

# ТУННЕЛИРОВАНИЕ В РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ: ЕВКЛИДОВ И ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОДЫ

*А. С. Гончаров, А. Д. Лунде*

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, Москва

Обсуждается теория распада ложного вакуума в мире де Ситтера и в раздувающейся Вселенной, а также теория рождения Вселенной «из ничего». Поясняются причины, по которым туннелирование в раздувающейся Вселенной отличается от туннелирования в мире де Ситтера и не может быть полностью однородным. Показано, что в ряде важных случаев евклидов подход должен быть существенно модифицирован или вообще неприменим для описания туннелирования в расширяющейся Вселенной и для описания квантового рождения Вселенной. Развита гамильтонов подход для описания процессов туннелирования с учетом расширения Вселенной. Результаты этого метода сравниваются с результатами, полученными с помощью евклидова подхода.

We discuss the theory of the false vacuum decay in de Sitter space and in the inflationary universe, and also the theory of the universe creation «from nothing». This explained why tunneling in the inflationary universe differs from that in de Sitter space and cannot be exactly homogeneous. It is shown that in several important cases the Euclidean approach should be considerably modified or is absolutely inapplicable for the description of tunneling in the expanding universe and of the process of the quantum creation of the universe. The Hamiltonian approach to the theory of tunneling in expanding universe is developed. The results obtained by this method are compared with the results obtained by the Euclidean approach.

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы появилось много работ, посвященных туннелированию с учетом расширения Вселенной [1—11]. Интерес к этому вопросу был вызван двумя обстоятельствами. Во-первых, теория туннелирования из переохлажденного «вакуумного» состояния во время высокотемпературных фазовых переходов в ранней Вселенной была одним из необходимых элементов сценария раздувающейся Вселенной [12—14]. Во-вторых, возник вопрос: не могла ли вся наша Вселенная возникнуть в процессе туннелирования «из ничего» или из какой-то «другой Вселенной» [15—23]? Острота первого вопроса сейчас несколько смягчилась, так как было понято, что сценарий раздувающейся Вселенной гораздо проще может быть реализован без всякого обращения к теории туннелирования [24, 25], и даже без всякого обращения к теории высокотемпературных фазовых переходов [26]. Тем не менее вопрос о туннелировании в расширяющейся

Вселенной продолжает оставаться важным и интересным не только для развития сценария раздувающейся Вселенной и сценария квантового рождения Вселенной, но и для общего развития нашего понимания квантовых процессов в космологии.

Изучаемая задача чрезвычайно сложна, и ее анализ требует одновременного понимания квантовой теории поля и общей теории относительности в различных, зачастую довольно нетривиальных ситуациях, в которых стандартные методы, разработанные ранее, не работают. По этой причине около половины работ о туннелировании в расширяющейся Вселенной содержали ошибки, в то время как правильные результаты, полученные в значительной части остальных работ на эту тему, при более внимательном рассмотрении оказывались не связанными непосредственно с изучаемыми в этих работах проблемами. В результате в литературе сейчас кроме правильных результатов существует большое количество утверждений, касающихся туннелирования в расширяющейся Вселенной, которые являются либо вполне неправильными, либо не вполне правильными, либо правильными, но не относящимися к делу и т. д. Настоящая работа возникла как попытка разобраться в создавшейся ситуации и, по возможности, разработать методы, адекватные изучаемой задаче.

Стандартный подход к туннелированию в квантовой теории поля основывается на наблюдении, что туннелирование в большинстве изученных до сих пор случаев можно представить как движение с мнимым импульсом или в мнимом времени. В этих случаях изучение туннелирования сводится к решению задачи о движении в евклидовом пространстве. Практически все работы по туннелированию в расширяющейся Вселенной (за исключением недавней работы А. А. Старобинского [27, 28]) основывались именно на использовании упомянутого евклидова подхода. Между тем евклидов подход применим для описания туннелирования далеко не всегда. Простейшим примером является задача о движении частицы в плоскости  $(x, y)$  в потенциале  $V(x, y)$ , который имеет вид барьера лишь в направлении  $x$ . В этом случае частица, налетающая на барьер, туннелирует в направлении  $x$ , но ничто не мешает ей двигаться по классической траектории в направлении  $y$ . Для решения этой задачи нельзя просто переходить к мнимому времени (к мнимому импульсу), а нужно честно решать уравнение Шредингера для волновой функции  $\Psi(x, y)$  с учетом того, что некоторые компоненты импульса частицы могут приобрести мнимую часть [29]. Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении туннелирования в расширяющейся Вселенной, где увеличение масштабного фактора Вселенной  $R$  является классически разрешенным, и поэтому в определенных случаях процесс перестройки скалярного поля  $\phi$  может осуществляться без одновременного туннелирования и по  $\phi$ , и по  $R$ . В такой ситуации евклидов подход становится неприменимым, и вместо него приходится использовать гораздо более сложный подход, основанный на реше-

нии уравнения Шредингера — Уилера — Де Витта для волновой функции Вселенной  $\Psi(a, \varphi)$ .

Можно было бы ожидать, что соответствующие проблемы исчезнут при изучении процессов, при которых классическая эволюция масштабного фактора  $R$  тоже запрещена, что имеет место, например, в процессе квантового рождения Вселенной [15—23]. Однако и в этом случае наивное использование евклидова подхода может привести к ошибочным результатам. Причина этого состоит в некоторой нестандартности квантования масштабного фактора  $R$ , который в отличие от обычных физических полей, имеет отрицательную энергию [19—23].

Таким образом, евклидов подход, имеющий огромную эвристическую ценность и очень удобный для решения целого ряда важных

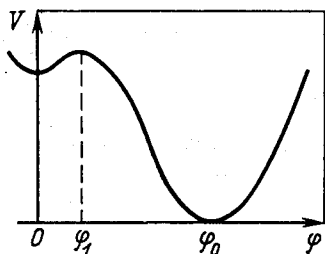


Рис. 1. Вид эффективного потенциала  $V(\varphi)$  с ложным вакуумом  $\varphi = 0$

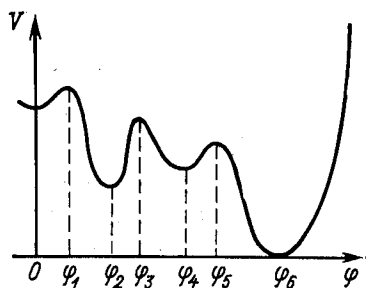


Рис. 2. Потенциал с несколькими ложными вакуумами  $\varphi = 0, \varphi_2, \varphi_4$

и интересных задач [1, 30, 31], не является «абсолютным оружием» и должен быть дополнен другими методами исследования. Этот вывод является одним из основных результатов нашей работы.

Как мы уже говорили, первоначальной целью нашего исследования было разработать теорию туннелирования в раздувающейся Вселенной. Наиболее известный результат, полученный к настоящему времени в этой области, принадлежит Хоукингу и Моссу [5]. Эти авторы рассмотрели процесс туннелирования во Вселенной с плотностью энергии вакуума  $V(\varphi)$ , где  $V(\varphi)$  — эффективный потенциал скалярного поля  $\varphi$ . В изображенном на рис. 1 случае туннелирование идет из точки  $\varphi = 0$ . Согласно [5] туннелирование осуществляется в точку экстремума  $V(\varphi)$  при  $\varphi = \varphi_1$ , а вероятность туннелирования в единице объема за единицу времени пропорциональна \*

$$P \sim \exp \left[ \frac{3M_P^4}{8\pi} \left( \frac{1}{V(\varphi_1)} - \frac{1}{V(0)} \right) \right]. \quad (1)$$

\* Всюду в статье используется система единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ , а планковская масса  $M_P$  равна  $G^{-1/2} \equiv (k/8\pi)^{-1/2}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная.

К сожалению, в [5] вывод формулы (1) отсутствовал: было сказано лишь, что этот результат можно получить с помощью евклидова подхода, аналогично тому, как это делалось Колеманом и де Луччия [1]. Кроме того, в [5] вовсе не обсуждались пределы применимости формулы (1). Между тем, например, в теории с потенциалом  $V(\varphi)$ , изображенным на рис. 2, туннелирование согласно (1) должно было бы идти из точки  $\varphi = 0$  в любой из экстремумов потенциала  $\varphi$  с большей вероятностью, чем в ближайший экстремум  $\varphi = \varphi_1$ . Очевидно, что такой вывод являлся бы физически неправильным. Поэтому вопрос о справедливости и пределах применимости формулы (1) требует тщательного анализа.

Еще больше недоразумений возникло при физической интерпретации формулы (1). Поскольку речь шла об одновременном туннелировании во всей Вселенной в точку  $\varphi = \varphi_1$ , возникающее при этом поле должно было бы быть строго однородным во всей Вселенной [5]. Этот вывод, «подтвержденный» впоследствии в ряде работ [6, 7], подвергся критике одним из авторов настоящей статьи в [32], где было отмечено, что вероятность однородного туннелирования в раздувающейся Вселенной является чрезвычайно сильно подавленной. Этот вопрос подробно обсуждается в настоящей работе. В дальнейшем Хоукинг и Мосс заметили, что формула (1) должна относиться к вероятности туннелирования, которое кажется однородным в масштабе горизонта в мире де Ситтера, т. е. на расстояниях  $l \gtrsim H^{-1}$ , где постоянная Хаббла  $H = \sqrt{\frac{8\pi V(\varphi)}{3M_p^2}}$  [9]. До последнего времени их замечание, как и сама формула (1), оставалось недоказанным. Лишь совсем недавно Старобинскому удалось обосновать правильность этого утверждения для частного случая потенциала  $V(\varphi)$ , изображенного на рис. 1, при условии  $\left| \frac{d^2 V(\varphi)}{d\varphi^2} \right| \ll H^2$  [27, 28]. В некоторых других случаях результат Хоукинга и Мосса является неправильным.

Настоящая работа, будучи независимым исследованием, может рассматриваться в то же время как дополнение к обзору современного состояния сценария раздувающейся Вселенной [20].

Обсуждение теории туннелирования в пространстве Минковского и в расширяющейся Вселенной содержится в первых пяти разделах нашей работы. В разд. 1 обсуждается теория распада ложного вакуума (теория туннелирования в квантовой теории поля) в обычном пространстве Минковского, т. е. без учета гравитационных эффектов. Изложение строится на основе гамильтонова подхода, который в данном простом случае оказывается эквивалентным евклидову подходу.

В разд. 2 обсуждаются уравнения движения, вопрос об устойчивости и понятие эффективного потенциала в расширяющейся Вселенной. В разд. 3 обсуждается ряд попыток свести задачу о туннелировании в расширяющейся (раздувающейся) Вселенной к решен-

ной проблеме о туннелировании в мире Минковского. В разд. 4 описан евклидов подход к вопросу о туннелировании в мире де Ситтера, предложенный Колеманом и де Луччия [1], анализируются (и обобщаются) результаты Хоукинга и Мосса, касающиеся однородного туннелирования в мире де Ситтера, и обсуждается вопрос о применимости этих результатов к теории раздувающейся Вселенной. В разд. 5 развит гамильтонов подход к проблеме туннелирования в раздувающейся Вселенной, обсуждается альтернативный подход к этой проблеме, развитый Старобинским, и результаты обоих подходов сравниваются с результатами евклидова подхода. В разд. 6 рассматривается проблема квантового рождения Вселенной за счет туннелирования из состояния с масштабным фактором  $a = 0$ . Наконец, в заключении подводятся основные итоги нашего исследования.

В статье имеются также два приложения. В приложении А мы напоминаем основные сведения о свойствах мира де Ситтера, которые часто используются в основном тексте статьи. В приложении Б содержится краткий обзор сценария раздувающейся Вселенной, знание которого желательно для более полного понимания цели данной работы и физической постановки задачи, а также для понимания тонких различий, возникающих при описании туннелирования в мире де Ситтера и во Вселенной Фридмана на стадии ее экспоненциального расширения.

### 1. ОБРАЗОВАНИЕ ПУЗЫРЬКОВ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Фазовый переход из метастабильного состояния  $\varphi = 0$  в стабильное состояние  $\varphi \neq 0$ , отвечающее абсолютному минимуму эффективного потенциала  $V(\varphi)$ , осуществляется путем рождения и последующего расширения пузырьков поля  $\varphi \neq 0$ . Прежде чем описывать туннелирование из состояния  $\varphi = 0$  с образованием пузырьков поля  $\varphi$  в кривом пространстве, напомним основные факты, касающиеся образования пузырьков в обычном пространстве Минковского.

Пусть система описывается функционалом действия

$$S = \int dt d^3x \left[ -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] \quad (2)$$

[где  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$  — метрика пространства Минковского]. Состояние системы можно описывать вектором состояния, являющимся функционалом  $\Phi[\varphi(\mathbf{x})]$  от  $\varphi(\mathbf{x})$ . В этом (координатном) представлении каноническим переменным  $\varphi(\mathbf{x})$  (координаты) и  $\pi(\mathbf{x})$  (сопряженные им импульсы) соответствуют после квантования операторы  $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$  и  $\hat{\pi}(\mathbf{x})$  (мы их не будем помечать привычной шляпкой — недоразумений это не вызовет), действующие на вектор состояния  $\Phi[\varphi(\mathbf{x})]$  по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \Phi[\varphi(\mathbf{x})] &= \varphi(\mathbf{x}) \Phi[\varphi(\mathbf{x})], \\ \hat{\pi}(\mathbf{x}) \Phi[\varphi(\mathbf{x})] &= \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \Phi[\varphi(\mathbf{x})]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Изменение вектора состояния со временем определяется уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t[\varphi(\mathbf{x})] = \mathcal{H} \Phi_t[\varphi(\mathbf{x})] = \int d^3x \left[ \frac{\pi^2(\mathbf{x})}{2} + \frac{1}{2} \partial_k \varphi(\mathbf{x}) \partial_k \varphi(\mathbf{x}) + V(\varphi(\mathbf{x})) \right] \Phi_t[\varphi(\mathbf{x})],$$

$$k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где оператор Гамильтона

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2(\mathbf{x})} + \frac{1}{2} (\partial_k \varphi)^2 + V(\varphi) \right]. \quad (5)$$

Пусть эффективный потенциал  $V(\varphi)$  имеет характерный вид, изображенный на рис. 1, и в некоторый момент времени  $t = 0$  волновая функция системы  $\Phi_0[\varphi(\mathbf{x})]$  заметно отлична от нуля лишь при малой норме  $\|\varphi(\mathbf{x})\|_\Omega$  функции  $\varphi(\mathbf{x})$ . В качестве нормы можно взять, например, норму пространства Соболева  $W^1(\Omega)$ :

$$\|\varphi\|_\Omega^2 = \int_\Omega d^3x [\varphi^2(\mathbf{x}) + |\nabla \varphi(\mathbf{x})|^2].$$

Интуиция, выработанная в квантовой механике одной частицы, подсказывает, что через короткое время зависимость от времени волновой функции  $\Phi_t[\varphi(\mathbf{x})]$  при  $\varphi(\mathbf{x}) \sim 0$  выйдет на асимптотику:

$$\Phi_t[\varphi(\mathbf{x})] = \exp\left(-i \frac{E_0}{\hbar} t - \frac{\Gamma}{2\hbar} t\right) \tilde{\Phi}[\varphi(\mathbf{x})] \equiv U_t \tilde{\Phi}[\varphi(\mathbf{x})], \quad (6)$$

где оператор эволюции  $U_t$  имеет, таким образом, вид умножения на числовую функцию времени:

$$U_t = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \left(E_0 - i \frac{\Gamma}{2}\right) t\right]. \quad (7)$$

Мы видим, что волновая функция системы затухает со временем:

$$|\Phi_t[\varphi(\mathbf{x})]|^2 \propto \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar} t\right). \quad (8)$$

Физическая причина затухания вполне ясна. Состояние системы около  $\varphi = 0$ , соответствующее нахождению системы возле локального минимума эффективного потенциала, неустойчиво за счет просачивания под барьером в область меньших значений  $V(\varphi)$ . Величина  $\Gamma$ , определяющая вероятность распада ложного вакуума, пропорциональна вероятности подбарьерного прохождения от конфигурации  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$  к конфигурации пузырька новой фазы  $\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$ . Покажем, как найти этот коэффициент подбарьерного прохождения в квазиклассическом (при  $\hbar \rightarrow 0$ ) приближении.

Сделав в уравнении Шредингера (4) обычную квазиклассическую подстановку для волновой функции

$$\Phi = e^{iS/\hbar},$$

придем в результате к уравнению Гамильтона — Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta S}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2 + V(\varphi(\mathbf{x})) \right] &\equiv \\ &\equiv \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} \left[ \frac{\delta S}{\delta \varphi(\mathbf{x})}, \varphi(\mathbf{x}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В отличие от классической механики, на функцию действия  $S[\varphi(\mathbf{x})]$  не накладывается требование вещественности. Переменные  $t$  и  $\varphi(\mathbf{x})$  разделяются. Поэтому ищем решение в форме

$$S[t, \varphi(\mathbf{x})] = -Et + \tilde{S}[\varphi(\mathbf{x})]. \quad (10)$$

Функционал  $\tilde{S}[\varphi(\mathbf{x})]$  удовлетворяет уравнению

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2 + V(\varphi(\mathbf{x})) \right]. \quad (11)$$

Если нас интересует подбарьерное движение, «стартующее» с конфигурации  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ , то мы получим граничное условие

$$\pi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta S}{\delta \varphi(\mathbf{x})} = 0 \text{ при } \varphi(\mathbf{x}) = 0. \quad (12)$$

Подставим (12) в (11) и увидим, что

$$E = \int d^3x V(0). \quad (13)$$

Поэтому функционал  $\tilde{S}[\varphi(\mathbf{x})]$  удовлетворяет уравнению [эквивалентному уравнению (11) с учетом (13)]:

$$\int d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \nu(\varphi) \right] = 0. \quad (14)$$

В силу положительной определенности функции  $\nu(\varphi) \equiv V(\varphi) - V(0)$  при  $\varphi$ , близких к нулю, уравнение (14) не будет иметь действительных решений. Положим поэтому:

$$\tilde{S} = -iW. \quad (15)$$

Вместо (14) получим:

$$\tilde{\mathcal{H}} \left[ \frac{\delta W}{\delta \varphi(\mathbf{x})}, \varphi(\mathbf{x}) \right] = 0, \quad (16)$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}(\pi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = \int d^3x \left[ -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \nu(\varphi) \right]. \quad (17)$$

Из классической механики хорошо известно, как получить решение задачи Коши для уравнения (16) с начальным условием  $W[\varphi(\mathbf{x})] = W_0[\varphi(\mathbf{x})]$  при  $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^0(\mathbf{x})$ :

1. Необходимо найти решение характеристической системы уравнений

$$\frac{d\varphi(\mathbf{x})}{d\tau} = \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \varphi(\mathbf{x})}, \quad (18)$$

$$\frac{d\pi(\mathbf{x})}{d\tau} = -\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta \pi(\mathbf{x})} \quad (19)$$

с начальными условиями

$$\varphi(\mathbf{x})|_{\tau_0} = \varphi^0(\mathbf{x}), \quad \pi(\mathbf{x})|_{\tau_0} = \frac{\delta W_0}{\delta \varphi(\mathbf{x})}. \quad (20)$$

2. На решении системы (18), (19) необходимо вычислить функционал

$$\int_{\varphi^0(\mathbf{x})}^{\varphi(\mathbf{x})} d\tau L[\varphi(\mathbf{x}), \dot{\varphi}(\mathbf{x})], \quad (21)$$

где «функция Лагранжа»  $L[\varphi(\mathbf{x}), \dot{\varphi}(\mathbf{x})]$  является преобразованием Лежандра по  $\pi(\mathbf{x})$  от «функции Гамильтона»  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

3. Тогда решение задачи Коши выписывается в виде

$$W[\varphi(\mathbf{x})] = W[\varphi^0(\mathbf{x})] + \int_{\varphi^0(\mathbf{x})}^{\varphi(\mathbf{x})} d\tau L[\varphi(\mathbf{x}), \dot{\varphi}(\mathbf{x})]. \quad (22)$$

Реализуем шаги 1) — 3) для нашей задачи (16), (17). 1. Уравнения (18), (19) принимают вид

$$\frac{d\pi}{d\tau} \equiv \dot{\pi} = \nabla\varphi - v'(\varphi); \quad \frac{d\varphi}{d\tau} \equiv \dot{\varphi} = -\pi. \quad (23)$$

Отсюда следует, что

$$\ddot{\varphi} + \nabla\varphi - v'(\varphi) = 0. \quad (24)$$

В качестве начальных условий (20) возьмем такие:

$$\varphi^0(\mathbf{x}) = 0; \quad \left. \frac{\delta W}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \right|_{\varphi^0(\mathbf{x})} = 0. \quad (25)$$

2. Найдем «функцию Лагранжа»:

$$\dot{\varphi} = \delta \tilde{\mathcal{H}} / \delta \pi = -\pi.$$

Поэтому  $L = \int d^3x [\pi \dot{\varphi} - \tilde{\mathcal{H}}] = - \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + v(\varphi) \right]$ .



3. Решение задачи Коши (16), (17) есть

$$W[\varphi(\mathbf{x})] = W[\varphi^0(\mathbf{x}) = 0] - \int_0^{\varphi(\mathbf{x})} d\tau \int \left[ \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + v(\varphi) \right] d^3x.$$

Мы приходим, таким образом, к квазиклассическому выражению для координатной части волновой функции:

$$\Phi[\varphi(\mathbf{x})] = \Phi[0] \exp \left( - \int_0^{\varphi(\mathbf{x})} d\tau \int d^3x \left[ \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + v(\varphi) \right] \right), \quad (26)$$

где, повторяем, интеграл, стоящий в показателе экспоненты, должен вычисляться на решении уравнения (24). При некоторых значениях  $(\tau, \mathbf{x})$  для решения  $\varphi(\tau, \mathbf{x})$  уравнения (24) будет выполняться равенство  $\dot{\varphi} = 0$ , т. е.  $\pi = \delta S / \delta \dot{\varphi} = 0$ .

Это та точка в функциональном пространстве, где прекращается классически запрещенное и начинается классически разрешенное движение. Мы, таким образом, найдем ту конфигурацию поля  $\varphi(\mathbf{x})$ , которая является началом классического движения (и соответствует появляющемуся пузырю), если решим уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \nabla\varphi - v'(\varphi) = 0, \quad (27)$$

и окажется, что  $\dot{\varphi}(\tau, \mathbf{x}) = 0$  при некотором фиксированном  $\tau = \tau_c$ . Тогда  $\varphi_c(\mathbf{x}) \equiv \varphi(\tau_c, \mathbf{x})$  — конфигурация возникающего классического поля. Если же окажется, что ни при каком  $\tau_c$  «скорость»  $\dot{\varphi}(\tau_c, \mathbf{x})$  не равна нулю тождественно по  $\mathbf{x}$ , то мы не знаем, как связать результат вычислений с конфигурацией возникающего пузыря.

В качестве решения уравнения (24) можно взять сферически-симметричное инстантонное решение с центром в точке  $\tau = \mathbf{x} = 0$ , описанное, например, в [30]. В силу сферической симметрии тогда будет  $\dot{\varphi}(0, \mathbf{x}) = 0$ . Удовлетворяются также и граничные условия (25), так как на таком решении при  $\tau = -\infty$   $\varphi(\mathbf{x}) = 0$  и  $\dot{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ . Из уравнения (26) и сформулированных утверждений относительно решения уравнения (24) мы получим тогда, что коэффициент подбарьерного прохождения равен

$$\frac{|\Phi[\varphi(\mathbf{x})|_{t=0}]|^2}{|\Phi[\varphi=0]|^2} = \exp \left\{ - \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3x \left[ \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + v(\varphi) \right] \right\} \equiv \exp \left\{ - \frac{S_E}{\hbar} \right\}. \quad (28)$$

Величина  $\Gamma$ , как уже было сказано, пропорциональна найденному коэффициенту подбарьерного прохождения и, разумеется, объему

системы  $\Omega$  — чем больше объем, тем раньше в нем найдется область  $\Omega'$ , в которой  $\|\varphi\|_{\Omega'}$  заметно отлична от нуля — произошло туннелирование:

$$\Gamma = \gamma \Omega e^{-\frac{S_E}{\hbar}}.$$

Вычисление предэкспоненциального множителя  $\gamma$ , который, очевидно, имеет размерность  $L^{-4}$ , является трудным делом и не будет здесь производиться. Величину  $\Gamma$  можно вычислить также с помощью функционального интеграла [30], при этом, разумеется, получится тот же ответ (28). При использовании функционального интеграла величина  $S_E$  появляется как евклидово действие на решении евклидовых уравнений движения — инстантоне  $\varphi(\tau, x)$ . Уместно заметить, что переход к мнимому времени [30] не есть описание динамики поля под барьером. Это лишь формальный способ вычисления величины  $\Gamma$  с вполне определенным заранее физическим смыслом.

Рассмотрим частный случай эффективного потенциала

$$V(\varphi) = V(0) - \frac{\lambda \varphi^4}{4}. \quad (29)$$

Уравнение движения (27) в этом случае имеет известное решение (называемое инстантоном Фубини):

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \frac{\rho_0}{\rho^2 + \rho_0^2}, \quad (30)$$

где  $\rho^2 = \mathbf{x}^2 + \tau^2 \equiv \mathbf{x}_\alpha^2$ ,  $\alpha = 1, \dots, 4$ ;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_4 = \tau$ , а  $\rho_0$  — произвольный параметр размерности длины. Евклидово действие (28) не зависит от  $\rho_0$  и равно

$$S_E = 8\pi^2/3\lambda.$$

Добавляя массовый член к эффективному потенциалу (29), получаем

$$V(\varphi) = V(0) + \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4. \quad (31)$$

Оказывается, евклидовы уравнения движения (27) в этом случае не имеют нетривиального решения, стремящегося к нулю при  $x_\alpha^2 \equiv \rho^2 \rightarrow \infty$ . В самом деле, допустим обратное: пусть  $\tilde{\varphi}(x)$  есть такое решение. Это означает равенство нулю вариации действия

$$\delta S_E = \delta \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] \quad (32)$$

на конфигурации  $\tilde{\varphi}(x)$ . Подвергнем решение  $\tilde{\varphi}(x)$  масштабному преобразованию  $\varphi_a(x) = a^{-1} \tilde{\varphi}(x/a)$ , тогда

$$\begin{aligned} S_E[\varphi_a(x)] &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{\varphi} \left( \frac{x}{a} \right) \right)^2 + \frac{m^2}{2a^2} \tilde{\varphi}^2 \left( \frac{x}{a} \right) - \frac{\lambda}{4a^4} \tilde{\varphi}^4 \right] = \\ &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha \tilde{\varphi})^2 - \frac{\lambda}{4} \tilde{\varphi}^4 \right] + \frac{m^2}{2} a^2 \int d^4x \tilde{\varphi}^2(x). \end{aligned} \quad (33)$$

Так как  $\tilde{\varphi}(x)$ , по предположению, есть решение, то должно выполняться равенство

$$dS_E[\varphi_a(x)]/da = 0,$$

что возможно [при  $\tilde{\varphi}(x) \neq 0$ ], только если  $m^2 = 0$  или  $a = 0$ .

Отсутствие решений не означает, что туннелирование становится невозможным. В самом деле, уже в теории, в которой решения существуют [например, в теории с эффективным потенциалом (29)], при вычислении функционального интеграла используются конфигурации  $\varphi(x)$ , не являющиеся решениями — это многоинстантонные конфигурации. Такие конфигурации не являются стационарными точками действия. Действие  $S_E^{(n)}$   $n$ -инстантонной конфигурации становится экстремальным (и равным  $nS_E^{(\perp)}$ ) только при стремлении расстояния между инстантонами к бесконечности. Тем не менее такие конфигурации учитывают, говоря о «приближенной стационарной точке».

Совершенно аналогичная ситуация и здесь. Действие имеет экстремум на краю функционального пространства при нулевой ширине конфигурации, т. е. при  $a \rightarrow 0$ . Поэтому метод стационарной фазы приводит к тому, что мнимая часть энергии по-прежнему определяется экспонентой

$$\Gamma \propto \exp(-8\pi^2/3\lambda\hbar). \quad (34)$$

Более детальное обсуждение этого вопроса см. в [36, 37].

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ И ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ

Известно, что для описания взаимодействия скалярного поля с гравитационным в лагранжиане скалярного поля следует заменить обычные производные ковариантными, а также можно добавить к лагранжиану член  $\frac{\xi}{2} {}^{(4)}R\varphi^2$ , где  ${}^{(4)}R$  — скаляр кривизны, а  $\xi$  — произвольный коэффициент. Существует два выделенных варианта теории: теория с  $\xi = 0$ , называемая теорией с минимальной связью, и теория с  $\xi = 1/6$ , выделенная тем, что при добавлении члена  $\frac{1}{12} {}^{(4)}R\varphi^2$  включение гравитации не нарушает свойство конформной инвариантности теории безмассового скалярного поля. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в дальнейшем. Для простоты в этом разделе будем изучать теорию в плоском мире Фридмана с метрикой

$$dS^2 = -dt^2 + R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (35)$$

которую можно также представить в виде

$$dS^2 = R^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (36)$$

где  $R$  — масштабный фактор Вселенной, причем

$$dt/d\eta = R. \quad (37)$$

Нас будет особенно интересовать расширение Вселенной в случае, когда тензор энергии-импульса сводится к тензору энергии-импульса вакуума  $g_{\mu\nu}V(0)$ . В этом случае Вселенная расширяется экспоненциально:

$$R(t) = R_0 e^{Ht}, \quad (38)$$

где  $H$  — постоянная Хаббла,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(0) = \frac{8\pi}{3M_p^2} V(0). \quad (39)$$

Скаляр кривизны  ${}^{(4)}R$  во Вселенной (35), (38) равен

$${}^{(4)}R = 6 \left( \frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \right) = 12H^2. \quad (40)$$

Уравнение движения для скалярного поля  $\varphi$  в рассматриваемом случае выглядит так:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + R_0^2 e^{-2Ht} \Delta\varphi = -\frac{dV_0}{d\varphi} - 12\xi H^2 \varphi, \quad (41)$$

где  $V_0$  — эффективный потенциал без учета члена  $\frac{\xi}{2} {}^{(4)}R\varphi^2$ ; последний член в (41) равен  $\xi {}^{(4)}R\varphi$ , причем для теории типа (31), когда

$$V_0(\varphi) = V(0) + \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4, \quad (42)$$

уравнение (41) выглядит следующим образом:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + R_0^2 e^{-2Ht} \Delta\varphi = -(m^2 + 12\xi H^2) \varphi^2 - \lambda\varphi^3. \quad (43)$$

Отсюда видно, что член  $\frac{\xi}{2} {}^{(4)}R\varphi^2$  приводит к модификации эффективной массы поля  $\varphi$ :

$$m_{\text{эф}}^2 = \frac{d^2 V}{d\varphi^2} = \frac{d^2 \left( V_0 + \frac{\xi}{2} {}^{(4)}R\varphi^2 \right)}{d\varphi^2} = m^2 + \xi {}^{(4)}R. \quad (44)$$

Иногда бывает удобно записать уравнение (43) в конформных координатах (36), (37), сделав также преобразование поля:

$$\varphi = \psi/R(\eta). \quad (45)$$

В этом случае уравнение (43) приобретает несколько более привычный вид

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \psi - \Delta\psi = -R^2(\eta) (m^2 + 2(6\xi - 1)H^2) \psi - \lambda\psi^3. \quad (46)$$

При этом величина  $R(\eta)$  в экспоненциально расширяющейся Вселенной выглядит так:

$$R(\eta) = R_0 / (1 - R_0 H \eta), \quad (47)$$

так что  $R(\eta) = R_0$  при  $\eta = 0$ ,  $R(\eta) \rightarrow \infty$  при  $\eta \rightarrow (R_0 H)^{-1}$ . Заметим, что область  $0 < t < +\infty$  на языке переменной  $\eta$  соответствует области

$$0 < \eta < (R_0 H)^{-1}. \quad (48)$$

Из (46) видно, что теория кажется особенно простой в случае  $m^2 = 0$ ,  $\xi = 1/6$ , когда она выглядит как безмассовая теория  $-\frac{\lambda}{4}\psi^4$  в пространстве Минковского. Эта простота, однако, коварна и приводит к большому количеству недоразумений.

Исследуем, например, вопрос об устойчивых состояниях поля в теории (42). В мире Минковского для этой цели мы просто искали состояния, являющиеся локальными минимумами  $V(\varphi)$ . Так ли следует поступать и в расширяющейся Вселенной? С целью понять ответ на этот важный для нас вопрос исследуем теорию (42) при  $m^2 = -M^2 < 0$  для случая  $\xi = 1/6$ . В этом случае из (46) можно было бы заключить, что рассмотрение проблемы устойчивости в этой теории в точке  $\varphi = 0$  эквивалентно рассмотрению проблемы устойчивости в теории с эффективным потенциалом  $V(\psi)$  с отрицательной и все время возрастающей по модулю кривизной  $V''(\psi) = -R^2(\eta)M^2\psi^2$ , откуда следовало бы, что точка  $\psi = 0$  ( $\varphi = 0$ ) не является точкой устойчивости поля  $\varphi$ . Это утверждение, однако, не является вполне правильным, неустойчивость поля  $\psi$ , вообще говоря, не влечет за собой неустойчивости поля  $\varphi$ , так как согласно (45)  $\varphi = e^{-Ht}\psi$ . Поэтому состояние  $\varphi = 0$  будет неустойчивым, лишь если поле  $\psi$  растет быстрее, чем  $e^{Ht}$ . Казалось бы, так и будет, поскольку эффективная масса поля неограниченно растет со временем:  $m_\psi^2 = -M^2R^2(\eta)$ . Однако при этом необходимо учесть, что само «время»  $\eta$  ограничено сверху величиной  $(R_0H)^{-1}$ , что не позволяет неустойчивости поля  $\psi$  достаточно развиться.

Поскольку в конечном счете нас будет интересовать неустойчивость поля  $\varphi$ , то можно попытаться исследовать этот вопрос непосредственно с помощью уравнения (43), изучая для простоты однородные поля  $\varphi = \varphi(t)$ . Ограничиваясь случаем малых полей  $\varphi$ , отбросим член  $\lambda\varphi^3$  в (43) и будем искать решение уравнения (43) в стандартном виде

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}. \quad (49)$$

Нетрудно убедиться, что такое решение существует, и при этом

$$\omega = \frac{3iH}{2} \pm i \sqrt{-m^2 + \left(\frac{9}{4} - 12\xi\right) H^2}. \quad (50)$$

Из (50) следует, что  $\text{Im } w > 0$  при

$$m^2 > -12\xi H^2, \quad (51)$$

т. е. при  $m^2 > -12\xi H^2$  точка  $\varphi = 0$  устойчива относительно малых возмущений. В этом смысле для изучения устойчивости теории достаточно было бы вычислить знак  $m_{\text{эф}}^2$  (44), т. е. исследовать на устойчивость эффективный потенциал

$$V(\varphi) = V_0(\varphi) + \frac{\xi}{2} {}^{(4)}R\varphi^2. \quad (52)$$

Однако рост возмущений поля  $\varphi$  в точках неустойчивости уравнения (43) отличается от роста возмущений поля  $\varphi$  в теории (52) в пространстве Минковского. Действительно, рассмотрим важный для нас случай  $m_{\text{эф}} \ll H$ . В этом случае растущее решение при малых  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \exp\left(-\frac{m_{\text{эф}}^2}{3H} t\right), \quad (53)$$

т. е. поле  $\varphi$  растет гораздо медленнее, чем поле в теории (52) в пространстве Минковского, которое растет как

$$\varphi = \varphi_0 \exp(|m_{\text{эф}}| t). \quad (54)$$

Это обстоятельство оказывается очень важным для осуществимости нового сценария раздувающейся Вселенной [32].

Рассмотренный выше парадокс с устойчивостью является основой для целого ряда недоразумений, связанных с переходом к метрике (36) и конформно-преобразованному полю (45). Так, например, в [33] исследование устойчивости теории (42) сводилось к исследованию устойчивости конформно-преобразованной теории поля  $\psi$  (45), что, как мы видели, приводит к недоразумениям. В работе [3] с использованием того же метода исследования утверждалось, что конформная добавка  $\frac{1}{12} {}^{(4)}R\varphi^2$  к  $V(\varphi)$  никак не сказывается на устойчивости теории вблизи  $\varphi = 0$ , в противоречии с нашими результатами (51).

Аналогичные недоразумения, связанные с конформным преобразованием (45), встречаются и при вычислении эффективного потенциала  $V(\varphi)$ , и при изучении туннелирования. Действительно, в некоторых случаях может оказаться удобнее вычислять не эффективный потенциал  $V(\varphi)$ , а эффективный потенциал  $V(\psi)$ , а затем уже в полученном ответе сделать замену  $\psi = R(t)\varphi$  [34]. При этом не обращается внимание на то, что для изучения вопроса об устойчивости поля  $\varphi$  нам необходим потенциал  $V(\varphi)$ , определенный на слабенеющихся во времени полях  $\varphi$ . В то же время эффективный потенциал  $V(\psi)$  при замене  $\psi = R\varphi$  переходит не в эффективный потенциал  $V(\varphi)$ , а в эффективный лагранжиан полей  $\varphi$ , определенный на экспоненциально убывающих полях  $\varphi$  [так как величина  $V(\psi)$  вычис-

лялась при  $\psi = \text{const}$ ] и тем самым имеющий весьма отдаленное отношение к проблеме устойчивости относительно роста поля  $\varphi$ .

В работах [3, 4] исследование образования пузырьков поля  $\varphi$  сводилось к аналогичной задаче для поля  $\psi$ . При этом, однако, не было замечено, что туннелирование идет в основном в такие пузырьки поля  $\psi$ , поле в которых после замены  $\varphi = \psi/R(t)$  начинает быстро убывать, а не нарастает. В связи с этим образование таких пузырьков не приводит к росту поля и к фазовому переходу, исследовавшемуся в [3, 4].

Мы так подробно останавливаемся на разборе недоразумений, возникающих при изучении процессов в расширяющейся Вселенной, с тем чтобы продемонстрировать всю нетривиальность рассматриваемой задачи и заранее указать тем, кто будет продолжать изучение этого вопроса, на наиболее опасные ловушки, в которые иногда попадают даже более опытные исследователи, чем мы.

### 3. ТУННЕЛИРОВАНИЕ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА

Рассмотрим теперь вопрос о туннелировании в теории (42) из состояния  $\varphi = 0$  с образованием пузырьков поля  $\varphi \neq 0$  в экспоненциально расширяющейся Вселенной (35), (36). Заранее очевидно, что при  $m \gg H$  описание туннелирования никак не будет отличаться от описания туннелирования в пространстве Минковского (см. разд. 1). По этой причине, а также потому, что наиболее интересным с точки зрения нового сценария раздувающейся Вселенной является случай  $m \ll H$  [20], мы начнем с изучения туннелирования при  $m = 0$ . Опять-таки ясно, что при  $\rho_0 \ll H^{-1}$  (более точный критерий будет получен в следующем разделе) туннелирование будет описываться инстантонами Фубини (30), которые, как и в плоском пространстве при  $\rho_0 \ll m^{-1}$ , в этом случае также остаются почти точными решениями, см. обсуждение аналогичного вопроса в разд. 1. Этот случай, однако, не является для нас наиболее интересным, так как, согласно [20], при этом поле  $\varphi$  вырастает до больших значений за время  $t \lesssim H^{-1}$ , что не является достаточным для реализации нового сценария раздувающейся Вселенной [13, 14]. Кроме того, при малых  $\lambda$  вероятность образования соответствующих пузырьков согласно (34) будет чрезвычайно сильно подавлена.

Таким образом, нас интересует рождение пузырьков с размером  $\rho_0 \gg H^{-1}$ . Ниже мы обсудим несколько различных подходов к решению этой задачи и укажем на трудности, стоящие на пути ее решения.

1. Первая попытка учесть эффекты, связанные с ненулевой кривизной  ${}^{(4)}R$  в горячей Вселенной, была сделана в работе [2], где было замечено, что эффективная масса

$$m_{\text{эф}}^2 = m^2 + \xi {}^{(4)}R$$

при  $\xi \neq 0$  зависит от  ${}^{(4)}R$ , и было предложено учесть это обстоятельство при использовании величины  $m_{\text{эф}}$  вместо  $m$  в выражении  $S_4(\varphi, T) = \frac{19m}{\lambda T}$  [35, 36] для действия, отвечающего туннелированию при высокой температуре. При этом, однако, не учитывалось, что уравнение (43) отличается от соответствующего уравнения в мире Минковского не только членом  $\xi {}^{(4)}R$  в  $m_{\text{эф}}$ , но и другими членами, так что для описания образования пузырьков недостаточно просто  $m$  заменить  $m_{\text{эф}}$  в  $S_4 = 19m/\lambda T$ . Для описания туннелирования можно было бы попытаться, как обычно, сделать замену  $t \rightarrow it$  и перейти в евклидово пространство в метрике (35). При этом, однако, метрика (36) станет комплексной. Не исключено, что это могло бы представлять опасность лишь при вычислении квантовых поправок, если бы само квазиклассическое приближение давало бы осмысленный результат. Однако и этого не происходит, так как после продолжения  $t \rightarrow it$  уравнение (43) не имеет действительных решений  $\varphi(t, x)$ . Кроме того, сама применимость указанного стандартного подхода в расширяющейся Вселенной становится сомнительной из-за того, что энергия частиц поля  $\varphi$  в этом случае не сохраняется и вывод стандартных формул для вероятности туннелирования не удается обобщить на рассматриваемый случай.

2. На первый взгляд, несколько лучше обстоит дело, если сделать замену

$$1 - R_0 H \eta = \tau; \quad R_0 H x = \chi \quad (55)$$

и аналитически продолжить  $\tau \rightarrow i\tau$ , после чего уравнение (46) приобретает вид

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \Delta\chi\psi = \frac{1}{H^2\tau^2} (m^2 + 2(6\xi - 1)H^2)\psi - \frac{\lambda}{R_0^2 H^2} \psi^3. \quad (56)$$

Рассмотрим для простоты случай  $m = 0$ ,  $\xi = 1/6$  (конформно-инвариантная теория). При этом уравнение (56) выглядит так же, как уравнение для туннелирования в теории с  $V(\varphi) = -\frac{\lambda}{4R_0^2 H^2} \varphi^4$  (42) в мире Минковского, и соответствующее решение имеет вид

$$\psi = R_0 H \sqrt{\frac{8}{\lambda} \frac{\rho_0}{\tau^2 + \chi^2 + \rho_0^2}}. \quad (57)$$

Казалось бы, задача решена. Однако аналитическое продолжение  $\tau \rightarrow i\tau$  описывает рождение пузырька в момент  $\tau = 0$ , т. е. при  $t \rightarrow +\infty$ . Таким образом, методом, рассмотренным выше, не удается получить описания рождения пузырька в конечный момент времени  $t$ .

#### 4. ТУННЕЛИРОВАНИЕ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЕВКЛИДОВ ПОДХОД

Евклидов подход к описанию туннелирования в искривленном пространстве был предложен Колеманом и Де Луччия [1]. Они предложили, так же как это делалось в плоском пространстве [30], найти



аналитическое продолжение метрики к евклидовой форме (т. е. к метрике с сигнатурой + + + +) и рассмотреть действие скалярного и гравитационного полей в кривом евклидовом (точнее, римановом) пространстве:

$$S_E[\varphi, g] = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) + \frac{1}{2k} {}^{(4)}R \right\}, \quad (58)$$

где  ${}^{(4)}R$  — скаляр кривизны пространства с метрикой  $g_{\mu\nu}$ .

Предполагается, далее, использовать для оценки скорости распада ложного вакуума величину  $e^{-B}$ , где  $B = S_E[\varphi(x)] - S_E[0]$ , а  $\varphi(x)$  — минимизирующая действие (58) конфигурация скалярного поля [ей отвечает определенная метрика  $g_{\mu\nu}(x)$ ].

Функции  $\varphi(x)$  и  $g_{\mu\nu}(x)$ , минимизирующие действие (58), предлагается затем аналитически продолжить к таким значениям координат, при которых метрика действительна и имеет сигнатуру — + + +. Делая аналитическое продолжение разными способами, можно получить разные области физического пространства [8].

Поскольку большинство работ по туннелированию в расширяющейся Вселенной используют метод Колемана и Де Луччия [1], то в данном разделе мы вкратце опишем этот метод и применим его к изучению туннелирования в мире де Ситтера. Краткое описание того, что такое мир де Ситтера, содержится в приложении. При этом мы воспроизведем известный результат Хоукинга и Мосса относительно однородного туннелирования во всей Вселенной. В конце раздела содержатся критические замечания по поводу интерпретации этих результатов и возможности применять полученные евклидовым методом результаты к теории туннелирования в раздувающейся Вселенной.

Предположим, следуя Колеману и Де Луччия [1], что функции  $\varphi(x)$  и  $g_{\mu\nu}(x)$ , минимизирующие (58), имеют  $O(4)$ -симметрию:

$$dS^2 = d\xi^2 + \rho^2(\xi) d\Omega^2; \quad \varphi = \varphi(\xi). \quad (59)$$

Тогда уравнения Лагранжа, которым они подчиняются, выглядят следующим образом:

$$\varphi'' + 3 \frac{\rho'}{\rho} \varphi' - \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0, \quad (60)$$

$$\rho'^2 = 1 + \frac{k\rho^2}{3} \left( \frac{1}{2} \varphi'^2 - V(\varphi) \right), \quad (61)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $\xi$ . Действие на решение системы (60), (61) равно [1]:

$$\begin{aligned} S_E &= 2\pi^2 \int d\xi \left[ \rho^3 \left( \frac{1}{2} \varphi'^2 + V \right) + \frac{3}{k} (\rho^2 \rho'' + \rho \rho'^2 - \rho) \right] = \\ &= 4\pi^2 \int d\xi \left[ \rho^3 V - \frac{3\rho}{k} \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Как показано в [8],  $\rho(\xi)$  всегда имеет два нуля, если  $V(0) \neq 0$ . Интеграл (62) вычисляется между точками, в которых  $\rho = 0$ . Одна из таких точек  $\xi = 0$ , другую назовем  $\Xi$ .

Мы увидим позже, что показатель экспоненты, определяющей вероятность туннелирования,

$$B = S_E[\varphi] - S_E[0], \quad (63)$$

имеет нулевой порядок по  $k$  [а не минус первый, как могло бы показаться из (62)]. Для вычисления действия (62) с точностью до членов нулевого порядка по  $k$  необходимо, как это видно из (62), знание  $\rho(\xi)$  с точностью до членов порядка  $k$ , а  $\varphi(\xi)$  — с точностью до членов порядка единицы.

Рассмотрим туннелирование из состояния  $\varphi = 0$  в теории с эффективным потенциалом

$$V(\varphi) = V(0) + \frac{m^2\varphi^2}{2} - \frac{\lambda\varphi^4}{4} \equiv V(0) + v(\varphi). \quad (64)$$

Система (60), (61) имеет тривиальное решение:

$$\varphi = 0, \quad \rho = H^{-1} \sin H\xi, \quad (65)$$

где  $H^2 = \frac{k}{3} V(0)$ .

Будем искать теперь решения системы (60), (61), такие, что:  $\varphi(0) \neq 0$ ,  $\varphi'(0) = 0$ ,  $\varphi(\Xi) = 0$ ,  $\xi \in [0, \Xi]$  и  $\Xi$  — нули  $\rho(\xi)$ .

Введем безразмерные величины

$$r = H\rho, \quad \Phi = \sqrt{\lambda}\varphi/H, \quad \xi = H\xi, \quad \mu = m/H. \quad (66)$$

Тогда вместо (60), (61) получим систему:

$$\ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\Phi} - u'(\Phi) = 0, \quad (60')$$

$$\dot{r}^2 = 1 - r^2 + \kappa r^2 \left( \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - u(\Phi) \right),$$

$$u(\Phi) \equiv \frac{\mu^2}{2} \Phi^2 - \frac{1}{4} \Phi^4, \quad (61')$$

где  $\kappa = \frac{1}{3\lambda} kH^2 \ll 1$ , а точка обозначает дифференцирование по  $\zeta$ .

В соответствие со сделанным замечанием считаем  $\Phi = O(1)$ , а  $r = r_0 + \kappa r_1$ , причем  $r_0(0) = r_1(0) = 0$ . Тогда из (60), (61) следует:

$$\dot{r}_0^2 = 1 - r_0^2, \quad \text{т.е. } r_0 = \sin \zeta, \quad (67)$$

$$\ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{r}_0}{r_0} \dot{\Phi} - u'(\Phi) = 0, \quad \text{т.е. } \ddot{\Phi} + 3 \operatorname{ctg} \zeta \dot{\Phi} - u'(\Phi) = 0, \quad (68)$$

$$\dot{r}_1 + \operatorname{tg} \zeta r_1 = \frac{\sin^2 \zeta}{2 \cos \zeta} E(\zeta), \quad (69)$$

где  $E(\zeta) = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - u(\Phi)$ .

При решении уравнения (69) зависимость  $\dot{\Phi}(\xi)$  считаем известной [из решения (58)]. Уравнение (69) интегрируется, и, с учетом граничного условия  $r_1(0) = 0$ , имеем:

$$r_1(\xi) = \frac{1}{2} |\cos \xi| \int_0^{\xi} dt \frac{\sin^2 t}{\cos t |\cos t|} E(t). \quad (70)$$

Действие на решение равно

$$\begin{aligned} S_E &= 4\pi^2 \int_0^{\Xi} d\xi \left[ \rho^3 (V(0) + \nu(\varphi)) - \frac{3\rho}{k} \right] = \\ &= \frac{4\pi^2}{\lambda} \int_0^Z d\xi \left[ r^3 (\lambda H^{-4} V(0) + u(\Phi)) - \frac{r}{\kappa} \right] = \\ &= \frac{4\pi^2}{\lambda} \int_0^Z d\xi \left[ \frac{r^3 - r}{\kappa} + r^3 u(\Phi) \right], \end{aligned} \quad (71)$$

где  $Z$  — значение переменной  $\xi$ , при котором  $r = 0$ .

Очевидно,  $Z = \pi + \kappa\delta$ , где  $\delta = O(1)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} S_E &\cong \frac{4\pi^2}{\lambda} \left\{ \int_0^{\pi} d\xi \left[ \frac{r^3 - r}{\kappa} + u(\Phi) \right] + \left( \frac{r^3 - r}{\kappa} + r^3 u(\Phi) \right) \Big|_{\xi=\pi} \kappa\delta \right\} = \\ &= \frac{4\pi^2}{\lambda} \left\{ \int_0^{\pi} d\xi \frac{r_0^3 - r_0}{\kappa} + \int_0^{\pi} d\xi r_0^3 u(\Phi) + \right. \\ &\left. + \int_0^{\pi} d\xi (3r_0^2 - 1) r_1 + (r_0^3 - r_0) \Big|_{\xi=\pi} \delta + O(\kappa) \right\}. \end{aligned}$$

Учтем, что  $S_E[0] = \frac{4\pi^2}{\lambda} \int_0^{\pi} d\xi \frac{r_0^3 - r_0}{\kappa}$ , а  $r_0 = \sin \xi$ . Тогда

$$\begin{aligned} B &\equiv S_E[\Phi] - S_E[0] = \\ &= \frac{4\pi^2}{\lambda} \left\{ \int_0^{\pi} d\xi \sin^3 \xi u(\Phi) + \int_0^{\pi} d\xi (3 \sin^2 \xi - 1) r_1 \right\}. \end{aligned} \quad (72)$$

Займемся вычислением второго интеграла в формуле (72):

$$\int_0^{\pi} d\xi (3 \sin^2 \xi - 1) r_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\xi (3 \sin^2 \xi - 1) |\cos \xi| \int_0^{\xi} dt \frac{\sin^2 t}{\cos t |\cos t|} E(t).$$

Поменяем порядок интегрирования по  $\zeta$  и  $t$  и разобьем область интегрирования на части, в каждой из которых  $\cos t$  имеет определенный знак. В результате получим, что этот интеграл равен

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\zeta \sin^3 \zeta \left( \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - u(\Phi) \right).$$

Таким образом, показатель экспоненты равен

$$B = \frac{2\pi^2}{\lambda} \int_0^{\pi} d\zeta \sin^3 \zeta \left( \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + u(\Phi) \right). \quad (73)$$

Ответ вполне естествен: фактически мы неявно предполагали малость поля  $\Phi$  ( $\frac{1}{4} \lambda \Phi^4 \ll V$ , т. е.  $\Phi^4 \ll 1/\kappa$ ) и его градиентов [ $\dot{\Phi}^2/2 \ll V(0)$ , т. е.  $\dot{\Phi}^2 \ll 1/\kappa$ ]. Поэтому метрика определяется значением эффективного потенциала при  $\Phi = 0$ , и эволюция поля  $\Phi$  происходит в заданном кривом пространстве.

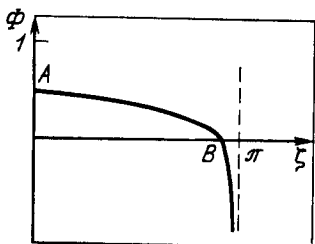


Рис. 3. Четное решение уравнения (68) в случае потенциала  $u(\Phi) = -\frac{1}{4} \Phi^4$  при  $\Phi(0) < 1$

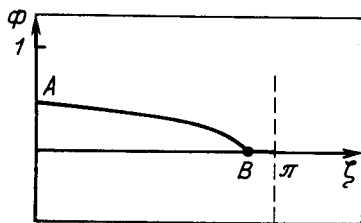


Рис. 4. «Почти-решение» уравнения (68) с  $u(\Phi) = -\frac{1}{4} \Phi^4$ , удовлетворяющее условию  $\Phi(\pi) \equiv \Phi_{r=0} = 0$ . Кривая  $AB$  та же, что на рис. 3

Вычисления на компьютере показывают, что при  $\mu = 0$  и малых  $\Phi(0)$  [ $\Phi(0) \ll 1$ ] решения уравнения (68) имеют характерный вид (рис. 3). Так как  $\Phi = 0$  также есть решение уравнения (68), то функция, график которой показан на рис. 4, является решением везде, кроме точки излома,  $\Phi = 0$ . Кроме того, она удовлетворяет граничному условию  $\Phi(Z) \equiv \Phi|_{r=0} = 0$  и потому имеет привычный вид «пузыря» в море ложного вакуума  $\Phi = 0$ .

Численный счет показывает, что зависимость величины  $B$  (73) от значения поля  $\Phi$  при  $\zeta = 0$  хорошо аппроксимируется формулой

$$B = \frac{2\pi^2}{\lambda} 0,3\Phi^4, \quad (74)$$

где  $\Phi_0 \equiv \Phi(0)$ .

Мы имеем сейчас ситуацию, вполне сходную с описанной в разд. 1. Там в случае  $V(\varphi) = V(0) + \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4$  тоже не было решений уравнений движения (27), и действие имело стационарную точку на границе области изменения переменных. Величина  $B$  из уравнения (74) стационарна по параметру  $\Phi_0$  при  $\Phi_0 = 0$ , т. е. когда решение  $\Phi(\xi)$  тривиально,  $\Phi(\xi) = 0$ . Интереснее случай отличной от

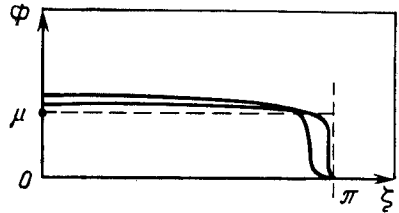


Рис. 5. «Почти-решения» уравнения (68) с  $u(\Phi) = \frac{\mu^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda}{4}\Phi^4$ , отвечающие двум различным значениям  $\Phi(0) > \mu$

нуля массы,  $\mu \neq 0$ . При  $\Phi(0) \equiv \Phi_0$ , лишь немного превышающем экстремальную точку потенциала  $u(\Phi)$ , т. е. при

$$\Phi_0 \gtrsim \mu,$$

решение имеет ступенькообразную форму (рис. 5). По мере приближения сверху  $\Phi_0$  к  $\mu$  ступенька растягивается, уплощается, нормированное действие  $B$  на этой конфигурации стремится к

$$\frac{2\pi^2}{\lambda} \int_0^\pi d\xi \sin^3 \xi u(\Phi_0) = \frac{2\pi^2}{3\lambda} \mu^4 = \frac{2\pi^2}{3\lambda} \frac{m^4}{H^4} \tag{75}$$

и совпадает с величиной действия на инстантоне Хоукинга — Мосса [5]. Такое совпадение неудивительно. Решение (рис. 5) отличается от инстантона Хоукинга — Мосса лишь на краю интервала  $[0, \pi]$ , там, где  $\sin \xi \simeq 0$  и вклад даже от очень крутой стенки инстантона уничтожается малостью объема за счет фактора  $\sqrt{g} \cong \sin^3 \xi$ .

Мы можем, таким образом, заключить, что если бы процесс туннелирования в искривленном пространстве описывался функциональным интегралом в евклидовой области, то в квазиклассическом приближении скорость распада ложного вакуума определялась бы описанными почти-решениями и была бы пропорциональна

$$\exp \left[ -\frac{8\pi^2}{3\lambda} u(\Phi_0) + O(\kappa) \right] = \exp \left[ -\frac{2\pi^2}{3\lambda} \frac{m^4}{H^4} + O(\kappa) \right]. \tag{76}$$

В действительности представляется неясной связь интеграла действия на римановом многообразии с тем, как рождаются зародыши новой фазы в раздувающейся Вселенной де Ситтера. При рассмотрении туннелирования в плоском мире (см. разд. 1) переход к мнимому времени в функциональном интеграле служил не для описания динамики поля, а для вычисления декремента затухания волновой

функции  $\Gamma$ , т. е. величины, физический смысл которой был определен заранее. Нам не известны работы, в которых функциональный интеграл связывался бы с аналогичной величиной в кривом мире

Далее, аналитическим продолжением евклидова мира де Ситтера  $S^4$  может быть либо горловина гиперboloида де Ситтера, либо любое его наклонное сечение, проходящее через его центр (рис. 6). Именно в одном из таких сечений и должна была бы «материализоваться»

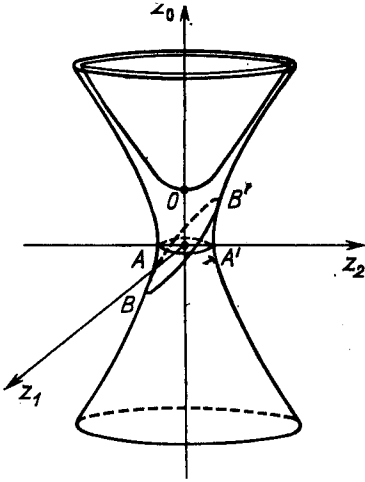


Рис. 6. Пространство де Ситтера соответствует гиперboloиду  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_0^2 = H^{-2}$  (см. приложение А). Туннелирование в формализме Колемана—Де Луччия осуществляется в горловине гиперboloида  $AA'$  или в «наклонной горловине»  $BB'$ . Раздувающейся Вселенной, которая изначально была горячей и началась в сингулярности, отвечает поверхность, проходящая через точку 0 и асимптотически приближающаяся к гиперboloиду

раздувающаяся Вселенная после туннелирования. Однако раздувающаяся Вселенная начиналась с горячего сингулярного состояния, и ни одно ее сечение не совпадало, даже асимптотически, с указанным выше полным сечением де ситтеровского гиперboloида (рис. 6). Поэтому представляется неясной связь между описанием туннелирования в горловине гиперboloида или в наклонных сечениях гиперboloида с помощью метода Колемана и Де Луччия и описанием туннелирования в сечении, весьма далеко от горловины гиперboloида, которое должно осуществляться в раздувающейся Вселенной.

Еще одним возражением против применения описанной процедуры к реальной Вселенной является известный факт, касающийся туннелирования в квантовой механике одной частицы. Представим себе частицу в трехмерном пространстве с импульсом  $\mathbf{p}$ , налетающую на одномерный потенциальный барьер. Если импульс  $\mathbf{p}$  перпендикулярен барьеру, то движение фактически является одномерным и при нахождении коэффициента подбарьерного прохождения можно говорить или о мнимом импульсе под барьером, или о мнимом времени. Оба языка эквивалентны. Но если частица падает на барьер не под прямым углом, то язык единственный: нормальная барьеру компонента импульса  $p_{\perp}$  становится мнимой, а параллельная  $p_{\parallel}$  остается действительной. Туннелирование здесь идет по одному на-

правлению (если угодно, по одной переменной) и говорить о частице, живущей во мнимом времени, нельзя [29]. По направлению, параллельному барьеру, классическое движение не запрещено, и было бы бессмысленно описывать движение частицы евклидовым действием.

Совершенно аналогично обстоит дело и с раздувающейся Вселенной. По переменной  $\varphi$  система зажата потенциальным барьером  $V(\varphi)$  и поэтому, если мы следим только за переменной  $\varphi$ , следует ожидать, что мы увидим нечто похожее на квазистационарное состояние, сосредоточенное около  $\varphi = 0$ . Вероятность измерить в системе значение поля  $\varphi$ , близкое к нулю, будет медленно убывать. В то же время по переменным гравитационного поля система не зажата никаким барьером, и отражением этого является возможность классического движения — увеличения радиуса кривизны  $R$  по фридмановскому закону. Если смотреть с этой точки зрения, то никакого квазистационарного состояния по  $R$  и медленного разрушения его за счет просачивания под барьером, вообще говоря, может не быть, если только туннелирование по полю  $\varphi$  не требует с **необходимостью** одновременного туннелирования по масштабному фактору  $R$ .

Таким образом, применение евклидова подхода к туннелированию в расширяющейся Вселенной в общем случае является необоснованным и может приводить к неправильным результатам. Тем не менее результат Хоукинга и Мосса [5] для случая  $m \ll H$  оказывается справедливым, хотя и не применительно к туннелированию, строго однородному во всем пространстве, а применительно к туннелированию с образованием пузырей размером  $l \gtrsim H^{-1}$ . Причина этого состоит в том, что, хотя туннелирование, изученное выше, идет одновременно и по масштабному фактору  $R$  и по полю  $\varphi$ , реально изменение поля  $\varphi$  при  $m \ll H$  в процессе туннелирования весьма мало всюду, кроме малой окрестности точки  $\xi \sim \pi$ , так что вклад членов  $\sim (\partial_\mu \varphi)^2$  в действие на инстантоне пренебрежимо мал. В этом смысле процесс эффективно является одномерным, так же как в случае, когда частица падает почти перпендикулярно барьеру. Для таких случаев евклидов подход может давать правильный результат.

При этом все еще остается возражение, связанное с тем, что туннелирование в евклидовом подходе должно было бы происходить в горловину гиперблоида (см. выше). Однако аналогичная проблема имела место и в евклидовой теории туннелирования при ненулевой температуре, где выяснение вопроса о форме возникающего пузырька требует дополнительного исследования, но при этом сама вероятность образования пузырька в евклидовом подходе определяется однозначно и правильно [36]. Как будет видно из результатов следующего раздела, вероятность образования пузырька размером  $l \gtrsim H^{-1}$  в мире де Ситтера практически не зависит от формы пузырька. С этим и связана нечувствительность результата, полученного Хоукингом и Моссом, к тому, в каком сечении мира де Ситтера возникнет пузырек новой фазы.

### 5. ТУННЕЛИРОВАНИЕ В РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ. ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД

Этот раздел мы начнем с рассмотрения так называемой модели мини-суперпространства, в которой рассматривается пространственно-однородная замкнутая Вселенная, заполненная однородным скалярным полем. В этом случае метрика может быть записана в следующем общем виде:

$$ds^2 = -\alpha^2(t) dt^2 + R^2(t) dl^2,$$

где  $dl^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$  — элемент длины на трехмерной сфере.

Лагранжиан гравитационного поля в однородном случае равен [38]:

$$L_G = \frac{6\pi^2}{k} [-\alpha^{-1} R \dot{R}^2 + \alpha R]. \quad (77)$$

Лагранжиан (77) сингулярен, поскольку в него не входит производная по времени от величины  $\alpha(t)$ , фактически определяющей выбор масштаба времени  $t$ . Переменная  $\alpha(t)$ , таким образом, калибровочная, и соответствующий ей канонический импульс  $\pi_\alpha$  равен нулю:  $\pi_\alpha = \partial L / \partial \dot{\alpha} = 0$ . Это утверждение сохраняет силу и при наличии материи, в качестве которой мы возьмем скалярное поле.

Рассмотрим сначала скалярное поле, конформно связанное с гравитацией, так как в этом случае мы сможем точно решить возникающие уравнения. Лагранжиан скалярного поля с конформной связью равен

$$L_S = 2\pi^2 R^3 \alpha \left( \frac{1}{2\alpha^2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{12} {}^{(4)}R \varphi^2 - V(0) + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right). \quad (78)$$

Вводя вместо  $\varphi$  переменную  $\chi$  по формуле  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}} \frac{\chi}{R}$  и устранив из лагранжиана полную производную по времени, получаем:

$$L_S = \frac{\alpha}{R} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{R}{\alpha} \dot{\chi} \right)^2 - \frac{1}{2} \chi^2 + \frac{\lambda}{8\pi^2} \chi^4 - 2\pi^2 R^4 V(0) \right\}. \quad (78')$$

Сделав еще замену переменных  $\alpha = \sigma N$ ,  $R = \sigma a$ , где  $\sigma^2 = k/12\pi^2$ , придем к полному лагранжиану

$$L = L_G + L_S = \frac{N}{2a} \left\{ \left( \frac{a}{N} \frac{d\chi}{dt} \right)^2 - \chi^2 + \frac{\nu}{2} \chi^4 - \left( \frac{a}{N} \frac{da}{dt} \right)^2 + a^2 - \Lambda a^4 \right\}, \quad (79)$$

где  $\Lambda \equiv 4\pi^2 \sigma^4 V(0) = \frac{k^2}{36\pi^2} V(0)$ ,  $\nu = \frac{\lambda}{2\pi^2}$ .



Канонические импульсы равны

$$\pi_\chi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} = \frac{a}{N} \dot{\chi}, \quad \pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{a}{N} \dot{a}, \quad \pi_N = 0,$$

и гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{N}{2a} \left\{ \pi_\chi^2 - \pi_a^2 - a^2 + \Lambda a^4 + \chi^2 - \frac{\nu}{2} \chi^4 \right\}.$$

На канонические переменные  $\pi_a$ ,  $\pi_\chi$ ,  $a_\chi$  должно быть наложено условие связи, возникающее из равенства нулю импульса, соответствующего переменной  $N$ :

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} = \frac{1}{2a} \left\{ -\pi_a^2 - a^2 + \Lambda a^4 + \pi_\chi^2 + \chi^2 - \frac{\nu}{2} \chi^4 \right\}. \quad (80)$$

При квантовании каноническим переменным обычным образом сопоставляются операторы:

$$\begin{aligned} \chi &\rightarrow \hat{\chi}, & \pi_\chi &\rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \chi}; \\ a &\rightarrow \hat{a}, & \pi_a &\rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial a}, \end{aligned}$$

а связь (80) переходит в условие, налагаемое на вектор состояния системы:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} - a^2 + \Lambda a^4 - \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \chi^2 - \frac{\nu}{2} \chi^4 \right\} \Psi(a, \chi) = 0. \quad (81)$$

(В квазиклассическом приближении, которое нас будет интересовать, порядок некоммутирующих операторов несуществен, поэтому мы отвлекаемся от всех вопросов такого рода.)

Уравнение (81) допускает разделение переменных, так что его решение может быть представлено в виде

$$\Psi(a, \chi) = \int d\epsilon c_\epsilon(a) u_\epsilon(\chi), \quad (82)$$

где функции  $c_\epsilon(a)$ ,  $u_\epsilon(\chi)$  подчиняются уравнениям [18]:

$$\frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial a^2} + a^2 - \Lambda a^4 \right\} c_\epsilon(a) = \epsilon c_\epsilon(a), \quad (83)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \chi^2 - \frac{\nu}{2} \chi^4 \right\} u_\epsilon(\chi) = \epsilon u_\epsilon(\chi). \quad (84)$$

В задаче о распаде ложного вакуума нас интересует эволюция волновой функции  $\Psi$  при больших  $a$ . Уравнение (83) при  $a \gg 1$  имеет фундаментальную систему решений

$$c_\epsilon^{(1,2)}(a) = q_\epsilon^{-1/4}(a) \exp \left\{ +iS_\epsilon^{(1,2)}(a, a_0) \right\} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda a^3}}\right) \right], \quad (85)$$

где  $q_\varepsilon(a) = \Lambda a^4 - a^2 + 2\varepsilon$ , а  $S_\varepsilon^{(1,2)}(a, a_0) = \pm \int_{a_0}^a \sqrt{q_\varepsilon(a')} da'$  — классическое действие, удовлетворяющее уравнению Гамильтона — Якоби:

$$\left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial a}\right)^2 + a^2 - \Lambda a^4 - 2\varepsilon = 0. \quad (86)$$

Волновая функция (82) содержит, таким образом, положительно- и отрицательночастотную части, соответствующие верхнему и нижнему знакам перед радикалом в формуле для  $S_\varepsilon^{(1,2)}$  и описывающие Вселенную, расширяющуюся с течением времени и сжимающуюся соответственно.

Между двумя этими типами вселенных такая же связь, как между частицей и античастицей, первая из которых движется вперед по времени, а вторая — назад. В этом смысле можно назвать расширяющийся мир «Вселенной», а сжимающийся «Антивселенной» [39]. Разумеется, такой выбор столь же условен, как и соглашение о том, частицу с каким зарядом следует именовать «частицей», в отличие от «античастицы». Теория симметрична относительно поворота стрелы времени,  $t \rightarrow -t$ , при котором Вселенная перейдет в Антивселенную.

Рассмотрим положительночастотную компоненту волновой функции (82), отвечающую раздувающейся Вселенной,  $a > 0$ , чему соответствуют в квазиклассическом приближении канонический импульс

$$\pi_a = \frac{\partial S}{\partial a} = -\frac{a}{N} \dot{a} < 0 \quad (87)$$

и функция  $c_\varepsilon(a)$ , равная асимптотически, при  $a \gg 1$ ,

$$c_\varepsilon(a) = \left(\frac{\Lambda a_0^4 - a_0^2 + 2\varepsilon}{\Lambda a^4 - a^2 + 2\varepsilon}\right)^{1/4} \exp\left[-i \int_{a_0}^a \sqrt{\Lambda a'^4 - a'^2 + 2\varepsilon} da'\right] c_\varepsilon(a_0). \quad (88)$$

Можно считать, что начальный волновой пакет при  $a = a_0$  сформирован из функций  $u_\varepsilon(\chi)$  с ограниченным параметром разделения  $\varepsilon$ , поскольку функции с большим параметром  $\varepsilon$  чрезвычайно быстро эволюционируют и волновой пакет, составленный из них, покидает окрестность точки  $\chi = 0$  за время, пренебрежимо малое по сравнению со временем существования квазистационарного состояния, которое нас интересует. Вспомним квантовую механику: квазистационарное состояние характеризуется узкой полосой энергии, ширина которой падает с уменьшением проницаемости потенциального барьера. Поэтому интеграл (82) берется фактически по конечному интервалу  $\varepsilon$ , и найдется такое большое  $a$ , при котором с заданной точностью мож-

но ограничиться первым членом разложения формулы (88) по степеням  $\varepsilon/\Lambda^4$  для любого  $\varepsilon$ , входящего в интервал интегрирования (82):

$$c_\varepsilon(a) \simeq \left( \frac{\Lambda a_0^4 - a_0^2}{\Lambda a^4 - a^2} \right)^{1/4} \exp \left[ -i \int_{a_0}^a \sqrt{\Lambda a'^4 - a'^2} da' - i\varepsilon \int_{a_0}^a (\Lambda a'^4 - a'^2)^{-1/2} da' \right] c_\varepsilon(a_0). \quad (89)$$

Мы, кроме того, предположим, что  $a \gg \Lambda^{-1/2}$  (т. е.  $R \gg H^{-1}$  в размерных переменных), и введем конформное время  $\eta = -1/\sqrt{\Lambda a}$ . При этом условии

$$c_\varepsilon(a) \simeq \frac{a_0}{a} \exp \left[ -i \int_{a_0}^a \sqrt{\Lambda} a'^2 da' - i\varepsilon (\eta - \eta_0) \right] c_\varepsilon(a_0), \quad (90)$$

и разложение (82) принимает вид

$$\Psi(a, \chi) = \frac{a}{a_0} \exp \left[ -\frac{i\sqrt{\Lambda}}{3} (a^3 - a_0^3) \right] W(a, \chi), \quad (91)$$

где функция

$$W(\eta, \chi) = \int d\varepsilon \exp [-i\varepsilon (\eta - \eta_0)] c_\varepsilon(a_0) u_\varepsilon(\chi), \quad (92)$$

и удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \chi^2 - \frac{\nu}{2} \chi^4 \right] W, \quad (93)$$

совпадающему с уравнением Шредингера для частицы в потенциале  $V(\chi) = \frac{\chi^2}{2} - \frac{\nu}{4} \chi^4$ .

Из квантовой механики известно, что если в некоторый момент времени  $\eta_0$  задаться волновой функцией  $W_0(\chi)$ , локализованной вблизи точки  $\chi = 0$ , то с ростом  $\eta$  квадрат модуля волновой функции  $W(\eta, \chi)$  при малых  $\chi$  экспоненциально убывает,

$$|W(\eta, \chi)|^2 \propto \exp [-\Gamma (\eta - \eta_0)], \quad (94)$$

за счет туннелирования под барьером. Константа распада  $\Gamma$  в формуле (94) пропорциональна квадрату коэффициента подбарьерного прохождения частицы с энергией  $\varepsilon = 0$  [ $\chi_0$  — точка поворота потенциала  $V(\chi)$ :  $V(\chi_0) = V(0) = 0$ ]:

$$\Gamma \sim \exp \left[ -2\sqrt{2} \int_0^{\chi_0} \sqrt{\frac{\chi^2}{2} - \frac{\nu}{4} \chi^4} d\chi \right] = \exp \left[ -\frac{8\pi^2}{3\Lambda} \right]. \quad (95)$$

Обратим внимание на то, что мы получили для скорости распада то же выражение, что в плоском мире для теории  $-\frac{\lambda}{4}\dot{\varphi}^4$ , где туннелирование описывается, например, с помощью инстантонов Фуббини, евклидово действие на которых как раз равно  $8\pi^2/3\lambda$ . Это приводит к выводу, что поле с конформной связью в квазиклассическом приближении не чувствует кривизны мира (для чего, собственно, конформная связь и вводилась), если вместо времени пользоваться конформным временем.

Есть, однако, принципиальное отличие рассматриваемой ситуации от случая распада ложного вакуума в плоском мире. Заключается это отличие в ограниченности сверху конформного времени,  $\eta < 0$ . Поскольку, по предположению, время формирования волнового пакета  $\eta_0$  мало:  $|\eta_0| \equiv 1/a_0 \sqrt{\Lambda} \ll 1$ , то и приращение времени  $\eta - \eta_0 < \frac{1}{a_0 \sqrt{\Lambda}} \ll 1$ . Между тем хорошо известно (см., например, [29]), что волновая функция местастабильного состояния затухает экспоненциально со временем, в соответствии с формулой (94), лишь при  $\eta - \eta_0 \gg 1$ . Так что в нашем случае попросту не хватает времени для затухания волновой функции формально метастабильного состояния, т. е. однородное во всем пространстве туннелирование не осуществится. Этот вывод находится в противоречии с утверждением Хоукинга и Мосса применительно к рассматриваемой теории.

Перейдем теперь к рассмотрению скалярного поля, минимальным образом связанного с гравитацией. В этом случае лагранжиан

$$L_S = 2\pi^2 R^3 \alpha \left[ \frac{1}{2\alpha^2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right] \quad (96)$$

после замены переменной  $\varphi = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi^2}} \Phi$  примет вид (остальные обозначения такие же, как в рассматривавшемся выше случае поля с конформной связью):

$$L_S = \frac{N}{2\alpha} \left[ a^4 \left( \frac{1}{N} \frac{d\Phi}{dt} \right)^2 - a^4 \Lambda(\Phi) \right]; \quad \Lambda(\Phi) \equiv 4\pi^2 \sigma^4 V. \quad (97)$$

Действуя так же, как прежде, придем к гамильтониану:

$$\mathcal{H} = \frac{N}{2a} \left\{ \frac{\pi_\Phi^2}{a^2} - \pi_a^2 - a^2 + \Lambda(\Phi) a^4 \right\}. \quad (98)$$

При переходе к квантовой теории получим уравнение, аналогичное (81):

$$\left\{ a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} - a^4 + \Lambda(\Phi) a^8 \right\} \Psi(a, \Phi) = 0. \quad (99)$$

Выделяя из  $\Lambda(\Phi)$  не зависящую от поля часть,  $\Lambda(\Phi) = \Lambda + w(\Phi)$  ( $w(0) = 0$ ) и интересуясь эволюцией  $\Psi$  при  $\sqrt{\Lambda} a \gg 1$ ,

сделаем, как и прежде, подстановку (91). Функция  $W(a, \Phi)$  удовлетворяет теперь уравнению

$$i \sqrt{\Lambda} a^4 \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} + w(\Phi) a^6 \right\} W. \quad (100)$$

Рассмотрим вначале случай простейшего потенциала  $V(\varphi) = V(0) + \frac{m^2}{2} \varphi^2$ , т. е.  $w(\Phi) = \mu^2 \Phi^2$ , где  $\mu^2 = \sigma^2 m^2$ . В соответствующем уравнении Шредингера,

$$i \sqrt{\Lambda} a^4 \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} + \mu^2 \Phi^2 a^6 \right) W, \quad (100')$$

удобно сделать замену независимых переменных  $\Phi$ :  $a \rightarrow \xi = a^{3/2} \Phi$ ,  $t = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \ln a$  и перейти от функции  $W(t, \xi)$  к функции  $u(t, \xi)$  по формуле

$$W(t, \xi) = \exp \left[ \frac{3}{4} \sqrt{\Lambda} (t - i\xi^2) \right] u(t, \xi). \quad (101)$$

Введенная таким образом функция  $u(t, \xi)$  удовлетворяет уравнению Шредингера для гармонического осциллятора:

$$i \frac{\partial}{\partial t} u = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u + \frac{\omega^2}{2} \xi^2 u, \quad (102)$$

где  $\omega^2 = \mu^2 - 9\Lambda/4$ .

Волновая функция основного состояния осциллятора, равная

$$u(t, \xi) = \left( \frac{\omega}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left[ -i \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \xi^2 \right], \quad (103)$$

приводит к следующей зависимости функции  $W$  от  $a$  и  $\Phi$ :

$$W(a, \Phi) = \left( \frac{\omega}{\pi} \right)^{1/4} a^{3/4} \exp \left[ -i \left( \frac{\omega}{2\sqrt{\Lambda}} \ln a + \frac{3}{4} \sqrt{\Lambda} a^3 \Phi^2 \right) \right] \exp \left[ -\frac{\omega}{2} a^3 \Phi^2 \right]. \quad (104)$$

Квадрат модуля волновой функции  $W(a, \Phi)$  соответствует гауссову пакету, сжимающемуся с увеличением  $a$ :

$$|W(a, \Phi)|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} a^{3/2} \exp(-\omega a^3 \Phi^2). \quad (105)$$

Нормировка волновой функции (105) сохраняется при увеличении  $a$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi |W(a, \Phi)|^2 = 1$ . Так и должно быть, поскольку в правой части уравнения (101) стоит эрмитов оператор.

Заметим, что говорить об основном состоянии осциллятора можно только при  $\omega^2 > 0$ , т. е. при  $\mu^2 > 9\Lambda/4$ . Разберемся, с чем связано

выделение значения  $\mu^2 = 9\Lambda/4$ . Для этого обратимся к классическому уравнению движения для поля  $\Phi$ :

$$\ddot{\Phi} + 3\sqrt{\Lambda}\dot{\Phi} + \mu^2\Phi = 0, \quad (106)$$

где точка означает дифференцирование по  $t = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \ln a$ . Фундаментальная система решений этого уравнения:

$$\Phi_{1,2} = \exp \left[ \left( -\frac{3}{2} \sqrt{\Lambda} \pm i \sqrt{\mu^2 - \frac{9}{4} \Lambda} \right) t \right]. \quad (107)$$

Таким образом, при  $\mu^2 > \frac{9}{4} \Lambda$  решение носит затухающий периодический характер, в то время как при  $\mu^2 < 9\Lambda/4$  колебания отсутствуют — движение аperiodично. Понятно, почему ширина гауссова пакета (105) убывает с увеличением  $a$ : амплитуда колебаний при классическом рассмотрении убывает, как это следует из уравнения (107). В связи с распадом ложного вакуума нас будет интересовать только случай  $\mu^2 > 9\Lambda/4$ . Это связано с тем, что распад квазистационарного состояния происходит вследствие того, что, пользуясь терминологией одночастичной механики, частица периодически ударяется о потенциальный барьер и при каждом столкновении имеет некоторую вероятность протуннелировать. Когда мы от потенциала  $V(\varphi) = V(0) + \frac{m^2}{2}\varphi^2$  переходим к потенциалу с барьером  $V(\varphi) = V(0) + \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4$ , то распад состояния, сосредоточенного возле  $\varphi = 0$ , будет происходить только если поле будет «биться» о потенциальный барьер при своих колебаниях, т. е. только если реализуется режим затухающего периодического движения, при  $\mu^2 > 9\Lambda/4$ .

При  $w(\Phi) = \mu^2\Phi^2$  ( $\mu^2 > \frac{9}{4}\Lambda$ ) мы нашли волновую функцию (104) основного состояния. Пусть теперь  $w(\Phi) = \mu^2\Phi^2 - \frac{\nu}{2}\Phi^4$ ,  $\nu = \lambda/2\pi^2 \ll 1$ . За счет туннелирования под барьером основное состояние станет квазистационарным. Скорость распада определяется волновой функцией за барьером, при  $\Phi^2 \gg \mu^2/\nu$ , относительно ее значения при  $\Phi = 0$ . Рассмотрим ситуацию в квазиклассическом приближении, когда  $W = \exp(iS(a, \Phi)\sqrt{\Lambda})$ , где функция  $S(a, \Phi)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби, следующему из (100):

$$a^4 \frac{\partial S}{\partial a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial \Phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{w(\Phi)}{\Lambda} a^6 = 0, \quad (108)$$

или, более подробно,

$$a^4 \frac{\partial S}{\partial a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial \Phi} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{\mu}^2}{2} \Phi^2 - \frac{g}{4} \Phi^4 \right) a^6 = 0, \quad (109)$$

где  $\tilde{\mu}^2 = \mu^2/\Lambda$ ,  $g = \nu/\Lambda$ .

Как видно из формулы (104), в случае  $g = 0$  функция  $S(a, \Phi)$  равна

$$S = a^3 \Phi^2 \left( -\frac{3}{4} + \frac{i}{2} \tilde{\omega} \right), \quad (110)$$

где  $\tilde{\omega} = \omega/\sqrt{\Lambda} = \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 9/4}$ . Это наводит на мысль искать решение уравнения (109) в виде

$$S(a, \Phi) = a^3 \Phi^2 \sigma(\eta), \quad (111)$$

где  $\eta = \eta(\Phi) = \sqrt{\frac{g}{2}} \Phi$ .

Функция  $\sigma(\eta)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(2\sigma + \eta\sigma')^2 + 6\sigma + (\tilde{\mu}^2 - \eta^2) = 0, \quad (112)$$

из которого следует, что при  $\eta = 0$

$$\sigma \equiv \sigma_0 = -\frac{3}{4} \pm \frac{i}{2} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - \frac{9}{4}}. \quad (113)$$

Для согласования с формулой (110) следует выбрать здесь верхний знак. При таком выборе уравнение (112) эквивалентно уравнению

$$\eta\sigma' = -\sqrt{\eta^2 - \tilde{\mu}^2 - 6\sigma - 2\sigma}, \quad (114)$$

где при вычислении квадратного корня полагается, что разрез в комплексной плоскости сделан по отрицательной действительной полуоси.

Нетрудно видеть, что при больших  $\eta$  уравнение (114) имеет решение  $\sigma = -\alpha\eta + i\beta/\eta$ . Значение коэффициента  $\alpha$  не зависит от величины  $\tilde{\mu}^2$  и определяется непосредственно из уравнения (114):  $\alpha = 1/3$ . Для определения коэффициента  $\beta$  приходится использовать численный счет, который показывает, в частности, что при больших  $\mu$  ( $\mu \gtrsim 10$ ) зависимость  $\beta$  от  $\mu^3$  прекрасно аппроксимируется прямой

$$\beta = 0,7\mu^3. \quad (115)$$

Мнимая часть функции действия (111), таким образом, при больших  $\Phi$ ,  $\Phi^2 \gg \frac{1}{g}$ , т. е. при  $\varphi^2 \gg H^2/\lambda$ , выходит на константу по  $\varphi$ :

$$\text{Im } S_\infty = \frac{2}{g} a^3 \beta = \frac{4\pi^2}{\lambda} \Lambda \beta a^3. \quad (116)$$

Волновая функция  $W(a, \Phi)$  при  $\Phi \gg 1/\sqrt{g}$  подавлена относительно ее значения при  $\Phi = 0$ , как

$$\begin{aligned} \exp(-\sqrt{\Lambda} \operatorname{Im} S_\infty) &= \exp\left(-\frac{4\pi^2}{\lambda} \beta \Lambda^{3/2} a^3\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{4\pi^2}{\lambda} \beta (HR)^3\right). \end{aligned} \quad (117)$$

Учтем, что объем  $\Omega$  трехмерного мира равен  $2\pi^2 R^3$ , и получим, что вероятность обнаружить поле за барьером подавлена, как

$$\exp\left(-\frac{4\beta}{\lambda} H^3 \Omega\right), \quad (118)$$

что совершенно естественно с физической точки зрения, так как мы рассматриваем туннелирование во всем объеме Вселенной. Таким образом, вероятностью однородного туннелирования при больших  $R$  следует полностью пренебречь, что и ожидалось ранее на основании качественных соображений [32].

Смысл формулы (118), на самом деле, шире, чем предполагается по ее выводу. Выражение (118) можно рассматривать как вероятность туннелирования с образованием поля, однородного в физическом объеме  $\Omega \gg H^{-3}$ , не обязательно равном объему всей замкнутой Вселенной. При больших  $\mu$  ( $\mu \gg 10$ ), когда справедлива формула (115), получим, что вероятность однородного туннелирования в объеме  $\Omega$  пропорциональна

$$\exp\left(-\frac{2,8}{\lambda} m^3 \Omega\right).$$

Результат именно такой структуры можно получить, используя методы разд. 1, рассматривая туннелирование в плоском мире с образованием поля, однородного в объеме  $\Omega$ . Такого совпадения и следует ожидать в пределе  $m \gg H$ , когда кажется справедливым пренебрежение гравитационными эффектами.

Полученные выше результаты (117) и (118) относились лишь к случаю большой массы,  $m^2 > \frac{9}{4} H^2$ . В противоположном случае малых масс,  $m^2 \ll H^2$ , как мы видели выше, однородного туннелирования нет. Но если нас интересует поле  $\phi(\mathbf{x})$ , однородное не во всей (замкнутой) Вселенной, а в масштабе физических длин, скажем, порядка  $H^{-1}$ , то необходимо рассматривать гармоники поля  $\phi(\mathbf{k})$  с волновыми числами  $|\mathbf{k}_{\text{phys}}| \lesssim H$ . Важным является то обстоятельство, что в расширяющейся Вселенной физическая длина волны каждой моды возрастает с ростом масштабного фактора  $R$ . В силу этого все большее число мод поля  $\phi$  дают вклад в усредненное по физическому объему порядка  $H^{-3}$  поле. Рассмотрим этот процесс, следуя работе Старобинского [27, 28].

Основная идея состоит в том, что при разбиении поля  $\phi(\mathbf{x})$  на длинноволновую  $\Phi$  и коротковолновую части влияние коротковол-



новой части на  $\Phi$  приобретает характер случайной силы, обладающей простыми статистическими свойствами.

В квантовой теории поля квадратичная флуктуация поля  $\varphi(\mathbf{x})$  бесконечна в результате сложения нулевых колебаний бесконечного числа мод. Однако среднее значение  $\overline{\varphi}(\mathbf{x})$  в конечной области пространства имеет конечную квадратичную флуктуацию. Определим среднее по координатному объему  $b^3$  формулой

$$\varphi_b = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{b^3} \int d^3x e^{-x^2/2b^2} \varphi(\mathbf{x}), \quad x = |\mathbf{x}|.$$

Воспользовавшись разложением в импульсном пространстве (мы считаем пространство плоским):

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [a_k \varphi_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_k^\dagger \varphi_k^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}], \quad (119)$$

получим для  $\varphi_b$ :

$$\varphi_b = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{k^2 b^2}{2}} [a_k \varphi_k + a_k^\dagger \varphi_k^*]. \quad (120)$$

Здесь  $a_k, a_k^\dagger$  — обычные операторы уничтожения и рождения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям  $[a_k, a_q^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ . Как и должно быть, в среднее по объему  $b^3$  значение поля  $\varphi$  дают эффективный вклад моды с  $k \lesssim b^{-1}$ . Мы для удобства заменим (120) формулой

$$\varphi_b = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \theta(-k + b^{-1}) [a_k \varphi_k + a_k^\dagger \varphi_k^*]. \quad (121)$$

Мы сейчас будем рассматривать эволюцию поля  $\varphi$  на фоне заданной метрики  $dS^2 = -dt^2 + R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$  — метрики Вселенной де Ситтера с постоянной Хаббла  $H = \sqrt{\frac{k}{3}} V(0)$ . Поскольку нас интересуют макроскопические эффекты, имеющие место в масштабе физических длин порядка  $H^{-1}$ , то соответствующая величина  $b$ , характеризующая координатный объем, равна

$$b = \frac{1}{\varepsilon R} H^{-1}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Более точное ограничение на величину  $\varepsilon$  будет получено ниже. Обозначив усредненное по этому объему значение поля  $\varphi$  буквой  $\Phi$ :

$$\Phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \theta(-k + \varepsilon R H) [a_k \varphi_k + a_k^\dagger \varphi_k^*], \quad (122)$$

получим для скорости изменения  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \theta(-k + \varepsilon R H) [a_k \dot{\varphi}_k + a_k^\dagger \dot{\varphi}_k^*] + \\ &+ \varepsilon R H^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \delta(k - \varepsilon R H) [a_k \varphi_k + a_k^\dagger \varphi_k^*] \equiv \\ &\equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \theta(-k + \varepsilon R H) [a_k \dot{\varphi}_k + a_k^\dagger \dot{\varphi}_k^*] + f(t). \end{aligned} \quad (123)$$

Уравнение движения поля  $\varphi(x)$  на фоне Вселенной де Ситтера ( $v(\varphi) \equiv V(\varphi) - V(0) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda\varphi^4}{4}$ ):

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{R^2}\nabla^2\varphi + m^2\varphi - \lambda\varphi^3 = 0, \quad (124)$$

так что мода  $\varphi_k$  приближенно подчиняется уравнению

$$\ddot{\varphi}_k + 3H\dot{\varphi}_k + \frac{k^2}{R^2}\varphi_k + m^2\varphi_k - \lambda\langle\varphi^2\rangle\varphi_k = 0. \quad (124')$$

Для мод с  $k \geq \varepsilon RH$  последними двумя членами в уравнении (124') можно пренебречь при выполнении двух условий:

- 1)  $m^2 \ll k^2/R^2$ , т. е.  $m/H \ll \varepsilon$ ;
- 2)  $\lambda\langle\varphi^2\rangle \ll k^2/R^2$ .

Условие 2) справедливо всегда, когда можно говорить о метастабильном состоянии в окрестности  $\varphi = 0$ . Действительно, эффективный квадрат массы

$$M^2 = m^2 - \lambda\langle\varphi^2\rangle$$

должен быть в этом случае положителен, и с учетом условия 1) получим

$$\lambda\langle\varphi^2\rangle < m^2 \ll k^2/R^2.$$

При этом, согласно работе [32],

$$\langle\varphi^2\rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2 m^2}$$

и для величины  $\lambda$  получаем ограничение:

$$\lambda < \frac{8\pi^2}{3} \frac{m^4}{H^4} \ll \ll \ll \frac{8\pi^2}{3} \varepsilon^4.$$

Заметим, что полученное нами условие 1),  $m/H \ll \varepsilon \ll 1$ , несколько жестче, чем условие, обсуждавшееся Старобинским:  $m^2/H^2 \ll \varepsilon \ll 1$ .

Итак, при выполнении условий 1), 2) моды с  $k \geq \varepsilon RH$  подчиняются уравнению

$$\ddot{\varphi}_k + 3H\dot{\varphi}_k + \frac{k^2}{R^2}\varphi_k = 0 \quad (R = H^{-1}e^{Ht}), \quad (125)$$

и потому мы можем воспользоваться результатами [41] и положить в разложении (119), (122)

$$\varphi_k \equiv \varphi_k = \frac{H}{\sqrt{2k}} \left( \eta + \frac{1}{ik} \right) e^{-ik\eta},$$

где  $\eta = -1/HR$ . Но  $|k\eta| = k/HR = \varepsilon \ll 1$ , так что

$$\varphi_k \simeq -i \frac{H}{\sqrt{2}k^{3/2}} \quad \text{при} \quad k = \varepsilon RH. \quad (126)$$

Подставим в уравнение движения (124) разложение поля  $\varphi(\mathbf{x})$  в импульсном пространстве (120):

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ a_{\mathbf{k}} \left( \ddot{\Phi}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{R^2} \Phi_{\mathbf{k}} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \text{h.c.} \right\} + m^2\varphi - \lambda\varphi^3 = 0.$$

Разбив область интегрирования на две части, получим:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \theta(\varepsilon RH - k) \left\{ a_{\mathbf{k}} \left( \ddot{\Phi}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{R^2} \Phi_{\mathbf{k}} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \text{h.c.} \right\} + \\ & + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \theta(k - \varepsilon RH) \left\{ a_{\mathbf{k}} \left( \ddot{\Phi}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{R^2} \Phi_{\mathbf{k}} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \text{h.c.} \right\} + \\ & + m^2\varphi(\mathbf{x}) - \lambda\varphi^3(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned}$$

Второй из интегралов равен нулю, поскольку при всех  $k > \varepsilon RH$  справедливо уравнение (125). В первом интеграле наиболее важен член, содержащий первую производную. В результате мы получаем, что

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \theta(\varepsilon RH - k) \left\{ a_{\mathbf{k}} \dot{\Phi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \text{h.c.} \right\} = \\ & = -\frac{1}{3H} (m^2\varphi(\mathbf{x}) - \lambda\varphi^3(\mathbf{x})). \end{aligned} \tag{127}$$

Усреднив это уравнение по объему  $b^3$ , получим с учетом уравнения (123), что

$$\dot{\Phi} = -\frac{1}{3H} \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi} + f(t), \tag{128}$$

где

$$f(t) = \varepsilon RH^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \delta(k - \varepsilon RH) [a_{\mathbf{k}}\Phi_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^*\Phi_{\mathbf{k}}^*],$$

а  $\varphi_{\mathbf{k}}$ , в свою очередь, определяется выражением (126):

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_h = -i \frac{H}{\sqrt{2} k^{3/2}}, \quad k = \varepsilon RH.$$

Уравнение (128) фактически является уравнением Ланжевена со случайной силой  $f(t)$ . Статистические свойства  $f(t)$  характеризуются корреляторами  $\langle f(t) \rangle$ ,  $\langle f(t_1) f(t_2) \rangle$ ,  $\langle f(t_1) f(t_2) f(t_3) \rangle$  и т.д. Если сила  $f(t)$  описывает гауссов случайный шум, т. е. если выполняются равенства:

$$\langle f(t_1) \dots f(t_n) \rangle = 0, \quad n \text{ нечетные,}$$

$$\langle f(t_1) \dots f(t_n) \rangle = \sum_{(i,j)} \prod \langle f(t_i) f(t_j) \rangle, \quad n \text{ чётные,}$$

$$\langle f(t_1) f(t_2) \rangle = 2D\delta(t_1 - t_2),$$

то уравнение Ланжевена (128) приводит к обычному уравнению Фоккера — Планка для функции распределения  $\rho(t, \Phi)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \frac{1}{3H} \frac{\partial V}{\partial \Phi} \rho \right) + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \Phi^2}. \quad (129)$$

Найдем первые корреляторы силы  $f(t)$ , проводя усреднение по вакууму, т. е. по состоянию  $| \rangle$ , удовлетворяющему равенству  $a_k | \rangle = 0$ :

$$\begin{aligned} \langle f(t) \rangle &= 0, \\ \langle f(t_1) f(t_2) \rangle &= \varepsilon^2 H^4 R_1 R_2 \int \frac{d^3 k d q}{(2\pi)^3} \delta(k - \varepsilon R_1 H) \times \\ &\quad \times \delta(q - \varepsilon R_2 H) \langle a_k a_q^\dagger \rangle \varphi_k(t_1) \varphi_q^*(t_2) = \\ &= \varepsilon^2 H^4 R_1 R_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(k - \varepsilon R_1 H) \delta(k - \varepsilon R_2 H) \varphi_k(t_1) \varphi_k^*(t_2) = \\ &= \frac{\varepsilon^2 H^6 R_1 R_2}{(2\pi)^2} \int \frac{d k}{k} \delta(k - \varepsilon R_1 H) \delta(k - \varepsilon R_2 H) = \\ &= \frac{\varepsilon^2 H^6 R_1 R_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon R_1 H} \delta(\varepsilon R_1 H - \varepsilon R_2 H) = \\ &= \frac{\varepsilon H^5 R_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon R_2 H^2} \delta(t_1 - t_2) = \frac{H^3}{4\pi^2} \delta(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Легко также увидеть, что

$$\begin{aligned} \langle f(t_1) f(t_2) f(t_3) \rangle &= 0, \\ \langle f(t_1) f(t_2) f(t_3) f(t_4) \rangle &= \\ &= \frac{H^3}{(2\pi)^4} [\delta(t_1 + t_2) \delta(t_3 - t_4) + \delta(t_1 - t_3) \delta(t_2 - t_4) + \delta(t_1 - t_4) \delta(t_2 - t_3)]. \end{aligned}$$

Сила  $f(t)$  действительно имеет гауссов характер при сделанном предположении относительно состояния  $| \rangle$ .

Итак, функция распределения  $\rho(\Phi, t)$  значений  $\Phi$  подчиняется уравнению Фоккера — Планка (129) с  $D = H^3/8\pi^2$ . Для процессов Фоккера — Планка хорошо известно решение задачи о «времени первого скачка» [40]. В случае, если в начальный момент времени  $\Phi$  локализована в окрестности метастабильной равновесной точки, отделенной от точки истинного равновесия высоким потенциальным барьером (высоты  $\Delta V$ ), среднее время, за которое  $\Phi$  выходит за барьер, экспоненциально велико [27, 28]:

$$\Delta t \sim \exp \left[ \left( \frac{\Delta V}{3H} \right) / D \right] = \exp \left[ \frac{8\pi^2 \Delta V}{3H^4} \right]. \quad (130)$$

Данный результат верен, когда показатель экспоненты велик. В случае потенциала  $v(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda \varphi^4}{4}$ , рассматриваемого нами, это означает, что должно выполняться неравенство

$$\frac{8\pi^2}{3\lambda} \frac{m^4}{4H^4} \gg 1,$$

что совпадает с требованием 2), рассмотренным ранее.

Выражение (130) в рассматриваемом случае  $m \ll H$  совпадает с результатом Хоукинга и Мосса [5]. Мы хотим подчеркнуть, что это совпадение имеет место лишь для случая не полностью однородного туннелирования, которое кажется однородным в некоторой ограниченной области размером  $l \gtrsim H^{-1}$ . Как мы уже отмечали, полностью однородное туннелирование в сценарии раздувающейся Вселенной не осуществляется. Кроме того, результат Хоукинга — Мосса (как уже видно из ограничения  $m \ll H$ ) справедлив далеко не для всех потенциалов  $V(\varphi)$ . Особенно ясно трудности, связанные с применением результата Хоукинга — Мосса, проявляются при рассмотрении туннелирования в потенциале, изображенном на рис. 2 (см. введение). Действительно, весь «вывод» Хоукинга — Мосса основан на наличии постоянного решения  $\varphi = \varphi_1$  евклидовых уравнений (60), отвечающего максимуму потенциала  $V(\varphi)$ . И поэтому по Хоукингу и Моссу туннелирование идет из минимума  $\varphi = 0$  потенциала  $V(\varphi)$ , тоже являющегося решением уравнений (60), как раз в максимум  $V(\varphi)$ . Для потенциала, изображенного на рис. 1, вывод однозначный. Но в случае потенциала, изображенного на рис. 2, решений евклидовых уравнений (60) столько, сколько у потенциала  $V(\varphi)$  минимумов и максимумов, и к каждому из них применимо рассуждение Хоукинга и Мосса. При этом в максимуме  $\varphi_3$  поле появляется раньше, чем в  $\varphi_1$ , а в максимуме  $\varphi_5$  — раньше, чем в  $\varphi_3$ . Но еще скорее поле должно было бы появиться в любом из минимумов, и необходимое для этого время было бы не экспоненциально велико, а согласно формуле (1) экспоненциально мало. При чем же здесь тогда вообще туннелирование в максимум с последующей классической эволюцией поля к минимуму? Еще более странно то, что согласно результату Хоукинга — Мосса туннелирование в любой из локальных экстремумов никак не зависит от поведения  $V(\varphi)$  между  $\varphi = 0$  и экстремумом, в который идет туннелирование. Такой вывод кажется заведомо неверным.

Между тем в подходе, предложенном Старобинским, отчетливо видно, что поле  $\varphi$  (122) покидает окрестность минимума  $\varphi = 0$  за счет «раскачки» коротковолновыми флуктуациями и, естественным образом, вначале попадает в ближайший к исходному минимуму  $\varphi = 0$  максимум  $\varphi_1$ , после чего классическим образом падает в минимум  $\varphi_2$ . Потом процесс повторяется: поле раскачивается в окрестности минимума  $\varphi_2$ , попадает в тот окрестный максимум, что пониже ( $\varphi_3$ ), и т. д. При этом вероятность туннелирования, согласно подходу Старобинского, дается формулой (130) лишь при выполнении ряда существенных ограничений на вид  $V(\varphi)$  [барьер должен быть достаточно низким, и потенциал должен быть достаточно плоским, см. обсуждение после формулы (124')]. Из наших результатов следует, что полностью однородное туннелирование может осуществляться лишь при выполнении еще более жестких ограничений на  $V(\varphi)$ .

Резюмируя, можно сказать, что при рассмотрении туннелирования в расширяющейся Вселенной евклидов подход может играть важ-

ную эвристическую роль, и в некоторых случаях он может помочь нам угадать правильный ответ. Однако этот метод сам по себе не всегда является достаточно обоснованным и ответы, получаемые этим методом, иногда оказываются физически неправильными. В таких случаях приходится использовать более совершенные методы, такие, как общий гамильтонов подход или метод, разработанный Старобинским.

## 6. КВАНТОВОЕ РОЖДЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ ИЗ «НИЧЕГО»

Идея о квантовом рождении Вселенной из «ничего», высказанная в [15], в последние годы широко обсуждается в литературе, см., например, [16—23]. Теория соответствующих процессов еще не вполне развита, и даже сама концепция рождения из «ничего» или из «другой Вселенной» нуждается в более детальной разработке. Тем не менее некоторые черты теории квантового рождения Вселенной сейчас уже начинают проясняться.

А именно, согласно квантовой теории гравитации, квантовые флуктуации метрики и всех физических полей в малых масштабах  $\Delta l \ll M_{\text{P}}^{-1}$  чрезвычайно велики [42]. Предположим, что в результате таких флуктуаций возникает область, заполненная медленно меняющимся скалярным полем  $\phi$  с плотностью энергии  $V(\phi)$ . Если размер этой области  $\Delta l$  превышает размер горизонта событий в мире де Ситтера с плотностью энергии  $V(\phi)$ ,  $\Delta l \gtrsim H^{-1} = \sqrt{\frac{3M_{\text{P}}^2}{8\pi V}}$ , то внутренняя часть этой области будет экспоненциально расширяться независимо от событий вне указанной области [43]. Поскольку характерный масштаб, в котором флуктуации метрики велики, равен  $l_{\text{P}} \sim M_{\text{P}}^{-1}$ , то квантовые флуктуации могут привести к рождению раздувающейся Вселенной, лишь если  $H^{-1} = \sqrt{\frac{3M_{\text{P}}^2}{8\pi V}} \ll M_{\text{P}}^{-1}$ , откуда следует условие

$$V(\phi) \gtrsim M_{\text{P}}^4. \quad (131)$$

В то же время вероятность рождения Вселенной с  $V(\phi) \ll M_{\text{P}}^4$  должна быть сильно подавлена. С другой стороны, из условия  $\Delta l \ll M_{\text{P}}^{-1}$  следует, что если рождается Вселенная Фридмана, то она обязательно должна быть замкнутой [16].

Первая попытка количественного описания квантового рождения Вселенной из «ничего» была сделана Виленкиным [17]. Однако с нашей точки зрения его подход был не вполне обоснованным, а его результат для вероятности рождения Вселенной  $P \sim \exp\left(\frac{3M_{\text{P}}^4}{8V(\phi)}\right)$  означал бы, вопреки общепринятой точке зрения, что квантово-гравитационные эффекты тем сильнее, чем меньше плотность энергии  $V(\phi)$ .

Недавно интересный подход к проблеме квантового рождения Вселенной был предложен Хартлем и Хоукингом [18]. Этот подход основывается на вычислении волновой функции  $\Psi_0(a, \varphi)$  основного состояния Вселенной с масштабным фактором  $a$ , заполненной однородным полем  $\varphi$  [38], которая, согласно Хартлю и Хоукингу [18], в квазиклассическом приближении имеет вид

$$\Psi_0(a, \varphi) \propto \exp[-S_E(a, \varphi)]. \quad (132)$$

Здесь  $S_E(a, \varphi)$  — евклидово действие, соответствующее решениям уравнений движения для  $a(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  с граничными условиями  $a(0) = a$ ,  $\varphi(0) = \varphi$  в пространстве с евклидовой сигнатурой метрики. Основная идея вывода соотношения (132) состоит в следующем. Рассмотрим функцию Грина частицы, движущейся из точки  $(0, t')$  в точку  $(\mathbf{x}, t)$ :

$$\langle \mathbf{x}, 0 \mid 0, t' \rangle = \sum_n \Psi_n(\mathbf{x}) \Psi_n^*(0) \exp(iE_n t') = \int D\mathbf{x}(t) \exp(iS[\mathbf{x}(t)]), \quad (133)$$

где  $\Psi_n(\mathbf{x})$  — не зависящие от времени собственные функции оператора энергии с собственными значениями  $E_n \geq 0$ . Сделаем теперь поворот  $t \rightarrow -it$  и перейдем к пределу  $t' \rightarrow -\infty$ . В этом случае в сумме (133) выживает лишь член, отвечающий наименьшему значению  $E_n$  (нормированному на нуль), т. е.

$$\Psi_0(\mathbf{x}) \sim \int D\mathbf{x}(\tau) \exp\{-S_E[\mathbf{x}(\tau)]\}. \quad (134)$$

Обобщением этой формулы на интересующий нас случай в квазиклассическом приближении и должна была бы служить формула (132) [18]. Для случая медленно меняющегося поля  $\varphi$  (а именно этот случай представляет для нас наибольший интерес с точки зрения реализации сценария раздувающейся Вселенной) соответствующее действие  $S_E(a, \varphi) = -\frac{3M_{\text{П}}^4}{16V(\varphi)}$ . Отсюда следовало бы, что вероят-

ность квантового рождения Вселенной  $P \sim |\Psi_0|^2 \sim \exp\left[\frac{3M_{\text{П}}^4}{8V(\varphi)}\right]$ , что совпадает с результатом Виленкина [17]. К счастью, в рамках приведенного рассмотрения нетрудно выявить причину появления физически неправильного ответа. Дело в том, что эффективное действие масштабного фактора  $a$  имеет «неправильный» знак, см. (79):

$$S(a) = -\frac{1}{2} \int d\eta \left[ \left( \frac{da}{d\eta} \right)^2 - a^2 + \Lambda a^4 \right], \quad (135)$$

в обозначениях разд. 5, где  $\eta$  — конформное время,  $\eta = \int \frac{N dt}{a(t)}$ ;  $\Lambda$  — безразмерная космологическая постоянная,  $\Lambda = \frac{k^2 V(\varphi)}{36\pi^2}$  для медленно меняющегося поля  $\varphi$ . Из сравнения (135) и (2) ясно, что

«возбуждения» поля  $a$  вблизи  $a = 0$ , в отличие от частиц поля  $\varphi$ , должны иметь отрицательную энергию,  $E_n \leq 0$ . Физическая причина этого состоит просто в том, что полная энергия замкнутого мира, рождение которого мы рассматриваем, всегда равна нулю, и, следовательно, знак гравитационной энергии противоположен знаку энергии вещества. Но в этом случае в формуле, аналогичной (133), для вычисления  $\Psi_0(a, \varphi)$  необходимо было бы производить вращение  $t \rightarrow it$ , а не  $t \rightarrow -it$ . Это приводит к исправленному квазиклассическому выражению для  $\Psi_0(a, \varphi)$  [19]:

$$\Psi_0(a, \varphi) \sim \exp[S_E(a, \varphi)] = \exp\left[-\frac{3M_P^4}{16V(\varphi)}\right]. \quad (136)$$

Как было видно, некритичное применение евклидова подхода к вопросу о квантовом рождении Вселенной приводит к физически неправильному результату. Поскольку обоснование евклидова подхода в [18] (а следовательно, и обоснование его исправленного варианта [19]) было в значительной степени интуитивным, обратимся к гамильтонову описанию квантового рождения Вселенной. Мы для простоты ограничимся рассмотрением скалярного поля, конформно связанного с гравитацией, однако полученные результаты оказываются справедливыми и в более важном случае неконформного медленно меняющегося поля  $\varphi$ , когда вкладом производных этого поля в действие можно пренебречь, так что вся роль этого поля сводится к появлению космологической постоянной  $\Lambda \propto V(\varphi)$  в формуле (135).

В рамках модели минисуперпространства волновая функция Вселенной в теории с конформным скалярным полем удовлетворяет уравнению (81), допускающему разделение переменных, см. уравнение (82), (84). Если космологическая постоянная  $\Lambda = 0$ , то уравнение (83) совпадает с уравнением Шредингера для гармонического осциллятора. Естественно допустить, что физическое состояние Вселенной описывается нормируемой волновой функцией [18], а основное состояние Вселенной, представляющее наибольший интерес, есть просто основное состояние осциллятора, определяемое уравнением (83). В этом случае вероятность того, что Вселенная имеет большой радиус  $R$ , подавлена как  $\exp(-a^2) = \exp\left(-\frac{3\pi}{2} \frac{R}{l_P^2}\right)$ . Поэтому, например, в мире с нулевой космологической постоянной, в котором мы сейчас живем, на планковских масштабах пространство далеко от однородности и, видимо, представляет собой пространственно-временную пену, «пузыри» которой никогда не расширяются до доступных нашему наблюдению размеров.

Если же космологическая постоянная  $\Lambda > 0$ , то Вселенная, осциллирующая возле  $a = 0$ , может протуннелировать под барьером «потенциальной энергии»  $W(a) \equiv \frac{a^2}{2} - \frac{\Lambda a^4}{2}$  к значению  $a = 1/\sqrt{\Lambda}$ , а затем классическим образом расширяться, достигая при этом макроскопических размеров. Вероятность образования макроскопической



Вселенной из микроскопического пузырька пространственно-временной пены равна, в этом случае, вероятности туннелирования и имеет согласно уравнению (83) величину порядка [21—23]:

$$\exp\left(-\frac{2}{3\Lambda}\right) = \exp\left(-\frac{8\pi^2}{3kH^2}\right) = \exp\left(-\frac{3M_P^4}{8V}\right), \quad (137)$$

что согласуется с результатами предыдущего рассмотрения [19].

Величину (137) можно проинтерпретировать как относительную вероятность рождения Вселенной при различной плотности энергии вакуума, так что отношение вероятностей рождения Вселенных с разными  $V$  равно

$$\frac{P_1}{P_2} = \exp\left[-\frac{2}{3\Lambda_1} + \frac{2}{3\Lambda_2}\right] = \exp\left[-\frac{3M_P^4}{8}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)\right].$$

Важно, что рождение Вселенной с  $V(\varphi) \gtrsim M_P^4$  не является экспоненциально подавленным, в соответствии с результатами качественного анализа, проведенного в начале данного раздела \*. Это, как показано в [19], приводит к естественной реализации сценария хаотического раздувания Вселенной [26].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с теорией классических полей в расширяющейся Вселенной, с теорией туннелирования в мире де Ситтера и в раздувающейся Вселенной и с проблемой квантового рождения Вселенной. Указанные вопросы чрезвычайно сложны, и далеко не всегда при их рассмотрении нам удавалось достичь окончательного успеха. Тем не менее мы надеемся, что нам удалось прояснить ряд пунктов, по поводу которых в литературе существовало большое количество противоречащих друг другу мнений. Особенно важным выводом, который мы для себя сделали из данного исследования, является вывод о некоторой ограниченности евклидова подхода и о необходимости разработки новых методов в теории туннелирования и в квантовой теории гравитации.

В последние годы интерес физиков к теории самых ранних стадий эволюции Вселенной и к вопросам квантовой космологии резко вырос. Количество публикаций на эту тему быстро увеличивается, и часто бывает, что исследователи, вновь включающиеся в эту работу, повторяют ошибки своих предшественников вместо того, чтобы на них учиться. Наше понимание квантовой космологии и теории туннелирования в расширяющейся Вселенной также является довольно

\* Следует заметить, что степень подавления вероятности рождения Вселенной с  $V \ll M_P^4$  может оказаться несколько ослабленной с учетом эффектов, связанных с рождением элементарных частиц [22].

неполным и ограниченным. И все же мы надеемся, что данная работа может оказаться полезной для тех, кто хочет всерьез разобраться в ситуации, сложившейся сейчас в этой интересной области науки.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. ВСЕЛЕННАЯ ДЕ СИТТЕРА

Мир де Ситтера является простейшим, после мира Минковского, геометрическим пространством, отвечающим десятипараметрической группе симметрии  $O(4,1)$ . Простота пространства де Ситтера с математической точки зрения как раз и заключается в высокой степени симметрии. Оно столь же симметрично, как и пространство Минковского, имеющее также десятипараметрическую группу симметрии — группу Пуанкаре. Однако с физической точки зрения пространство де Ситтера обладает весьма нетривиальными свойствами: горизонтом событий, особым поведением флуктуаций скалярного поля в таком пространстве и др.

Пространство де Ситтера является решением уравнений Эйнштейна с максимально симметричным тензором энергии-импульса:  $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}V$ , где  $V > 0$  — плотность энергии вакуума. Фактически  $V$  имеет смысл известного  $\Lambda$ -члена в уравнениях Эйнштейна.

Симметрия пространства де Ситтера позволяет представить его метрику в форме Фридмана — Робертсона — Уокера:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) dl^2, \quad (A.1)$$

где  $dl^2$  — элемент длины трехмерного пространства постоянной кривизны  $K$ . Без потери общности можно выбрать  $K = +1, 0, -1$ , если заменить в формуле (A.1)  $R^2$  на  $R^2K$  (при  $K > 0$ ) или на  $-R^2K$  (при  $K < 0$ ).

Зависимость масштабного фактора  $R$  от времени определяется из уравнений Эйнштейна с  $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}V$ :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{K}{R^2} = H^2. \quad (A.2)$$

где  $H^2 = kV/3$ , а  $k = 8\pi G$  — гравитационная постоянная.

В случае замкнутого трехмерного пространства, при  $K = 1$ , решением уравнения (A.2) является

$$R(t) = H^{-1} \operatorname{ch} Ht. \quad (A.3)$$

При  $K = 0$ , в случае плоского трехмерного пространства,

$$R(t) = H^{-1} e^{Ht}. \quad (A.4)$$

При больших временах,  $t \gg H^{-1}$ , масштабные факторы («радиусы») замкнутой и плоской Вселенных практически совпадают. Однако отсюда вовсе не следует близость соответствующих пространств уже потому, что замкнутая Вселенная имеет объем  $2\pi^2 R^3$ , а объем плоской — бесконечен.

Удобным способом представления пространства Фридмана (A.1) является его вложение в плоское пятимерное пространство с метрикой

$$ds^2 = -dz_0^2 + dz_1^2 + \dots + dz_4^2. \quad (A.5)$$

Пусть  $K = 1$ . Соответствующее трехмерное пространство можно представить в виде трехсферы  $u_1^2 + \dots + u_3^2 = 1$ , вложенной в четырехмерное пространство с метрикой  $du^2 = du_1^2 + \dots + du_3^2$ . Тогда, после введения координат

$z_0 = \int dt \sqrt{1 + \dot{R}^2}$ ,  $z_h = Ru_h = 1, \dots, 4$ , пространство Фридмана (A.1) представляется в виде поверхности вращения  $z_1^2 + \dots + z_4^2 = R^2(z_0)$  в пятимерном пространстве с метрикой (A.5) в том смысле, что элемент длины на этой поверх-

ности определяется выражением (A.1) [при  $dl^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ , отвечающем элементу длины на трехсфере].

В частном случае пространства де Ситтера получим, воспользовавшись выражением (A.3), что

$$z_0 = H^{-1} \text{sh } Ht \text{ и } R^2 = H^{-2} + z_0^2.$$

Поэтому геометрическим образом пространства де Ситтера является однополостной гиперboloид

$$-z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_4^2 = H^{-2}, \tag{A.6}$$

вложенный в плоское пятимерное пространство (A.5). Опуская два измерения ( $z_2 = z_3 = 0$ ), изобразим пространство де Ситтера на рис. 7. Трехмерный мир, отвечающий поверхности  $t = \text{const}$ , будет изображен на рис. 7 в виде окруж-

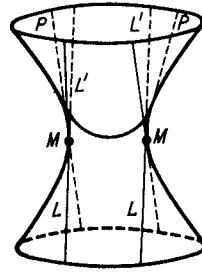
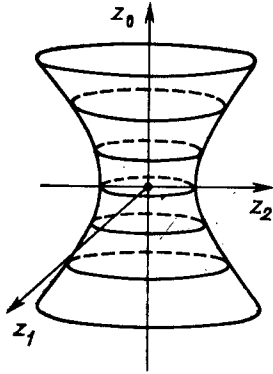


Рис. 7. Гиперboloид де Ситтера  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - z_0^2 = H^{-2}$ , вложенный в плоское пятимерное пространство ( $z_0, \dots, z_4$ ) (два измерения на рисунке опущены), с координатной сеткой (A.7), отвечающей замкнутому пространству

Рис. 8. Гиперboloид де Ситтера с параболой  $PP'$ , отвечающей пространству  $t = \text{const}$  в координатной сетке (A.8) ( $L$  и  $L'$  — генераторы — прямые, лежащие в сечении гиперboloида двумя параллельными плоскостями, касательными к горловине гиперboloида в диаметрально противоположных точках  $M$ )

ности. С возрастанием времени  $t$  радиус трехмерного мира  $R$  сначала уменьшается до минимального значения  $H^{-1}$ , отвечающего горловине гиперboloида, затем увеличивается в соответствии с (A.3).

Координатная сетка, отвечающая замкнутому трехмерному миру, с элементом длины, равным

$$ds^2 = -dt^2 + H^{-2} \text{ch}^2 Ht (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \tag{A.7}$$

покрывает все пространство де Ситтера. В то же время координатная сетка, отвечающая плоскому трехмерному миру, в которой элемент длины записывается в виде [см. (A.4)]:

$$ds^2 = -dt^2 + H^{-2} e^{2Ht} (dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{A.8}$$

при всевозможных  $t$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) покрывает лишь половину пространства де Ситтера, ограниченную двумя параллельными генераторами  $L$ , т. е. прямыми, лежащими на гиперboloиде. Такие прямые появляются в сечении гиперboloида

плоскостью, касающейся гиперболоида в его горловине, и являются мировыми линиями света, испущенного из точки в горловине. В координатной сетке (А.8) пространства линии  $t = \text{const}$  будут изображены парабололами, на которые гиперболоид сетется плоскостями, параллельными плоскости, определяемой генераторами  $L$  (рис. 8).

Координатную сетку, отвечающую открытой Вселенной Фридмана ( $K = -1$ ), а также сетку, соответствующую «статической Вселенной де Ситтера», мы рассматривать не будем, поскольку не пользуемся ими в основном тексте статьи.

Отметим в заключение, что при замене  $t = \tau$  в формуле (А.7) элемент длины становится равным

$$ds^2 = d\tau^2 + H^{-2} \cos^2 H\tau (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (\text{А.9})$$

что есть метрика 4-сферы, вложенной в пятимерное евклидово пространство. Координатная сетка, в которой выражена метрика (А.9), покрывает всю сферу при изменении  $H\tau$  в интервале  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , и пространства  $t = \text{const}$  являются (если, как и раньше, отбросить для наглядности два измерения) окружностями, параллельными фиксированному экватору.

Описанное свойство пространства де Ситтера часто выражают фразой типа: «При переходе в евклидову область де ситтеровский гиперболоид переходит в сферу  $S^4$ ».

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. СЦЕНАРИЙ РАЗДУВАЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ

Одно из наиболее интересных направлений, возникших в последние годы на стыке теории элементарных частиц и космологии, — это так называемый сценарий раздувающейся Вселенной. Этот сценарий позволил решить целый ряд проблем, существовавших в стандартной теории горячей Вселенной, и заставил космологов совершенно по-другому взглянуть на физические процессы, протекавшие на самых ранних стадиях эволюции Вселенной, а также и на вопрос о свойствах Вселенной в масштабах, на много порядков превышающих масштабы наблюдаемой части Вселенной размером  $l \sim 10^{28}$  см.

Основная общая черта различных вариантов сценария раздувающейся Вселенной состоит в предположении, что Вселенная во время своего расширения должна проходить через стадию, во время которой она находится в неустойчивом квазивакуумном состоянии с тензором энергии-импульса  $T_{\mu\nu} \approx g_{\mu\nu}V$ . На этой стадии Вселенная расширяется примерно так же, как и мир де Ситтера (А.4), т. е. экспоненциально (или квазиэкспоненциально, так что параметр Хаббла  $H = \dot{R}/R$  убывает очень медленно,  $\dot{H} \ll H^2$ ). При этом величина  $V$  либо постоянна, либо медленно убывает. Затем квазидеситтеровская стадия заканчивается (стадия раздувания) и энергия квазивакуумного состояния переходит в тепловую энергию. Температура Вселенной после ее разогрева практически не зависит от длительности стадии раздувания. В то же время все масштабы, характеризующие неоднородности во Вселенной, ее радиус трехмерной кривизны  $\bar{R}$  и т. д., становятся экспоненциально большими. Это позволяет объяснить, почему геометрия трехмерного пространства сейчас близка к евклидовой, почему Вселенная почти однородна и изотропна, почему в ней мало сверхтяжелых монополей, которые должны были рождаться на самых ранних стадиях эволюции Вселенной, и т. д. Не имея возможности обсуждать это здесь подробно, упомянем только, что сценарий раздувающейся Вселенной, в его современном виде, позволяет решить более десяти различных проблем, стоящих на стыке теории элементарных частиц и космологии, причем другого возможного решения большей части этих проблем пока не существует.

Впервые идея о расширении Вселенной в неустойчивом вакуумоподобном состоянии была высказана Глинером [44], см. также [45]. Важный этап в разви-

тии этой идеи связан с моделью Старобинского [48], которая, в несколько модифицированной форме, является сейчас одним из вариантов сценария раздувающейся Вселенной. Сам термин «сценарий раздувающейся Вселенной» был предложен Гусом [12], который считал, что роль энергии вакуума должна играть энергия скалярного поля  $V(\varphi)$  и что раздувание должно происходить в переохлажденном неустойчивом вакуумоподобном состоянии  $\varphi = 0$  ( $V(0) > 0$ ) до фазового перехода в устойчивое состояние  $\varphi = \sigma$  ( $V(\sigma) = 0$ ). Этот сценарий привел к слишком большим неоднородностям плотности после фазового перехода и сменился «новым» сценарием раздувающейся Вселенной [13, 14], согласно которому раздувание идет не только до фазового перехода, но и после него в процессе медленного «скатывания» поля  $\varphi$  к своему равновесному значению  $\sigma$ . И в сценарии Гуса, и в новом сценарии раздувающейся Вселенной фазовый переход осуществлялся путем подбарьерного рождения пузырьков (или сферически-несимметричных областей), заполненных полем  $\varphi \neq 0$ . Для описания этого перехода и понадобилась теория туннелирования в расширяющейся (раздувающейся) Вселенной.

В настоящее время кажется, что идея о раздувании наиболее естественным образом, может быть реализована в сценарии хаотического раздувания [26]. Согласно этому сценарию, Вселенная проходит через стадию раздувания в тех ее областях, которые по той или иной причине изначально были заполнены достаточно большим и достаточно однородным неравновесным полем  $\varphi$ . Этот механизм работает в широком классе теорий элементарных частиц, включающем в себя все теории, в которых  $V(\varphi) \sim \varphi^n$ ,  $n > 0$ , при  $\varphi \gg M_P$ . В качестве простейшего примера можно рассмотреть теорию с  $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} \varphi^4$ . Как показано в [26, 20], при  $\varphi \gg M_P$  уравнения Эйнштейна и уравнение движения для скалярного поля имеют решение

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 \exp\left(-\frac{V\sqrt{\lambda}}{V\sqrt{6\pi}} M_P t\right), \\ R(t) &= R_0 \exp\left(\frac{\pi}{M_P^2} \varphi_0^2 - \varphi^2(t)\right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.1})$$

За время, пока поле  $\varphi$  скатится до нуля от своего начального значения  $\varphi(0)$ , Вселенная успевает раздуться в  $\exp(\pi\varphi^2(0)/M_P^2)$  раз. Если принять, что, по порядку величины, наиболее вероятное начальное значение поля  $\varphi$  определяется соотношением  $V(\varphi(0)) = \lambda\varphi^4(0)/4 \sim M_P^4$  (см. по этому поводу [26, 49]), то степень раздувания Вселенной будет иметь порядок  $\exp(1/\sqrt{\lambda})$ . При этом величина  $V(\varphi)$  в момент окончания раздувания будет иметь порядок  $\lambda M_P^4$ , и последующие стадии эволюции Вселенной будут происходить независимо от начальной величины поля  $\varphi$  и от продолжительности раздувания.

Сам по себе сценарий хаотического раздувания (степень которого в каждой конкретной области Вселенной зависит от величины начального хаотически распределенного в ней поля  $\varphi$ ) не основывается на теории туннелирования в раздувающейся Вселенной. Тем не менее теория туннелирования в расширяющейся Вселенной продолжает оставаться важным элементом сценария, так как соответствующие фазовые переходы при расширении Вселенной могут происходить не только для скалярного поля  $\varphi$ , ответственного за раздувание, но и для целого ряда других скалярных полей, присутствующих в теории. Упомянем только, что такой неожиданный эффект, как туннелирование из абсолютного минимума в локальный минимум потенциала  $V(\Phi)$ , во время раздувания может лежать в основе решения проблемы нарушения симметрии в суперсимметричных теориях Великого Объединения [50]. Неоднородности, возникающие при рождении пузырьков новой фазы и их экспоненциальном расширении во время раздувания, могут играть большую роль при формировании современной крупномасштабной структуры Вселенной [51]. Не исключено, кроме того, что и квантовое рождение Все-

ленной происходит за счет процесса, подобного туннелированию, см. разд. 6. Все это делает изучение туннелирования в расширяющейся Вселенной важной и интересной задачей, решение которой необходимо для дальнейшего развития сценария раздувающейся Вселенной.

Более подробное обсуждение современного состояния сценария раздувающейся Вселенной читатель может найти в обзорах [20, 52, 53].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coleman S., De Luccia F.//Phys. Rev. 1980. Vol. D21. P. 3305—3315.
2. Abbott L. F.//Nucl. Phys. 1981. Vol. B185. P. 233—237.
3. Fujii Y.//Phys. Lett. 1981. Vol. 103B. P. 29—32.
4. Fujii Y.//Phys. Lett. 1981. Vol. 107B. P. 51—54.
5. Hawking S. W., Moss I. G.//Phys. Lett. 1982. Vol. 110B. P. 35—38.
6. Mottola E., Lapedes A.//Phys. Rev. 1983. Vol. D27. P. 2285—2294.
7. Abbott L. F., Burges C. J. C.//Phys. Lett. 1983. Vol. 131B. P. 49—52.
8. Guth A. H., Weinberg E.// Nucl. Phys. 1983. Vol. B212. P. 321—364.
9. Hawking S. W., Moss I. G.//Nucl. Phys. 1983. Vol. B224. P. 180—192.
10. Jensen L. G., Steinhardt P. J.//Nucl. Phys. 1984. Vol. B237. P. 176—188.
11. Lindley D.//Nucl. Phys. 1984. Vol. B236. P. 522—546.
12. Guth A. H.//Phys. Rev. 1981. Vol. D23. P. 347—356.
13. Linde A. D.//Phys. Lett. 1982. Vol. 108B. P. 389—393.
14. Albrecht A., Steinhardt P. J.//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1220—1223.
15. Фокин П. И. Препринт ИТФ-73-1379. Киев, 1973; ДАН УССР. Сер. А. 1975. Т. 9. С. 831—835; Tryon E. P.//Nature. 1973. Vol. 246. P. 396—397; Brout R., Englert F., Gunzig E.//Ann. Phys. (N.Y.). 1978. Vol. 115. P. 78—106.
16. Зельдович Я. Б.//Письма АЖ. 1981. Т. 7. С. 579—582. Crischieuk L. P., Zeldovich Ya. B.//Quantum Structure of Space-Time/Ed. M. Duff, C. Isham. Cambridge Univ. Press. 1982. P. 409—422.
17. Vilenkin A.//Phys. Lett. 1982. Vol. 117. P. 25; Phys. Rev. 1983. Vol. D27. P. 2848—2855.
18. Hartle J. B., Hawking S. W.//Phys. Rev. 1983. Vol. D28. P. 2960—2975; Hawking S. W.//Nucl. Phys. 1984. Vol. B239. P. 257—276.
19. Линде А. Д.//ЖЭТФ. 1984. Т. 88. С. 369—374; Linde A. D.//Lett. Nuovo cimento. 1984. Vol. 39. P. 401—405.
20. Линде А. Д.//УФН. 1984. Т. 144. С. 177—214. Linde A. D.//Rep. Progr. Phys. 1984. Vol. 47. P. 925—986.
21. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А.//Письма АЖ. 1984. Т. 10. С. 323—328.
22. Рубаков В. А.//Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 39. С. 89—91.
23. Vilenkin A.//Phys. Rev. 1984. Vol. D30. P. 509—515.
24. Linde A. D.//Phys. Lett. 1982. Vol. 114B. P. 431—435; Vol. 116B. P. 225; Vol. 116B. P. 340—342.
25. Starobinsky A. A.//Phys. Lett. 1982. Vol. 117B. P. 175—178.
26. Линде А. Д.// Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 149—152; Linde A. D.//Phys. Lett. 1983. Vol. 129B. P. 177—180.
27. Старобинский А. А.//Фундаментальные взаимодействия. М.: МГПИ. 1984. С. 55—79.
28. Старобинский А. А.//Тезисы докладов Всесоюзной конференции по современным проблемам теории относительности и гравитации. М., 1984. С. 39—40.
29. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
30. Coleman S.// Phys. Rev. 1977. Vol. D15. P. 2929—2936; Collen C., Coleman S.//Phys. Rev. 1977. Vol. D16. P. 1762—1772.
31. Hawking S. W.//Phys. Rev. 1978. Vol. D18. P. 1747—1756.

32. Linde A. D. // The Very Early Universe/Ed. G. W. Gibbons, S. W. Hawking, S. T. Siklos. Cambridge Univ. Press, 1983. P. 205—249.
33. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980.
34. Denardo G., Spallucci E. // Nuovo cimento. 1981. Vol. 64A. P. 15—24.
35. Witten E. // Nucl. Phys. 1981. Vol. B177. P. 477—488.
36. Linde A. D. // Nucl. Phys. 1983. Vol. B216. P. 421—445.
37. Affleck J. // Nucl. Phys. 1981. Vol. B191. P. 429—436.
38. DeWitt B. // Phys. Rev. 1967. Vol. 160. P. 1113—1148.
39. Teitelboim C. // Phys. Rev. 1982. Vol. D25. P. 3159—3167.
40. Kramers H. A. // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284—298.
41. Bunch T. S., Davies P. C. W. // Proc. Roy. Soc. 1978. Vol. A360. P. 117—134.
42. Wheeler J. A. // Relativity, Groups and Topology/Ed. B. DeWitt and C. DeWitt. N.Y.: Gordon and Breach. 1964; Hawking S. W. // Nucl. Phys. 1978. Vol. B144. P. 349—362.
43. Gibbons G., Hawking S. W. // Phys. Rev. 1977. Vol. D15. P. 2738—2751.
44. Глинер Э. Б. // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 542—547; ДАН СССР. 1970. Т. 192. С. 771—774.
45. Альтшулер Б. Л. Тезисы 3-й советской гравитационной конференции. Ереван, 1972.
46. Глинер Э. Б., Дымникова И. Г. // Письма АЖ. 1975. Т. 1. С. 7—10.
47. Gurevich L. E. // Astrophys. and Space Sci. 1975. Vol. 38. P. 67—78.
48. Старобинский А. А. // Письма ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 719—722; Phys. Lett. Ser. B. 1980. Vol. 91. P. 99—102.
49. Linde A. D. // Phys. Lett. 1985. Vol. 162B. P. 281—286.
50. Linde A. D. // Phys. Lett. Ser. B. 1983. Vol. 131. P. 330—333.
51. Kofman L. A., Linde A. D. // Inst. Astrophys. Atmosph. Physics preprint, 1985.
52. Brandenberger R. // Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57. P. 1—60.
53. Linde A. D. Comments on Astrophysics. 1985. Vol. 10. P. 229—237; Linde A. D. // Proc. of the Symposium «Meson 50». Kyoto, 1985.