

УДК 539.16.01:539.162

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТЬ ОСНОВНОГО ЗАКОНА РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА

П. М. Гопыч, И. И. Залюбовский

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького, Харьков

Обсуждаются основные теоретические подходы к объяснению наблюдаемой экспоненциальности и гипотетической неэкспоненциальности закона распада, его значение и связь с фундаментальными проблемами современной физики. Приведены результаты экспериментов, относящихся к исследованию вида закона распада.

Basic theoretical predictions of observed exponentiality and hypothetic non-exponentiality of radioactive decay law, significance and connection with fundamental problems of contemporary physics are discussed. Results of experimental decay law investigations are given.

ВВЕДЕНИЕ

Эмпирически экспоненциальный закон радиоактивного распада установлен на основе экспериментальных данных еще в 1899 г. Элстером и Гейтелем, спустя всего три года после открытия в 1896 г. естественной радиоактивности урана. В 1900 г. Резерфорд ввел понятие о периоде полураспада $T_{1/2}$ — интервале времени, в течение которого число радиоактивных ядер источника уменьшается в 2 раза. В 1905 г. Швейдлер установил статистический характер закона распада, показав, что вероятность распада ядер от времени их возникновения не зависит, а момент распада каждого индивидуального ядра можно предсказать только статистически. Справедливость этой теории Швейдлера экспериментально подтвердил Кольрауш в 1906 г. В последующих экспериментах с высокой точностью было показано, что постоянная распада λ (или время жизни ядра $T = 1/\lambda$) от различных действующих на ядро внешних факторов не зависит (не зависит от температуры, давления, химического и термодинамического состояния вещества источника и т. д.). Поэтому обычно считают, что экспоненциальный закон распада был окончательно установлен еще на заре развития ядерной физики.

Правда, в 1947 г. было экспериментально обнаружено, что для ядер, распадающихся путем электронного захвата или внутренней электронной конверсии, химическое окружение атома влияет на вероятность распада его ядер. Сейчас известно, что изменение химического окружения может привести к изменению λ в ту или другую сторону приблизительно на 0,01 %, хотя известен случай (^{90m}Nb)

в металле — ^{90m}Nb во фторидном комплексе), когда $\Delta\lambda/\lambda = (3,6 \pm 0,4) \%$. Обнаружена также слабая зависимость λ от значения испытываемого радиоактивным источником внешнего давления (и предложено использовать этот эффект для измерения давлений порядка сотен килобар и более), обнаружены эффекты влияния низких температур, сверхпроводимости, электрического поля диэлектрического конденсатора на вероятность распада λ . Во всех этих случаях $\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-4}$ [1]. Экспериментально не обнаружены, но предсказаны возможная зависимость λ от значения гравитационного потенциала в месте ее измерения [2] и возможное изменение λ в поле сильной электромагнитной волны [3]. Однако ни в одном из названных выше случаев экспоненциальность закона распада под сомнение не ставится.

Но начиная с 1950-х годов в рамках теоретических подходов, о которых подробнее речь будет идти ниже, было показано, что закон распада является неэкспоненциальным, а экспоненциальность — это лишь приближение, справедливое в широком, но ограниченном диапазоне времени наблюдения. В соответствии с другими, более поздними, теоретическими предсказаниями закон распада может быть только строго экспоненциальным. Полной ясности в квантовой теории распада пока нет, поэтому важен эксперимент. В экспериментальном же отношении вопрос остается изученным пока недостаточно. Ему посвящено всего около двух десятков работ. Это может показаться удивительным, поскольку хорошо известен интерес, который вызывали и вызывают эксперименты по поиску пределов применимости фундаментальных физических законов. Ставятся все новые эксперименты для более точного определения скорости света в вакууме, ищут массу покоя нейтрино, электрический дипольный момент нейтрона, предел стабильности электрона, ведут поиск зависимости гравитационной постоянной от расстояния, тахионов, гравитонов, монополей Дирака, распада свободных протонов и т. д. Однако тщательное экспериментальное исследование вида закона распада серьезного внимания экспериментаторов, как правило, не привлекает. Возможно, одна из причин этого в том, что экспоненциальность закона распада не относят обычно к проявлениям фундаментальных физических законов, так как ее не связывали с фундаментальными симметриями материального мира. Хотя в то же время все хорошо знают всеобъемлющую универсальность этого закона, знают, что подавляющее большинство микроскопических квантовых объектов — атомов, ядер, элементарных частиц — нестабильны и испытывают самопроизвольный (спонтанный) распад, описываемый экспоненциальным законом распада.

В настоящей работе мы обсудим основные подходы к теоретическому объяснению экспоненциальности и гипотетических эффектов неэкспоненциальности закона распада, его значение и связь с фундаментальными проблемами современной макро- и микрофизики, старые и новые эксперименты по исследованию вида закона распада

и покажем, что возможности экспериментальных исследований вида закона распада все еще не исчерпаны.

Предварительное обсуждение этих вопросов содержится в [4].

1. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПАДА И ТЕОРЕМА КРЫЛОВА—ФОКА

Закон радиоактивного распада имеет вид

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (1)$$

или в дифференциальной форме

$$dN(t) = -\lambda N(t) dt, \quad (2)$$

где N_0 — число распадающихся ядерных состояний в исходный момент времени $t = 0$; $N(t)$ — число этих состояний в момент времени $t > 0$; λ — вероятность распада в единицу времени, которая называется постоянной распада. Предполагается, что постоянная распада λ не зависит от времени t . Для обозначения скорости распада используют также значение времени жизни T распадающего состояния и период его полураспада $T_{1/2}$:

$$T = 1/\lambda; \quad T_{1/2} = T \ln 2.$$

В равенстве (1) под $N(t)$ понимают не результат единичного измерения, а среднее по большому числу опытов. Поэтому отношение

$$L(t) = N(t)/N_0 \quad (3)$$

имеет смысл вероятности того, что некоторое конкретное ядро в момент времени $t > 0$ все еще не распалось и находится в исходном (как и при $t = 0$) состоянии. Для экспоненциального закона распада

$$L(t) = \exp(-\lambda t). \quad (4)$$

Часто именно $L(t)$ — зависимость вероятности распада от времени — называют законом распада.

Экспоненциальность закона распада следует из общего решения квантово-механической задачи о распаде квазистационарного состояния, которая была впервые решена Н. С. Крыловым и В. А. Фоком в 1947 г. [5]. Основные положения этой теории хорошо известны и входят в соответствующую учебную литературу [6].

В момент времени t волновая функция $\psi(x, t)$ квантовой системы, находящейся в квазистационарном состоянии со средней энергией E_0 и собственной функцией оператора энергии $\psi_E(x)$ (x — совокупность всех переменных, исключая время t), имеет вид

$$\psi(x, t) = \int e^{-iEt/\hbar} a(E) \psi_E(x) dE, \quad (5)$$

где $a(E)$ — коэффициенты разложения произвольной волновой функции по собственным функциям оператора энергии в области непре-

рывного спектра. Обозначим проекцию вектора $\psi(x, t)$ на вектор исходного состояния $\psi(x, t = 0)$:

$$p(t) = \int \psi(x, t) \psi^*(x, t = 0) dx. \quad (6)$$

Тогда вероятность того, что в момент времени t система все еще находится в исходном состоянии, равна

$$L(t) = |p(t)|^2. \quad (7)$$

Учитывая явный вид функции $\psi(x, t)$ и используя равенства (6), (7), найдем

$$L(t) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt/\hbar} |a(E)|^2 dE \right|^2, \quad (8)$$

где $|a(E)|^2$ — плотность вероятности того, что квантовая система находится в состоянии с энергией в интервале значений от E до $E + dE$. Соотношение (8) определяет содержание теоремы Крылова — Фока и имеет важное значение в теории распада, поскольку дает связь закона распада $L(t)$ и плотности распределения энергии в квазистационарном состоянии $|a(E)|^2$. Очевидным условием распада является требование

$$L(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (9)$$

из которого с учетом (5) — (8) на основании теоремы Фурье и теоремы о характеристических функциях следует, что необходимым и достаточным условием распада является абсолютная интегрируемость плотности вероятности $|a(E)|^2$. Из весьма широкого класса функций, удовлетворяющих этому условию, возьмем симметричный нормированный лоренциан

$$|a(E)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (10)$$

интеграл по энергии от которого в пределах $-\infty, +\infty$ равен единице. Подставляя явный вид функции (10) в формулу (8) и выполняя интегрирование в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получаем экспоненциальный закон распада

$$L(t) = e^{-\lambda|t|/\hbar}, \quad (11)$$

где $\lambda = \Gamma/\hbar$ и $E_0 \gg \Gamma$ (условие квазистационарности). В равенствах (10), (11) Γ — собственная или естественная ширина квазистационарного состояния; E_0 — его средняя энергия. Из приведенного рассмотрения получается, что экспоненциальность закона распада (11) — это следствие выбора явного вида функции распределения энергии в квазистационарном состоянии в виде лоренциана (10).

В той же работе [5] Н. С. Крылов и В. А. Фок показали, что для практически очень важного частного случая задачи о вылете части-

цы из потенциальной ямы через потенциальный барьер функция $|a(E)|^2$ всегда является мероморфной, т.е. не имеет других особенностей, кроме полюсов. Если дополнительно предположить, что полюс функции $|a(E)|^2$ является простым, то тогда с необходимостью следует, что $|a(E)|^2$ — лоренциан и закон распада экспоненциален. Однако это предположение является очень сильным и строго никак не обосновывается. Правильность сделанного выше выбора явного вида функции $|a(E)|^2$ в виде лоренциана (10) следует не из теории, а из того экспериментального факта, что наблюдаемый закон распада изолированных квазистационарных состояний всегда экспоненциальный, а форма изолированных резонансов, наблюдаемых в ядерных реакциях, описывается формулой Брейта — Вигнера, которая с точностью до обозначений совпадает с лоренцианом (10).

2. ВИД ЗАКОНА РАСПАДА С УЧЕТОМ ПРИНЦИПА СПЕКТРАЛЬНОСТИ

В предыдущем разделе при определении вида закона распада интегрирование по энергии в формулах (5), (8) выполнялось в пределах $-\infty, +\infty$. В то же время энергетический спектр реальных квантово-механических систем полуфинитный и всегда ограничен снизу, например $0 \leq E < +\infty$ (принцип спектральности). Следовательно, формулы предыдущего раздела, содержащие интегралы по энергии, требуют уточнения: в них надо учесть, что интегрирование выполняется только в области сплошного положительного спектра энергий в пределах $0, +\infty$. Это приводит к уточнению вида закона распада, которое впервые выполнил Л. А. Халфин [7].

Вместо (8) запишем

$$L(t) = \left| \int e^{-iEt/\hbar} w(E) dE \right|^2, \quad (12)$$

где

$$w(E) = \begin{cases} |a(E)|^2 & \text{при } E > 0; \\ 0 & \text{при } E \leq 0, \end{cases} \quad (13)$$

т. е. функция распределения энергии в квазистационарном состоянии теперь предполагается полуфинитной. Учитывая это, можно сформулировать теорему XII Пэли и Винера [8] применительно к теории распада и на ее основе показать [7], что из полуограниченности спектра оператора полной энергии следует, что $L(t)$ при $t \rightarrow \infty$ убывает медленнее, чем экспонента. Позже этот результат был подтвержден в [9] без использования теоремы XII Пэли и Винера. Отметим, что следующий из принципа спектральности вывод о том, что при всех $t \in [0, \infty)$ экспоненциального закона распада быть не может, не зависит от конкретной природы распадающегося состояния и непосредственно следует из теоремы Крылова — Фока (8), (12) при учете ограниченности снизу энергетического спектра начального состояния.

Из (12), (13) для проекции $p(t)$ вектора состояния системы в момент времени t на вектор начального состояния (при $t = 0$) найдем [7]

$$p(t) = \exp(-iEt/\hbar - \Gamma t/2\hbar) - \frac{i}{2\pi t} \frac{\Gamma t}{(E_0^2 + \Gamma^2/4)}. \quad (14)$$

Здесь, как и ранее, E_0 — средняя энергия, Γ — естественная ширина квазистационарного состояния. Исходя из (14), можно оценить [7] область времен t , где экспоненциальный закон распада выполняется достаточно точно:

$$\frac{t}{T} e^{-t/2T} \gg \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{E_0} \right)^2, \quad (15)$$

где $T = \hbar/\Gamma$ — время жизни квазистационарного состояния ($\Gamma \ll E_0$). Из этого неравенства следует, что экспоненциальный закон распада выполняется в ограниченной области времен t , ширина которой определяется отношением $(\Gamma/E_0)^2$. Отклонения от экспоненциальности возможны либо при очень больших ($t/T \rightarrow \infty$), либо при очень малых ($t/T \rightarrow 0$) временах. Наличие эффекта неэкспоненциальности приводит к тому, что ансамбль распадающихся ядер «помнит» свое начальное состояние, поэтому не все моменты времени t равноправны и при экспериментальном исследовании распада с учетом возможной его неэкспоненциальности все исходные состояния в источнике должны быть одного возраста.

Из формулы (14) следует, что при $t \rightarrow \infty$ неэкспоненциальный член в законе распада $L(t) = |p(t)|^2$ имеет вид малой аддитивной к основной экспоненте поправки порядка t^{-2} . Если $w(E)$ отличается от формулы (13) множителем \sqrt{E} , то аддитивный неэкспоненциальный член пропорционален $t^{-3/2}$. В других случаях поправка может быть $\sim t^{-m}$ с $m > 1/2$ [10].

Представляет интерес оценить значения t_{\min} , t_{\max} , которые в соответствии с неравенством (15) ограничивают область времен t , при которых распад можно считать экспоненциальным:

$$t_{\min} \ll t \ll t_{\max}. \quad (16)$$

Числовые значения t_{\min} , t_{\max} приведены в табл. 1 для квазистационарных состояний в широком диапазоне их времен жизни T .

Таблица 1. Оценка границ t_{\min} , t_{\max} области экспоненциальности закона распада по результатам работы [7] (неравенство (15))

T	Γ , эВ	$(\Gamma/E_0)^2$	t_{\min}/T	t_{\max}/T
10 ч	$1,8 \cdot 10^{-20}$	$1,6 \cdot 10^{-55}$	$8,0 \cdot 10^{-56}$	265
1 с	$6,6 \cdot 10^{-16}$	$2,2 \cdot 10^{-46}$	$1,1 \cdot 10^{-46}$	221
10^{-16} с	$6,6 \cdot 10^0$	$2,2 \cdot 10^{-14}$	$1,1 \cdot 10^{-14}$	72
10^{-22} с	$6,6 \cdot 10^6$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	14

Данные табл. 1 получены в предположении, что ширина уровня Γ связана с его временем жизни T равенством $T = \hbar/\Gamma$. Средняя энергия квазистационарного состояния принималась равной $E_0 = V_0 - \varepsilon$, где $V_0 = 53$ МэВ — глубина центральной области вудсаксоновского ядерного потенциала [11]; $\varepsilon = 8$ МэВ — средняя энергия связи нуклона в ядре. Таким образом, в качестве оценки E_0 принималась средняя энергия основного состояния ядра, отсчитанная от дна его потенциальной ямы *: $E_0 = 45$ МэВ. Как видно из таблицы, t_{\min} , t_{\max} существенно разнятся для квазистационарных состояний с различными временами жизни T , причем ширина временного интервала, в котором распад можно считать экспоненциальным, с уменьшением T сужается. Обращает на себя внимание малость оцененной нижней границы области экспоненциальности t_{\min} , которая даже для состояний с временами жизни T порядка характерного ядерного времени $\tau_{\text{я}} \sim 10^{-22}$ с меньше $\tau_{\text{я}}$: $t_{\min} < \tau_{\text{я}}$. Отсюда получается, что процесс образования состояния и неэкспоненциальность его распада при малых t во времени разделить нельзя. Оцененное значение верхней временной границы t_{\max} области экспоненциальности распада также зависит от времени жизни квазистационарного состояния и для долгоживущих состояний особенно велико. Оценки t_{\min} , t_{\max} из табл. 1 получены с помощью неравенства (15), когда в нем знак неравенства заменен знаком равенства. Следовательно, приведенные в таблице оценки нижней границы t_{\min} временного интервала, в котором распад можно считать экспоненциальным, занижены, а верхней границы t_{\max} — завышены. Поэтому не исключено, что эффекты неэкспоненциальности могут быть существенны при малых временах $t > t_{\min}$ и больших временах $t < t_{\max}$.

3. ЗАКОН РАСПАДА В ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ И РЕАКЦИЙ

Если эксперимент по рассеянию проводится при энергии, при которой сечение реакции имеет острый резонанс, то существует значительная задержка выходящего потока квантов или частиц относительно падающего. Если эта задержка велика, то выход продуктов распада можно описать, предполагая, что он не зависит от способа приготовления исходного состояния. Поэтому явление распада рассматривают обычно в рамках теории связанных состояний. Однако все распадающиеся состояния представляют собой острые резонансы и, учитывая это, во многих случаях считают их рассмотрение в рам-

* Поскольку оценки табл. 1 имеют иллюстративный характер, то правила для выбора численных значений E_0 (заметьно влияющих на значения t_{\min} , t_{\max}) обсуждать не будем. Отметим только, что в литературе по этому вопросу нет единого мнения. Сделанный здесь выбор числового значения E_0 тоже нельзя считать вполне приемлемым, так как считается, что понятие глубины ядерного потенциала не имеет убедительного теоретического обоснования и нельзя даже в принципе предложить процедуру ее измерения [12].

ках теории рассеяния и реакций физически более оправданным. Чтобы определить закон распада резонансного состояния в рамках теории рассеяния и реакций, надо найти зависящую от времени волновую функцию этого состояния вне области действия рассеивающего потенциала на расстоянии r от его центра, где установлен детектор выходящего потока квантов или частиц.

Квазистационарность распадающегося состояния проявляется в рамках такого подхода как очень большое значение волновой функции рассеивающейся частицы в момент времени $t = 0$ внутри некоторой ограниченной области пространства (внутри потенциального барьера). Волновую функцию $\psi(r, t)$ частицы вне сферически-симметричного потенциального барьера в задаче о рассеянии с начальными условиями, соответствующими нахождению частицы при $t = 0$ внутри барьера, впервые подробно исследовал Г. Ф. Друкaрев [13]. При решении зависящего от времени (нестационарного) уравнения Шредингера им показано, что полная волновая функция $\psi(r, t)$ частицы вне барьера представима в следующем интегральном виде:

$$r\psi(r, t) = f(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt/\hbar + ik\rho} c(k) dk, \quad (17)$$

где $k = \sqrt{2mE/\hbar}$ — волновой вектор вылетающей частицы с энергией E ; $\rho = r - b$ (b — положительная константа); $c(k)$ — функция, через которую функция $w(E)$ распределения энергии в резонансе определяется с помощью соотношения

$$w(E) = 2\pi |c(k)|^2 dk/dE. \quad (18)$$

Вводя комплексную переменную $z = k + i\kappa$, Г. Ф. Друкaрев подробно исследовал свойства комплексной функции $c(z)$ и показал, что она является мероморфной. Тогда, как всякую мероморфную функцию, $c(z)$ можно представить в виде

$$c(z) = R(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{n_k} \alpha_{\beta k} / (z - z_k)^\beta, \quad (19)$$

где $R(z)$ — некоторая целая функция; z_k — полюс; β — его порядок.

Г. Ф. Друкaревым доказано, что:

- а) подходящим выбором положительного числа b всегда можно добиться, чтобы $R(z) = 0$, причем такое b всегда существует;
- б) полюсы функции $c(z)$ существуют при любом виде рассеивающего потенциала V ;
- в) все полюсы $c(z)$ расположены только в нижней полуплоскости, т. е. при $z = k + i\kappa$ в точке полюса всегда $\kappa < 0$;
- г) все полюсы $c(z)$, вообще говоря, первого порядка;
- д) если все полюсы функции $c(z)$ — простые, то они расположены

в нижней полуплоскости симметрично относительно мнимой оси и в этом случае $c(z)$ можно представить в виде (суммирование по полюсам справа от мнимой оси)

$$c(z) = \sum \left(\frac{\alpha_n}{z - z_n} - \frac{\alpha_n^*}{z + z_n} \right). \quad (20)$$

Если предположить, что функция $c(z)$ имеет только один простой полюс и $\Gamma \ll E_0$ (случай одиночного квазистационарного состояния), то для $f(r, t)$, определяемой формулой (17), можно получить выражение [13]

$$f(r, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{E_0 t}} e^{i\text{imp}^2/2\hbar t} \left\{ \frac{\alpha_0}{(1 + \rho/v_0 t + \Gamma/2E_0) + i(1 - \rho/v_0 t + \Gamma/2E_0)} + \frac{\alpha_0^*}{(1 - \rho/v_0 t - \Gamma/2E_0) + i(1 + \rho/v_0 t + \Gamma/2E_0)} \right\} - 2\pi i \alpha_0 \exp \left[-\frac{\Gamma}{\hbar} \left(t - \frac{\rho}{v_0} \right) \right] \exp \left[-i \frac{E_0 t}{\hbar} \left(1 - \frac{\Gamma^2}{4E_0^2} \right) + i k_0 \rho \right], \quad (21)$$

которое справедливо при условии

$$\frac{\rho}{v_0 t} + \frac{\Gamma}{2E_0} < 1; \quad \sqrt{\frac{E_0 t}{\hbar}} \left(1 - \frac{\rho}{v_0 t} - \frac{\Gamma}{2E_0} \right) \gg 1. \quad (22)$$

В формулах (21), (22) $v_0 = \hbar k_0/m$ — скорость в системе центра масс частиц, вылетающих с резонансной энергией E_0 ; α_0, α_0^* — коэффициенты полюсного разложения (20) при $n = 0$. С учетом условия нормировки

$$\int_0^\infty w(E) dE = 1 \quad (23)$$

функция распределения энергии в квазистационарном состоянии имеет вид [13]

$$w(E) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{E}{E_0}} \Gamma / [(E - E_0 + \Gamma^2/4E_0)^2 + \Gamma^2], \quad (24)$$

т. е. отличается от симметричного лоренциана (10), приводящего к экспоненциальному закону распада.

Из формулы (21) следует, что $|\psi(r, t)|^2$ убывает во времени неэкспоненциально. Физический смысл этого состоит в том, что при произвольном задании начального состояния $\psi(r, t)$ создается суперпозиция экспоненциально затухающего резонансного состояния [второе слагаемое в (21)] и пакета частиц с непрерывным спектром, описываемого первым неэкспоненциальным членом в (21) [14]. В большинстве случаев резонансный член доминирует и распад резонансного состояния с большой точностью следует экспоненциальному закону.

На основе приведенных результатов можно определить границы области времен, в пределах которой распад является экспоненци-

альным [14]. Отношение квадратов модулей нерезонансного $|\psi_n|^2$ и резонансного $|\psi_p|^2$ членов в функции $\psi(r, t)$ по порядку величины равно [14]

$$\frac{|\psi_n|^2}{|\psi_p|^2} \sim \frac{\hbar}{E_0 t} e^{-\Gamma t/\hbar} = \frac{\Gamma}{E_0} \frac{T}{t} e^{-t/T}, \quad (25)$$

где $T = \hbar/\Gamma$. Из (25) следует, что резонансный и нерезонансный члены становятся одного порядка при временах

$$t_{\min} \sim T (\Gamma/E_0), \quad t_{\max} \sim T \ln (E_0/\Gamma), \quad (26)$$

и отклонений от экспоненциального закона распада можно ожидать при $t \lesssim t_{\min}$, $t \gtrsim t_{\max}$, причем $t = 0$ соответствует моменту образования квазистационарного состояния. Для случая α -распада при $E_0 \sim 1$ МэВ, $T \sim 1$ с ($\Gamma \sim 10^{-15}$ эВ) в [14] для t_{\min} , t_{\max} получены следующие оценки:

$$t_{\min} \sim 10^{-21} T, \quad t_{\max} \sim 50 T. \quad (27)$$

Отметим, что из условия (15) получается оценка $t_{\max} \sim 4T \ln (E_0/\Gamma)$ и, таким образом, приведенные в табл. 1 значения t_{\max} существенно больше оценок, следующих из (26).

Проведенное выше рассмотрение относится к случаю, когда полюса функции $c(z)$ — простые. Если допустить существование кратных полюсов, экспоненциальность закона распада нарушается при всех временах наблюдения. Для случая n -кратных полюсов закон распада может иметь, например, следующий вид [15]:

$$L(t) = e^{-t/T} \sum \alpha_i t^i. \quad (28)$$

Однако считается, что появление кратных полюсов мало вероятно, если для этого нет каких-либо глубоких физических причин.

Теория рассеяния и реакций дает возможность исследовать также зависимость вида закона распада от условий формирования распадающегося состояния и условий наблюдения распада. Для этого рассматривают эволюцию волнового пакета, возбуждающего резонанс, во времени и в пространстве. В [15] такое рассмотрение проведено с помощью традиционной техники резонансных интегралов для случая, когда возбуждающий волновой пакет имеет форму симметричного гауссиана шириной Δ . Такая форма волнового пакета позволяет осуществить его резкое обрезание во времени и в пространстве, а также способствует удобству аналитических вычислений. Считается, что детали выбора формы волнового пакета решающего влияния на получаемые результаты не оказывают и существенно влияют только на асимптотику резонансного интеграла (и кривой распада) при $t \rightarrow \infty$. Поэтому к результатам, относящимся к этой асимптотике, здесь надо относиться с осторожностью.

При анализе резонансных интегралов для падающей и рассеянной волны в их зависимости от времени можно выделить характерные области, границы которых T_1 , T_2 , T_3 определяются следующими

формулами (детальный анализ [15] явного вида соответствующих резонансных интегралов приводить не будем из-за его громоздкости):

$$T_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} (1 + \gamma^2)^{1/2}; \quad (29)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 (1 + \gamma^2)^{1/2} \left\{ (1 + \gamma^2)^{1/2} + \left[\gamma^2 + \left(\frac{8\Delta}{\Gamma} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}; \quad (30)$$

$$T_3 = \left(\frac{E_0}{\Delta} \right)^2 (k_0 r)^{2/3} + 4n \ln \left[\frac{E_0}{\Delta} (k_0 r)^{-1/3} \right]. \quad (31)$$

Времена T_1, T_2, T_3 отсчитываются от момента времени $t_F = r/(v_1 + v_2)$ — времени пролета продуктов распада от центра масс до точки на расстоянии r от рассеивающего центра (v_1, v_2 — соответствующие скорости продуктов распада). В формулах (29) — (31) использованы (кроме традиционных) следующие обозначения:

$$\varepsilon = [(1 + \gamma^2)^{1/2} - \gamma]^{1/2}; \quad (32)$$

$$\gamma = 2\rho_2 \left(\frac{\Delta}{E_0} \right)^2 k_0 r; \quad (33)$$

$$\rho_2 = \frac{1 + \beta_1 \beta_2 - \beta_1^2 - \beta_2^2}{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)}; \quad (34)$$

$$\beta_1 = v_1/c; \quad \beta_2 = v_2/c;$$

$$\alpha_1 = (1 - \beta_1^2)^{1/2}; \quad \alpha_2 = (1 - \beta_2^2)^{1/2}.$$

Приведенное выше значение ρ_2 — это один из коэффициентов в разложении

$$k/k_0 = 1 + \rho_1 s - \rho_2 s^2 + O(s^3), \quad (35)$$

где k, k_0 — волновые векторы (k_0 — для частицы с резонансной энергией E_0); $s = (E - E_0)/E_0$. Коэффициент n в формуле (31) связан с асимптотикой скорости убывания кривой распада при $t \rightarrow \infty$, которая по порядку величины описывается зависимостью вида $(t - t_F)^{-n}$ (численное значение n существенно зависит от условий проведения эксперимента и, в частности, от конкретного способа обрезания при $E = 0$).

Времена T_1, T_2, T_3 имеют следующий физический смысл: «Начиная приблизительно с момента времени T_1 общий характер закона распада становится экспоненциальным, т. е. уменьшение активности во времени является в целом экспоненциальным, хотя детальный ход зависимости не обязательно близок к экспоненциальному. С момента времени T_2 распад почти точно происходит по экспоненциальному закону. Степень точности при таких временах равна приблизительно 0,1 %. Распад по форме невозможно отличить от экспоненциального вплоть до момента времени T_3 , начиная с которого он становится более медленным» [15, с. 550]. Таким образом, T_3 соответствует t_{\max} из неравенств (16), (26), T_1, T_2 детализируют граничное значение t_{\min} из этих неравенств. Ясно, что в рамках проведенного

рассмотрения, как и ранее, на отрезке времени $[0, \infty)$ распад не может быть всюду экспоненциальным. Экспоненциальность распада имеет место только при временах от T_2 до T_3 . При $t - t_F < T_2$ и $t - t_F > T_3$ должны быть существенны эффекты неэкспоненциальности. В [15] предсказания теории доведены до числа и границы интервала времени от T_1 до T_2 , в течение которого можно наблюдать отклонения от экспоненциальности в кривой распада, приведены для некоторых частных случаев в таблице, которая воспроизведена ниже.

Таблица 2. Границы временного интервала для наблюдения отклонений от экспоненциальности распада [15] *

Δ/Γ	T_1	T_2	$ I_R ^2 / I_R^2_{\max}$
1	1/2	4,5	1/50
2/3	1	7	1/500
1/2	2	10	1/10 000
1/4	8	24	10^{-8}

* T_1, T_2 — в единицах времени жизни распадающегося состояния. В последней колонке — относительное уменьшение интенсивности распада к моменту времени T_2 . Предполагается, что $\gamma \ll 1$.

Как видно из таблицы, по мере уменьшения Δ/Γ (ширины падающего пакета или размера окошка детектора) возможность наблюдения экспоненциального закона распада резко уменьшается. Например, при $\Delta = \Gamma/4$ распад становится экспоненциальным только после $T_2 = 24$ (см. табл. 2). В соответствии с [15] в случае, когда распадающееся состояние возбуждается при распаде другого нестабильного состояния, то под шириной возбуждающего пакета Δ следует понимать ширину Γ материнского уровня как для случая чистых, так и для случая смешанных состояний, обычно реализующихся на практике *. Правда, обычно $\Delta > \Gamma$, так как высоколежащие возбужденные состояния живут меньше, чем низколежащие. Если $\Delta < \Gamma$, то условия наблюдения экспоненциального распада при малых временах наблюдения неблагоприятны (T_2 велико). Если $\Delta > \Gamma$, то распад довольно быстро становится неотличим от экспоненциального (T_2 мало), но ухудшаются условия наблюдения экспоненциального распада при больших временах наблюдения (уменьшается T_3).

* Согласно [14] ширину материнского уровня, с которого заселяется исследуемое распадающееся состояние, нельзя принимать в качестве ширины Δ возбуждающего волнового пакета, так как неопределенность в энергии заселяющего перехода определяется одновременно ширинами и начального, и конечного состояний.

Правда, оценки показывают, что это уменьшение несущественно даже при $\Delta \gg \Gamma$.

В [15] приведены также результаты о зависимости характеристик кривой распада от расстояния между центром распада и точкой наблюдения. Основной вывод: вид кривой распада наименее чувствителен к изменению расстояния от точки наблюдения, если одна из конечных частиц — фотон, хотя, в принципе, всегда можно определить расстояние, на котором экспоненциальный закон распада вообще ненаблюдаем.

Заканчивая это рассмотрение, приведем пример, иллюстрирующий возможности наблюдения экспоненциального распада и эффектов неэкспоненциальности. В ядре для уровня с энергией $E_0 = 200$ кэВ (время жизни $\sim 10^{-8}$ с, $\Gamma/E_0 \sim 3 \cdot 10^{-13}$), распадающегося путем испускания γ -квантов и заселяемого с другого уровня, ширина которого вдвое больше, $T_1 \sim 1/8$, $T_2 \sim 2$, $T_3 \sim 10^{17}$. Чтобы большая часть кривой распада была неэкспоненциальной, детектор нужно отодвинуть от центра распада на $\sim 10^{22}$ км [15]. Как видно из этого примера, численные оценки предсказывают относительно доступные условия наблюдения отклонений от экспоненциальности при малых временах t ($T_2 \sim 2$) и практическое отсутствие таких возможностей ($T_3 \sim 10^{17}$) при больших временах. Правда, следует отметить, что приводимые здесь оценки существенно отличаются от аналогичных оценок, которые были приведены ранее [см. табл. 1, равенства (27)].

4. ЗАКОН РАСПАДА В РАМКАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ И КВАНТОВЫЙ ПАРАДОКС ЗЕНОНА

В классической формулировке нерелятивистской квантовой механики возможны только стационарные состояния дискретного спектра энергий, полная волновая функция которых содержит зависимость от времени в виде, вообще говоря, несущественного фазового множителя $\exp(-iEt/\hbar)$, который на вероятности наблюдаемых квантовых явлений влияния не оказывает (при вычислении квадрата модуля волновой функции он всегда дает единицу). Следовательно, для систем с дискретным спектром энергий квантовая механика сформулирована в приближении, когда исследуемые явления с высокой точностью можно считать стационарными. Поэтому эффекты, зависящие от времени, рассматривают в этом случае только как малое возмущение к стационарной картине исследуемого явления.

Пусть гамильтониан нестабильной квантовой системы имеет вид $H = H_0 + V(t)$, где H_0 — невозмущенный гамильтониан, которому соответствуют стационарные состояния системы; $V(t)$ — зависящее (или не зависящее) от времени малое возмущающее воздействие. Предполагается, что потенциал $V(t)$ настолько мал, что начальное и конечное состояния можно описывать собственными функциями невозмущенного гамильтониана H_0 , а время действия возмущения конечно (это последнее предположение не всегда легко удовлетво-

речь, как, например, в случае, когда $V(t)$ — потенциал внутренних возмущающих взаимодействий, которому нельзя приписать ни начала, ни конца). Если $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ — волновые функции системы до и после перехода, то для среднего значения оператора временной эволюции имеем

$$\begin{aligned} \langle \psi_2 | e^{-iHt/\hbar} | \psi_1 \rangle &= -\frac{i}{\hbar} e^{-iE_2 t/\hbar} \int_0^t \langle \psi_2 | V | \psi_1 \rangle e^{-i\left(\frac{E_1-E_2}{\hbar}\right) t'} dt' = \\ &= e^{-iE_2 t/\hbar} \langle \psi_2 | V | \psi_1 \rangle \frac{\exp [i(E_2-E_1) t/\hbar] - 1}{E_1-E_2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда зависимость от времени вероятности перехода $1 \rightarrow 2$ из начального в конечное состояние определяется равенством

$$P_{1 \rightarrow 2}(t) = |\langle \psi_2 | e^{-iHt/\hbar} | \psi_1 \rangle|^2 = \frac{4 |\langle \psi_2 | V | \psi_1 \rangle|^2}{(E_1-E_2)^2} \sin^2 [(E_1-E_2) t/2\hbar]. \quad (37)$$

Для важного частного случая, когда распад происходит из дискретного состояния 1 в непрерывный спектр с плотностью конечных состояний $\rho(E_f)$, полная вероятность перехода имеет вид

$$P_{1 \rightarrow f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(E_f) P_{1 \rightarrow 2}(t) dE_f. \quad (38)$$

Полагая дополнительно $\rho(E_f) = \text{const}$ и $t \ll T$ (времени жизни распадающегося состояния), подстановкой (37) в (38) и непосредственным интегрированием найдем

$$P_{1 \rightarrow f}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} |V(E)|^2 \rho(E) t \quad (39)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{dP_{1 \rightarrow f}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |V(E)|^2 \rho(E). \quad (40)$$

Соотношение (40) называют золотым правилом Ферми или формулой Вентцеля [16], которое определяет вероятность квантового перехода в зависимости от среднего значения возмущающего потенциала $V(E) = \langle \psi_2 | V(t) | \psi_1 \rangle$ и плотности конечных состояний $\rho(E_f)$. Если положить правую часть в (40) постоянной, то это согласуется с экспоненциальностью закона распада*. Таким образом в рамках теории возмущений экспоненциальный закон распада является следствием постоянства функции $|V(E)|^2 \rho(E)$ и для него при малых t вероятность распада пропорциональна времени.

* При малых t экспоненциальный закон распада $L(t) \approx 1 - \lambda t$, поэтому вероятность перехода $P(t) = \lambda t$, вероятность перехода в единицу времени $dP(t)/dt = \lambda$ и, следовательно, постоянство $dP(t)/dt$ приводит к постоянному значению λ .

Рассмотрим теперь вероятность перехода при малых временах с более формальной точки зрения. Закон распада $L(t)$, т. е. вероятность найти системы в момент времени t в том же состоянии $|\psi\rangle$, что и в начальный момент времени $t=0$, по аналогии с (37) запишем в виде

$$L(t) = |\langle \psi | e^{-iHt/\hbar} | \psi \rangle|^2 \quad (41)$$

и выполним разложение $L(t)$ в ряд по малым t до членов порядка t^2 :

$$L(t) \approx L(0) + L'(0)t + L''(0)t^2/2. \quad (42)$$

Выполняя, пользуясь соотношением (41), формальные вычисления производных по времени L' , L'' при $t=0$ и учитывая, что $L(0) \equiv 1$, из (42) получаем

$$L(t) \approx 1 - \frac{t^2}{\hbar^2} (\Delta H)^2, \quad (43)$$

где

$$(\Delta H)^2 = \langle \psi | H^2 | \psi \rangle - |\langle \psi | H | \psi \rangle|^2.$$

Второе слагаемое в формуле (43) — это вероятность перехода $P(t)$, которая была уже вычислена нами ранее [формула (39)] в рамках теории возмущений. Теперь

$$P(t) = \frac{t^2}{\hbar^2} (\Delta H)^2 \quad (44)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{2t}{\hbar^2} (\Delta H)^2. \quad (45)$$

Как видно из сопоставления формул (39), (40) и (44), (45), они приводят к существенно разным асимптотикам для вероятностей переходов при $t \rightarrow 0$. Формулы (39), (40) согласуются с экспоненциальной формой кривой распада, а формулы (43) — (45) приводят к формальному заключению о том, что производная от кривой распада в начальный момент времени

$$dL(0)/dt = 0, \quad (46)$$

что противоречит экспоненциальности распада. Более того, если предположить, что в течение времени t выполняется n измерений над нестабильной системой с интервалами между ними t/n , то из (43) следует, что вероятность выживания для этой системы равна

$$L_n(t) = \left[1 - \frac{(\Delta H)^2}{\hbar^2} \left(\frac{t}{n} \right)^2 \right]^n \quad (47)$$

и при $n \rightarrow \infty$ $L_n(t) \rightarrow 1$, т. е. при увеличении плотности измерений распад замедляется, а при непрерывном наблюдении система стано-

вится стабильной. Этот результат дает основание говорить о проявлении при распаде квантового парадокса Зенона и исследовать эффект замедления распада нестабильной системы при ее взаимодействии с измерительным прибором [17—19] (естественно, используемая здесь аргументация не имеет реальной связи с аргументацией знаменитых апорий Зенона).

Поведение кривой распада в начальный момент времени и начальная скорость распада $dL(0)/dt$ исследовались также математическими методами, и в результате было показано, что начальная скорость распада равна нулю для состояний, у которых среднее значение энергии конечно (см. [20] и цитируемую там литературу). Для экспоненциального распада (распределение плотности энергии описывается формулой Брейта — Вигнера) это условие не выполняется и поэтому начальная скорость распада ненулевая.

5. КВАНТОВО-ПОЛЕВОЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЗАКОНА РАСПАДА И ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

В зависимости от выбора представления возможны различные рассмотрения системы взаимодействующих частиц. В гамильтоновском представлении (когда гамильтониан диагонален) полностью определены частицы (кванты поля), но нет взаимодействий, в других представлениях частицы не вполне определены. Представление с «голыми» частицами нефизично, поэтому обычно используют часть взаимодействия для перенормировки (частичного изменения) основных характеристик частиц (массы, заряда) для учета таким образом реальной физической ситуации, т. е. даже классические полевые теории испытывают определенные трудности при описании системы взаимодействующих частиц. Создание же теории, в которой кванты поля — нестабильные частицы, представляется пока делом будущего, и в этом направлении сделаны пока только первые шаги [21, 22]. В связи с этим значительный интерес представляет анализ закона распада в рамках точно решаемых полевых моделей [10, 23].

Чтобы проверить, действительно ли неэкспоненциальная асимптотика закона радиоактивного распада является неизбежным следствием общих принципов квантовой механики, в [10] исследовалась точно решаемая модель (модель Ван Кампена), описывающая нерелятивистский электрон или мезон в осцилляторном потенциале, который дипольно взаимодействует с поперечным вторично квантованным электромагнитным полем. Такое рассмотрение позволяет в представлении вторичного квантования ввести определение закона распада через среднее от оператора числа нестабильных частиц и исследовать асимптотики зависимости вероятности распада от времени.

М. И. Широков вводит для закона распада следующее определение [10]:

$$N(t) = \langle U\psi_0, \hat{N}U\psi_0 \rangle - \langle U\Omega_N, \hat{N}U\Omega_N \rangle, \quad (48)$$

где $N(t)$ — число частиц в момент времени t ; ψ_0 — волновая функция системы в начальный момент времени $t = 0$; $U = \exp(-iHt/\hbar)$ — оператор временной эволюции; \hat{N} — оператор числа нестабильных частиц; Ω_N — собственный вектор \hat{N} с нулевым средним значением. Первое слагаемое в формуле (48) — среднее от оператора числа нестабильных частиц в состоянии $U\psi_0 = \exp(-iHt/\hbar)\psi_0$, второе слагаемое введено, чтобы обеспечить в частном случае $\psi_0 = \Omega_N$ выполнение условия $N(t) = 0$ при всех t . В [10] показано, что для определения (48) условие распада $N(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ выполняется, и поэтому его можно принять в качестве закона распада. Такое определение закона распада через оператор числа нестабильных частиц не сводится к традиционному определению вероятности распада формулой (7), поэтому результаты предыдущих разделов рассматриваемая модель может включать как один из возможных частных случаев.

Определение закона распада (7) основано на предположении, что исследуемая распадающаяся система состоит либо только из нестабильной частицы, либо только из продуктов ее распада. Однако в квантовой теории с локальным взаимодействием (с «голыми» нестабильными частицами) возможны не только переходы, переводящие нестабильную частицу в продукты ее распада, но и такие переходы, при которых нестабильная частица превращается в две нестабильные частицы и продукты ее распада. Эти состояния учитываются в определении закона распада (48) и не учитываются в (7), поэтому его определение с помощью оператора числа нестабильных частиц является более общим и позволяет получить вид закона распада в случае, когда распадное взаимодействие локально. Однако взаимодействие реальных физических частиц (в модели Ван Кампена — фононов и фотонов) нелокально. М. И. Широковым показано, что учет нелокальности распадного взаимодействия приводит к переходу определения закона распада (48) в (7). Таким образом, новое определение закона распада (48) и его изучение в модели Ван Кампена позволяют выявить влияние степени локальности распадного взаимодействия на вид и асимптотики закона распада.

Проведенное в [10] исследование показало, что асимптотика закона распада определяется в основном выбором вида операторов для описания возбужденных состояний электронов (фононов) и не зависит от способа их возбуждения. Асимптотики закона распада, полученные в этой работе при различном выборе вида операторов для описания фононов, перечислены ниже.

При описании возбужденных состояний электрона с помощью так называемых «голых» операторов рождения — уничтожения (когда распадное взаимодействие локально) из определения закона распада через оператор числа частиц (48) найдено, что вероятность распада при $t \rightarrow \infty$ убывает не медленнее экспоненты, неэкспоненциальные аддитивные к экспоненте поправки отсутствуют и асимптотика зако-

на распада является экспоненциальной. В этом случае закон распада записывается в виде

$$N(t) = e^{-\nu t} [1 - e^2 \chi(t)], \quad (49)$$

где $\gamma^2 = e^2 k^2 / 3m_0$ (e , k , m_0 — параметры модели), $\chi(t)$ — функция, малая по абсолютному значению ($e^2 \chi(t) \ll 1$), содержащая осциллирующие члены вида $\gamma k^{-1} \sin 2kt$. Таким образом, из [10] следует, что экспоненциальная кривая распада может быть модулирована слабыми осцилляциями.

При описании фонона с помощью физических операторов рождения — уничтожения, бесчастичный вектор которых совпадает с физическим вакуумом, полученное традиционное выражение для вероятности распада (14), обсуждавшееся в разд. 2, которое приводит к неэкспоненциальной асимптотике. Однако физические операторы рождения — уничтожения для описания фонона определяют неоднозначно, причем оказывается, что их можно подобрать так, что соответствующий закон распада будет экспоненциальным вплоть до сколь угодно больших, но конечных времен t . Причем чем меньше степень нелокальности взаимодействия, тем меньше неэкспоненциальная поправка. Это позволяет М. И. Широкову предположить, «что физической причиной неэкспоненциальной асимптотики закона распада является нелокальность распадного взаимодействия» [10].

Таким образом, определение закона распада в представлении вторичного квантования через оператор числа нестабильных частиц приводит к трем возможным асимптотикам: а) вероятность распада убывает при $t \rightarrow \infty$ не медленнее экспоненты (в этом случае экспоненциальная кривая распада может быть модулирована слабыми осцилляциями); б) вероятность распада при $t \rightarrow \infty$ убывает медленнее экспоненты и содержит малые аддитивные неэкспоненциальные поправки $\sim t^{-m}$; в) закон распада является экспоненциальным вплоть до сколь угодно больших, но конечных времен t .

Как подчеркивается в [10], детальное исследование временного хода распада возможно только в точно решаемых моделях. Помимо модели Ван Кампена такое исследование было проведено для другой точно решаемой модели — модели Ли с нестабильной V -частицей [23]. Но модель Ли не является приближением к какой-либо локальной теории и ее «голые» операторы соответствуют одному из вариантов физических операторов в модели Ван Кампена. В рамках модели Ли было показано, что V -частицу можно описать таким вектором состояния, что неэкспоненциальные поправки к закону ее распада будут сколь угодно малыми при любых конечных временах t , т. е. делается вывод, совпадающий с одним из результатов [10].

Как в модели Ли, так и в модели Ван Кампена выбор описания нестабильной частицы параметрами моделей и видом взаимодействия не фиксируется, поэтому в рамках этих моделей нельзя сделать выбор между различными асимптотиками закона распада и определить величину неэкспоненциальной поправки.

6. ЗАКОН РАСПАДА В ЭВОЛЮЦИОННОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Уже в 30-х годах нерелятивистская квантовая механика сформировалась и нашла признание как логически последовательная стройная теория. С ее помощью было решено и решается много конкретных задач, а сама квантовая механика остается до сих пор практически неизменной. Но в ней были и есть серьезные проблемы, которые постоянно привлекают внимание исследователей, хотя окончательному решению пока не поддаются. Это проблема полноты, связанная с возможностью введения скрытых параметров, которые могли бы вернуть предсказаниям квантовой механики детерминированный характер (современное обсуждение скрытых параметров см. в [24]), и проблема квантовых измерений, связанная со следствиями редукции волновой функции при измерениях и различием чистых и смешанных состояний (теория квантовых измерений подробно обсуждается Д. И. Блохинцевым в [5, 25]). В последние годы в связи с успехами теории сложности алгоритмов стали говорить [26] и о трудностях квантовой теории, связанных с неявным допущением в ней бесконечной точности вычислений и измерений (это следует из непрерывности переменных в квантовой механике, совокупность значений которых образует континуум). Напомним также о «гамильтоновой дилемме» (трудностях при совместном определении частиц и их взаимодействий в разных представлениях) и о проблеме естественного включения в квантовую теорию описания нестабильных систем с непрерывным энергетическим спектром (без предположения о малости взаимодействия, ответственного за распад).

Известно, что между классической ньютоновской механикой и квантовой механикой существует глубокая аналогия, которая сыграла важную роль при создании квантовой механики. Сейчас при развитии квантовой механики такую же эвристическую роль играют, вероятно, современная синергетика и неравновесная термодинамика.

Синергетика — теория самоорганизации или теория катастроф [27] — это раздел классической механики, посвященный нелинейной динамике систем с различными неустойчивостями [28], который получил в настоящее время значительное развитие (квантовая синергетика — то же для квантовомеханических объектов). Идеи и методы синергетики активно проникают в другие научные дисциплины. В частности, с использованием этих идей Пригожин получил конструктивные результаты в области неравновесной термодинамики [29] при описании эволюции неравновесной термодинамической системы к состоянию равновесия. С помощью аналогии в синергетике и неравновесной термодинамике Пригожин и его коллеги [30] выполнили в последние годы и обобщение квантовой механики, включающее переход от динамического к необратимому вероятностному (эволюционному) описанию систем с помощью специального преобразования, нарушающего временную симметрию. Ниже будут кратко

изложены основные положения и выводы этой теории (будем называть ее эволюционной квантовой механикой), поскольку в ней в определенной мере преодолены названные выше трудности квантовой механики и впервые отчетливо выявлена роль экспоненциального закона распада как проявление одного из фундаментальных законов природы — закона необратимости времени.

Однако прежде чем обсуждать принципы эволюционной квантовой механики, необходимо подробнее рассмотреть вопрос о взаимоотношении микроскопической динамики с термодинамикой неравновесных систем, так как аналогия с этой задачей используется при построении эволюционной квантовой механики.

Выпишем предварительно некоторые классические результаты динамики.

В гамильтоновой механике энергия (гамильтониан) системы определяется формулой

$$H = E_k(p_1, \dots, p_s) + V_{\Pi}(q_1, \dots, q_s), \quad (50)$$

где первое слагаемое, зависящее только от импульсов p_i , — кинетическая, а второе слагаемое, зависящее только от координат q_i , — потенциальная энергия. С помощью гамильтониана законы классической динамики записываются в виде

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (51)$$

Для системы, описываемой гамильтонианом H , можно ввести $2s$ -мерное фазовое пространство с координатами $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$, точка в котором полностью определяет состояние системы в каждый момент времени t . Для фазового пространства вводят плотность $\rho(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$, для которой

$$\int \rho(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = 1. \quad (52)$$

Тогда ρ — плотность вероятности найти систему в момент времени t в элементе фазового объема $dq_1, \dots, dq_s, dp_1, \dots, dp_s$. Известно [следует из уравнений движения (51)], что поток в фазовом пространстве несжимаем, а объем сохраняется по времени. Уравнение движения для плотности потока ρ в фазовом пространстве называется уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{i=1}^s \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right] = [H\rho], \quad (53)$$

где квадратные скобки обозначают скобки Пуассона. То же в операторной форме:

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho. \quad (54)$$

Здесь L — линейный эрмитов оператор (оператор Лиувилля):

$$L = -i \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} + i \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}. \quad (55)$$

Умножение на i (мнимую единицу) в (55), (54) введено, чтобы обеспечить эрмитовость L . Теперь среднее значение любой механической величины $A(p, q)$ можно вычислить как среднее по ансамблю

$$\langle A \rangle = \int A(p, q) \rho(p, q) dp dq, \quad (56)$$

а зависимость ρ от времени можно записать через оператор временной эволюции

$$\rho(t) = e^{-iLt} \rho(0). \quad (57)$$

Равенства (53) — (57) — основные уравнения классической динамики, записанные на операторном языке. Отличие оператора L от привычных квантовомеханических операторов состоит в том, что он действует в фазовом пространстве и зависит поэтому одновременно и от p , и от q . Квантовомеханические операторы, в отличие от этого, действуют либо только в координатном, либо только в импульсном пространстве.

В термодинамике один из узловых вопросов — это ее микроскопическое обоснование, в частности необходимость объяснить, почему законы для описания неравновесных термодинамических систем вероятностные и необратимы во времени, в то время как поведение каждой из входящих в ее состав микроскопических частиц описывается динамическими, т. е. обратимыми во времени, законами. В связи с этим неоднократно предпринимались попытки вывести вероятностные макроскопические законы термодинамики из микроскопических законов классической динамики и установить, таким образом, глубинную связь между динамикой и термодинамикой. Поскольку результаты этих исследований содействовали развитию эволюционной квантовой механики, то приведем их краткое изложение.

Обычно различают два вида динамических систем — интегрируемые и эргодические (квазиэргодические). Рассмотрим каждую из них.

Для интегрируемых систем с помощью канонических преобразований их гамильтониан можно привести к каноническому виду, когда он не содержит слагаемого кинетической энергии. В канонических переменных гамильтониан просто пропорционален своим собственным значениям и переменным «действию», которые во время движения сохраняются (являются интегралами движения). Пуанкаре еще в 1899 г. доказал, что большинство задач классической динамики неинтегрируемы. Более того, в определенных условиях в задачах со взаимодействием (канонический гамильтониан $H = H_0 + V$, где H_0 — невозмущенная часть, V — возмущение) передача энергии от одной степени свободы к другой может быть настолько большой, что

все инварианты движения (кроме гамильтониана) становятся неаналитическими функциями переменных «действие». Это явление называют «катастрофой Пуанкаре», и оно приводит к тому, что любые две как угодно близкие точки в фазовом пространстве в процессе эволюции могут разойтись как угодно далеко и поведение системы в фазовом пространстве становится непредсказуемым. Таким образом, катастрофа Пуанкаре вносит в динамическое поведение системы элементы случайности.

Эргодической называют систему, которая, будучи предоставлена самой себе, пройдет в своем фазовом пространстве через любую точку, совместимую с энергетической поверхностью. Квазиэргодической называют систему, которая, будучи предоставлена самой себе, обязательно пройдет в своем фазовом пространстве как угодно близко к любой точке, совместимой с энергетической поверхностью. Эргодические (квазиэргодические) динамические системы в отличие от интегрируемых имеют только один интеграл движения — энергию — и для них энергетическую поверхность в фазовом пространстве покрывает только одна траектория. Форма элемента фазового объема при эргодической эволюции системы во времени сохраняется. В 1954 г. А. Н. Колмогоров строго показал, что динамические системы не обязательно эргодичны.

Новый класс неинтегрируемых, неэргодических (неквазиэргодических) динамических систем — это системы с перемешиванием. Они характеризуются такими потоками в фазовом пространстве, для которых элемент объема во время эволюции, сохраняя свою связность, сильно и нерегулярно деформируется, как краска при ее перемешивании с водой. Для них как угодно близкие точки в фазовом пространстве тоже могут разойтись со временем как угодно далеко. Это означает, что эволюция динамической системы в фазовом пространстве становится непредсказуемой. Понятие о перемешиваемости впервые было введено в статистическую физику Гиббсом (к нему же восходит аналогия о перемешивании краски с водой) и позже использовалось Пуанкаре. Но первое математическое описание систем с перемешиванием, в том числе определение ограничений на потенциал взаимодействия в системе, при которых она обладает свойством перемешиваемости, дано Н. С. Крыловым [31].

Мы видим, что динамические системы, вообще говоря, неинтегрируемы и неэргодичны. Системы с перемешиванием или катастрофой Пуанкаре, для которых траектории близких точек в фазовом пространстве могут расходиться со временем как угодно далеко, неустойчивы (системы со слабой устойчивостью). Для них как угодно близкие точки в фазовом пространстве могут соответствовать совершенно разным типам движения. Поэтому для систем со слабой устойчивостью повышение точности задания исходных данных не может привести к повышению точности предсказания поведения системы и для ее описания приходится привлекать статистические соображения. Переход в ходе эволюции от динамического к статистиче-

скому (вероятностному) описанию систем со слабой устойчивостью перебрасывает мостик между динамикой и термодинамикой.

Для динамических систем направление времени несущественно, они инвариантны при замене $t \rightarrow -t$. В термодинамике замкнутые системы, предоставленные самим себе, всегда эволюционируют к состоянию термодинамического равновесия, и при этом их энтропия возрастает. Второе начало термодинамики — закон необувания энтропии — задает направление (стрелу) времени для неравновесных термодинамических систем, т. е. термодинамика существенно неинвариантна по отношению к изменению знака времени и положительное направление времени связано с возрастанием энтропии.

Все неравновесные термодинамические системы эволюционируют к состоянию равновесия. Следовательно, равновесное состояние — это аттрактор для неравновесных состояний (аттрактор — точка фазового пространства, к которой эволюционирует система). Согласно теории устойчивости движения состояние равновесия является аттрактором, если производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку функции (функция Ляпунова — гладкая, монотонная, положительно определенная функция фазовых переменных). Следовательно, для неравновесных термодинамических систем функция Ляпунова должна существовать. Однако еще в 1889 г. Пуанкаре строго доказал, что в рамках гамильтоновой динамики не существует функции координат и импульсов со свойствами функции Ляпунова. Недавно этот результат был обобщен и на случай теории ансамблей (теорема Пуанкаре — Мисры). Отсюда следует, что динамическое обоснование второго начала термодинамики невозможно. Это очень серьезный вывод, который не дает возможности на микроскопическом уровне понять из соображений динамики происхождение необратимости эволюции неравновесных термодинамических систем. Но если нельзя построить функцию Ляпунова (или энтропию) как функцию координат и импульсов, то, может, ее можно построить как функцию корреляций координат и импульсов? Однако такая попытка Пуанкаре тоже оказалась неудачной.

Учитывая упомянутую выше аналогию с теорией ансамблей для описания классических динамических систем, в которой эволюция во времени задается не в функциональном, а в операторном виде (57), через оператор Лиувилля (55), и тот факт, что нельзя построить из микроскопических уравнений динамики функцию Ляпунова (или энтропию) для неравновесной термодинамической системы, Пригожин предложил вообще отказаться от таких попыток и ввести для описания необратимой эволюции неравновесных систем не функцию, а оператор микроскопической энтропии (или функции Ляпунова) так, чтобы взятое подходящим образом среднее от оператора микроскопической энтропии давало макроскопическую энтропию. Если удастся ввести оператор микроскопической энтропии (а как показал Пригожин, это возможно для внутреннее неустойчивых динамических систем — систем со слабой устойчивостью), то классическая

динамика превращается аналогично квантовой механике в алгебру некоммутирующих операторов. Это означает, что введение в явном виде необратимости в классическую динамику с помощью оператора микроскопической энтропии приводит к ее фундаментальной перестройке, расширению теоретической схемы. При этом традиционная динамика входит в новый вариант классической динамики как частный случай. Микроскопическая необратимость приводит к возникновению в классической механике соотношения неопределенностей и связанного с ним нового свойства дополнителности (нового по сравнению с известными из квантовой механики) — дополнителности между динамическим и термодинамическим описанием *. Это следствие того, что оператор Лиувилля L (55) и оператор микроскопической энтропии M (если он существует) не коммутируют:

$$-i [LM] = -i (LM - ML) = D \leq 0, \quad (58)$$

где D задает производство микроскопической энтропии. Соотношение (58) означает, что у операторов L и M не может быть общих собственных функций и поведение системы может описываться либо динамически, с помощью собственных функций оператора Лиувилля, либо стохастически, с помощью собственных функций оператора M .

Для неравновесных внутренне неустойчивых систем Пригожин вводит также с помощью оператора T , тесно связанного с M , новый тип времени — собственное время, связанное с эволюцией системы. Тогда любое начальное состояние ρ можно представить как суперпозицию состояний определенного возраста и эволюции.

В этом разделе все изложенное относилось пока только к классической механике и неравновесной термодинамике классических систем. И уже здесь, при рассмотрении классических систем, очевидно принципиальное значение для описания их временной эволюции фундаментальной гипотезы Пригожина о том, что неравновесным внутренне неустойчивым системам присуща микроскопическая необратимость и поэтому они эволюционируют во времени к состоянию термодинамического равновесия в соответствии со вторым началом термодинамики. Новый тип времени — собственное или внутреннее время, связанное с эволюцией системы, вводится уже для классических термодинамически неравновесных внутренне неустойчивых систем.

Теперь приведенные результаты надо переформулировать применительно к квантовой механике [30].

Уравнение Шредингера описывает обратимую во времени (динамическую) эволюцию волновой функции, поэтому в таком динамическом подходе оператор микроскопической энтропии M ввести нельзя.

* Дополнительность точного микроскопического (динамического) и макроскопического (термодинамического) описаний впервые была установлена Н. С. Крыловым [31]. Его приоритет признан историко-научной литературой [32, с. 45].

В связи с этим пользуются теорией ансамблей. В этом случае квантовый аналог уравнения Лиувилля (54) имеет тот же вид, но под ρ следует понимать не функцию распределения, а матрицу плотности, а в правой части уравнения (53) вместо скобок Пуассона следует читать коммутатор операторов ρ и H . В квантовом случае операторное уравнение Лиувилля (54) содержит оператор матрицы плотности ρ и супероператор Лиувилля L . (Операторы действуют на функции, супероператоры — на операторы. Матрица плотности — оператор, поэтому действующий на нее оператор Лиувилля — супероператор.)

Функцию Ляпунова вводят через супероператор энтропии M и оператор матрицы плотности ρ по правилам:

$$\Omega = \text{tr } \rho^+ M \rho \geq 0, \quad (59)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} \leq 0. \quad (60)$$

Чтобы условия (59), (60) выполнялись, движение должно быть непериодическим, т. е. спектр гамильтониана системы, для которой можно ввести оператор M , должен быть непрерывным (а система, следовательно, открытой).

Супероператор энтропии положительно определен, поэтому всегда его можно представить в виде

$$M = T^+ T. \quad (61)$$

Подставляя (61) в (59), пользуясь эрмитовостью операторов и обозначая $\Lambda^{-1} \equiv T$, найдем

$$\Omega = \text{tr } \tilde{\rho}^+ \tilde{\rho} \quad (62)$$

где

$$\tilde{\rho} = \Lambda^{-1} \rho. \quad (63)$$

Преобразование (63) позволяет исключить из функции Ляпунова (59) явную ссылку на оператор M , зависящий от динамических свойств системы, и представить ее в форме (62) с универсальной правой частью, зависящей только от статистического описания системы. Учитывая (63), уравнение Лиувилля (54) перепишем в виде

$$i \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \Phi \tilde{\rho}, \quad (64)$$

где

$$\Phi = \Lambda^{-1} L \Lambda. \quad (65)$$

Уравнение движения (64), полученное преобразованием подобия (65) из исходного уравнения движения (54), должно включать в себя описание необратимости. Преобразования подобия с помощью эрмитовых операторов приводят, как известно, к замене переменных. Однако переход от динамического описания к описанию с учетом необратимости не может сводиться к простой замене координат.

Поэтому новый оператор движения Φ должен быть неэрмитов. Действительно, подставив в функцию Ляпунова Ω (59) явный вид ρ (57) через оператор временной эволюции, вычисляя в явном виде $d\Omega/dt$ и учитывая неравенство (60), выражающее условие существования функции Ляпунова, можно показать, что

$$i(\Phi - \Phi^+) \geq 0, \quad (66)$$

т. е. разность между Φ и эрмитово сопряженным оператором Φ^+ не обязательно равна нулю, т. е. оператор движения Φ неэрмитов. Следовательно, формализм эволюционной квантовой механики должен основываться на использовании неунитарных преобразований. По Пригожину в этом случае следует использовать преобразование

$$\langle A \rangle = \text{tr } A^+ \rho = \text{tr } \tilde{A}^+ \tilde{\rho}, \quad (67)$$

которое не изменяет результат усреднения при одновременном применении преобразования (63) к оператору A и матрице плотности ρ . Уравнения движения для матрицы плотности ρ в представлении Шредингера и для зависящего от времени оператора A в представлении Гейзенберга одинаковы по форме и различаются только знаком L . Поэтому разумно потребовать, чтобы для оператора наблюдаемой A выполнялось соотношение

$$\tilde{A} = \Lambda^{-1} (-L) A, \quad (68)$$

т. е. Λ^{-1} зависит от L . Из (67), (68) следует, что

$$[\Lambda^{-1} (-L)]^+ = \Lambda (L); \quad \Lambda^{-1} (L) = \Lambda^+ (-L). \quad (69)$$

Эти условия заменяют условие унитарности в обычной квантовой механике. Соответствующее преобразование называют $*$ -унитарным

$$\Lambda^* (L) = \Lambda^+ (-L), \quad (70)$$

а оператор в левой части (70) — $*$ -эрмитовым по отношению к Λ . Звездочка означает замену $L \rightarrow -L$ с последующим эрмитовым сопряжением. Учитывая свойства преобразований (69), (70), из определения (65) для оператора Φ найдем

$$\Phi^* = \Phi^+ (-L) = -\Phi (L); \quad (i\Phi)^* = i\Phi, \quad (71)$$

что означает $*$ -эрмитовость оператора движения. Итак, $i\Phi$ $*$ -эрмитов. Поэтому, как и любой $*$ -эрмитов оператор, его можно представить в виде

$$i\Phi = (i\Phi)_{\text{чет}} + (i\Phi)_{\text{нечет}}, \quad (72)$$

где индекс обозначает четность соответствующего слагаемого при замене $L \rightarrow -L$. Чтобы при этом была обеспечена $*$ -эрмитовость каждого слагаемого в отдельности, необходимо, чтобы оператор четный

по L был эрмитовым, а нечетный по L — антиэрмитовым. Теперь условие (66) существования функции Ляпунова приобретает вид

$$(i\Phi)_{\text{чет}} \geq 0, \quad (73)$$

а для итогового уравнения движения, которое обобщает уравнение Ляпунова (54), получим

$$i \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = (\Phi_{\text{нечет}} + \Phi_{\text{чет}}) \rho. \quad (74)$$

Это микроскопическое уравнение содержит обратимую ($\Phi_{\text{нечет}}$) и необратимую ($\Phi_{\text{чет}}$) части и позволяет, таким образом, на микроскопическом уровне описать макроскопические различия между обратимыми и необратимыми процессами. Симметрия уравнения (74) при замене $L \rightarrow -L$ совпадает с симметрией кинетического уравнения Больцмана, которое также содержит четное (столкновительный член) и нечетное (потокотый член) слагаемые. При выводе микроскопического уравнения (74), учитывающего обратимые и необратимые процессы, постулировалось существование функции Ляпунова (59), количественно выражающей справедливость второго начала термодинамики. Главная идея изложенного выше подхода в том, чтобы не выводить второе начало термодинамики из динамики, а постулировать его «как фундаментальный физический факт и... выяснить, к каким изменениям в наших представлениях о пространстве, времени и динамике приводит принятие такого постулата» [30, с. 220].

Проблема квантования Бора — Гейзенберга — Иордана была решена путем рассмотрения всех унитарных преобразований и выбора среди них того, которое диагонализует гамильтониан. А какие правила квантования следуют из рассмотрения всех *-унитарных преобразований?

Оператор Лиувилля определяется (53) как коммутатор

$$L = [H\rho] = H\rho - \rho H. \quad (75)$$

Введем по аналогии антикоммутатор

$$\mathcal{H}\rho = \frac{1}{2} (H\rho + \rho H). \quad (76)$$

Тогда среднее значение энергии системы определяется равенством

$$\langle H \rangle = \text{tr } H\rho = \frac{1}{2} \text{tr} (H\rho + \rho H) = \text{tr } \mathcal{H}\rho. \quad (77)$$

Применив *-унитарное преобразование Λ к супероператорам L и \mathcal{H} , получим (65) и

$$\tilde{\mathcal{H}} = \Lambda^{-1} \mathcal{H} \Lambda. \quad (78)$$

Теперь надо взять такое Λ , чтобы выполнялось условие диссипативности (73) и одновременно равенство (77) приводилось бы к виду

$$\langle H \rangle = \sum E_i \rho_{ii}. \quad (79)$$

Если такое *-унитарное преобразование Λ существует, то E_i — собственное значение энергии нестабильной системы, которая эволюционирует в строгом соответствии со вторым началом термодинамики. Представление, в котором одновременно выполняется неравенство (73) и диагонализуется супероператор $\tilde{\mathcal{H}}$, Пригожин называет представлением Ляпунова. В этом представлении формализм супероператоров дает отдельно оператор временной эволюции (65) и оператор для определения уровней энергии (78). А поскольку система эволюционирует в строгом соответствии со вторым началом термодинамики, то должен строго выполняться экспоненциальный закон распада и никаких эффектов неэкспоненциальности быть не может [30]*.

Приведем соображения, из которых следует, что закон распада в эволюционной квантовой механике действительно строго экспоненциальный. Как только что отмечалось, в представлении Ляпунова одновременно диагонализуется супероператор энергии [выполняется равенство (79)] и выполняется условие существования функции Ляпунова (73) или, что то же самое, выполняется условие существования оператора микроскопической энтропии, с которым связано выполнение второго начала термодинамики. При описании распадов уравнение движения эволюционной квантовой механики (74) можно упростить, опустив слагаемое $\Phi_{\text{нечет}} \tilde{\rho}$, так как оно соответствует только обратимым процессам, которыми в этом случае не интересуемся. Тогда

$$i \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \Phi_{\text{чет}} \tilde{\rho}. \quad (80)$$

Домножив левую и правую части этого неравенства на $-i$ и приняв во внимание, что в представлении Ляпунова $(i\Phi)_{\text{чет}} \geq 0$ (73), найдем

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\varphi \tilde{\rho}, \quad (81)$$

где φ — положительная константа, к умножению на которую сводится в этом представлении действие оператора $(i\Phi)_{\text{чет}}$. По правилу (67) вычисления средних от операторов физических величин найдем $\langle N \rangle = N(t)$ — среднее от оператора N числа нестабильных частиц в момент времени t :

$$N(t) = \langle N \rangle = \text{tr } N^+ \rho(t) = \text{tr } \tilde{N}^+ \tilde{\rho}(t)$$

* О связи закона распада со вторым началом термодинамики см. также разд. 8.

(здесь учтено, что оператор числа частиц эрмитов и, следовательно, $N = N^*$). Понимая под $\tilde{\rho}(t)$ решение уравнения (81) $\tilde{\rho}(t) = \exp(-\varphi) \tilde{\rho}(0)$, для закона распада — зависимости числа нестабильных частиц от времени — окончательно получаем [см. также формулу (1)]

$$N(t) = \exp(-\varphi) \operatorname{tr} \tilde{N}^+ \tilde{\rho}(0) = \exp(-\varphi) N_0,$$

где N_0 — число нестабильных частиц в начальный момент времени $t = 0$. Следовательно, распад действительно строго экспоненциальный с постоянной распада φ и временем жизни $T = 1/\varphi$. Этот вывод эволюционной квантовой механики следует из ее постулата о фундаментальной роли второго начала термодинамики [о существовании функции Ляпунова (59)] и существенно отличается от предсказаний рассмотренных ранее других теоретических подходов. Экспоненциальность закона распада является, следовательно, проявлением такого фундаментального свойства природы, как необратимость времени.

В представлении Ляпунова для тех систем, для которых упомянутое выше $*$ -унитарное преобразование существует, снимается присущее традиционной квантовой механике вырождение, связанное с тем, что эволюция во времени и собственные значения энергии определяются одним и тем же оператором — гамильтонианом H . Именно это обстоятельство и приводило к значительным трудностям при определении в квантовой механике оператора времени как наблюдаемой и вынуждало интерпретировать время просто как параметр (обзор относящихся к этой проблеме результатов см. в [33]). В эволюционной квантовой (и классической) механике проблема времени как наблюдаемой приобрела новое содержание. Оказывается, что для систем со слабой устойчивостью (внутренне стохастичных, для которых существует оператор микроскопической энтропии) можно ввести новое понятие — внутреннее время — и тогда макроскопическое время (время как динамический параметр) приобретает смысл среднего от нового оператора внутреннего времени. Один из типов внутренне неустойчивых динамических систем описывается теорией K -потоков (квазирегулярные K -потоки или системы А. Н. Колмогорова — это системы с перемешиванием, для которых степень вырождения решений постоянна). Для случая K -потоков доказано, что существует такой эрмитов оператор T , что его коммутатор с оператором Лиувилля L равен единичному оператору

$$i [LT] = -i (LT - TL) = 1. \quad (82)$$

Если перейти к представлению, в котором оператору L соответствует число λ , то оператор T в этом представлении определяется производной $i (\partial/\partial\lambda)$. Если оператору L сопоставить (54) производную по времени $i (\partial/\partial t)$, то сопряженный ему оператор времени T представляется просто числом t . Оператор T соответствует «флуктуирующему» времени — времени как наблюдаемой, а коммутатор (82) количественно

выражает дополнителность между динамическим и термодинамическим описанием систем [см. также (58)]. В случае, когда оператору T соответствует дискретное преобразование пекаря [30], все его собственные значения — целые числа от $-\infty$ до $+\infty$, а все собственные функции соответствуют пространственным распределениям, получающимся из исходного за конечное число шагов. Следовательно, распределение может иметь возраст (хотя в общем случае оно определенного возраста не имеет, но может быть представлено разложением по распределениям с определенным возрастом).

Отметим, что все перечисленные в начале этого раздела трудные вопросы квантовой механики, в эволюционной квантовой механике если не решены, то получили существенно новое освещение, в том числе проблема времени и закон временной эволюции нестабильных систем. Идеи квантовой синергетики (эволюционной квантовой механики) начинают постепенно проникать и в теорию атомного ядра. В этой области уже получены первые конкретные результаты [34].

7. ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЗАКОНА РАСПАДА

В предыдущих разделах обсуждались наиболее строгие подходы к теоретическому описанию временной эволюции изолированных квазистационарных состояний. Однако вопрос о виде закона распада решался и в рамках не очень строгих приближений. Ниже мы приведем примеры таких результатов.

В [35] рассмотрена эволюция квазистационарного состояния при аналитическом решении конкретной предельно упрощенной квантовомеханической задачи о проникновении частицы фиксированной массы и энергии через сферически-симметричный дельтаобразный потенциальный барьер (там же приведены ссылки на аналогичные более ранние публикации). Для тока вылетающих частиц за барьером получено выражение

$$\frac{2ma^2}{\hbar} j(l, t) = \frac{e^{-t/T}}{T} + \frac{1 + 3l + 3l^2 (4n^3\pi^3 T)^{1/2} + 4n^3\pi^3 T l^3}{32n^3\pi^9 T^2 t^4} + \frac{e^{-t/2T}}{2n^3\pi^7/2t^{3/2}T} \left[\sin \left(n\pi l - Et - \frac{\pi}{4} \right) + n\pi l \cos \left(n\pi l - Et - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (83)$$

где m — масса вылетающих частиц; a — характерный размер потенциальной ямы; l — орбитальный момент вылетающей частицы; E — средняя энергия квазистационарного состояния; n — число узлов волновой функции частицы внутри потенциальной ямы. Из анализа этого выражения в [35] делаются следующие выводы: при малых временах наблюдения в законе распада имеют место нерегулярные короткопериодные осцилляции, далее — область экспоненциальности, при больших временах наблюдения опять возможны осцилляции в законе распада. С увеличением ширины ΔE квазистационарного состояния область времен, в которой распад экспоненциальный, сужается, а частота осцилляций уменьшается. Например, при $\Delta E/E = 0,13$

в этой работе предсказываются осцилляции в законе распада с характерным периодом $\sim T$ при временах наблюдения $\sim 7T$. Для узких квазистационарных состояний с $\Delta E/E \ll 1$ область экспоненциальности расширяется, а частота осцилляций увеличивается, приближаясь по порядку величины к частоте столкновений частицы с потенциальным барьером. Для узких резонансов при больших временах наблюдения

$$t \gtrsim 5T \ln (E/\Delta E) \quad (84)$$

предсказывается уменьшение скорости распада обратно пропорционально времени.

В работе [36] того же автора делается попытка объяснить экспоненциальность и гипотетическую неэкспоненциальность путем привлечения для объяснения вида закона распада представления о скрытых параметрах — тоже гипотетических переменных, с помощью которых делаются попытки вернуть детерминизм в квантовую механику. Если следовать [36], то процесс распада интерпретируется следующим образом. Пусть $x_1(0), \dots, x_n(0)$ — значения некоторых ненаблюдаемых непосредственно (скрытых) параметров, описывающих ядерное состояние в момент времени $t = 0$ и определяющих точку в n -мерном пространстве координат x_1, \dots, x_n . Пусть эволюция системы во времени описывается движением точки в этом пространстве. Допустим распад происходит тогда, когда эта точка проходит через поверхность какого-либо из большого числа маленьких «доменов» в этом пространстве. Если для ядер конкретного источника домены расположены случайно, то имеет место экспоненциальный распад. Если исходное состояние приготовлено так, что распределение доменов отличается от случайного, то будут отклонения от экспоненциального закона распада. Сначала распадутся те ядра, для которых начальные значения скрытых параметров лежат в определенной пространственной области, а потом будут распадаться те ядра, средние свойства которых отличаются от средних свойств ядер в исходном состоянии. Конечно, приведенное рассуждение не может претендовать на роль теории, оно является лишь попыткой качественно увязать проблему о виде закона распада с фундаментальными проблемами квантовой механики.

Названные работы далеко не исчерпывают всех работ, в большей или меньшей степени связанных с проблемой о виде закона распада. Конкретные результаты можно найти даже в литературе по истории физики. Например, в [37] рассмотрен α -распад деформированных ядер в предположении, что эффективный потенциальный барьер для вылетающих α -частиц зависит от времени по периодическому закону, что обусловлено вращением статически деформированного ядра и колебаниями его поверхности. В этом случае вероятность распада описывается суммой двух слагаемых: постоянного для данного ядра, обусловленного средней высотой барьера, и осцилляторного, для которого характерная частота колебаний порядка частоты коле-

баний поверхности ядра. Об экспериментальном наблюдении соответствующих колебаний значений вероятности распада говорить не приходится, но их учет в виде средних по времени позволил в некоторых случаях улучшить согласие данных эксперимента (относительные вероятности α -переходов, квадрупольные моменты α -радиоактивных ядер) с предсказаниями теории [37].¹

8. ВОЗМОЖНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ГИПОТЕТИЧЕСКОЙ НЕЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ ЗАКОНА РАСПАДА

Из квантовой механики (см. разд. 2—4) следует, что закон распада неэкспоненциальный, а экспоненциальность — это приближение, справедливое в широком, но ограниченном диапазоне времен. Однако все наблюдаемые до сих пор распады с высокой точностью следуют экспоненциальному закону. Это воспринимается как противоречие. «Закон, получивший столь мощную эмпирическую поддержку из данных по радиоактивным процессам, является, однако, не строгим следствием квантовой механики, а всего лишь результатом тонких приближений» [38]. «В некоторых случаях экспоненциальный закон распада подтвержден экспериментально с удивительной степенью точности. При этом полученная точность значительно превышает степень точности, на которую мы имеем право рассчитывать, исходя из весьма шатких предпосылок, на которых основывается вывод данного закона» [15, с. 543]. Рассмотрим в связи с этим, как можно объяснить, что наблюдаемый закон распада экспоненциальный (если в действительности он неэкспоненциальный) и к каким следствиям может привести экспериментальное обнаружение гипотетических эффектов неэкспоненциальности.

Экспоненциальный распад соответствует случаю распада систем без памяти, в случае неэкспоненциального распада система «помнит» свою предысторию. Если предположить, что повторные измерения способствуют уменьшению или потере памяти системы, то наблюдаемую экспоненциальность распада можно связать с тем, что закон распада в результате измерения меняется так, что слабые эффекты неэкспоненциальности компенсируются. В связи с этим возникла идея объяснить наблюдаемую экспоненциальность распада тем, что исследуемая нестабильная система подвергается последовательным многократным измерениям (обзор полученных в этом направлении результатов и список литературы см. в [20]).

В каждом акте измерения происходит редукция (коллапс) волновой функции системы. Предположим, что если в результате измерения система найдена нераспавшейся, то редукция происходит к исходному состоянию (физическое обоснование такого предположения см. в [39—41]). Предположим, что измерения выполняются с помощью пузырьковой камеры или другого трекового прибора. Структуру этого прибора (камеры) описывает функция $W(t, t')$, значения которой задают вероятность того, что в течение отрезка времени (t, t') система не измерялась. Если $E(\tau, t)$ обозначить вероятность того, что состоя-

ние, приготовленное в момент времени τ , доживет в измерительном приборе до момента времени t (после многократных последовательных измерений в случайные моменты времени), то $E(0, t)$ — измеряемый закон распада. Если дополнительно учесть, что момент первого измерения тоже случайный, то для измеряемого закона распада имеем

$$E(t) = \int_{\tau_0}^0 G_0(\tau) E(\tau, t) d\tau, \quad (85)$$

где $G_0(\tau)$ — распределение плотности вероятности первого измерения в камере. Первичным законом распада называют функцию $P(t)$, которая задает вероятность того, что состояние, приготовленное в момент времени $t = 0$ и не подвергавшееся измерениям, доживет до момента времени t (обычное определение закона распада). Принимая во внимание при вычислении $E(t)$ вклады от таких процессов, когда система в течение времени $(0, t)$ не измерялась или измерялась многократно (и всегда была найдена нераспавшейся), можно найти

$$E(t) = W(0, t) + \int_0^t \dot{W}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (86)$$

где $\dot{W}(t, t') = \partial W(t, t') / \partial t$, а $f(t)$ находится как решение уравнения Вольтерра второго рода:

$$f(t) = -W(0, t) P(t) - \int_0^t \dot{W}(\xi, t) P(t - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (87)$$

При решении уравнений (86), (87) обычно полагают, что функция $W(t, t')$, описывающая структуру трековой камеры, непрерывная и неубывающая по отношению к первому из аргументов, а производная \dot{W} является ограниченной и измеримой по t . Тогда из теории уравнений Вольтерра следует, что решение уравнения (86) всегда существует, оно является единственным, непрерывным и приводит к $E(0) = 1$. Однако из-за технических трудностей эти уравнения решают обычно только для различных частных случаев. Например, для так называемой однородной камеры [41] с $W(t, t') = \exp[-\lambda(t' - t)]$ измеряемый закон распада выражается:

$$E(t) = \Phi(t) \exp(-\gamma t), \quad t \geq 0. \quad (88)$$

Здесь γ — положительная постоянная (измеряемая постоянная распада); $\Phi(t)$ — асимптотически периодическая функция. Измеренное время жизни зависит не только от $P(t)$ — вероятности распада — но и от структуры камеры $W(t, t')$ [39, 42]. Для однородной камеры можно получить [41]

$$\lambda \int_0^{\infty} P(t) \exp[(\gamma - \lambda)t] dt = 1. \quad (89)$$

Из свойств этого уравнения следует, что для неэкспоненциального закона распада решение γ зависит от частоты измерений λ , т. е. измеряемое время жизни зависит от условий измерения.

В [20] анализ модели распада каонов в пузырьковой камере доведен до числового значения. Приведем результаты этого анализа, который проводился в предположении, что $W(t, t') = \exp[-\lambda(t) \times (t' - t)]$, где $\lambda(t)$ слабо зависит от времени. Полагая, что P и f в (86), (87) в той же шкале времени тоже меняются слабо, заменяют $W(t, t')$ более простым выражением

$$W(t, t') = \begin{cases} 1, & t \leq t' < t + \lambda^{-1}(t) \\ 0, & t + \lambda^{-1}(t) \leq t', \end{cases} \quad (90)$$

с помощью которого можно найти в явном аналитическом виде измеряемый закон распада $E(t)$ в предположении, что первичный закон распада $P(t)$ неэкспоненциальный:

$$P(t) = N^2 (e^{-\Gamma t} + M(t)). \quad (91)$$

Для исследуемой модели, когда рассматривается прохождение пучка частиц через трековую камеру, формулу (91) можно переписать как функцию положения частицы x . С учетом этого из формул (86), (87) для измеряемого закона распада получается равенство

$$E(x) = E_0(x) e^{K(x)}, \quad (92)$$

где $E_0(x)$ — экспоненциальный множитель, а $\exp[K(x)]$ определяет неэкспоненциальную поправку, возникающую из-за неэкспоненциальности $P(t)$ (91):

$$E_0(x) = \exp \left[-\Gamma \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{c\beta(\xi) \gamma(\xi)} \right]; \quad (93)$$

$$K(x) \approx \int_{x_0}^x [2 \ln N + M(\Delta t(\xi)) e^{\Gamma \Delta t(\xi)}] \frac{d\xi}{L(\xi)}. \quad (94)$$

Здесь $\Delta t(\xi) = L(\xi) [c\beta(\xi) \gamma(\xi)]^{-1}$; $L(\xi)$ — расстояние между точками, в которых происходят любые два последовательных измерения; β — релятивистский фактор; c — скорость света в вакууме. В некоторых упрощающих предположениях для неэкспоненциальной поправки $M(t)$ из (91) получается следующее выражение:

$$M(t) \approx \frac{4\delta}{\pi e} [\cos(\epsilon t) + \epsilon t \operatorname{Si}(\epsilon t)] e^{-\delta t}, \quad (95)$$

где $\delta = \Gamma/2$; $\delta t \gg 1$; $\epsilon \gg \delta$ (ϵ — средний энергетический разброс пучка регистрируемых частиц). Для заряженных каонов с $m = 493 \text{ МэВ}/c^2$, $\Gamma = 5,32 \cdot 10^{-14} \text{ МэВ}$, регистрируемых в водородной пузырьковой камере при нормальных условиях, найдено, что наблюдаемый эффект неэкспоненциальности даже при $|M(t)| \sim \delta/\epsilon$ имеет

порядок $\leq 10^{-7}$. Если в пузырьковой камере смотреть распад нестабильных ядер (для них плотность ионизации, а значит, и плотность измерений в Z^2 раз больше), то это число будет больше [20]. Таким образом, если процедура измерения действительно влияет на распад так, что «память» системы ухудшается, то эффекты неэкспоненциальности в результате измерений уменьшаются и наблюдаемый закон распада при достигнутой точности опытов должен быть экспоненциальным.

Для экспоненциального закона распада справедливо соотношение Вайскопфа — Вигнера

$$P(t_1)P(t_2) = P(t_1 + t_2), \quad t \geq 0, \quad (96)$$

где $P(t)$ — вероятность выживания системы к моменту времени t . Функциональное уравнение (94) имеет единственное решение — это экспонента. В некоторых случаях равенство (96) обобщают, понимая под $P(t)$ семейство операторов, определенных на положительной полуоси времени и образующих полугруппу (это обобщенное соотношение Вайскопфа — Вигнера). Однако условие Вайскопфа — Вигнера несовместимо с выводами из полуограниченности спектра оператора полной энергии. Из (96) следует, что распад может быть только строго экспоненциальным, а из принципа спектральности следует (см. разд. 2), что распад не может быть всюду экспоненциальным. Обычно считают [20], что полугрупповое описание только приближенное, ссылаясь при этом на желание не отказываться от основных принципов квантовой механики. Но, как мы видели в разд. 6, существует и противоположная точка зрения: распад всегда строго экспоненциальный, тогда соотношение Вайскопфа — Вигнера и полугрупповой подход точные, причем этот вывод можно обосновывать ссылкой на основной постулат эволюционной квантовой механики [30].

Сделанный выше вывод о сглаживании эффектов неэкспоненциальности при повторных измерениях основывался на предположении, что измерения уменьшают память системы. Обязательно ли это так и всегда ли можно определить было или не было измерение [43]? Здесь затрагивается вопрос о сущности квантовых измерений (следуя Шредингеру [44], его формулируют иногда в виде «парадокса кота» в ящике с гильотиной). Он подробно разработан Д. И. Блохинцевым [25], который подчеркивает, что квантовое измерение, приводящее к стягиванию волновой функции, состоит в том, что микрочастица производит макроявление (например, образование пузырьков в пузырьковой камере или возникновение электронной лавины при срабатывании счетчика Гейгера). А результат измерения зависит от того, как разделается микрообстановка, в которой происходит интересующее нас макроявление, на часть, определяющую исследуемый квантовый ансамбль, и на часть, определяющую измерение — измерительный прибор.

В рассмотренном выше случае в пузырьковой камере наблюдают нераспавшиеся частицы. Здесь нет сомнения в том, было или не было измерение (есть пузырек — значит есть измерение). При наблюдении радиоактивного распада наблюдают не сами нестабильные ядра, а продукты их распада. Срабатывание счетчика интерпретируется как акт измерения. А если счетчик не срабатывает, это измерение или нет? Если радиоактивный источник окружен со всех сторон детекторами со 100 %-ной эффективностью регистрации, то при отсутствии счета все-таки получается информация о нестабильной системе, хотя при этом она не обязательно остается неизменной. Соотношение Вайскопфа — Вигнера (96) должно выполняться, если процедура такого измерения на волновую функцию системы не влияет (если нельзя определить, было измерение или не было). В этом случае распад строго экспоненциальный. Если процедура такого измерения как-то меняет волновую функцию нераспавшейся системы, то при этом, вообще говоря, могут изменяться и ее распадные свойства и становятся возможными проявления неэкспоненциальности. Однако здесь они не противоречат соотношению Вайскопфа — Вигнера, так как связаны с процедурой измерения.

Рассмотрим теперь описанные в литературе следствия гипотетической неэкспоненциальности закона распада.

В [45] квантовая теория распада [7] применяется к проблеме обоснования статистической физики. Рассмотрены замкнутые неравновесные консервативные физические системы при их задании оператором полной энергии H и вектором начального состояния $\psi_0 = \psi(x, t = 0)$. Тогда поведение такой системы во времени описывается [45] вектором $\psi(x, t)$, который является решением задачи Коши для уравнения Шредингера. На этом основании формальный аппарат теории распада [7] практически без изменений применяется [45] для описания статистических объектов*. Принцип спектральности — полуограниченность спектра энергии — приводит к появлению эффектов неэкспоненциальности при больших временах t и, следовательно, к появлению эффектов, зависящих от начального состояния, которые определяют память системы. Это приводит к тому, что эргодическая гипотеза в рамках квантовой теории, строго говоря, несправедлива, так как значения операторов в равновесном состоянии (при $t \rightarrow \infty$) явно зависят от времени. Таким образом, обнаружение или необнаружение эффектов неэкспоненциальности при радиоактивном распаде одновременно оказало бы влияние на определение области применимости эргодической гипотезы в квантовой статистической физике.

В [46] с помощью квантовой теории распада [7] рассмотрено доказательство H -теоремы Больцмана, из которой следует монотонное

* ... «Укажем только, что Крылов показал несостоятельность работ, основанных на описании статистических систем с помощью ψ -функции, так как понятия максимального полного опыта для квантовомеханического и макроскопического описания не совпадают» [32, с. 44—45].

неубывание энтропии, и найдены точные достаточные условия на оператор гамильтониана H неравновесной физической системы, на оператор A физической величины, измерения которой выделяют статистический ансамбль, и на вектор начального состояния системы, при которых H -теорема Больцмана доказывается строго. Показано, что вблизи равновесия (при $t \rightarrow \infty$) H -теорема Больцмана неверна (а значит, нарушается второе начало термодинамики), так как производная энтропии dS/dt знакопеременна и, следовательно, становится возможным спонтанное образование на некоторое время порядка из хаоса (см. примечание на с. 820).

Отметим еще влияние вида закона распада на интерпретацию результатов ведущихся сейчас крупномасштабных экспериментов по поиску распада свободных протонов, который предсказывает разрабатываемая сейчас единая теория электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий. Время жизни свободных протонов ожидается равным $T_p \gtrsim 10^{30} \div 10^{32}$ лет, а эксперимент дает пока нижнюю оценку значения $T_p \gtrsim 2 \cdot 10^{32}$ лет. Халфин [47] впервые обратил внимание на малость отношения возраста вселенной $T_B \sim 10^{10}$ лет ко времени жизни свободного протона $T_p \gtrsim 10^{32}$ лет:

$$\frac{T_B}{T_p} \ll \frac{1^{10}}{1^{32}} = 10^{-22}. \quad (97)$$

Таким образом, если закон сохранения барионного заряда действительно нарушается и протоны нестабильны, то они еще очень «молоды». При столь малых временах наблюдения, во-первых, нет никаких экспериментальных данных о виде закона распада и, во-вторых, большинство теорий предсказывает существенные эффекты неэкспоненциальности: короткопериодные (по сравнению со временем жизни) осцилляции в законе распада и замедление распада при очень малых временах (эффект Зенона). Следовательно, факт экспериментального обнаружения или необнаружения распада свободных протонов в современных опытах, вероятно, без оговорок трудно использовать для оценок их времени жизни, так как закон распада для столь молодых распадающихся систем, вообще говоря, неизвестен и само понятие времени жизни может быть еще неприменимо.

В [47] на тот факт, что распад протонов, возможно, еще не достиг области экспоненциальности, указывается, но не делается каких-либо численных оценок. Оценки эффективного времени жизни с учетом неэкспоненциальности распада обсуждаются в [48]. Полученные численные значения лежат в пределах $10^{26} - 10^{54}$ лет и существенно зависят от принимаемых допущений. В [49] обсуждается возможное проявление неэкспоненциальности (замедление распада из-за эффекта Зенона) при наблюдении двойного $\beta\beta$ -распада. В этих работах делается вывод о том, что неэкспоненциальность распада и эффект Зенона могут привести к измеримому замедлению распада для таких экстремально редких процессов, как распад протона и двойной $\beta\beta$ -распад.

В [47—49] речь идет о возможности наблюдения экспериментальных проявлений замедления распада. Другой подход состоит в том, что эффект Зенона — это проявление несовершенства теории. Для преодоления теоретических трудностей предлагают весьма радикальные меры. В [18] вводится дискретное время с такой длительностью минимального дискретного временного интервала, чтобы вероятность квантового перехода успевала достигать временной области, где она пропорциональна не t^3 (44), а t (39) и распад экспоненциальный. В [19] рассматривается непрерывное время, но благодаря атомной природе измерительного прибора считается, что временной интервал между измерениями не может быть произвольно малым. При его длительности $\sim 10^{-19}$ с (размер атома, деленный на скорость света) нестабильная система должна успевать переходить во временной интервал, где вероятность перехода пропорциональна t , распад экспоненциальный, а эффекта Зенона нет.

Экспоненциальность распада является также существенным допущением ядерной космохронологии. В случае обнаружения отклонений от экспоненциальности можно пытаться объяснить, например, факт обнаружения на Земле четвертого естественного радиоактивного элемента [50] — ^{244}Pu с $T_{1/2} = 8,2 \cdot 10^7$ лет — возможным проявлением эффектов неэкспоненциальности за время $\sim 60 T_{1/2}$, которое прошло с момента образования Солнечной системы $4,7 \cdot 10^9$ лет назад.

9. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАКОНА РАСПАДА

Большая часть огромного количества эмпирических данных о временах жизни элементарных частиц, основных и возбужденных состояний атомных ядер получена в результате анализа измеренных кривых распада в предположении их экспоненциальности. Имеются лишь единичные случаи, когда учитывают отклонения от экспоненциального закона, и относятся они [51] к определению времен жизни состояний из области квазинепрерывного спектра, где плотность перекрывающихся уровней описывается распределением Портера — Томаса. Однако мы обсуждаем распад только изолированных квазистационарных состояний и случая перекрывающихся уровней касаться не будем, так как это большая отдельная тема [33]. Практически все опыты, выполненные с целью определения времен жизни, проводились при временах измерения $\leq 10 T_{1/2}$, причем с радиоактивными источниками ядер неодинакового возраста. Конечно, результат каждого такого опыта в определенной степени подтверждает экспоненциальность закона распада, однако степень их точности весьма низкая и о проявлении малых гипотетических отклонений от экспоненциального закона распада здесь не может быть и речи.

Опыты по исследованию закона распада должны удовлетворять определенным требованиям. Отклонения от экспоненциальности могут быть существенными либо при очень малых $t \ll T_{1/2}$, либо при очень больших $t \gg T_{1/2}$ временах наблюдения. Проявления эффектов не-

экспоненциальности возможны также при некоторых специальных условиях возбуждения распадающихся систем, когда времена наблюдения $\sim T_{1/2}$. При исследовании экспоненциальности (поиске гипотетической неэкспоненциальности) закона распада необходимы источники радиоактивных ядер одного возраста. Эксперименты, поставленные специально для исследования вида закона распада, немногочисленны и большая их часть суммирована в обзорной заметке [52], содержащей сведения о результатах около 15 работ по исследованию кривых распада μ^+ , π^+ , K^+ , K_0^1 , K_0^2 -мезонов, Λ_0^- , Σ^- , Ξ^- -гиперонов и радиоактивных ядер.

Опыты по исследованию закона распада при малых временах наблюдения $t \ll T_{1/2}$ практически отсутствуют, если не принимать во внимание эксперименты по поиску распада свободных протонов или двойного $\beta\beta$ -распада. Определенную информацию о виде закона распада при малых t может дать систематический анализ результатов опытов по измерению времен жизни искусственно приготовленных очень долгоживущих ядер (например, ^{226}Ra с $T_{1/2} = 1,6 \cdot 10^3$ лет или ^{40}K с $T_{1/2} = 1,28 \cdot 10^9$ лет), однако такие работы нам не известны.

Первые эксперименты по исследованию закона распада при больших временах наблюдения были выполнены Резерфордом [53] в 1911 г. Была измерена активность источника ^{222}Rn ($T_{1/2} = 3,8$ дня) в моменты времени, отстоящие друг от друга на $27 T_{1/2}$ и показано, что период полураспада, найденный по этим двум точкам, совпадает с периодом полураспада ^{222}Rn , найденным в измерениях при малых временах t . Такой опыт весьма труден, так как в первом измерении надо работать с источником большой активности, обеспечить его высокую чистоту и идентичные условия счета частиц в начале и в конце опыта, когда регистрируемые активности различаются в $2^{27} \sim 10^8$ раз. Успех эксперимента был обеспечен, главным образом, высоким качеством радиохимической очистки источника. В результате было показано, что экспоненциальность закона распада при больших временах наблюдения хорошо соблюдается вплоть до времен $\sim 27 T_{1/2}$. Это подтверждало экспоненциальный закон распада, гипотетические эффекты неэкспоненциальности были тогда неизвестны, поэтому долгое время аналогичные опыты не ставились.

После появления теоретических предсказаний эффектов неэкспоненциальности интерес к экспериментальному исследованию закона распада возобновился. Особенно детально экспоненциальность распада обсуждалась [54] в связи с экспериментами по наблюдению распада $K_2 \rightarrow 2\pi$, в которых впервые были получены указания на несохранение CP -четности. В этих опытах наблюдались распады $K \rightarrow 2\pi$ на расстоянии 19 м от места рождения K -мезонов, которое соответствует ~ 300 длинам распада K_1 -мезонов. Наблюдаемые распады $K \rightarrow 2\pi$ можно было объяснить либо примесью K_1 -мезонов на большом расстоянии от места рождения K -мезонов, либо распадом $K_2 \rightarrow 2\pi$, который запрещен, если CP -четность сохраняется. В связи с этим теоретически оценивалась возможность объяснить наблю-

даемые распады $K \rightarrow 2\pi$ на расстоянии около 300 длин распада K_1 -мезонов эффектами неэкспоненциальности при их распаде. При этом было найдено, что оцененные неэкспоненциальные поправки пренебрежимо малы, даже если учесть дополнительные неэкспоненциальные члены, связанные с порогами распада нестабильных частиц [55]. Обзор результатов появившихся в связи с этим экспериментов по исследованию закона распада приведен в [52]. Из них наибольший интерес представляют данные работы [56], в которой кривая распада π^+ -мезонов прослежена в интервале времен наблюдения $10 T_{1/2} \leq t \leq 22 T_{1/2}$. Эксперименты на других элементарных частицах выполнены с худшей точностью и в меньшем диапазоне времен наблюдения. Измерения кривой распада ^{56}Mn [36] проводились

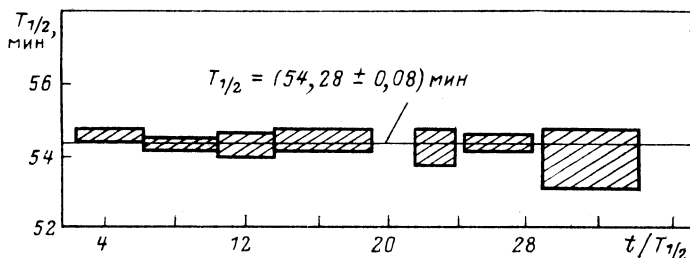
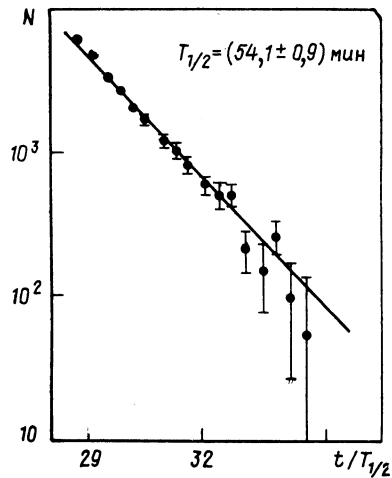


Рис. 1. Зависимость значения периода полураспада $T_{1/2}^{116m_1\text{In}}$ от возраста источника [57]. Длина основания заштрихованного прямоугольника — продолжительность измерения кривой распада, его высота — пределы погрешности значения $T_{1/2}$, найденного по этим экспериментальным данным

вплоть до времен наблюдения $\leq 40 T_{1/2}$, однако полученные данные не поддаются корректной количественной интерпретации (автор [36] даже не определил по своим данным период полураспада ^{56}Mn). Во всех этих опытах отклонения от экспоненциального закона распада не обнаружены и количественных результатов получено не было.

В недавней работе [57] измерялась кривая распада $^{116m_1}\text{In}$ ($T_{1/2} = 54$ мин) при временах наблюдения $t \leq 35 T_{1/2}$. При облучении нейтронами реактора образцов металлического индия одновременно изготавливались два источника ядер $^{116m_1}\text{In}$: малый q и большой Q . Измерения с источником q начинались практически сразу после конца облучения, измерения с источником Q начинались после его выдержки для «остывания» в течение времени $\sim 20 T_{1/2}$. Так впервые была измерена зависимость значения вероятности распада (периода полураспада) от возраста источника (рис. 1). Активность источника Q (~ 30 кКи) позволила с хорошей точностью провести измерения кривой распада $^{116m_1}\text{In}$ вплоть до времени $\leq 35 T_{1/2}$ (рис. 2). Для регистрации γ -квантов исследуемой активности применялся полупроводниковый $\text{Ge}(\text{Li})$ -детектор большого объема и высокого энергетического разрешения, что позволило аккуратно учесть даже малые фоновые активности. В этих опытах отклонений от экспоненциально-

Рис. 2. Кривая распада ядер ^{116m}In одного возраста [57] в диапазоне времен измерения $29-35 T_{1/2}$ ($N = St/t_{\text{ж}}$, где $t = 600$ с — продолжительность отдельного измерения; $t_{\text{ж}}$ — соответствующее «живое» время анализатора импульсов; S — число отсчетов в пике γ -линии 1097 кэВ. Значение $T_{1/2} = (54,1 \pm 0,9)$ мин найдено по приведенным на рисунке экспериментальным данным



сти также не обнаружено, но впервые найдены оценки верхних пределов значений гипотетических параметров неэкспоненциальности в предположении, что неэкспоненциальные члены имеют вид аддитивный к экспоненте поправки $\sim t^{-m}$ с $m > 1/2$ [7], и в предположении о возможных отклонениях от экспоненциальности осцилляторного типа [10]. Если предположить, что закон распада приближенно описывается формулой [57]

$$L(t) = \exp(-t \ln 2/T_{1/2}) + \sum \alpha_m (t/T_{1/2})^{-m}, \quad (98)$$

где α_m — параметры неэкспоненциальности, то из сравнения с экспериментом можно найти α_m или верхнюю границу значений α_m и, таким образом, дать количественную оценку степени соответствия экспериментальных данных экспоненциальному закону распада. Определяя период полураспада $T_{1/2}$ по малому участку кривой распада в области времен $t \sim t_0$ (t_0 — полное время опыта), тем самым находят оценку $L(t)$ при $t \sim t_0$:

$$L(t) \approx \exp(-t_0 \ln 2/T_{1/2}). \quad (99)$$

Сравнивая (98), (99) и считая m -й член в (98) главным, получаем для параметра α_m приближенную оценку

$$\alpha_m \leq (t_0/T_{1/2})^m \exp(-t_0 \ln 2/T_{1/2}) [\exp(t_0 \Delta) - 1], \quad (100)$$

где $\Delta = (\lambda + \Delta\lambda) - (\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$. Индексом нуль отмечены постоянная распада и погрешность в ее определении в последнем измерении кривой распада для «старого» источника; без индекса — то же для «молодого» источника. В качестве примера в табл. 3 приведены оценки α_1 и α_2 , найденные по экспериментальным результатам, показан-

ным на рис. 1 и 2. В этой же таблице для сравнения представлены наименьшие известные ранее оценки α_1 и α_2 , следующие из экспериментальных результатов [56]. Как видно из табл. 3, в [57] эксперимен-

Т а б л и ц а 3. Экспериментальные оценки параметров неэкспоненциальности

Распадающаяся система	$t_0/T_{1/2}$	α_1	α_2	Литература
π^+ $^{118m_1}\text{In}$	22	$\leq 1,1 \cdot 10^{-5}$	$\leq 1,2 \cdot 10^{-4}$	[56]
	35	$\leq 4,0 \cdot 10^{-10}$	$\leq 1,4 \cdot 10^{-8}$	[57]

тальная оценка верхней границы значения параметра неэкспоненциальности α_1 уменьшена приблизительно на 5 порядков.

Следуя [10], можно ожидать, что гипотетические отклонения закона распада от экспоненциального имеют осциллирующий характер. Тогда закон распада можно приближенно описать формулой [57]

$$L(t) = \exp(-t \ln 2/T_{1/2}) [1 + \beta_1 \sin(2\beta_2 t/T_{1/2})], \quad (101)$$

где β_1 , β_2 — параметры неэкспоненциальности. Экспериментальные данные [57] приводят к оценкам $|\beta_1| \leq 0,01$ при $1 < \beta_2 < 300$, где ограничения на возможные значения параметра β_1 связаны со статистической обеспеченностью измеренных кривых распада, а ограничения на значение β_2 связаны с длительностью измерения кривой распада.

Анализ условий измерения кривых распада при $t \gg T_{1/2}$ [58] показывает, что возможности опытов, проводимых без радиохимической очистки источников ограничены максимальными временами наблюдения $\leq 35 T_{1/2}$. С помощью современных ядерных реакторов даже с неуникальными параметрами можно изготовить источник для измерений при $t > 35 T_{1/2}$, однако при таких временах существенно мешают фоновые активности, образовавшиеся на примесных элементах в активируемом образце с относительным содержанием $\sim 10^{-11}$, счет от которых и определяет загрузку спектрометра при измерении последних точек на кривой распада. Поэтому длительность опыта можно существенно увеличить, если использовать радиохимические методы для очистки радиоактивного источника от мешающих примесей после его «охлаждения». Дальнейшее расширение диапазона наблюдений в область больших t при проверке экспоненциальности закона распада связано с использованием (в сочетании с радиохимией) уникальных базовых установок для изготовления сверхвысокоактивных рабочих источников и уникальных спектрометров со сверхнизким уровнем собственного фона.

Исследования распада атомных ядер при временах $t \sim T_{1/2}$ и специальных условиях возбуждения распадающихся состояний проводились в [59—61]. В [59] впервые наблюдалось увеличение среднего

времени жизни ядерного уровня при его возбуждении узким γ -спектром мессбауэровского источника. В этом опыте для времени жизни состояния $129,4$ кэВ в ^{191}Ir при его возбуждении γ -квантами той же энергии от мессбауэровского источника ^{191}Os было найдено значение времени жизни в $1,4$ раза превышающее время жизни $T = (1,753 \pm \pm 0,0085) \cdot 10^{-10}$ с того же состояния при его возбуждении широким γ -спектром, что находится в хорошем согласии с теоретическими предсказаниями. Если Γ — естественная ширина уровня, Δ — характерная ширина возбуждающего его γ -спектра, то для случаев $\Gamma \ll \Delta$, $\Gamma = \Delta$ и $\Gamma \gg \Delta$ среднее время пребывания ядер в возбужденном состоянии будет T ; $1,5 T$ и $2T$ соответственно [60]. Экспериментальные результаты [59] подтверждают важную для теории распада связь между плотностью вероятности распределения энергии в квазистационарном состоянии и законом распада, а также выводы [15, 60] о влиянии условий возбуждения уровня на его распад. В связи с обсуждаемой проблемой представляют интерес также результаты работы [61], в которой экспериментально подтверждена справедливость соотношения неопределенностей Тамма — Мандельштамма $\Delta E \Delta t \sim \sim \hbar$, где Δt — длительность цуга волн со степенью моноэнергетичности ΔE . В [61] методами мессбауэровской спектроскопии наблюдалось уширение изолированной линии при сокращении длительности цуга волн, приводящих к ее возбуждению.

Отметим еще результаты, получаемые при определении возраста различных земных, лунных пород и вещества метеоритов с целью определения зависимости постоянной распада λ от времени. Эти данные, полученные методами ядерной космохронологии (см. [62] и цитируемую там литературу), используются для проверки различных космологических теорий, предсказывающих изменение во времени фундаментальных физических констант и как следствие — изменение со временем значений постоянных радиоактивного распада естественных радиоактивных изотопов.

Кроме экспериментов, названных выше, для проверки экспоненциальности распада можно использовать связь (8) между законом распада и законом распределения энергии в квазистационарном состоянии. В этом случае экспериментально должна исследоваться не кривая распада квазистационарного состояния, а форма соответствующего ему изолированного резонанса в ядерных реакциях. Однако это предложение [63] экспериментальной поддержки пока не получило.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспоненциальный закон радиоактивного распада долгие годы тщательно исследовался теоретически и экспериментально, хотя опытов было выполнено немного и их результаты, как правило, трудно использовать для проверки теоретических предсказаний. К настоящему времени в различных теоретических подходах сделаны полярные выводы о виде закона распада. В рамках традиционной кванто-

вой механики различные варианты теории приводят к общему результату: закон распада не может быть экспоненциальным во всем диапазоне времен $0 < t < \infty$. Экспоненциальность — это приближение, применимое в широком, но ограниченном интервале времени наблюдения, и в пределе при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ распад обязательно неэкспоненциальный. В развитой в последние годы эволюционной квантовой механике, объединяющей динамическое и термодинамическое описание и содержащей традиционную квантовую механику как частный случай, закон распада строго экспоненциальный при всех временах t . Причем здесь экспоненциальность закона распада непосредственно следует из второго начала термодинамики, которое постулируется в эволюционной квантовой механике как фундаментальный физический факт. В свете этих результатов ясно видна роль экспоненциального закона распада как проявление одного из фундаментальных законов природы — закона необратимости времени и асимметрии между прошлым и будущим. В рамках квантово-полевого подхода, для которого конкретные результаты о виде закона распада получены пока только в рамках точно решаемых моделей Ли и Ван Кампена, найдено, что закон распада в пределе при $t \rightarrow \infty$ неэкспоненциальный. Однако соответствующим подбором параметров, которые в этих моделях никак не фиксируются, всегда можно добиться того, что распад будет экспоненциальным при любых как угодно больших, но конечных временах t , т.е. предсказания квантово-полевого подхода занимают промежуточное место между предсказаниями квантовой и эволюционной квантовой механики. Из изложенного видно, что экспоненциальность закона распада — это не частный результат, а закон, справедливость которого тесно взаимосвязана с такими фундаментальными проблемами, как необратимость и дискретность времени, тождественность частиц, различие чистых и смешанных состояний, квантовые измерения, конечная точность вычислений и измерений в квантовой механике, связь динамических и стохастических процессов и др.

Для эволюционной квантовой механики проверка экспоненциальности закона распада — критический опыт, отрицательный результат которого противоречил бы основному постулату теории. «Правда, как показали многочисленные теоретические исследования, отклонения от экспоненты слишком малы для того, чтобы их можно было измерить современными средствами. Важно, что экспериментальные и теоретические исследования продолжаются» [30, с. 86]. Причем, как мы видели ранее, сейчас существует реальная возможность расширить экспериментально исследуемую область времен, при которых проверена справедливость экспоненциального закона распада.

В заключение выражаем благодарность проф. К. Я. Громову и участникам семинара по физике атомного ядра Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макарионас К. В. // Сильные и слабые утверждения в ядерной спектроскопии и теории ядра. Л.: Наука, 1981. С. 25—38; Emery G. T. // Ann. Rev. of Nucl. Sci. 1972. Vol. 22. P. 165—202.
2. Серге Э. // Экспериментальная ядерная физика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. Т. 3. С. 10—56.
3. Тернов И. М., Родионов В. Н., Лобанов А. Е., Дорофеев О. Ф. // Письма ЖЭТФ. 1973. Т. 37. Вып. 6. С. 288—290; Волошин М. Б. // ЯФ. 1983. Т. 38. Вып. 3 (9). С. 814—816; Ternov I. M. et al. // J. Phys. J.: Nucl. Phys. 1986. Vol. 12, № 7. P. 637.
4. Гопыч П. М., Громов К. Я., Залюбовский И. И. // Свойства деформированных ядер. Лекции X Всесоюзной школы по ядерной физике. Ташкент: Фан, 1985. Ч. II. С. 54—79; Гопыч П. М., Залюбовский И. И., Шушь А. Ф. // Проблемы ядерной физики и космических лучей. Харьков: Вища школа, 1982. Вып. 17. С. 48—60.
5. Крылов Н. С., Фок В. А. // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. Вып. 2. С. 93—107.
6. Давыдов А. С. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1973; Блохинцев Д. И. Квантовая механика. М.: Наука, 1976; Гопыч П. М., Залюбовский И. И. Ядерная спектроскопия. Харьков: Вища школа, 1980.
7. Халфин Л. А. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 6. С. 1371—1382.
8. Винер А., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.
9. Hack M. N. // Phys. Lett. A. 1982. Vol. 90, № 5. P. 220—221.
10. Широков М. И. // ЯФ. 1975. Т. 21. Вып. 3. С. 674—687; Препринт ОИЯИ P2-7712, Дубна, 1974.
11. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971.
12. Носов В. Г. Макроскопические квантовые эффекты в атомных ядрах. М.: Атомиздат, 1980.
13. Друкарев Г. Ф. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 1. С. 59—68.
14. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. И. Рассеяние реакции и распада в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
15. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1969.
16. Де Бройль Л. Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики: Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
17. Lukierski J. Preprint ICPT, IC/72/128, Trieste, 1972.
18. Misra B., Sudarshan E. C. G. // J. Math. Phys. 1977. Vol. 18. P. 756.
19. Chiu C. B., Sudarshan E. C. G., Misra B. // Phys. Rev. D. 1977. Vol. 16. P. 520.
20. Экспер П. // ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. Вып. 1. С. 121—155.
21. Matthews P. T., Salam A. // Phys. Rev. 1958. Vol. 112. P. 283—287.
22. Lukierski J. // Fortschs. Phys. 1980. Vol. 28. P. 299.
23. Levy M. // Nuovo cimento. 1959. Vol. 14, № 3. P. 612—624.
24. Спасский Б. М., Московский А. В. // УФН. 1984. Т. 142. Вып. 4. С. 600—617; Гриб А. А. // УФН. 1984. Т. 142. Вып. 4. С. 619—634.
25. Блохинцев Д. И. Принципиальные вопросы квантовой механики. М.: Наука, 1966; Блохинцев Д. И. Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам. М.: Атомиздат, 1981.
26. Ford J. // Phys. Today. April. 1983. P. 40.
27. Постон Т., Стьюарт И. Теория катастроф и ее приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1980; Haken H. Synergetics. Berlin. Springer Verlag. 1978.
28. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
29. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядочению через флуктуации: Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
30. Пригожин И. От существующего к возникающему. Время и сложность в физических науках Пер. с англ. М.: Наука, 1985.

31. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
32. Вдовиченко Н. В. Развитие фундаментальных принципов статистической физики в первой половине XX века. М.: Наука, 1986.
33. Ольховский В. С. //ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. Вып. 2. С. 289—329.
34. Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Инопин Е. В. //ЯФ. 1987. Т. 42. Вып. 2. С. 350—356. Rotter I. //J. Phys. G: Nucl. Phys. 1986. Vol. 12, № 12. P. 1407—1421.
35. Winter R. G. //Phys. Rev. 1961. Vol. 123, № 4. P. 1503—1507.
36. Winter R. G. //Phys. Rev. 1962. Vol. 126, № 3. P. 1152—1153.
37. Ласко К. Н. //История и методология естественных наук. М.: Изд. МГУ. 1982. Вып. 27. С. 102—117.
38. Merzbacher E. Quantum Mechanics. 2nd ed., N.Y. Wiley, 1970.
39. Beskow A., Nisson I. //Ark. fys. 1967. Vol. 34. P. 561—569.
40. Ekstein H., Siegert H.J.F. //Ann. Phys. 1971. Vol. 68. P. 509—520.
41. Fonda L., Ghirardi G. C., Rimini A., Weber T. //Nuovo cimento. 1973. Vol. 15. P. 689—704; Vol. 18. P. 865.
42. Dagasperis A., Fonda L., Ghirardi G. C. //Nuovo cimento A. 1974. Vol. 21. P. 471—484.
43. Singh I., Whitaker M. A. B. //Amer. J. Phys. 1982. Vol. 50, № 10, P. 882.
44. Schrödinger E. //Naturwissenschaften. 1935. Bd 23. S.807.
45. Халфин Л. А. //ДАН СССР. 1965. Т. 162. С. 1273—1276.
46. Халфин Л. А. //Теор. и матем. физ. 1978. Т. 35. № 3. С. 425—429.
47. Khalfin L. A. //Phys. Lett. B. 1982. Vol. 112, № 3. P. 223—226.
48. Fleming G. N. //Phys. Lett. B. 1983. Vol. 125, № 4. P. 187—190.
49. Grotz K., Klardor H. V. //Phys. Rev. C. 1984. Vol. 30, № 6. P. 2098—2100.
50. Hoffmann D. S.e.a. //Nature. 1971. Vol. 234, № 5325. P. 132—134.
51. Hardy J. C.e.a. //Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 37. P. 133.
52. Николаев Н. Н. //УФН. 1968. Т. 95. Вып. 3. С. 506—507.
53. Rutherford E. //Acad. Wiss., Wien, Abt. II. 1911. Bd 120. S. 303—312.
54. Терентьев М. В. //УФН. 1965. Т. 86, № 2. С. 162—231.
55. Jacob R., Sacks R. G. //Phys. Rev. 1961. Vol. 121, № 1. P. 350—356.
56. Дунайцев А. Ф., Кутын В. М., Прокошкин Ю. Д. и др. //ЯФ. 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 826—828.
57. Гопыч П. М., Залюбовский И. И., Сотников В. В. и др. //ЯФ. 1984. Т. 39. Вып. 2. С. 257—259; Изв. АН СССР. Сер. физ. 1984. Т. 48, № 5. С. 938—944.
58. Сотников В. В. Методика и результаты исследования экспоненциальности закона радиоактивного распада на примере распада индия ^{116m}In . Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Харьков: Харьковский ГУ, 1985.
59. Давыдов А. В., Коротков И., Ромашева П. И. //Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31. Вып. 10. С. 596—599.
60. Вишневский И. Н., Давыдов А. Б., Лобов Г. А., Повзун В. И. Препринт ИТЭФ-70. М., 1974.
61. Войтовцкий В. К. и др. //ЯФ. 1983. Т. 38. Вып. 3. С. 662—667.
62. Герлинг Э. К., Овчинникова Г. В. //Радиохимия. 1977. Т. 19. Вып. 1. С. 106—120.
63. Soloviev V. G. Preprint JINR E4-11626, Dubna, 1978.