«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1988, ТОМ 19, ВЫП. 3

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Б. А. Дубровин, Т. М. Маланюк
Московский государственный университет им М. В. Ломоносова

И. М. Кричевер
Государственный научно-исследовательский энергетический институт им. Г. М. Кржижановского

В. Г. Маханьков
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Предложена единая конструкция многосолитонных решений ряда моделей, связанных с нестационарным уравнением Шредингера (векторное нелинейное уравнение Шредингера, векторная модель типа Яджимы — Ойкавы и др.). Детально исследованы случаи нетривиальных конденсатных граничных условий.

Description of integrable models associated with a nonstationary Schrödinger equation is given along with constructing their multisoliton formulae. Among such models there are the vector versions of NLS, Yajima — Oikawa model and others.

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью настоящей работы является описание в рамках единого подхода интегрируемых моделей, связанных с нестационарным уравнением Шредингера, вместе с построением их многосолитонных решений. К числу таких моделей принадлежат, например, векторное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с различными группами внутренней симметрии, векторная модель типа Яджимы — Ойкавы и др. «Интегрируемость» некоторых из этих систем вытекает из наличия у них коммутационных представлений (L — A-пары или L — A — B-тройки). Однако для некомпактных групп внутренней симметрии, где физически реальными являются конденсатные граничные условия, стандартная техника обратной задачи неконструктивна.

Предлагаемый нами подход, не использующий коммутационных представлений, фактически возник в недрах алгеброгеометрической теории интегрируемых систем. Хорошо известно, что такая теория используется для построения периодических и квазипериодических решений интегрируемых систем; гораздо менее известно, что алгеброгеометрическая техника также позволяет эффективно строить все известные на сегодняшний день их явные решения (многосолитонные, рациональные и их комбинации). Это мы и намереваемся продемонстрировать в доступной для нематематиков форме на примерах моделей, описываемых уравнением Шредингера с самосогласованным потенциалом.

Структура работы такова. В разд. 1 мы покажем на примере обобщенного магнетика Гейзенберга, как возникают такого рода модели. В разд. 2 в общей форме будет описан метод построения и исследования их явных решений. В разд. 3 рассмотрены некоторые конкретные примеры и даны соответствующие формулы. В заключении обсуждаются полученные результаты.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЕМЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЕМ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Часто в физике при исследовании нелинейных волновых явлений возникают системы дифференциальных уравнений, моделирующих взаимодействие конечного числа волн или волновых пакетов. Наиболее простой такой системой является скалярное нелинейное уравнение Шредингера (СНУШ)

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \varepsilon\,|\psi|^2\psi = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{1}$$

описывающее самодействие пакета ВЧ-волн (при $\varepsilon = -1$ оно называется также уравнением Гросса — Питаевского), в частности, самодействие спиновых волн (магнонов) в ферромагнетиках, экситонов в молекулярных кристаллах, ленгмюровских волн в плазме и т. д. Уравнение (1) в настоящее время наиболее популярная и изученная (наряду с КдФ) нелинейная модель математической физики, интегрируемая как на классическом, так и на квантовом уровнях. Причем квантовый (или квазиклассический) подход позволяет наряду с волновым языком использовать также язык частиц. Самой простой физической моделью, описываемой (1), является бозе-газ с точечным парным взаимодействием при нулевой температуре (см., например, [14]). Эта модель позволяет наиболее наглядно интерпретировать получающиеся результаты, которые с точностью до определений и переобозначений могут быть использованы в рамках других физических моделей.

Естественным обобщением (1) является система, описывающая взаимодействие пакета ВЧ-волн $\psi(x, t)$ с НЧ-волной $U(x, t)$. В этом случае комплексная функция $\psi(x, t)$ подчиняется, как и ранее, СНУШ

$$i\,\psi_t + \psi_{xx} + U\psi + \lambda\,|\psi|^2\,\psi = 0, \tag{2}$$

в котором роль потенциала U выполняет НЧ-волна, описываемая одним из следующих уравнений (самосогласования):

$$\Box U = -|\psi|^2_{xx} \qquad \text{(Захаров [16]);} \tag{3а}$$

$$(\partial_t + \partial_x) U = |\psi|^2_x \qquad \text{(Яджима — Ойкава [3]);} \tag{3б}$$

$$(\partial_t + \partial_x + \alpha\partial_x^3 + \beta U \partial_x) U = |\psi|^2_x \quad \text{(Нишикава и др. [4]);} \tag{3в}$$

$$(\Box + \alpha\partial_x^4) U + \beta\partial_x^2 U^2 = -|\psi|^2_{xx} \quad \text{(Маханьков [5]).} \tag{3г}$$

Системы (2), (3) при $\lambda = 0$ были получены в физике плазмы, где они моделировали взаимодействие ленгмюровских и ионно-звуковых волн. Позднее было показано, что аналогичные уравнения возникают при исследовании взаимодействия спиновых волн с фононами в ферромагнетиках [6] и экситонов с фононами в молекулярных кристаллах [7]. Теперь, однако, в общем случае $\lambda \neq 0$.

Другим естественным обобщением (1) является переход от скалярного варианта НУШ к векторному $\psi \to \psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)^{tr}$ (ВНУШ) с заменой $|\psi|^2$ на внутреннее произведение

$$(\psi, \psi) = \sum_{ij=1}^{n} g_{ij}\bar{\psi}_i\psi_j, \tag{4}$$

где g_{ij} — метрика изотопического пространства. При этом гамильтониан системы часто оказывается инвариантным по отношению к некоторой группе внутренней симметрии, компактной или некомпактной в зависимости от знаковой определенности матрицы $g_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$; в случае эрмитовых гамильтонианов это группа $U(p, q)$. Такие модели описывают бозе-газ с внутренними квазиспиновыми («цветовыми») степенями свободы, они также возникают при распространении в нелинейной среде плоской ВЧ-волны с круговой поляризацией [1] при описании спиновых волн в магнетиках со слоистой структурой, при получении классического континуального аналога модели Хаббарда и др. Часть из этих моделей оказывается интегрируемой [2] и допускает достаточно полное исследование. Наконец, объединяя оба обобщения, мы приходим к векторным вариантам нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом (НЧ-ветвью) в одной из перечисленных выше форм (3) (хотя возможны и другие), т. е. к системе уравнений, состоящей из уравнения

$$i\psi_t + \psi_{xx} + U\psi + \lambda(\psi, \psi)\psi = 0 \tag{5}$$

и одного из уравнений (3) с правой частью, зависящей от инвариантной комбинации (ψ, ψ).

Все эти модели на квазиклассическом уровне допускают интерпретацию на языке многокомпонентного бозе-газа (с внутренними степенями свободы) с различным в общем случае видом взаимодействия между частицами компонент и фононной модой. Другими словами, (5), (3) описывают смесь газов, частицы различных компонент которой при

$$g_{ik} = \mathrm{diag}\,(1, 1, \ldots, -1, -1 \ldots),\ i, k = 1, \ldots, n \qquad (6)$$

притягиваются либо отталкиваются ($\lambda \neq 0$), а также могут излучать и поглощать звуковые волны. Поэтому, отвлекаясь от конкретной физической постановки задачи и интерпретации результатов, мы будем называть (5) моделями бозе-газа.

Тем не менее, поскольку в последние годы именно в теории конденсированного состояния стали появляться и изучаться модели вида (5), поведение соответствующих им систем представляет все возрастающий интерес в этой области физики.

Экспериментальное исследование магнитных кристаллов показывает, что многие из них обладают слоистой или многоцепочечной структурой [8]. В подавляющем большинстве случаев взаимодействие между слоями или цепочками существенно влияет на динамическое поведение кристалла в целом. Типичные представители — кристаллы солей [8], однако аналогичные структуры встречаются также в органических системах в виде молекулярных цепочек [9]. Микроскопическая теория таких структур основана обычно на обобщении спиновой модели Гейзенберга на случай нескольких компонентов [10]. Введение «цветовых» степеней свободы для взаимодействующих спинов одномерной цепочки позволяет описывать многослойные магнитные системы со слабой связью. Далее, поскольку одномерной модели Хаббарда для полузаполненной зоны соответствует двухкомпонентная спиновая цепочка Гейзенберга [11] с взаимодействием между компонентами, для описания коллективных возбуждений и их статистических свойств в системах с несколькими сортами спинов можно использовать многокомпонентную спиновую цепочку, соответствующую обобщенной модели Хаббарда [12].

Во всех упомянутых случаях мы приходим к моделям бозе-газа (5), осуществляющим динамическое описание соответствующих систем, строго говоря, при нулевой температуре. В экспериментальных условиях даже при очень низких температурах обычно измеряют некоторые усредненные характеристики, например, такие, как статический или динамический структурный факторы. Для теоретического вычисления последних иногда используют статистическую сумму, определяемую через функциональный интеграл [$Z = \int D\Phi_t\, D\Phi \exp(-\beta H)$, $\beta = T^{-1}$ в случае действительных полей]. Однако для моделей бозе-газа (5) такой подход связан с определенными трудностями [14], поэтому получил распространение так называемый феноменологический подход, сформулированный впервые Крумханслом и Шриффером [13]. Они заметили, что статистические суммы, найденная методами трансфер-матрицы исходя из функционального интеграла, и полученная в приближении идеального газа кинков в модели Φ^4 практически совпадают. Впоследствии феноменологический подход широко применялся для нахождения структурных факторов в различных моделях (см. обзор [14] и цитированную там литературу). Заметим, что одним из наиболее важных оправданий использования феноменологического подхода являются устойчивость солитонов и упругость (или квазиупругость) их взаимодействия. Последнее обычно имеет место в рамках интегрируемых моделей с достаточно малым числом взаимодействующих волн. В тех случаях, когда это условие не выполнено, функция распределения солитонов как по их скоростям, так и по амплитудам (частотам) должна быть найдена из каких-либо других соображений [так, например, в [15] на основе вычислительных экспериментов было написано и решено приближенное (феноменологическое!) кинетическое уравнение для солитонов в рамках системы (2), (3а) с $\lambda = 0$].

Для интегрируемых систем вида (5) (с $n > 1$) поэтому весьма важно знание в аналитической форме не только всего спектра односолитонных решений, но также двух-, а иногда и трехсолитонных формул (особенно их асимптотик), чтобы можно было судить о возможности использовать феноменологический подход.

Обобщенная модель Гейзенберга и модели бозе-газа. Рассмотрим «цветовое» обобщение магнитной цепочки с гамильтонианом [17]

$$H = H_s + H_L, \tag{7}$$

где

$$H_s = -\frac{1}{2}\left\{\sum_{ij,\,\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}J_{ij}^{\alpha\beta}\left(S_i^{+\alpha}S_j^{-\beta} + S_i^{-\alpha}S_j^{+\beta}\right) + R_{ij}^{\alpha\beta}S_i^{z\alpha}S_j^{z\beta}\right]\right\}, \tag{7а}$$

$$H_L = T + U_0,\quad T = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2,\quad U_0 = \frac{mv_0^2}{2a_0^2}\sum_j (x_{j+1} - x_j - a_0)^2, \tag{7б}$$

описывающим взаимодействие спинов различных «цветов» (сортов) ($\alpha = 1, \ldots, n$). Пренебрегая взаимодействием между цветовыми и пространственными степенями свободы в обменных интегралах и учитывая взаимодействие лишь ближайших соседей, имеем

$$J_{ij}^{\alpha\beta} = J_{jj+\sigma}K^{\alpha\beta},\quad R_{jj+\sigma}^{\alpha\beta} = L_1^{\alpha}L_2^{\beta}\tilde{J}_{ij+\sigma}, \tag{8}$$

где $J_{jj+\sigma} \equiv J\left(|x_j - x_{j+\sigma}|\right)$ — обменный интеграл ближайших спинов; $S^{\pm} = S^x \pm iS^y$ и S^z — спиновые операторы.

При достаточно больших значениях спинов s^α гамильтониан (7) можно переписать в терминах бозе-операторов рождения $a_j^{+\alpha}$ и уничтожения a_j^α с помощью обобщенного представления Холстейна — Примакова: $S_j^{+\alpha} = \sqrt{2s^\alpha}\left(1 - \frac{\hat{n}_j^\alpha}{2s^\alpha}\right)^{1/2} a_j^\alpha;\ S_j^{-\alpha} = \sqrt{2s^\alpha}\, a_j^{+\alpha}\left(1 - \frac{\hat{n}_j^\alpha}{2s^\alpha}\right)^{1/2};$

$$\hat{n}_j^\alpha = a_j^{+\alpha} a_j^\alpha; \quad S_j^{z\alpha} = s^\alpha - \hat{n}_j^\alpha;$$

$$H_s = \mathrm{const} - \frac{1}{2} \sum_{j,\sigma} \Big\{ sJ_{jj+\sigma} \sum_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} (a_j^{+\alpha} a_{j+\sigma}^\beta + a_{j+\sigma}^{+\beta} a_j^\alpha) - \\ - \tilde{J}_{ij+\sigma} \Big[s \sum_\alpha (l_2 L_1^\alpha \hat{n}_j^\alpha + l_1 L_2^\alpha \hat{n}_{j+\sigma}^\alpha) + \sum_{\alpha\beta} L_1^\alpha L_2^\beta \hat{n}_j^\alpha \hat{n}_{j+\sigma}^\beta \Big] \Big\}, \tag{9}$$

где $l_i = \mathrm{Tr}\, L_i$, $s^\alpha \equiv s$.

Эволюция оператора $a_j^\alpha(t)$ определяется уравнением Гейзенберга $i\hbar \dot{a}_j^\alpha(t) = [a_j^\alpha, H_s]$.

Для перехода от квантового гамильтониана (9) к классическому мы применяем процедуру сведения, основанную на использовании когерентных состояний группы Гейзенберга — Вейля [17]:

$$|\varphi^\alpha\rangle = \prod_j |\varphi_j^\alpha\rangle = \prod_j e^{\frac{1}{2}|\varphi_j^\alpha|^2} e^{\varphi_j^\alpha a_j^{+\alpha}} |0\rangle,$$

обладающих важным в нашем случае свойством: оператор

$$\hat{A} = \sum_{m,n} C_{mn} (a_j^{+\alpha})^m (a_j^\alpha)^n,$$

записанный в нормальной (виковской) форме и усредненный по состояниям $|\varphi_j^\alpha\rangle$, дает

$$A \equiv \langle \varphi_j^\alpha | \hat{A} | \varphi_j^\alpha \rangle = \sum_{m,n} C_{mn} (\bar{\varphi}_j^\alpha)^m (\varphi_j^\alpha)^n. \tag{10}$$

Используем это соотношение и перейдем к континуальному пределу с помощью стандартной процедуры разложения $\varphi^\alpha(\xi) = \varphi_j^\alpha$ в ряд Тейлора $\varphi_{j+1}^\alpha = \varphi^\alpha(\xi) + a_0 \varphi_\xi^\alpha(\xi) + \frac{1}{2} a_0^2 \varphi_{\xi\xi}^\alpha(\xi) + \ldots$ и представления обменных интегралов в виде $J(|x_{j+1} - x_j|) = J_0 - J_1 \times \times (x_{j+1} - x_j - a_0)$ (аналогично для $\tilde{J}$). В результате получим систему:

$$\ddot{x} = U_0^2 x_{\xi\xi} + \frac{s}{m} \sum_{\alpha\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta} (\bar{\varphi}^\alpha \varphi^\beta)_\xi; \tag{11}$$

$$i\varphi_t^\alpha = -b \sum_\beta (K_{(\alpha,\beta)} \varphi_{\xi\xi}^\beta - sT_{\alpha\beta}\varphi^\beta + s\tilde{T}_{\alpha\beta}\varphi^\beta x_\xi) - \\ - J_0 \varphi^\alpha \sum_\beta (L_1^\beta L_2^\alpha + L_2^\alpha L_1^\beta) |\varphi^\beta|^2, \tag{12}$$

в которой

$$T_{\alpha\beta} = J_0 K_{(\alpha,\beta)} - \tilde{J}_0 (l_1 L_2^\alpha + l_2 L_1^\alpha) \delta_{\alpha\beta};$$

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = J_1 K_{(\alpha,\beta)} - \tilde{J}_1 (l_1 L_2^\alpha + l_2 L_1^\alpha) \delta_{\alpha\beta}, \quad b = J_0 s/2,$$

(α, β) означает симметризацию по индексам α и β. Дальнейшее исследование системы (11), (12) связано с наложением дополнительных условий (редукций) на матрицы коэффициентов T, L.

Некоторые частные редукции. *Пример 1.* Пусть обменные интегралы цветовых степеней свободы пропорциональны друг другу и диагональны

$$K_{(\alpha,\beta)} = 2b_1 L_1^\beta \delta_{\alpha\beta} = 2b_2 L_2^\beta \delta_{\alpha\beta} \equiv \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta},$$

тогда система (11), (12) сводится к системе вида (5), (3а). В квазистационарном (безынерционном) пределе, когда в уравнении (11) можно пренебречь временной производной

$$U(\xi, t) \equiv x_\xi = -\frac{s}{mU_0^2} \sum_{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta} (\bar{\varphi}^\alpha \varphi^\beta) + c, \tag{13}$$

уравнение (12) сводится к ВНУШ, порождаемому гамильтонианом

$$H = \int d\xi \, [b(\varphi_\xi^* K \varphi_\xi) - d(\varphi^* K \varphi)^2 - \tilde{\mu}(\varphi^* K \varphi)], \tag{14}$$

в котором

$$(\varphi^* K \varphi) \equiv \sum_{\alpha\beta} \bar{\varphi}^\alpha K_{(\alpha,\beta)} \varphi^\beta = \sum_\alpha \lambda^\alpha |\varphi^\alpha|^2;$$

$$d = \frac{s^2 \nu^2}{m v_0^2} + \frac{\tilde{J}_0}{2b_1 b_2}, \quad \tilde{\mu} = s(\mu - c\nu),$$

$$T_{\alpha\beta} = \mu \lambda^\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad \tilde{T}_{\alpha\beta} = \nu \lambda^\alpha \delta_{\alpha\beta},$$

$$\mu = \left[J_0 - \frac{\tilde{J}_0}{2b_1 b_2}(b_1 l_1 + b_2 l_2)\right], \quad \nu = \left[J_1 - \frac{\tilde{J}_1}{2b_1 b_2}(b_1 l_1 + b_2 l_2)\right].$$

Переменные $\varphi^\alpha(\xi, t)$ и $\bar{\varphi}^\alpha(\xi, t)$ — суть канонически сопряженные переменные

$$\{\varphi^\alpha(x), \bar{\varphi}^\beta(y)\} = \mathrm{i}\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y) \tag{15}$$

с обычной скобкой Пуассона

$$\{A, B\} = \mathrm{i} \sum_{\alpha=1}^{n} \int d\xi \left(\frac{\delta A}{\delta \varphi^\alpha} \frac{\delta B}{\delta \bar{\varphi}^\alpha} - \frac{\delta B}{\delta \varphi^\alpha} \frac{\delta A}{\delta \bar{\varphi}^\alpha} \right).$$

Дальнейшее упрощение (14) связано с наличием внутренней симметрии в системе, когда интенсивность взаимодействий при различных «цветах» одинакова по модулю $\lambda^\alpha = \varepsilon_\alpha$:

$$\varepsilon_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \ldots, p \\ -1, & \alpha = p+1, \ldots, p+q \end{cases} \quad (p + q = n).$$

Введя обозначения

$$\psi_\alpha(\xi, t) = \begin{cases} \varphi_\alpha(\xi, t), & \alpha = 1, \ldots, p; \\ \varepsilon_\alpha \varphi_\alpha(\xi, t), & \alpha = p+1, \ldots, p+q, \end{cases} \tag{16}$$

$$(\Gamma_0)_{\alpha\beta} \equiv K_{(\alpha,\beta)} = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad \frac{d}{b} = \varkappa, \quad \frac{\mu'}{b} = \rho, \quad H \to H/b,$$

получим

$$H = \int d\xi \, [(\psi_\xi, \psi) - \varkappa (\psi, \psi)^2 - \rho (\psi, \psi)]; \tag{17}$$

$$\{\psi^\alpha(\xi), \ \psi^{+\beta}(\eta)\} = i\delta^{\alpha\beta}\delta(\xi - \eta), \tag{18}$$

где $\psi^+ = \psi^* \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, а

$$(\psi, \psi) = \sum_{\alpha=1}^{p} |\psi^\alpha|^2 - \sum_{\alpha=p+1}^{n} |\psi^\alpha|^2 \equiv (\psi^* \Gamma_0 \psi) \tag{19}$$

есть $U(p, q)$ — внутреннее произведение. Соответствующее уравнение движения

$$i\psi_t + \psi_{\xi\xi} + 2\varkappa (\psi, \psi)\psi + \rho\psi = 0 \tag{20}$$

есть $U(p, q)$ — ВНУШ, описывающее интегрируемую систему [2].

Аналогичная редукция, примененная к системе (11), (12) в безразмерных переменных, есть (5) + (3а):

$$\partial_t^2 U - \partial_x^2 U - (\psi, \psi)_{xx} = 0; \tag{21а}$$

$$i\psi_t + \psi_{xx} - U\psi + \lambda (\psi, \psi)\psi = 0. \tag{21б}$$

Заметим, что последний член в уравнении (21б) связан с записью $(S^z)^2$ в представлении Холстейна — Примакова, пропорционален степени анизотропии исходной цепочки (отношение $\overline{J}_0/J_0$) и остается при отсутствии магнон-фононного взаимодействия.

Обобщенная система Яджимы — Ойкавы может быть легко получена из (21) с помощью стандартной процедуры перехода к однонаправленной версии волнового уравнения

$$\partial_t^2 - \partial_\xi^2 \simeq -2\partial_\xi (\partial_t + \partial_\xi) \tag{22}$$

и интегрирования по ξ.

Пример 2. Чтобы учесть слабое взаимодействие между цветовыми компонентами в цепочках, выброшенное в предыдущем рассмотрении, предположим, что вклад в цветовом пространстве дают ближайшие соседи. Тогда редукция имеет вид

$$R_{ij}^{\alpha\beta} = \rho J_{ij}^{\alpha\beta}, \quad J_{ij}^{\alpha\beta} = (J_{jj+\sigma} M^{\alpha\beta} + J^1 V_{ij}^{\alpha\beta}); \tag{23}$$

$$M^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} + \varepsilon\delta^{\beta, \alpha+\delta}, \quad V_{ij}^{\alpha\beta} = \delta_{ij}\delta^{\beta, \alpha+\delta},$$

где $J^1/J \ll 1$, а J и J^1 — суть междуячеечные и междуцепочечные обменные интегралы соответственно. Используя (23), можно получить уравнения типа (5), (8) с дополнительными малыми членами, учитывающими недиагональность матрицы межцветового взаимодействия. Влияние этих членов на динамику системы можно исследовать по «стандартной» солитонной теории возмущений либо с помощью прямых методов, либо с помощью МОЗР [18].

Применение процедуры, описанной выше, к модели Хаббарда, точнее к ее многоподрешеточному спиновому эквиваленту, также приводит при определенных предположениях к системам вида (5) + + (3) с $U\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$-группой внутренней симметрии в случае антиферромагнитного основного состояния и с $U(n, 0)$ — в случае ферромагнитного основного состояния (см. [17]).

Пример 3. Учет ангармонизма в гамильтониане H_L

$$U_{\text{анг}} = \frac{U_{\text{III}}}{3!} \sum_j (x_{j+1} - x_j - a_0)^3$$

и дисперсии фононов

$$x_{j\pm 1} = x \pm a_0 x_\xi + \frac{1}{2} a_0^2 x_{\xi\xi} \pm \frac{1}{6} a_0^3 x_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{4!} a_0^4 x_{\xi\xi\xi\xi} + \ldots$$

приводит к замене волнового уравнения (11) неоднородным уравнением Буссинеска

$$\partial_t^2 x - \partial_\xi^2 (v_0^2 - \alpha \partial_\xi^2 - \beta x)\, x = g \partial_\xi^2 (\psi, \psi), \qquad (24)$$

где α, β и g — коэффициенты, определяемые параметрами исходной системы. С помощью масштабного преобразования переменных ξ, t, x и ψ приходим к системе (5) + (3г). Переход к однонаправленному варианту в уравнении (24) с помощью (22) приводит к (3в).

Рассмотрев многокомпонентную спиновую систему, мы обнаружили, что при некоторых предположениях (длинноволновой предел и др.) она может быть сведена к различным полевым моделям с внутренними («цветовыми») симметриями. Некоторые из этих моделей оказываются интегрируемыми. К ним относятся: НУШ с $U(p, q)$-симметрией (получаемое в квазистатическом пределе), цветовое обобщение системы Яджимы — Ойкавы (получаемое в околозвуковом пределе), наконец, система (5), (3г) при $\lambda = 0$. Остальные неинтегрируемые варианты часто можно рассматривать как системы, близкие к интегрируемым. Все полученные уравнения содержат, кроме линейных (фононных и магнонных) решений, также и существенно нелинейные (солитонные) решения, свойства этих решений мы обсудим в следующих разделах. Именно эти решения наряду с линейными модами описывают элементарные возбуждения соответствующих систем при низких температурах [20]. В заключение заметим, что рассмотренные выше модели возникают во многих областях физики, в частности, многие из них впервые, по-видимому появились в физике плазмы (см., например, обзоры [21]).

2. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА

В этом разделе мы опишем метод построения интегрируемых моделей, связанных с нестационарным уравнением Шредингера, и их явных локализованных решений.

Хотя этот метод вытекает из общей конечнозонной (алгеброгеометрической) схемы, само по себе его изложение может быть дано в замкнутой форме без какого бы то ни было использования результатов алгебраической геометрии. Как представляется авторам, «алгеброгеометрический» подход к построению многосолитонных решений является одним из наиболее простых и элементарных методов, который позволяет получать эти решения и в тех случаях, когда для вспомогательных линейных задач нет последовательного решения прямой и обратной спектральной задач.

Следует отметить, что выбранный нами путь построения решений нестационарного уравнения Шредингера с условиями самосогласования отличается от стандартной схемы метода обратной задачи. Для всех этих уравнений известны представления типа Лакса либо представления в виде L, A, B-троек. Возникающие при этом линейные задачи сильно различаются. Оказывается, что решения указанных уравнений можно получить в рамках одной схемы, использующей лишь один линейный оператор

$$L = \mathrm{i}\partial_y - \partial_x^2 + u(x, y),$$

а не несколько, как того требует метод обратной задачи (МОЗ). При этом оператор L играет не только вспомогательную роль, он входит в качестве составной части в исходную систему уравнений.

Впервые подобный подход для НУШ и его векторных обобщений в случае периодических решений был предложен в [22]. Периодические решения для остальных условий самосогласования были построены в работе [23], которая и стимулировала в основном эту работу.

Конструкция «интегрируемых» потенциалов нестационарного уравнения Шредингера, связанных с рациональной кривой. Под интегрируемыми потенциалами нестационарного уравнения Шредингера, связанными с рациональной кривой, подразумеваются такие потенциалы $u(x, t)$, для которых уравнение

$$[\mathrm{i}\partial_t - \partial_x^2 + u(x, t)]\,\psi(x, t, k) = 0 \tag{25}$$

имеет решение вида

$$\psi(x, t, k) = Q_N(x, t, k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx + \mathrm{i}k^2 t}, \tag{26}$$

где

$$Q_N(x, t, k) = k^N + a_1(x, t)\,k^{N-1} + \ldots + a_N(x, t) \tag{27}$$

— полином по k некоторой степени N.

Излагаемый ниже вариант конструкции таких потенциалов, возможно, и не является самым общим. Тем не менее он содержит в качестве частных случаев многосолитонные и рациональные решения интересующих нас нелинейных уравнений.

Построим сначала комплексные интегрируемые потенциалы. Зададим набор различных чисел $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_M$, (α_{ij}^s), где $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$, $s = 0, \ldots, m_j$, причем $m_1 + \ldots + m_M + M \geqslant N$. Эти величины являются параметрами конструкции. При заданных параметрах функцию $\psi(x, t, k)$ можно однозначно определить, потребовав, чтобы она удовлетворяла следующей системе линейных условий:

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{s=0}^{m_j} \alpha_{ij}^s \partial_k^s \psi(x, t, k)\,|_{k=\varkappa_j} = 0, \quad i = \overline{1, N}. \tag{28}$$

Условия (28) эквивалентны системе N линейных уравнений на коэффициенты $a_1, \ldots, a_N$. Для явной записи этих уравнений введем полиномы

$$P_{r,s}(x, t, k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx - \mathrm{i}k^2t} \partial_k^s \left(k^r \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx + \mathrm{i}k^2t}\right) =$$
$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx - \mathrm{i}k^2t} \left(\frac{1}{\mathrm{i}} \partial_x\right)^r \partial_k^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx + \mathrm{i}k^2t} = (\partial_k + \mathrm{i}x + 2\mathrm{i}kt)^s k^r.$$

Обозначим $\omega_j = \omega_j(x, t)$ линейные функции

$$\omega_j(x, t) = \varkappa_j x + \varkappa_j^2 t, \quad j = \overline{1, M}.$$

Тогда условия (28) запишутся в виде следующей системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(x, t) \sum_{j=1}^{M} \sum_{s=0}^{m_j} \alpha_{ij}^s P_{N-k,s}(x, t, \varkappa_j)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j} =$$
$$= -\sum_{j=1}^{M} \sum_{s=0}^{m_j} \alpha_{ij}^s P_{N,s}(x, t, \varkappa_j)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j}, \quad i = \overline{1, N}. \tag{29}$$

Обозначим $A(x, t) = (A_{ik}(x, t))$ матрицу размером $N \times N$, составленную из коэффициентов при $a_k(x, t)$ в уравнениях (29), а $\hat{A}(x, t, k)$ — матрицу размером $(N + 1) \times (N + 1)$ вида

$$\hat{A}(x, t, k) = \begin{pmatrix} k^N & k^{N-1} \ldots 1 \\ -\sum_{j=1}^{M} \sum_{s=0}^{m_j} \alpha_{1j}^s P_{N,s}(x, t, \varkappa_j)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j} & \\ \vdots & A(x, t) \\ -\sum_{j=1}^{M} \sum_{s=0}^{m_j} \alpha_{Nj}^s P_{N,s}(x, t, \varkappa_j)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j} & \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Теорема 1. Пусть матрица $A(x, t)$ системы (29) не является тождественно (по x, t) вырожденной. Тогда функция $\psi(x, t, k)$ вида (26), определенная условиями (28), удовлетворяет уравнению (25) с потенциалом $u(x, t)$, равным

$$u(x, t) = 2i\partial_x a_1(x, t) = 2\partial_x^2 \ln \det A(x, t). \qquad (31)$$

Доказательство абсолютно стандартно для теории конечнозонного интегрирования и использует лишь вид ψ и условия, ее определяющие.

Если положить $u(x, t) = 2i\partial_x a_1(x, t)$, то подстановка (26) в (25) сразу даст, что левая часть этого равенства равна функции $\tilde{\psi}(x, t, k)$ вида

$$\tilde{\psi}(x, t, k) = (\tilde{a}_1(x, t) k^{N-1} + \ldots + \tilde{a}_N(x, t)) e^{ikx + ik^2 t},$$

полностью аналогичного (26), но без члена k^N в предэкспоненциальном множителе. Так как условия (27) линейны и не зависят от x, t, то для любого линейного оператора $\Lambda = \Lambda(\partial_x, \partial_t)$ будем иметь: функция $\tilde{\psi}(x, t, k) = \Lambda\psi(x, t, k)$ снова будет удовлетворять условиям (27). Значит, $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_N$ удовлетворяют системе линейных уравнений с теми же коэффициентами, что и для $a_1, \ldots, a_N$. В отличие от уравнений для последних, система уравнений для $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_N$ является однородной. Значит, $\tilde{a}_1 = \ldots = \tilde{a}_N = 0$, и равенство (25) доказано.

Доказательство второй из формул (31) немедленно следует из формулы Крамера для решения $a_1(x, t)$ системы (29) и из очевидного соотношения

$$\frac{1}{i}\partial_x [P_{N-1, s}(x, t, k) e^{ikx + ik^2 t}] = P_{N, s}(x, t, k) e^{ikx + ik^2 t}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Для невырожденности матрицы $A(x, t)$, очевидно, необходимо, чтобы матрица (α_{ij}^s) коэффициентов системы линейных условий (28) имела ранг N. В дальнейшем мы будем предполагать это условие на ранг матрицы (α_{ij}^s) выполненным. Отметим также, что функция $\psi(x, t, k)$ не изменится, если матрицу (α_{ij}^s) умножить слева на произвольную постоянную невырожденную матрицу размером $N \times N$.

Как уже было сказано, для произвольных значений параметров $\varkappa_j$, (α_{ij}^s) получающиеся потенциалы $u(x, t)$ являются **комплексными** и **мероморфными** функциями переменных x и t. Опишем те ограничения на эти параметры, которые гарантируют **вещественность** и **неособость** (при всех вещественных x и t) потенциалов $u(x, t)$.

Рассмотрим здесь только случай, где $m_1 = \ldots = m_M = 0$ (пример, приводящий к рациональным решениям уравнения СНУШ, в котором $N = 2$, $m_j \neq 0$, был разобран в [24]). В этом случае мы потребуем, чтобы $M = 2N$ и чтобы величины $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2N}$ имели ненулевые мнимые части и распадались на комплексно сопряженные пары

$$\varkappa_{N+i} = \bar{\varkappa}_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что минор матрицы $(\alpha_{ij}) \equiv \equiv (\alpha_{ij}^0)$, составленный из столбцов с номерами $j = \overline{N+1,\ 2N}$, не вырожден. Будем считать этот минор единичным (см. замечание выше). Система условий (28) перепишется тогда в виде

$$\psi(\bar{\varkappa}_i) = -\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}\psi(\varkappa_j), \quad i = \overline{1, N}, \tag{32}$$

где α_{ij} — постоянная матрица размером $N \times N$. Удобно перенормировать функцию $\psi(x, t, k)$, полагая

$$\Psi(x, t, k) = \frac{\psi(x, t, k)}{(k-\varkappa_1)\ldots(k-\varkappa_N)} \equiv \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{r_j(x, t)}{k-\varkappa_j}\right) e^{ikx+ik^2t}. \tag{33}$$

Условия (32) для перенормировочной функции $\Psi(x, t, k)$ перепишутся в виде

$$\Psi(x, t, \bar{\varkappa}_i) = -\sum_{j=1}^{N} C_{ij} \operatorname*{res}_{k=\varkappa_j} \Psi(x, t, k), \tag{34}$$

где постоянная матрица (C_{ij}) связана с матрицей (α_{ij}) соотношениями

$$C_{ij} = [R(\bar{\varkappa}_i)]^{-1}\alpha_{ij}R'(\varkappa_j), \quad i, j = \overline{1, N}, \tag{35}$$

а $R(k) = (k-\varkappa_1)\ldots(k-\varkappa_N)$, штрих обозначает производную по k.

Теорема 2. Пусть параметры $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$, (C_{ij}), задающие условиями (34) функцию $\Psi(x, t, k)$ вида (33), удовлетворяют следующим требованиям:

а) матрица (C_{ij}) косоэрмитова, $C_{ij} = -\bar{C}_{ji}$;

б) занумеруем точки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ так, что $\operatorname{Im} \varkappa_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$; $\operatorname{Im} \varkappa_i < 0$, $i = \overline{p+1, N}$. Требуется, чтобы эрмитова матрица

$$(i^{-1}C_{kl}), \quad 1 \leqslant k, \quad l \leqslant p,$$

была положительно определенной, а эрмитова матрица

$$(i^{-1}C_{kl}), \quad p+1 \leqslant k, \quad l \leqslant N,$$

была отрицательно определенной (знакоопределенность этих матриц может быть и нестрогой). Тогда функция $\Psi(x, t, k)$ при $k \neq \varkappa_j$ гладко зависит от x, t при всех вещественных x, t и является собственной для оператора $L = i\partial_t - \partial_x^2 + u(x, t)$ с гладким вещественным потенциалом (и нулевым собственным значением). Для этих функций справедливы формулы

$$\Psi(x, t, k) = \frac{\det \hat{M}(x, t, k)}{\det M(x, t)} e^{ik(x+kt)}; \tag{36}$$

$$u(x, t) = 2\partial_x^2 \ln \det M(x, t), \tag{37}$$

где

$$M_{ij}(x, t) = C_{ij} + \frac{e^{i(\overline{\omega}_i - \omega_j)}}{\overline{\varkappa}_i - \varkappa_j}, \quad \omega_i = \varkappa_i(x + \varkappa_i t), \quad i, j = \overline{1, N}; \tag{38}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_{ij} = M_{ij} \text{ при } i, j = \overline{1, N}, \ \hat{M}_{00} = 1, \ \hat{M}_{i0} = e^{i\overline{\omega}_i}, \\ \hat{M}_{0i} = (k - \varkappa_i)^{-1} e^{-i\omega_i}, \ i = \overline{1, N}. \end{array}\right\} \tag{39}$$

Доказательство. Рассмотрим рациональную функцию

$$\Omega(x, t, k) = \Psi(x, t, k)\overline{\Psi(x, t, \overline{k})}. \tag{40}$$

Вычет этой функции в точке $k = \infty$ равен $-(a_1(x, t) + \overline{a_1(x, t)})$. Кроме того, эта функция имеет простые полюсы в точках $k = \varkappa_i$, $k = \overline{\varkappa}_i$ с вычетами

$$\operatorname{res}_{\varkappa_i} \Omega(x, t, k) = \operatorname{res}_{\varkappa_i} \Psi(x, t, k)\overline{\Psi(x, t, \overline{k})} = -\sum_{j=1}^{N} \overline{C}_{ij}\Psi_i\overline{\Psi}_j, \tag{41}$$

где мы положили

$$\Psi_i = \Psi_i(x, t) = \operatorname{res}_{\varkappa_i} \Psi(x, t, k) = r_i(x, t)e^{i\omega_i}, \ i = \overline{1, N}. \tag{42}$$

Аналогично

$$\operatorname{res}_{\overline{\varkappa}_i} \Omega(x, t, k) = \Psi(x, t, \overline{\varkappa}_i)\operatorname{res}_{\varkappa_i}\overline{\Psi(x, t, k)} = -\sum_{j=1}^{N} C_{ij}\Psi_j\overline{\Psi}_i. \tag{43}$$

Из условия косоэрмитовости поэтому вытекает, что сумма вычетов функции $\Omega(x, t, k)$ во всех конечных полюсах равна нулю. Отсюда заключаем, что равен нулю вычет в бесконечности, т.е. $\overline{a}_1 = -a_1$. Это означает вещественность потенциала $u(x, t)$ в силу формулы $u = 2i\,\partial_x a_1$.

Гладкость $u(x, t)$ и $\Psi(x, t, k)$ при $k \neq \varkappa_j$ эквивалентна, как следует из (36), (37), невырожденности матрицы $M(x, t)$, которая является матрицей коэффициентов при Ψ_j, определенных формулой (42), в системе уравнений (44), эквивалентной исходному уравнению (34). Докажем, что система условий (34) имеет единственное решение при всех вещественных x, t. Перепишем эту систему в виде системы линейных уравнений на вычеты $\Psi_i(x, t)$, определенные формулой (42)

$$\sum_{j=1}^{N}\left(C_{ij} + \frac{e^{i(\overline{\omega}_i - \omega_j)}}{\overline{\varkappa}_i - \varkappa_j}\right)\Psi_j = -e^{i\overline{\omega}_i}, \ i = \overline{1, N}. \tag{44}$$

Вырожденность при некоторых x, t матрицы коэффициентов этой системы означает разрешимость соответствующей однородной системы (с нулями в правых частях). Последнее равносильно существованию ненулевой функции $\Psi'(x, t, k)$ вида

$$\Psi'(x, t, k) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\tilde{r}_j(x, t)}{k-\varkappa_j} e^{ik(x+kt)},$$

удовлетворяющей условиям (34). Покажем, что это невозможно. Рассмотрим интеграл по вещественной оси:

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi'(x, t, k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega'(x, t, k)\, dk = I,$$

где $\Omega'(x, t, k)$ построена по функции $\Psi'(x, t, k)$ формулой (40). Вычислим интеграл I через вычеты функции $\Omega'(x, t, k)$, лежащие в верхней полуплоскости. Для этих вычетов справедливы формулы (41), (43) с заменой Ψ_i на $\Psi'_i = \operatorname*{res}_{\varkappa_i} \Psi'$. Поэтому имеем:

$$I = 2\pi i \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \Psi'_i \overline{\Psi}'_j - \sum_{i=p+1}^{N} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \Psi'_j \overline{\Psi}'_i \right) =$$
$$= 2\pi i \left(\sum_{i,\, j=1}^{p} C_{ji} \Psi'_i \overline{\Psi}'_j - \sum_{i,\, j=p+1}^{N} C_{ij} \Psi'_j \overline{\Psi}'_i + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{i} C_{ji} \Psi'_i \overline{\Psi}'_j - \sum_{i=p+1}^{N} \sum_{j=1}^{p} C_{ij} \Psi'_j \overline{\Psi}'_i \right).$$

Переобозначив в первой и третьей суммах индексы суммирования, получим окончательно

$$I = 2\pi i \left(\sum_{i,\, j=1}^{p} \overline{\Psi}'_i C_{ij} \Psi'_j - \sum_{i,\, j=p+1}^{N} \overline{\Psi}'_i C_{ij} \Psi'_j \right) \leqslant 0$$

в силу условия б) теоремы. Полученное противоречие и доказывает гладкость при всех вещественных x, t функций $\Psi(x, t, k)$ и $u(x, t)$. Формулы (36), (37) выводятся аналогично формулам (30), (31). Теорема доказана.

Определение 1. Интегрируемый потенциал $u(x, t)$, задаваемый в рамках нашей конструкции N параметрами $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ вместе с $N \times N$-матрицей (C_{ij}), мы будем называть N-солитонным.

Для соответствующих решений скалярного НУШ (см. разд. 3) такое определение числа солитонов совпадает с общепринятым. В векторных моделях наше определение числа солитонов не всегда совпадает с интуитивным [25].

Выясним, в каком случае два набора «спектральных данных» $(\varkappa_i)$, (C_{ij}) и $(\varkappa'_i)$, (C'_{ij}) задают один и тот же оператор Шредингера с одним и тем же семейством собственных функций $\Psi(x, t, k)$. Удобно воспользоваться для этого соотношениями (32). Представим матрицу (α_{ij}), связанную с (C_{ij}) соотношением (35), в блочном виде

$$(\alpha_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_+ & \beta \\ \hline \gamma & \alpha_- \end{array}\right),$$

где квадратные матрицы α_+ и α_- имеют размеры $p \times p$ и $(N-p) \times (N-p)$ соответственно. Предположим, что матрица α_- — невырожденная. Тогда преобразование вида $(\varkappa_i, (\alpha_{ij})) \Rightarrow (\varkappa_i', (\alpha_{ij}'))$, где

$$\varkappa_i' = \begin{cases} \varkappa_i, & i = \overline{1, p} \\ \bar{\varkappa}_i, & i = \overline{p+1, N} \end{cases}; \tag{45}$$

$$(\alpha_{ij}') = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_+ - \beta\alpha_-^{-1}\gamma & -\beta\alpha_-^{-1} \\ \hline \alpha_-^{-1}\gamma & \alpha_-^{-1} \end{array}\right), \tag{46}$$

не меняет соотношений (32), определяющих функции $\Psi(x, t, k)$. Таким образом, в случае невырожденности минора α_- точки $\varkappa_{p+1}, \ldots, \varkappa_N$ можно «перегнать» из нижней полуплоскости в верхнюю, изменив по формулам (46), (35) и матрицу (C_{ij}), без изменения оператора Шредингера и его собственных функций.

Отметим еще случай «тривиализации» основной системы (34), при котором в матрице (C_{ij}) имеется крест из нулей, т. е.

$$C_{i_0 j} = C_{j i_0} = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

В этом случае собственная функция $\Psi(x, t, k)$ имеет вид

$$\Psi(x, t, k) = \frac{k - \bar{\varkappa}_{i0}}{k - \varkappa_{i0}} \tilde{\Psi}(x, t, k),$$

где функция $\tilde{\Psi}(x, t, k)$ уже не зависит от $\varkappa_{i0}$ и определяется из системы вида (34), из которой удалена строка с номером i_0. Потенциал $u(x, t)$ также не будет зависеть от $\varkappa_{i0}$.

Укажем также закон преобразования спектральных данных, отвечающих галилеевым, масштабным и другим простейшим преобразованиям потенциала оператора Шредингера.

а) Преобразование Галилея

$$x' = x + vt; \quad t' = t.$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa_i' = \varkappa_i - v/2, \quad i = \overline{1, N}; \\ &(C_{ij}') = (C_{ij}). \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned} &u(x, t) = u'(x', t'), \\ &\Psi'(x', t', k') = \Psi(x, t, k)\, e^{-i\frac{v}{2}\left(x + \frac{v}{2}t\right)}, \quad \text{где } k' = k - v/2. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

б) Трансляции

$$x' = x + x_0; \quad t' = t + t_0.$$

При таких преобразованиях спектральные данные преобразуются по закону

$$\varkappa_i' = \varkappa_i, \quad i = \overline{1,\ N};$$

$$C_{ij}' = C_{ij} \exp\{\mathrm{i}\,[(\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j)\, x_0 + (\bar{\varkappa}_i^2 - \varkappa_j^2)\, t_0]\}, \quad i,\ j = \overline{1,\ N}. \tag{49}$$

Очевидно,

$$u'(x',\ t') = u(x,\ t);$$

$$\Psi'(x',\ t',\ k) = \Psi(x,\ t,\ k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_0 + kt_0)}.$$

в) Масштабные преобразования

$$x' = \lambda x; \quad t' = \lambda^2 t.$$

Закон преобразования спектральных данных:

$$\varkappa_i' = \lambda^{-1}\varkappa_i, \quad i = \overline{1,\ N};$$

$$(C_{ij}') = (C_{ij}).$$

Потенциал и собственные функции преобразуются так:

$$u'(x',\ t') = \lambda^{-2} u(x,\ t); \quad \Psi'(x',\ t',\ k') = \Psi(x,\ t,\ k),$$

где $k' = \lambda' k$.

г) Пространственное и временное отражение

$$x' = -x; \quad t' = -t.$$

Тогда

$$\varkappa_i' = \bar{\varkappa}_i, \quad i = \overline{1,\ N};$$

$$C_{ij}' = \bar{C}_{ij}, \quad i,\ j = \overline{1,\ N}.$$

При этом

$$u'(x',\ t') = u(x,\ t);$$

$$\Psi'(x',\ t',\ k') = \overline{\Psi(x,\ t,\ k)},$$

где $k' = \bar{k}$.

Асимптотические свойства потенциалов и собственных функций построенных операторов. *Рассмотрим сначала случай* $N = 1$. Система (44) сводится к одному уравнению

$$\left(C + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\omega} - \omega)}}{\bar{\varkappa} - \varkappa}\right) \Psi_1(x,\ t) = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}}.$$

Здесь $\varkappa \equiv \varkappa_1$ (пусть $\operatorname{Im} \varkappa > 0$), $C = C_{11}$, $\operatorname{Re} C_{11} = 0$, $\operatorname{Im} C > 0$ (при $C = 0$ все тривиализуется), $\omega = \varkappa\,(x + \varkappa t)$. Отсюда

$$\Psi_1(x,\ t) = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}} \left(C + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\omega} - \omega)}}{\bar{\varkappa} - \varkappa}\right)^{-1}.$$

Обозначим: $\varkappa = \alpha + \mathrm{i}\beta$. Тогда получим

$$\Psi_1(x,\ t) = \frac{\mathrm{i}\beta}{\sqrt{-\mathrm{i}\beta C}}\ \frac{e^{\mathrm{i}\alpha x + \mathrm{i}(\alpha^2-\beta^2)t}}{\operatorname{ch}[\beta(x-x_0)+2\alpha\beta t]}, \tag{50}$$

где x_0 имеет вид

$$x_0 = \frac{1}{\beta}\ln\sqrt{(\bar{\varkappa}-\varkappa)\,C}. \tag{51}$$

Для $r = r_1(x,\ t)$ получаем:

$$r(x,\ t) = \mathrm{i}\beta\,\{1 + \operatorname{th}[\beta(x-x_0) + 2\alpha\beta t]\}. \tag{52}$$

Таким образом, случаю $N = 1$ отвечает хорошо известный «односолитонный» потенциал оператора Шредингера, убывающий по всем направлениям, кроме направлений вида $x = -2\alpha t + \text{const}$:

$$u(x,\ t) = 2\mathrm{i}\,\partial_x r(x,\ t) = -2\beta^2\operatorname{ch}^{-2}[\beta(x-x_0)+2\alpha\beta t]. \tag{53}$$

Собственная функция соответствующего оператора Шредингера имеет вид

$$\Psi(x,\ t,\ k) = \left[1 + \mathrm{i}\beta\,\frac{1+\operatorname{th}[(x-x_0)+2\alpha\beta t]}{k-\varkappa}\right]e^{\mathrm{i}k(x+kt)}. \tag{54}$$

Рассмотрим теперь случай $N > 1$. Асимптотическое поведение функций $\Psi(x,\ t,\ k)$ при произвольных значениях параметров $(\varkappa_i)$, (C_{ij}) описать непросто. Мы рассмотрим здесь лишь простейший случай, когда $\operatorname{Im}\varkappa_i > 0$, $i = \overline{1,\ N}$:

$$\det(C_{ij}) \neq 0.$$

Некоторые другие примеры вычисления асимптотик разобраны ниже.

Изучим сначала асимптотики при больших x и фиксированных t. При $x \to -\infty$ имеем:

$$e^{\mathrm{i}\bar{\omega}_j} = e^{\mathrm{i}\bar{\varkappa}_j(x+\bar{\varkappa}_j t)} \to 0;$$
$$e^{-\mathrm{i}\omega_j} \to 0, \quad j = \overline{1,\ N}.$$

Поэтому система (44) на вычеты $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$ функции $\Psi(x,\ t,\ k)$ перейдет в такую систему:

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}\Psi_j = 0, \quad i = \overline{1,\ N}.$$

Следовательно, $\Psi_j \to 0$ при всех j. Нетрудно видеть, что это убывание экспоненциальное, т.е. при $x \to -\infty$

$$\Psi_j(x,\ t) \to \Psi_j^0(t)\,e^{\beta x}, \quad j = \overline{1,\ N},$$

где $\Psi_j^0(t)$ — некоторые функции от t, а

$$\beta = \min_j |\operatorname{Im}\varkappa_j|. \tag{55а}$$

Также имеем, что

$$r_j(x,\ t) \to 0, \quad j = \overline{1,\ N}, \tag{55б}$$

поскольку $r_j = \Psi_j e^{-i\omega_j}$. Поэтому и потенциал $u(x, t)$ убывает экспоненциально; нетрудно видеть, что

$$u(x, t) = O(e^{2\beta x}), \quad x \to -\infty,$$

где величина β определена формулой (55а). Из (55б) очевидно получаем, что

$$\Psi(x, t, k) \to e^{ik(x+kt)}, \quad x \to -\infty.$$

При $x \to +\infty$ вычисление немного сложнее. Здесь матрица системы (44) стремится к бесконечности. Переходя к переменным $r_j = \Psi_j \exp(-i\omega_j)$, переписываем систему (44) в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \left(C_{ij} e^{-i\bar{\omega}_i} + \frac{1}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j} \right) r_j = -1, \quad i = \overline{1, N}.$$

При $x \to +\infty$ эта система превращается в такую:

$$1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{r_j^0}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \tag{56}$$

где через $r_1^0, \ldots, r_N^0$ мы обозначили предельные значения.

Рациональная функция

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{r_i^0}{k - \varkappa_i}$$

может быть однозначно представлена в виде

$$f = \frac{P(k)}{\prod_i (k - \varkappa_i)},$$

где $P(k)$ — полином степени N со старшим коэффициентом единица. Из (56) следует, что $f(\bar{\varkappa}_i) = 0$ и, значит, $P(k) = \prod_i (k - \bar{\varkappa}_i)$. Отсюда

$$\Psi(x, t, k) \to \prod_{j=1}^{N} \frac{k - \bar{\varkappa}_j}{k - \varkappa_j} e^{ik(x+kt)}, \quad x \to +\infty. \tag{57}$$

Функции Ψ_j экспоненциально убывают, причем

$$\Psi_j(x, t) \to r_j^0 e^{i\omega_j} \text{ при } x \to +\infty, \; j = \overline{1, N}. \tag{58}$$

Можно показать, что

$$u(x, t) = O(e^{-2\beta x}), \quad x \to +\infty, \tag{59}$$

где величина β определена формулой (55а).

Для вырожденной матрицы (C_{ij}) асимптотики при больших x более сложные. Отметим здесь такое свойство: пусть все точки

$\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ лежат в верхней полуплоскости, но матрица (C_{ij}) вырождена. Если мнимые части $\operatorname{Im} \varkappa_1, \ldots, \operatorname{Im} \varkappa_N$ все попарно различны, то хотя бы одна из функций $\Psi_1(x, t), \ldots, \Psi_N(x, t)$ при $x \to -\infty$ не ограниченно растет. Действительно, пусть константы $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ (не все нулевые) удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i C_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Умножив i-е уравнение системы (44) на λ_i и сложив их, получим:

$$\sum_{i,\, j=1}^{N} \lambda_i \frac{e^{i(\overline{\omega}_i - \omega_j)}}{\overline{\varkappa}_i - \varkappa_j} \Psi_j = -\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e^{i\overline{\omega}_i}.$$

Устремив в этом соотношении $x \to -\infty$, получим, в предположении ограниченности функций $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = 0$. Полученное противоречие доказывает неограниченность функций Ψ_j.

Заметим также, что при специальном выборе спектральных данных $(\varkappa_i)$, (C_{ij}) потенциал $u(x, t)$ оказывается периодической либо квазипериодической функцией по x. Для периодичности по x с периодом T, очевидно, нужно, чтобы

$$C_{ij} \exp\left[i\left(\overline{\varkappa}_i - \varkappa_j\right) T\right] = C_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{60}$$

Это вытекает из (49). Если положить $\varkappa_j = \alpha_j + i\beta_j$, то (60) перепишется в виде

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i - \alpha_j = T^{-1} 2\pi n_{ij}; \\ &\beta_i + \beta_j = 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } C_{ij} \neq 0,$$

где n_{ij} — некоторые целые числа.

Если заменить это условие на такое:

$$\beta_i + \beta_j = 0 \quad \text{при} \quad C_{ij} \neq 0,$$

то потенциал $u(x, t)$ будет квазипериодической функцией по x. Очевидно, эти соотношения разрешимы, если матрица (C_{ij}) удовлетворяет следующим требованиям:

$$C_{ii} = 0, \quad C_{ij} C_{jk} C_{ki} = 0, \quad i, j, k = \overline{1, N}.$$

Аналогично выглядят условия периодичности и квазипериодичности по t.

Перейдем теперь к изучению асимптотики по t при больших t и фиксированных x. Снова будем предполагать, что $\operatorname{Im} \varkappa_i > 0$, $i = \overline{1, N}$, и $\det(C_{ij}) \neq 0$. Возможны два существенно различных случая. Первый — когда $\operatorname{Im} \varkappa_j^2 \neq 0$ при всех $j = \overline{1, N}$. При этом вычисления, аналогичные предыдущим, показывают, что функции $\Psi_1(x, t), \ldots, \Psi_N(x, t)$ и $u(x, t)$ экспоненциально затухают при

$|t| \to \infty$, причем скорость затухания определяется числом $\min\limits_j [\operatorname{Im} \varkappa_j^2]$.

Второй случай, когда хотя бы одна из мнимых частей $\operatorname{Im} \varkappa_j^2$ обращается в нуль. Мы разберем простейшую ситуацию, где

$$\operatorname{Im} \varkappa_1^2 > \ldots > \operatorname{Im} \varkappa_{N-1}^2 > \operatorname{Im} \varkappa_N^2 = 0. \tag{61}$$

При $t \to -\infty$ система (48) асимптотически перепишется в виде

$$\sum_{j=1}^{N} C_{ij}\Psi_j = 0, \quad i = \overline{1,\ N-1}, \tag{62}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} C_{Nj}\Psi_j + \left(C_{NN} + \frac{e^{i(\bar{\omega}_N - \omega_N)}}{\bar{\varkappa}_N - \varkappa_N}\right)\Psi_N = -e^{i\bar{\omega}_N}.$$

Обозначим (C^{ij}) матрицу, обратную (C_{ij}). Делая в (62) замену переменных по формуле

$$\Psi_j = \sum_{l=1}^{N} C^{jl}\Phi_l, \quad j = \overline{1,\ N},$$

получаем:

$$\Phi_j = 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,\ N-1},$$

$$\Phi_N = e^{i\bar{\omega}_N}\left[1 + \frac{e^{i(\bar{\omega}_N - \omega_N)}}{\bar{\varkappa}_N - \varkappa_N} C^{NN}\right]^{-1}.$$

Отсюда получаем вид осциллирующей асимптотики для функции Ψ_j при $t \to -\infty$:

$$\Psi_j \to -\frac{C^{jN}}{C^{NN}} \frac{e^{i\bar{\omega}_N}}{(C^{NN})^{-1} + \dfrac{e^{i(\bar{\omega}_N - \omega_N)}}{\bar{\varkappa}_N - \varkappa_N}} =$$

$$= \frac{C^{jN}}{C^{NN}} \sqrt{\frac{C^{NN}}{-2i\beta_N}}\, i\beta_N \frac{e^{-i\beta_N^2 t}}{\operatorname{ch}[\beta_N(x - x_0^-)]}, \quad j = \overline{1,\ N}, \tag{63}$$

где $\varkappa_N = i\beta_N$,

$$x_0^- = \beta_N^{-1} \ln \sqrt{\frac{-2i\beta_N}{C^{NN}}}. \tag{64}$$

Отсюда нетрудно вывести, что потенциал $u(x,\ t)$ имеет солитонную асимптотику (неподвижный солитон) вида

$$u(x,\ t) \to -2\beta_N^2 \operatorname{ch}^{-2}[\beta_N(x - x_0^-)], \quad t \to -\infty.$$

Вычислим теперь асимптотики при $t \to +\infty$. Здесь удобно перейти к переменным $r_1(x,\ t), \ldots, r_N(x,\ t)$. Система (44) асимптотически перепишется в следующем виде:

$$1+\sum_{j=1}^{N}\frac{r_j}{\overline{\varkappa}_i-\varkappa_j}=0,\quad i=\overline{1,\ N-1},\tag{65}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left(C_{Nj}e^{-i\overline{\omega}_N}+\frac{1}{\overline{\varkappa}_N-\varkappa_j}\right)r_j+\left(e^{-i(\overline{\omega}_N-\omega_N)}+\frac{1}{\overline{\varkappa}_N-\varkappa_N}\right)r_N=-1.$$

Первые уравнения системы (65) дают: $N-1$ нулей рациональной функции

$$R(k)=1+\sum_{j=1}^{N}\frac{r_j}{k-\varkappa_j}$$

лежат в точках $\overline{\varkappa}_1,\ \ldots,\ \overline{\varkappa}_{N-1}$. Полагая

$$R(k)=(k-a)\prod_{i=1}^{N-1}(k-\overline{\varkappa}_i)\left(\prod_{i=1}^{N}(k-\varkappa_i)\right)^{-1},$$

где a — неизвестная величина, получаем:

$$r_j=\frac{(\varkappa_j-a)\prod\limits_{i=1}^{N-1}(\varkappa_j-\overline{\varkappa}_i)}{\prod\limits_{i\neq j}(\varkappa_j-\varkappa_i)},\quad j=\overline{1,\ N}.$$

Подставляя в последнее из уравнений (65), определяем a. После несложных вычислений отсюда получаем при $t\to+\infty$:

$$\Psi_N(x,\ t)\to\frac{i\beta_N}{\sqrt{-2i\beta_N C_{NN}}}\ \frac{e^{-i\beta_N^2 t+i\varphi_0^+}}{\operatorname{ch}[\beta_N(x-x_0^+)]},$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0^+=\arg Z_N,\quad x_0^+=\frac{1}{\beta_N}\ln[\sqrt{-2i\beta_N C_{NN}}\,|Z_N|];\\&Z_N=\prod_{i\neq N}\frac{\varkappa_N-\overline{\varkappa}_i}{\varkappa_N-\varkappa_i}.\end{aligned}\right\}\tag{66}$$

Для всей функции $\Psi(x,\ t,\ k)$ получаем такую асимптотику:

$$\Psi(x,\ t,\ k)\to$$
$$\to\prod_{j=1}^{N-1}\frac{k-\overline{\varkappa}_j}{k-\varkappa_j}\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{\varkappa_N-\overline{\varkappa}_N}{k-\varkappa_N}[1+\operatorname{th}(\beta_N(x-x_0^+))]\right\}e^{ik(x+kt)}.$$

Для потенциала $u(x,\ t)$ снова получаем солитонную асимптотику:

$$u(x,\ t)\to 2\beta_N^2\operatorname{ch}^{-2}[\beta_N(x-x_0^+)],\quad t\to+\infty.$$

Сдвиг фазы неподвижного солитона, отвечающий переходу от $t \to -\infty$ к $t \to +\infty$, вычисляется, таким образом, по формуле

$$x_0^+ - x_0^- = \frac{1}{\beta_N} \ln \left(\sqrt{C_{NN}C^{NN}} \left| \prod_{i \neq N} \frac{\varkappa_N - \bar{\varkappa}_i}{\varkappa_N - \varkappa_i} \right| \right). \tag{67}$$

Аналогично вычисляются асимптотики при $t \to \pm\infty$ на прямых $x = vt + x_0$ [можно сразу воспользоваться формулами (47), (48) для преобразования Галилея]. Мы получим, что потенциал $u(x, t)$ асимптотически распадается на солитоны типа (53), движущиеся со скоростями $v_j = -(\operatorname{Im} \varkappa_j^2/\operatorname{Im} \varkappa_j)$, $j = \overline{1, N}$. Сдвиги фаз этих солитонов вычисляются по формулам вида (67). Заметим, что взаимодействие этих солитонов не сводится к парному из-за слагаемого $\frac{1}{\beta_N} \ln \sqrt{C_{NN}C^{NN}}$, входящего в (67).

Подчеркнем, что описанный выше асимптотический распад на солитоны происходит при условии, что мнимые части величин $\varkappa_1^2, \ldots, \varkappa_N^2$ различны. Если среди этих мнимых частей есть совпадающие, то возникают связанные состояния солитонов. Приведем вид соответствующих асимптотик для случая

$$\operatorname{Im} \varkappa_1^2 \geqslant \operatorname{Im} \varkappa_2^2 \geqslant \ldots > \operatorname{Im} \varkappa_{N-m+1}^2 = \ldots = \operatorname{Im} \varkappa_N^2 = 0,$$

предполагая, как и выше, что $\operatorname{Im} \varkappa_j > 0$, $j = 1, \ldots, N$, $\det (C_{ij}) \neq 0$.

а) При $t \to -\infty$. Обозначим (C^{ij}) матрицу, обратную (C_{ij}); $(C_{ij}^-)_{N-m+1 \leqslant i, j \leqslant N}$ обозначим матрицу, обратную $(C^{ij})_{N-m+1 \leqslant i, j \leqslant N}$,

$$\sum_{s=N-m+1}^{N} C_{is}^- C^{sj} = \delta_i^j, \quad i, j = \overline{N-m+1, N}.$$

Тогда при $t \to -\infty$ функция $\Psi(x, t, k)$ имеет осциллирующую (т. е. квазипериодическую по t при вещественных k) асимптотику вида

$$\Psi(x, t, k) \to \Psi^-(x, t, k),$$

где функция

$$\Psi^-(x, t, k) = \left(1 + \sum_{j=N-m+1}^{N} \frac{r_j^-}{k - \varkappa_j}\right) e^{ik(x+kt)}$$

задается m точками дискретного спектра $\varkappa_{N-m+1}, \ldots, \varkappa_N$ и $m \times m$-матрицей (C_{ji}^-) согласно основной конструкции (см. начало разд. 2).

Пусть

$$\Psi_j^-(x, t) = r_j^- e^{i\omega_j}, \quad j = \overline{N-m+1, N}.$$

— вычеты этой функции. Тогда вычеты $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$ функции $\Psi(x, t, k)$ имеют при $t \to -\infty$ осциллирующую асимптотику вида

$$\Psi_j(x, t) \to \Psi_j^-(x, t), \quad j = \overline{N-m+1, N},$$

$$\Psi_j(x, t) \to \sum_{l, s=N-m+1}^{N} C^{jl} C_{ls}^- \Psi_s^-(x, t), \quad j = \overline{1, N-m}.$$

Соответствующая асимптотика потенциала $u(x, t) \to u^-(x, t)$ m-солитонная, определяемая дискретным спектром $\varkappa_{N-m+1}, \ldots, \varkappa_N$ и матрицей (C_{ij}^-). Функция $u^-(x, t)$ квазипериодически зависит от t.

б) При $t \to +\infty$. Обозначим $R(k)$ рациональную функцию вида

$$R(k) = \prod_{i=1}^{N-m} \frac{k - \bar{\varkappa}_i}{k - \varkappa_i},$$

а (C_{ij}^+) $m \times m$-матрицу вида

$$C_{ij}^+ = R^{-1}(\bar{\varkappa}_i) C_{ij} R(\varkappa_j), \quad i, j = \overline{N-m+1, N}.$$

Тогда при $t \to +\infty$ асимптотика функции $\Psi(x, t, k)$ такова:

$$\Psi(x, t, k) \to R(k) \Psi^+(x, t, k), \tag{68}$$

где функция $\Psi^+(x, t, k)$ задается m точками дискретного спектра $\varkappa_{N-m+1}, \ldots, \varkappa_N$ и $m \times m$-матрицей (C_{ij}^+) согласно основной конструкции. Вид асимптотик для функций $\Psi_j(x, t)$ легко извлечь прямо из формулы (68). Потенциал имеет квазипериодическую по t m-солитонную асимптотику $u(x, t) \to u^+(x, t)$, определяемую дискретным спектром $\varkappa_{N-m+1}, \ldots, \varkappa_N$ и матрицей (C_{ij}^+). Переход от матрицы (C_{ij}^-) к матрице (C_{ij}^+) определяет закон взаимодействия связанного состояния m солитонов с остальными составляющими N-солитонного решения.

Условия самосогласования. В окрестности $k = \infty$ функцию $\Psi(x, t, k)$, определенную выше в начале раздела, можно представить в виде

$$\Psi(x, t, k) = \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \xi_l(x, t) k^{-l}\right) e^{ik(x+kt)}. \tag{69}$$

Первый сомножитель представляет собой разложение по k^{-1} предэкспоненциального множителя в (33). Имеем, в частности,

$$\xi_1 = a_1 = \sum_{j=1}^{N} r_j; \quad \xi_1 + \bar{\xi}_1 = 0.$$

Подстановка разложения (69) в уравнение (25) приводит к следующим равенствам для коэффициентов $\xi_l(x, t)$:

$$i\dot{\xi}_l - 2i\xi_{l+1}' - \xi_l'' + u\xi_l = 0, \quad l = 0, 1 \ldots; \quad \xi_0 = 1. \tag{70}$$

Точка обозначает производную по t, штрих — по x.

Рассмотрим вновь мероморфную функцию

$$\Omega(x, t, k) = \Psi(x, t, k)\overline{\Psi(x, t, \bar{k})}.$$

Ее разложение в окрестности бесконечности имеет вид

$$\Omega(x, t, k) = 1 + \sum_{l=2}^{\infty} J_l(x, t) k^{-l}.$$

Несколько первых коэффициентов разложения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &J_2 = \xi_2 + \bar{\xi}_2 - \xi_1^2, \quad J_3 = \xi_3 + \bar{\xi}_3 + \xi_1(\bar{\xi}_2 - \xi_2), \\ &J_4 = \xi_4 + \bar{\xi}_4 + \xi_1(\bar{\xi}_3 - \xi_3) + |\xi_2|^2. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Используя соотношения (70), можно найти связь между выражениями (71) и потенциалом $u(x, t)$ нестационарного уравнения Шредингера.

Лемма. Для любого формального решения $\Psi(x, t, k)$ вида (26) уравнения (25) имеем

$$J_2(x, t) = \frac{1}{2} u(x, t) + c_2, \quad c_2 = \text{const}; \tag{72}$$

$$\partial_x J_3(x, t) = \frac{1}{2} \dot{u}(x, t); \tag{73}$$

$$\partial_x^2 J_4(x, t) = \frac{3}{8} \ddot{u} - \frac{1}{8}(u_{xxx} - 6uu_x)_x. \tag{74}$$

Соотношение (72) было получено в [22], а выражения (73), (74) — в [23]. Отметим, что константу c_2 в (72) можно найти из асимптотики $\Omega(x, t, k)$ при $|x| \to \infty$. Например, в рассмотренной выше ситуации, где $\operatorname{Im} \varkappa_i > 0$ и матрица (C_{ij}) невырожденная, имеем $\Omega(x, t, k) \to 1$, $u(x, t) \to 0$, $x \to \pm\infty$, откуда $c_2 = 0$.

Полученные соотношения служат основой построения решений со всеми видами условий самосогласования [см. ниже (79), (81), (82)]. Пусть $E(k)$ — рациональная функция одного из трех видов:

$$E(k) = k + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{b_i^2}{k - k_i}; \tag{75}$$

$$E(k) = k^2 + \alpha k + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{b_i^2}{k - k_i}; \tag{76}$$

$$E(k) = k^3 + \beta k^2 + \gamma k + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{b_i^2}{k - k_i}. \tag{77}$$

Константы α, β, γ, k_i и b_i — произвольные вещественные. Константы $\varepsilon_i = \pm 1$. Обозначим $\Phi_i(x, t)$ функции

$$\Phi_i(x, t) = b_i \Psi(x, t, k_i), \quad j = \overline{1, n}.$$

По определению, функции Φ_i удовлетворяют уравнению

$$i\dot{\Phi}_j - \Phi_j'' + u(x, t)\Phi_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{78}$$

Функции $\Psi_j(x, t)$, $j = \overline{1, N}$, определенные равенствами (42), также удовлетворяют тому же уравнению

$$i\dot{\Psi}_j - \Psi_j'' + u(x, t)\Psi_j = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Теорема 3. Пусть функции $\Phi_i(x, t)$, $\Psi_j(x, t)$ построены по набору параметров $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$, (C_{ij}) и по рациональной функции $E(k)$ одного из указанных типов (75) — (77). Тогда имеют место следующие условия самосогласования.

1. Если $E(k)$ имеет вид (75), то

$$\frac{u}{2} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i b_i^2 + c_2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i |\Phi_i(x, t)|^2 - \sum_{i, j=1}^{N} \overline{\Psi_i(x, t)} E_{ij} \Psi_j(x, t), \tag{79}$$

где

$$E_{ij} = C_{ij}(\overline{E(\varkappa_i)} - E(\varkappa_j)), \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{80}$$

2. Если $E(k)$ имеет вид (76), то

$$\frac{\dot{u}}{2} + \alpha\frac{u'}{2} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i |\Phi_i(x, t)|_x^2 - \Big(\sum_{i, j=1}^{N} \overline{\Psi}_i E_{ij} \Psi_j\Big)_x, \tag{81}$$

матрица (E_{ij}) имеет вид (80).

3. Если $E(k)$ имеет вид (77), то

$$\frac{3}{8}\ddot{u} - \frac{1}{8}(u_{xxx} - 6uu_x)_x + \beta\frac{\dot{u}_x}{2} + \gamma\frac{u_{xx}}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i |\Phi_i|_{xx}^2 - \Big(\sum_{i, j=1}^{N} \overline{\Psi}_i E_{ij} \Psi_j\Big)_{xx}, \tag{82}$$

матрица (E_{ij}) имеет вид (80).

Доказательство. Рассмотрим рациональную функцию

$$\hat{\Omega}(x, t, k) = E(k)\Psi(x, t, k)\overline{\Psi(x, t, \bar{k})}.$$

Применяя к этой функции теорему о вычетах, получаем, имея в виду (41), (43), условия самосогласования (79) — (82). Теорема доказана.

Отметим, что матрица (E_{ij}) вида (80) эрмитова. Поэтому линейным преобразованием функций $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$ эту матрицу можно сделать диагональной, причем на диагонали будут стоять ± 1 или 0.

Для общих значений параметров $\varkappa_i$, (C_{ij}), а также произвольной рациональной функции $E(k)$ одного из указанных типов эрмитова квадратичная форма, стоящая в правых частях условий самосогласования, будет иметь большой ранг, равный $N+n$. Для условий самосогласования (79), например, это будет означать, что функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Psi_1, \ldots, \Psi_N$ дают решение $(n+N)$-компонентного векторного НУШ, тип симметрии которого определяется сигнатурой эрмитовой матрицы

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & -\varepsilon_n \\ 0 & & \boxed{E_{ij}} \end{pmatrix}. \tag{83}$$

При наложении специальных условий на параметры конструкции ранг этой матрицы может падать, что будет отвечать уменьшению числа компонент у векторного НУШ (то же относится и к другим условиям самосогласования).

В чем отличие решений (Ψ, Φ) уравнений самосогласования, отвечающих матрицам вида (83) с одинаковыми рангом и сигнатурой, но с разными числами n конечных полюсов у функции $E(k)$? Из предыдущих результатов вытекает, что у функций $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ разное асимптотическое поведение при больших x: функции $\Phi_i(x, t)$ имеют, вообще говоря, осциллирующую асимптотику при $|x| \to \infty$, а функции $\Psi_j(x, t)$ экспоненциально затухают при больших x. Это обстоятельство следует учитывать при построении многосолитонных решений, выбирая функцию $E(k)$ в соответствии с требуемыми граничными условиями.

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Скалярные модели. *Пример 1.* Покажем, как в рамках нашей конструкции получаются известные [30] многосолитонные решения скалярного уравнения НУШ (с притяжением). Возьмем $E(k) = k$. Матрица (E_{ij}) вида (80) должна иметь ранг I для скалярного случая. Поэтому матрица (C_{ij}) должна иметь вид

$$C_{ij} = \lambda \frac{\bar{\gamma}_i \gamma_j}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j}, \quad i, j = \overline{1, N}, \tag{84}$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ — произвольные комплексные константы, λ — вещественное число.

Можно считать, что эти константы ненулевые и нормированы условием

$$\sum_{j=1}^{N} |\gamma_j|^2 = 1.$$

[Если $\gamma_j = 0$ при некотором j, то в матрице (C_{ij}) возникают нулевые строка и столбец, т. е. система (34) тривиализуется (см. разд. 2)].

Тогда можно считать, что все $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_N$ лежат в верхней полуплоскости. Действительно, это вытекает из результатов разд. 2 в силу невырожденности матриц вида $((\bar{\varkappa}_i - \bar{\varkappa}_j)^{-1})$ *. Условие положительной определенности матрицы $\mathrm{i}^{-1}(C_{ij})$, где (C_{ij}) имеет вид (84), равносильно неравенству $\lambda > 0$ (мы уже считаем, что $\operatorname{Im} \varkappa_i > 0$, $i = \overline{1, N}$). Эрмитова форма вида (80) сведется в этом случае к

$$-\lambda \sum_{i,\, j=1}^{N} \bar{\gamma}_i \gamma_j \bar{\Psi}_i \Psi_j = -\lambda \left| \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Psi_i(x, t) \right|^2 .$$

Константа c_2 в формуле (79) в нашем случае нулевая. Окончательно получаем: функция

$$\varphi(x, t) = \sqrt{|\lambda|} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Psi_i(x, t) = \sqrt{|\lambda|}\, \frac{\det \hat{M}(x, t)}{\det M(x, t)}, \tag{85}$$

где $N \times N$-матрица $M(x, t)$ имеет вид

$$M_{ij} = \frac{\lambda \bar{\gamma}_i \gamma_j + e^{\mathrm{i}(\bar{\omega}_i - \omega_j)}}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j},$$

$$\hat{M}_{ij}(x, t) = M(x, t) \quad \text{при} \quad i, j = \overline{1, N},$$

$$\hat{M}_{00} = 0, \quad \hat{M}_{i0} = e^{\mathrm{i}\bar{\omega}_i}, \quad \hat{M}_{0i} = \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}, \tag{86}$$

является убывающим при $|x| \to \infty$ решением НУШ

$$\mathrm{i}\varphi_t = \varphi_{xx} + 2|\varphi|^2 \varphi.$$

Пример 2. Аналогично строятся убывающие решения нестационарного уравнения Шредингера (скалярного)

$$\mathrm{i}\varphi_t = \varphi_{xx} - u\varphi \tag{87}$$

с условиями самосогласования вида

$$\frac{1}{2} u_t = -|\varphi|_x^2 \tag{88}$$

или

$$3\ddot{u} - (u_{xxx} - 6uu_x)_x = -8|\varphi|_{xx}^2 \tag{89}$$

[мы положили $\alpha = \beta = \gamma = 0$ в формулах (81), (82)]. Для этих условий решение имеет вид (85), где матрица $M(x, t)$ задается формулой

$$M_{ij} = \frac{\lambda \bar{\gamma}_i \gamma_j}{\bar{\varkappa}_i^q - \varkappa_j^q} + \frac{e^{\mathrm{i}(\bar{\omega}_i - \omega_j)}}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j}, \quad q = 2, 3,$$

* Нам будет в дальнейшем полезно такое простое утверждение: если все числа $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N, \bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_N$ различны, причем $\operatorname{Im} \varkappa_i > 0$, $i = \overline{1, p}$, $\operatorname{Im} \varkappa_j < 0$, $j = \overline{p+1, N}$, то эрмитова матрица $[i(\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j)]^{-1}$ имеет сигнатуру $(p, N - p)$.

матрица $(\hat{M}_{ij})$ задается формулами (86), $\lambda > 0$. Здесь $q = 2$ для уравнения (88); в этом случае величины $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ нужно выбирать лежащими в первом квадранте комплексной плоскости, т. е.

$$\operatorname{Im} \varkappa_i > 0, \quad \operatorname{Re} \varkappa_i > 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Для уравнения (89) $q = 3$; величины $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ лежат в секторах

$$0 < \arg \varkappa_i < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} \arg \varkappa_i < \pi, \quad i = \overline{1, N},$$

причем $\varkappa_i^3 \neq \varkappa_j^3$ при $i \neq j$.

Для условий самосогласования вида

$$\frac{1}{2} \dot{u} = |\varphi|_x^2 \tag{90}$$

или

$$3\ddot{u} - (u_{xxx} - 6uu_x)_x = 8 \mid \varphi \mid_{xx}^2 \tag{91}$$

решение записывается в том же виде, но $\lambda < 0$, и ограничения на величины $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ другие: для уравнения (90) ($q = 2$) должны выполняться неравенства

$$\operatorname{Im} \varkappa_i > 0, \quad \operatorname{Re} \varkappa_i < 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Для уравнения (91) ($q = 3$) ограничения на $\varkappa_i$ такие:

$$\frac{\pi}{3} < \arg \varkappa_i < \frac{2\pi}{3}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Пример 3. Технику построения неубывающих решений для различных уравнений самосогласования объясним сначала на простом примере скалярных уравнений НУШ. Для построения неубывающих (осциллирующих) при $|x| \to \infty$ решений НУШ с притяжением нужно взять функцию $E(k)$ в виде

$$E(k) = k - \frac{b_1^2}{k - k_1}.$$

Эрмитова форма (E_{ij}) вида (80) обязана быть нулевой (иначе мы не получим скалярного НУШ). Другими словами, должны выполняться условия склейки

$$E(\bar{\varkappa}_i) = E(\varkappa_j) \quad \text{при} \quad C_{ij} \neq 0 \tag{92}$$

(мы воспользовались вещественностью коэффициентов b_1, k_1). Поскольку степень рациональной функции $E(k)$ равна двум, получаем: равенство $E(\bar{\varkappa}_i) = E(\varkappa_j)$ при каждом i может выполняться ровно при одном значении j. Поэтому при каждом i имеется ровно одно значение индекса $j = \nu(i)$, такое, что $C_{ij} \neq 0$ [напомним, что матрицы (C_{ij}) с нулевыми строками мы не рассматриваем]. Из эрмитовости матрицы (C_{ij}) вытекает, что ν — инволюция на совокупности индексов $(1, \ldots, N)$. Поскольку соотношение $E(\bar{\varkappa}_i) = E(\varkappa_i)$ не может выполняться при невещественных $\varkappa_i$, инволюция ν не имеет неподвижных точек. Таким образом, N четно и точки $\varkappa_i$ можно занумеровать так, что

$$E(\varkappa_{N-i+1}) = E(\bar{\varkappa}_i), \quad i = \overline{1, N/2}.$$

Матрица (C_{ij}) антидиагональна. Легко видеть, что точки $\varkappa_1, \ldots$ $\ldots, \varkappa_{N/2}$ можно считать лежащими в верхней полуплоскости; тогда точки

$$\varkappa_{N-i+1} = k_1 - \frac{b_1^2}{\bar{\varkappa}_i - k_1}, \qquad i = \overline{1, N/2} \tag{93}$$

будут лежать в нижней полуплоскости. Окончательно получаем следующие формулы для неубывающих решений уравнения НУШ вида

$$i\varphi_t = \varphi_{xx} + 2(|\varphi|^2 - b_1^2)\varphi,$$

$$\varphi(x, t) = b_1 e^{i\eta} \frac{\det \hat{M}(x, t)}{\det M(x, t)} e^{ik_1(x+k_1t)}, \tag{94}$$

где η — произвольная вещественная константа, $N \times N$-матрица $M(x, t)$ имеет вид

$$M_{ij}(\varkappa, t) = C_i \delta_{i, N-j+1} + \frac{e^{i(\bar{\omega}_i - \omega_j)}}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j},$$

где $C_1, \ldots, C_N$ — любые ненулевые комплексные числа, удовлетворяющие соотношению косоэрмитовости

$$C_{N-i+1} = -\bar{C}_i, \qquad i = \overline{1, N/2},$$

величины $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ удовлетворяют условиям (93); окаймление $\hat{M}(x, t)$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\hat{M}_{ij} = M_{ij} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N; \\ &\hat{M}_{00} = 1, \quad \hat{M}_{i0} = e^{i\bar{\omega}_i}, \quad \hat{M}_{0i} = \frac{e^{-i\omega_i}}{k_1 - \varkappa_i}, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Отметим, что при выполнении условий

$$\operatorname{Im}(\varkappa_i + \varkappa_{N-i+1}) = 0, \quad i = \overline{1, N/2}, \tag{96}$$

[точки $\varkappa_i$ и $\varkappa_{N-i+1} = 2k_1 - \varkappa_i$ в силу (93) лежат в этом случае на окружности радиуса b_1 с центром в точке k_1] решение $\varphi(x, t)$ будет квазипериодической функцией от x (см. разд. 2). Если же условия (96) не выполняются ни при одном значении i, то асимптотика решений $\varphi(x, t)$ вида (94) при постоянном t такова:

$$\varphi(x, t) \to b_1 e^{i\eta} \prod_j{}' \left(\frac{k_1 - \bar{\varkappa}_j}{k_1 - \varkappa_j}\right) e^{ik_1(x+k_1t)}, \quad x \to -\infty,$$

где произведение берется по всем j, для которых $\operatorname{Im}(\varkappa_j + \varkappa_{N-j+1}) < 0$;

$$\varphi(x,\ t) \to b_1 e^{i\eta} \prod_j{}'' \left(\frac{k_1-\bar{\varkappa}_j}{k_1-\varkappa_j}\right) e^{ik_1(x+k_1t)}, \quad x \to +\infty,$$

где произведение берется по остальным значениям j. Вывод этих формул мы опускаем. Асимптотика по t вычисляется аналогично, но зависит от соотношений между величинами $\operatorname{Im}\varkappa_j^2$.

Обратимся теперь к рассмотрению НУШ с отталкиванием:

$$i\varphi_t = \varphi_{xx} - 2(|\varphi|^2 - b_1^2)\varphi.$$

Функция $E(k)$ здесь должна иметь вид

$$E(k) = k + \frac{b_1^2}{k-k_1},$$

причем условия склейки (92) по-прежнему должны иметь место. Как и выше, получаем инволюцию ν на множестве индексов $(1, 2, \ldots, N)$, такую, что $C_{ij} \neq 0$ только при $j = \nu(i)$. Однако эта инволюция уже может иметь неподвижные точки. Пусть имеется l неподвижных точек у инволюции ν; тогда $N = l + 2m$. Можно выбрать такую нумерацию точек $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$, что точки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_l$ лежат на окружности радиуса b_1 с центром в k_1, а остальные точки разбиваются на симметричные относительно этой окружности пары, т.е.

$$|\varkappa_i - k_1| = b_1, \quad i = \overline{1,\ l};$$

$$\varkappa_{N-i+l+1} = k_1 + \frac{b_1^2}{\bar{\varkappa}_i - k_1}, \quad i = \overline{l+1,\ l+m}.$$

Матрица (C_{ij}) должна иметь вид

$$(C_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_l \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & & & & d_1 \\ & \ddots & & d_2 & \\ & & \cdot & & \\ & -\bar{d}_2 & & \ddots & \\ -\bar{d}_1 & & & & 0 \end{matrix} \end{array}\right),$$

где числа $C_1, \ldots, C_l$ — чисто мнимые, а числа $d_1, \ldots, d_m$ — любые; все эти величины ненулевые. Точки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_l$ можно считать лежащими в верхней полуплоскости. Заметим, что точки $\varkappa_i$ и $\varkappa_{N-i+l+1}$ при каждом $i > l$ лежат в одной из полуплоскостей. Поэтому из условия знакоопределенности матрицы $(i^{-1}C_{ij})$ получаем: $d_1 = \ldots = d_m = 0$. Таким образом, можно считать, что $m = 0$ и матрица (C_{ij}) диагональна. Окончательно получаем, что решения уравнения

НУШ с отталкиванием записываются в виде (94), где матрица $(M_{ij}(x, t))$ имеет вид

$$M_{ij}(x, t) = \mathrm{i}\widetilde{C}_i \delta_{ij} + \frac{e^{\mathrm{i}(\bar{\omega}_i - \omega_j)}}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j},$$

числа $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ лежат в верхней полуплоскости, причем $|\varkappa_i - k_1| = b_1$, $i = \overline{1, N}$, а числа $\widetilde{C}_1, \ldots, \widetilde{C}_N$ вещественны и положительны; матрица $\hat{M}$ строится по матрице M согласно формулам (95). Простейшее из таких решений ($N = 1$) имеет вид ступеньки:

$$\varphi(x, t) = b_1 \left[1 + \mathrm{i}\beta \frac{1 + \operatorname{th} \tau}{k_1 - \varkappa} \right] e^{\mathrm{i}k_1(x + k_1 t) + \mathrm{i}\eta},$$

где $\varkappa = \alpha + \mathrm{i}\beta \equiv k_1 + b_1 (\cos \xi + \mathrm{i} \sin \xi)$, $\xi \neq 0$, π — произвольный параметр

$$\tau = b_1 \sin \xi \, [(x - x_0) + 2 (k_1 + b_1 \cos \xi) \, t], \quad x_0 = \frac{1}{\beta} \sqrt{2\beta\widetilde{C}}$$

[см. формулы (51) — (54)]. При $N > 1$ построенное решение является нелинейной суперпозицией ступенек.

Векторные модели. *Пример 1.* Построим убывающие при $|x| \to \infty$ решения векторного НУШ с $U(n, 0)$-симметрией. Пусть сначала $n \leqslant N$. Для получения убывающих решений нужно взять функцию $E(k)$ в виде $E(k) = k$. Эрмитова матрица (E_{ij}) будет иметь вид

$$E_{ij} = (\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j) \, C_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Эта матрица должна быть неотрицательно определенной ранга n. Представим ее в виде $E = \Gamma^+\Gamma$, где Γ — прямоугольная матрица ранга n, т.е.

$$E_{ij} = \sum_{q=1}^{n} \bar{\gamma}_{qi} \gamma_{qj}. \tag{97}$$

Получим вид матрицы (C_{ij}):

$$C_{ij} = \frac{\sum_{q=1}^{n} \bar{\gamma}_{qi} \gamma_{qj}}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j}, \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{98}$$

Нетрудно видеть, что если матрица $\Gamma = (\gamma_{ij})$ не имеет нулевых столбцов, то матрица (C_{ij}) вида (98) будет положительно определенной, если все числа $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ лежат в верхней полуплоскости. Если же в матрице Γ есть нулевые столбцы, то в матрице (C_{ij}) будут нулевые столбцы (и строки), что, как мы знаем, отвечает уменьшению числа параметров $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$.

Окончательно получаем: если числа $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ лежат в верхней полуплоскости, $\Gamma = (\gamma_{ij})$ — любая прямоугольная $n \times N$-матрица, то функции $\Phi_1(x, t), \ldots, \Phi_n(x, t)$ вида

$$\Phi_q(x, t) = \frac{\det M^{(q)}(x, t)}{\det M(x, t)}, \quad q = \overline{1, n}, \tag{99}$$

где $N \times N$-матрица $M(x, t) = (M_{ij})$ имеет вид

$$M_{ij}(x, t) = \frac{\sum\limits_{q=1}^{n} \bar{\gamma}_{qi}\gamma_{qj} + e^{i(\bar{\omega}_i - \omega_j)}}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j}, \quad i, j = \overline{1, N}, \tag{100}$$

а $(N+1)\times(N+1)$-матрицы $M^{(q)}(x, t) = (M_{ij}^{(q)}(x, t))$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &M_{ij}^{(q)} = M_{ij} \quad \text{при} \quad i, j = \overline{1, N}; \quad M_{00}^{(q)} = 0; \\ &M_{0j}^{(q)} = \gamma_{qj}; \; M_{j0}^{(q)} = e^{i\bar{\omega}_j}, \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

являются решениями системы уравнений

$$i\dot{\Phi}_k = \Phi_k'' + 2\left(\sum_{q=1}^{n} |\Phi_q|^2\right)\Phi_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{102}$$

Эти решения экспоненциально затухают при $|x| \to \infty$ и фиксированных t в силу результатов разд. 2 [матрица (C_{ij}) здесь невырождена]. Асимптотику по t мы опишем ниже; из этого описания будет видно, что эти решения представляют собой нелинейную суперпозицию N односолитонных решений вида

$$\Phi_{k,q}(x, t) = \Phi_{k,q}^{\pm}(\varkappa_q - \bar{\varkappa}_q)\frac{\exp[i(\alpha_q x + (\alpha_q^2 - \beta_q^2)t)]}{2\operatorname{ch}[\beta_q(x - x_0^{\pm}) + 2\alpha_q\beta_q t]}; \tag{103}$$

$$\varkappa_q = \alpha_q + i\beta_q, \quad q = \overline{1, N},$$

где $\Phi_{k,q}^{\pm}$ — некоторые постоянные векторы (разные для $t \to +\infty$ и для $t \to -\infty$) длины 1. (Напомним, что асимптотический распад на солитоны, а значит, и асимптотики вида (103) имеются лишь в случае общего положения, где величины $\operatorname{Im}\varkappa_j^2$ попарно различны. Общее N-солитонное решение [где величины $\operatorname{Im}\varkappa_j^2$ могут совпадать] будет конгломератом, составленным из солитонов и их связанных состояний.)

Мы построили пока N-солитонные решения уравнения (102) с $N \geqslant n$. При $N < n$ все N-солитонные решения n-компонентного НУШ получаются из N-солитонных решений N-компонентного НУШ [с $U(N, 0)$-симметрией] размножением при помощи действия группы $U(n)$.

Замечание. В силу определения N-солитонного потенциала, данного в разд. 2, N-солитонное решение векторного НУШ задается N полюсами $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$. В частности, односолитонным, независимо от векторной размерности, мы называем решение, определяемое одним полюсом $\varkappa = \varkappa_1$. Оно всегда может быть получено из решения скалярного НУШ с помощью изовращения.

Отметим также, что решения вида (99) — (101), отвечающие при данных $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ разным матрицам $\Gamma = (\gamma_{ij})$ с одной и той же эрмитовой формой (E_{ij}) вида (97), получаются одно из другого действием унитарной группы $U(n)$.

Асимптотику при $|t| \to \infty$ (x фиксировано) можно найти по формулам (61) — (66), используя связь компонент $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ решения векторного НУШ и вычетов $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$ функции $\Psi(x, t, k)$:

$$\Phi_k(x, t) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_{kj}\Psi_j(x, t), \quad k = \overline{1, n}.$$

Пусть, как и ранее, выполнены условия (61) (т. е. N-й солитон неподвижен, а остальные движутся справа налево). Тогда при $t \to -\infty$ из (63) получаем, что асимптотика функций $\Phi_k(x, t)$ такова:

$$\Phi_k(x, t) \to \sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_{kj}C^{jN}(-2i\beta_N)\,e^{-i\beta_N^2 t}}{\sqrt{-2i\beta_N C^{NN}}\,2\operatorname{ch}\beta_N(x - x_0^-)}, \quad k = \overline{1, n},$$
$$\varkappa_N = i\beta_N.$$

Фаза x_0^- имеет вид (64).

При $t \to +\infty$ получим такую асимптотику:

$$\Phi_k(x, t) \to \gamma_{kN}\left(\frac{|Z_N|}{-2i\beta_N C_{NN}}\right)^{1/2} i\beta_N \frac{e^{-i\beta_N^2 t + i\varphi_0^+}}{\operatorname{ch}\beta_N(x - x_0^+)}, \quad k = \overline{1, n},$$

где величины Z_n, x_0^+ и φ_0^+ даются формулами (66). Таким образом, сдвиг фазы $x_0^+ - x_0^-$ вычисляется по формуле (64); фигурирующие в (103) единичные векторы $\Phi_{k,N}^{\pm}$ имеют вид

$$\Phi_{k,N}^- = \sum_{j=1}^{N} \gamma_{kj}C^{jN}(-C^{NN}\cdot 2i\beta_N)^{-1/2}; \quad \Phi_{k,N}^+ = \gamma_{k,N}\left(\frac{|Z_N|}{-2i\beta_N C_{NN}}\right)^{1/2} e^{i\varphi_0^+}.$$

Пример 2. Построим решения двухкомпонентного НУШ с осциллирующей асимптотикой. Разберем подробно лишь двухсолитонные решения.

Случай 1. Обе компоненты осциллируют при $|x| \to \infty$. Функцию $E(k)$ нужно взять в виде

$$E(k) = k + \varepsilon_1 \frac{b_1^2}{k - k_1} + \varepsilon_2 \frac{b_2^2}{k - k_2}.$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$; эти знаки отвечают за тип симметрии векторного НУШ. Эрмитова форма (E_{ij}) вида (80) должна быть нулевой, т. е. должны выполняться условия склейки

$$E(\bar{\varkappa}_i) = E(\varkappa_j) \quad \text{при} \quad C_{ij} \neq 0, \quad i, j = \overline{1, N}. \qquad (104)$$

Если условия склейки (104) на набор параметров $(\varkappa_i)$, (C_{ij}) при данной функции $E(k)$ выполнены, то построенная по этим параметрам согласно формулам (36), (38), (39) функция $\Psi(x, t, k)$ задает решение $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ векторного НУШ вида

$$i\dot{\Phi}_j = \Phi_j'' - 2[\varepsilon_1|\Phi_1|^2 + \varepsilon_2|\Phi_2|^2 - \varepsilon_1 b_1^2 - \varepsilon_2 b_2^2]\Phi_j \tag{105}$$

согласно формулам

$$\Phi_j(x, t) = b_j \Psi(x, t, k_j), \quad j = 1, 2. \tag{106}$$

При $N = 1$ получаем односолитонное решение:

$$\Phi_j(x, t) = b_j \left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa - \bar{\varkappa}}{k_j - \varkappa}\,[1 + \operatorname{th}(\beta(x - x_0) + 2\alpha\beta t)]\right\} e^{ik_j(x + k_j t)}, \quad j = 1, 2, \tag{107}$$

где зависимость между $\varkappa \equiv \varkappa_1 = \alpha + i\beta$ и параметрами k_1, k_2, b_1, b_2 определяется из условия склейки

$$E(\bar{\varkappa}) = E(\varkappa). \tag{108}$$

Знаки ε_1, ε_2 в (105) могут принимать любые значения, кроме $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ [в этом случае соотношение (108) не имеет решений].

В двухсолитонном случае ($N = 2$) имеется два типа матриц (C_{ij}), для которых условия склейки (104) имеют решения. Первый тип — это диагональные матрицы (C_{ij}), т.е. $C_{12} = 0$; второй тип — антидиагональные матрицы, т.е. $C_{11} = C_{22} = 0$. Действительно, если $C_{11} \neq 0$ и $C_{12} \neq 0$, то должны выполняться такие склейки:

$$E(\bar{\varkappa}_1) = E(\varkappa_1), \quad E(\bar{\varkappa}_1) = E(\varkappa_2).$$

Первое из них дает, что число $r = E(\varkappa_1)$ вещественно. Получаем отсюда: числа $\varkappa_1$, $\bar{\varkappa}_1$, $\varkappa_2$ — суть три корня кубического уравнения $E(k) = r$ с вещественными коэффициентами. А это невозможно, так как все три числа $\varkappa_1$, $\bar{\varkappa}_1$, $\varkappa_2$ невещественны (и различны).

Рассмотрим подробнее оба типа двухсолитонных решений.

Тип 1. $C_{12} = 0$, $C_{11} \neq 0$, $C_{22} \neq 0$. Можно считать, что $\operatorname{Im}\varkappa_1 > 0$, $\operatorname{Im}\varkappa_2 > 0$. Условия склейки имеют вид

$$E(\bar{\varkappa}_1) = E(\varkappa_1), \quad E(\bar{\varkappa}_2) = E(\varkappa_2).$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ эти условия неразрешимы. При других знаках $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ возникают ограничения типа неравенств. Оказывается, эти ограничения описываются в терминах расположения точки пересечения с вещественной осью серединного перпендикуляра к отрезку $[\varkappa_1, \varkappa_2]$,

$$a = \frac{|\varkappa_2|^2 - |\varkappa_1|^2}{2(\varkappa_2 + \bar{\varkappa}_2 - \varkappa_1 - \bar{\varkappa}_1)} \tag{109}$$

по отношению к отрезку $[k_1, k_2]$. Так, для $U(0, 2)$-симметрии, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, величина a вида (109) обязана лежать внутри отрезка $[k_1, k_2]$, а для $U(1, 1)$-симметрии (разные знаки ε_1, ε_2) — вне отрезка

$[k_1, k_2]$ (сюда входит также предельный случай, где отрезок $[\varkappa_1, \varkappa_2]$ вертикален).

Асимптотика этих решений при $|x| \to \infty$, t фиксировано, вычисляется, как и в разд. 2. Имеем:

$$\Phi(x, t) \to \begin{pmatrix} b_1 e^{ik_1(x+k_1t)} \\ b_2 e^{ik_2(x+k_2t)} \end{pmatrix}, \quad x \to -\infty; \tag{110}$$

$$\Phi(x, t) \to \begin{pmatrix} b_1 \dfrac{(k_1-\bar\varkappa_1)(k_1-\bar\varkappa_2)}{(k_1-\varkappa_1)(k_1-\varkappa_2)} e^{ik_1(x+k_1t)} \\ b_2 \dfrac{(k_2-\bar\varkappa_1)(k_2-\bar\varkappa_2)}{(k_2-\varkappa_1)(k_2-\varkappa_2)} e^{ik_2(x+k_2t)} \end{pmatrix}, \quad x \to +\infty. \tag{111}$$

Аналогично вычисляются также асимптотики построенных решений при $|t| \to \infty$, x фиксировано. Опуская вычисления, приведем вид асимптотик для случая $\operatorname{Im} \varkappa_1^2 > 0$, $\operatorname{Im} \varkappa_2^2 = 0$. При $t \to -\infty$ имеем

$$\Phi_j(x, t) \to b_j \left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\varkappa_2-\bar\varkappa_2}{k_j-\varkappa_2}[1+\operatorname{th}\beta_2(x-x_0^+)]\right\} e^{ik_j(x+k_jt)}, \qquad j = 1, 2,$$

где

$$\varkappa_2 = i\beta_2, \quad \beta_2 > 0, \quad x_0^- = \frac{1}{\beta_2}\ln\sqrt{-2i\beta_2 C_{22}}.$$

При $t \to +\infty$ асимптотика такая:

$$\Phi_j(x, t) \to b_j \left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\varkappa_2-\bar\varkappa_2}{k_j-\varkappa_2}[1+\operatorname{th}\beta_2(x-x_0^+)]\right\} e^{ik_j(x+k_jt)+i\eta_j},$$
$$j = 1, 2,$$

где

$$x_0^+ - x_0^- = \frac{1}{\beta_2}\ln\left|\frac{\varkappa_2-\bar\varkappa_1}{\varkappa_2-\varkappa_1}\right|, \quad \eta_j = \arg\frac{k_j-\bar\varkappa_1}{k_j-\varkappa_1}, \qquad j = 1, 2.$$

Аналогичный вид имеют асимптотики при $|t| \to \infty$ на прямых $x = -2\alpha_1 t + x_0$. Мы получили нелинейную суперпозицию односолитонных решений вида (107).

Тип 2. $C_{11} = C_{22} = 0$, $C_{12} \neq 0$. Можно считать, что $\operatorname{Im} \varkappa_1 > 0$, $\operatorname{Im} \varkappa_2 < 0$. Условия склейки имеют вид

$$E(\bar\varkappa_1) = E(\varkappa_2). \tag{112}$$

Обсудим разрешимость этих условий (здесь знаки ε_1, ε_2 могут быть произвольными). Пусть

$$b = \frac{\bar\varkappa_2\varkappa_1 - \varkappa_2\bar\varkappa_1}{(\varkappa_1-\bar\varkappa_1)-(\varkappa_2-\bar\varkappa_2)}$$

— точка пересечения отрезка $[\varkappa_1, \varkappa_2]$ с вещественной осью. Положим далее

$$d(k) = b - \frac{(\varkappa_1-\bar\varkappa_1)(\bar\varkappa_2-\varkappa_2)(\varkappa_1-\varkappa_2)(\bar\varkappa_2-\bar\varkappa_1)}{(b-k)(\varkappa_1+\bar\varkappa_2-\bar\varkappa_1-\varkappa_2)^2}.$$

Для разрешимости условий склейки (112) необходимо, чтобы точки k_1, k_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ не лежали на одной окружности, т. е.

$$k_2 \neq d(k_1).$$

При этом расположение знаков ε_1, ε_2 зависит от k_1, k_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ следующим образом:

$$k_1 < k_2 < b \Rightarrow \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1;$$
$$b < k_1 < k_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1;$$
$$k_2 = b \Rightarrow b_1 = 0;$$
$$k_1 = b \Rightarrow b_2 = 0;$$
$$k_1 < b < k_2 < d(k_1) \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1;$$
$$k_1 < b < d(k_1) < k_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1.$$

Асимптотики решений $\Phi_j(x, t)$ при $|x| \to \infty$, t фиксировано, зависят от соотношений между $\operatorname{Im} \varkappa_1$ и $\operatorname{Im} \varkappa_2$. Именно, при $\operatorname{Im}(\varkappa_1 + \varkappa_2) > 0$ асимптотики имеют вид (110), (111). При $\operatorname{Im}(\varkappa_1 + \varkappa_2) = 0$ решение $\Phi(x, t)$ квазипериодично по x. Наконец, при $\operatorname{Im}(\varkappa_1 + \varkappa_2) < 0$ асимптотики при $x \to \pm\infty$ в формулах (110), (111) меняются местами.

Асимптотики при $|t| \to \infty$, x фиксировано, вычисляются совсем просто. При условии $\operatorname{Im} \varkappa_1^2 > 0$, $\operatorname{Im} \varkappa_2^2 = 0$ будем иметь:

при $t \to -\infty$

$$\Phi_j(x, t) \to b_j e^{ik_j(x+k_jt)}, \quad j = 1, 2;$$

при $t \to +\infty$

$$\Phi_j(x, t) \to b_j \frac{(k_j - \bar{\varkappa}_1)(k_j - \bar{\varkappa}_2)}{(k_j - \varkappa_1)(k_j - \varkappa_2)} e^{ik_j(x+k_jt)}, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, для решений этого типа асимптотика чисто экспоненциальная. Эти решения не сводятся к суперпозиции односолитонных, поэтому их естественно назвать двойными солитонами.

Отметим, что при произвольном N решения вида (106) уравнения (105) сводятся к нелинейной суперпозиции солитонов и двойных солитонов. Для $U(2, 0)$-случая добавляются еще тройные солитоны. Тройной солитон возникает для $N = 3$, где матрица (C_{ij}) имеет вид

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & 0 \\ C_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а условия склейки таковы

$$E(\bar{\varkappa}_1) = E(\varkappa_2) = E(\varkappa_3)$$

($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$), причем точки $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ лежат в верхней полуплоскости, а $\varkappa_1$ — в нижней. Доказательство этих утверждений мы опускаем.

Случай 2. Компонента $\Phi_1(x, t)$ осциллирует при $|x| \to \infty$, а компонента $\Phi_2(x, t)$ затухает при $|x| \to \infty$. Функцию $E(k)$ берем в виде

$$E(k) = k + \varepsilon_1 \frac{b_1^2}{k - k_1}.$$

Простейшее решение такого вида — односолитонное — возникает в рамках нашей конструкции при $N = 1$. Оно задается параметрами $\varkappa \equiv \varkappa_1 = \alpha + i\beta$ (пусть $\beta > 0$) и $C_{11} = i\tilde{C}_{11}$, $\tilde{C}_{11} > 0$, и имеет вид (получено в [2, 31])

$$\Phi_1(x, t) = b_1 \left\{1 + \frac{1}{2} \frac{\varkappa - \bar{\varkappa}}{k_1 - \varkappa} [1 + \operatorname{th} \beta (x - x_0 + 2\alpha t)]\right\} e^{ik_1(x + k_1 t)}; \quad (113)$$

$$\Phi_2(x, t) = \frac{(\varkappa - \bar{\varkappa})(|\varkappa - k_1|^2 - \varepsilon_1 b_1^2)^{1/2}}{|\varkappa - k_1|} \frac{\exp i(\alpha x + (\alpha^2 - \beta^2) t)}{2 \operatorname{ch} \beta (x - x_0 + 2\alpha t)}.$$

Здесь

$$x_0 = \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{-2i\beta C_{11}}. \quad (114)$$

Вектор-функции $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ вида (113) является решением уравнения

$$i\dot{\Phi}_j = \Phi_j'' - 2[\varepsilon_1 |\Phi_1|^2 + \varepsilon_2 |\Phi_2|^2 - \varepsilon_1 b_1^2] \Phi_j, \quad j = 1, 2. \quad (115)$$

Здесь знак ε_2 определен при условии $|\varkappa - k_1|^2 \neq \varepsilon_1 b_1^2$ и имеет вид

$$\varepsilon_2 = \operatorname{sgn}[\varepsilon_1 b_1^2 - |\varkappa - k_1|^2].$$

Таким образом, при $\varepsilon_1 = -1$ также и $\varepsilon_2 = -1$, и (113) есть односолитонное решение векторного НУШ с $U(2, 0)$-симметрией. При

$$\varepsilon_1 = 1, \quad |\varkappa - k_1| > b_1$$

имеем $\varepsilon_2 = -1$; получаем решение НУШ с $U(1, 1)$-симметрией. При

$$\varepsilon_1 = 1, \quad |\varkappa - k_1| < b_1$$

получаем решение НУШ с $U(0, 2)$-симметрией.

При выполнении соотношения

$$|\varkappa - k_1|^2 = \varepsilon_1 b_1^2 \Leftrightarrow E(\bar{\varkappa}) = E(\varkappa)$$

(это возможно только при $\varepsilon_1 = 1$) компонента Φ_2 обращается в тождественный нуль и решение (113) сводится к односолитонному решению (114) НУШ с отталкиванием.

Покажем, что для $\varepsilon_1 = 1$ многосолитонные решения сводятся к нелинейной суперпозиции солитонов. Мы должны иметь: эрмитова форма (E_{ij}) вида (80) должна иметь ранг 1. Предположим сначала, что нет никаких условий склейки на точки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$, т.е.

$$E(\bar{\varkappa}_i) \neq E(\varkappa_j), \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Тогда матрица (C_{ij}), задающая решение, должна иметь вид

$$C_{ij} = \lambda \frac{\bar{\gamma}_i \gamma_j}{E(\bar{\varkappa}_i) - E(\varkappa_j)}, \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{116}$$

Здесь $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ — произвольные комплексные константы, причем

$$\sum_i^N |\gamma_i|^2 = 1, \tag{117}$$

λ — вещественное число. Предполагая, что $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \neq 0$ (ср. выше пример 1), получаем невырожденность матрицы (C_{ij}). Значит, можно считать, что все точки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ лежат в верхней полуплоскости. Из условия неотрицательной определенности матрицы $(i^{-1}C_{ij})$ вытекает, что точки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ и число λ обязаны удовлетворять одному из следующих условий:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \lambda > 0, \quad \operatorname{Im} E(\varkappa_i) > 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ \qquad\qquad \Updownarrow \\ \qquad\quad |\varkappa_i - k_1| > b_1; \end{array}\right\} \tag{118}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \lambda < 0, \quad \operatorname{Im} E(\varkappa_i) < 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ \qquad\qquad \Updownarrow \\ \qquad\quad |\varkappa_i - k_1| < b_1. \end{array}\right\} \tag{119}$$

Первая возможность отвечает U (1, 1)-НУШ, вторая U (0, 2)-НУШ. Таким образом, определяя по точкам $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$, удовлетворяющим (118) или (119) (и лежащим в верхней полуплоскости) и матрице (C_{ij}) вида (116) [в этих формулах $E(k) = k + b_1^2 (k - k_1)^{-1}$] формулами (36), (38, (39) функцию $\Psi(x, t, k)$, мы получаем решения векторного НУШ с U (1, 1) или U (0, 2) соответственно, полагая

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1(x, t) = b_1 \Psi(x, t, k_1); \\ \Phi_2(x, t) = \sqrt{|\lambda|} \sum\limits_{i=1}^N \gamma_i \operatorname*{res}\limits_{\varkappa_i} \Psi(x, t, k). \end{array}\right\} \tag{120}$$

Мы сейчас увидим, что эти решения действительно описывают нелинейную суперпозицию односолитонных решений вида (113). Но сначала разберемся с условиями склейки. Что если при некоторых i, j выполнено условие склейки $E(\bar{\varkappa}_i) = E(\varkappa_j)$? В этом случае i-я и j-я строки (и столбцы) матрицы (E_{ij}) обязаны быть нулевыми. Поэтому у матрицы (C_{ij}) в i-й строке может быть отличен от нуля лишь элемент C_{ij}. Но числа $\varkappa_i$, $\varkappa_j$, удовлетворяющие условию склейки, лежат в одной полуплоскости. Поэтому знакоопределенность соответствующего блока матрицы (C_{ij}) можно сохранить, лишь если $j = i$, т.е. условие склейки имеет вид

$$E(\bar{\varkappa}_i) = E(\varkappa_i) \Longleftrightarrow |\varkappa_i - k_1| = b_1.$$

Таким образом, общий вид матрицы (C_{ij}), задающей решение описанного типа двухкомпонентного НУШ с $U(1, 1)$- или $U(0, 2)$-симметрией, таков:

$$C_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\lambda \bar{\gamma}_i \gamma_j}{E(\bar{\varkappa}_i) - E(\varkappa_j)} & \text{при} \quad \lambda(|\varkappa_i - k_1| - b_1) > 0; \\ C_{ii}\delta_{ij}, \quad |\varkappa_i - k_1| = b_1. \end{cases}$$

Напомним, что при $\lambda > 0$ получаем $U(1, 1)$-симметрию, при $\lambda < 0$ — $U(0, 2)$-симметрию. Формулы (120) для решения при этом остаются в силе. Константы $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ удовлетворяют (117).

Перейдем к вычислению асимптотик. Здесь все точки $\{\varkappa_i\}$ лежат в верхней полуплоскости и матрица (C_{ij}) невырожденная. Поэтому можно использовать асимптотические формулы разд. 2. Пусть t фиксировано. Тогда при $x \to -\infty$ имеем

$$\Phi(x, t) \to \begin{pmatrix} b_1 e^{ik_1(x+k_1 t)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $x \to +\infty$ имеем

$$\Phi(x, t) \to \begin{pmatrix} b_1 \prod\limits_i \dfrac{k_1 - \bar{\varkappa}_i}{k_1 - \varkappa_i} e^{ik_1(x+k_1 t)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Асимптотики при $|t| \to \infty$ и фиксированном x вычислим, как и выше, в предположении $\operatorname{Im} \varkappa_i^2 > 0$ при $i = \overline{1, N-1}$, $\operatorname{Im} \varkappa_N^2 = 0$. Используя формулы разд. 2, при $t \to -\infty$ будем иметь:

$$\Phi_1(x, t) \to b_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\bar{\varkappa}_N - \varkappa_N}{k_1 - \varkappa_N} [1 + \operatorname{th} \beta_N (x - x_0^-)] \right\} e^{ik_1(x+k_1 t)};$$

$$\Phi_2(x, t) \to \frac{-i\beta_N}{|\varkappa_N - k_1|} (||\varkappa_N - k_1|^2 - b_1^2|)^{1/2} \frac{e^{i(-\beta_N^2 t + \varphi_2^-)}}{\operatorname{ch} \beta_N (x - x_0^-)}.$$

Здесь x_0^- имеет вид (64),

$$\varphi_2^- = \arg \gamma_N + \arg \prod_{j \neq N} \frac{E_N - \bar{E}_j}{E_N - E_j},$$

где мы ввели обозначение

$$E_j = E(\varkappa_j) = \varkappa_j + \frac{b_1^2}{\varkappa_j - k_1}.$$

При $t \to +\infty$ асимптотика такая:

$$\Phi_1(x, t) \to b_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\bar{\varkappa}_N - \varkappa_N}{k_1 - \varkappa_N} [1 + \operatorname{th} \beta_N (x - x_0^+)] \right\} e^{ik_1(x+k_1 t) + i\varphi_1^+};$$

$$\Phi_2(x, t) \to \frac{-i\beta_N}{|\varkappa_N - k_1|} (||\varkappa_N - k_1|^2 - b_1^2|)^{1/2} \frac{e^{i(-\beta_N^2 t + \varphi_2^+)}}{\operatorname{ch} \beta_N (x - x_0^+)}.$$

Фаза x_0^+ имеет вид (66), а

$$\varphi_1^+ = \arg \prod_{j\neq N} \frac{k_1 - \bar{\varkappa}_j}{k_1 - \varkappa_j},$$

$$\varphi_2^+ = \arg \gamma_N + \arg \prod_{j\neq N} \frac{\varkappa_N - \bar{\varkappa}_j}{\varkappa_N - \varkappa_j}.$$

Мы получили односолитонную асимптотику. Несложное вычисление показывает, что взаимодействие между солитонами сводится к парному. Это вытекает из следующих формул для сдвигов фаз N-го солитона:

$$\Delta x_0 = x_0^+ - x_0^- = \sum_{j\neq N} \frac{1}{\beta_N} \ln \left\{ \left| \frac{E_N - \bar{E}_j}{E_N - E_j} \right| \left| \frac{\varkappa_N - \bar{\varkappa}_j}{\varkappa_N - \varkappa_j} \right| \right\};$$

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^- = \sum_{j\neq N} \arg \frac{k_1 - \bar{\varkappa}_j}{k_1 - \varkappa_j};$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_2^+ - \varphi_2^- = \sum_{j\neq N} \arg \frac{(\varkappa_N - \bar{\varkappa}_j)(E_N - \bar{E}_j)}{(\varkappa_N - \varkappa_j)(E_N - E_j)}.$$

В заключение отметим, что в случае $U(2,\ 0)$-симметрии, где $\varepsilon_1 = -1$, многосолитонные решения являются нелинейной суперпозицией односолитонных, а также двойных солитонов. Простейший двойной солитон отвечает случаю $N = 2$, точки $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ удовлетворяют условию склейки

$$\bar{\varkappa}_1 - \frac{b_1^2}{\bar{\varkappa}_1 - k_1} = \varkappa_2 - \frac{b_1^2}{\varkappa_2 - k_1},$$

а матрица (C_{ij}) имеет вид

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Свойства таких решений мы разбирать не будем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы изложили современное состояние проблем, возникающих при изучении класса моделей, которые мы назвали моделями неидеального бозе-газа. С точки зрения теории конденсированного состояния важным является вопрос о существовании в той или иной упорядоченной системе (кристаллах, магнетиках и т.п.) локализованных возбуждений солитонного (или солитоноподобного) типа. Для понимания статистических свойств таких возбуждений (если они существуют) необходимо решить задачу об устойчивости отдельных солитоноподобных объектов, а также об их взаимодействии друг с другом. В рамках рассмотренных нами выше моделей, связанных с нестационарным уравнением Шредингера, часть этих проблем была решена конструктивным путем. А именно: развитый в разд. 2 общий метод мы применили для получения и исследования асимптотик многосолитонных решений некоторых интегрируемых версий НУШ с самосогласованными потенциалами. Такие многосолитонные решения достаточно хорошо описывают разреженный газ солитонов. Причем в зависимости от результата взаимодействия можно говорить об идеальном, слабонеидеальном и т.д. газе.

Обсудим вначале полученные нами в разд. 3 формулы с точки зрения устойчивости. Известно, что в рамках компактных версий ВНУШ с притяжением $U(p, 0)$ решения типа плоских волн (конденсатные), а также полученные из них локальной модификацией — неустойчивы (неустойчивость типа гравитационной). Конденсатные решения в рамках компактных версий ВНУШ с отталкиванием $U(0, q)$ устойчивы [2, 26]. Устойчивость локализованных решений с нулевыми граничными условиями для $U(p, 0)$ и конденсатными для $U(0, q)$ строго установлена лишь для некоторых простейших (односолитонных) решений [26, 27]. Вопрос об устойчивости произвольных N-солитонных решений $U(p, 0)$ НУШ пока остается открытым, и ответ, видимо, зависит как от типа уравнения, так и решения. Во всяком случае, односолитонные капельные решения ВНУШ $U(p, 0)$, видимо, устойчивы, на что указывают качественные рассуждения, основанные на МОЗ (см. также обобщение Q-теоремы в [27]).

Для моделей с некомпактной симметрией $U(p, q)$ устойчивость конденсата обеспечивается условием [2]:

$$(\Psi_c, \Psi_c) = \sum_{j=1}^{p} |\Psi_c^{(j)}|^2 - \sum_{j=1}^{q} |\Psi_c^{(j)}|^2 > 0.$$

Только при выполнении этого условия имеют смысл многосолитонные формулы в конденсатной постановке задачи. Устойчивость двухсолитонных решений (в нашем определении или односолитонных в наивном) в рамках простейшего некомпактного $U(1, 1)$-НУШ исследовалась в ЛВТА ОИЯИ с помощью вычислительного эксперимента. Результаты говорят в пользу устойчивости таких солитонов. Полученные выше многосолитонные асимптотики позволяют утверждать, что в рамках компактных моделей с произвольной сигнатурой ($U(p, 0)$ или $U(0, q)$, в первом случае см. также [28]), а также для $U(1, 1)$-НУШ взаимодействие между солитонами сводится к парному упругому взаимодействию, приводящему в результате к изменению фаз солитонов в конфигурационном и цветовом пространствах. Возможен также обмен цветом, что было впервые установлено в [1].

Все это означает, что в зависимости от физической постановки задачи (какие величины следует принимать во внимание, какие корреляционные функции вычислять и т.д.) в рамках одной и той же модели газ солитоноподобных возбуждений можно считать как идеальным (плотность числа солитонов значительно меньше единицы), так и неидеальным, если интересоваться, например, его цветом. В тех физических ситуациях, когда газ солитонов с достаточной точностью можно считать идеальным, разумно использовать феноменологический подход [13] для вычисления, например, динамических структурных факторов рассеяния [14] в векторных моделях, причем при $N \geqslant 2$ с любой сигнатурой метрики «цветового» пространства. В этом смысле предлагаемый нами метод исследования векторных уравнений и их решений можно рассматривать как инструмент для дальнейшего изучения соответствующих моделей, например физики конденсированного состояния (см. разд. 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Манаков С. В.**//ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 505—516.
2. **Маханьков В. Г., Пашаев О. К.**//ТМФ. 1982. Т. 53. С. 55—67.
3. **Yajima N., Oikawa M.**//Progr. Theoret Phys. 1976. Vol. 56. P. 1719—1739.
4. **Nishikawa K. e.a.**//Phys. Rev. Lett. 1974. Vol. 33. P. 148—151.
5. **Makhankov V. G.**//Phys. Lett. 1974. Vol. 50A. P. 42—44; Preprint JINR E5-8389, Dubna, 1974.
6. **Kundu A., Makhankov V., Pashaev O.**//Physica. 1984. Vol. 110. P. 375—380.
7. **Давыдов А. С.** Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984.
8. **Jongh L. J., Miedema A. R.**//Adv. in Physics. 1974. Vol. 23. P. 1—260.
9. **Овчинников А. А. и др.**//УФН. 1972. Т. 108. С. 81—112.
10. **Ito M.**//Progr. Theoret. Phys. 1981. Vol. 65. P. 1773—1786; **Золотовицкий А. Б., Калашников В. П.**//ТМФ. 1981. Т. 49. С. 273—282.
11. **Shiba H.**//Progr. Theoret. Phys. 1972. Vol. 48. P. 2171—2186; **Bari R. A.**// Phys. Rev. 1973. Vol. B7. P. 4318—4320; **Egri I.**//Solid State. Comm. 1975. Vol. 17. P. 441—444.
12. **Калашников В. П., Кожевников Н. В.**//ТМФ. 1978. Т. 37. С. 402—415; **Zolotovitski A. B., Kalashnikov V. P.**//Phys. Lett. 1982. Vol. 88A. P. 315—317.
13. **Krumhansl J., Schrieffer J.**//Phys. Rev. 1975. Vol. B11. P. 3535—3545.
14. **Makhankov V. G., Fedyanin V. K.**//Phys. Rep. 1984. Vol. 104. P. 1—86.
15. **Дегтярев Л. М. и др.**//ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 533—542.
16. **Захаров В. Е.**//ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745—1759.
17. **Makhankov V., Pashaev O., Kundu A.**//Phys. Scripta. 1983. Vol. 28. P. 229—234.
18. **Gorshkov K. A., Ostrovskii L. A.**//Physica. 1983. Vol. 3D. P. 428—438.
19. **Karpman V. I.**//Phys. Scripta. 1979. Vol. 20. P. 462—478.
20. **Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С.** Нелинейные волны намагниченности. Магнитные солитоны. Киев: Наукова думка, 1983.
21. **Makhankov V. G.**//Phys. Repts. 1978. Vol. 35C. P. 1—128; CPC, 1980. Vol. 21. P. 1—49; Particles and Nuclei. 1983. Vol. 14. P. 123—180.
22. **Чередник И. В.**//Функциональный анализ и его приложение. 1978. Т. 12. С. 45—52.
23. **Кричевер И. М.**//Функциональный анализ и его приложение. 1986. Т. 20. С. 42—54.
24. **Елеонский В. М., Кричевер И. М., Кулагин Н. Е.**//ДАН. 1986. Т. 287. С. 606—610.
25. **Scott A., Chu F., Mclaughlin D.**//Proc. IEEE. 1973. Vol. 61. P. 1443—1483.
26. **Makhankov M. G., Pashaev O. K., Sergeenkov S.**//Phys. Lett. 1983. Vol. 98A. P. 227—232; Phys. Scripta. 1984. Vol. 29. P. 521—525.
27. **Barashenkov I. V.**//Acta Phys. Austr. 1983. Vol. 55. P. 155—165.
28. **Кулиш П. П.** Труды конференции по ФВЭ и КТП. Протвино, 1980. С. 463—470.
29. **Physica** Scripta. 1979. Vol. 20. Special Soliton Issue.
30. **Теория** солитонов. Метод обратной задачи/Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1979.
31. **Makhankov V. G.**//Phys. Lett. 1981. Vol. 81A. P. 156—163.