^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

\* Уравнения (12) можно получить, например, вариационным путем [42, 44]

$$\delta \{ \langle \Omega | H^* | \Omega \rangle + \sum_{ij} E_i [ \sum_l (A_l^i A_l^j + B_l^i B_l^j + A_l^{\bar{i}} A_l^{\bar{j}} + B_l^{\bar{i}} B_l^{\bar{j}}) - 2 ] \} = 0,$$

где полный ядерный гамильтониан в (1) выбирается в виде (5).

где соответствующие матричные элементы имеют вид \*

$$\left. \begin{aligned} h_{kl}^{(1)} &= \delta_{kl} (e_k - \lambda_\tau) - \Omega \langle k | \hat{J}_x | l \rangle - \kappa_2 \langle \Omega | \hat{Q}_{20} | \Omega \rangle \langle k | \hat{Q}_{20} | l \rangle - \\ &- \kappa_2 \langle \Omega | \hat{Q}_2^{(+)} | \Omega \rangle \langle k | \hat{Q}_2^{(+)} | l \rangle; \\ h_{\bar{k}\bar{l}}^{(2)} &= -\delta_{\bar{k}\bar{l}} (e_{\bar{k}} - \lambda_\tau) - \Omega \langle \bar{k} | \hat{J}_x | \bar{l} \rangle + \\ &+ \kappa_2 \langle \Omega | \hat{Q}_{20} | \Omega \rangle \langle \bar{k} | \hat{Q}_{20} | \bar{l} \rangle + \kappa_2 \langle \Omega | \hat{Q}_2^{(+)} | \Omega \rangle \langle \bar{k} | \hat{Q}_2^{(+)} | \bar{l} \rangle; \\ \Delta_{\bar{k}\bar{l}} &= -\frac{G_\tau}{4} \langle \Omega | \hat{P}_\tau | \Omega \rangle \delta_{\bar{k}\bar{l}}. \end{aligned} \right\} (13)$$

Здесь  $\langle k | \hat{A} | l \rangle$  — одночастичный матричный элемент соответствующего оператора;  $\langle \Omega | \hat{A} | \Omega \rangle$  — среднее значение соответствующего оператора по квазичастичному вакууму  $|\Omega\rangle$ , т. е. по состоянию иррадиации при определенной частоте вращения  $\Omega$ . Способ определения средних значений одночастичных операторов приведен в приложении А. Самосогласованные уравнения (12), (13) должны быть дополнены условиями:

$$\langle \Omega | N_{\tau=N} | \Omega \rangle = N_0, \quad \langle \Omega | \hat{N}_{\tau=Z} | \Omega \rangle = Z_0, \quad \langle \Omega | \hat{J}_x | \Omega \rangle = J_0 \quad (14)$$

для ядра с  $N_0$  нейтронами,  $Z_0$  протонами, находящимися при данной угловой частоте в состоянии со спином  $J_0$ .

Решение задачи ХФБ позволяет переписать гамильтониан МПВ (1) в следующей форме:

$$\begin{aligned} H' &= \langle \Omega | H' | \Omega \rangle + \sum_i E_i (\alpha_i^+ \alpha_i + \alpha_i^- \alpha_i^-) - \\ &- \sum_\tau \frac{G_\tau}{4} : (\hat{P}_\tau - \langle \Omega | \hat{P}_\tau | \Omega \rangle)^+ (\hat{P}_\tau - \langle \Omega | \hat{P}_\tau | \Omega \rangle) : - \\ &- \frac{\kappa_2}{2} \sum_{m=0}^2 : (\hat{Q}_m^{(+)} - \langle \Omega | \hat{Q}_m^{(+)} | \Omega \rangle) (\hat{Q}_m^{(+)} - \langle \Omega | \hat{Q}_m^{(+)} | \Omega \rangle) : - \\ &- \frac{\kappa_2}{2} \sum_{m=1}^2 : \hat{Q}_m^{(-)} \hat{Q}_m^{(-)} : - \frac{\kappa_3}{2} \left[ \sum_{m=0}^3 : \hat{F}_m^{(-)} \hat{F}_m^{(-)} : + \sum_{m=1}^3 : \hat{F}_m^{(+)} \hat{F}_m^{(+)} : \right], \quad (15) \end{aligned}$$

где символ  $:$  означает нормальное произведение по отношению к квазичастичному вакууму  $|\Omega\rangle$ . Поскольку гамильтониан (1) инвариантен по отношению к  $\hat{R}_1(\pi)$ -преобразованию и коммутирует с оператором четности  $\hat{P}$ , то квазичастичный вакуум можно определить следующим образом:

$$e^{i\pi \hat{J}_x} |\Omega\rangle = \hat{P} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \quad (16)$$

\* При выводе выражений для матричных элементов, как правило, пренебрегают обменными членами, поэтому это скорее приближение Хартри — Боголюбова. Связь между учетом обменных членов на уровне среднего поля (СП) и на уровне ПСФ обсуждается в [30].

Следовательно, отличны от нуля только средние значения  $\langle \Omega | \hat{A} | \Omega \rangle$  операторов, не меняющих четность и положительной сигнатуры\*.

Следует заметить, что решить уравнения (12), (13) при условиях (14) точным самосогласованным образом достаточно сложно. Обычно среднее поле аппроксимируют феноменологическим ядерным потенциалом типа потенциала Нильссона (см., например, [53, 57]), или потенциала Саксона — Вудса (см. [56, 61]), параметры которого определяются из требования воспроизведения экспериментальных одночастичных характеристик в основном состоянии. Далее, используя метод Струтинского для вращающегося ядра [12, 57], находим минимум энергии деформации ядра при заданной частоте вращения для отыскания состояния ираст-линии. При этом проводится согласование по вращению и спариванию.

Как уже отмечалось выше, феноменологически выбранное деформированное поле нарушает симметрии (2) и (4). Для их восстановления необходимо подобрать остаточное взаимодействие. Согласование остаточного взаимодействия с видом феноменологического потенциала среднего поля подробно обсуждалось в ряде работ (см., например, [26—28, 62—66]).

**Приближение случайных фаз для вращающихся ядер.** Г а м и л ь т о н и а н ПСФ и у р а в н е н и я д в и ж е н и я. Впервые ПСФ в комбинации с методом ХФБ для описания свойств состояний вращающихся ядер был предложен Маршалеком [18, 30, 43, 67, 68], Михайловым и Янссеном [19, 44]. В этих работах были сформулированы основные идеи подхода ХФБ + ПСФ. Дальнейшее его развитие связано с построением конкретных моделей для количественного и качественного изучения характеристик ядер [69, 45—52, 70—76], а также усовершенствованием теоретической схемы с целью восстановления симметрий полного гамильтониана [24, 29] и описания решений ПСФ с помощью метода силовой функции [77]\*\*. Как уже отмечалось выше, в [40] рассматривается возможность обобщения этого подхода на случай октаупольной деформации среднего ядерного поля.

Состояния ядра вблизи ираст-линии в рамках МПВ + ПСФ описываются посредством фононов, которые при данной частоте вращения  $\Omega$  есть линейная комбинация двухквaziчастичных бозонов (см., например, [43])

$$b_{k\bar{l}}^+ = \alpha_k^+ \alpha_{\bar{l}}^+; \quad b_{k\bar{l}}^- = i \alpha_k^+ \alpha_{\bar{l}}^+; \quad b_{\bar{k}l}^- = i \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_l^+; \quad (17a)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k^+ \alpha_l = \sum_m (b_{km}^+ b_{lm} + b_{km}^- b_{lm}^-); \\ \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{l}} = i \sum_m (b_{\bar{k}m}^+ b_{\bar{l}m}^- - b_{\bar{k}m}^- b_{\bar{l}m}^-), \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

\* Оператор  $\hat{A}$  имеет положительную сигнатуру при условии  $\hat{R}_1(\pi) \hat{A} \hat{R}_1^{-1}(\pi) = \hat{A}$  и отрицательную, если  $\hat{R}_1(\pi) \hat{A} \hat{R}_1^{-1}(\pi) = -\hat{A}$  (см. [18, 19]).

\*\* Поэтому достаточно общий подход ХФБ + ПСФ трансформировать в конкретную реализацию — метод МПВ + ПСФ, впервые использованный для отыскания низколежащих возбуждений прецессионного типа в [78, 45].



антисимметричных по индексам  $b_{ik} = -b_{ki}$  и подчиняющихся приближенным коммутационным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [b_{kl}, b_{mn}^+] &= \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}; & [b_{k\bar{l}}, b_{m\bar{n}}^+] &= \delta_{km}\delta_{l\bar{n}}; \\ [b_{kl}, b_{mn}] &= [b_{k\bar{l}}, b_{m\bar{n}}^+] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

При этом предполагается, что среднее число квазичастиц по вакуумному состоянию  $|\Omega\rangle$  равно нулю

$$\langle \Omega | \alpha_k^+ \alpha_l | \Omega \rangle \approx 0.$$

Из соотношения (11) для бозонов следует

$$e^{i\pi\hat{J}_x} \begin{bmatrix} b_{ik}^+ \\ b_{i\bar{k}}^+ \end{bmatrix} e^{-i\pi\hat{J}_x} = \mp \begin{bmatrix} b_{ik}^+ \\ b_{i\bar{k}}^+ \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Любой одночастичный оператор, содержащийся в гамильтониане (15), можно выразить в виде разложения по бозонам типа (17). Конкретный вид этого разложения зависит от симметрии оператора относительно эрмитового сопряжения, временной инверсии, операции  $R_1(\pi)$  и т. д. (см. приложение А).

Вводя разложение (17) в гамильтониан МПВ (15), получаем его бозонное представление. Наличие  $R_x(\pi)$ -симметрии гамильтониана и соответственно выполнение коммутационных соотношений (18) позволяет разбить гамильтониан МПВ на четыре взаимно коммутирующие части:

$$H' = \langle \Omega | H' | \Omega \rangle + H_{(+)}^{(+)} + H_{(+)}^{(-)} + H_{(-)}^{(+)} + H_{(-)}^{(-)}, \quad (20)$$

где

$$H_{(+)}^{(+)} = \sum_{ik} E_{i\bar{k}} b_{i\bar{k}}^+ b_{i\bar{k}} - \frac{1}{4} \sum_{\tau} G_{\tau} P_{\tau}^{+}(1) P_{\tau}(1) - \frac{\kappa_2}{2} \sum_{m=0}^2 Q_m^{(+)}(1) Q_m^{(+)}(1); \quad (21a)$$

$$H_{(+)}^{(-)} = \sum_{ik} \frac{1}{2} (E_{ik} b_{ik}^+ b_{ik} + E_{i\bar{k}} b_{i\bar{k}}^+ b_{i\bar{k}}) - \frac{\kappa_2}{2} \sum_{m=1}^2 Q_m^{(-)}(1) Q_m^{(-)}(1); \quad (21b)$$

$$H_{(-)}^{(+)} = \sum_{ik} E_{i\bar{k}} b_{i\bar{k}}^+ b_{i\bar{k}} - \frac{\kappa_3}{2} \sum_{m=1}^3 F_m^{(+)}(1) F_m^{(+)}(1); \quad (21b)$$

$$H_{(-)}^{(-)} = \sum_{ik} \frac{1}{2} (E_{ik} b_{ik}^+ b_{ik} + E_{i\bar{k}} b_{i\bar{k}}^+ b_{i\bar{k}}) - \frac{\kappa_3}{2} \sum_{m=0}^3 F_m^{(-)}(1) F_m^{(-)}(1). \quad (21g)$$

Здесь  $E_{ik} = E_i + E_k$ , символы  $P_{\tau}(1)$ ,  $Q_m^{(\pm)}(1)$ ,  $F_m^{(\pm)}(1)$  представляют собой линейные по бозонам части соответствующих операторов (см. приложение А). Нижний индекс у символа  $H_p^{\sigma} \equiv \pm$  характеризует четность одночастичных операторов, определяющих гамильтониан, верхний — их сигнатуру.

Подставляя бозонное разложение (A5) в соотношения симметрии (4), в рамках ПСФ получаем

$$[H_{(+)}^{(+)}, J_x(1)] = [H_{(+)}^{(+)}, N_\tau(1)] = 0; \quad (22)$$

$$[H_{(+)}^{(-)}, J_y(1)] = -i\Omega J_z(1); \quad [H_{(+)}^{(-)}, J_z(1)] = i\Omega J_y(1); \quad (23)$$

$$[H_{(-)}^{(+)}, P_x(1)] = 0; \quad (24)$$

$$[H_{(-)}^{(-)}, P_y(1)] = -i\Omega P_z(1); \quad [H_{(-)}^{(-)}, P_z(1)] = i\Omega P_y(1); \quad (25)$$

$$[J_i(1), P_j(1)] = [J_i(1), N_\tau(1)] = [P_i(1), N_\tau(1)] = \\ = [P_i(1), P_j(1)] = [J_x(1), J_y(1)] = [J_x(1), J_z(1)] = 0; \quad (26)$$

$$[J_y(1), J_z(1)] = i\langle \Omega | \hat{J}_x | \Omega \rangle. \quad (27)$$

Поскольку все четыре части гамильтониана (20) взаимно коммутируют, то уравнения движения ПСФ [79]

$$[H', \mathcal{P}_v] = i\omega_v^2 X_v; \quad [H', X_v] = -i\mathcal{P}_v; \quad [X_v, \mathcal{P}_{v'}] = i\delta_{vv'} \quad (28)$$

( $X_v$  и  $\mathcal{P}_v$  — обобщенные координата и импульс данного состояния  $v$  с энергией  $\omega_v$ ) могут быть решены независимо для каждой из них.

Гамильтониан  $H'$ , выраженный через канонические переменные  $X_v$  и  $\mathcal{P}_v$ , приобретает вид

$$H' = \frac{1}{2} \sum_v (\mathcal{P}_v^2 + \omega_v^2 X_v^2) = \frac{1}{2} \sum_{\omega_v \neq 0} (\mathcal{P}_v^2 + \omega_v^2 X_v^2) + \frac{1}{2} \sum_{\omega_{v_0} = 0} \mathcal{P}_{v_0}^2 = \\ = \sum_{\omega_v \neq 0} \omega_v \left( O_v^+ O_v + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\omega_{v_0} = 0} \mathcal{P}_{v_0}^2. \quad (29)$$

Здесь оператор фона

$$O_v^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\omega_v} X_v - \frac{i}{\sqrt{\omega_v}} \mathcal{P}_v \right) \quad (30)$$

соответствует ненулевым решениям  $\omega_v \neq 0$ . Уравнения движения (28) для  $\omega_v \neq 0$  принимают вид

$$[H', O_v^+] = \omega_v O_v^+; \quad [H', O_v] = -\omega_v O_v; \quad [O_v, O_{v'}^+] = \delta_{vv'}. \quad (31)$$

Сравнивая уравнения ПСФ (28) или (31) с условиями симметрии (22) — (25), можно определить все «нефизические» (духовые) моды голдстоуновского типа (см. [79]) для всех четырех частей гамильтониана (20):

1. Из сравнения (22) с (28) следует, что среди решений ПСФ гамильтониана  $H_{(+)}^{(+)}$  имеются одна, связанная с оператором  $J_x(1)$ , и две, связанные с оператором  $N_\tau(1)$  ( $\tau = N, Z$ ). Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_{v_0=J_x} &= \sqrt{g_{J_x}} J_x(1) \\ \mathcal{P}_{v_0=N_\tau} &= \sqrt{g_{N_\tau}} N_\tau(1) \end{aligned} \right\} \rightarrow H_{(+)}^{(+)} = \frac{1}{2} \sum_{\omega_v \neq 0} (\mathcal{P}_v^2 + \omega_v^2 X_v^2) + \\ + \frac{1}{2} g_{J_x} J_x^2(1) + \frac{1}{2} \sum_{\tau} g_{N_\tau} N_\tau^2(1). \quad (32)$$

Способ определения массовых параметров  $g_{J_x}$  и  $g_{N_\tau}$  обсуждается ниже. Из (32) следует, что величина  $\mathcal{Y}_x = 1/g_x$  представляет собой момент инерции ядра относительно оси вращения  $x$ .

2. Сравнение (23) с (28) позволяет заключить, что из операторов  $J_y(1)$  и  $J_z(1)$  можно построить моду гамильтониана  $H_{(+)}^{(-)}$  с энергией  $\omega = \Omega$

$$\left. \begin{aligned} [H_{(+)}^{(-)}, \Gamma^+] &= \Omega \Gamma^+ \\ [H_{(+)}^{(-)}, \Gamma] &= -\Omega \Gamma \\ [\Gamma, \Gamma^+] &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow H_{(+)}^{(-)} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{\omega_v \neq 0, \Omega} (\mathcal{P}_v^2 + \omega_v^2 X_v^2) + \Omega \left( \Gamma^+ \Gamma + \frac{1}{2} \right), \quad (33)$$

где введен оператор  $\Gamma^+ = (J_y(1) - iJ_z(1))/\sqrt{\langle \Omega | \hat{J}_x | \Omega \rangle}$ .

3. Сравнение (24) с (28) приводит к выражению

$$\mathcal{P}_{v_0=P_x} = \sqrt{g_{P_x}} P_x(1) \rightarrow H_{(-)}^{(+)} = \frac{1}{2} \sum_{\omega_v \neq 0} (\mathcal{P}_v^2 + \omega_v^2 X_v^2) + \frac{1}{2} g_{P_x} P_x^2(1). \quad (34)$$

Здесь величина  $M = 1/g_{P_x}$  представляет собой эффективную массу ядра.

4. Из сравнения (25) с (28) можно ожидать, что мода  $(P_y(1), P_z(1))$  является решением гамильтониана  $H_{(-)}^{(-)}$  с энергией  $\omega = \Omega$ . Однако в силу коммутации  $[P_y(1), P_z(1)] = 0$  с их помощью нельзя построить соответствующий оператор фона. Можно показать, что мода, обусловленная компонентами импульса  $P_y(1)$  и  $P_z(1)$  (и соответствующими координатами  $X_y(1)$  и  $X_z(1)$ ), ортогональна всем решениям уравнений ПСФ и поэтому не примешивается к ним [24]. Следовательно, гамильтониан  $H_{(-)}^{(-)}$ , определенный на пространстве своих решений, имеет вид

$$H_{(-)}^{(-)} = \frac{1}{2} \sum_{\omega_v \neq 0} (\mathcal{P}_v^2 + \omega_v^2 X_v^2) + \Omega (X_y(1) P_z(1) - X_z(1) P_y(1)), \quad (35)$$

где последний член в (35) обеспечивает выполнение условий (25). Таким образом, используя условия симметрии, налагаемые на гамильтониан МПВ, в ПСФ удастся выделить моды, обусловленные вращением ядра, движением центра масс и связанные с сохранением числа частиц.

В [19, 44, 45, 47, 49, 50] решения уравнений ПСФ определяются для гамильтониана чисто внутренних возбуждений. Покажем связь между решениями для внутренних возбуждений гамильтониана, удовлетворяющего всем симметриям, и гамильтонианом МПВ (см. [40]). Формально гамильтониан, описывающий только внутренние возбуждения, можно записать в виде

$$H'' = H - \mu J^2 - b P^2 - \sum_{\tau} a_{\tau} N_{\tau}^2, \quad (36)$$

где из полного ядерного гамильтониана  $H$  выделены члены, ответственные за коллективное движение (вращение и движение центра масс) и связанные с сохранением числа частиц \*. Коэффициенты  $\mu$ ,  $b$ ,  $a_\tau$  — некоторые инерциальные параметры.

Между гамильтонианами  $H'$  и  $H''$  легко установить связь, сравнивая (1) с (36). С учетом до второго порядка по бозонам [см. (A5)] имеем

$$\begin{aligned} H'' = & H' + \Omega \hat{J}_x + \sum_\tau \lambda_\tau \hat{N}_\tau - \mu (\langle \hat{J}_x \rangle + J_x(1) + J_x(2))^2 - \\ & - \mu (J_y(1) + J_y(2))^2 - \mu (J_z(1) + J_z(2))^2 - \\ & - \sum_\tau a_\tau (\langle \hat{N}_\tau \rangle + N_\tau(1) + N_\tau(2))^2 - b (P_x(1) + P_x(2))^2 - \\ & - b (P_y(1) + P_y(2))^2 - b (P_z(1) + P_z(2))^2, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \Omega | \hat{A} | \Omega \rangle$ . Пренебрегая в (37) членами типа  $J_x(1) J_x(2)$  и  $J_x(2) J_x(2)$  и используя соотношения (20), (29), (32) — (35), получаем

$$\begin{aligned} H'' = & \langle \Omega | H' | \Omega \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\omega_v \neq 0, \Omega} (\mathcal{P}_v^2 + \omega_v^2 X_v^2) + \frac{1}{2} g_{J_x} J_x^2(1) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_\tau g_{N_\tau} N_\tau^2(1) + \Omega \left( \Gamma + \Gamma + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_{P_x} P_x^2(1) + \\ & + \Omega (X_y(1) P_z(1) - X_z(1) P_y(1)) + \Omega \hat{J}_x + \\ & + \sum_\tau \lambda_\tau \hat{N}_\tau - \mu (2 \langle \hat{J}_x \rangle \hat{J}_x + J_x(1) J_x(1) - \langle \hat{J}_x \rangle^2) - \mu (J_y^2(1) + J_z^2(1)) - \\ & - \sum_\tau a_\tau (2 \langle \hat{N}_\tau \rangle \hat{N}_\tau + N_\tau(1) N_\tau(1) - \langle \hat{N}_\tau \rangle^2) - \\ & - b P_x^2(1) - b (P_y^2(1) + P_z^2(1)). \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая соотношения [44, 80]

$$2\mu \langle \hat{J}_x \rangle = \Omega; \quad \mu = \frac{1}{2} g_{J_x}; \quad b = \frac{1}{2} g_{P_x}; \quad 2a_\tau \langle \hat{N}_\tau \rangle = \lambda_\tau; \quad a_\tau = \frac{1}{2} g_{N_\tau} \quad (39)$$

и тот факт, что если кинетическая энергия движения центра масс переходит в его орбитальное движение,

$$\Omega (X_y(1) P_z(1) - X_z(1) P_y(1)) = b (P_y^2(1) + P_z^2(1)),$$

получаем

$$H'' = \langle \Omega | H' | \Omega \rangle + \mu \langle \hat{J}_x \rangle^2 + \sum_\tau \alpha_\tau \langle N_\tau \rangle^2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_v \neq 0, \Omega} (\mathcal{P}_v^2 + \omega_v^2 X_v^2). \quad (40)$$

\* В общем случае эти члены могут иметь более сложную зависимость (см. [80]). Так, неадиабатические эффекты, обусловленные более сложной зависимостью от  $J^2$ , рассмотрены в [81, 82].

Следовательно, гамильтониан  $H''$  описывает в рамках ПСФ чисто внутренние возбуждения при выполнении условий (39), что обеспечивает правильное выделение коллективных и внутренних степеней свободы. Отметим, что для гамильтониана  $H''$  в отличие от гамильтониана  $H'$  имеют место следующие соотношения:

$$[H'', J_i(1)] = [H'', N_\tau(1)] = [H'', P_i(1)] = 0.$$

Диагонализация гамильтониана в ПСФ. В этом пункте приведем общий рецепт диагонализации гамильтониана в ПСФ и нахождения «массовых» параметров  $g$ , подробно описанный в [29, 77].

Из выражений (20) и (24) следует, что каждая из четырех частей гамильтониана  $H'$  имеет следующую структуру:

$$\tilde{H}_B = \sum_{\mu} E_{\mu} b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu} + \sum_{s_1=1}^{n_1} \kappa_{s_1} V_{s_1} V_{s_1} + \sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_2} W_{s_2} W_{s_2}, \quad (41)$$

$$(\mu = ik, \bar{i}\bar{k} \text{ или } i\bar{k}),$$

где  $V_{s_1}$  и  $W_{s_2}$  — линейные по бозонам части соответствующих операторов, причем

$$\left. \begin{aligned} V_{s_1} &= \sum_{\mu} V_{\mu}^{s_1} (b_{\mu}^{\dagger} + b_{\mu}), \quad s_1 = 1, \dots, n_1; \\ W_{s_2} &= \sum_{\mu} W_{\mu}^{s_2} (b_{\mu}^{\dagger} - b_{\mu}), \quad s_2 = 1, \dots, n_2. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Поэтому процедура диагонализации, приводимая ниже на примере гамильтониана  $\tilde{H}_B$  (41), применима для любой из четырех частей гамильтониана  $H'_{\text{ПСФ}}$ .

Гамильтониан  $\tilde{H}_B$  обладает определенными симметриями [см. (22) — (25)], что формально выражается посредством коммутации гамильтониана  $\tilde{H}_B$  с соответствующими операторами [например,  $J_x(1)$  и  $N_\tau(1)$  в случае гамильтониана  $H'_{(+)}$ ]. Пусть для гамильтониана  $\tilde{H}_B$  существуют  $L_1$  операторов типа  $(b_{\mu}^{\dagger} + b_{\mu})$  и  $L_2$  операторов типа  $(b_{\mu}^{\dagger} - b_{\mu})$

$$\left. \begin{aligned} D_{l_1} &= \sum_{\mu} D_{\mu}^{l_1} (b_{\mu}^{\dagger} + b_{\mu}), \quad l_1 = 1, \dots, L_1; \\ K_{l_2} &= \sum_{\mu} K_{\mu}^{l_2} (b_{\mu}^{\dagger} - b_{\mu}), \quad l_2 = 1, \dots, L_2, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

таких, что для всех  $l_1$  и  $l_2$  имеет место

$$[\tilde{H}_B, D_{l_1}] = [\tilde{H}_B, K_{l_2}] = 0; \quad (44)$$

$$[D_{l_1}, D_{l_1'}] = [K_{l_2}, K_{l_2'}] = [D_{l_1}, K_{l_2}] = 0. \quad (45)$$

Подставляя (41) — (43) в (44) и используя (18), получаем

$$\left. \begin{aligned} D_{\mu}^{l_1} E_{\mu} &= \sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_2} a_{s_2}^{l_1} W_{\mu}^{s_2}, \quad l_1 = 1, \dots, L_1; \\ K_{\mu}^{l_2} E_{\mu} &= \sum_{s_1=1}^{n_1} \kappa_{s_1} b_{s_1}^{l_2} V_{\mu}^{s_1}, \quad l_2 = 1, \dots, L_2, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{s_1}^{l_2} &= 2 [W_{s_2}, D_{l_1}] = 4 \sum_{\mu} D_{\mu}^{l_1} W_{\mu}^{s_2}; \\ b_{s_1}^{l_2} &= 2 [V_{s_1}, K_{l_2}] = 4 \sum_{\mu} K_{\mu}^{l_2} V_{\mu}^{s_1}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Отметим, что величины  $a_{s_2}^{l_1}$  и  $b_{s_1}^{l_2}$  в конкретных моделях можно выразить через средние значения типа:  $\langle \Omega | \hat{Q}_{\tau=0,2}^{\dagger} | \Omega \rangle$ ,  $\langle \Omega | \hat{P}_{\tau} | \Omega \rangle$  и т. д. (см. [19, 40, 43, 44]), т. е. соотношения (46) представляют собой условия самосогласования между квазичастичным полем ХФБ и остаточным взаимодействием для гамильтониана модели принудительного вращения.

Бозонное представление канонически сопряженных обобщенных координат  $X_{\nu}$  и импульсов  $\mathcal{P}_{\nu}$  можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} X_{\nu} &= \sum_{\mu} X_{\mu}^{\nu} (b_{\mu}^{+} + b_{\mu}); \\ \mathcal{P}_{\nu} &= i \sum_{\mu} \mathcal{P}_{\mu}^{\nu} (b_{\mu}^{+} - b_{\mu}); \\ [X_{\nu}, \mathcal{P}_{\nu'}] &= 2i \sum_{\mu} X_{\mu}^{\nu} \mathcal{P}_{\mu}^{\nu'} = i \delta_{\nu\nu'}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Подставляя выражения для  $X_{\nu}$  и  $\mathcal{P}_{\nu}$  из (48), а также определение гамильтониана  $\hat{H}_{\text{Б}}$  (41) в уравнения ПСФ (28) и используя (18), получаем матричное представление последних

$$\left. \begin{aligned} X_{\mu}^{\nu} &= \sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_2} A_{s_2}^{\nu} \frac{E_{\mu} W_{\mu}^{s_2}}{E_{\mu}^2 - \omega_{\nu}^2} - \sum_{s_1=1}^{n_1} \kappa_{s_1} B_{s_1}^{\nu} \frac{V_{\mu}^{s_1}}{E_{\mu}^2 - \omega_{\nu}^2}; \\ \mathcal{P}_{\mu}^{\nu} &= \omega_{\nu}^2 \sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_2} A_{s_2}^{\nu} \frac{W_{\mu}^{s_2}}{E_{\mu}^2 - \omega_{\nu}^2} - \sum_{s_1=1}^{n_1} \kappa_{s_1} B_{s_1}^{\nu} \frac{E_{\mu} V_{\mu}^{s_1}}{E_{\mu}^2 - \omega_{\nu}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Здесь

$$A_{s_2}^{\nu} = 4 \sum_{\mu} X_{\mu}^{\nu} W_{\mu}^{s_2}; \quad B_{s_1}^{\nu} = 4 \sum_{\mu} \mathcal{P}_{\mu}^{\nu} V_{\mu}^{s_1}. \quad (50)$$

Используя определение (50) с помощью (49), получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений для  $n_1 + n_2$  неизвест-

ных  $A_{s_2}^V$  и  $B_{s_1}^V$ :

$$\sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_2} A_{s_2}^V \left( S_{W_{s_2} W_{s_2}'} - \frac{\delta_{s_2 s_2'}}{4\kappa_{s_2}} \right) - \sum_{s_1=1}^{n_1} \kappa_{s_1} B_{s_1}^V U_{V_{s_1} W_{s_2}'} = 0, \quad s_2' = 1, \dots, n_2; \quad (51a)$$

$$\sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_2} A_{s_2}^V \omega_v^2 U_{V_{s_2} W_{s_2}'} - \sum_{s_1=1}^{n_1} \kappa_{s_1} B_{s_1}^V \left( S_{V_{s_1} V_{s_1}'} + \frac{\delta_{s_1 s_1'}}{4\kappa_{s_1}} \right) = 0, \quad s_1' = 1, \dots, n_1, \quad (51b)$$

где

$$S_{RT} = \sum_{\mu} \frac{E_{\mu} R_{\mu} T_{\mu}}{E_{\mu}^2 - \omega^2}; \quad U_{RT} = \sum_{\mu} \frac{R_{\mu} T_{\mu}}{E_{\mu}^2 - \omega^2}, \quad (52)$$

для которых имеют место следующие полезные соотношения:

$$S_{RT} = S_{RT}(0) + \omega^2 W_{RT}; \quad U_{RT} = U_{RT}(0) + \omega^2 \mathcal{L}_{RT}; \quad (53)$$

$$W_{RT} = \sum_{\mu} \frac{R_{\mu} T_{\mu}}{E_{\mu}(E_{\mu}^2 - \omega^2)}; \quad \mathcal{L}_{RT} = \sum_{\mu} \frac{R_{\mu} T_{\mu}}{E_{\mu}^2(E_{\mu}^2 - \omega^2)}. \quad (54)$$

Среди решений уравнений (51) находятся решения с нулевой энергией  $\omega_v = 0$ , обусловленные требованием выполнения условий симметрий (см. с. 622). Их необходимо выделить, поскольку с физической точки зрения представляют интерес только решения с  $\omega_v \neq 0$ . Из матричного представления уравнений движения (49) для нулевых решений легко получить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_2} A_{s_2}^{l_1}(0) \left( S_{W_{s_2} W_{s_2}'}(0) - \frac{\delta_{s_2 s_2'}}{4\kappa_{s_2}} \right) = 0, \quad s_2' = 1, \dots, n_2; \\ \sum_{s_1=1}^{n_1} \kappa_{s_1} B_{s_1}^{l_2}(0) \left( S_{V_{s_1} V_{s_1}'}(0) + \frac{\delta_{s_1 s_1'}}{4\kappa_{s_1}} \right) = 0, \quad s_1' = 1, \dots, n_1, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

для которой условие существования решений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \det \left| S_{W_{s_2} W_{s_2}'}(0) - \frac{\delta_{s_2 s_2'}}{4\kappa_{s_2}} \right| = 0; \\ \det \left| S_{V_{s_1} V_{s_1}'}(0) + \frac{\delta_{s_1 s_1'}}{4\kappa_{s_1}} \right| = 0. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Очевидно, что при выполнении соотношений

$$A_{s_2}^{l_1}(0) = \sqrt{g_{l_1}} a_{s_2}^{l_1}; \quad B_{s_1}^{l_2}(0) = \sqrt{g_{l_2}} b_{s_1}^{l_2}, \quad (57)$$

условия самосогласования (46) приводят к уравнениям (56), позволяющим определить константы остаточного взаимодействия. Кроме того, из уравнения (51a) для нулевых решений с учетом (55) следует

$$\sum_{s_1=1}^{n_1} \kappa_{s_1} B_{s_1}^{l_1}(0) U_{V_{s_1} W_{s_2}'}(0) = 0. \quad (53)$$

Умножим каждое из уравнений (51а) на  $\kappa_{s_2} a_{s_2}^{l_1}$  и просуммируем по индексу  $s_2$ . Соответственно каждое из уравнений (51б) умножим на  $\kappa_{s_1} b_{s_1}^{l_2}$  и просуммируем по индексу  $s_1$  и, используя уравнения (55) с учетом (57), получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s_2=1}^{n_2} \sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_2} \kappa_{s_2} a_{s_2}^{l_1} A_{s_2}^v (S_{W_{s_2} W_{s_2}} - S_{W_{s_2} W_{s_2}}(0)) - \\ & - \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_1} \kappa_{s_2} a_{s_2}^{l_1} U_{V_{s_1} W_{s_2}} = 0; \\ & \omega_v^2 \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_2=1}^{n_2} \kappa_{s_1} \kappa_{s_2} b_{s_1}^{l_2} A_{s_2}^v U_{V_{s_1} W_{s_2}} - \\ & - \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_1=1}^{n_1} \kappa_{s_1} \kappa_{s_1} b_{s_1}^{l_2} B_{s_1}^v (S_{V_{s_1} V_{s_1}} - S_{V_{s_1} V_{s_1}}(0)) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

С помощью уравнения (58) и соотношений (53) систему уравнений (59) можно окончательно привести к виду

$$\omega_v^2 \sum_{s_1} \sum_{s_2} \kappa_{s_2} \kappa_{s_2} a_{s_2}^{l_1} A_{s_2}^v W_{W_{s_2} W_{s_2}} - \omega_v^2 \sum_{s_1} \sum_{s_2} \kappa_{s_1} \kappa_{s_2} a_{s_2}^{l_1} B_{s_1}^v \mathcal{L}_{V_{s_1} W_{s_2}} = 0; \quad (60a)$$

$$l_1 = 1, \dots, L_1$$

$$\omega_v^2 \sum_{s_1} \sum_{s_2} \kappa_{s_1} \kappa_{s_2} b_{s_1}^{l_2} A_{s_2}^v \mathcal{L}_{V_{s_1} W_{s_2}} - \omega_v^2 \sum_{s_1} \sum_{s_1} \kappa_{s_1} \kappa_{s_1} b_{s_1}^{l_2} B_{s_1}^v W_{V_{s_1} V_{s_1}} = 0, \quad (60b)$$

$$l_2 = 1, \dots, L_2.$$

Таким образом, полная система уравнений для  $n_1 + n_2$  неизвестных  $A_{s_2}^v$  и  $B_{s_1}^v$  состоит из  $L_1$  уравнений (60а),  $L_2$  уравнений (60б), произвольным образом выбранных  $(n_1 - L_1)$  уравнений типа (51а) и  $(n_2 - L_2)$  уравнений типа (51б). Из соответствующего секулярного уравнения

$$\omega_v^{2(L_1+L_2)} |D(\omega_v)| = 0 \quad (61)$$

(здесь  $|D(\omega_v)|$  — определитель системы уравнений) следует, что решение с  $\omega_v = 0$  является  $2(L_1 + L_2)$  раз вырожденным, а энергия ненулевых решений определяется из уравнения

$$|D(\omega_v)| = 0. \quad (62)$$

Структуру соответствующего фона [т. е. коэффициенты  $X_\mu^v$  и  $\mathcal{P}_\mu^v$  в (48)] можно определить с помощью выражений (49), используя условие нормировки из (48) и решения уравнения (62). Осталось определить массовые параметры  $g_{l_1}$  и  $g_{l_2}$ . Способ их определения отличается в двух следующих случаях:

- а) одновременное существование духовых состояний, обусловленных операторами  $K_{l_2}$  и  $D_{l_1}$ ;
- б) существование духовых состояний, генерируемых только операторами  $K_{l_2}$  или только операторами  $D_{l_1}$ .



При одновременном существовании духов обоих типов имеют силу соотношения (55), (58). Используя матричное представление (49) для канонически сопряженных величин  $X_\nu(0)$  и  $\mathcal{P}_\nu(0)$ , соответствующих нулевым решениям, обусловленных, например, оператором  $K_{l_2}$ , можно написать [с учетом соотношения (57)]

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_\mu^{l_2}(0) &= -\sqrt{g_{l_2}} \sum_{s_1} \kappa_{s_1} b_{s_1}^{l_2} \frac{V_\mu^{s_1}}{E_\mu}; \\ X_\mu^{l_2}(0) &= \sum_{s_2} \kappa_{s_2} A_{s_2}^{l_2}(0) \frac{W_\mu^{s_2}}{E_\mu} - \sqrt{g_{l_2}} \sum_{s_1} \kappa_{s_1} b_{s_1}^{l_2} \frac{V_\mu^{s_1}}{E_\mu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Подставляя эти выражения в условие нормировки (48)

$$|X_{l_2}(0), \mathcal{P}_{l_2}(0)| = 2i \sum_\mu X_\mu^{l_2}(0) \mathcal{P}_\mu^{l_2}(0) = i,$$

получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{g_{l_2}} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \kappa_{s_1} \kappa_{s_2} A_{s_2}^{l_2}(0) b_{s_1}^{l_2} U_{V_{s_1} W_{s_2}}(0) + \\ & + g_{l_2} \sum_{s_1} \sum_{s'_1} \kappa_{s_1} \kappa_{s'_1} b_{s_1}^{l_2} b_{s'_1}^{l_2} \sum_\mu \frac{V_\mu^{s_1} V_\mu^{s'_1}}{E_\mu^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (64)$$

Из уравнения (58) с учетом (57) следует равенство нулю первого члена уравнения (64). Используя уравнения (46), из (64) для массового параметра  $g_{l_2}$  имеем

$$\frac{1}{g_{l_2}} = 2 \sum_\mu \frac{K_\mu^{l_2} K_\mu^{s_2}}{E_\mu}. \quad (65)$$

Аналогичным образом можно получить выражение для  $g_{l_1}$

$$\frac{1}{g_{l_1}} = 2 \sum_\mu \frac{D_\mu^{l_1} D_\mu^{l_1}}{E_\mu}. \quad (66)$$

Рассмотрим случай б), когда существуют духи только одного типа, например обусловленные оператором  $K_{l_2}$ . Снова имеют место соотношения (63). Они позволяют получить уравнение

$$\sum_{s_2} \kappa_{s_2} A_{s_2}^{l_2}(0) \left( S_{W_{s_2} W_{s'_2}}(0) - \frac{\delta_{s_2 s'_2}}{4\kappa_{s_2}} \right) - \sqrt{g_{l_2}} \sum_{s_1} \kappa_{s_1} b_{s_1}^{l_2} U_{V_{s_1} W_{s'_2}}(0) = 0, \quad (67)$$

которое, используя соотношения (46), преобразуем к виду

$$\sum_{s_2} \kappa_{s_2} A_{s_2}^{l_2}(0) \left( S_{W_{s_2} W_{s'_2}}(0) - \frac{\delta_{s_2 s'_2}}{4\kappa_{s_2}} \right) - \sqrt{g_{l_2}} S_{K_{l_1} W_{s_2}}(0) = 0. \quad (68)$$

Однако соотношения (46) позволяют преобразовать также уравнение (64). Окончательно имеем

$$-\sqrt{g_{l_2}} \sum_{s_2} \kappa_{s_2} A_{s_2}^{l_2}(0) S_{K_{l_2} W_{S_2}}(0) + g_{l_2} S_{K_{l_2} K_{l_2}}(0) = \frac{1}{2}. \quad (69)$$

Таким образом, получена система неоднородных уравнений (68), (69) для неизвестных  $A_{s_2}^{l_2}(0)$  и  $g_{l_2}$ . С помощью метода Крамера легко определить из этой системы массовые параметры:

$$g_{l_2} = \frac{1}{2} \frac{\left| S_{W_{s_2} W_{s_2}'}(0) - \frac{\delta_{s_2 s_2'}}{4\kappa_{s_2}} \right|}{|D_{l_2}|}, \quad (70)$$

где  $|D_{l_2}|$  — определитель системы уравнений (68), (69).

В заключение отметим, что представление (48) можно трактовать как трансформацию из пространства двухквaziчастичных бозонов в пространство мод ПСФ  $(X_\nu, \mathcal{P}_\nu)$  [или  $(O_\nu, O_\nu^+)$ ], которая осуществляется посредством унитарной эрмитовой матрицы с элементами  $X_\mu^\nu$  и  $\mathcal{P}_\mu^\nu$ . Число двухквaziчастичных бозонов  $b_\mu$ ,  $b_\mu^+$  должно отвечать числу мод  $(X_\nu, \mathcal{P}_\nu)$ . Эта полнота обоих пространств может быть выражена соотношением (см., например, [40])

$$b_\mu^+ = i \sum_\nu \{ [b_\mu^+, X_\nu] \mathcal{P}_\nu + [\mathcal{P}_\nu, b_\mu^+] X_\nu \}, \quad (71)$$

где суммирование идет как по духовым, так и недуховым модам.

Собственные состояния гамильтониана. Следствие ортогональности решений в ПСФ все нормальные моды  $(X_\nu, \mathcal{P}_\nu)$  с  $\omega_\nu \neq 0$  гамильтониана (20) ортогональны также и голдстоуновской моде  $(\theta_x(1), J_x(1))^*$ . Тогда среднее значение оператора углового момента  $\hat{J}_x$  по фоновому состоянию в первом порядке ПСФ\*\*

$$\langle \Omega | O_\nu \hat{J}_x O_\nu^+ | \Omega \rangle = \langle \Omega | [O_\nu, \hat{J}_x] | \Omega \rangle + \langle \Omega | \hat{J}_x O_\nu O_\nu^+ | \Omega \rangle \approx \langle \Omega | \hat{J}_x | \Omega \rangle \quad (72)$$

соответствует среднему значению оператора  $\hat{J}_x$  в состоянии иррадиации, отвечающему данному значению угловой частоты вращения  $\Omega$ .

Состояние  $|\Omega\rangle$  иррадиации является вакуумом как для квази-частичных, так и для фоновых операторов, и поэтому имеет место

$$O_\nu |\Omega\rangle = N_\tau(1) |\Omega\rangle = P_x(1) |\Omega\rangle = 0; \quad (73a)$$

$$\Gamma |\Omega\rangle = J_x(1) |\Omega\rangle = 0. \quad (73b)$$

Поскольку  $J_x^{(1)} \approx \hat{J}_x - \langle \Omega | \hat{J}_x | \Omega \rangle$ , то соотношение (73b) означает,

\* Символ  $\theta_x(1)$  представляет собой линейную по бозонам часть оператора угла  $\hat{\theta}_x$ , канонически сопряженного оператору  $\hat{J}_x$ .

\*\* В отсутствие полного выстраивания может оказаться важной квадратичная по бозонам часть оператора  $\hat{J}_x$  и тогда (см. [46])

$$\langle \Omega | O_\nu \hat{J}_x O_\nu^+ | \Omega \rangle = \langle \Omega | [O_\nu^+, [O_\nu, J_x(2)]] | \Omega \rangle + \langle \Omega | \hat{J}_x | \Omega \rangle$$

что угловой момент в состоянии  $|\Omega\rangle$  почти полностью выстроен вдоль оси вращения — оси  $x$ , что обеспечивает выполнение условия МПВ

$$\langle \Omega | \hat{J}_x | \Omega \rangle = \sqrt{I(I+1)}. \quad (74)$$

Следовательно, оператор рождения фонана  $O_{\nu}^{\dagger}$  не меняет полного углового момента \*. Из соотношений (73а) и условия  $\langle \Omega | \hat{P}_x | \Omega \rangle = 0$  следует, что на ирраст-линии отсутствуют также колебания центра масс ядра вдоль оси  $x$ . Вообще говоря, такие колебания могут возникнуть в результате возбуждения ядра, но выделение духовой моды  $(X, P_x)$  среди решений уравнений ПСФ обеспечивает отсутствие смешивания нормальных мод и возбуждений, обусловленных колебаниями центра масс вдоль оси  $x$ . Как уже отмечалось выше (см. с. 622), колебания центра масс вдоль осей  $y, z$  лабораторной системы также не смешиваются с нормальными модами.

В работах Маршалера [30, 43] факт выстроенности углового момента в состояниях ирраст-линии использован для построения собственных функций гамильтониана  $H'$  МПВ для решений положительной четности. Случай отрицательной четности рассмотрен в [50].

Итак, собственный вектор гамильтониана  $H'$  запишем в виде:

$$\begin{aligned} & |\{n_{\nu-}\}, \{n_{\nu+}\}, N, Z, P_x, J, M\rangle = \\ & = \prod_{n_{\nu-}} \prod_{n_{\nu+}} \frac{(O_{\nu-}^{\dagger})^{n_{\nu-}}}{\sqrt{n_{\nu-}!}} \frac{(O_{\nu+}^{\dagger})^{n_{\nu+}}}{\sqrt{n_{\nu+}!}} \frac{e^{i(Z-Z_0)\theta_z}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i(N-N_0)\theta_N}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iP_x X}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i(J-J_0)\theta_x}}{\sqrt{2\pi}} \times \\ & \times \frac{(\Gamma^+)^{J-M}}{\sqrt{(J-M)!}} |0, 0, N_0, Z_0, 0, J_0, J_0\rangle, \end{aligned} \quad (75)$$

где  $n_{\nu-}$  и  $n_{\nu+}$  — число фононов отрицательной и положительной сигнатуры независимо от четности;  $\theta_{\tau}$  ( $\tau = N, Z$ ) и  $\theta_x$  — углы, сопряженные операторам  $\hat{N}_{\tau}$  и  $\hat{J}_x$ ;  $X$  — проекция координаты центра масс на ось  $x$ . Вектор  $|0, 0, N_0, Z_0, 0, J_0, J_0\rangle$  описывает состояние ядра на ирраст-линии, угловой момент которого  $J_0$  (с проекцией  $M = J_0$  на ось  $x$ ), с числом нейтронов  $N_0$  и протонов  $Z_0$ , и центр масс находится в начале координат (начала лабораторной и собственной систем координат ядра совпадают). Если для внутренней волновой функции имеет место  $R_x$  ( $\pi$ )-симметрия, то вследствие выполнения условия (16) следует связь между сигнатурой и угловым моментом состояния

$$(-1)^J (-1)^{\sum n_{\nu-}} = 1, \quad (76)$$

согласно которой однофононные состояния положительной сигнатуры имеют четное значение спина  $J$ , а однофононные состояния отрица-

\* В отсутствие полного выстраивания (малые спины) выражение (74) необходимо заменить  $\langle \nu | \hat{J}_x | \nu \rangle \approx \sqrt{I(I+1) - K_{\nu}^2}$ , где  $K_{\nu}$  — проекция полного момента на ось, перпендикулярную оси вращения, в состоянии  $|\nu\rangle$ .

тельной сигнатуры — нечетное. Собственные векторы (75) можно представить в виде произведения ротационной и внутренней волновых функций (см., например, [30, 40]):

$$\left. \begin{aligned} |\alpha JM\rangle &= |\alpha J\rangle |JM\rangle; \\ |JM\rangle &= \frac{e^{i(J-J_0)\theta_x}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\Gamma^+)^{J-M}}{\sqrt{(J-M)!}} |J_0, M=J_0\rangle; \\ |\alpha J\rangle &= \frac{e^{i(N-N_0)\theta_N}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i(Z-Z_0)\theta_Z}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iP_x X}}{\sqrt{2\pi}} \prod_{\substack{n_{v-} \\ n_{v+}}} \frac{(O_{v-}^+)^{n_{v-}}}{\sqrt{n_{v-}!}} \times \\ &\times \frac{(O_{v+}^+)^{n_{v+}}}{\sqrt{n_{v+}!}} |n_{v-}=0, n_{v+}=0, N=N_0, Z=Z_0, P_x=0\rangle, \end{aligned} \right\} (77)$$

где  $\alpha$  представляет собой ансамбль квантовых чисел:  $n_{v+}$ ,  $n_{v-}$ ,  $N$ ,  $Z$ ,  $P_x$ . Отметим, что функции (75) или (77) получены, как и в работах Маршалека [30, 43], заменой:  $J_x(1) \rightarrow \hat{J}_x - J_0$ ,  $N_z(1) \rightarrow \hat{N}_z - Z_0$ ,  $N_N(1) \rightarrow \hat{N}_N - N_0$ ,  $P_x(1) \rightarrow \hat{P}_x$ . При этом переменные определены на интервалах  $(0, 2\pi)$ ,  $(0, 2\pi)$ ,  $(-\infty, \infty)$  соответственно, а волновая функция (75) или (77) является нормированной.

Вероятности электрических переходов. В пределе больших угловых моментов анализ  $E2$ -переходов был проведен в работах Михайлова [83] и Маршалека [43]. Анализ  $E1$ - и  $E3$ -переходов в случае нарушенной внутренней симметрии отражения ядра проведен в [40]. Количественные оценки  $E1$ -переходов на примере конкретных ядер при вращении можно найти в [70—73, 82].

Как известно, приведенная вероятность данного перехода определяется как [2]

$$B(E\lambda, \alpha_1 J_1 \rightarrow \alpha_2 J_2) = \frac{|\langle \alpha_2 J_2 || \hat{\mathfrak{M}}(E\lambda) || \alpha_1 J_1 \rangle|^2}{2J_1 + 1}, \quad (78)$$

где  $\hat{\mathfrak{M}}(E\lambda, \mu)$  — оператор перехода мультипольности  $\lambda$  с проекцией  $\mu$ . Произвольный тензорный оператор  $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$ , определенный в лабораторной системе координат, посредством стандартного преобразования (см., например, [84])

$$\hat{\mathfrak{M}}_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} \hat{D}_{\mu\nu}^{\lambda} \hat{\mathfrak{M}}'_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \{ \hat{\mathfrak{M}}'_{\lambda\nu}, \hat{D}_{\nu\mu}^{\lambda} \} \quad (79)$$

можно выразить через компоненты тензорного оператора  $\hat{\mathfrak{M}}'_{\lambda\nu}$ , определенного во внутренней системе координат, причем функция Вигнера  $D_{\nu\mu}^{\lambda}$  записана в операторной форме (см. [30, 85]). При  $I \gg 1$ , когда ось квантования совпадает с осью вращения, приведенный матричный элемент имеет вид [83, 30]

$$\langle \alpha_2 J + \nu || \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda} || \alpha_1 J \rangle = \sqrt{2J+1} \langle J\lambda J\nu | J + \nu J + \nu \rangle \langle \alpha_2 J + \nu || \hat{\mathfrak{M}}'_{\lambda\nu} || \alpha_1 J \rangle. \quad (80)$$

*Операторы перехода.* Так как все проекции угловых моментов в волновых функциях (75), (77) определены в системе квантования с осью  $x$ , используя трансформацию

$$\hat{Q}_{\lambda\mu_x} = \sum_{\mu_z} D_{\mu_x\mu_z}^{\lambda} \left( \frac{\pi}{2} \right) \hat{Q}_{\lambda\mu_z} \quad (81)$$

переопределим операторы, входящие в гамильтониан  $H'$ .

Используя в (81) бозонные разложения операторов  $\hat{Q}_{\lambda\mu_x}$  (см. приложение А) и явный вид функций Вигнера (см. [84]), до второго порядка по бозонам включительно получим

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q}_{\lambda\mu_x=0, \pm 2}^{(+)} &= \langle \Omega | \hat{Q}_{\lambda\mu_x=0, 2}^{(+)} | \Omega \rangle \delta_{\lambda, 2} + \\ &+ c \sum_{kl} \{ \mathfrak{M}_{k\bar{l}}^{\lambda \pm \mu_x} b_{k\bar{l}}^{+} + (-1)^{\lambda} \mathfrak{M}_{k\bar{l}}^{\lambda \mp \mu_x} b_{k\bar{l}}^{-} \}; \\ \hat{Q}_{\lambda\mu_x=\pm 1, \pm 3}^{(-)} &= c \sum_{kl} \{ \mathfrak{M}_{kl}^{\lambda \pm \mu_x} b_{kl}^{+} + \mathfrak{M}_{kl}^{\lambda \mp \mu_x} b_{kl}^{-} + \\ &+ \mathfrak{M}_{k\bar{l}}^{\lambda \pm \mu_x} b_{k\bar{l}}^{+} + \mathfrak{M}_{k\bar{l}}^{\lambda \mp \mu_x} b_{k\bar{l}}^{-} \}, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

где  $-\lambda \leq \mu_x \leq \lambda$  и  $c = \begin{cases} +1, & \lambda = 2, \\ -1, & \lambda = 1, 3, \end{cases}$   $\mathfrak{M}_{kl}^{\lambda\mu}$ ,  $\mathfrak{M}_{k\bar{l}}^{\lambda\mu}$ ,  $\mathfrak{M}_{\bar{k}l}^{\lambda\mu}$  — квази-частичные матричные элементы операторов  $Q_{\lambda\mu\sigma}^{(\pm)}$ .

Выражения (82) следует дополнить условием

$$\hat{Q}_{\lambda\mu_x}^{(\pm)+} = (-1)^{\mu_x} \hat{Q}_{\lambda-\mu_x}^{(\pm)}. \quad (83)$$

Здесь символ  $(\pm)$  над оператором определяет его сигнатуру. Подставляя в (82) соотношение (71), выразим операторы  $\hat{Q}_{\lambda\mu_x}^{(\pm)}$  через моды уравнений ПСФ  $X_{v\pm}$ ,  $\mathcal{P}_{v\pm}$ , духовые моды  $(X(1), P_x(1))$ ,  $(\Theta_x(1), J_x(1))$ ,  $(\Theta_{\tau}(1), N_{\tau}(1))$ ,  $(J_y(1), J_z(1))$  и моды  $(Y(1), P_y(1))$ ,  $(Z(1), P_z(1))$ . Появляющиеся в этих выражениях коммутаторы типа  $[Q_{\lambda\mu_x}^{(\pm)}, J_x(1)]$ ,  $[Q_{\lambda\mu_x}^{(\pm)}, J_{y,z}(1)]$ ,  $[Q_{\lambda\mu_x}^{(\pm)}, P_x(1)]$  и  $[Q_{\lambda\mu_x}^{(\pm)}, P_{y,z}(1)]$  можно заменить соответствующей линейной комбинацией средних значений мультипольных операторов в состояниях прастр-линии (см. [19, 40, 43, 44]). Далее, следуя Маршалеку [30], в этих выражениях необходимо произвести замену  $\Theta_x(1) \rightarrow \Theta_x$ ,  $\Theta_{\tau}(1) \rightarrow \Theta_{\tau}$ ,  $X(1) \rightarrow X$ ,  $P_x(1) \rightarrow P_x$ ,  $N_N(1) \rightarrow N - N_0$ ,  $N_z(1) \rightarrow Z - Z_0$ ,  $J_x(1) \rightarrow J - J_0$ , чтобы получить выражения для операторов  $\hat{Q}_{\lambda\mu_x}^{(\pm)}$  в лабораторной системе координат, точнее говоря, в пространстве функций (75) или (77). Полученные выражения могут быть использованы для определения операторов  $\hat{Q}_{\lambda\mu_x}^{(\pm)}$ , действующих во внутренней системе координат [т. е. в пространстве функций  $|\alpha J\rangle$  — см. (77)]. С этой целью необходимо выразить функции Вигнера  $D_{\mu\nu}^{\lambda}$  в операторной форме в терминах операторов  $J_x(1)$ ,  $\Theta_x(1)$ ,  $\Gamma$ ,  $\Gamma^+$  и также произвести

замену  $\Theta_x(1) \rightarrow \hat{\Theta}_x$ ,  $J_x(1) \rightarrow \hat{J} - J_0$ . В результате получим \*

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q}_{\lambda\mu_x=0}^{(+)'0} = \sum_{\nu} \Lambda_{\nu}^{(\lambda 0)} (O_{\nu}^{+} + (-1)^{\lambda} O_{\nu}) + \delta_{\lambda, 2} \{ \langle \Omega | \hat{Q}_{2\mu_x=0}^{(+)'0} | \Omega \rangle + \\ + [ \hat{Q}_{2\mu_x=0}^{(+)'0}, i\hat{\Theta}_N ] (N - N_0) + [ \hat{Q}_{2\mu_x=0}^{(+)'0}, i\hat{\Theta}_Z ] (Z - Z_0) + \\ + [ \hat{Q}_{2\mu_x=0}^{(+)'0}, i\hat{\Theta}_x ] (J - J_0) \}; \\ \hat{Q}_{\lambda\mu_x=1, 2, 3}^{(\sigma)'0} = \sum_{\nu} (\Lambda_{\nu}^{\lambda\mu_x} O_{\nu}^{+} + \Lambda_{\nu}^{\lambda-\mu_x} O_{\nu}) + \\ + \delta_{\lambda, 2} \{ \langle \Omega | \hat{Q}_{2\mu_x=2}^{(+)'0} | \Omega \rangle + [ \hat{Q}_{2\mu_x=2}^{(+)'0}, i\hat{\Theta}_N ] (N - N_0) + \\ + [ \hat{Q}_{2\mu_x=2}^{(+)'0}, i\hat{\Theta}_Z ] (Z - Z_0) + [ \hat{Q}_{2\mu_x=2}^{(+)'0}, i\hat{\Theta}_x ] (J - J_0) \} \end{aligned} \right\} (84)$$

( $\sigma = +$  для  $\mu_x = 2$ ,  $\sigma = -$  для  $\mu_x = 1, 3$ ), где матрицы  $\Lambda_{\nu}^{\lambda\mu_x}$  имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{\nu}^{\lambda\mu_x=0} &= \sum_{ik} \mathfrak{M}_{ik}^{\lambda\mu_x=0} (\varphi_{ik}^{\nu} + \psi_{ik}^{\nu}); \\ \Lambda_{\nu}^{\lambda\mu_x=\pm 1, \pm 2, \pm 3} &= 2 \sum_{ik} (\mathfrak{M}_{ik}^{\lambda\mu_x} \varphi_{ik}^{\nu} - \mathfrak{M}_{ik}^{\lambda-\mu_x} \varphi_{ik}^{\nu} + \\ &+ \mathfrak{M}_{ik}^{\lambda\mu_x} \psi_{ik}^{\nu} - \mathfrak{M}_{ik}^{\lambda-\mu_x} \psi_{ik}^{\nu}); \\ (\Lambda_{\nu}^{\lambda\mu_x})^* &= (-1)^{\lambda+\mu} \Lambda_{\nu}^{\lambda\mu}, \quad -\lambda \leq \mu \leq \lambda, \end{aligned} \right\} (85)$$

а амплитуды  $\psi_{ik(i\bar{h})}^{\nu}$ ,  $\varphi_{ik(i\bar{h})}^{\nu}$ ,  $\psi_{ik}^{\nu}$ ,  $\varphi_{ik}^{\nu}$  следуют из определения операторов фононов:

$$\left. \begin{aligned} O_{\nu}^{+} &= \sum_{ik} (\psi_{ik}^{\nu} b_{ik}^{+} + \varphi_{ik}^{\nu} b_{ik}^{-}); \\ O_{\nu}^{-} &= \sum_{ik} (\psi_{ik}^{\nu} b_{ik} + \varphi_{ik}^{\nu} b_{ik}^{+} + \psi_{ik}^{\nu} b_{ik}^{-} + \varphi_{ik}^{\nu} b_{ik}^{-}). \end{aligned} \right\} (86)$$

*Ядерные мультипольные моменты.* Статические ядерные моменты определяются средними значениями операторов  $\hat{O}_{\lambda\mu_x}^{(\pm)'0}$  по состоянию  $|\alpha J\rangle$ . Используя (77) и (84), ядерные моменты можно записать в виде разложения Тейлора

$$\begin{aligned} eQ_{2\mu_x=0, 2} &= \langle \alpha J | \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \hat{Q}_{2\mu_x=0, 2}^{(+)'0} | \alpha J \rangle = \\ &= \langle \Omega | \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \hat{Q}_{2\mu_x=0, 2}^{(+)'0} | \Omega \rangle + \left( \frac{\partial Q_{2\mu_x}}{\partial N} \right)_{N=N_0} (N - N_0) + \\ &+ \left( \frac{\partial Q_{2\mu_x}}{\partial Z} \right)_{Z=Z_0} (Z - Z_0) + \left( \frac{\partial Q_{2\mu_x}}{\partial J} \right)_{J=J_0} (J - J_0). \end{aligned} \quad (87)$$

\* Ниже мы не будем рассматривать члены, связанные с модами  $(X(1), P_x(1))$ ,  $(Y(1), P_y(1))$ ,  $(Z(1), P_z(1))$ , так как моды  $(Y(1), P_y(1))$ ,  $(Z(1), P_z(1))$  не входят в пространство функций (77), и при изучении ядерных вибраций можно считать  $P_x = 0$ . Важно то, что в нашем рассмотрении эти моды не смешиваются с нормальными модами  $(X_{\nu}, P_{\nu})$ , а также с другими духовыми модами.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q_{2\mu_x}}{\partial N}\right)_{N=N_0} &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} [\hat{Q}_{2\mu_x}^{(+)}, i\hat{\Theta}_N]; \quad \left(\frac{\partial Q_{2\mu_x}}{\partial Z}\right)_{Z=Z_0} = \\ &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} [\hat{Q}_{2\mu_x}^{(+)}, i\hat{\Theta}_Z]; \\ \left(\frac{\partial Q_{2\mu_x}}{\partial J}\right)_{J=J_0} &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} [\hat{Q}_{2\mu_x}^{(+)}, i\hat{\Theta}_x]. \end{aligned} \quad (88)$$

Отметим, что моменты в (87) определены относительно оси  $x$ . С помощью преобразования (81) можно получить выражения для ядерных моментов в системе с осью квантования  $z$ .

*Приведенные вероятности электрических переходов.* Подставляя (80) в (78) и используя асимптотику коэффициентов Клебша — Гордана ( $J_1, J_2 \gg \lambda$ ), получаем [здесь  $\mathfrak{M}(E\lambda, \mu) = e_{\text{эф}}^\lambda Q_{\lambda\mu_x}^{(\pm)}$ ]

$$B(E\lambda; \alpha_1 J \rightarrow \alpha_2 J - \nu) = |\langle J - \nu \alpha_2 | e_{\text{эф}}^\lambda \hat{Q}_{\lambda\mu_x}^{(\pm)\nu} | J \alpha_1 \rangle|^2, \quad (89)$$

где отражена зависимость характера электрического перехода от знака сигнатуры. Формальная запись эффективного заряда в выражении подразумевает умножение аддитивных компонент полного момента от разного рода частиц (нейтронов или протонов) на соответствующие эффективные заряды. Подставляя (84) в (89), получаем все искомые приведенные вероятности переходов.

Для переходов, не меняющих числа фононов (т. е. переходов вдоль ротационных полос, включая иррадиацию), имеем

$$\begin{aligned} B(E2; \alpha J \rightarrow \alpha J - \nu) &= |\langle \Omega | \tilde{Q}_{2\mu_x=2}^{(+)} | \Omega \rangle + [\tilde{Q}_{2\mu_x=2}^{(+)}, i\hat{\Theta}_N] (N - N_0) + \\ &+ [\tilde{Q}_{2\mu_x=2}^{(+)}, i\hat{\Theta}_Z] (Z - Z_0) + [\tilde{Q}_{2\mu_x=2}^{(+)}, i\hat{\Theta}_x] (J - J_0) |^2, \end{aligned} \quad (90)$$

где  $\hat{Q}_{2\mu_x}^{(+)} = e_{\text{эф}}^{(2)} \hat{Q}_{2\mu_x}^{(+)\nu}$ . Очевидно, когда внутренняя структура состояний медленно меняется с ростом  $J$ , можно положить  $N = N_0$ ,  $Z = Z_0$ ,  $J = J_0$  (см. [30]).

Переходы, меняющие число фононов на 1 (межполосные переходы), могут быть разделены согласно изменению углового момента:

а) для переходов с  $\Delta J = 0$

$$B(E\lambda; n_\nu J_0 \rightarrow n_\nu \pm 1 J_0) = |\tilde{\Lambda}_{\nu\pm}^{\lambda 0}|^2 \times \begin{cases} n_{\nu+} + 1; \\ n_{\nu+}. \end{cases} \quad (91)$$

Здесь  $\lambda = 1, 2, 3$ ;  $\tilde{\Lambda} = e_{\text{эф}}^\lambda \Lambda$ ;

б) для переходов с  $\Delta J = 1$

$$B(E\lambda; n_\nu J_0 \rightarrow n_\nu \pm 1 J_0 - 1) = |\tilde{\Lambda}_{\nu\sigma}^{\lambda \mp 1}|^2 \times \begin{cases} n_{\nu\sigma} + 1; \\ n_{\nu\sigma}. \end{cases} \quad (92)$$

Здесь  $\lambda = 1, 2, 3$ ;  $\sigma = +$  для  $\lambda = 3$ ;  $\sigma = -$  для  $\lambda = 1, 2$ ;

в) для переходов с  $\Delta J = 2$

$$B(E\lambda; n_\nu J_0 \rightarrow n_\nu \pm 1 J_0 - 2) = |\tilde{\Lambda}_{\nu+}^{\lambda\mu x=\mp 2}|^2 \times \begin{cases} n_{\nu+} + 1; \\ n_{\nu+}. \end{cases} \quad (93)$$

Здесь  $\lambda = 2, 3$ ;

г) для переходов с  $\Delta J = 3$

$$B(E3; n_\nu J_0 \rightarrow n_\nu \pm 1 J_0 - 3) = |\tilde{\Lambda}_{\nu-}^{3\mu x=3}|^2 \times \begin{cases} n_{\nu-} + 1; \\ n_{\nu-}. \end{cases} \quad (94)$$

Индекс  $\nu\sigma$  в выражениях (91) — (94) характеризует сигнатуру фонового состояния, с которого идет тот или иной переход.

Следует ожидать, что все переходы с изменением числа фононов (межполосные переходы) слабее переходов внутри ротационной полосы, так как приведенная вероятность однофононных переходов пропорциональна амплитудам  $|\Lambda_{\nu\sigma}^{\lambda\mu x}|^2$  [см. (91) — (94)], которые на фактор бозонного разложения меньше, чем среднее значение квадрупольного оператора  $\langle \Omega | \hat{Q}_{2\mu x}^{(+)} | \Omega \rangle$ , характеризующего внутриполосные переходы.

В заключение отметим, что выражения (90) — (94) получены в пределе больших спинов  $J_1, J_2 \gg \lambda$ . Однако в ряде работ, в частности в [9, 86], приведены аргументы о возможности использования приближений, заложенных в МПВ, при низких спинах. В этом случае нет необходимости перехода к асимптотическим значениям коэффициентов Клебша — Гордана, а соответствующие выражения для приведенных вероятностей переходов, которые при  $I \gg 1$  переходят в (90) — (94), можно найти в [87].

**Метод силовой функции.** В рамках метода МПВ + ПСФ для получения информации о вероятности переходов между дискретными уровнями необходимо знание структуры соответствующих начального и конечного состояний. Для этого нужно решить соответствующие секулярные уравнения (62) и систему уравнений (51), чтобы получить двухквасичастичные амплитуды  $X_\mu^\nu, \mathcal{P}_\mu^\nu$  (49) или  $\psi_{ih}^\nu, \varphi_{ih}^\nu$  (86). Однако исследование отдельных решений секулярных уравнений в области высоких возбуждений (например, гигантских резонансов) теряет смысл, так как плотность уровней в этой области спектра сильно возрастает, а физическая информация, извлекаемая с помощью эксперимента, также имеет усредненный характер. Поэтому естественно использовать для количественного анализа электромагнитных переходов в области возбуждений с большой энергией метод силовой функции [31], который успешно применяется для описания гигантских резонансов в отсутствие вращения [41, 88, 89]. Приведем основные моменты метода силовой функции, который ниже будет применен для описания решений метода МПВ + ПСФ (см. [77]).

Рассмотрим функцию  $b(\omega_i)$ , имеющую физический смысл в точках  $\omega_i$ , определяемых уравнением

$$\mathcal{F}(\omega_i) = 0 \quad (95)$$



и представляющих собой энергию возбуждения системы\*. Силовой функцией данной величины  $b(\omega_i)$  называют среднее взвешенное значений этой величины по некоторому энергетическому интервалу  $\Delta$  в окрестности точки  $\omega_i$ , т. е. [31]

$$b_{\Delta}(\omega) = \sum_i b(\omega_i) \rho_{\Delta}(\omega - \omega_i), \quad (96)$$

где  $\rho_{\Delta}(\omega - \omega_i)$  — нормированная на единицу весовая функция, имеющая максимум в точке  $\omega - \omega_i = 0$ . Обычно ее берут в виде

$$\rho_{\Delta}(\omega - \omega_i) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta}{(\Delta - \omega_i)^2 + \Delta^2/4}. \quad (97)$$

Считая все решения уравнения (95) невырожденными, т. е.  $(\partial F/\partial \omega)_{\omega \neq \omega_i} \neq 0$ , введем в рассмотрение функцию  $P(\omega)$  такую, что

$$b(\omega_i) = (P(\omega)/\partial F/\partial \omega)_{\omega=\omega_i} \quad (98)$$

Если функция  $P(z)/F(z)$ , рассматриваемая как функция комплексной переменной, не имеет иных особенностей, кроме простых полюсов, соответствующих нулям  $F(z)$ , и если

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z)/F(z) \rightarrow 0,$$

то, используя теорему Коши, можно получить следующее ключевое выражение:

$$b_{\Delta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{P(\omega + i\Delta/2)}{F(\omega + i\Delta/2)}. \quad (99)$$

Рассмотрим задачу о построении силовой функции для вероятности переходов из однофононных состояний в состояния ирраст-линии. С этой целью перепишем уравнения движения (49) в более симметричном виде. Вместо неизвестных (50) введем новые (для простоты ограничимся случаем нормальных мод с  $\omega_{\nu} \neq 0$ )

$$\mathcal{R}_{s_2}^{(+)}(\nu) = \sqrt{\omega_{\nu}} \kappa_{s_2} A_{s_2}^{\nu}; \quad \mathcal{R}_{s_1}^{(-)}(\nu) = -\frac{1}{\sqrt{\omega_{\nu}}} \kappa_{s_1} B_{s_1}^{\nu}. \quad (100)$$

Тогда (49) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} X_{\mu}^{\nu} &= \frac{E_{\mu}}{E_{\mu}^2 - \omega_{\nu}^2} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\nu}}} \sum_{s_2} \mathcal{R}_{s_2}^{(+)}(\nu) W_{\mu}^{s_2} + \\ &+ \frac{1}{E_{\mu}^2 - \omega_{\nu}^2} \sqrt{\omega_{\nu}} \sum_{s_1} \mathcal{R}_{s_1}^{(-)}(\nu) V_{\mu}^{s_1}; \\ \mathcal{P}_{\mu}^{\nu} &= \frac{\omega_{\nu}^2}{E_{\mu}^2 - \omega_{\nu}^2} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\nu}}} \sum_{s_2} \mathcal{R}_{s_2}^{(+)}(\nu) W_{\mu}^{s_2} + \\ &+ \frac{E_{\mu}}{E_{\mu}^2 - \omega_{\nu}^2} \sqrt{\omega_{\nu}} \sum_{s_1} \mathcal{R}_{s_1}^{(-)}(\nu) V_{\mu}^{s_1}. \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

\* Функция  $b(\omega_i)$  может быть, например, вероятностью перехода данного типа и данной мультипольности из однофононных состояний на ирраст-линию. В этом случае  $\omega_i$  представляют собой энергии фононов и уравнение (95) совпадает с (62).

Система уравнений (51) с учетом соотношений (100) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s_2} \mathcal{R}_{s_2}^{(+)}(\nu) \left( S_{W_{s_2} W_{s_2}'} - \frac{\delta_{s_2 s_2'}}{4\kappa_{s_2}} \right) + \omega_\nu \sum_{s_1} \mathcal{R}_{s_1}^{(-)}(\nu) U_{V_{s_1} W_{s_2}'} = 0; \\ \omega_\nu \sum_{s_2} \mathcal{R}_{s_2}^{(+)}(\nu) U_{V_{s_1} W_{s_2}'} + \sum_{s_1} \mathcal{R}_{s_1}^{(-)}(\nu) \left( S_{V_{s_1} V_{s_1}'} + \frac{\delta_{s_1 s_1'}}{4\kappa_{s_1}} \right) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

. е. мы получили систему однородных уравнений для нахождения векторов  $\mathcal{R}^{(\pm)}$ :

$$\sum_{s'} \mathcal{J}_{ss'} \mathcal{R}_{s'} = 0, \quad s = 1, \dots, n_1 + n_2, \quad (102a)$$

где

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} S_{W_{s_2} W_{s_2}'} - \frac{\delta_{s_2 s_2'}}{4\kappa_{s_2}} & \omega U_{V_{s_1} W_{s_2}'} \\ \omega U_{V_{s_1} W_{s_2}'} & S_{V_{s_1} V_{s_1}'} + \frac{\delta_{s_1 s_1'}}{4\kappa_{s_1}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{s_2}^{(+)} \\ \mathcal{R}_{s_1}^{(-)} \end{pmatrix}.$$

Условие нормировки из (48) с учетом (101) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} X_{\mu}^{\nu} \mathcal{F}_{\mu}^{\nu} &= \sum_{\mu} \frac{1}{(E_{\mu}^2 - \omega_{\nu}^2)^2} \left\{ E_{\mu} \omega_{\nu} \left( \sum_{s_2, s_2'} \mathcal{R}_{s_2}^{(+)}(\nu) \mathcal{R}_{s_2'}^{(+)}(\nu) W_{\mu}^{\prime 2} W_{\mu}^{\prime 2} + \right. \right. \\ &+ \left. \sum_{s_1, s_1'} \mathcal{R}_{s_1}^{(-)}(\nu) \mathcal{R}_{s_1'}^{(-)}(\nu) V_{\mu}^{s_1} V_{\mu}^{s_1'} \right) + (E_{\mu}^2 + \omega_{\nu}^2) \sum_{s_1, s_2} \mathcal{R}_{s_2}^{(+)}(\nu) \mathcal{R}_{s_1}^{(-)}(\nu) V_{\mu}^{s_1} W_{\mu}^{\prime 2} \left. \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'=1}^{n=n_1+n_2} \mathcal{R}_s(\nu) \mathcal{R}_{s'}(\nu) \partial \mathcal{J}_{ss'} / \partial \omega |_{\omega=\omega_{\nu}} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (103)$$

Переведем в правую часть уравнений (102a) один член, например содержащий  $\mathcal{R}_n(\nu)$ :

$$\sum_{s'=1}^{n-1} \mathcal{J}_{ss'}(\nu) \mathcal{R}_{s'}(\nu) = -\mathcal{J}_{sn} \mathcal{R}_n(\nu) \rightarrow \sum_{s'=1}^{n-1} \mathcal{J}_{ss'} a_{s'} = -\mathcal{J}_{sn}, \quad (104)$$

где

$$a_{s'} = \frac{\mathcal{R}_{s'}}{\mathcal{R}_n} \rightarrow \mathcal{R}_{s'} = a_{s'} \cdot \mathcal{R}_n. \quad (105)$$

Подставим (105) в условие нормировки (103)

$$\mathcal{R}_n^2 \sum_{ss'} a_s a_{s'} \frac{\partial \mathcal{J}_{ss'}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\nu}} = 1. \quad (106)$$

Секулярное уравнение, соответствующее системе уравнений (102a), можно представить в виде разложения определителя  $|\mathcal{J}| = 0$

по алгебраическим дополнениям

$$|\mathcal{Y}| = \sum_{s, s'=1}^n \mathcal{Y}_{ss'} A_{ss'} = 0 \rightarrow \sum_{s'=1}^{n-1} \mathcal{Y}_{ss'} \frac{A_{ss'}}{A_{sn}} = -\mathcal{Y}_{sn}, \quad (107)$$

где  $s$  — произвольный индекс из  $1, \dots, n$ . Сравнивая (107) и (104), получаем

$$a_{s'} = A_{ss'}/A_{sn}, \quad (108)$$

и так как  $s$  произвольное, выберем  $s = n$

$$a_{s'} = A_{ns'}/A_{nn}. \quad (108a)$$

Из (108) и (108a) имеем

$$a_s a_{s'} = A_{ss'}/A_{nn}. \quad (109)$$

Подставляя (109) в условие (106), получаем

$$\mathcal{R}_n^2 = \frac{A_{nn}}{\sum_{ss'} A_{ss'} \partial \mathcal{Y}_{ss'} / \partial \omega}. \quad (110)$$

Рассмотрим полный определитель системы

$$|\mathcal{Y}| = \sum_p (-1)^p \mathcal{Y}_{1p_1} \dots \mathcal{Y}_{sp_s} \dots \mathcal{Y}_{np_n} \quad (111)$$

и продифференцируем его по  $\omega$

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\mathcal{Y}|}{\partial \omega} &= \sum_{sp} (-1)^p \mathcal{Y}_{1p_1} \dots \frac{\partial \mathcal{Y}_{sp_s}}{\partial \omega} \dots \mathcal{Y}_{np_n} = \\ &= \sum_s \begin{vmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \dots & \mathcal{Y}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial \mathcal{Y}_{s1} / \partial \omega & \dots & \partial \mathcal{Y}_{sn} / \partial \omega \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{Y}_{n1} & \dots & \mathcal{Y}_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{ss'} A_{ss'} \frac{\partial \mathcal{Y}_{ss'}}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (112)$$

Тогда окончательно

$$\mathcal{R}_n^2 = \frac{A_{nn}}{\partial |\mathcal{Y}| / \partial \omega}. \quad (113)$$

Остальные неизвестные  $\mathcal{R}_s$  можно определить из (108a) и (105).

Выразим обобщенные координаты  $X_\mu^v$  и моменты  $\mathcal{P}_\mu^v$  через  $\mathcal{R}_n$

$$\left. \begin{aligned} X_\mu^v &= \mathcal{R}_n \left\{ \frac{E_\mu}{E_\mu^2 - \omega_v^2} \frac{1}{V \omega_v} \sum_{s_2} a_{s_2}(v) W_\mu^{s_2} + \frac{V \overline{\omega_v}}{E_\mu^2 - \omega_v^2} \sum_{s_1} a_{s_1}(v) V_\mu^{s_1} \right\}; \\ \mathcal{P}_\mu^v &= \mathcal{R}_n \left\{ \frac{\omega_v^2}{E_\mu^2 - \omega_v^2} \frac{1}{V \omega_v} \sum_{s_2} a_{s_2}(v) W_\mu^{s_2} + \frac{E_\mu V \overline{\omega_v}}{E_\mu^2 - \omega_v^2} \sum_{s_1} a_{s_1}(v) V_\mu^{s_1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Соответствующие амплитуды фононов  $\psi_\mu^v$  и  $\varphi_\mu^v$  [см. (86)] имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \psi_\mu^v &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( V \overline{\omega_v} X_\mu^v + \frac{1}{V \omega_v} \mathcal{P}_\mu^v \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathcal{R}_n}{E_\mu - \omega_v} \left[ \sum_{s_2} a_{s_2}(v) W_\mu^{s_2} + \sum_{s_1} a_{s_1}(v) V_\mu^{s_1} \right]; \\ \varphi_\mu^v &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( V \overline{\omega_v} X_\mu^v - \frac{1}{V \omega_v} \mathcal{P}_\mu^v \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathcal{R}_n}{E_\mu + \omega_v} \left[ \sum_{s_2} a_{s_2}(v) W_\mu^{s_1} - \sum_{s_1} a_{s_1}(v) V_\mu^{s_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Поскольку амплитуды  $\psi$  и  $\varphi$  волновой функции однофононных состояний пропорциональны  $\mathcal{R}_n$ , то любая величина, квадратичная по этим амплитудам, например вероятность электрических переходов [см. (90) — (94)] из однофононных состояний, содержит фактор (113), обеспечивающий применение метода силовой функции (см. формулу (98) и [77]). Так, например, в [90] в рамках модели квадрупольных возбуждений вращающихся ядер приведены выражения для расчета характеристик  $E2$ -переходов из однофононных состояний в состояния праст-линии на основе метода силовой функции.

Метод МПВ + ПСФ, описанный выше, позволяет получать количественную информацию о структуре состояний вращающихся атомных ядер в рамках микроскопической теории на основании единой модели. Однако практическая реализация метода связана с трудоемкими расчетами и с введением дополнительных упрощений и предположений. В то же время качественные аспекты влияния вращения на коллективные свойства ядер оказывается возможным проследить на основе сравнительно простой модели самосогласованного анизотропного осцилляторного потенциала, которая исследовалась в [95—97, см. также 6] в приближении МПВ. В разд. 2 с помощью данной модели мы проследим все этапы решения задачи на отыскание собственных решений уравнений ПСФ для остаточных взаимодействий (изовекторных дипольных [70, 98] и изоскалярных квадрупольных [48, 49, 51] сил) и обсудим физические следствия. Далее, в разд. 3 с помощью уже реалистических потенциалов мы проведем на основе метода МПВ + ПСФ детальный анализ как энергетических, так и электрических характеристик ряда конкретных ядер из редкоземельной области в зависимости от углового момента.

## 2. АНАЛИЗ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР И ПРОСТОЙ МОДЕЛИ

**Гамильтониан МПВ в простой модели.** Изменения формы и инерциальных параметров ядра при вращении возможно моделировать на основе гамильтониана гармонического осциллятора с эффективными квадрупольными силами [96, 97], из которого выделяется гамильтониан среднего деформированного поля и остаточное

квадруполь-квадрупольное взаимодействие, ответственное за коллективные возбуждения положительной четности [48, 49]. Для описания коллективных возбуждений отрицательной четности необходимо ввести в гамильтониан остаточное взаимодействие отрицательной четности.

Рассмотрим гамильтониан вида

$$H' = \sum_{\nu=1}^A \left( \frac{p_{\nu}^2}{2m} + \frac{m\omega_{\nu}^2}{2} r_{\nu}^2 \right) - \frac{\kappa}{2} \sum_{i, k=x, y, z} \hat{Q}_{ik} + H_{\text{ост}}^{(-)} - \Omega \hat{L}_x, \quad (116)$$

где  $\hat{Q}_{ik} = \sum_{\nu} \hat{q}_{ik}(\nu)$  — компоненты тензора квадрупольного момента системы;  $\hat{L}_x = \sum_{\nu} \hat{l}_x(\nu)$  — проекция оператора орбитального момента на ось  $x$  и  $\Omega$  — угловая частота вращения. Одночастичный гамильтониан ядра, вращающегося с угловой частотой  $\Omega$ , согласованный по методу Хартри с гамильтонианом (116), может быть написан в виде [97]:

$$\left. \begin{aligned} H_{\text{СП}}(\Omega) &= \sum_{\nu=1} h_{\nu}(\omega); \\ h_{\nu}(\Omega) &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) - \Omega L_x. \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Следуя [96], собственные функции и собственные значения гамильтониана (117) удобно определить из уравнения

$$[H_{\text{СП}}, a_{\lambda}^{\dagger}] = \omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} \quad (118)$$

для операторов рождения осцилляторных квантов  $a_{\lambda}^{\dagger}$ , являющихся линейными комбинациями координат частиц  $r_i$  и сопряженных импульсов  $p_i$ . Уравнения (118) соответствуют линейному преобразованию

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2m\omega_x)^{-1/2} & (2m\omega_x)^{-1/2} \\ i \left(\frac{m\omega_x}{2}\right)^{1/2} & -i \left(\frac{m\omega_x}{2}\right)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x^{\dagger} \\ a_x \end{pmatrix}; \quad (119a)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_+ & Y_+^* & Y_- & Y_-^* \\ Z_+ & Z_+^* & Z_- & Z_-^* \\ P_y^+ & P_y^+{}^* & P_y^- & P_y^-{}^* \\ P_z^+ & P_z^+{}^* & P_z^- & P_z^-{}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_+^{\dagger} \\ a_- \\ a_-^{\dagger} \end{pmatrix}. \quad (119b)$$

Явный вид выражений для коэффициентов преобразования (119) можно найти в [97]. В терминах операторов  $a_{\lambda}^{\dagger}$ ,  $a_{\lambda}$  гамильтониан (117) имеет вид

$$H_{\text{СП}} = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \sigma=x, +, -}}^A \omega_{\sigma} \left( \hat{n}_{\sigma} + \frac{1}{2} \right)_{\nu} \equiv \sum_{\sigma} \omega_{\sigma} W_{\sigma}. \quad (120)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \hat{n}_\sigma &= a_\sigma^+(\nu) a_\sigma(\nu), [a_\sigma(\nu), a_{\sigma'}^+(\nu')] = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\nu\nu'}; \\ \omega_\pm^2 &= \frac{\omega_y^2 + \omega_z^2}{2} + \Omega^2 \pm \frac{1}{2} [(\omega_y^2 - \omega_z^2)^2 + 8\Omega^2(\omega_y^2 + \omega_z^2)]^{1/2}. \end{aligned} \right\} (121)$$

Изменения формы ядра при вращении в этой модели детально анализировались в [97]. Типичный годограф, показывающий зависимость параметров равновесной деформации потенциала от  $\Omega$  показан на рис. 1. При сравнительно малых частотах вращения деформация потенциала уменьшается с ростом  $\Omega$ , но растет неаксиальность.

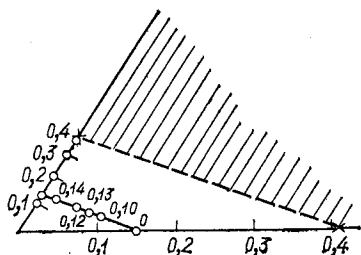


Рис. 1. Изменение осцилляторных частот среднего поля в зависимости от  $\Omega$ . Цифры у точек определяют соответствующие значения  $\Omega/\omega_0$ . В заштрихованной части рисунка отсутствуют решения задачи на минимум энергии системы

При частотах вращения, превышающих некоторую критическую  $\Omega_{кр}^{(1)}$ , энергетически выгодным оказывается режим вращения сплюснутого ядра вокруг оси симметрии. Отметим, что поведение параметров деформации определяется условиями минимума энергии системы, которые с квазиклассической точностью можно записать в виде [97]

$$\omega_x W_x = \omega_+ W_+ = \omega_- W_- = C = \text{const.}$$

В отсутствие вращения эти условия обеспечивают согласование плотности нуклонов с формой осцилляторного потенциала [1], тогда как в более общем случае они соответствуют требованию изотропного распределения скоростей нуклонов в рассматриваемой системе [6, 96, 97]. Кроме того, фиксация соотношения между заполнениями по различным осям оставляет разные возможности, отвечающие различным вращательным полосам. Очевидно, наименшая из них по энергии и будет праст-линией.

Заметные изменения формы ядра в данной модели происходят при слишком больших частотах вращения. В этом отношении более реалистичными являются оценки ротационной деформируемости ядер в модели жидкой капли [99]. Коллективные возбуждения в рамках простой модели также описываются посредством фононов, которые выражаются через обобщенные координаты и импульсы [см. (30)], определяемые уравнениями движения (28). Так как гамильтониан (116) инвариантен относительно поворота на угол  $\pi$  вокруг оси  $x - R_x(\pi)$ , то в соответствии с формулой (19) операторы фононов

в ПСФ характеризуются квантовым числом сигнатуры « $\pm$ »:

$$R_x^{-1}(\pi) \hat{O}_v^{\dagger} R_x(\pi) = \pm \hat{O}_v^{\dagger}, \quad (122)$$

т. е. остаточные взаимодействия можно разделить на четыре коммутирующие между собой части  $H_{(\pm)}^{(\pm)}$  [аналогично (20)], где

$$H_{(+)}^{(+)} = -\frac{\kappa}{2} \sum_{i=0, 1, 2} \hat{Q}_i^{(+)^2}; \quad H_{+}^{(-)} = -\frac{\kappa}{2} \sum_{i=1, 2} \hat{Q}_i^{(-)^2}; \quad (123)$$

$$H^{(-)} = H_{(-)}^{(+)} + H_{(-)}^{(-)}. \quad (123a)$$

**Изоскалярные квадрупольные возбуждения.** Анализ спектра. Обобщенные координаты и импульсы для гамильтониана  $H_{(+)}^{(\pm)}$  (гамильтониан изоскалярных квадрупольных сил) можно представить в виде

$$X_v^{(\pm)} = \sum_s X_s^v(\pm) \hat{q}_s^{(\pm)}; \quad \mathcal{P}_v^{(\pm)} = i \sum_s \mathcal{P}_s^v(\pm) \hat{p}_s^{(\pm)}, \quad (124)$$

где  $\hat{q}_s^{(\pm)}$ ,  $\hat{p}_s^{(\pm)}$  — билинейные комбинации операторов  $a_{\lambda}^{\dagger}$  и  $a_{\lambda}$ , вид которых можно найти в [48]. Линеаризация уравнений движения достигается заменой

$$[\hat{q}_s^{(\pm)}, \hat{p}_{s'}^{(\pm)}] \rightarrow [\hat{q}_s^{(\pm)}, \hat{p}_{s'}^{(\pm)}]_{\text{ПСФ}} \equiv \langle \Omega | [\hat{q}_s^{(\pm)}, \hat{p}_{s'}^{(\pm)}] | \Omega \rangle = V_s^{(\pm)} \delta_{ss'}, \quad (125)$$

где  $V_s^{(\pm)}$  является  $c$ -числом. Следуя схеме решения уравнений движения ПСФ, изложенной в разд. 1, для неизвестных  $X_s^v(\pm)$  и  $\mathcal{P}_s^v(\pm)$  получаем систему алгебраических уравнений типа (51): третьего порядка ( $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$ ,  $n_1 + n_2 = 3$ ) в случае положительной сигнатуры; второго порядка ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1$ ,  $n_1 + n_2 = 2$ ) в случае отрицательной сигнатуры (см. [48]). Условие существования нетривиальных решений этих систем приводит к секулярным уравнениям для энергий  $\omega$  однофононных квадрупольных состояний положительной и отрицательной сигнатур при данной частоте вращения  $\Omega$ . Выделение духовых решений среди решений уравнений ПСФ проводится аналогичным образом, как и в разд. 1 для гамильтониана (20).

В отсутствие вращения решения упомянутых выше систем алгебраических уравнений можно классифицировать обычным образом по проекции  $K^{\pi}$  углового момента на ось симметрии. Спектр возбуждений положительной четности для каждого из возможных значений  $K^{\pi} = 0^+, 1^+, 2^+$  будет определяться уравнением

$$1 - 2\kappa S_{hh}(\omega) = 0. \quad (126)$$

Здесь  $S_{hh}(\omega) = S_{Q_h^{(\pm)} Q_h^{(\pm)}}$  — соотношение типа (52), а соответствующие матричные элементы можно получить с помощью коэффициентов преобразования (119). Решение этих уравнений определяется форму-

лами:

$$\left. \begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \omega_2(0_{\sigma=+}^+)/\omega_0 \\
 \omega_1(0_{\sigma=+}^+)/\omega_0
 \end{aligned} \right\} &= \left[ 3 - \frac{4}{3} \delta \pm \left[ 1 + \frac{8}{3} \delta + \frac{208}{9} \delta^2 \right]^{1/2} \right] \approx \\
 &\approx \left\{ \begin{aligned}
 2 \\
 \sqrt{2} \left( 1 - \frac{2}{3} \delta \right)
 \end{aligned} \right. ; \\
 \omega(1_{\sigma=\pm}^+)/\omega_0 &= \sqrt{2 \left( 1 - \frac{1}{3} \delta \right)} \approx \sqrt{2} \left( 1 - \frac{1}{6} \delta \right) ; \\
 \omega(2_{\sigma=\pm}^+)/\omega_0 &= \sqrt{2 \left( 1 + \frac{8}{3} \delta \right)} \approx \sqrt{2} \left( 1 + \frac{4}{3} \delta \right) ,
 \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

где для описания осцилляторных частот использован нильссоновский параметр деформации  $\delta$ . Состояние  $0_2^+$  с энергией  $\omega \approx 2\omega_0$  коллективными свойствами не обладает. Остальные решения характеризуют положение соответствующих ветвей гигантского квадрупольного резонанса (ГКР) в деформированных ядрах. В пределе нулевой деформации решение  $\omega = \sqrt{2}\omega_0$  хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными об изоскалярном ГКР [1]. Отметим, что в рассмотренной модели не воспроизводятся низколежащие коллективные возбуждения ядер ( $\beta$ - и  $\gamma$ -полос), так как спектр соответствующих квазичастичных возбуждений имеет слишком упрощенный характер [49].

Зависимость энергий состояний ГКР от параметра деформации в отсутствие вращения ( $\Omega = 0$ ) представлена на рис. 2. Как видно, энергия возбуждения фонованого состояния  $0_1^+$  монотонно убывает с ростом  $\delta$  и обращается в нуль при  $\delta = 1/4(\sqrt{7} - 1) = 0,411$ . Ниже мы ограничимся рассмотрением характеристик модели в области  $\delta$  и  $\Omega$ , при которых частоты фонованых возбуждений в ПСФ отличны от нуля.

Как отмечалось выше, при  $\Omega \geq \Omega_{\text{КР}}^{(\Omega)}$  угловой момент направлен вдоль оси симметрии и фононы ПСФ обладают точным значением квантового числа проекции углового момента на эту ось, обозначаемого далее  $\tau$ . Дисперсионные уравнения для частот нормальных колебаний в этом случае также разделяются на три независимых уравнения: два из них определяют возбуждения положительной сигнатуры с  $\tau = 0$  и  $\pm 2$ , а третье — возбуждения отрицательной сигнатуры с  $\tau = \pm 1$ . При определении решений уравнений ПСФ

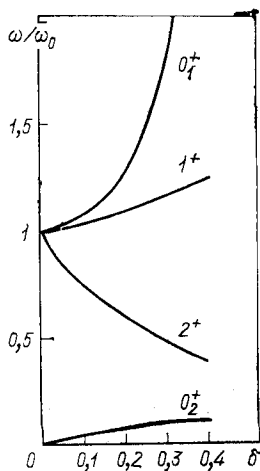


Рис. 2. Зависимость энергии возбуждения состояний положительной четности от параметра деформации  $\delta$  при  $\Omega = 0$



мы исходили из предположения зависимости силовой константы модели  $g = \frac{18\kappa C}{m^2\omega_0^3}$  от частоты вращения  $\Omega$ . Необходимое для определения такой зависимости условие можно найти из требования отсутствия в спектре внутренних возбуждений духовых решений, обусловленных нарушением ротационной инвариантности гамильтониана (см. [48, 49]). Это условие имеет вид

$$g = \nu + \nu_- \tag{128}$$

и вместе с условиями самосогласования [97] полностью определяет функцию  $g(\Omega)$ . Отметим, что существуют альтернативные подходы для анализа коллективных возбуждений быстровращающихся ядер [100], в которых используется предположение о независимости силовых констант модели от частоты вращения.

При записи матричных элементов квадрупольных операторов в сферической системе координат, ориентированной по оси симметрии, уравнение (126) для состояния  $\tau = 0$  принимает вид

$$\frac{2}{3} (\nu_y - \lambda)^2 \left\{ \frac{2}{\nu_x (4\nu_x - \nu)} + \frac{1}{(\nu_y - \lambda) (4\nu_y - \lambda)} \right\} = 1. \tag{129}$$

Для состояния с  $\tau = \pm 2$  после ряда преобразований и выделения духового решения дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$\nu^2 + 6\sqrt{\lambda}\nu + 10\lambda - 2\nu = 0. \tag{130}$$

Для состояний отрицательной сигнатуры с  $\tau = \pm 1$  после отделения духовых решений и ряда несложных вычислений дисперсионное уравнение можно представить в виде

$$Z^3 - Z \left[ 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{6} \right) + \frac{2\sqrt{\lambda} \left( 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\lambda} \right)}{1 + \sqrt{\lambda}} \right] + \frac{2\sqrt{\lambda} \left( 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\lambda} \right)}{1 + \sqrt{\lambda}} = 0, \tag{131}$$

где  $Z = \sqrt{\nu} + \sqrt{\lambda}$ . Приведем приближенные решения, полученные разложением по степеням  $\Omega$ :

$$\omega^{\tau=\pm 1} \approx \sqrt{2}\omega_0 + \frac{7}{6\sqrt{2}}\Omega \pm \frac{3}{2}\Omega; \tag{132}$$

$$\omega_{\text{прец}}^{\tau=+1} \approx \frac{3}{2} \frac{\Omega^2}{\omega_0} \left( 1 - \frac{8}{9} \frac{\Omega}{\omega_0} \right). \tag{133}$$

Аналогичное разложение для решений положительной сигнатуры будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \omega^{\tau=0} &\approx \left\{ \begin{aligned} &2\omega_0; \\ &\sqrt{2}\omega_0 + \frac{5\sqrt{2}}{6}\Omega; \end{aligned} \right\} \\ \omega^{\tau=\pm 2} &\approx \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{2}\omega_0 - \frac{\Omega}{3\sqrt{2}} \pm 3\Omega. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \tag{134}$$

Соотношения (132), (134) характеризуют расщепления различных ветвей изоскалярного ГКР во вращающемся ядре, а (133) определяет частоту низкоэнергетической прецессионной моды. Адиабатическая оценка частоты прецессионных колебаний [1]

$$\omega_{\text{прец}}^{\text{адиаб}} = \Omega [(\mathcal{Y}_x - \mathcal{Y}_y)(\mathcal{Y}_x - \mathcal{Y}_z)/(\mathcal{Y}_y \mathcal{Y}_z)]^{1/2},$$

где  $\mathcal{Y}_i$  — твердотельные значения моментов инерции, для аксиального режима вращения приводит к соотношению

$$\omega_{\text{прец}}^{\text{ад}} = \Omega \frac{v_x - v_y + \lambda}{v_x + v_y + \lambda} \approx \frac{\Omega^2}{2\omega_0} \left( 1 - \frac{5}{6} \frac{\Omega}{\omega_0} + \dots \right). \quad (135)$$

Этот результат существенно отличается от аналогичной оценки в ПСФ, соответствующей (133). Для аксиального режима вращения  $(\omega_{\text{ПСФ}}/\omega^{\text{ад}})_{\text{прец}} \approx 3$  для малых частот вращения, и отношение частот прецессии уменьшается примерно до двух в области более высоких  $\Omega$ . Близким к двум оказывается это отношение и для неаксиального режима вращения.

Общее поведение приведенных вероятностей находится в хорошем соответствии с результатами анализа внутренних матричных элементов, основанного на правилах сумм [49]. Мягкая ветвь ГКР сохраняет коллективность при всех значениях углового момента вплоть до критического. При  $\Omega \geq \Omega_{\text{КР}}^{(1)}$  эта ветвь характеризуется точным значением проекции углового момента на ось вращения ( $\tau = 2$ ), причем переходы с уменьшением фононного возбуждения данного сорта вызывают уменьшение углового момента ядра на две единицы.

Заметной приведенной вероятностью обладают переходы между вращ-состояниями и состояниями прецессионного характера. Расчет показывает, что зависимость вероятности таких переходов от углового момента, найденная в ПСФ, имеет иное поведение по сравнению с оценками по модели жесткого ротатора. Некоторое сходство между результатами ПСФ и феноменологической модели жесткого ротатора имеется лишь при  $\Omega \geq 0,2\omega_0$ .

**Изовекторный дипольный резонанс.** В качестве примера остаточных взаимодействий отрицательной четности рассмотрим случай изовекторных дипольных сил [70]. Тогда  $H_{\text{ост}}^{(-)}$  принимает вид

$$H_{\text{ост}}^{(-)} = \eta \sum_{i=x, y, z} \frac{m\omega_i^2}{2A} \left( \sum_{\nu=1}^A \tau_3(\nu) \hat{x}_i(\nu) \right)^2, \quad (136)$$

где  $\tau_3(\nu)$  — третья проекция изоспиновой матрицы Паули  $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  и  $\eta$  — параметр, характеризующий изовекторную составляющую нейтронного и протонного среднего поля

$$V_{(p)}^{(n)}(\nu) = \frac{m}{2} \left( 1 \mp \eta \frac{N-Z}{A} \right) \sum_{i=x, y, z} \omega_i^2 x_i^2(\nu). \quad (137)$$

Используемая параметризация дипольного взаимодействия (136) соответствует рецептам построения эффективных сил, восстанавливающих трансляционную инвариантность модельного гамильтониана (см. [93]). Значение параметра  $\eta$ , определенное из экспериментальных данных по положению гигантского дипольного резонанса (ГДР), для осцилляторного потенциала  $\eta \simeq 3$ .

Симметрия среднего поля относительно операции  $R_x(\pi)$  позволяет разделить  $H_{\text{ост}}^{(-)}$  на две части [см. (123)]

$$\left. \begin{aligned} H_{(-)}^{(+)} &= \eta \frac{m\omega_x^2}{2A} \left( \sum_{\nu=1}^A \tau_3(\nu) \hat{x}(\nu) \right)^2; \\ H_{(-)}^{(-)} &= \eta \sum_{i=y,z} \frac{m\omega_i^2}{2A} \left( \sum_{\nu=1}^A \tau_3(\nu) \hat{x}_i(\nu) \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Решение уравнений ПСФ с остаточным взаимодействием (136) можно провести аналогичным образом, как и для квадрупольных возбуждений (см. п. «Изокскалярные квадрупольные возбуждения»). Однако достаточно простой вид дипольных взаимодействий (138) позволяет применить более простой альтернативный способ. Уравнения ПСФ в исследуемом случае можно записать в виде (нас интересуют только недуховые решения)

$$[H_{\text{СП}} + H_{\text{ост}}^{(-)}, D_{\lambda}^{\dagger}] = \tilde{\omega}_{\lambda} D_{\lambda}^{\dagger}, \quad (139)$$

где оператор рождения дипольного фотона имеет структуру

$$D_{\lambda}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\nu=1}^A \tau_3(\nu) a_{\lambda}^{\dagger}(\nu). \quad (140)$$

Здесь  $a_{\lambda}^{\dagger}$  ( $\lambda = +, -, x$ ) — операторы рождения осцилляторных квантов [см. (118), (119)]. Таким образом, для спектра частот ГДР во вращающемся ядре получаем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_x &= \sqrt{1 + \eta\omega_x}; \\ \tilde{\omega}_{\pm} &= (1 + \eta) \frac{\omega_y^2 + \omega_z^2}{2} + \Omega^2 \pm \\ &\pm \sqrt{(1 + \eta)^2(\omega_y^2 - \omega_z^2)^2 + 8\Omega^2(1 + \eta)(\omega_y^2 + \omega_z^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Вероятности электромагнитных переходов, разряжающих состояния ГДР ( $\lambda, I$ ) в состоянии иррадиации, определяются соотношениями:

$$|\hat{X}_{\lambda}^{\mu}|^2 = |\langle \text{ир} | \hat{\mathfrak{M}}(E1, -\mu) D_{\lambda}^{\dagger} | \text{ир} \rangle|^2 = |[\hat{\mathfrak{M}}(E1, -\mu), D_{\lambda}^{\dagger}]_{\text{ПСФ}}|^2. \quad (142)$$

Здесь

$$\hat{\mathfrak{M}}(E1, -\mu) = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^A \tau_3(\nu) x(\nu), & \mu = 0 \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\nu=1}^A \tau_3(\nu) (y(\nu) \pm iz(\nu))^2 & \mu = \pm 1 \end{cases} \quad (143)$$

— сферические компоненты вектора дипольного момента ядра в системе осей, где ось квантования совпадает с осью вращения. Используя результаты [97] для коэффициентов преобразования (119), легко написать явный вид соотношений для амплитуд переходов  $|\tilde{X}_\lambda^\mu|^2$

$$|\tilde{X}_\lambda^0|^2 = (2m\omega_x \sqrt{1+\eta})^{-1} \quad \text{для } \lambda = x; \quad (144)$$

$$|\tilde{X}_\lambda^{\pm 1}|^2 = |Y_\lambda \pm iZ_\lambda|^2 = \\ = \lambda \frac{\omega_\lambda^2 - \omega_z^2 + \Omega^2/(1+\eta)}{2m\omega_\lambda \sqrt{(1+\eta)}(\omega_\lambda^2 - \omega_z^2)} \left\{ 1 \pm \frac{2\omega_\lambda \Omega / \sqrt{1+\eta}}{\omega_\lambda^2 - \omega_z^2 + \Omega^2/(1+\eta)} \right\} \quad \text{для } \lambda = \pm. \quad (145)$$

В отсутствие вращения ( $\Omega = 0$ ) колебания, как и в случае квадрупольных возбуждений, классифицируются квантовым числом  $K^\pi$ . Для продольной  $K^\pi = 0^-$  и поперечной  $K^\pi = 1^-$  мод дипольных колебаний в этом случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}(0^-) &= \sqrt{1+\eta}\omega_z = \sqrt{1+\eta}\omega_0 \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right)^{1/2}; \\ \tilde{\omega}(1^-) &= \sqrt{1+\eta}\omega_\Delta = \sqrt{1+\eta}\omega_0 \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Квадраты внутренних матричных элементов при  $\Omega = 0$  будут определять приведенную вероятность дипольных переходов в соответствующие состояния

$$B(E1, 0 \rightarrow K^\pi) = \frac{g_1}{2m\tilde{\omega}(K^\pi)} \frac{2}{1+\delta_{K^0}}, \quad (147)$$

где  $g_1 = 3A(e\hbar^2)/16\pi$ .

Полученные оценки расщепления ГДР в деформированных ядрах находятся в достаточно хорошем согласии с экспериментальными данными по сечениям фотопоглощения [1]. При  $\Omega \neq 0$  возникают дополнительное расщепление частоты поперечных дипольных колебаний и сдвиг частоты продольных колебаний. Соответствующие возбуждения при этом классифицируются с помощью квантового числа сигнатуры. В этой модели, когда ядро приобретает аксиальную сплюснутую форму и ось вращения совпадает с осью симметрии, появляется дополнительное квантовое число  $\lambda = \pm 1$ , различающее возбуждения отрицательной сигнатуры. Различным значениям соответствует проекция углового момента фонона на ось вращения, равная  $\mu = \pm 1$ .

На рис. 3 приведена зависимость энергии ГДР от частоты вращения. На вставке к рисунку показан годограф изменения деформации ядра в процессе вращения. Зависимость приведенных вероятностей переходов от частоты вращения показана на рис. 4. Правила отбора состояний по сигнатуре

$$(-1)^J \sigma = 1 \quad (148)$$

запрещают дипольные переходы  $\lambda = x \rightarrow \text{ир}$  с изменением углового момента. Таким образом, парциальная сумма

$$\sum_{\lambda} \tilde{\omega}_{\lambda} |\langle \text{ир} | \hat{\mathbb{M}}^{\pm} (E1, \mu = 0) | \lambda \rangle|^2 = \tilde{\omega}_{\lambda} |[\hat{\mathbb{M}}^{\pm} (E1, 0), D_{\lambda}^+]_{\text{ПСФ}}|^2 = \frac{q_1}{2m} \quad (149)$$

полностью определяет интегральные характеристики переходов без изменения спина состояния. При вращении вокруг оси симметрии

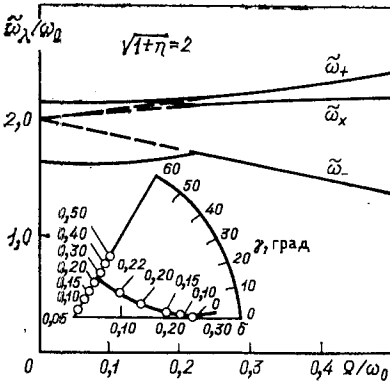


Рис. 3. Зависимость энергии возбуждения мод ГДР  $\tilde{\omega}_{\lambda} (\lambda = x, +, -)$  от угловой частоты вращения  $\Omega$ :

на гондиографе в нижней части рисунка сплошными жирными точками отмечены значения параметров равновесной деформации в зависимости от  $\Omega/\omega_0$  (значения  $\Omega/\omega_0$  указаны рядом с точками). Пунктирные линии соответствуют ядру, имеющему сферическую форму при  $\Omega = 0$ , тогда как сплошные линии рассчитаны для ядра с начальной деформацией  $\delta = 0,25$  при  $\Omega = 0$  (см. [70])

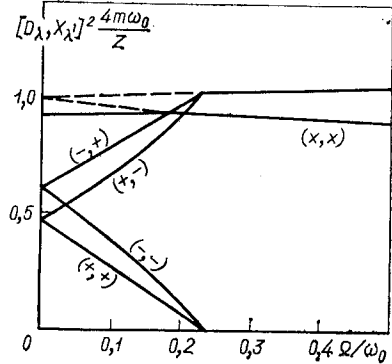


Рис. 4. Приведенные вероятности дипольных переходов  $(B(E1), \lambda I_i \rightarrow \text{ир} I_f)$  из состояний ГДР в состоянии ираст-линии при различных значениях  $\mu = I_i - I_f$  в единицах  $q_1$ . Первый символ в скобке рядом с кривой обозначает тип состояний ГДР ( $\lambda = x, +, -$ ), второй индекс соответствует  $\mu = 0$  для  $\lambda = x$  и  $\mu = \pm 1$  для  $\lambda = \pm$

возможными являются переходы ( $\lambda = \pm, I \mp 1 \rightarrow \text{ир}, I$ ), т. е. изменяющие момент на  $+1$  или на  $-1$  в зависимости от начального состояния  $\lambda$ . Приведенная вероятность таких переходов одинакова при всех спинах (рис. 4), если заселенность состояний с  $\lambda = \pm$  одинакова. В случае коллективного вращения разрешены оба типа дипольных переходов ( $\lambda = \pm, I \rightarrow \text{ир}, I \pm 1$ ) и изменения приведенной вероятности таких переходов с частотой вращения показаны на рис. 4 сплошными кривыми. Энергетически взвешенное правило сумм для этих переходов определяется двумя слагаемыми, сумма которых остается практически той же, что и в случае переходов без изменения спина (149).

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МПВ+ПСФ ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОНКРЕТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЛЕКТИВНЫХ СОСТОЯНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР

**Низколежащие состояния**  $^{158}\text{Dy}$  и  $^{168}\text{Er}$ . При описании низколежащих состояний будем исходить из полного гамильтониана типа (5), ограничиваясь остаточным взаимодействием с мультипольностью  $\lambda = 1, 2, 3$ . Кроме того, условие трансляционной инвариантности гамильтониана приводит к появлению дополнительного остаточного диполь-октупольного взаимодействия. Известно [10], что для описания низколежащих квадрупольных и октупольных состояний достаточно учесть изоскалярную часть остаточных квадруполь-квадрупольных и октуполь-октупольных взаимодействий. Большую роль при изучении  $E1$ -переходов между низколежащими состояниями играют хвосты изовекторного дипольного резонанса. Поэтому гамильтониан остаточного взаимодействия имеет вид

$$H_{\text{ост}} = -\frac{1}{2} \sum_{m=-2}^2 \kappa_{2m} \hat{Q}_{2m}^+ Q_{2m} - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} \sum_{m=-1}^1 \kappa_{1m}^{[\tau]} \hat{Q}_{1m}^{[\tau]+} Q_{1m}^{[\tau]} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{m=-3}^3 \kappa_{3m} \hat{Q}_{3m}^+ \hat{Q}_{3m} - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} \sum_{m=-1}^1 \chi_m^{[\tau]} [\hat{Q}_{1m}^{[\tau]+} Q_{3m}^{[\tau]} + \hat{Q}_{3m}^{[\tau]+} \hat{Q}_{1m}^{[\tau]}], \quad (150)$$

где в отличие от (5) введена зависимость силовых констант от проекции  $\mu$  ( $\kappa_{\lambda\mu} = \kappa_{\lambda-\mu}$ ,  $\chi_m = \chi_{-m}$ ). Здесь  $\kappa_{\lambda\mu}^{[\tau]} = \kappa_{\lambda\mu}^{[0]}$  и  $\kappa_{\lambda\mu}^{[1]}$  — изоскалярная и соответственно изовекторная силовые константы. При решении задачи ХФБ для гамильтониана МПВ аппроксимируем среднее поле аксиально деформированным потенциалом Саксона — Вудса с параметрами из [61, 101]. Параметры деформации были получены с помощью метода Струтинского:  $\beta_2 = 0,265$ ,  $\beta_4 = 0,044$  для  $^{158}\text{Dy}$  и  $\beta_2 = 0,284$ ,  $\beta_4 = -0,001$  для  $^{168}\text{Er}$ .

Для решения уравнений ХФБ использовался метод, описанный в [102, 103]. Известно (см., например, [104]), что метод ХФБ без учета проектирования на точное число частиц для гамильтониана МПВ в области угловых моментов, соответствующей исчезновению спаривания, не позволяет получить надежное описание. Поскольку энергетическая щель начинает убывать при спинах  $J \sim 8\hbar$  для  $^{168}\text{Er}$  и  $J \sim 6\hbar$  для  $^{158}\text{Dy}$ , расчет спектра ирраст-линии проводился для этих ядер соответственно до  $J \leq 8\hbar$  и  $J \leq 6\hbar$ .

Зависимость спина  $J$  от частоты вращения на ирраст-линии определяется стандартным образом: уравнения ХФБ решаются при нескольких возрастающих значениях частоты вращения  $\Omega$ , соответственно которым вычисляется  $\langle \Omega | \hat{J}_x | \Omega \rangle$ . Используя условие МПВ  $\langle \Omega | \hat{J}_x | \Omega \rangle = \sqrt{J(J+1)}$ , определяем функцию  $J(\Omega)$ .

Решая уравнения ХФБ и имея в виду симметрии одночастичных операторов в (150), гамильтониан МПВ  $H'$  с остаточным взаимодействием (150) можно записать в виде (20) (см. [50]). Выделение духовых состояний и отыскание решений уравнений ПСФ для всех четырех частей гамильтониана (150) проводится согласно разд. 1.

Значения размерности систем уравнений для гамильтонианов  $H_{(+)}^{(+)}$ ,  $H_{(+)}^{(-)}$ ,  $H_{(-)}^{(+)}$ ,  $H_{(-)}^{(-)}$  соответственно равны 7, 2, 6, 10. Их явный вид можно найти в [50]. Существование духовой моды  $[\theta_x(1), J_x(1)]$  среди решений уравнений ПСФ для гамильтониана  $H_{(+)}^{(+)}$  позволяет определить момент инерции ядра относительно оси  $x$  [см. (32)] с помощью соотношения (70) (ввиду громоздкости формулы мы ее не приводим, см. в [50]). Аналогичное выражение можно получить и для  $g_{N_x}$ . Из условия того, чтобы мода  $(X(1), P_x(1))$  имела нулевое решение уравнений ПСФ для гамильтониана  $H_{(-)}^{(+)}$ , получается выражение для массового параметра  $g_{P_x}$  [см. (34) и (70)]:

$$g_{P_x} = \frac{1}{M} = \frac{1}{2} \frac{S_{F_2^{(+)}F_2^{(+)}}(0) - \frac{1}{2\kappa_{32}}}{\left[ S_{F_2^{(+)}F_2^{(+)}}(0) - \frac{1}{2\kappa_{32}} \right] S_{P_x P_x}(0) - S_{F_2^{(+)}P_x}^2(0)}. \quad (151)$$

Из симметрии однофононной волновой функции гамильтониана (150) относительно операции  $R_x(\pi)$  [см. (76)] следует, что четным значениям полного углового момента  $J$  соответствуют решения уравнений ПСФ гамильтонианов  $H_{(\pm)}^{(+)}$ , нечетным значениям  $J$  — решения уравнений ПСФ гамильтонианов  $H_{(\pm)}^{(-)}$ .

Для сравнения с экспериментальными данными мы использовали следующее определение энергии возбужденного состояния:

$$E_\lambda(J) = E_{\text{ир}}(J_0) + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{Y}_x(J_0)} [J(J+1) - J_0(J_0+1)] + \hbar\omega_\lambda(J_0), \quad (152)$$

где  $J = J_0$  для четных значений спина и  $J = J_0 \pm 1$  для нечетных значений спина;  $\hbar\omega_\lambda(J_0)$  — энергия фонона ПСФ  $O_\lambda^+(\pm) | \Omega_{J_0} \rangle$ ,  $\mathcal{Y}_x(J_0)$  — момент инерции. Следует заметить, что это определение тем точнее, чем выше угловой момент. При малых угловых моментах решения необходимо корректировать [см. замечание на стр. 631].

Результаты расчетов очевидным образом зависят от силовых констант. При их определении использовались следующие требования:

а) выполнение в среднем для гамильтониана (150) условий симметрий (2), что приводит для каждой части полного гамильтониана  $H'$  к условиям самосогласования типа (46) (конкретный вид см. в [50]);

б) поскольку число условий (2) в рассматриваемом случае меньше, чем число силовых констант в (150), некоторые из них определялись по соответствующим экспериментальным энергиям (см. в [50]).

Парные константы  $G_\tau$ , определяемые из условия  $[H, \hat{N}_\tau] = 0$ , которое приводит к соотношению типа (66)

$$G_\tau = \left( \sum_{\mu} \frac{p_{\mu}^{(-)} p_{\mu}^{(-)}}{E_{\mu}} \right)^{-1},$$

приходилось перенормировать для того, чтобы они совпадали с полученными из экспериментальных парных энергий. Отметим, что значения констант при расчетах практически не зависят от спина (см. [50]).

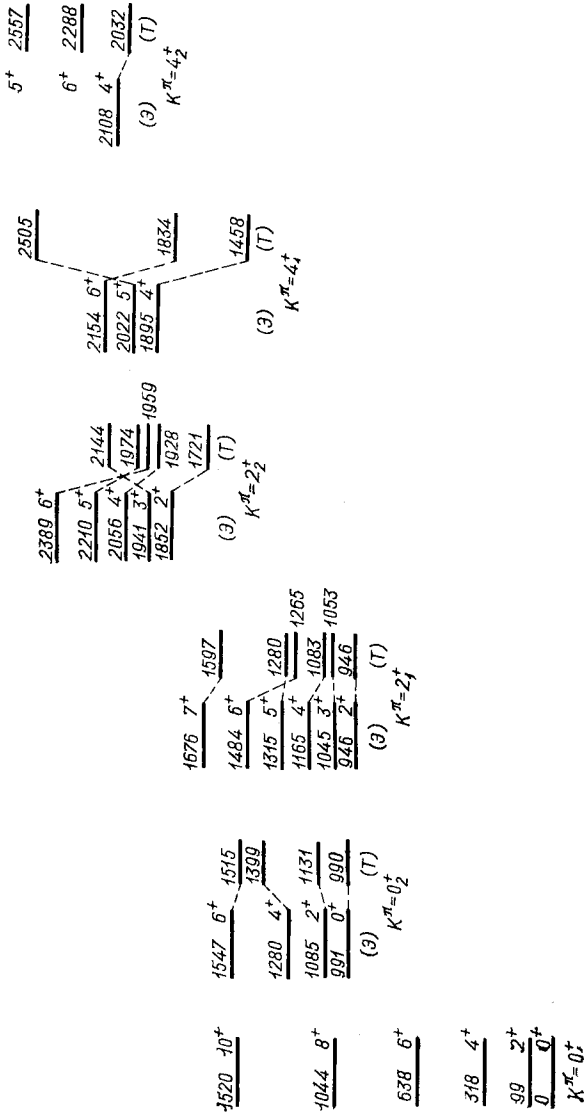


Рис. 5. Сравнение рассчитанных (Т) и экспериментальных (Э) вращательных полос положительной четности для  $^{158}\text{Dy}_{92}$



Сравнение теоретического и экспериментального спектров проведено на рис. 6, 8 для  $^{166}\text{Er}$  и на рис. 5, 7 для  $^{158}\text{Dy}_{92}$ . Для определения соответствия вычисленных и экспериментальных энергий требовалось, чтобы структура фонона, формирующего данную вращательную полосу, медленно менялась со спином. Экспериментальные данные взяты из [105—115]. Из рис. 6 видно, что до энергий  $\sim 2,4$  МэВ практически всем решениям уравнений ПСФ соответствуют экспериментальные уровни. Исключение составляет полоса  $K_{\nu}^{\pi} = 3_{1}^+$  в  $^{166}\text{Er}$ , наблюдаемая в эксперименте [105], для которой в рассматриваемой модели не нашлось теоретического партнера, и поэтому она опущена на рис. 6. В полосах  $K_{\nu}^{\pi} = 3_{2}^{-}, 4_{2}^{-}, 3_{3}^{-}$  и  $4_{3}^{-}$  в  $^{166}\text{Er}$  при  $J = 5\hbar$  также не нашлось теоретических партнеров, соответствующих экспериментальным уровням. В полосе  $K_{\nu}^{\pi} = 4_{1}^{-}$  (рис. 8) в  $^{166}\text{Er}$  наблюдается сдвиг теоретических уровней по отношению к экспериментальным. В связи с этим интересно отметить, что решения уравнений ПСФ, связанные с этой полосой, исчезают из энергетического интервала до 2,4 МэВ, когда в гамильтониане (150)  $\kappa_{lm} = \chi_m = 0$ , т. е. учтено только октуполь-октупольное взаимодействие. По-видимому, природа этой полосы обусловлена дипольным взаимодействием и связью его с вращением. Таким образом, рассматриваемая модель, развитая в рамках метода МПВ + ПСФ, позволяет получить хорошее описание экспериментальных энергий в низколежащей области спектра.

Теоретические значения  $B(E2)$ -переходов в  $^{166}\text{Er}$  и  $^{158}\text{Dy}$  были получены по формулам (91) — (93) и сравнивались с экспериментальными (см. [50]). В расчетах в соответствии с [116] для  $E2$ -переходов  $e_{\text{эф}}^{\lambda=2} = 0,2$  для нейтронов и  $e_{\text{эф}}^{\lambda=2} = 1,2$  для протонов. Абсолютные значения  $B(E2)_{\text{экс}}$  получались из относительных  $B(E2)_{\text{экс}}$  с помощью правил Алаги внутри данной полосы при предположении, что внутренний квадрупольный момент  $Q_0$  для данной полосы совпадает с моментом основного состояния [117] ( $Q_0 = 760$  фм<sup>2</sup> для  $^{166}\text{Er}$  [108] и  $Q_0 = 694$  фм<sup>2</sup> для  $^{158}\text{Dy}$  [114]). Отметим лучшее согласие с экспериментальными  $B(E2)$ -значениями для  $^{158}\text{Dy}$  по сравнению с  $^{166}\text{Er}$ . По-видимому, это в первую очередь обусловлено значительными ангармоническими эффектами в  $^{166}\text{Er}$  [117, 118], учет которых в подходе МПВ + ПСФ означает выход за рамки ПСФ. Интересно, что использованная модель отражает экспериментальный факт ослабления на один-два порядка значений  $B(E2)$ -переходов из  $\beta$ -полосы на основную относительно  $B(E2)$ -переходов из  $\gamma$ -полосы на основную для  $^{166}\text{Er}$  по сравнению с  $^{158}\text{Dy}$ .

Большая разница между отношениями приведенных вероятностей  $E2$ -переходов, идущих из однофононных ( $\beta$  или  $\gamma$ ) на всевозможные (в соответствии с правилами отбора) состояния ираст-линии по сравнению с соответствующими отношениями Алаги свидетельствует о большом  $\Delta K$ -смешивании.

Значения теоретических отношений  $B(E1, I_{\nu} \rightarrow I + 1_{\text{вр}}) / B(E1, I_{\nu} \rightarrow I - 1_{\text{вр}})$  сравнивались с результатами [119], полученными на основе феноменологической модели [120]. При этом

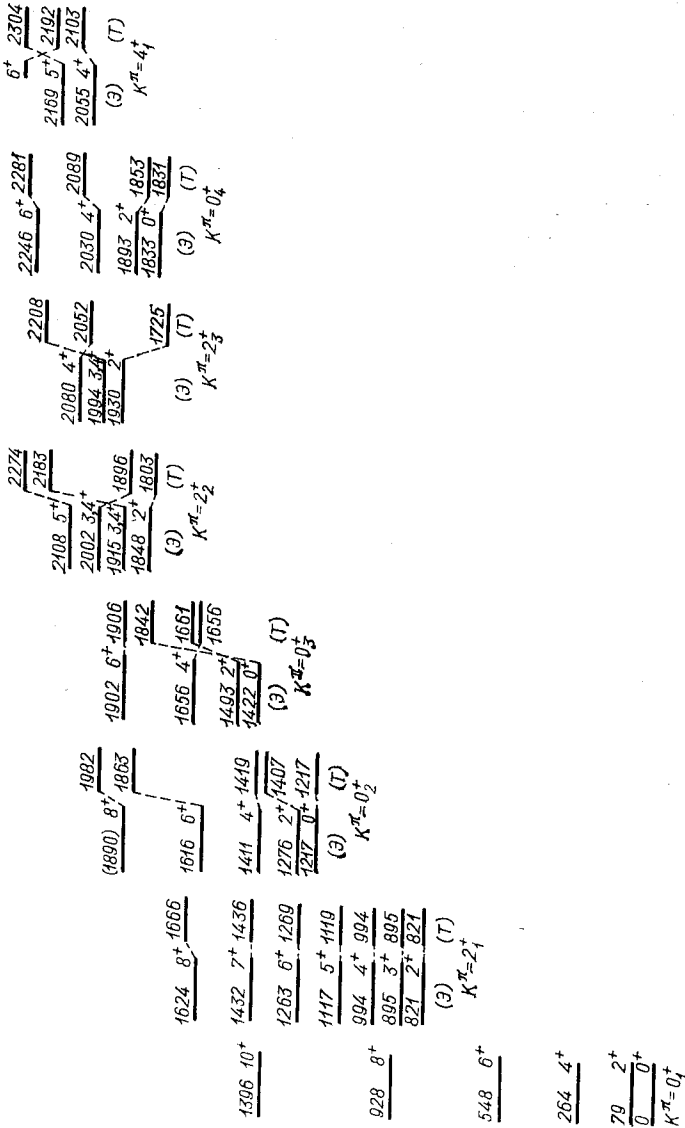


Рис. 6. То же самое, что и на рис. 5 для  ${}_{68}E_{100}$

использовались следующие значения для эффективных зарядов:  $e_{эф}^{\lambda=1} = -0,405$ ,  $e_{эф}^{\lambda=3} = 0,2$  для нейтронов;  $e_{эф}^{\lambda=1} = 0,595$ ,  $e_{эф}^{\lambda=3} = 1,2$  для протонов для  $^{158}\text{Er}$ ;  $e_{эф}^{\lambda=1} = -0,418$ ,  $e_{эф}^{\lambda=3} = 0,2$  для нейтронов,  $e_{эф}^{\lambda=1} = 0,582$ ,  $e_{эф}^{\lambda=3} = 1,2$  для протонов в случае  $^{158}\text{Dy}$ .

Следует отметить, что согласие с экспериментальными вероятностями  $E1$ -переходов хуже, чем для  $E2$ -переходов. Вероятности

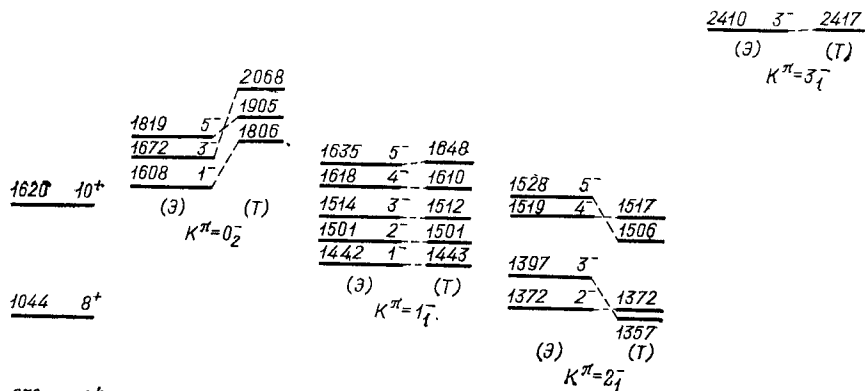


Рис. 7. Сравнение рассчитанных (Т) и экспериментальных (Э) вращательных полос отрицательной четности для  $^{158}\text{Dy}_{92}$

$E1$ -переходов более чувствительны к ангармоническим эффектам, не учитываемым в рамках ПСФ, а также к погрешностям, обусловленным смешиванием состояний с различными сигнатурами при низких спинах.

**Высоковозбужденные состояния (ГДР при высоких спинах).** Простая модель ГДР быстровращающихся ядер была рассмотрена в разд. 2. Здесь в рамках метода МПВ + ПСФ мы исследуем свойства ГДР в реалистической модели. Во-первых, среднее поле аппроксимируем потенциалом Нильссона. Расчеты в приближении МПВ на основе последнего позволяют проследить эволюцию формы быстровращающихся ядер в широком диапазоне значений углового момента и энергий возбуждения [121, 122]. Во-вторых, в реальных условиях эксперимента измеряют усредненные величины, для описания которых мы используем статистическую версию метода МПВ + ПСФ. Впервые такой подход для исследования энергетического спектра квадрупольных возбуждений «нагретых» вращающихся ядер был предложен в [123]. Кроме того, для описания электромагнитных переходов из высоковозбужденных состояний мы используем метод силовой функции, рассмотренный в разд. 1.

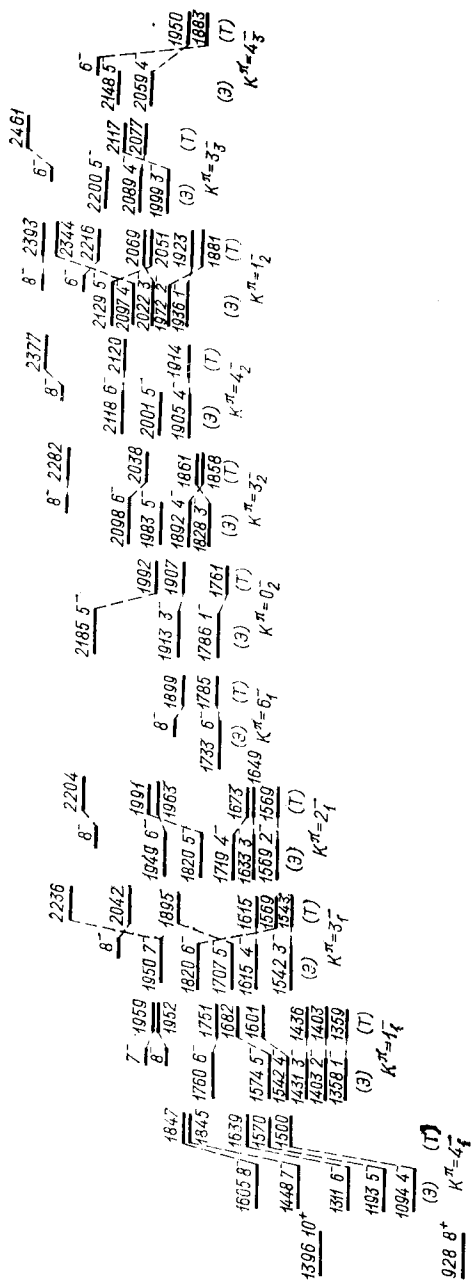


Рис. 8. То же самое, что и на рис. 7, для  $168E_{100}$

Гамильтониан, позволяющий изучать ГДР во вращающихся ядрах, можно записать в виде

$$H' = \sum_{kl} (\epsilon_{kl} c_k^+ c_l + \epsilon_{\bar{k}\bar{l}} c_{\bar{k}}^+ c_{\bar{l}}) - \Omega \hat{J}_x - \frac{1}{2} \kappa (\hat{D}_0^{(-)^2} + \hat{D}_1^{(-)^2} + \hat{D}_1^{(+)^2}), \quad (153)$$

где  $\epsilon_{kl}$  — матричные элементы потенциала среднего поля;  $\Omega$  — угловая частота вращения;  $\kappa$  — константа остаточного изовекторного диполь-дипольного взаимодействия. Операторы  $\hat{D}_{(0)}^{(-)}$ ,  $\hat{D}_{(1)}^{(\pm)}$  выражаются через компоненты  $\hat{Q}_{1m}$  изовекторного дипольного момента (см. приложение А)

$$\hat{Q}_{1m} = \frac{Z}{A} \sum_{k=1}^N r_k Y_{1m}(\Omega_k) - \frac{N}{A} \sum_{k=1}^Z r_k Y_{1m}(\Omega_k). \quad (154)$$

Знак у операторов определяет их сигнатуру. Базисные состояния  $|k\rangle$ ,  $|\bar{k}\rangle$  выбраны как собственные состояния оператора  $\hat{j}_x$ :  $\hat{j}_x |k\rangle = m_k |k\rangle$ ,  $|\bar{k}\rangle = T |k\rangle$  ( $|k\rangle \equiv |nljm\rangle$ ).

Для исследования свойств когерентных возбуждений перейдем к температурному варианту ПСФ, сформулированному в [124], который отличается от описанного в разд. 1 использованием коммутационных соотношений

$$[c_{k_i}^+, c_{\bar{k}_i}^+ c_{l_i}] \approx \langle 0 | [c_{k_i}^+, c_{\bar{k}_i}^+ c_{l_i}] | 0 \rangle = \delta_{k_i l_i} (\bar{n}_k - \bar{n}_l) \quad (155)$$

и числа заполнения имеют вид

$$\bar{n}_k = \langle 0 | c_{k_i}^+ c_{k_i} | 0 \rangle \delta_{k_i k_i} = [1 + \exp(\xi_k/t)]^{-1}, \quad (156)$$

где  $t$  — температура,  $\xi_k = \epsilon_{kk} - \lambda - \Omega(jx)_{kk}$  [71].

Вследствие  $R_x(\pi)$ -симметрии гамильтониана (153) задача ПСФ решается отдельно для фононов положительной и отрицательной сигнатуры. В результате для фононов положительной сигнатуры получим секулярное уравнение

$$F^{(+)}(\omega) = S^{(+)} + \frac{1}{2\kappa} = 0, \quad (157)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S^{(+)} &= \frac{Z^2}{A^2} S_{1n}^{(+)} + \frac{N^2}{A^2} S_{1p}^{(+)}; \\ S_{1\tau}^{(+)} &= \sum_{k>l}^{N_\tau} \frac{\omega_{kl}}{\omega_{kl}^2 - \omega^2} q_{1kl}^{(+)^2} (\bar{n}_l - \bar{n}_k) + \frac{\omega_{\bar{k}\bar{l}}}{\omega_{\bar{k}\bar{l}}^2 - \omega^2} q_{1\bar{k}\bar{l}}^{(+)^2} (\bar{n}_{\bar{l}} - \bar{n}_{\bar{k}}). \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Здесь  $\omega_{kl} = \xi_k - \xi_l$ . Для фононов отрицательной сигнатуры имеем

$$F^{(-)}(\omega) = \left( S_{00} + \frac{1}{2\kappa} \right) \left( S_{11} + \frac{1}{2\kappa} \right) - \omega^2 S_{01} = 0, \quad (159)$$

где величины  $S_{ij}$  определяются соотношениями типа (158) и имеют структуру

$$S_{ii} = \sum_{kl}^{N_\tau} [\omega_{kl} / (\omega_{kl}^2 - \omega^2)] (q_{kl}^i)^2 (\bar{n}_l - \bar{n}_k);$$

$$S_{ij} = \sum_{kl}^{N_\tau} [q_{kl}^i q_{kl}^j / (\omega_{kl}^2 - \omega^2)] (\bar{n}_l - \bar{n}_k).$$

Введем парциальные силовые функции приведенных вероятностей электрических дипольных переходов из однофононных состояний на иррадиацию

$$b(E1, \tau, \omega) = \sum_i B(E1, \omega_i^\lambda, \tau) \rho(\omega - \omega_i^\lambda). \quad (160)$$

Весовая функция  $\rho(\omega - \omega_i)$  определена формулой (97). Используя для расчета вероятности дипольных переходов выражение для приведенного матричного элемента тензорного оператора (80) и следуя схеме, изложенной в разд. 1, для парциальных силовых функций, уже определенных согласно формуле (99), имеем в случае:

а) положительной сигнатуры

$$P_{\tau=0} = 1/\kappa, \quad F^{(+)} \text{ определяется уравнением (157);}$$

б) отрицательной сигнатуры

$$P_{\tau=+1} = [(2\kappa S_{00} + 1)/2\kappa] [2\kappa S_{01}\omega / (2\kappa S_{00} + 1) - 1]^2;$$

$$P_{\tau=-1} = [(2\kappa S_{11} + 1)/2\kappa] [2\kappa S_{01}\omega / (2\kappa S_{11} + 1) + 1]^2$$

и  $F^{(-)}$  определяется уравнением (159).

В расчетах одночастичные энергии во вращающейся системе получались диагонализацией потенциала Нильссона. Равновесные конфигурации  $(\epsilon, \gamma)$ , определяемые из экстремума термодинамического потенциала [121, 122], использовались для расчета парциальных и полной силовых функций. Константа остаточного взаимодействия  $\kappa = 1200A^{-5/3}$  МэВ/фм<sup>2</sup> определялась по экспериментальному положению ГДР.

Для контроля результатов в потенциале Нильссона были опущены члены типа  $\cdot I^2$  и  $\cdot I \cdot s$ . В этом случае аналитическое решение для положений различных ветвей ГДР (см. разд. 2) точно воспроизводилось в расчете. Другим эффективным методом контроля является выполнение правил сумм. В наших расчетах одночастичных энергий связь между различными оболочками отсутствует. Используя осциллятор Эллиота (см. [71]), в котором также отсутствует смешивание конфигурационных пространств из различных оболочек, легко рассчитать энергетически взвешенные правила сумм для дипольных операторов обеих сигнатур

$$\left. \begin{aligned} S_0^{(-)} &= S_0 \alpha A_{z^2}, \quad S_1^{(-)} = S_0 \alpha A_{y^2}, \quad S_1^{(+)} = S_0 \alpha A_{xz}; \\ S_0 &= \frac{3}{8\pi} \frac{\hbar^2}{m} \frac{NZ}{A} e^2. \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

В численных расчетах правил сумм переходов в отсутствие  $1^2$ - и  $1^6$ -членов в потенциале Нильссона отклонение от оценок (161) не превышало 1%.

На рис. 9 показано изменение парциальных силовых функций изовекторных дипольных возбуждений (ИДВ) в зависимости от угловой

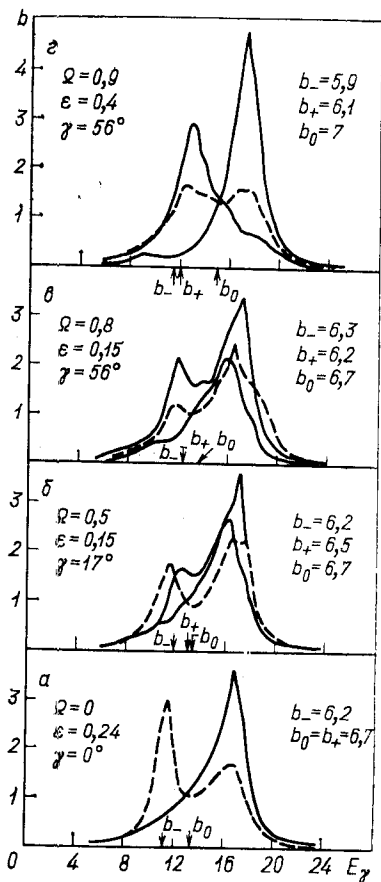


Рис. 9. Парциальные силовые функции для ядра  $^{160}\text{Yb}$  в случае потенциала Нильссона при разных частотах вращения  $\Omega$ , МэВ:

слева от каждого рисунка даны условия расчета, справа — значения силовых функций в случае осциллятора, а соответствующее их положение указано стрелками на энергетической оси. Тонкая линия соответствует силовой функции  $b_{\tau=0}$ , толстая —  $b_{\tau=+}$ , а пунктирная —  $b_{\tau=-}$

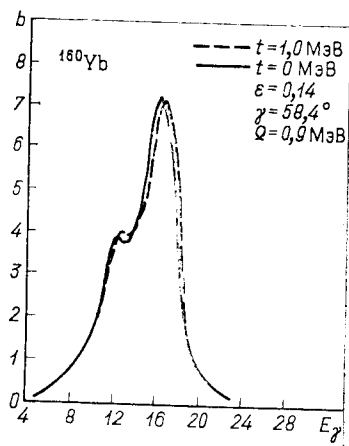


Рис. 10. Полные силовые функции для ядра  $^{160}\text{Yb}$  при разных температурах. Условия расчета и пояснения даны на рисунке

частоты вращения для ядра  $^{160}\text{Yb}$  при  $t = 0$  МэВ. Стрелки и цифры при них указывают на положение максимума силовой функции и соответствующее ее значение в случае осциллятора.

В деформированных ядрах с аксиальной симметрией дипольный резонанс расщепляется на две компоненты. В отсутствие вращения их можно классифицировать обычным образом по проекции углового момента на ось симметрии. На рис. 9, а при  $\Omega = 0$  как для осциллятора, так и для потенциала Нильссона силовые функции двух ветвей ИДВ (силовые функции  $b_{\tau=0}$  и  $b_{\tau=\pm}$ ) ведут себя абсолютно одинаково в зависимости от энергии  $\gamma$ -квантов. Они обусловлены поперечными колебаниями и вместе формируют моду  $K^\pi = 1^-$ . Наиболее

коллективизированные решения силовой функции третьей ветви ИДВ  $b_{\tau=-}$ , обусловленной продольными колебаниями, являются менее жесткими и расположены ниже по энергии. Эта ветвь возбуждений формирует моду  $K^{\pi} = 0^{-}$ .

В реалистическом расчете в отличие от осцилляторных оценок как на ширину силовой функции, так и на положение ее максимумов существенное влияние оказывает наличие в потенциале Нильссона члена, пропорционального  $I^2$ . Максимумы парциальных силовых функций сдвигаются в сторону больших энергий. Кроме того, увеличивается расщепление ветвей ГДР. Например, для ядра  $^{152}\text{Sm}$  эксперимент дает энергии для первого и второго максимумов 12,45 и 15,84 МэВ соответственно. Расчет дает 11,8 и 16,8 МэВ (осцилляторные оценки — 10,8 и 13,8 МэВ соответственно). Наличием члена  $I^2$  обусловлено появление второго максимума в силовой функции  $b_{\tau=-}$  при нулевой частоте вращения. Расчет силовых функций  $b_{\tau=+}$  и  $b_{\tau=-}$  для  $^{160}\text{Yb}$  при тех же условиях, что и на рис. 9, а, в отсутствие  $I^2$  — члена указывает на близкое соответствие осцилляторному результату. Эволюция наиболее коллективизированных решений различных ветвей ИДВ на примере ядра  $^{160}\text{Yb}$  при разных частотах вращения ( $t = 0$  МэВ) указывает на качественное соответствие результатам простой осцилляторной модели. Наиболее коллективизированные решения положительной сигнатуры (силовая функция  $b_{\tau=0}$ ) в режиме вращения вокруг оси симметрии, соответствующем аксиально-сплюснутым формам, сдвигаются в жесткую часть спектра. Следовательно, при быстром вращении вокруг оси симметрии, когда  $\tau$ -проекция углового момента на ось симметрии ядра становится хорошим квантовым числом, в жесткой части спектра фотоизлучения должны преобладать  $\gamma$ -кванты, девозбуждающие ядро без изменения углового момента. Переходы дипольной природы с  $|\Delta I| = 1$ , которые идут с состоянием отрицательной сигнатуры, будут при быстром вращении существенным образом формировать мягкую часть спектра  $\gamma$ -квантов. Сравнение рис. 9, а и г ( $\Omega = 0$  и 0,9 МэВ соответственно) показывает, что вращение заметно влияет на ветвь ИДВ, характеризующуюся силовой функцией  $b_{\tau=+}$ . Наиболее коллективизированные решения силовой функции  $b_{\tau=+}$  при переходе к аксиально-сплюснутому режиму вращения («неколлективное» вращение) сдвигаются в мягкую часть спектра  $\gamma$ -квантов. Таким образом, в режиме неколлективного вращения в мягкой части спектра дипольных  $\gamma$ -квантов будет преобладать  $\gamma$ -кванты, девозбуждающие быстровращающееся ядро с уменьшением углового момента на  $1\hbar$ .

Чем больше деформировано ядро, тем больше расщепление компонент изовекторных дипольных возбуждений, а следовательно, шире область локализации ИДВ, дающих вклад в спектр  $\gamma$ -квантов. Таким образом, при быстром вращении, когда образовавшееся компаунд-ядро сильно деформировано, область локализации ИДВ и соответственно ГДР должна быть больше, чем при небольших угловых моментах.

На рис. 10 показаны полные силовые функции ядра  $^{160}\text{Yb}$  при  $t$ , равном 0 и 1,0 МэВ. Параметры деформации при  $t \neq 0$  взяты из



[122]. «Нагревание» ядра, как и в отсутствие вращения [125], не оказывает существенного влияния на ИДВ и ГДР. Однако температурные эффекты, ослабляя оболочечные эффекты, значительно влияют на эволюцию формы вращающихся атомных ядер [122]. Следовательно, влияние температурных эффектов на ИДВ происходит посредством изменения характеристик среднего поля (параметров деформации), определяющих характер силовых функций ИДВ.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ]

Исследование высокоспиновых состояний атомных ядер — это новая и быстро развивающаяся область ядерной физики низких энергий. Изучение свойств ядер в условиях, отличных для традиционной ядерной спектроскопии, стимулировало появление новых теоретических подходов, одним из которых и является метод МПВ + ПСФ. Его развитие в значительной мере связано с определением симметрий, сохраняющихся при вращении, так как сильное кориолисово смешивание приводит к невозможности обычной классификации ядерных уровней с помощью квантового числа  $K^\pi$ . Сохранение симметрии ядра относительно оси вращения [в случае МПВ — это  $R_x(\pi)$ -симметрия] привело к введению нового квантового числа — сигнатура, с помощью которого удастся понять многие закономерности в экспериментальных данных для вращающихся ядер [15, 126]. Возможность классификации состояний по сигнатуре в теоретическом плане позволила разрешить серьезные технические проблемы при решении уравнений ХФБ в МПВ и далее при решении уравнений ПСФ.

Описанный в данном обзоре метод МПВ + ПСФ, существенным образом использующий понятие сигнатуры, позволяет как качественно, так и количественно исследовать коллективные возбуждения однофононной природы в широком диапазоне значений углового момента и энергий возбуждения. Несмотря на то что метод предназначен для изучения высокоспиновых состояний, описание низколежащих состояний ядер  $^{158}\text{Dy}$  и  $^{168}\text{Er}$  на его основе (см. начало разд. 3) позволяет надеяться на его универсальность. Однако для получения более детальной информации о характере переходов (например, дипольных) необходим, по-видимому, выход за рамки ПСФ или учет в гамильтониане членов более высокого порядка в бозонном разложении \*, что ведет к смешиванию состояний с разной сигнатурой. Важность этих эффектов следует ожидать при описании низкоспиновых состояний, так как сигнатура только при  $I \gg 1$  становится асимптотически хорошим квантовым числом [130]. Качество расчетов в моделях может также улучшиться при учете остаточных взаимодействий, отвечающих точному восстановлению ротационной и трансляционной симметрий полного гамильтониана.

На основе метода МПВ + ПСФ в рамках сравнительно простой модели удастся не только получить положение и зависимость от

\* Выход за рамки ПСФ (учет принципа Паули) в отсутствие вращения изучался в рамках квазичастично-фононной модели [127—129].

квадрупольной деформации состояний ГДР и ГКР при малых спинах, но и проследить изменение свойств этих состояний при вращении. Из результатов анализа следует ожидать, что состояния ГДР менее подвержены влиянию вращения, чем состояния ГКР. Разрушение спаривания при вращении ядра приводит к исчезновению коллективных состояний, существование которых связано со сверхтекучими свойствами ядерного вещества. Поэтому отсутствие в простой модели мягких  $\beta$ - и  $\gamma$ -мод возбуждения при малых спинах вряд ли сильно сказывается на выводах, относящихся к коллективным состояниям при  $I \gg 1$ .

Расчеты свойств ГДР в рамках реалистической модели, несмотря на более сложный характер спектра, находятся в достаточно близком соответствии с предсказаниями простой модели. Поведение изовекторных дипольных возбуждений при вращении в основном определяется эволюцией формы вращающегося ядра или параметров равновесной деформации среднего поля. Последние могут заметно меняться при разрушении спаривания [73] или ослаблении оболочечных эффектов при «нагревании» ядра в отсутствие спаривания [122]. Очевидно, что учет всех этих эффектов является важным при изучении механизмов электромагнитного девозбуждения быстровращающихся ядер.

Авторы выражают искреннюю признательность И. Н. Михайлову за критические замечания и полезные обсуждения по затронутым в обзоре вопросам.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А

##### БОЗОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДНОЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

На языке вторичного квантования каждый одночастичный оператор можно выразить в виде:

$$\hat{G} = \sum_{kl} \{ \langle k | \hat{G} | l \rangle c_k^\dagger c_l + \langle k | \hat{G} | \bar{l} \rangle c_k^\dagger c_{\bar{l}} + \langle \bar{k} | \hat{G} | l \rangle c_{\bar{k}}^\dagger c_l + \langle \bar{k} | \hat{G} | \bar{l} \rangle c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{l}} \}. \quad (A1)$$

В дальнейшем будем предполагать, что данный оператор  $\hat{G}$  имеет следующие симметрии:

$$T\hat{G}T^{-1} = \gamma_T \hat{G}; \quad T = U_T K, \quad T^2 = (-1)^{2J};$$

$$\langle k | \hat{G} | l \rangle^* = r \langle k | \hat{G} | l \rangle;$$

$$R_x(\pi) \hat{G} R_x^{-1}(\pi) = \gamma_x G, \quad G^+ = h \hat{G}, \quad (A2)$$

где  $T$  — оператор временной инверсии [31];  $U_T$  — унитарный оператор;  $K$  — оператор комплексного сопряжения; числа  $\gamma_T = \pm 1$ ,  $r = \pm 1$ ,  $\gamma_x = \pm 1$ ,  $h = \pm 1$  характеризуют симметрию данного оператора относительно соответствующей операции. Вследствие  $R_x(\pi)$ -симметрии ядерного гамильтониана (5), одночастичного и квазичастичного вакуума, комбинируя (7) и (A2), имеем

$$\left. \begin{aligned} \langle \bar{k} | \hat{G} | \bar{l} \rangle &= \gamma_T r \langle k | \hat{G} | l \rangle; \\ \langle \bar{k} | \hat{G} | l \rangle &= -\gamma_T r \langle k | \hat{G} | \bar{l} \rangle; \\ \langle k | \hat{G} | \bar{l} \rangle &= -\gamma_x \langle k | \hat{G} | \bar{l} \rangle; \\ \langle k | \hat{G} | l \rangle &= \gamma_x \langle k | \hat{G} | l \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

в результате чего получаем

$$\begin{aligned}\hat{G} &= \sum_{kl} \langle k | \hat{G} | l \rangle (c_k^+ c_l + \gamma_T r c_k^+ c_l^-) \quad \text{для } \gamma_x = +1; \\ G &= \sum_{kl} \langle k | \hat{G} | \bar{l} \rangle (c_k^+ c_l^- - \gamma_T r c_k^+ c_l) \quad \text{для } \gamma_x = -1.\end{aligned}\quad (\text{A4})$$

В дальнейшем обозначение  $\hat{G}$  будет использовано для операторов  $\hat{G}$  с  $\gamma_x = \pm 1$ . Используя трансформацию Боголюбова (10) и вводя двухквантовые бозоны  $b_{kl}^+$ ,  $b_{k\bar{l}}^+$ ,  $b_{k\bar{l}}^-$  [см. (17)], для операторов  $\hat{G}^{(\pm)}$  ( $\gamma_x = \pm 1$ ) получаем:

$$\begin{aligned}\hat{G}^{(+)} &= \langle \Omega | \hat{G}^{(+)} | \Omega \rangle + G^{(+)}(1) + G^{(+)}(2); \\ \langle \Omega | \hat{G}^{(+)} | \Omega \rangle &= \sum_{jkl} \langle k | \hat{G}^{(+)} | l \rangle (\gamma_T r B_k^j B_l^j + B_k^j B_l^j); \\ G^{(+)}(1) &= \sum_{ij} g_{ij}^{(+)} (b_{ij}^+ + hr b_{i\bar{j}}^-); \\ g_{ij}^{(+)} &= \sum_{kl} \langle k | \hat{G}^{(+)} | l \rangle (A_k^i B_l^j - \gamma_T h B_k^i A_l^j); \\ G^{(+)}(2) &= \sum_{ijkl} \langle k | \hat{G}^{(+)} | l \rangle \{ (A_k^i A_l^j - \gamma_T h B_k^i B_l^j) \sum_m (b_{im}^+ b_{jm} + b_{i\bar{m}}^+ b_{j\bar{m}}) + \\ &\quad + (\gamma_T r A_k^i A_l^j - hr B_k^i B_l^j) \sum_m (b_{i\bar{m}}^+ b_{j\bar{m}}^- + b_{i\bar{m}}^+ b_{j\bar{m}}) \}\end{aligned}\quad (\text{A5a})$$

и для  $\hat{G}^{(-)}$  ( $\gamma_x = -1$ )

$$\begin{aligned}\hat{G}^{(-)} &= G^{(-)}(1) + G^{(-)}(2); \\ G^{(-)}(1) &= -\frac{i}{2} \sum_{ij} \{ g_{ij}^{(-)} (b_{ij}^+ - hr b_{i\bar{j}}^-) - \gamma_T r g_{i\bar{j}}^{(-)} (b_{i\bar{j}}^+ - hr b_{i\bar{j}}^-) \}; \\ g_{ij}^{(-)} &\equiv \sum_{kl} \langle k | \hat{G}^{(-)} | \bar{l} \rangle (A_k^i B_l^j + \gamma_T h A_k^i B_l^j); \\ g_{i\bar{j}}^{(-)} &\equiv \sum_{kl} \langle k | \hat{G}^{(-)} | \bar{l} \rangle (\gamma_T h A_k^i B_l^j + A_k^i B_l^j); \\ G^{(-)}(2) &= i \sum_{ijkl} \langle k | \hat{G}^{(-)} | \bar{l} \rangle \{ (A_k^i A_l^j + \gamma_T h B_k^i B_l^j) \sum_m (b_{i\bar{m}}^+ b_{j\bar{m}}^- - b_{i\bar{m}}^+ b_{j\bar{m}}) + \\ &\quad + i hr (\gamma_T h A_k^i A_l^j + B_k^i B_l^j) \sum_m (b_{i\bar{m}}^+ b_{j\bar{m}}^- - b_{i\bar{m}}^+ b_{j\bar{m}}) \}.\end{aligned}\quad (\text{A5б})$$

В (A5) символы  $G^{(\pm)}(1)$  и  $G^{(\pm)}(2)$  обозначают линейную и квадратичную по бозонам части данного оператора  $\hat{G}^{(\pm)}$ . Величины  $g_{ij}^{(\pm)}$  и  $g_{i\bar{j}}^{(\pm)}$  — квазичастичные матричные элементы оператора  $\hat{G}^{(\pm)}$ . Из (A5) следует, что операторы  $\hat{G}^{(-)}$  отрицательной сигнатуры имеют нулевые средние значения по квазичастичному вакууму  $|\Omega\rangle$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор О., Мотгельсон Б. Структура атомного ядра. Т. 2: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 664 с.
2. Alder K. e. a. — Rev. Mod. Phys., 1956, v. 28, p. 432—542.
3. Бриансон Ш., Михайлов И. Н. — ЭЧАЯ, 1982, т. 13, с. 245—299.

4. Бор О., Моттelson Б.— В кн.: Проблемы современной физики. Вып. 9: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 146 с.
5. De Voigt M.J.A., Dudek J., Szymanski Z.— Rev. Mod. Phys., 1983, v. 55, p. 949—1046.
6. Szymanski Z. Fast Nuclear Rotation. Oxford University Press, Oxford, 1983. 235 p.
7. Ring P., Schuck P. The Nuclear Manybody Problem. N.Y.: Springer-Verlag, 1980. 717 p.
8. Зелевинский В. Г. Ядерное вращение и высокие вращательные состояния. Лекции МИФИ. М.: изд. МИФИ, 1974. 97 с.
9. Павличенков И. М.— УФН, 1981, т. 133, с. 193—222.
10. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971. 559 с.
11. Bohr A., Mottelson B. Proc. Intern. Conf. Nuclear Structure, Tokyo, 1977; J. Phys. Soc. Japan, 1978, vol. 44, Suppl., p. 157—172.
12. Михайлов И. Н. и др.— ЭЧАЯ, 1977, т. 8, с. 1338—1399.
13. Мюнхов Л., Шульц Х.— ЭЧАЯ, 1981, т. 12, с. 1001—1021.
14. Inglis D. R.— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 1059—1065; Ibid., 1955, v. 97, p. 701—706.
15. Bengtsson R., Frauendorf S.— Nucl. Phys. A., 1979, v. 327, p. 139—171.
16. Newton J.O. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 1383—1386.
17. Liotta R.J., Sorensen R.A.— Nucl. Phys. A., 1978, v. 297, p. 136—162.
18. Marshalek E.R.— Nucl. Phys. A., 1976, v. 266, p. 317—336.
19. Михайлов И. Н., Янссен Д.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1977, т. 41, с. 1576—1586.
20. Беляев С. Т., Зелевинский В. Г.— ЯФ, 1970, т. 11, с. 741—759.
21. Zelevinsky V. G. Supp. Progr. Theor. Phys., 1983, v. 74—75, p. 252—270; Nucl. Phys. A., 1980, v. 344, p. 109—136.
22. Михайлов И. Н., Наджаков Э., Караджов Д.— ЭЧАЯ, 1973, т. 4, с. 311—370.
23. Bengtsson R., Garrett J. D. Preprint Lund-MPh-84/18, 1984. 146p.
24. Cwiok S., Kvasil J., Choriev B.— J. Phys. G., 1984, v. 10, p. 903—916.
25. Herold H., Ruder H.— J. Phys. G., 1979, v. 5, p. 341—350; Ibid., p. 351—357; p. 907—913; 1980, v. 6, p. 1347—1358; Ibid., p. 1359—1374.
26. Ryatov N. I., Salamov D.L.— Nucleonica, 1977, v. 22, p. 127—141.
27. Пальчик В. В., Пятов Н. П.— ЯФ, 1981, т. 33, с. 637—644.
28. Цвек С. Сообщение ОИЯИ P4-80-631. Дубна, 1980, 15 с.
29. Kvasil J., Cwiok S., Choriev B.— Z. Phys., 1981, v. A303, p. 313—319.
30. Marshalek E. R.— Nucl. Phys. A., 1977, v. 275, p. 416—444.
31. Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра. Т. 1.: Пер. с англ. М.: Мир. 1971. 456 с.
32. Goodman A. L.— Nucl. Phys. A., 1974, v. 230, p. 466—476.
33. Goodman A. L.— Nucl. Phys. A., 1976, v. 265, p. 113—141.
34. Leander G.A.e.a.— Nucl. Phys. A., 1982, v. 388, p. 452—476.
35. Leander G.A., Sheline R.K.— Nucl. Phys. A, 1984, v. 413, p. 375—415.
36. Nazarewicz W.e.a.— Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, p. 1272—1275.
37. Nazarewicz W.e.a. Preprint Lund-MPh-84/5, 1984. 25 p.
38. Frauendorf S., Pashkevich V.V.— Phys. Lett. B, 1984, v. 141, p. 23—27.
39. Nazarewicz W., Olanders P. Preprint Lund MPh-84/11, 1984. 42 p.
40. Квасил Я., Назмитдинов Р. Г. Сообщения ОИЯИ P4-84-694, P4-84-721. Дубна, 1984; Nucl. Phys. A., 1985, v. 439, p. 86—116.
41. Соловьев В. Г.— ЭЧАЯ, 1978, т. 9, с. 580—622.
42. Goodman A. L. Hartree-Fock Bogoliubov Theory with Applications to Nuclei.— In: Advances in Nuclear Physics, v. 11, 1979, p. 263—366.
43. Marshalek E.R.— Nucleonica, 1978, v. 23, p. 409—460.
44. Janssen D., Mikhailov I.N.— Nucl. Phys. A., 1979, v. 318, p. 390—412.
45. Janssen D.e.a.— Phys. Lett. B., 1978, v. 79, p. 347—350.
46. Egido J., Mang H.J., Ring P.— Nucl. Phys. A., 1980, v. 339, p. 390—414; Ibid., 1980, v. 341, p. 229—252.
47. Molina H.L., Nazmitdinov R.G. Proc. of XVIII Winter School Bielsko-Bialo, Poland, 1980, p. 162—176.
48. Акбаров А. и др. Сообщение ОИЯИ P4-12772. Дубна, 1979. 16 с.

49. Акбаров А. и др.— ЯФ, 1981, т. 33, с. 1480—1493.
50. Квасил Я. и др.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1984, т. 48, с. 844—856.
51. Kurasawa H. Progr. Theor. Phys., 1980, v. 64, p. 2055—2075; 1981, v. 66, p. 1317—1327; 1982, v. 68, p. 1594—1607.
52. Shimizu Y.R., Matsuyanagi K.— Progr. Theor. Phys., 1983, v. 70, p. 144—162; 1984, v. 71, p. 960—972; 1984, v. 72, p. 1017—1035.
53. Banerjee B., Mang H.J., Ring P.— Nucl. Phys. A., 1973, v. 215, p. 366—382.
54. Mang H.J.— Phys. Rep. C., 1975, v. 18, p. 327—368.
55. Hamamoto I.— Nucl. Phys. A., 1975, v. 271, p. 15—28.
56. Neergaard K., Pashkevich V.V., Frauendorf S.— Nucl. Phys. A, 1976, v. 262, p. 61—90.
57. Andersson G.e.a.— Nucl. Phys. A, 1976, v. 268, p. 205—256.
58. Chen Y.S., Frauendorf S.— Nucl. Phys. A, 1983, v. 393, p. 135—157.
59. Egido J.L., Ring P.— Nucl. Phys. A., 1984, v. 423, p. 93—120.
60. Айзенберг И., Грайнер В. Микроскопическая теория ядра: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1976. 488 с.
61. Dudek J.e.a.— J. Phys. G., 1979, v. 5, p. 1359—1381.
62. Hilton R.R. Proc. of Extended Seminar on Heavy Ions, High Spin States and Nucl. Structure, Trieste, 1973, IAEA, v. 11, p. 227—239.
63. Nissimov H., Unna I.— Nucl. Phys. A, 1969, v. 124, p. 609—623.
64. Gloeckner D.H., Lawson R.D.— Phys. Lett. B, 1974, v. 53, p. 313—318.
65. McGrory J.B., Wildenthal B.H.— Phys. Lett. B, 1975, v. 60, p. 5—8.
66. Meyer-ter-Vehn J.— Z. Phys. A, 1979, v. 289, p. 319—323.
67. Bose S., Krumlinde J., Marshalek E.R.— Phys. Lett. B, 1974, v. 53, p. 136—140.
68. Chu S.Y.e.a.— Phys. Rev. C, 1975, v. 12, p. 1017—1034.
69. Mikhailov I.N., Janseen D.— Phys. Lett. B, 1978, v. 72, p. 303—306.
70. Игнатюк А. В., Михайлов И. Н.— ЯФ, 1981, т. 33, с. 919—927.
71. Михайлов И. Н., Назмитдинов Р. Г., Федоткин С. Н.— ЯФ, 1983, т. 38, с. 24—35.
72. Fedotkin S.N., Mikhailov I.N., Nazmitdinov R.G.— Phys. Lett. B, 1983, v. 121, p. 15—20.
73. Ring P.e.a.— Nucl. Phys. A, 1984, v. 419, p. 261—294.
74. Квасил Я. и др. ОИЯИ Р4-84-488, Дубна, 1984. 19 с.
75. Квасил Я. и др. Сообщение ОИЯИ Р4-84-695, Дубна, 1984. 16 с.
76. Kvasil J.e.a.— Czech. J. Phys. B, 1984, v. 34, p. 1179—1180.
77. Михайлов И. Н. Молина Х. Л., Назмитдинов Р. Г.— ТМФ, 1980, т. 42, с. 253—261.
78. Михайлов И. Н., Назмитдинов Р. Г. и др.— В сб.: XV Совецание по ядерной спектроскопии и теории ядра. Д6-11574. Дубна, 1978, с. 11—14.
79. Marshalek E.R., Weneser J.— Ann. Phys., 1969, v. 53, p. 569—624.
80. Михайлов И. П., Молина Х. Л., Назмитдинов Р. Г. Сообщение ОИЯИ, Р4-12773. Дубна, 1979, 9 с.
81. Kvasil J.e.a.— Czech. J. Phys. B, 1979, v. 29, p. 843—856.
82. Квасил Я. и др. Сообщение ОИЯИ Р4-84-638, Дубна, 1984, 13 с.
83. Михайлов И. Н. Сообщение ОИЯИ Р4-7862, Дубна, 1974. 14 с.
84. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975, 439 с.
85. Marshalek E.R.— Phys. Rev. C, 1975, v. 11, p. 1426—1431.
86. Беляев С. Т., Зелевинский В. Г.— ЯФ, 1972, т. 16, с. 1195—1208; т. 17, с. 525—539.
87. Акбаров А. и др. Сообщение ОИЯИ Р4-80-218. Дубна, 1980. 10 с.
88. Малов Л. А., Нестеренко В. О., Соловьев В. Г.— ТМФ, 1977, т. 32, с. 134—143.
89. Malov L.A., Soloviev V.G.— Nucl. Phys. A, 1976, v. 270, p. 87—99.
90. Акбаров А. и др. Сообщение ОИЯИ Р4-80-665, Дубна, 1980. 8 с.
91. Пятов Н.И. Сообщение ОИЯИ Р4-8208, Р4-8380. Дубна, 1974. 18 с.
92. Базнат М. И., Пятов Н. И.— ЯФ, 1975, т. 21, с. 708—719.
93. Пятов Н. И. Материалы XI зимней школы ЛИЯФ, 1976, ч. 1, с. 156—171.
94. Пальчик В. В., Пятов Н. И. ОИЯИ Р4-12892, Дубна, 1979. 14 с.

95. Valatin J.G.— Proc. R. Soc. A, 1956, v. 238, p. 132—141.
96. Ripka G., Blaizot J.B., Kassis N. Heavy Ions High Spin States and Nuclear Structure, Vienna, IAEA, 1975, v. 1, p. 445—491.
97. Зелевинский В. Г.— ЯФ, 1975, т. 22, с. 1085—1095.
98. Neergard K.— Phys. Lett. B, 1982, v. 110, p. 7—10.
99. Cohen S., Plasil F., Swiatecki W.J.— Ann. Phys., 1974, v. 82, p. 557—596.
100. Mikhailov I.N., Balbutsev E.B., Briancon Ch.— In: Nuclear collective dynamics. Poiana Brasov, Romania, 1982, p. 263—308.
101. Dudek J., Werner T.— J. Phys. G., 1978, v. 4, p. 1543—1561.
102. Cwiok S., Dudek J., Szymanski Z.— Phys. Lett. B, 1978, v. 76, p. 263—266.
103. Cwiok S., Dudek J., Szymanski Z. Acta Phys. Polon B, 1978, v. 9, p. 725—740.
104. Cwiok S.e.a.— In: Proc. of XVI Winter School Bielsko-Bialo, Poland, 1978, v. 2, p. 588—600.
105. Davidson W.F.e.a.— J. Phys. G., 1981, v. 7, p. 455—528.
106. Gunther G.E.e.a.— Phys. Rev., 1967, v. 153, p. 1297—1310.
107. Koch H.R.— Z. Phys., 1966, v. 192, p. 142—154.
108. Greenwood L.R.— Nucl. Data Sheets, 1974, v. 11, p. 385—447.
109. Бегжанов Р. Б., Белецкий В. М. Гамма-спектроскопия атомных ядер. Ташкент: ФАН, 1980. 102 с.
110. Anderson D.L.e.a.— Phys. Rev. C., 1978, v. 18, p. 383—400.
111. Ruth T.J., Brenner D.S.— Phys. Rev. C, 1975, v. 11, p. 974—986.
112. Абдуразаков А. А. и др.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1968, т. 32, с. 749—763.
113. Tuli J.K.— Nucl. Data Sheets, 1974, v. 12, p. 245—304.
114. Ronningen R.M.e.a.— Phys. Rev. C, 1982, v. 26, p. 97—106.
115. Grottdal T.e.a.— Nucl. Phys. A, 1968, v. 110, p. 385—399.
116. Григорьев Е. П., Соловьев В. Г. Структура четных деформированных ядер. М.: Наука, 1974. 304 с.
117. Bohr A., Mottelson S. — Phys. Scripta, 1982, v. 25, p. 28—36.
118. Dumitrescu T.S., Hamamoto I.— Nucl. Phys. A, 1982, v. 383, p. 205—223.
119. Михайлов И. Н., Усманов П. Н., Чариев М. М. ОИЯИ Р4-84-475. Дубна, 1984. 10 с.
120. Михайлов И. Н. и др.— ЯФ, 1983, т. 38, с. 297—306.
121. Ignatyuk A.V.e.a.— Phys. Lett. B, 1978, v. 76, p. 543—546.
122. Ignatyuk A.V.e.a.— Nucl. Phys. A, 1980, v. 346, p. 191—215.
123. Игнатюк А. В., Михайлов И. Н.— ЯФ, 1979, т. 30, с. 665—677.
124. Игнатюк А. В.— ЯФ, 1975, т. 21, с. 20—30.
125. Базнат М. И., Игнатюк А. В., Пятов Н. И.— ЯФ, 1979, т. 30, с. 949—962.
126. Chen Y.S., Frauendorf S., Leander G.A.— Phys. Rev. C, 1983, v. 28, p. 2437—2445.
127. Jolos R.V., Molina L., Soloviev V.G.— Z. Phys. A, 1980, v. 295, p. 147—152.
128. Soloviev V.G., Nesterenko V.O., Bastrukov S.I.— Z. Phys. A, 1983, v. 309, p. 353—361.
129. Soloviev V.G., Shirikova N.Yu.— Z. Phys. A, 1981, v. 301, p. 263—269.
130. Михайлов И. Н. ОИЯИ Р4-11424. Дубна, 1978. 26 с.