

ДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ ИОНОВ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ И КОЛЬЦАХ

Э. А. Перельштейн, Г. Д. Ширков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен процессам в электронно-ионных пучках и кольцах. Изложены основы метода моментов функции распределения в физике пучков заряженных частиц и его приложения к динамике многокомпонентных пучков с несовпадающими размерами. Изучено образование и накопление ионов в пучках электронно-лучевых источников ионов и электронных кольцах коллективного ускорителя. Рассмотрен источник многозарядных ионов нового типа, использующий дополнительно сжатое кольцо коллективного ускорителя.

The review is devoted to the processes in the electron-ion beams and rings. The foundations of the distribution function moments method in electron-ion beams physics and its applications to the dynamics of many-component beams with noncoincident dimensions are presented. Ion producing and storing in the electron-beams source and in the electron rings of collective accelerator is studied. The new type highly-charged ion source using supplementary compression ring is considered.

ВВЕДЕНИЕ

История ядерной физики тяжелых ионов насчитывает около тридцати лет. В 1957 г. впервые были представлены результаты экспериментов на пучках тяжелых ионов, полученных на циклотроне Института атомной энергии [1]. За прошедшие годы физика тяжелых ионов интенсивно развивалась в двух направлениях. Традиционно исследовались свойства ядерной материи при низких и промежуточных энергиях и велись работы по синтезу трансурановых элементов. В течение последних десяти лет под руководством А. М. Балдина в Дубне было создано новое крупное научное направление — релятивистская ядерная физика. Пучки релятивистских ядер явились мощным инструментом исследований в области физики высоких энергий, в том числе для проверки основных положений кварковых моделей и квантовой хромодинамики [2].

Кроме ускорителей заряженных частиц, ионные пучки используются в различных областях науки и техники. Мы ограничимся кратким перечислением основных направлений: исследования по управляемому термоядерному синтезу; атомная физика, в том числе спектроскопия многозарядных ионов; лазеры; астрофизические исследования. С каждым годом расширяется применение пучков ионов для

прикладных целей, главным образом в медицине, в радиоэлектронике, при изготовлении ядерных фильтров.

Перечень областей применения пучков многозарядных ионов можно было бы продолжить и дальше. Важно то, что число фундаментальных и прикладных проблем, решение которых связано с использованием ионов различных элементов, все время возрастает.

Для получения ионов разработаны и используются различные типы ионных источников. Большинство из них основано на нагреве и удержании высокотемпературной плазмы. Это — плазменно-дуговой источник или источник Пеннинга, дуоплазмотрон и источник на электронно-циклотронном резонансе. В лазерном источнике поток ионов генерируется из плазмы, образовавшейся в результате импульсного взаимодействия лазерного излучения с рабочим веществом. Принципы действия и конструкция этих устройств приведены, например, в [3—5]. Получаемые таким образом максимальные зарядности тяжелых ионов не превосходят $15 \div 25$. Чтобы ионизировать внутренние оболочки атомов, температура плазмы должна превосходить энергию связи K - и L -электронов, которая для тяжелых элементов достигает десятков килоэлектрон-вольт, а так называемый параметр Лоусона (произведение плотности плазмы n на время удержания τ) $n\tau = 10^{12} \div 10^{13} \text{ см}^{-3}\cdot\text{с}$. Полная обдирка ядер урана требует значений $n\tau \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}\cdot\text{с}$ при температуре плазмы около 200 кэВ. Решение этой задачи равносильно решению проблемы управляемого термоядерного синтеза.

В источниках многозарядных ионов тяжелых элементов оказалось более перспективным использовать электронные пучки с большой плотностью заряда. Пучок электронов легко сфокусировать внешними электромагнитными полями, а ионы удерживаются в потенциальной яме собственного заряда электронов. На этом принципе основан предложенный и разработанный Е. Д. Донцом в Дубне электронно-лучевой ионизатор [6] или, как теперь принято называть, EBIS (Electron Beam Ion Source). Источники ионов типа EBIS за последние годы получили широкое распространение и используются в качестве инжекторов ионов в ускорителях. На них получены рекордные зарядности тяжелых ионов. Так, на источнике КРИОН-2 были зарегистрированы ионы Xe^{52+} [7].

Двадцать лет назад в Дубне под руководством В. И. Векслера и В. П. Саранцева начались работы в новом направлении ускорительной физики — над коллективным методом ускорения ионов электронными кольцами [8]. Для этих целей используется плотное кольцо релятивистских электронов. При ускорении кольца ионы удерживаются собственными полями электронов. В результате может быть получен в несколько раз более высокий темп ускорения ионов по сравнению с традиционными методами. С 1977 г. на коллективном ускорителе тяжелых ионов (КУТИ) ОИЯИ проводятся эксперименты по ускорению ионов различных элементов [9]. Электронные кольца КУТИ можно также использовать для получения многозарядных

ионов [10, 11]. Создаваемый в настоящее время коллективный ускоритель КУТИ-20 планируется использовать в качестве инжектора нуклотрона — нового ускорителя релятивистских ядер ОИЯИ [12].

Процессы образования и накопления ионов в электронных пучках EBIS и электронных кольцах КУТИ протекают аналогично. Ионы образуются из нейтральных атомов в результате электронного удара и захватываются в потенциальную яму собственного заряда электронов. В результате последующих столкновений они увеличивают свой заряд. Плотность электронов и время существования электронного пучка в EBIS, или время удержания электронного кольца в КУТИ, достаточны для получения многозарядных ионов.

В последние годы вопросам накопления ионов и динамики многокомпонентных электронно-ионных пучков уделялось значительное внимание. Опубликовано большое число теоретических, расчетных и экспериментальных работ. Для решения этих задач особенно успешно применяется метод полных моментов функции распределения в динамике пучков заряженных частиц [13, 14]. Большинство процессов, связанных с ионами в линейных и кольцевых пучках длительностью $10^{-4} \div 10$ с, изучены и проанализированы. Систематизации проведенных исследований посвящен настоящий обзор.

Отметим, что характер накопления ионов в сильноточных и релятивистских электронных пучках и при коллективном ускорении ионов прямыми электронными пучками в силу их очень малой длительности ($10^{-8} \div 10^{-6}$ с) имеет существенные отличия от процессов в EBIS и КУТИ. Эти вопросы рассматривались в [15—19].

1. ОБРАЗОВАНИЕ И НАКОПЛЕНИЕ ИОНОВ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ И КОЛЬЦАХ

Образование ионов. В электронных пучках ионы образуются из нейтральных атомов (молекул) остаточного газа, находящихся в области распространения пучка, или при инжекции в объем пучка нейтральной струи. Начальная энергия ионов равна энергии нейтральных атомов, т. е. тепловой или близкой к ней по порядку величины. Поэтому даже в сравнительно слабых пучках с линейной плотностью электронов $10^7 \div 10^8$ см $^{-1}$ образовавшиеся ионы оказываются захваченными в потенциальную яму собственного заряда электронов. В принципе существует возможность инжекции ионов непосредственно в пучок. Из законов сохранения энергии-импульса следует, что в стационарных электромагнитных полях в потенциальной яме останутся только те ионы, которые увеличили свою зарядность при прохождении через пучок. Инжекция ионов из области ионизации в ловушку в источниках типа EBIS реализуется снятием внешнего потенциального барьера.

В рассматриваемых электронно-ионных пучках существенны два механизма ионизации. Первый — это ионизация нейтральных атомов и ионов электронным ударом. Второй — образование новых ионов при перезарядке многозарядных ионов на нейтральных атомах. Сече-

ния ионизации нейтральных атомов ионами, совершающими движения в потенциальной яме пучка, как правило, очень низки, и этот процесс не влияет на общую картину.

Образовавшиеся ионы остаются в объеме электронного пучка и могут подвергаться дальнейшей ионизации. Накапливаясь, ионы взаимодействуют друг с другом и с нейтральным газом в пучке. Кроме особых случаев, некоторые из которых будут подробнее рассмотрены ниже, доминирующим процессом в электронно-ионных пучках и кольцах является электронно-ионная ионизация.

Ионизация электронным ударом. Ионизации нейтральных атомов и ионов электронным ударом посвящено большое число оригинальных экспериментальных и теоретических работ. Эти вопросы в достаточной степени подробно рассмотрены в опубликованных в последние годы обзорах [7, 20, 21]. Здесь мы остановимся на главных особенностях этого процесса в электронных пучках. Столкновения электронов с нейтральными атомами и молекулами приводят к образованию положительных ионов. Молекулярные ионы, как правило, диссоциируют на отдельные заряженные ионные фрагменты при последующих столкновениях [22].

В общем случае процессы ионизации можно разделить на два основных типа. В результате взаимодействия ионизирующего электрона с одним из электронов внешней оболочечки возможна прямая ионизация атома или иона. Взаимодействие электрона с внутренними оболочечками приводит к более сложным процессам. После возбуждения или ионизации электрона из внутренней оболочки в ней образуется вакансия. Заполнение вакансии вызывает перестройку всей атомной оболочки путем переходов типа Оже или Костера — Кронига с эмиссией в сплошной спектр электронов из внешних оболочек. При ионизации тяжелых элементов, имеющих сложное строение электронной оболочки, эти процессы особенно существенны и значительно увеличивают вероятность двойной и многократной ионизации.

Основной особенностью сечения ионизации электронным ударом является его пороговая зависимость от энергии столкновения E . Очевидно, для того чтобы вырвать электрон из оболочки, энергия ионизирующего электрона должна быть большей энергии ионизации I_k . Сечение ионизации имеет максимальное значение при $E = (2 \div 3) I_k$. Существует множество расчетов для различных областей энергий и зарядовых состояний ионов [20]. Значительная часть расчетов сечения ионизации для нерелятивистских энергий проводится по классической формуле Томсона [23]:

$$\sigma_k^e = \frac{\pi n a_0^2}{I_k E} \left(1 - \frac{I_k}{E} \right), \quad (1)$$

где I_k и E — энергии ионизации и столкновения в атомных единицах ($1 \text{ а.е.} = 27,21 \text{ эВ}$); n — число электронов во внешней оболочке;

a_0 — боровский радиус. Расчетные значения потенциалов ионизации ионов всех элементов приведены, например, в [24].

Наиболее полное экспериментальное исследование сечений ионизации различных зарядовых состояний ионов газообразных элементов в области энергии ионизации до 18 кэВ было проведено Е. Д. Донцом на электронно-лучевом источнике ионов. Особый интерес

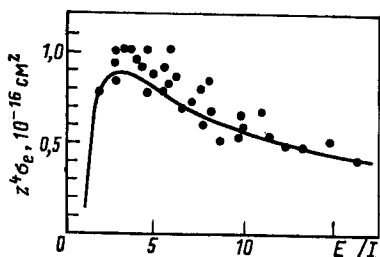


Рис. 1. Зависимость сечения ионизации водородоподобных ионов от энергии электронов в относительных единицах:

точки — экспериментальные данные [25, 26]; сплошная линия — расчет [27]

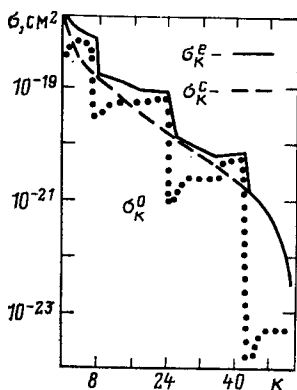


Рис. 2. Расчетные сечения ионизации ионов ксенона электронами энергией 20 МэВ:

точки — сечение оже-ионизации [29]; пунктирная линия — сечение прямой ионизации [30]; сплошная линия — полное сечение ионизации

представляют приведенные на рис. 1 сечения ионизации водородоподобных ионов до Ag^{17+} включительно [25, 26], которые хорошо согласуются с расчетными значениями [27]. На рис. 1 сечение ионизации σ_e приведено к универсальной зависимости от заряда ядра Z , а энергии электронов E отнесены к энергии ионизации I .

Расчет сечений ионизации электронами релятивистских энергий был сделан сравнительно недавно для некоторых газообразных элементов [28—30] и урана [30]. Оценочные расчеты сечений прямой ионизации проводят по формуле [31]:

$$\sigma_h^e = \pi n r_e^2 \frac{mc^2}{I_h} \ln \left(\frac{E}{I_h} \right), \quad (2)$$

где m и $r_e = e^2/mc^2$ — масса и классический радиус электрона; e — заряд электрона; c — скорость света. Экспериментально измерены сечения прямой ионизации нейтральных атомов Kr и Xe электронами с энергией 0,5—3 МэВ [32]. Результаты расчетов сечений прямой ионизации, полученные в [30], имеют наилучшее согласие с экспериментом. Сечения оже-ионизации для внутренних оболочек тяжелых элементов [28, 29] оказываются сравнимыми и в некоторых случаях

даже большими, чем прямой. На рис. 2 приведено полное сечение ионизации ионов Хе, полученное суммированием сечений оже-ионизации [29] и прямой ионизации [30].

Ион-ионные процессы. Характер взаимодействия ионов друг с другом и с нейтральным газом в электронном пучке определяется их кинетической энергией. Поперечное движение ионов колебательное. Энергия колебаний определяется глубиной потенциальной ямы

собственного заряда пучка. Потенциал электрического поля U пропорционален линейной плотности электронного пучка N_e и, например, для равномерной плотности заряда в сечении, на краю пучка $U = eN_e$. При относительных скоростях столкновения ионов больших, чем характерная скорость электронов, наружных оболочек v_0 (для атома водорода $v_0 = 2,19 \cdot 10^8$ см·с⁻¹) наиболее вероятным процессом является ионизация иона с меньшим зарядом или нейтрального атома. Однако такие скорости ионов могут быть в электронных пучках с линейной плотностью $N_e > 10^{13}$ см⁻¹, что для релятивистских электронов соответствует токам в сотни килоампер.

Сечения основных процессов в электронных пучках в зависимости от энергии взаимодействующих частиц на примере атомов и ионов водорода приведены на рис. 3 [32].

В широком диапазоне энергий ионов $1-10^4$ эВ·нуклон⁻¹, что соответствует линейным плотностям пучков $10^8 \div 10^{12}$ см⁻¹, наиболее вероятной реакцией между ионами является перезарядка $A^{i+} + B^{h+} \rightarrow A^{(i-1)+} + B^{(h+1)+}$. При указанных энергиях сечение этого процесса слабо зависит от скорости столкновения и имеет свое максимальное значение. Последние 10—20 лет перезарядка ионов при низких энергиях ($v < v_0$) привлекает большое внимание исследователей в связи с развитием физики плазмы и проблемой управляемого термоядерного синтеза. Опубликовано несколько сот экспериментальных и теоретических работ по этому вопросу. Современное положение наиболее полно освещено в обзорах, трудах конференций и совещаний [33—35]. Экспериментальные данные при энергиях ионов порядка килоэлектрон-вольта дают подробную картину о перезарядке ионов до зарядности $i = 16$ [36] на различных нейтральных мишенях. Отсутствие экспериментов с более высокозарядными ионами объясняется трудностью их получения при низких энергиях. Продвижение здесь возможно при использовании электронно-лучевого источника [25] и электронных колец КУТИ в качестве источника ионов высокой зарядности [10, 11]. В настоящее время также отсутствуют эксперименты по перезарядке ионов на ионах.

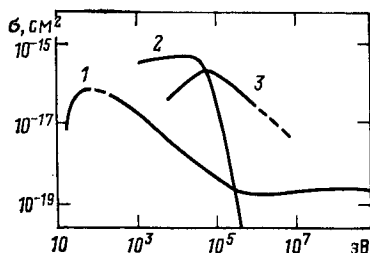
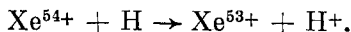


Рис. 3. Зависимости сечений ионизации электронным ударом (1), перезарядки (2) и ионным ударом (3) от энергии частиц E

Вычисление сечений перезарядки является сложным квантово-механическим расчетом, в котором необходимо учитывать большое число возможных возбужденных состояний иона, получившего электрон. В общем виде полное сечение перезарядки, просуммированное по всем квантовым состояниям, при энергиях столкновения, соответствующих максимальному значению, можно представить простой эмпирической зависимостью:

$$\sigma_{hi} = A i^\alpha I_k^{-\beta}. \quad (3)$$

Большинство теоретических расчетов и анализ экспериментальных данных дают значение для $\alpha = 1 \div 1,2$ (в некоторых моделях $\sigma_{hi} \sim i \ln i$) и $\beta = 2 \div 3$ [33—35]. С увеличением энергии столкновения сечение перезарядки быстро уменьшается; одновременно параметр α растет. Так, при $v \sim v_0$ $\alpha = 2$, а при $v \gg v_0$ $\sigma_{hi} \sim i^5/v^{12}$ [35, 37]. По порядку величины сечение перезарядки меняется от 10^{-15} см² для перезарядки однозарядных ионов на нейтральных атомах до 10^{-13} см² для процесса [38]:



Накопление ионов в электронных пучках и кольцах. В первых работах по накоплению ионов [22, 28, 29, 39—43] расчеты выполнялись без учета перезарядки ионов. Накопление ионов в электронном пучке с учетом однократной перезарядки описывается системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_0}{dt} &= \pi \bar{u} (n - N_0/S) - \sigma_0^e N_0 v_e \rho_e - \sum_{k=1}^Z \sigma_{0k} v_{0k} N_0 N_k / S; \\ \frac{dN_i}{dt} &= (\sigma_{i-1}^e N_{i-1} - \sigma_i^e N_i) v_e \rho_e + \left[\sum_{k=i}^Z \sigma_{i-1k} v_{i-1k} N_{i-1} N_k + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^i \sigma_{ki+1} v_{ki+1} N_k N_{i+1} - \sum_{k=i+1}^Z \sigma_{ik} v_{ik} N_i N_k - \left. \sum_{k=0}^{i-1} \sigma_{ki} v_{ki} N_k N_i \right] / S; \\ \frac{dN_Z}{dt} &= \sigma_{Z-1}^e N_{Z-1} v_e \rho_e - \sum_{k=0}^{Z-1} \sigma_{kZ} v_{kZ} N_k N_Z / S, \quad 1 \leq i < Z. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь N_0 и N_i — линейная плотность нейтральных атомов и ионов с зарядом i в пучке; n — плотность нейтральных атомов вне пучка; \bar{u} — среднее значение компоненты скорости нейтралов, нормальной к поверхности пучка; Z — заряд атомного ядра; S и d — площадь сечения и диаметр пучка; v_{ik} — средняя относительная скорость ионов с зарядами i и k ; v_e и ρ_e — скорость и плотность электронов в пучке.

Процессы многократной перезарядки и ионизации могут быть учтены введением в правую часть уравнений в системе (4) соответствующих членов [44]. При накоплении ионов из молекулярного газа первоначально образуются молекулярные ионы, диссоциация которых происходит одновременно с последующей ионизацией [21]. Эти процессы важны только в самом начале накопления.

Приведем расчет накопления ионов азота из остаточного газа в камере ускорителя при формировании кольца электронов на прототипе КУТИ [44]. На рис. 4 изображено изменение числа ионов для

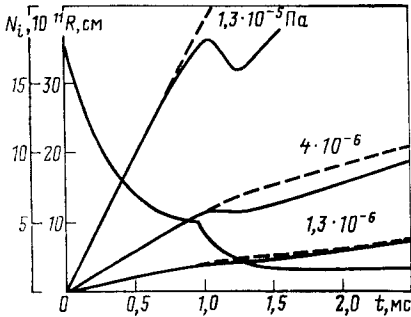


Рис. 4. Зависимость радиуса электронного кольца и расчетного числа ионов азота в нем от времени при различных давлениях остаточного газа в камере ускорителя:

сплошная кривая — расчет с учетом процессов перезарядки; пунктир — без учета процессов перезарядки

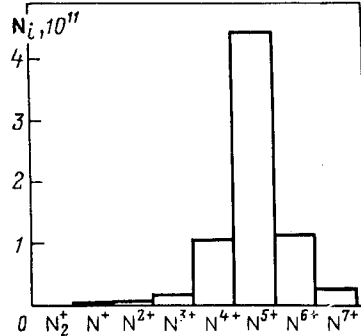


Рис. 5. Расчетное распределение числа ионов азота по зарядностям в конце сжатия электронного кольца при числе электронов в кольце 10^{13} и давлении остаточного газа в камере ускорителя $4 \cdot 10^{-6}$ Па

различных значений давления остаточного газа и среднего радиуса электронного кольца. Расчеты выполнены с учетом однократной и двойной перезарядки ионов. Пунктирные линии соответствуют расчетам без учета ион-ионных взаимодействий. На рис. 5 приведено распределение ионов по зарядностям в конце накопления.

Результаты расчетов согласуются с измерениями параметров электронно-ионных колец и с экспериментами по ускорению ионов на прототипе КУТИ.

Число ионов в кольце можно экспериментально определить по тормозному излучению электронов [45—49]. Тормозное излучение возникает в результате кулоновского взаимодействия электронов с ядрами ионов и нейтральных атомов в кольце. Измеряемым является произведение $N_e (N_i + N_0)$. В начальный промежуток времени, когда ионы еще не успели накопиться и в кольце присутствуют только атомы остаточного газа, давление которого известно, определяют число электронов в кольце. Зная N_e , в конце сжатия находят число накопленных ионов.

Теория коллективного метода ускорения ионов электронными кольцами накладывает жесткие требования на параметры электронно-ионных колец [9, 50]. Для успешного ускорения ионов необходимо, чтобы число электронов и ионов, заряд ионов, размеры колец находились в определенных, строго заданных пределах. Характеристики электронно-ионных колец, измеренные в экспериментах по ускорению ионов на прототипе КУТИ [51—54], соответствуют расчетным.

Для диагностики колец используется также синхротронное излучение (СИ) релятивистских электронов. Особый интерес представляет предсказанное теоретически и обнаруженное экспериментально явление уширения углового распределения СИ электронного кольца при накоплении в нем ионов [55, 56].

Синхротронное излучение релятивистского электрона сосредоточено в малой области углов $\Psi \sim 1/\gamma$ (γ — релятивистский фактор)

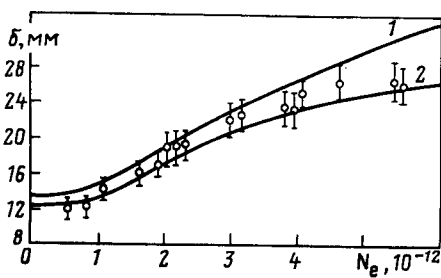


Рис. 6. Изменение полуширины интенсивности синхротронного излучения в зависимости от числа электронов в кольце:

1 — расчет без учета ионной фокусировки электронов для начального радиуса сечения кольца 1,7 см; 2 — с учетом ионной фокусировки и начальным радиусом сечения 1,5 см; точки — экспериментальные значения

вблизи направления скорости. В ускорителе электроны совершают бетатронные колебания относительно равновесной орбиты. Это приводит к колебаниям вектора скорости электрона относительно направления общего движения электронного пучка и к увеличению ширины углового распределения синхротронного излучения. Полуширина углового распределения излучения в аксиальном направлении [57]

$$\theta_{\text{изл}} = \sqrt{\Psi^2 + \theta_z^2},$$

где θ_z — среднеквадратичное угловое отклонение частиц от медианной плоскости ускорителя, вызванное бетатронными колебаниями. Частота бетатронных колебаний определяется внешней фокусировкой и собственным зарядом ионов в пучке. Угловое распределение синхротронного излучения становится шире с ростом числа ионов. Количество ионов в электронном кольце коллективного ускорителя приблизительно пропорционально числу электронов.

Измерение синхротронного излучения на прототипе КУТИ проводилось в зависимости от числа электронов в кольце. Результаты измерений представлены на рис. 6. На этом рисунке по вертикальной оси отложена полуширина распределения интенсивности $\delta = L\theta_{\text{изл}}$, где $L = 75$ см — эффективная база измерений; а по горизонтальной оси число электронов в кольце N_e в относительных единицах. На этом

же рисунке сплошными линиями показаны расчетные зависимости δ от N_e , найденные из уравнений для моментов второго порядка функций распределения электронов и ионов. Вывод этих уравнений изложен в разд. 2. Расчеты проведены для двух моделей сжатия кольца. В первом случае (кривая 1) не учитывалось уменьшение сечения электронного кольца в результате ионной фокусировки, и начальный радиус сечения кольца выбран равным $a_0 = 1,7$ см. Кривая 2 получена с учетом пинчевания электронов при накоплении ионов и $a_0 = 1,5$ см. При малом количестве электронов $N_e \ll 10^{12}$, когда собственными полями ионов можно пренебречь, $\delta = L\Psi$. При большом числе электронов влияние собственного заряда ионов на жесткость фокусировки становится существенным, ширина углового распределения излучения определяется бетатронными колебаниями и $\delta = L\theta_z$.

Исследование динамики накопления ионов в электронных пучках и кольцах позволяет не только измерять параметры ионной компо-

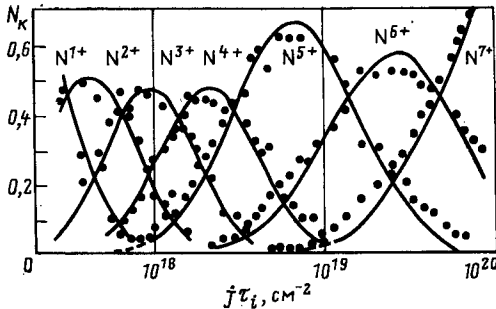


Рис. 7. Эволюция зарядового распределения ионов азота в электронно-лучевом источнике ионов

ненты, но и определять сечение ионизации ионов электронным ударом. Для этой цели в [43, 58] была разработана методика решения обратной задачи ионизации и на источнике ионов КРИОН-2 выполнены измерения сечений ионизации всех ионов С, N, O, Ne, Ar, а также Kr (до Kr^{33+}) и Xe (до Xe^{47+}) [59, 60]. На рис. 1 были приведены полученные значения сечений ионизации водородоподобных ионов до Ar^{17+} включительно. Эволюция зарядового распределения ионов азота представлена на рис. 7 [59]. Сплошные кривые соответствуют расчетам, в которых использовались сечения ионизации, наилучшим образом аппроксимирующие экспериментальные данные.

Как правило, расчет накопления ионов с учетом всех зарядовых состояний в электронных пучках и кольцах требует громоздких вычислений на ЭВМ. Однако в некоторых частных случаях есть аналитические решения системы уравнений (4) [39, 40, 43] или приближенные формулы для определения общего числа ионов и их среднего

заряда [61]. Наиболее просто определяется общее число ионов в пучке. Здесь возможны два предельных случая. В плотных электронных пучках приток нейтральных атомов снаружи не успевает компенсировать их уменьшение за счет ионизации и перезарядки, в результате плотность нейтрального газа в пучке значительно ниже, чем в окружающем пространстве. Считая, что практически все нейтральные атомы, попавшие в пучок из остаточного газа, превращаются в ионы и в нем остаются, можно оценить линейную плотность ионов, например азота, образовавшихся за время t :

$$N = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} u_T dn_0 t. \quad (5)$$

В пучках невысокой плотности, где $n_e \ll u_T / \sigma_0^e dv_e$, плотность нейтральных атомов в пучке практически совпадает с n_0 и

$$N = \sigma_0^e v_e n_0 N_e t, \quad (6)$$

где σ_0^e — сечение ионизации нейтральных атомов остаточного газа. Средний заряд ионов оценивается из соотношения

$$j\tau = \sum_{k=0}^i 1/\sigma_k^e. \quad (7)$$

Зная фактор ионизации $j\tau$, определяется i , наилучшим образом удовлетворяющее (7).

2. МЕТОД МОМЕНТОВ В ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ ПУЧКОВ

Уравнения (4), приведенные в разд. 1, позволяют проследить переход ионов из зарядности в зарядность, учесть различные столкновительные процессы ионов с электронами и между собой. Влияние пространственного распределения электронов и различных ионных зарядностей на процесс накопления ионов, а также влияние собственного заряда ионов и электронов на движение частиц описывается системой самосогласованных уравнений Власова. Движение частиц в фазовом пространстве координат \mathbf{x} и импульсов \mathbf{p} определяется функцией распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, удовлетворяющей кинетическому уравнению [62]:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = S, \quad (8)$$

где \mathbf{v} — скорость частиц; S — интеграл столкновений.

Напряженность электрического поля \mathbf{E} и индукция магнитного поля \mathbf{B} находятся из уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0;$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

с соответствующими начальными и граничными условиями. Источники поля (плотность заряда — ρ и тока — \mathbf{j}) делятся на внешние и связанные с частицами пучка, для которых

$$\rho = e \int \bar{f} d^3p, \quad \mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f d^3p.$$

При рассмотрении частиц нескольких сортов вместо одного уравнения (8) имеем систему аналогичных уравнений. В уравнениях Власова [62] интеграл столкновений S обычно описывает упругие взаимодействия частиц. В случае системы уравнений (8) для нескольких ионных компонент и электронов в интеграл столкновений должны быть включены члены, соответствующие неупругим процессам, т. е. ионизации и перезарядке. В большинстве рассматриваемых случаев все процессы условно разделяются на быстрые и медленные. К быстрым можно отнести кинематику частиц, или их движение, и во многих случаях изменение усредненных величин, т. е. левую часть уравнений (8). Тогда, пренебрегая правой частью из (8), получаем уравнение Лиувилля:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

При изучении медленных процессов, связанных со столкновениями и переходами из зарядности в зарядность, интегрирование уравнений (8) по всему фазовому пространству координат и скоростей дает систему уравнений (4).

Решение системы уравнений Власова сопряжено с большими вычислительными трудностями, поэтому на практике используется небольшое число точно решаемых моделей пучков [63, 64] или привлекаются различные численные методы решения уравнений на ЭВМ [65, 66]. Одним из новых подходов к проблеме является метод моментов. Главная задача метода моментов — дать сокращенное (по сравнению с уравнениями Власова) описание динамики пучков, позволяющее в то же время проследить основные физические закономерности.

Метод моментов функции распределения. При исследовании пучков заряженных частиц основной интерес представляют усредненные характеристики пучка, такие, как средняя скорость, среднеквадратичные размеры, эмиттанс, температура и т. д.

Существует несколько моделей, позволяющих проследить изменение во времени огибающих или среднеквадратичных размеров для пучков заряженных частиц в электромагнитных полях. Для моноэнергетических пучков с равномерной плотностью в эллиптическом сечении и не связанным поперечным движением частиц широко используется модель Владимирского — Капчинского [63]. Эта модель обобщается на произвольную плотность заряда с эллиптической симметрией в сечении пучка [67, 68]. Самосогласованная модель пучка, учитывающая связь поперечных движений и изменение массы частиц при ускорении, построена О. И. Ярковым [69]. Применение

метода моментов функции распределения к задачам динамики заряженных пучков позволило обобщить все эти модели и решить ряд новых важных задач.

В [13] в классе функций распределения, интегрируемых с произвольным степенным весом, введены моменты функции распределения по всей совокупности фазовых координат. Заметим, что в газе (гидро) динамике обычно имеют дело с пространственно неограниченными распределениями, поэтому используются лишь моменты по скоростям.

Рассмотрим первые моменты функции распределения. Момент нулевого порядка

$$N = \int f(Y, \tau) dY \quad (9)$$

есть в силу (8) интеграл движения и равен полному числу в сгустке, если Y — вектор поперечных фазовых координат и пучок моноэнергетический.

Моменты первого порядка образуют вектор

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \int Y f(Y, \tau) dY, \quad (10)$$

причем пространственные компоненты вектора \bar{Y} дают положение центра масс, а скоростные компоненты определяют средние скорости. В линейных по фазовым координатам полях моменты первого порядка удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\bar{Y}}{d\tau} = A\bar{Y}. \quad (11)$$

Центральные моменты второго порядка можно записать в виде симметричной квадратной матрицы

$$M = \frac{1}{N} \int (Y - \bar{Y})(\tilde{Y} - \tilde{\bar{Y}}) f(Y, \tau) dY. \quad (12)$$

Символ « \sim » означает транспонирование матрицы. Диагональные элементы матрицы M дают среднеквадратичные размеры и среднеквадратичные разбросы скоростей пучка частиц. Пусть движение частиц пучка в поперечном сечении происходит в линейных внешних полях. Уравнения поперечного движения запишем в виде:

$$dx/d\tau = v, \quad dv/d\tau = b^{\text{ext}}x + av + F^s(x, \tau), \quad (13)$$

где x , v — двумерные векторы координат и скоростей; $F^s(x, \tau)$ — вектор, связанный с собственным электромагнитным полем пучка.

Дифференцируя (12) по τ и используя уравнение непрерывности в фазовом пространстве, в случае линейных по координатам полей получаем

$$dM/d\tau = AM + M\tilde{A}. \quad (14)$$

Здесь A — блочная матрица, построенная из матриц b^{ext} и a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ b^{\text{ext}} & a \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Представим матрицу моментов второго порядка в блочном виде

$$M = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xv} \\ \tilde{M}_{xv} & M_{vv} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где матрице M_{xx} размерности 2×2 соответствуют моменты пространственных координат $M_{xx}^{ij} = x_i x_j$ и т. д.

Моменты второго порядка удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (14), которую перепишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} dM_{xx}/d\tau &= M_{xv} + \tilde{M}_{xv}; \\ dM_{xv}/d\tau &= M_{vv} + M_{xx} \tilde{b}^{\text{exp}} + M_{xv} \tilde{a} + \tilde{F}_{sx}; \\ dM_{vv}/d\tau &= b^{\text{ext}} M_{xv} + \tilde{M}_{xv} b^{\text{exp}} + a M_{vv} + M_{vv} \tilde{a} + F_{sv} + \tilde{F}_{sv}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Квадратные матрицы второго порядка F_{sx} и F_{xv} определяются через вектор $F^s(x, t)$:

$$F_{sx}^{ij} = \overline{F_i^s x_j}, \quad F_{xv}^{ij} = \overline{F_i^s v_j}. \quad (18)$$

Система (17) будет замкнутой, если матрицы F_{sx} и F_{xv} выразить через моменты второго порядка. Для линейных собственных сил замыкание происходит автоматически, как и в одномерном случае *. Нелинейность собственных сил приводит к бесконечной зацепляющейся системе уравнений для моментов. В [14, 67, 68] проводится эффективная линеаризация собственных электромагнитных сил пучка с эллиптической симметрией плотности заряда при условии наименьшего среднеквадратичного отклонения линейных сил от истинных (см. приложение). В результате матрицы сил имеют вид

$$F_{sx} = b^s M_{xx}, \quad F_{xv} = b^s M_{xv}, \quad (19)$$

где матрица b^s выражается через матрицу M_{xx} :

$$b^s = \frac{N_e r_e M_{xx}^{-1/2}}{\beta^2 \gamma^3 \text{Sp } M_{xx}^{1/2}} \begin{cases} 1 - \text{прямолинейная геометрия} \\ \omega_0^2 R_0^2 - \text{кольцевой пучок,} \end{cases} \quad (20)$$

где $\beta = v_e/c$; ω_0 — частота обращения; γ — релятивистский фактор электрона.

Равенства (19) означают замену собственной электромагнитной силы эффективной линейной:

$$F^s(x, \tau) = b^s x. \quad (21)$$

* В трехмерной задаче подобное замыкание проведено в [70].

Задача о восстановлении нелинейного собственного электрического поля по первым моментам плотности заряда решалась для ленточного пучка и для заряженного цилиндра с круговым сечением в [71]. После подстановки (19), (20) в (17) получаем систему нелинейных обыкновенных уравнений для среднеквадратичных параметров пучков. Для пучка с круговым сечением из системы следует уравнение для среднеквадратичного радиуса пучка R :

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + (\omega^2 + \omega_n^2) R - \frac{2N_e r_e c^2}{\gamma^3 R} - \frac{E_1^2}{R^3} = 0, \quad (22)$$

где ω^2 — квадрат частоты, связанный с внешней, например, ионной для электронов фокусировкой; ω_n — ларморовская частота.

Постоянная E_1 определяется из соотношения [14]:

$$E_1 = 4 [(\overline{x_1 - \bar{x}_1})^2 (\overline{v_1 - \bar{v}_1})^2 - ((\overline{x_1 - \bar{x}_1})(\overline{v_1 - \bar{v}_1}))^2 - ((\overline{x_1 - \bar{x}_1}) \times (\overline{v_2 - \bar{v}_2}))^2] |_{t=0} + M_3^2, \quad (23)$$

где $M_3 = J + 2\omega_n R^2 = \text{const}$ — обобщенный азимутальный момент количества движения (теорема Буша); J — среднее значение азимутального механического момента импульса. Уравнение (22) было получено Ли и Купером в [72]. Распространение электронного пучка в продольном магнитном поле с учетом пространственного заряда накапливаемых ионов описывается уравнением

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \omega_n^2 R - \frac{2N_e r_e c^2}{\gamma R} \left(\frac{1}{\gamma^2} - f \right) - \frac{E_1^2}{R^3} = 0, \quad (24)$$

где f — фактор нейтрализации пучка — равен отношению линейных плотностей зарядов ионов и электронов. Когда кулоновское расталкивание электронов скомпенсировано так, что $f > 1/\gamma^2$, то в соответствии с (24) проявляется самофокусировка пучка силами магнитного стягивания и возможна транспортировка пучка без магнитного поля. Метод моментов применяется в различных задачах расчета каналов транспортировки, формирования, фокусирующих структур при ускорении пучков заряженных частиц. В работе [73] на основе метода моментов разработаны вычислительные методы и создан пакет программ для анализа периодической (или квазипериодической) фокусирующей структуры линейного ускорителя, канала транспортировки пучка, группирователя с учетом эффектов пространственного заряда. Для пучка мезонной фабрики ИЯИ АН СССР [74] (ток инъекции 140 мА) методом моментов рассчитаны два варианта канала инъекции [75, 76]. Метод моментов, благодаря большому выигрышу во времени, позволил осуществить оптимизацию канала.

Моменты второго порядка для кольцевых пучков. При исследовании равновесных характеристик кольцевых пучков заряженных частиц и их поведения при адиабатическом изменении параметров внешнего электромагнитного поля обычно рассматривались две модели. В первой [77] не учитывался энергетический разброс, и радиаль-

ный размер пучка определяется амплитудами бетатронных колебаний частиц. Во второй модели [78] радиальный фазовый объем считался равным нулю и размер определялся энергетическим разбросом частиц в пучке. Здесь с помощью метода полных моментов функции распределения изучим стационарные состояния, свободные колебания и адиабатическое изменение среднеквадратичных размеров кольцевых пучков заряженных частиц с отличными от нуля энергетическим разбросом и радиальным фазовым объемом [79].

Рассмотрим азимутально-симметричное кольцо заряженных частиц, имеющих энергетический разброс и движущихся в магнитном поле $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$.

При длительном удержании релятивистских электронных колец существенными становятся эффекты, связанные с потерями энергии на синхротронное излучение, а также рассеяние электронов на остаточном газе или накопленных ионах. Влияние излучения на формирование электронных колец рассматривалось ранее [80]. Линеаризованные уравнения движения в цилиндрической системе координат (R, θ, z) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{P}{\gamma mc^2} \right) \dot{x} + \omega_r^2 x + F_x + \delta F_x &= \frac{\omega_0 M}{\gamma m R_0}; \\ \ddot{z} + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{P}{\gamma mc^2} \right) \dot{z} + \omega_z^2 z + F_z + \delta F_z &= 0; \\ \dot{W} + P \left((1 - 2n) \frac{\mathbf{x}}{c} + \frac{2W}{\gamma mc^2} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где n — показатель магнитного поля; $x = R - R_0$; $W = M_\theta - M_\theta^0$, $\omega_{r,z} = \nu_{r,z} \omega_0$ — частота бетатронных колебаний; M_θ^0 — обобщенный момент количества движения; $P = 2e^4 B_z^2 \gamma^2 / (3m^2 c^3)$ — мощность радиационных потерь равновесной частицы. Сила \mathbf{F} обусловлена действием собственного электромагнитного поля пучка. Случайная сила $\delta \mathbf{F}$ связана с рассеянием электронов на ионах и нейтральных атомах [72]. Для того чтобы система (25) была полной, необходимо добавить уравнение, описывающее изменение большого радиуса кольца и связь энергии электронов с индукцией магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}_0 + \frac{R_0}{(1-n) B_z} \left(\dot{B}_z - \frac{\dot{B}_z}{2} \right) + \frac{R_0 P}{(1-n) \gamma mc^2} &= 0; \\ \gamma mc^2 &= -c B_z R_0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Здесь B_z — среднее значение индукции поля B_z в круге радиуса R_0 .

Образум из координат и скоростей частицы вектор-столбец Y и уравнения движения (25) представим, как обычно, в матричном виде

$$dY/dt = AY + F + \delta F. \quad (27)$$

Матрица A определена следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\omega_r^2 & 0 \\ 0 & -\omega_z^2 \\ -\frac{(1-2n)P}{c} & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$a = \begin{pmatrix} -\frac{P}{\gamma mc^2} - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} & 0 & \frac{\omega_0}{\gamma m R_0} \\ 0 & -\frac{P}{\gamma mc^2} - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2P}{\gamma mc^2} \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец F построен из компонентов силы Лоренца собственного электромагнитного поля пучка.

Матрицы M_{xx} , M_{xv} , M_{vv} определены как прежде, например, M_{xx} — матрица среднеквадратичных размеров пучка

$$M_{xx}^{ij} = \overline{x_i x_j}, \quad i, j = 1, 2. \quad (29)$$

В отличие от (12) эти матрицы имеют разный порядок: M_{xx} , M_{vv} — квадратные симметричные матрицы второго и третьего порядка соответственно, а M_{xv} — прямоугольная матрица размерности 2×3 .

Моменты второго порядка удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$dM/dt = AM + M\tilde{A} + F\tilde{Y} + Y\tilde{E} + \delta F\tilde{Y} + Y\delta\tilde{F}. \quad (30)$$

Если радиальное и аксиальное движения разделяются, то можно найти частное решение системы (30) с диагональной матрицей M_{xx} . Для моментов второго порядка имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x^2}} &= 2\overline{xv_r}; \\ \dot{\overline{v_r^2}} &= -2\omega_r^2 \overline{xv_r} - 2 \left(\frac{P}{\gamma mc^2} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \overline{v_r^2} + \frac{2c}{\gamma m R_0^2} \overline{Wv_r} + 2S_r; \\ \dot{\overline{xv_r}} &= \overline{v_r^2} - \overline{x^2} \omega_r^2 - \left(\frac{P}{\gamma mc^2} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \overline{xv_r} + \frac{c}{\gamma m R_0^2} \overline{Wx}; \\ \dot{\overline{xW}} &= \overline{v_r W} - \frac{(1-2n)}{c} P \overline{x^2} - \frac{2P}{\gamma mc^2} \overline{xW}; \\ \dot{\overline{v_r W}} &= -\omega_r^2 \overline{xv_r} - \left(\frac{P}{\gamma mc^2} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \overline{v_r W} + \\ &+ \frac{\overline{cW^2}}{\gamma m R_0^2} - \frac{(1-2n)}{c} P \overline{xv_r} - \frac{2P}{\gamma mc^2} \overline{v_r W}; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \dot{\overline{W}}^2 &= \frac{-2(1-2n)}{c} P \overline{xW} - \frac{4P}{\gamma m c^2} \overline{W}^2; \\ \dot{\overline{z}}^2 &= 2 \overline{v_z z}; \\ \dot{\overline{z v_z}} &= \overline{v_z^2} - \omega_z^2 \overline{z^2}; \\ \dot{\overline{v_z^2}} &= -2 \omega_z^2 \overline{v_z} + 2 S_z, \end{aligned}$$

где

$$S_{r,z} = \frac{1}{\gamma m} \int \int \gamma \delta F_{r,z} v_{r,z} f_i f_e dY_i dY_e. \quad (32)$$

Здесь f_i, f_e, dY_i, dY_e — функции распределения и элементы фазового пространства ионов и электронов соответственно. Используя результаты работы [72] для произвольных плотностей электронов и ионов в малом сечении кольца $\rho_e(x_e, z_e)$ и $\rho_i(x_i, z_i)$, для среднеквадратичного изменения поперечной составляющей скорости электрона, вызванного рассеянием на зарядах I , например, в направлении r , получаем [79]:

$$S_r = \frac{2I^2 r_e^2 c^3}{\gamma^2 N} \int \int \frac{(x_i - x_e)^2 \rho_e \rho_i}{[(x_i - x_e)^2 + (z_i - z_e)^2]^2} dx_e dx_i dz_e dz_i. \quad (33)$$

Аналогичное выражение соответствует S_z .

При вычислении рассеяния на ионах с зарядом i интегрирование в (33) производится по двум областям пространства: первая отвечает рассеянию на ядре с зарядом Z и $(Z - i)$ электронов иона и соответствует прицельному расстоянию, меньшему радиуса иона; вторая — рассеянию на ионе целиком с прицельным расстоянием, большим размера иона, но меньшим диаметра пучка. Для равномерной плотности электронов и ионов нетрудно найти

$$\begin{aligned} S_r = S_z &= \frac{r_e^2 N_i c^3}{2\pi a b \gamma^2} \left[(Z^2 - Z - i) \ln \left(\frac{a_0 \gamma m c}{\hbar (Z - i)^{1/3}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i^2 \ln \left(\sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \frac{ab}{a_0} \right) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

a_0 — боровский радиус; \hbar — постоянная Планка, где a и b — среднеквадратичные полуразмеры пучка, $a = \sqrt{\overline{x^2}}$, $b = \sqrt{\overline{z^2}}$, кроме того, $v_r = \sqrt{\overline{v_r^2}}$, $v_z = \sqrt{\overline{v_z^2}}$.

Учет собственных полей приводит к обычному кулоновскому сдвигу частоты

$$v_r^2 = 1 - n - \frac{r_e N_e R_0^2}{\gamma^3 \beta^2 a (a + b)}. \quad (35)$$

Система (31) полностью описывает изменение малых размеров кольца и разброс по моментам количества движения азимутально-симметричного пучка с учетом радиационных эффектов и увеличения

фазового объема, вызванного рассеянием электронов на накопленных ионах.

При медленной зависимости параметров системы (31) от времени, когда выполняются соотношения

$$\frac{\gamma}{\omega_0 \gamma} \sim \frac{\dot{R}_0}{\omega_0 R_0} \sim \varepsilon \ll 1, \quad (36)$$

первые производные по времени в (31) являются величинами порядка ε . Пренебрегая величинами более высокого порядка малости, получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma v_r^2}{\omega_r} \right) = \frac{\gamma}{\omega_r} \left[\frac{P v_r^2}{\gamma m c^2} \left(\frac{(1-2n)c^2}{R_0^2 \omega_r^2} - 1 \right) + S_r \right]; \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma v_z^2}{\omega_z} \right) = \frac{\gamma}{\omega_z} \left(S_z - \frac{P v_z^2}{\gamma m c^2} \right); \quad (38)$$

$$\frac{d\bar{W}^2}{dt} = - \frac{2P\bar{W}^2}{\gamma m c^2} \left(\frac{(1-2n)c^2}{R_0^2 \omega_r^2} + 2 \right), \quad (39)$$

где среднеквадратичные скорости

$$v_r^2 = a^2 \omega_r^2 - \frac{c\bar{W}^2}{\gamma^2 m^2 R_0^4 \omega_r^4}; \quad v_z^2 = b^2 \omega_z^2. \quad (40)$$

Когда влияние синхротронного излучения и рассеяния электронов несущественно, из уравнений (37) — (39) получаем известные адиабатические инварианты [79]:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \omega_r \left(a^2 - \frac{c\bar{W}^2}{\gamma^2 m^2 R_0^4 \omega_r^4} \right) &= E_r = \text{const}; \\ \gamma \omega_z b^2 &= E_z = \text{const}; \quad \bar{W}^2 = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где E_r и E_z — эффективные фазовые объемы поперечного движения частиц в пучке.

Первое из выражений (41) удобно переписать, используя «бетатронный» и «синхротронный» размеры $a^2 = a_c^2 + a_b^2$, где $a_c^2 = E_r / \gamma \omega_r$, $a_b^2 = c^2 \bar{W}^2 / \gamma^2 m^2 R_0^4 \omega_r^4$. При $a_c \ll a_b$ из (41) следуют результаты модели [77], в обратном случае получаем уравнения, совпадающие с [78]. Пренебрегая вкладом от собственных полей, из (39) находим [80]:

$$\frac{d\bar{W}^2}{dt} = 2 \left(\frac{3-4n}{1-n} \right) \bar{W}^2. \quad (42)$$

Оценки показывают, что для типичных параметров электронных колец в коллективных ускорителях характерные времена процессов

с синхротронным излучением [10] и рассеянием электронов на накопленных ионах [81] имеют порядок величины 10—100 мс. При длительном удержании электронных колец, необходимом, например, для получения ионов высокой зарядности в коллективных ускорителях, синхротронное излучение приводит к уменьшению поперечных размеров кольца и при $0 \leq n \leq 3/4$ к разбросу электронов по обобщенным моментам количества движения, а рассеяние электронов на ионах увеличивает малые размеры пучка. Прохождение линейного электронного пучка через газ или твердотельные пленки также ведет к увеличению поперечных размеров пучка, которое можно учесть в уравнении (22). Эксперименты, проведенные Бриггсом и др. [82] по распространению пучка в газе, показали хорошее согласие измеренных и рассчитанных по методу моментов значений среднеквадратичного радиуса [83].

При прохождении электронного пучка через тонкие твердотельные пленки, когда изменением энергии и поперечных размеров пучка можно пренебречь, конечный среднеквадратичный эмиттанс пучка определяется формулой $\epsilon = \sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta\epsilon^2}$, где $\epsilon_0 = av/v_e$ — начальное значение эмиттанса. Приращение

$$\Delta\epsilon^2 = \frac{4\pi a^2 r_e^2 n_0 c^4 Z^2 d}{v_e^4 \gamma^2} \ln \frac{137}{Z^{1/3}} \quad (43)$$

n_0 — число атомов с зарядом ядра Z в единице объема пленки; d — ее толщина [84]. На рис. 8 приведены расчетные результаты относи-

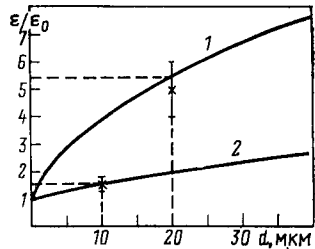


Рис. 8. Относительное изменение эмиттанса электронного пучка в зависимости от толщины пленки из титана (кривая 1) и лавсана (кривая 2) при прохождении пучка через пленку. Точки — экспериментальные значения

тельного увеличения эмиттанса ϵ/ϵ_0 для пучка с параметрами $a = 1$ см, $\gamma = 4,3$ при прохождении через титановую фольгу (кривая 1) и лавсановую пленку (кривая 2) в зависимости от толщины пленки, а также результаты экспериментальных измерений эмиттанса, которые, как видно из рисунка, удовлетворительно согласуются с расчетами.

Многокомпонентные заряженные пучки. Метод моментов позволяет моделировать накопление и последовательную ионизацию ионов в электронных пучках, проследить изменение размеров каждой зарядовой компоненты, учесть влияние отдельных зарядностей друг на друга. Уравнения движения электронов и ионов с зарядностью i

записываются в следующем виде [85, 86]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_e + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{x}_e + \omega_x^2 x_e - \frac{1}{m\gamma} \left(F_x^{ee} + \sum_{i=1}^z F_x^{ei} \right) &= 0; \\ \ddot{z}_e + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{z}_e + \omega_z^2 z_e - \frac{1}{m\gamma} \left(F_z^{ee} + \sum_{i=1}^z F_z^{ei} \right) &= 0; \\ \ddot{x}_i - \frac{1}{AM} \left(F_x^{ie} + \sum_{j=1}^z F_x^{ij} \right) &= 0; \\ \ddot{z}_i - \frac{1}{AM} \left(F_z^{ie} + \sum_{j=1}^z F_z^{ij} \right) &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots, Z. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Здесь, как и прежде, индексы e означают, что данная величина относится к электронам, а i и j к одной из z ионных зарядностей, x отклонение радиуса частицы от равновесного; для кольцевых пучков $\omega_x^2 = (1-n)c^2/R_0^2$, $\omega_z^2 = nc^2/R_0^2$, силы F^{ei} , F^{ie} , F^{ee} , F^{ij} обусловлены действием собственного заряда компонентов кольца; так, например, F^{ei} — сила, действующая на электрон со стороны ионов i -й зарядности. Функция распределения ионов с учетом ион-ионной перезарядки удовлетворяет следующей цепочке кинетических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dt} &= \rho_e c (\sigma_{i-1}^e f_{i-1} - \sigma_i^e f_i) + \sum_{j=0}^z \left(\int f_{i+1} f_j \sigma_{i+1,j} |\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_j| dv_{xj} dv_{zj} + \right. \\ &\quad \left. + \int f_j f_{i-1} \sigma_{j,i-1} |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{i-1}| dv_{xj} dv_{zj} - \right. \\ &\quad \left. - \int f_i f_j |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j| (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) dv_{xj} dv_{zj} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

где σ_i^e — сечение электронной ионизации i -зарядного иона, причем $\sigma_z^e = 0$, σ_{ij} — сечение перезарядки $A^{i+} + B^{j+} \rightarrow A^{(i-1)+} + B^{(j+1)+}$, а f_0 — функция распределения нейтральных атомов.

Следуя работам [85, 86], выпишем уравнения для среднеквадратичных размеров:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{a}_e + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{a}_e + \omega_{xe}^2 a_e - \frac{E_{xe}^2}{\gamma^2 a_e^2} &= 0; \\ \ddot{b}_e + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{b}_e + \omega_{ze}^2 b_e - \frac{E_{ze}^2}{\gamma^2 b_e^2} &= 0; \\ \ddot{a}_i + \omega_{xi}^2 a_i - \frac{E_{xi}^2}{a_i^2} &= 0; \\ \ddot{b}_i + \omega_{zi}^2 b_i - \frac{E_{zi}^2}{b_i^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где ω — усредненные частоты собственных колебаний частиц данного сорта; E — эффективные фазовые объемы электронной и ионных компонент.

При медленном накоплении ионов по сравнению с периодами собственных колебаний частиц эффективные фазовые объемы остаются постоянными. В случае кольцевых пучков со среднеквадратичным разбросом электронов по обобщенным моментам \bar{W}^2 система (46) переходит в систему алгебраических уравнений, аналогичных (41):

$$\left. \begin{aligned} \gamma\omega_{xe} \left(a_e^2 - \frac{\bar{W}^2 c^2}{\gamma^2 m^2 \omega_{xe}^4 R^4} \right) &= E_{xe}; \quad \gamma\omega_{ze} b_e^2 = E_{ze}; \\ \omega_{xi} a_i^2 &= E_{xi}; \quad \omega_{zi} b_i^2 = E_{zi}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, Z. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Если предположить, что плотности электронов и ионов имеют гауссово распределение в сечении пучка

$$\rho_{e,i} = \frac{N_{e,i}}{2\pi a_{e,i} b_{e,i}} \exp \left(-\frac{x^2}{2a_{e,i}^2} - \frac{z^2}{2b_{e,i}^2} \right), \quad (48)$$

где $N_{e,i}$ — линейные плотности частиц, то частоты колебаний равны [86]:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xe}^2 &= \frac{c^2}{R_0^2} (1-n) - \frac{e^2 N_e}{\gamma^3 m a_e (a_e + b_e)} + \\ &+ \frac{2e^2}{\gamma m} \sum_{i=1}^z \frac{i N_i}{(a_e^2 + a_i^2 + \sqrt{(a_e^2 + a_i^2)(b_e^2 + b_i^2)})}; \\ \omega_{ze}^2 &= \frac{nc^2}{R_0^2} - \frac{e^2 N_e}{\gamma^3 m b_e (a_e + b_e)} + \\ &+ \frac{2e^2}{\gamma m} \sum_{i=1}^z \frac{i N_i}{(b_e^2 + b_i^2 + \sqrt{(a_e^2 + a_i^2)(b_e^2 + b_i^2)})}; \\ \omega_{xi}^2 &= \frac{2ie^2}{AM} \left(\frac{N_e}{a_e^2 + a_i^2 + \sqrt{(a_e^2 + a_i^2)(b_e^2 + b_i^2)}} - \right. \\ &- \left. \sum_{j=1}^z \frac{j N_j}{a_i^2 + a_j^2 + \sqrt{(a_i^2 + a_j^2)(b_i^2 + b_j^2)}} \right); \\ \omega_{zi}^2 &= \frac{2ie^2}{AM} \left(\frac{N_e}{b_e^2 + b_i^2 + \sqrt{(a_e^2 + a_i^2)(b_e^2 + b_i^2)}} - \right. \\ &- \left. \sum_{j=1}^z \frac{j N_j}{b_i^2 + b_j^2 + \sqrt{(a_i^2 + a_j^2)(b_i^2 + b_j^2)}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Пренебрегая в уравнении (45) членами, связанными с перезарядкой, для плотности (48) имеем:

$$dN_i/dt = \rho_e c (\sigma_{i-1} N_{i-1} - \sigma_i N_i). \quad (50)$$

Уравнения (47), (50) вместе с формулами (49) использовались для расчета адиабатического сжатия электронного кольца в адгезаторе адиабатического генератора заряженных тороидов прототипа КУТИ в атмосфере остаточного газа (азота) [86].

Зависимости от времени радиуса R , релятивистского фактора γ и показателя спада внешнего магнитного поля n аппроксимировались аналитическими функциями времени.

Параметры электронного кольца близки к параметрам колец, формируемым в адгезаторе КУТИ [9]: начальный радиус $R_0 = 35$ см,

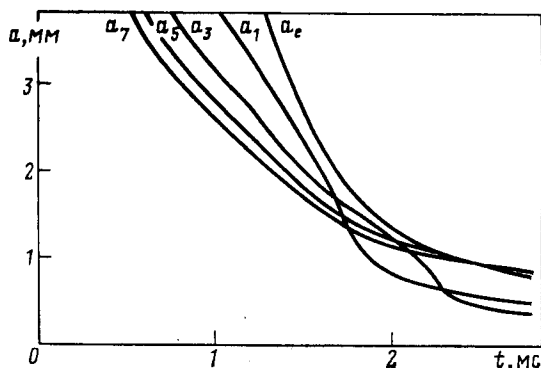


Рис. 9. Изменение среднеквадратичных размеров электронной (a_e) и ионных ($a_1 \div a_7$) компонент на конечной стадии сжатия электронного кольца

размеры сечения кольца $a_e = b_e = 2$ см, число электронов в кольце $N_e = 10^{13}$. Считалось, что в момент инжекции «синхротронный» a_c и «бетатронный» a_b радиальные размеры сечений совпадают. Давление остаточного газа в камере адгезатора в данном варианте расчета равнялось $4 \cdot 10^{-6}$ Па ($3 \cdot 10^{-8}$ мм рт. ст.). За время сжатия кольца (около 2,3 мс) средняя зарядность ионов увеличивается до $\bar{i} = 5$ и нейтрализация электронного заряда достигает 40—50%. Дисперсия распределения ионов по зарядностям равна 0,6.

На рис. 9 приведены зависимости среднеквадратичных размеров сечений электронно-ионного кольца $a_{e,i}$ от времени на конечной стадии сжатия. Аксиальные размеры кольца $b_{e,i}$ примерно совпадают с радиальными. В конце сжатия, как это следует из графиков, среднеквадратичные размеры ионов a_3 совпадают с размерами электронов. Объясняется это главным образом уменьшением частот колебаний ионов в результате нейтрализации заряда электронов.

3. ПОЛУЧЕНИЕ МНОГОЗАРЯДНЫХ ИОНОВ В ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ ПУЧКАХ

Проблемы получения многозарядных ионов. Генерация пучков многозарядных ионов, в том числе и полностью лишенных электронной оболочки, очень актуальна в настоящее время. Чем больше

отношение заряда иона i к его массовому числу A , тем эффективней работают ускорители. Многозарядные ионы необходимы для спектроскопических исследований, измерения сечений ионизации и перезарядки. Большой интерес представляет изучение особенностей α - и β -распадов ядер в отсутствие электронной оболочки.

Ионы самых высоких зарядностей и ядра всех газообразных элементов до криптона включительно были получены в источнике ионов КРИОН-2 [2]. Ядра более тяжелых элементов получают обдиркой на газообразной или твердой мишени (стриппере) предварительно ускоренных до энергий порядка 10 МэВ/нуклон и выше ионов небольшой зарядности. Ускоренные пучки многозарядных ионов используют в ядерно-физических исследованиях или для последующего ускорения. Для многих физических исследований и прикладных задач требуются многозарядные ионы низких энергий. Возможности получения многозарядных ионов в электронных пучках и кольцах, кроме технических трудностей длительного удержания, ограничены рядом факторов. Среди них особое значение имеют:

- а) перезарядка на остаточном газе в камере ускорителя;
 - б) нейтрализация собственного заряда пучка образующимися из остаточного газа ионами;
 - в) потери ионов в результате их нагрева электронами пучка.
- Остановимся подробнее на этих вопросах.

а. Средний заряд ионов повышается в результате ионизации электронным ударом. С ростом заряда ионов i сечение ионизации σ_i^e уменьшается и процесс замедляется. В то же время сечение перезарядки ионов на нейтральных атомах σ_{i0} увеличивается приблизительно пропорционально заряду i и может достигать значений до 10^{-13} см² [38, 88]. Необходимая для получения ионов с зарядностью i плотность атомов остаточного газа n_0 в пучке с плотностью электронов n_e может быть определена из условия [89]:

$$\frac{n_0 \sigma_{i0} v_i}{n_e \sigma_i^e v_e} \ll 1, \quad (51)$$

где v_i и v_e — скорости ионов и электронов соответственно.

б. В электронных пучках и кольцах ионы удерживаются в потенциальной яме собственного заряда электронов. Ионы, образовавшиеся из остаточного газа, нейтрализуют заряд электронов и уменьшают глубину ямы. Число ионов в пучке и соответственно требование на давление остаточного газа определяются из (5) или (6) в зависимости от плотности электронов в пучке и сечения ионизации нейтрального газа. Условия рождения ионов только на краю пучка и равномерно по всему сечению изучались в [90].

в. За счет упругих столкновений с электронами ионы постепенно увеличивают энергию колебаний, которая может превысить глубину потенциальной ямы пучка. В результате ионы будут потеряны. Увеличение энергии ионов с зарядом $i \approx Z$ дается выражением,

аналогичным интегралу столкновений (34):

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \frac{r_e^2 Z^2 N_e m^2 c^3}{a_e^2 \beta^4 M} \ln \left(\frac{2\gamma\beta a_e}{137 r_e} \right), \quad (52)$$

где $\beta = v_e/c$.

Накопление ионов в электронных пучках большой длительности. Мы рассматриваем электронные пучки, длительность которых значительно больше характерных времен образования и накопления ионов, т. е. составляет 1 мс — 1 с и более. В таких пучках токи не превосходят нескольких ампер, а энергии электронов десятков — сотен килоэлектрон-вольт. Наиболее характерным примером являются электронные пучки электронно-лучевых источников ионов.

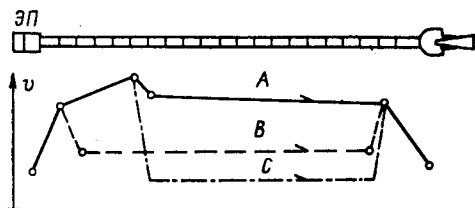


Рис. 10. Схема электронно-оптической системы и распределения электрического потенциала U вдоль дрейфовой структуры ионизатора КРИОН:

A — режим вывода ионов из ионизатора; B — режим инжекции ионов рабочего вещества; C — режим удержания и ионизации

В настоящее время электронно-лучевые источники разрабатываются и используются для ускорителей тяжелых ионов в нескольких научных центрах [91—94]. В Дубне для ускорения на синхрофазотроне ядер C , N , O и Ne с 1977 г. используется источник КРИОН-1 [95]. В источнике КРИОН-2 получены ионы с рекордными зарядностями, которые применяются для спектроскопических исследований, измерения сечений ионизации и в других экспериментах [25].

Электронно-лучевой источник EBIS представляет собой ускоритель электронов с трубкой дрейфа. Электронный пучок сильно сфокусирован продольным магнитным полем. Принцип действия и конструкция ионизатора КРИОН-2 поясняются рис. 10 [87]. Криогенно-магнитная система ионизатора КРИОН-2 обеспечивает максимальную индукцию фокусирующего электронного пучка поля $B = 2,25$ Тл на длине ионизатора 1,2 м. Катод электронной пушки (ЭП) диаметром 0,8 мм размещен в нарастающем магнитном поле соленоида при $B = B_{\text{макс}}/6$, что обеспечивает компрессию электронного пучка до равновесного радиуса $a = 0,15$ мм. Дрейфовая структура состоит из 25 изолированных секций. Рабочий газ, из которого образуются ионы, поступает внутрь третьей секции. Поддерживаемая в трубке дрейфа в рабочем режиме температура 4,2 К обеспечивает давление остаточного газа меньше 10^{-10} Па (10^{-12} мм рт. ст.). Импульсная инжекция ионов рабочего вещества в электронный пучок, их удержание и вывод из пучка в продольном направлении осуществляются последовательным изменением распределения потенциала U вдоль оси ионизатора соответственно: $B \rightarrow C \rightarrow A$. Принцип действия, конструкция и результаты экспериментальных исследований накоп-

ления многозарядных ионов изложены в обзорах [7, 25]. На ионизаторе КРИОН-2 были получены следующие предельные параметры: энергия электронов до 22 кэВ, плотность тока j до $4,2 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ (650 А/см^2), время ионизации до 5,5 с, фактор ионизации $j\tau$ до $8 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-2}$.

Конструкция катода и сильное продольное магнитное поле обеспечивают равномерную плотность электронов в сечении пучка. Накопление ионов в электронных пучках с постоянной плотностью рассматривалось в [9, 90, 96—98]. В равномерно заряженных электронных пучках ионы с равной вероятностью образуются в любой точке сечения. Если при этом пренебречь их начальными тепловыми скоростями, то функция распределения однозарядных ионов [9]

$$f_1 = \frac{N_1 A M}{4\pi^2 a_1^2 \omega_1} \sigma(\epsilon_{\text{ГР}} - \epsilon) \delta(M\varphi), \tag{53}$$

где $M\varphi$ — момент количества движения иона; ϵ — его энергия; $\epsilon_{\text{ГР}} = N_e r_e m c^2$ — энергия иона на границе пучка; $\omega_1 = (N_e r_e m c^2 / (2 A M a_e^2))^{1/2}$ — частота колебаний однозарядных ионов; A — атомное число иона; M — масса нуклона. Функции распределения (53) соответствует плотность ионов в поперечном сечении пучка [96, 97]:

$$\rho_1 = \frac{N_1}{2\pi^2 a^2} \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}, \tag{54}$$

среднеквадратичный полуразмер $a_1 = a/2\sqrt{2}$ и среднеквадратичная скорость поперечных колебаний $v_1^2 = a_e^2 \omega_1^2$.

Плотность (54) имеет нефизическую особенность в центре пучка, появление которой связано с тем, что при выводе не учтены скорости нейтральных атомов. В электронных пучках, размеры которых поддерживаются стационарными внешними электромагнитными полями, среднеквадратичные размеры ионных зарядностей с ростом заряда i убывают по закону [96—98]:

$$a_i^2 = a_1^2 \frac{2\Gamma(i+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(i+1)}, \quad a_1^2 = a_e^2/2. \tag{55}$$

Здесь a_e — среднеквадратичный поперечный полуразмер электронного пучка.

Эффективный фазовый объем поперечного движения, при переходе из зарядности в зарядность немного увеличиваясь, выходит на постоянное значение

$$E_i^2 = 4 \frac{[\Gamma(i+1/2)]^2}{\Gamma(1/2)\Gamma(i)} a_e^2 \omega_1^2. \tag{56}$$

При $i \gg 1$ из (55) и (56) можно получить [99]:

$$a_i^2 = \frac{2a_1^2}{\sqrt{\pi i}}; \quad E_i^2 = \frac{4}{\pi} E_1^2. \tag{57}$$

Таким образом, среднеквадратичные поперечные размеры многозарядных ионов могут быть в 3—4 раза меньше, чем размеры равномерно заряженного электронного пучка. Средняя полная энергия поперечных колебаний ионов определяется как

$$\varepsilon_i = 2AMa_i^2\omega_i^2 = \sqrt{\frac{i}{\pi}} N_e r_e m c^2. \quad (58)$$

Воспользовавшись выражением (52), найдем скорость относительного роста энергии ионов при $i \approx Z$ из-за столкновений с электронами пучка:

$$\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{dt} = \sqrt{\pi Z} \frac{Z}{A} \frac{m}{M} \frac{r_e c}{a_i^2} \ln \left(\frac{2\gamma\beta a_e}{137 r_e} \right). \quad (59)$$

Для тяжелых ионов $Z/A \approx 0,4$. Используя параметры электронного пучка ионизатора КРИОН-2 [87] для энергии электронов 10 кэВ, получаем

$$\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{dt} \approx 5 \sqrt{Z} c^{-1}.$$

Следовательно, характерные времена нагрева средних и тяжелых ионов составляют 30—50 мс, что согласуется со скоростью потерь ионов в электронно-лучевых ионизаторах [87, 94].

Соотношения, приведенные в предыдущем разделе, позволяют оценить влияние остаточного газа на образование многозарядных ионов и время нейтрализации собственного заряда в пучке.

Давление остаточного газа в ионизаторе КРИОН-2 $\leq 1,3 \cdot 10^{-10}$ Па (10^{-12} мм рт. ст.) [87]. Используя сечения ионизации из [30] и перезарядки [38] в (51), приходим к заключению, что в этом источнике ионов могут в принципе образовываться ионы Xe^{54+} , а общее время нейтрализации ионами N^{7+} из остаточного газа составляет около 20 с.

Накопление ионов в электронных кольцах. Рассмотрим накопление ионов в электронных кольцах коллективного ускорителя. Как правило, в кольцевых ускорителях электронов других типов создается достаточно высокий вакуум для того, чтобы число образовавшихся ионов было незначительным.

В КУТИ электронные кольца формируются из линейного электронного пучка в устройстве, называемом адгезатором [9]. Адгезатор состоит из тонкостенной камеры и системы токовых катушек (ступеней сжатия) (рис. 11). Электронный пучок инжектируется в слабофокусирующее магнитное поле и сворачивается в кольцо радиусом 35 см. В результате поочередного включения ступеней сжатия магнитное поле нарастает во времени и сжимает кольцо. Энергия электронов увеличивается. Существуют также способы сжатия электронных колец в стационарных пространственно неоднородных магнитных полях [100].

Электронные кольца, получаемые после сжатия на КУТИ ОИЯИ, имеют следующие параметры [9]:

Большой радиус R , см	3,5
Малые среднеквадратичные полуразмеры a , см	0,1
Число электронов	до 10^{13}
Энергия электронов, МэВ	20

Общее время формирования электронного кольца 2—3 мс. В электронных кольцах ионы образуются из остаточного газа либо из

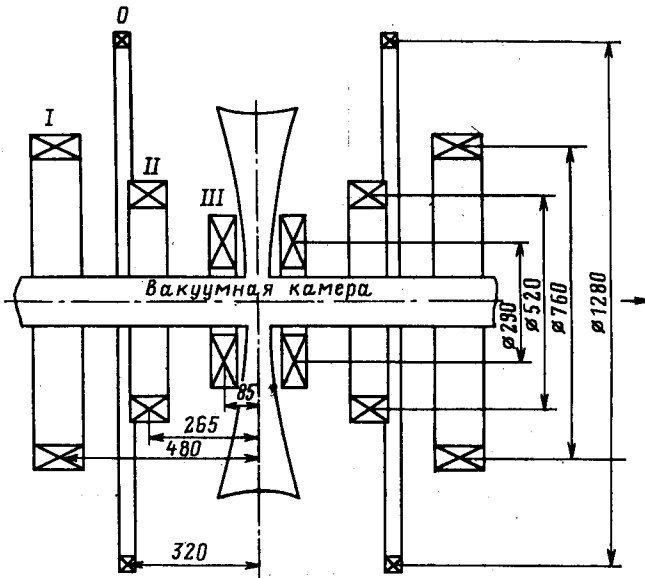


Рис. 11. Схема магнитной системы адгезатора коллективного ускорителя тяжелых ионов ОИЯИ:

0 — III — катушки ступеней сжатия

специально впрыскиваемой струи нейтрального газа. В настоящее время разработаны источники атомов различных конструкций. На КУТИ используются газодинамический источник для получения импульсных потоков газообразных веществ [101] и лазерный — для твердых материалов [102]. На рис. 12 изображено расчетное изменение среднего заряда ионов азота, ксенона и урана в кольце [81]. Источник нейтральных атомов включается во время $t \approx 1,7$ мс при радиусе кольца $R = 5$ см. Сплошные кривые соответствуют числу электронов 10^{13} , пунктир — $5 \cdot 10^{12}$.

Плотность электронов в сечении кольца имеет распределение гауссова типа:

$$\rho_e = \frac{N_e}{2\pi a_e^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2a_e^2}\right). \quad (60)$$

Поскольку кольцо достаточно тонкое, то всеми эффектами, связанными с кривизной, при накоплении ионов можно пренебречь. Особенности накопления ионов в неравномерно заряженных пучках рассматривались в [85, 86, 98, 99, 103—105].

В электронном пучке с гауссовой плотностью вероятность ионизации зависит от радиуса. По этой причине ионы, имеющие разную

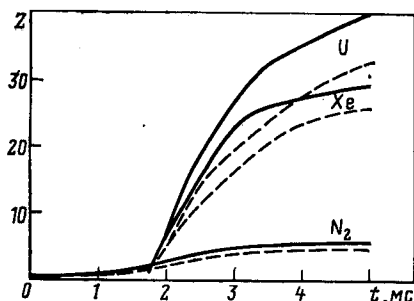


Рис. 12. Изменение среднего заряда ионов азота, ксенона и урана в зависимости от времени в электронном кольце коллективного ускорителя: сплошная кривая — $N_e = 10^{18}$; пунктир $N_e = 5 \cdot 10^{12}$

полную энергию, будут иметь и различную вероятность подвергнуться дальнейшей ионизации. Ионы с низкой энергией, находящиеся на «дне» потенциальной ямы, свое движение совершают в центре пучка, где плотность электронов максимальна, и имеют относительно высокую вероятность быть ионизованными дальше. Ионы, имеющие высокую энергию, значительное время проводят на краю пучка, где плотность электронов невелика и соответственно средняя вероятность за период колебания их ионизации меньше. Поэтому средняя энергия каждой новой зарядности будет ниже, чем для электронного пучка с постоянной плотностью, соответственно меньшими будут среднеквадратичные размеры и скорости.

Распределение электронов (60) имеет собственное нелинейное электрическое поле:

$$F_e(r) = \frac{2eN_e}{r} \left(1 - \exp \left(-\frac{r^2}{2a_e^2} \right) \right). \quad (61)$$

Однако большинство ионов рождаются и движутся в центре пучка, где поля линейны. Будем приближенно считать, что все ионы совершают гармонические колебания с частотой $\omega_i = \sqrt{\frac{iN_e r_e m}{AM}} \frac{c}{a_e}$.

Их полная энергия $\epsilon_i = \frac{AMv^2}{2} + \frac{AMr^2\omega_i^2}{2}$. В этих предположениях в [98, 99, 104, 105] были получены стационарные функции распределения ионов любой зарядности при условии, что в результате образования каждой новой зарядности функция распределения предыдущей зарядности меняется мало:

$$f_i = \frac{AMN_i}{2\pi^2 a_i^2 \omega_i} \exp \left(-\frac{r^2}{2a_i^2} - \frac{v^2}{2a_i^2 \omega_i^2} \right) \delta(M_\varphi). \quad (62)$$

В [106] получены приближенные функции распределения для ионов нескольких первых зарядностей в электронных пучках с гауссовой плотностью. Точное решение задачи о нахождении функции рас-

предела иона можно найти интегрированием кинетического уравнения по характеристикам. Для ионов первой зарядности такое решение найдено в [86] и получен результат, совпадающий с (62). Проинтегрировав функцию распределения (62) по скоростям ионов, нетрудно найти их плотность в сечении пучка:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N_i}{2\pi a_i r} \exp(-r^2/2a_i^2). \quad (63)$$

Здесь, аналогично (54), особенность в центре пучка возникает из-за того, что при выводе (63) не учтены начальные скорости ионов, связанные с тепловым движением нейтральных атомов.

Функция распределения (62) имеет моменты второго порядка, которым соответствуют среднеквадратичные размеры и скорости:

$$\left. \begin{aligned} a_i^2 &= a_1^2/i = a_e^2/2i; \\ v_i^2 &= a_1^2\omega_i^2 = a_1^2\omega_1^2 = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Эффективный фазовый объем ионов

$$E_i = a_i v_i = a_1^2 \omega_i / \sqrt{i} = E_1 / \sqrt{i}. \quad (65)$$

Для учета влияния нелинейности полей электронов, полей ионов, а также изменений в функции распределения ионов при переходе их из зарядности в зарядность необходимо численное моделирование. Метод моментов функции распределения, рассматривавшийся в разд. 2, является адекватным аппаратом при решении задач о динамике заряженных пучков, в том числе и многокомпонентных. Однако метод моментов оперирует с усредненными величинами. Рассмотреть детальные характеристики пучков, изучить функции распределения частиц, учесть различного рода нелинейности можно с помощью метода крупных частиц.

Метод крупных частиц представляет собой численное решение кинетического уравнения по характеристикам [65, 66] и позволяет воспроизвести все электрические, магнитные и атомные взаимодействия между частицами в пучке. Этим методом было проведено моделирование процессов накопления и ускорения ионов в электронных пучках и кольцах [107—110]. В расчетах использовалось небольшое число частиц (несколько сот), что не позволило изучать электронно-ионные и ион-ионные процессы, динамику функций распределения, рассматривать одновременно несколько ионных зарядностей. Для решения таких задач создана программа, позволяющая на ЭВМ класса СДС-6500 рассматривать одновременно до 10 000 частиц, представляющих электронную и несколько ионных компонент [111, 112].

Основной особенностью программ является то, что собственные поля электронов и ионов U определяются на сетке в полярных коор-

динах решением уравнения Пуассона $\Delta U = -4\pi\rho$ с граничными условиями, например, $U|_{r=R} = 0$ и $\frac{\partial U}{\partial r}|_{r=0} = 0$, где R — граница рассматриваемой в задаче области. Уравнение Пуассона решается при помощи быстрого преобразования Фурье [113]. Приведем основные результаты расчетов, изложенных подробнее в [98, 104, 105]. Изучена динамика среднеквадратичных размеров и эффективных фазовых объемов в зависимости от зарядности ионов (рис. 13). Для

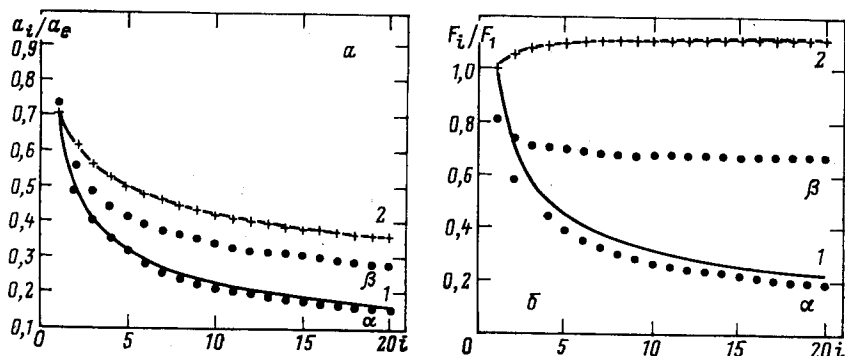


Рис. 13. Изменение среднеквадратичных размеров (а) и эффективного фазового объема (б) ионных компонент в зависимости от заряда ионов:

1 — гауссова плотность пучка, расчет по формулам (64); 2 — равномерная плотность электронного пучка, расчет по формулам (55); точки α и β — численный расчет методом крупных частиц для двух режимов перехода ионов из зарядности в зарядность в электронном пучке с гауссовой плотностью; кресты — численный расчет методом крупных частиц для равномерной плотности электронного пучка

представления каждой ионной зарядности использовалось по 1000 частиц. Электроны в сечении распределены по гауссову закону (60), собственное нелинейное электрическое поле имеет вид (61). Создаваемые ионами поля не учитывались. Расчеты выполнены для двух случаев. В первом (случай α), соответствующем условиям, при которых была найдена функция распределения (62), предполагалось, что при образовании новых ионов функция распределения предыдущей зарядности остается неизменной. В случае β учитывалось изменение функции распределения.

На рис. 14 приведено расчетное, усредненное на кольцевых слоях толщиной $h_r = a_i/20$ распределение плотности по радиусу, отнесенное к средней плотности в центральной области ρ_0 радиусом $h_r/2$ для первой и десятой зарядностей в случае α . На этом рисунке сплошные линии показывают усредненные тем же путем плотности ионов (63) и электронов (60) для $a_e = \sqrt{2} a_i$ и $N_e = 10 N_i$. Численный расчет имеет весьма хорошее согласие с полученной модельной функцией распределения (62). Плотность в центре пучка ρ_0 определяется величиной h_r и может в десятки раз превосходить плотность электронов. Выражение (63) и аналогично (54) для электронных

пучков с постоянной плотностью дают физически невозможную бесконечную плотность в центре пучка. Учет отличных от нуля моментов импульсов ионов [97], значения которых определяется начальными энергиями ионов ϵ_0 , связанных с тепловой энергией исходных молекул, и импульсом, полученным при ионизации, приводит к тому, что ионы реально не могут попасть в центр пучка и сингулярностей не возникает. Минимальное расстояние, на которое ион может приблизиться к центру пучка, $r_{\text{мин}}/a_i = \sqrt{\epsilon_0/\epsilon_i}$. Эта величина для характерных параметров электронно-ионных пучков может

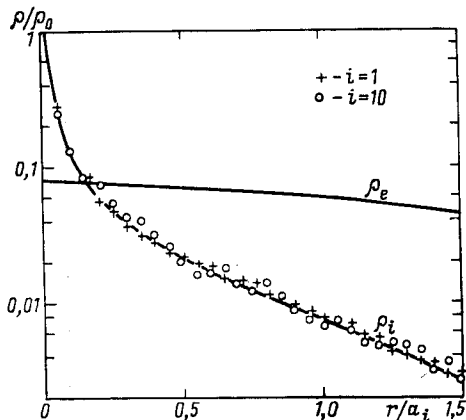


Рис. 14. Расчетная зависимость плотности ионов от радиуса для первой (+) и десятой зарядностей (○) в электронном пучке с гауссовой плотностью

составлять 10^{-3} — 10^{-4} и соответственно $\rho_e/\rho_0 \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$. Вопрос о возможном возникновении в центре таких пучков электронно-ионных неустойчивостей, приводящих к изменению функции распределения (62) и увеличению поперечного фазового объема ионов, до сих пор не изучен. Можно отметить, что в силу ограниченности общего числа ионов в центре пучка, сильных изменений в собственных полях и большего сдвига частот не возникает. Согласно оценкам [104], распределение ионов (62) заметно изменяет поле в центре пучка при факторе нейтрализации $f \geq \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{1}{4i}}$, где \bar{i} — средний заряд ионов. При длительном удержании ионов их столкновения с электронами и между собой в центре пучка ведут к превращению функции распределения ионов в распределение Больцмана, которое не имеет сингулярностей.

На рис. 13, а изображено изменение отношения среднеквадратичных размеров ионов i -зарядности к среднеквадратичным размерам электронного пучка a_i/a_e и на 13, б отношение эффективного фазового объема i -зарядности к фазовому объему первой зарядности в электронном пучке с постоянной плотностью. На этих рисунках кривые 1 проведены через точки, найденные по формулам (64) и (65) для гаус-

совой плотности электронного пучка. Рядом точками нанесены результаты численного расчета с использованием нелинейных полей (61) для случаев α и β . О точности численных вычислений можно судить по расчетам процесса накопления ионов в электронном пучке с постоянной плотностью. Результаты этих расчетов (обозначены крестами на рис. 13) отличаются не более чем на 1—2% от точных значений, найденных по формулам (59) и (60) и представленных сплошными кривыми 2, причем для однозарядных ионов отличие составляет менее 0,5%. Расчеты выполнены для совпадающих среднеквадратичных размеров и линейных плотностей пучков с постоянной плотностью и гауссовым распределением. Результаты позволяют

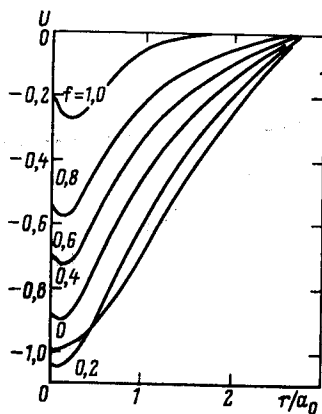


Рис. 15. Зависимость потенциала электрического поля от радиуса в электронном пучке для различных значений фактора нейтрализации электронного заряда ионами

сделать вывод о том, что нелинейность собственных полей гауссова распределения электронов оказывает заметное влияние лишь на функцию распределения ионов первых двух зарядностей. На рис. 15 приведена зависимость потенциала электрического поля U от радиуса при различных значениях фактора нейтрализации ионами f собственного заряда электронов [99, 104, 105]. Появление локального максимума в центре пучка объясняется высокой плотностью ионов в центре согласно функции распределения (62). При увеличении фактора нейтрализации вплоть до полной компенсации заряда ($f = 1$) ионы плохо удерживаются электронами, их размеры становятся больше электронных и полного исчезновения потенциальной ямы не происходит.

Сравнивая особенности накопления ионов в электронных пучках с равномерной и гауссовой плотностью, отметим, что среднеквадратичные размеры и эффективные фазовые объемы ионных зарядностей во втором случае убывают быстрее с ростом заряда ионов. Эти результаты особенно важны для коллективного ускорения ионов электронными кольцами, где имеются жесткие требования на эмит-

танс ионного пучка на выходе из ускорителя [12]. В [99, 104, 105] также анализировалась динамика функций распределения и среднеквадратичных размеров и скоростей электронов и ионов нескольких зарядностей в зависимости от фактора нейтрализации и потери ионов в нейтрализованных по заряду электронных пучках.

Возможности получения многозарядных ионов в электронных кольцах коллективного ускорителя. Достижимый в настоящее время в электронных кольцах коллективного ускорителя фактор ионизации $j\tau \approx 10^{20} \text{ см}^{-2}$. Этого достаточно для получения ионов Xe^{20+} и U^{24+} (см. рис. 12). Релятивистская энергия электронов позволяет ионизовать внутренние оболочки самых тяжелых элементов. Чтобы использовать электронные кольца для получения многозарядных ионов, требуется увеличение времени удержания электронных колец [89, 114]. Сечение ионизации релятивистскими электронами, например, Xe^{53+} равно $2 \cdot 10^{-23} \text{ см}^2$, а для U^{89+} сечение составляет $4 \cdot 10^{-23} \text{ см}^2$ [30]. Поэтому, чтобы получить ядра ксенона и гелийподобные ионы урана, требуется фактор ионизации $j\tau \approx 10^{23} \text{ см}^{-2}$. Кольца с числом электронов $N_e = 10^{13}$, радиусом $R = 3,5 \text{ см}$ и малыми среднеквадратичными полуразмерами $a = 1 \div 1,5 \text{ мм}$ необходимо удерживать не менее 1 с. Кроме определенных технических трудностей, этому препятствуют потери энергии релятивистских электронов на синхротронное излучение и увеличение малых размеров кольца в результате рассеяния электронов на накопленных ионах. Мощность радиационных потерь определяется формулой

$$\frac{de}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^4 r_e}{m^3 c^5 R^2} \cdot \quad (66)$$

Характерное время уменьшения энергии электронов за счет синхротронного излучения при $\epsilon = 20 \text{ МэВ}$ составляет $\tau \approx 30 \text{ мс}$.

На малые размеры электронно-ионных колец влияют два конкурирующих процесса: уменьшение размеров за счет радиационного трения и их увеличение в результате многократного рассеяния электронов на накопленных ионах (37), (38) [115]. Эти факторы в значительной степени зависят от энергии электронов. Так, при релятивистском факторе электронов $\gamma = 30 \div 40$ и радиусе кольца $R \sim 4 \text{ см}$ характерные времена уменьшения размеров за счет синхротронного излучения составляют 30—60 мс, а увеличения из-за рассеяния около 20—30 мс при числе накопленных ионов ксенона 10^{11} . Таким образом, если в начале удержания при больших значениях γ радиационное трение может компенсировать рассеяние электронов на накопленных ионах, то при уменьшении энергии электронов за счет синхротронного излучения рассеяние начинает преобладать и малые размеры быстро увеличиваются. Времена удержания электронного кольца $\sim 1 \text{ с}$ требуют согласно (5), (6), (51) недостижимого в настоящее время значения вакуума $\leq 10^{-8} \text{ Па}$ в камере коллективного ускорителя [89]. По причинам, изложенным выше, время удержания электронно-ионных колец КУТИ ограничено интервалом 50—

100 мс. Максимальный заряд ионов при постоянных размерах кольца оценивается для ксенона как $i = 46 \div 50$ и для урана $i = 74 \div 82$.

Получение ионов более высоких зарядностей требует значительного увеличения плотности электронных колец: Электронные кольца сжимаются в нарастающем во времени магнитном поле в камере адгезатора. Конечный радиус кольца $R_R \sim 1/\sqrt{B}$. Наименьшее значение радиуса электронного кольца, полученное на КУТИ, составляет $R_R = 3$ см при $B \simeq 25$ кЭ [116]. Дальнейшее уменьшение радиуса кольца ограничено возможностями магнитной системы адгезатора.

В [117] предложено использовать синхротронное излучение электронов для дополнительного сжатия электронного кольца. За счет синхротронного излучения радиус уменьшается по закону:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{1-n} \frac{R}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{2}{3(1-n)} \frac{r_e \varepsilon^3}{m^3 c^5 R^3} \cdot \quad (67)$$

Здесь n — показатель магнитного поля.

Создавая в конце сжатия магнитное поле с показателем спада, близким к единице, можно при относительно небольших потерях энергии кольца значительно уменьшить его радиус. Дополнительное сжатие кольца происходит с уменьшением энергии электронов, поэтому не требуется больших конечных значений индукции магнитного поля.

Расчет системы дополнительного сжатия электронного кольца выполнен для КУТИ [117]. Требуемое распределение магнитного поля на конечных радиусах сжатия обеспечивается существующей третьей ступенью сжатия и катушками дополнительного поджатия (КДП) (системой витков с током) — рис. 16. После обычного сжатия кольцо попадает в магнитное поле с показателем спада, близким к единице. Для длительного удержания кольца с ионами катушки III ступени и КДП после выхода тока на максимальное значение закорачиваются [118]. Постоянная времени затухания в III ступени и КДП определяется индуктивностью катушек и их активным сопротивлением и составляет примерно 50 мс. В результате радиус электронного кольца практически не изменяется, так как потери на синхротронное излучение компенсируют уменьшение ведущего магнитного поля. При выборе варианта системы дополнительного поджатия считалось, что она должна обеспечивать:

- 1) поджатие кольца до выбранного радиуса за время 5—10 мс при амплитуде тока в КДП, не превышающей 10 кА;
- 2) вывод сжатого кольца в аксиальном направлении на участок ускорения (в соленоид со спадающим магнитным полем), что накладывало ограничение на минимальный радиус витков.

Этим требованиям удовлетворяет система из двух катушек по 20 витков в каждой с неравномерной плотностью намотки, обеспечивающей необходимое радиальное распределение индукции магнитного

поля B_z при сжатии и удовлетворительное аксиальное распределение его среднего значения \bar{B}_z в момент вывода:

$$\frac{1}{B_z} \left| \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial z} \right| \leq 10^{-2} \text{ см}^{-1}, \quad B_r > 0.$$

На рис. 16 изображена вакуумная камера адгезатора, катушки III ступени сжатия и КДП. Работа схемы проиллюстрирована рис. 17. На рис. 17, а показаны зависимости токов в катушках ступеней

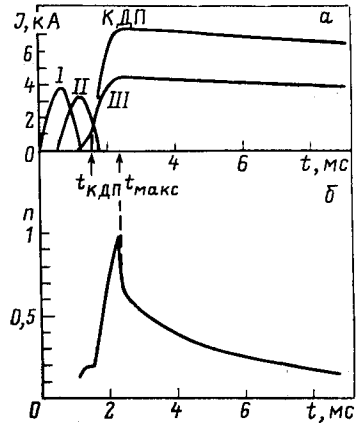
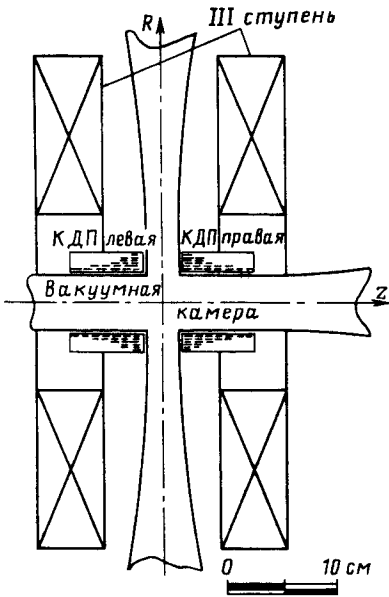


Рис. 17. Зависимости токов в катушках ступеней сжатия (I—III) и КДП (а) и сопутствующего электронному кольцу показателя спада магнитного поля (б) от времени:

$t_{\text{КДП}}$ — момент времени включения КДП; $t_{\text{макс}}$ — момент времени, соответствующий максимальным значениям токов III ступени и КДП

Рис. 16. Системы дополнительного поджатия электронного кольца в КУТИ

сжатия и КДП от времени. Изменение показателя спада вдоль траектории кольца представлено на рис. 17, б. Сжатие до радиуса ~ 5 см ($t = 0 \div t_{\text{КДП}}$, рис. 17, а) осуществляется обычным образом магнитной системой КУТИ. После включения тока в КДП показатель спада n стремится к своему максимальному значению 0,97 (рис. 17, б). Происходит быстрое поджатие кольца до 3 см. После достижения максимумов токи в III ступени и КДП изменяются по закону $J = J_{\text{макс}} e^{-t/T}$, где $T = 50$ мс одинаково для III ступени и КДП, так же изменяется и магнитное поле $B_z = B_{\text{макс}z} e^{-t/T}$. Радиус электронного кольца определяется из уравнения (26). При $n \ll 1$, когда $\bar{B}_z \approx B_z$:

$$R = R_0 \exp(3t/T) / \left[(1 + \alpha) \exp\left(\frac{5-6n}{2-n} \frac{t}{T}\right) - \alpha \right], \quad (68)$$

где

$$\alpha = \frac{4}{3(5-6n)} \frac{r_e R_0 e^3 B_z^2 T}{m^3 c^5},$$

R_0 и B_{z_0} — значения радиуса R и индукции магнитного поля B_z в начале длительного удержания. Расчетные изменения параметров электронного кольца и пучка ионов Хе и У приведены в таблице [115]. Радиус кольца определялся по формуле (68). Для нахождения малых размеров использовалось уравнение (38), при этом рассеяние электронов на ионах не учитывалось. Присутствие в кольце, например,

Таблица. Параметры электронного кольца, ведущего магнитного поля, фактора ионизации и средних зарядов ионов ксенона и урана в ERIS в зависимости от времени удержания электронного кольца

t , мс	R , см	a , мм	γ	B , кЭ	$10^{22} \frac{j\tau}{\text{см}^{-2}}$	Z_{Xe}	Z_{U}
2,5	3,5	1,0	50	20	0,01	20	24
7	2,0	0,8	35	29	0,25	42	68
15	1,5	0,7	23	26	1,0	51	83
30	1,3	0,7	15	20	3,5	53	86
60	1,5	1,0	9,3	11	8,5	54	89
100	2,4	1,5	6,1	5	12,5	54	90

ионов Хе в количестве 10^{10} ведет к некоторому росту поперечных размеров кольца после того, как γ становится меньше 10. Это приводит к увеличению примерно в 1,5 раза конечных малых размеров по

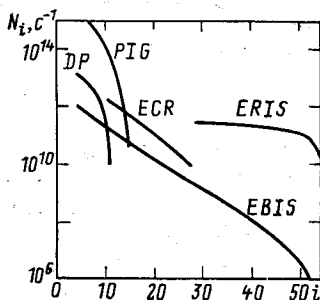


Рис. 18. Зависимость выхода ионов Хе от их зарядности из различных источников ионов:

PIG — пламенно-дуговой источник; DP — дуоплазмотрон; ECR — источник на электронноциклотронном резонансе; EBIS — электроннолучевой источник; ERIS — источник ионов на основе электронного кольца коллективного ускорителя.

сравнению с приведенными. В таблице время отсчитывается от момента, соответствующего началу формирования электронного кольца.

Из (5) и (54) следует, что для получения ионов Хе⁵⁴⁺ за время 0,1 с давление остаточного газа в камере ускорителя должно быть $\leq 10^{-7}$ Па. Оценка по формуле (59) показывает, что характерное время нагрева ионов в результате столкновений с электронами составляет $\sim 0,1$ с.

Рассмотренная система представляет собой высокоэффективный источник многозарядных ионов и даже ядер тяжелых элементов. Источник может работать с цикличностью около 1 Гц. Число ионов в одном цикле ограничено зарядом электронной компоненты, а также возможным увеличением малых размеров электронного кольца и составляет 10^{10} ионов Xe^{54+} и $3 \cdot 10^9$ ионов U^{90+} . На рис. 18 иллюстрируются возможности получения ионов ксенона в ERIS и других источниках. Данные по PIG (плазменно-дуговой источник типа Пеннинга), DP (дуоплазмотрон) и ECR (источник на электронно-циклотронном резонансе) приведены из [3]. В источниках типа ERIS можно получить ионы любых элементов, как газообразных, так и существующих при нормальных условиях в твердой фазе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие коллективного метода ускорения с электронными кольцами и создание электронно-лучевых источников ионов стимулировали детальные теоретические исследования процессов образования и накопления ионов в электронных пучках и кольцах. Еще 10—12 лет назад трудно было с достаточной достоверностью рассчитать число и средний заряд накопившихся ионов. За последние годы разработан ряд подходов, позволяющих найти параметры ионной компоненты в электронных пучках и тонких кольцах. Успеху в этом, в значительной степени, способствовали выполненные расчеты и измерения сечений ионизации и перезарядки. В настоящее время может быть учтено влияние различных ионных зарядностей друг на друга и на электронный пучок, их различное пространственное распределение, нелинейность собственных полей и многие другие эффекты в многокомпонентных электронно-ионных пучках. Это стало возможным благодаря развитию метода моментов функции распределения в физике пучков заряженных частиц. Метод моментов второго порядка позволил обобщить многие ранее известные модели, а также исследовать влияние рассеяния электронов на накопленных ионах на поперечные размеры электронных и ионных компонент, учесть эффекты, связанные с синхротронным излучением релятивистских электронов в кольцевых пучках. Этот метод оказался особенно удобным при решении на ЭВМ различных ускорительных и пучковых задач. Еще большие возможности открываются при развитии метода моментов в сторону получения приближенно самосогласованных уравнений для моментов высших порядков.

Во многих случаях интерес представляют функции распределения различных ионных зарядностей, их зависимость от заряда ионов. В этом случае успешно используется численное моделирование методом крупных частиц.

Изложенные в обзоре теоретические методы описания процессов в многокомпонентных электронных пучках и кольцах имеют, как правило, хорошее согласие с приведенным экспериментальным

материалом и позволяют прогнозировать дальнейшее развитие электронно-лучевых источников ионов, а также исследовать возможности создания источника ионов нового типа на базе КУТИ. Электронно-лучевые источники являются наиболее перспективными из существующих в настоящее время источников сверхмногозарядных ионов. Повысив в несколько раз энергию электронов в пучке и определив методы борьбы с потерями ионов, можно рассчитывать на получение еще более высоких зарядностей ионов тяжелых элементов.

Интересна возможность получения многозарядных ионов в электронных кольцах. К основным достоинствам такого источника можно отнести:

релятивистскую энергию электронов, превосходящую энергию внутренних оболочек самых тяжелых элементов;

высокую планируемую интенсивность пучка многозарядных ионов;

универсальность по отношению к типу ионизуемого химического элемента;

использование одной и той же порции электронов в течение всего цикла ионной обдирки.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для пучков с эллиптической симметрией плотности заряда

$$\rho = \rho \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, t \right) \quad (\text{П.1})$$

электрическое поле внутри пучка находится с использованием результатов теории ньютоновского потенциала для эллипсоидов с постоянной плотностью [119]. Напряженность электрического поля представляется в виде [68]:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 2\pi abx \int_0^\infty \frac{\rho \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s}, t \right) ds}{(a^2+s) \Delta(s)}; \\ E_y &= 2\pi aby \int_0^\infty \frac{\rho \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s}, t \right) ds}{(b^2+s) \Delta(s)}; \\ \Delta(s) &= \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.2})$$

Если $\rho(x, y)$ — непрерывная функция, спадающая до нуля при бесконечном удалении от центра пучка, то напряженность поля (П.2) и соответствующий ей потенциал также обращаются в нуль на бесконечном расстоянии от центра распределения. Покажем, что выражения (П.2) обеспечивают выполнение уравнения $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Для этого используем равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(a^2+s) \Delta(s)} + \frac{1}{(b^2+s) \Delta(s)} &= -2 \frac{d}{ds} \frac{1}{\Delta(s)}; \\ \left(\frac{x}{a^2+s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{b^2+s} \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho &= 2 \left(\frac{x^2}{(a^2+s)^2} + \frac{y^2}{(b^2+s)^2} \right) \rho' = -2 \frac{d\rho}{ds}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.3})$$

где штрих в последней формуле означает дифференцирование по аргументу.

В результате получаем

$$\operatorname{div} E = 2\pi ab \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\rho \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s}, t \right)}{\Delta(s)} \right] ds = 4\pi\rho \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, t \right). \quad (\text{П.4})$$

Таким образом, формулы (П.2) действительно представляют напряженность электрического поля внутри пучков с непрерывной, спадающей до нуля плотностью зарядов, имеющей эллиптическую симметрию. Непосредственное вычисление по формуле (П.1) дает хорошо известное выражение для напряженности электрического поля шнура эллиптического сечения с полуосями a и b и постоянной плотностью $\rho_0 = eN/\lambda b$:

$$E_x = 4eN \frac{x}{a(a+b)}; \quad E_y = 4eN \frac{y}{b(a+b)}. \quad (\text{П.5})$$

Выражения (П.2) справедливы и для других ограниченных распределений плотности, имеющих эллиптическую симметрию.

Чтобы найти среднее значение $x\overline{E}_x$ (соответственно $y\overline{E}_y$), в интеграле

$$\overline{x\overline{E}_x} = \frac{2\pi ab}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \rho \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \int_0^{\infty} \frac{ds \rho \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} \right)}{(a^2+s) \Delta(s)} \quad (\text{П.6})$$

перейдем к новым переменным r, φ :

$$x = \sqrt{a^2+s} r \cos \varphi; \quad y = \sqrt{b^2+s} r \sin \varphi. \quad (\text{П.7})$$

Проводя интегрирование в (П.6), имеем:

$$\overline{x\overline{E}_x} = eNa/(a+b) \quad (\text{П.8})$$

и соответственно $y\overline{E}_y = eNb/(a+b)$ для произвольного интегрируемого распределения плотности с эллиптической симметрией.

Этот результат Сахерера остается в силе и при вращении эллипсов относительно координатных осей. Тогда средние значения (П.8), как показано в [14], приводят к соответствующим выражениям F_{sx} и b^s в формулах (19), (20).

Матрица F_{sv} находится с использованием линейной аппроксимации напряженности электрического поля

$$F^s(x, \tau) = \varepsilon(x - \bar{x}), \quad (\text{П.9})$$

где матрица ε является решением задачи минимизации в определенный момент времени функционалов:

$$D_i = \frac{1}{N} \int [e_{i1}(x - \bar{x}) + e_{i2}(y - \bar{y}) - F_i^s(x, y, t)]^2 f(Y, t) dY = \min, \quad i = 1, 2. \quad (\text{П.10})$$

Проводя минимизацию (П.10) с учетом формулы для F_{sx} из (19), получаем

$$\varepsilon = F_{sx} M_{xx}^{-1} = b^s \quad (\text{П.11})$$

и эффективную линеаризованную силу (21). Усреднение эффективной силы с весом v дает матрицу силы F_{sv} в виде (19).

В [14] показано, что полученное выражение для F_{sv} является точным (не связанным с линеаризацией полей) для функций распределения, обладающих эллиптической симметрией в четырехмерном фазовом пространстве, т. е. являющихся функциями от квадратичной формы вида $(\tilde{Y} - \tilde{Y}) M^{-1} (Y - \bar{Y})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Флеров Г. Н. // Ядерные реакции при малых и средних энергиях. Тр. Всесоюзной конференции. Москва, 1957. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 489.
2. Балдин А. М. // Очерки по истории развития ядерной физики в СССР. Киев, Наукова Думка, 1982. С. 152.
3. Кутнер В. Б. Препринт ОИЯИ Р9-81-139. Дубна, 1981.
4. Головановский К. С. // АЭ. 1984. Т. 56. С. 303—310.
5. Веников Н. И. // Международная школа молодых ученых. Проблемы ускорителей заряженных частиц. ОИЯИ Д9-12965. Дубна, 1980. С. 121—144.
6. А.с. № 248860 (СССР). Способ получения многозарядных ионов/Е. Д. Донец // Открытия и изобретения. Бюл. ОИПОТЗ. 1969. № 24.
7. Донец Е. Д. // ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 941—981.
8. Veksler V.I., Sarantsev V.P., Bonch-Osmolovsky A.G. e.a. // Proc. IV Intern. Conf. on High Energy Accelerat. Cambridge, USA, 1967. P. 289—294; ОИЯИ Р9-3440-2. Дубна, 1968; АЭ. 1968. Т. 24. С. 317—392.
9. Саранцев В. П., Перельштейн Э. А. Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. М.: Атомиздат, 1979.
10. Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. // Совещание по проблемам коллективного метода ускорения. ОИЯИ Д9-82-664. Дубна, 1982. С. 31—33.
11. Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. Препринт ОИЯИ Е9-85-4. Дубна, 1985.
12. Александров В. С., Белошицкий П. Ф., Беляев Л. Н. и др. Ускорительный комплекс тяжелых ионов в ОИЯИ. ОИЯИ. Р9-83-613. Дубна, 1983.
13. Дымников А. Д., Перельштейн Э. А. ОИЯИ Р9-10620. Дубна, 1977; Nucl. Instrum. and Methods. 1978. Vol. 148. P. 567—571.
14. Казаринов Н. Ю., Перельштейн Э. А., Шевцов В. Ф. ОИЯИ Р9-10985. Дубна, 1977; Particle Accelerators. 1980. Vol. 10. P. 181—195.
15. Диденко А. Н., Григорьев В. Н., Усов Ю. П. Мощные электронные пучки и их применение. М.: Атомиздат, 1977.
16. Olson C.L. Collective Ion Acceleration with Linear Electron Beams // Springer Tracts in Modern Physics, Berlin—Heidelberg N.Y., Springer Verlag, 1979. P. 1—144.
17. Рухадзе А. А., Богданкевич Л. С., Росинский С. Е., Рухлин В. Г. Физика сильноточных релятивистских пучков. М.: Атомиздат, 1980.
18. Александр К., Хинтце В. // ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 344—426.
19. Быстрицкий В. М., Диденко А. Н. // ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. С. 181—226.
20. Щорняк Г. // ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. С. 835—899.
21. Presnyakov L. F., Janěv R.K. // Atomic Collision Processes with Multiply Charged Ions // Proc. of the 2nd Workshop on Vinca Accel. Installation. Belgrad, 1983. P. 155—188.
22. Дроздовский А. А. ИТЭФ-100. М., 1973.
23. Thompson J.J. // Philos. Mag. 1910. Vol. 20. P. 752—774.
24. Carlson T.A., Westor C.W., Wasserman N., McDowell J.D. // Atomic. Data. 1970. Vol. 2. P. 63—99.
25. Donets E.D. // Phys. Scripta. 1983. Vol. T3. P. 11—18.
26. Донец Е. Д., Овсянников В. П. ОИЯИ Р7-80-404. Дубна, 1980; ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 916—925.
27. Rudge M.H., Schwarts S.B. // Proc. Phys. Soc. 1966. Vol. 88. P. 563—578.
28. Salop A. // Phys. Rev. 1973. Vol. A8. P. 3032—3041.
29. Salop A. // Phys. Rev. 1974. Vol. A9. P. 2496—2504.
30. Зиберт Х.-У., Леманн Д., Музиоль Г., Щорняк Г. Сообщение ОИЯИ Р9-10197. Дубна, 1976.
31. Cryzinski M. // Phys. Rev. 1965. Vol. 138A. P. 336—358.
32. Olson C.L. // Phys. Rev. 1975. Vol. A11. P. 288—296.
33. Janěv R.K., Presnyakov L.P. // Phys. Rep. 1981. Vol. 70. P. 1—107.
34. Janěv R.K. // Atomic Collision Processes with Multiply Charged Ions.

- Proc. of the 2nd Workshop on Vinča Accel. Installation. Belgrad, 1983. P. 37—52.
35. Grosdanov T. // Atomic Collision Processes With Multiply Charged Ions. Proc. of the 2nd Workshop on Vinča Accel. Installation. Belgrad, 1983. P. 53—88.
36. Vleman S., Bonnefooy M., Bonnet J.J. e.a. // Phys. Scripta. 1983. Vol. T3. P. 63—67.
37. Мюллер А., Шевелько В. П. // ЖТФ, 1980. Т. 50. С. 985—992.
38. Janev R.K., Belic D.S. // Phys. Scripta. 1983. Vol. T3. P. 246—248.
39. Иовнович М. Л., Фигис М. М. Препринт ОИЯИ Р9-4849. Дубна, 1969; АЭ. 1970. Т. 29. С. 429—433.
40. Георге В., Иовнович М. Л., Новиков В. Г. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-6555, Дубна, 1972.
41. Иовнович М. Л., Кузнецов А. Б., Прейзендорф В. А. Сообщение ОИЯИ Р9-8119. Дубна, 1974.
42. Леманн Д., Мюллер Г., Музиоль Г., Щорнак Г. Сообщение ОИЯИ 9-10744. Дубна, 1977.
43. Бочев Б., Куцарова Т., Овсянников В. П. Сообщение ОИЯИ Р9-11566. Дубна, 1978.
44. Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. Препринт ОИЯИ Р9-11412. Дубна, 1978; ЖТФ. 1979. Т. 49. С. 19—23.
45. Инкин В. Д., Мозелев А. А., Саранцев В. П. Сообщение ОИЯИ Р9-12940. Дубна, 1980.
46. Долбилов Г. В., Инкин В. Д., Красных А. К. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-12963. Дубна, 1980.
47. Саранцев В. П., Инкин В. Д., Мозелев А. А. Препринт ОИЯИ Р9-81-25. Дубна, 1981.
48. Саранцев В. П., Инкин В. Д., Мозелев А. А. Препринт ОИЯИ Р9-80-866. Дубна, 1980.
49. Саранцев В. П., Инкин В. Д., Мозелев А. А. Сообщение ОИЯИ Р9-82-128. Дубна, 1982.
50. Перельштейн Э. А. Теория и расчет коллективного ускорителя тяжелых ионов. Автореф. докт. дисс. ОИЯИ 9-81-150. Дубна, 1981.
51. Долбилов Г. В., Миронов В. И., Новиков В. Г. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-11191. Дубна, 1978.
52. Долбилов Г. В., Казача В. И., Кожухов И. В. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-12414. Дубна, 1979.
53. Долбилов Г. В., Красных А. К., Лебедев Н. И. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-80-126. Дубна, 1980.
54. Александров В. С., Долбилов Г. В., Кузнецов И. В. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-83-862. Дубна, 1983.
55. Казаринов Н. Ю., Перельштейн Э. А., Сумбаев А. П. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-81-428. Дубна, 1981.
56. Казаринов Н. Ю., Перельштейн Э. А., Сумбаев А. П. и др. // Труды Совещания по проблемам коллективного метода ускорения. ОИЯИ Д9-82-664. Дубна, 1982. С. 16—19.
57. Кулипапов Г. Н., Скринский А. Н. // УФН. 1977. Т. 122. С. 369—419.
58. Бочев Б., Овсянников В. П., Куцарова Г. Сообщение ОИЯИ Р5-11567, Дубна, 1978.
59. Донец Е. Д., Овсянников В. П. Сообщение ОИЯИ Р7-10438. Дубна, 1977.
60. Донец Е. Д., Овсянников В. П., Дудников В. Г. Сообщение ОИЯИ Р7-12905. Дубна, 1978.
61. Ширков Г. Д. Препринт ОИЯИ Р9-12055. Дубна, 1978; ЖТФ, 1979. Т. 49. С. 1471—1475.
62. Лифшиц Е. М., Пятаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
63. Капчинский И. М. Теория линейных резонансных ускорителей. М.: Энергоиздат, 1982.

64. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
65. Вычислительные методы в физике плазмы: Сб. статей/Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. М.: Мир, 1974.
66. Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
67. Lapostolle P.M. //Proc. of Particle Accelerator Conf. Chicago. IEEE Trans NS-18. 1971. Vol. 3. P. 1101—1104.
68. Sacherer F.S. //Proc. of Particle Accelerator Conf. Chicago. IEEE Trans NS-18. 1971. Vol. 3. P. 1105—1107.
69. Ярковой О. И. Препринт ОИЯИ 2183. Дубна, 1965.; ЖТФ. 1966. Т. 36. С. 988—996.
70. Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. Препринт ОИЯИ P9-10468. Дубна, 1977; ЖТФ. 1978. Т. 48. С. 249—253.
71. Бобылева Л. В., Казаринов Н. Ю., Перельштейн Э. А. Сообщение ОИЯИ P11-81-796. Дубна, 1981.
72. Lee E.P., Cooper R.K. //Particle Accelerators. 1976. Vol. 7. P. 83—95.
73. Bru V., Weiss M. CERN /MPS/ LIN 72-4, 1972.
74. Остроумов П. Н., Романов Г. В., Фатеев А. П. //ЖТФ. 1980. Т. 50. С. 1237—1242.
75. Мурин Б. П. //Тр. IV Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. М.: Наука, 1974. Т. 1. С. 123—125.
76. Вялов Г. Н., Казаринов Н. Ю., Перельштейн Э. А. и др. Сообщение ОИЯИ P9-11672. Дубна, 1978.
77. Ярковой О. И. //ЖТФ. 1962. Т. 39. С. 1285—1290.
78. Рубин С. Б., Ярковой О. И. Препринт ОИЯИ 2882-2. Дубна, 1966.
79. Казаринов Н. Ю., Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. //ЖТФ. 1980. Т. 50. С. 549—556.
80. Коломенский А. А. Препринт ФИАН 155. М., 1970; Физические основы методов ускорения заряженных частиц. М.: изд. МГУ, 1980.
81. Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. Сообщение ОИЯИ 9-80-124. Дубна, 1980.
82. Briggs R.J., Hester R.E., Lamb W.A. e.a. //Bull. Amer. Phys. Soc. 1974. Vol. 19. P. 902.
83. Lee E.P. //Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. P. 60—69.
84. Александров В. С., Долбилов Г. В., Перельштейн Э. А. и др. Сообщение ОИЯИ 9-82-709. Дубна, 1982.
85. Казаринов Н. Ю., Перельштейн Э. А. Препринт ОИЯИ P9-12441. Дубна, 1979; ЖТФ. 1980. Т. 50. С. 101—109.
86. Казаринов Н. Ю., Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. Препринт ОИЯИ P9-12719. Дубна, 1979; ЖТФ. 1980. Т. 50. С. 1722—1730.
87. Донец Е. Д., Овсянников В. П. Препринт ОИЯИ P7-80-515. Дубна, 1980.
88. Folkmann F., Mann R., Beyer H.F. //Phys. Scripta. 1983. Vol. T3. P. 88—95.
89. Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. //Совещание по проблемам коллективного метода ускорения ОИЯИ. ОИЯИ Д9-82-664. Дубна, 1982. С. 31—33.
90. Кузнецов А. Б., Прейзендорф В. А. Сообщение ОИЯИ P9-80-820. Дубна, 1980.
91. Абдульманов В. Г., Авербух И. И., Ауслендер В. Л. и др. //Международная конференция по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. Серпухов, 1977. Т. 1. С. 345—349.
92. Arianer S., Collart C., Goldstein Ch. e.a. //Phys. Scripta. 1983. Vol. 13. P. 35—36.
93. Kenefick R., Hamm R. Preprint GSI-P-3-77. Darmstadt, 1977.
94. Faure J., Feinberg V., Antoine e.a. //12th Intern. Conf. on High Energy Accelerators. Fermilab. FNAL, Batavia, 1983. P. 206—208.
95. Baldin A. M., Donets E.D., Issinsky I.V. e.a. //Phys. Scripta. 1983. Vol. T3. P. 43—44.

96. Laslett L.S. Preprint ERAN-218. LBL, Berkely, 1972.
97. Дроздовский А. А. Препринт ИТЭФ-10. М., 1973.
98. Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. Препринт ОИЯИ Р9-82-526. Дубна, 1982.
99. Перельштейн Э. А., Шевцов В. Ф., Ширков Г. Д., Щинов Б. Г. // Труды VIII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1983. Т. II. С. 375—379.
100. Барабаш Л. С., Белошицкий П. Ф., Казаринов Н. Ю. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-11776. Дубна, 1978.
101. Новиков В. Г., Саранцев В. П., Тер-Мартirosян З. А., Шестаков Б. А. // Совещание по проблемам коллективного метода ускорения. ОИЯИ Д9-82-664. Дубна, 1982. С. 23—26.
102. Быковский Ю. А., Саранцев В. П., Сильнов С. М. и др. // Совещание по проблемам коллективного метода ускорения. ОИЯИ Д9-82-664. Дубна, 1982. С. 27—30.
103. Hofman I. Preprint IPP 0/21, IPP, Garching, 1974.
104. Перельштейн Э. А., Шевцов В. Ф., Ширков Г. Д., Щинов Б. Г. Препринт ОИЯИ Р9-82-532. Дубна, 1982.
105. Перельштейн Э. А., Шевцов В. Ф., Ширков Г. Д., Щинов Б. Г. // ЖТФ. 1984. Т. 54. С. 270—278.
106. Кузнецов А. Б. Препринт ОИЯИ Р9-83-349. Дубна, 1983.
107. Перельштейн Э. А., Шевцов В. Ф., Щинов Б. Г. Препринт ОИЯИ Р9-10060. Дубна, 1976.
108. Александров В. С., Долбилов Г. В., Казаринов Н. Ю. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-11949. Дубна, 1978.
109. Казаринов Н. Ю., Казача В. И., Перельштейн Э. А. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-12720. Дубна, 1979.
110. Александров В. С., Алексахин Ю. И., Казаринов Н. Ю. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-80-368. Дубна, 1980.
111. Перельштейн Э. А., Шевцов В. Ф., Ширков Г. Д., Щинов Б. Г. // Программирование и математические методы решения физических задач. ОИЯИ Д10, 11-84-818. Дубна, 1985. С. 204—206.
112. Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д., Щинов Б. Г. Препринт ОИЯИ 11-84-505. Дубна, 1984; Численные методы и приложения. София, 1985. С. 471—475.
113. Christiansen S.P., Hockny R.W. // Computer Phys. Commun. 1971. Vol. 2. P. 139—156.
114. Киф Д. // Тр. IV Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. М.: Наука, 1975. Т. I. С. 109—113.
115. Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д. Препринт ОИЯИ Е9-85-4. Дубна, 1985.
116. Саранцев В. П., Александров В. С., Барабаш Л. С. и др. Сообщение ОИЯИ Р9-10917. Дубна, 1977.
117. Александров В. С., Перельштейн Э. А., Саранцев В. П., Ширков Г. Д. Сообщение ОИЯИ Р9-81-20. Дубна, 1981.
118. А.с. № 766384 (СССР). Способ получения ионов высокой зарядности/ В. Г. Новиков, Э. А. Перельштейн // Открытия. Изобретения. 1983. № 4.
119. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1946.