

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЯДЕРНАЯ ДИНАМИКА

*Ю. Л. Болотин, В. Ю. Гончар, Е. В. Инопин,
В. В. Левенко, В. Н. Тарасов, Н. А. Чеканов*

Харьковский физико-технический институт АН УССР, Харьков

Для коллективных ядерных процессов с большой амплитудой изучается переход от регулярного движения к хаотическому. Исследуется связь между особенностями динамики и геометрией поверхности потенциальной энергии. Детально рассмотрен ряд двумерных динамических систем, включая квадрупольные поверхностные колебания ядер и индуцированное ядерное деление.

Исследуются некоторые квантовые проявления классической стохастичности. В частности, изучена связь между статистическими свойствами квантовых энергетических спектров и характером — регулярным или хаотическим — движения в классическом пределе. Для потенциалов с локализованной областью отрицательной гауссовой кривизны обнаружен тройной переход регулярность — хаос — регулярность и прослежено его влияние на статистические свойства спектра.

The transition from regular to chaotic motion is studied for collective nuclear large amplitude processes. Connection between dynamics features and geometry of the potential energy surface is investigated. Particular consideration is given to different two-dimensional dynamic systems including quadropole surface vibration and induced fission of nuclei.

Some quantum manifestation of classical stochasticity are discussed specifically, the correlation between statistical properties of the quantummechanical energy spectrum and regular or chaotic character of the classical motion is studied. For dynamic systems with a local negative gaussian curvature regime a transition regularity-chaos-regularity is established, its influence on the statistical properties of the spectrum is shown.

ВВЕДЕНИЕ

Ядерные коллективные движения большой амплитуды, приводящие к коренной перестройке основного состояния, позволяют получить важную информацию о структуре ядерного вещества и особенностях взаимодействия нуклонов в нем. Однако теоретическое описание таких коллективных движений требует выхода за рамки сложившихся методов, в основном связанных с применением линейных приближений. Кроме того, подавляющее большинство задач, решаемых в ядерной физике, являются одномерными или искусственно сводятся к ним с использованием приближенной симметрии задачи или выделением некоторой доминирующей степени свободы (типа делительной координаты при описании процесса деления) и пренебрежением «второстепенными» степенями свободы. При этом молчаливо предполагается, что учет отброшенных степеней свободы не может радикально изменить результаты одномерной задачи.

Трактовка ядра как многомерной нелинейной динамической системы (в частности, описываемой гамильтоновыми уравнениями движения) делает возможным существование при определенных условиях помимо хорошо изученных регулярных решений уравнений движения принципиально новых динамических режимов, при которых движение ядерного вещества не отличимо от случайного, несмотря на полное отсутствие внешнего источника случайности [1—4]. Используя для термина «случайный» синонимы «хаотический», «стохастический», можно утверждать, что для атомного ядра, как и для любой нелинейной динамической системы, эти понятия адекватно отражают некоторые внутренние фундаментальные свойства, представляющие важный и интересный предмет исследования.

Коллективные возбуждения ядер традиционно описываются в рамках феноменологических моделей [5, 6], в которых ядерное вещество трактуется как жидкость, обладающая определенными свойствами инерции, упругости, вязкости. Каждая из таких моделей приспособлена для описания лишь узкого круга экспериментов и нуждается во введении набора параметров, связь которых с исходным нуклон-нуклонным взаимодействием выходит за рамки моделей. Предположение об адиабатичности рассматриваемых коллективных движений, т.е. о малости коллективных скоростей по сравнению с одночастичными скоростями нуклонов в ядре, позволяет, разложив полную энергию в ряд, ограничиться членами, квадратичными по коллективным скоростям, и тем самым придать гамильтониану такой же вид, какой обычно постулируется в феноменологических моделях

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{q}), \quad (1)$$

где \mathbf{q} — коллективная координата; \mathbf{p} — канонически сопряженный ей импульс. Однако в отличие от феноменологических моделей параметры адиабатического коллективного гамильтониана непосредственно связаны с исходным эффективным взаимодействием нуклонов в ядре. Динамика коллективных движений определяется, вообще говоря, нелинейным несепарабельным коллективным потенциалом $U(\mathbf{q})$. С помощью канонического преобразования $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Rightarrow (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ гамильтониан (1) можно привести к виду

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = H_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) + \varepsilon V(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad \varepsilon \ll 1, \quad (2)$$

где H_0 — интегрируемый гамильтониан, а V — нелинейная неинтегрируемая добавка.

Классическое понятие интегрируемости, восходящее к Пуанкаре, связывает это свойство с существованием дополнительных, помимо энергии, однозначных интегралов движения, соответствующих «скрытой» симметрии задачи. Более строго, согласно теореме Лиувилля [7], гамильтонова система с N степенями свободы интегрируема, если существует N однозначных интегралов движения, нахо-

дящихся в инволюции. Другими словами [8], свойство интегрируемости предполагает возможность разложения движения на элементарные компоненты. В интегрируемом случае элементарной динамической компонентой является движение на торе, которое удобно описывать в переменных угол — действие. В этих переменных гамильтониан (2) принимает вид

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta). \quad (3)$$

Предсказание поведения нелинейной системы, описываемой таким гамильтонианом (Пуанкаре считал эту проблему основной задачей динамики [7]), традиционно основывалось на одной из двух следующих версий. Согласно первой, слабое (в меру малости ε) возмущение приводит только к небольшому сдвигу частот и появлению малых комбинационных гармоник. В этом случае, как и в точно интегрируемом, система характеризуется N теперь уже приближенными интегралами движения. Вторая же версия допускает, что даже слабое возмущение может привести к существенному искажению невозмущенного движения, разрушая соответствующие интегралы движения и превращая его в стохастическое. Если первый подход казался естественным, топриятие второго, по крайней мере для систем с малым числом степеней свободы, наталкивалось на трудности. Последние тридцать лет происходило трудное осознание того, что стохастическое движение столь же рядовое явление в системах с более чем одной степенью свободы, как и привычное квазипериодическое движение. Примеры стохастического движения были обнаружены практически во всех разделах физики [1—4], и их число продолжает непрерывно увеличиваться.

Механизмом, обеспечивающим существование хаотических режимов в строго детерминированных системах, является локальная неустойчивость, приводящая к тому, что первоначально близкие траектории экспоненциально разбегаются в фазовом пространстве

$$d(t) = d(0) e^{ht}, \quad (4)$$

где d — расстояние между двумя точками в фазовом пространстве, принадлежащем разным траекториям. Более точно под стохастичностью можно понимать возникновение в системе статистических свойств вследствие локальной неустойчивости [1].

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две произвольные функции координаты $z(t) = [q(t), p(t)]$ в фазовом пространстве. Эволюция системы определяется оператором \hat{T} :

$$\hat{T} z(t) = z(t + T), \quad (5)$$

а эволюция произвольной функции от z представима в виде

$$f(z, t + T) \equiv \hat{S}_T f(z, t) = f(\hat{T} z, t). \quad (6)$$

Определим корреляционную функцию

$$R(f, g | T) = \langle \hat{S}_T f, g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle, \quad (7)$$

где $\langle f \rangle \equiv \int f(z) dpdq$. Можно показать [1], что из свойства локальной неустойчивости (4) следует свойство перемешивания — расщепления временных корреляций

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(f, g | T) \sim e^{-hct} \quad (8)$$

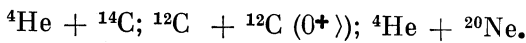
Причем средний инкремент локальной неустойчивости $\langle h \rangle$ определяет время расщепления корреляций:

$$h_c \sim \langle h \rangle. \quad (9)$$

Это соотношение устанавливает связь между динамикой системы и ее статистическими свойствами.

Локальная неустойчивость траекторий делает проблему задания начальных условий в классической механике столь же принципиальной, как и принцип неопределенности — проблему измерений в квантовой механике. Традиционный детерминизм классической механики, основанный на отождествлении физического мира с математическим континуумом, подразумевает возможность задания начальных условий с абсолютной точностью, что, очевидно, лишено смысла. «Мне всегда казалось удивительным, что должна существовать такая область — механика — и образованная по ее подобию классическая физика, где все абсолютно точно и свободно от неопределенностей, которые обыкновенно управляют жизнью и мышлением человека. Поэтому в исключении мнимой точности, реализуемой современной физикой, я вижу прогресс в стремлении к единому мировоззрению... Было бы разумно и классическую механику с самого начала формулировать статистически» [9]. Для систем, подверженных локальной неустойчивости, статистическое описание является единственно возможным.

Изложенные выше общие соображения подтверждаются прямым наблюдением хаотических режимов при математическом моделировании ядерных реакций с тяжелыми ионами [10]:



Авторам этой работы удалось разбить все полученные решения зависящих от времени уравнений Хартри — Фока на три класса: периодические, квазипериодические и стохастические. Для классификации решений был использован анализ мультипольных моментов ядерной плотности

$$M_{LI}(t) = \int dr r^L Y_{LM}(\hat{r}) \rho_I(r, t), \quad (10)$$

где

$$\rho_I(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \rho_p(\mathbf{r}, t) + \rho_n(\mathbf{r}, t), & I = 0; \\ \rho_p(\mathbf{r}, t) - \rho_n(\mathbf{r}, t), & I = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Автокорреляционная функция

$$C_{LI}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} |M_{LI}(\omega)|^2 \quad (12)$$

для изоскалярной квадрупольной моды ($L = 2, I = 0$) быстро затухает, что и позволяет отнести коллективное движение, описываемое этой модой, к стохастическому.

Хаотическая динамика, являясь одним из наиболее общих путей эволюции нелинейной системы, реализуется лишь в определенных областях значений параметров. Последнее обстоятельство приводит к необходимости ответить на следующие вопросы:

1. Возможно ли наблюдать динамический хаос в характерных для коллективной ядерной динамики процессах?
2. Если возможно, то какова критическая энергия, при которой происходит переход от регулярного движения к хаотическому?
3. Какие особенности стохастической динамики проявляются при энергии, превосходящей критическую?

В настоящем обзоре сделана попытка, по крайней мере частично, ответить на эти вопросы.

КРИТЕРИЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Понимая под стохастизацией процесс появления у системы статистических свойств вследствие локальной неустойчивости, мы получаем заманчивую возможность отождествления значений параметров, при которых в системе возникает локальная неустойчивость, с границей перехода к хаосу. К сожалению, в действительности ситуация оказывается сложнее. Дело в том, что все существующие критерии стохастичности, основанные на исследовании локальной неустойчивости, обладают известным [11] недостатком: потеря устойчивости регулярного движения не обязательно приводит к хаосу. Вместо этого, вообще говоря, возможен переход к другому, более сложному типу регулярного движения. Кроме того, само по себе утверждение о том, что локальные неустойчивости определяют глобальную динамику системы, является спорным. Вызывают возражения и отдельные детали выводов конкретных критериев стохастичности. Несмотря на эти серьезные ограничения, имеющийся опыт [1—4] позволяет утверждать, что критерии подобного типа дают существенный признак перехода от упорядоченного движения к хаотическому и в совокупности с численным экспериментом значительно облегчают анализ многомерного нелинейного движения.

Целый ряд критериев стохастичности основан на непосредственной оценке скорости разбегания близких траекторий в фазовом пространстве. Исследуем [4] поведение двух первоначально близких траекторий $\{\mathbf{q}_1(t), \mathbf{p}_1(t)\}$ и $\{\mathbf{q}_2(t), \mathbf{p}_2(t)\}$. Линеаризованные уравнения движения для отклонений

$$\xi(t) = \mathbf{q}_1(t) - \mathbf{q}_2(t); \eta(t) = \mathbf{p}_1(t) - \mathbf{p}_2(t) \quad (13)$$

имеют вид

$$\dot{\xi}(t) = \eta; \dot{\eta}(t) = -\hat{S}(t)\xi, \quad (14)$$

где $\hat{S}(t)$ — матрица, построенная из вторых производных потенциала $V(\mathbf{q})$, вычисленных вдоль опорной траектории $\mathbf{q}_1(t)$:

$$S_{ij}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_1(t)}. \quad (15)$$

Устойчивость движения динамической системы, описываемой гамильтонианом

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p^2/2 + V(\mathbf{q}), \quad (16)$$

определяется в N -мерном случае $2N \times 2N$ -матрицей

$$\hat{\Gamma} = \begin{vmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ -\hat{S}(t) & 0 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

где $\hat{0}$ и \hat{I} — нулевая и единичная $N \times N$ -матрицы. Можно найти зависящее от времени преобразование T , такое, что

$$(\hat{T}\Gamma(t)\hat{T}^{-1})_{ij} = \lambda_i(t)\delta_{ij}. \quad (18)$$

Если хотя бы одно из собственных значений λ_i действительно, разбегание траекторий нарастает экспоненциально и движение является неустойчивым. Мнимые же собственные значения соответствуют устойчивому движению. Собственные значения, а следовательно, и характер движения, вообще говоря, изменяются со временем.

Для диагонализации матрицы $\hat{\Gamma}(t)$ требуется предварительное решение исходных уравнений движения, что делает задачу трудно выполнимой. Проблема может быть существенно упрощена, если предположить, что временная зависимость $\hat{S}(t)$ может быть устранена заменой зависящей от времени точки фазового пространства $\mathbf{q}_1(t)$, не зависящей от времени координатой q . Это сводит уравнения (14) для вариаций к системе автономных линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = \eta; \dot{\eta} = -\hat{S}(q)\xi, \quad (19)$$

в которых координата q рассматривается как не зависящий от времени параметр. Задача исследования устойчивости движения при этом существенно упрощается. Так, для системы с двумя степенями свободы уравнение для собственных значений матрицы Γ принимает вид

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & -\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & -\lambda & 0 \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & -\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} & 0 & -\lambda \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Его решение

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm [-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}]^{1/2}, \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b &= \text{Sp } \hat{S}(q) = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}; \\ c &= \det \hat{S}(q) = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Будем предполагать, что $b > 0$. Тогда при условии, что $c > 0$, решения λ — чисто мнимые и движение устойчиво. При $c < 0$ пара корней становится действительной, что приводит к экспоненциальному разбеганию близких траекторий, т.е. к неустойчивости движения. Знак c совпадает со знаком гауссовой кривизны $K(q_1, q_2)$ поверхности потенциальной энергии (ППЭ):

$$K(q_1, q_2) = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_2} \right)^2 \right]^2}. \quad (23)$$

Эта ассоциация наводит на мысль [12] о возможности существования следующего сценария перехода от регулярного движения к хаотическому, основанному на исследовании гауссовой кривизны ППЭ.

При низких энергиях движение вблизи минимума потенциальной энергии, где кривизна заведомо положительна, носит периодический или квазипериодический характер и отделено от области неустойчивости линией нулевой кривизны. При повышении энергии «частица» некоторое время будет проводить в области отрицательной кривизны ППЭ, где первоначально близкие траектории экспоненциально разбегаются, что в конечном счете на больших временах приводит к такому движению, которое имитирует случайное и обычно называется стохастическим. Согласно такому сценарию стохастизации критическая энергия перехода к хаосу совпадает с минимальным значением энергии на линии нулевой гауссовой кривизны.

Исследуем теперь влияние кривизны ППЭ на динамику гамильтоновой системы [13], используя в качестве примера трехпараметрическое семейство потенциалов

$$V(x, y; A, B, \mu) = x^2y + \frac{1}{3}\mu y^3 + \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2). \quad (24)$$

Ограничимся случаем $A > 0, B > 0$, что обеспечивает существование минимума потенциальной энергии в начале координат. При значениях параметров $A = B = 1, \mu = -1$ потенциал (24) сводится к известному потенциалу Хенона — Хейлиса [14] ставшему традиционным объектом испытания новых идей и методов связанных с

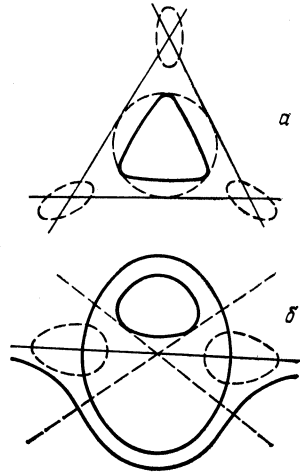


Рис. 1. Изолинии потенциала (а) и модифицированного потенциала Хенона — Хейлиса (б). Штриховая — линия нулевой гауссовой кривизны

исследованием стохастизации в гамильтоновых системах. В связи с проблемой интегрируемости широкую известность приобрел и другой набор параметров $A = B = \mu = 1$, приводящий к так называемому модифицированному потенциалу Хенона — Хейлиса.

Гауссова кривизна рассматриваемой ППЭ обращается в нуль в точках, удовлетворяющих уравнению

$$-\mu^{-1}x^2 + (y - y_0)^2 = R_0, \quad (25)$$

где

$$y_0 = -\frac{1}{4}\frac{B}{\mu}(1 - \kappa); R_0 = -\frac{1}{4}\frac{B}{\mu}(1 + \kappa); \kappa = -\frac{A}{B}\mu. \quad (26)$$

При $\mu < 0$ линия нулевой кривизны потенциала (24) представляет эллипс, вырождающийся для потенциала Хенона — Хейлиса в окружность (рис. 1, а):

$$x^2 + y^2 = 1/4. \quad (27)$$

В случае $\mu > 0$ линией нулевой кривизны служат ветви гиперболы, вырождающиеся для модифицированного потенциала Хенона — Хейлиса в две прямые (рис. 1, б):

$$y = \pm x - 1/2. \quad (28)$$

Энергия на линии нулевой кривизны для потенциала (24) определяется выражением

$$V(y; K=0) = \frac{3}{4} \mu y^3 + B(1 - \kappa) y^2 + \frac{1}{4} AB(2 - \kappa) y + \frac{1}{8} A^2 B. \quad (29)$$

Рассмотрим более подробно ситуацию, когда линия нулевой кривизны представляет замкнутую кривую ($\mu < 0$). В этом случае внутри интервала $|y - R_0, y + R_0|$ функция $V(y; K=0)$ достигает наименьшего значения в точке $\bar{y} = \frac{1}{4} \frac{B}{\mu} \kappa$. Для $\kappa < 1$ значение энергии

$$V(\bar{y}, K=0) = \frac{1}{48} \frac{B^3}{\mu^2} \kappa^2 (\kappa + 3) \quad (30)$$

совпадает с минимальной энергией $V_{\min}(K=0)$ на линии нулевой кривизны и согласно рассматриваемому сценарию стохастизации представляет собой критическую энергию, при которой происходит переход от устойчивого регулярного движения к неустойчивому хаотическому. При $\kappa > 1$ минимальное значение энергии на линии нулевой кривизны достигается на краю интервала в одной из точек $y_0 \pm R$, при этом

$$V_{\min}(K=0) = \frac{1}{12} \frac{B^3}{\mu^2}. \quad (31)$$

В частности, для потенциала Хенона — Хейлиса ($\kappa = 1$)

$$V_{\min}(K=0) = \frac{1}{48} \frac{B^3}{\mu^2} \kappa^2 (\kappa + 3) = \frac{1}{12} \frac{B^3}{\mu^2} = \frac{1}{12}. \quad (32)$$

В случае $\mu > 0$ (линия нулевой кривизны — ветви гиперболы) минимальное значение энергии всегда достигается в точке $\bar{y} = \frac{1}{4} \frac{B}{\mu} \kappa$.

В частности, для модифицированного потенциала Хенона — Хейлиса ($\kappa = -1$)

$$V_{\min}(K=0) = \frac{1}{48} \frac{B^3}{\mu^2} \kappa^2 (\kappa + 3) = \frac{1}{24}. \quad (33)$$

Предсказанные выше значения критической энергии перехода к хаосу хорошо согласуются с результатами численного решения соответствующих уравнений движения. При численном исследовании нелинейных гамильтоновых систем традиционно используются два основных метода: метод сечений Пуанкаре и изучение скорости разбегания близких траекторий. Метод сечений Пуанкаре особенно эффективен для систем с двумя степенями свободы, чье фазовое про-

странство четырехмерно. В силу сохранения энергии траектория частицы лежит на трехмерной поверхности $H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = E$. Исключив одну из переменных, например x , рассмотрим точки пересечения фазовой траектории с плоскостью $x = \text{const}$ ($x = 0$). В общем случае они будут хаотически распределены по некоторой, ограниченной сепаратрисой, части плоскости (y, \dot{y}) . В случае существования дополнительного, помимо энергии, интеграла движения $I(y, \dot{y}) = \text{const}$

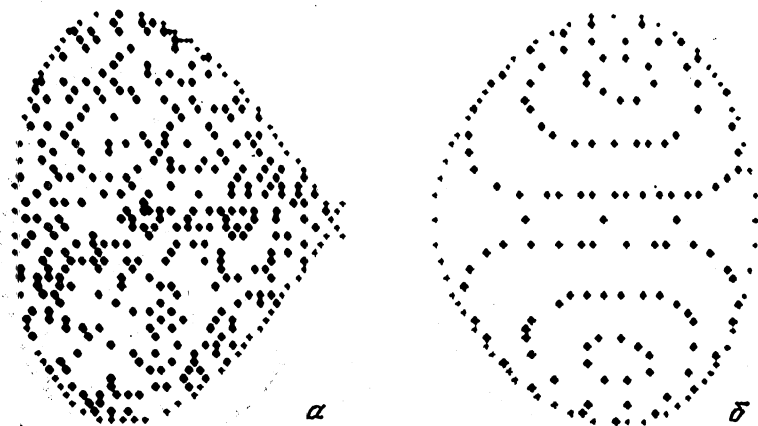


Рис. 2. Сечения Пуанкаре для потенциала (а) и модифицированного потенциала Хенона — Хейлиса (б) при энергии диссоциации

совокупность последовательных пересечений в выбранной нами плоскости будет лежать на некоторой кривой $y = f(\dot{y})$. Поэтому анализ сечений Пуанкаре позволяет установить факт существования дополнительных интегралов движения, а следовательно, и выяснить, какой тип движения реализуется в системе при заданных значениях ее параметров в определенной области фазового пространства.

На рис. 2 изображены сечения Пуанкаре для потенциалов Хенона — Хейлиса и модифицированного потенциала Хенона — Хейлиса при седловой энергии. Их разительное отличие — динамический хаос в первом случае и квазипериодическое движение во втором — связано со следующим обстоятельством. Как известно, системы с двумя степенями свободы являются интегрируемыми лишь в исключительных случаях. В частности, различные подходы [3] дают для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y; A, B, \mu), \tag{34}$$

где $V(x, y, A, B, \mu)$ определяется выражением (24), следующие условия интегрируемости:

- 1) $\mu = 1$, $A = B$;
- 2) $\mu = 6$, A и B произвольные;
- 3) $\mu = 16$, $B = 16A$.

Условие 1) в точности соответствует модифицированному потенциалу Хенона — Хейлиса, который простой заменой $x = u + v$, $y = u - v$ сводится к сепарабельному, а следовательно, интегрируемому потенциалу. Однако даже небольшое возмущение параметров потенциала, приводящее к неинтегрируемой ситуации, позволяет наблюдать хаос и в модифицированном потенциале Хенона — Хейлиса. На рис. 3

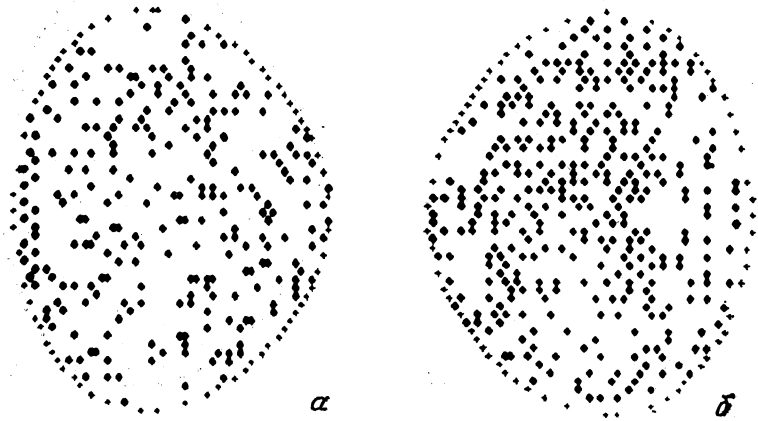


Рис. 3. Сечения Пуанкаре для искаженных ($A/B = 0,8$) потенциалов (а) и модифицированного потенциалов Хенона — Хейлиса (б)

изображены сечения Пуанкаре для искаженных ($A/B = 0,8$) потенциалов и модифицированного потенциала Хенона — Хейлиса. Если рис. 3, а качественно не отличается от невозмущенного случая (рис. 2, а), то в сечении Пуанкаре возмущенного модифицированного потенциала Хенона — Хейлиса присутствуют все характерные признаки, присущие стохастическому движению.

Сечения Пуанкаре позволяют наглядно представить топологию фазового пространства. Однако для оценки степени распространения неупорядоченности удобно воспользоваться тем обстоятельством, что расстояние между первоначально близкими точками, лежащими в хаотической области фазового пространства, как функция времени растет экспоненциально, в то время как с упорядоченным движением связан лишь линейный рост. Определим [15] меру локального разбегания траекторий

$$k_n(t, z_0, d_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{|d_i|}{|d_0|}, \quad (35)$$

где d_0, d_i — расстояние в фазовом пространстве между траекториями в момент $t = 0$ (d_0) и $t_i = t/n$ (d_i), n — число разбиений траекторий. Из численных расчетов следует, что если d_0 не слишком велико, то:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(t, z_0, d_0) = k(t, z_0, d_0)$ существует;
- 2) $k(t, z_0, d_0)$ не зависит от t ;
- 3) $k(t, z_0, d_0)$ не зависит от d_0 ;
- 4) $k(t, z_0, d_0) = 0$, если z_0 выбрано в регулярной области фазового пространства;
- 5) $k(t, z_0, d_0)$ не зависит от выбора z_0 , если z_0 выбрано в хаотической области фазового пространства, причем в этом случае

$$k(t, z_0, d_0) > 0. \quad (36)$$

Свойства 2), 3) и 5) позволяют говорить о величине $k(E)$ вместо $k(t, z_0, d_0)$ в том случае, когда z_0 принадлежит хаотической области фазового пространства. Если свойства 1) — 3) можно объяснить [16], базируясь на связи величины $k(t, z_0, d_0)$ с характеристическими показателями Ляпунова, то свойства 4) и 5) в настоящее время должны рассматриваться как эмпирические. Тем не менее конструкция (35) не только является естественным параметром, определяющим степень развития стохастичности в системе и удобным при численных расчетах, но и тесно связана с так называемой динамической энтропией [17], имеющей смысл скорости изменения огрубленной энтропии гамильтоновой системы.

Для того чтобы убедиться в существовании корреляции между мерой локального разбегания траекторий k_n и гауссовой кривизной ППЭ, исследуем зависимость этой величины от выбора начальных условий. На рис. 4 изображена такая зависимость для потенциала Хенна — Хейлиса. Начальные точки выбирались на оси y , причем область $0 < y < 1/2$ соответствует положительным значениям гауссовой кривизны K , а в области $1/2 < y < 1$ гауссова кривизна становится отрицательной и достигает значения $K = -3$ в седловой точке при $y = 1$. С ростом гауссовой кривизны растет и параметр k_n . При численных расчетах использовались значения d_0 в интервале $0,01 - 0,001$, $t \sim 1$.

При описании динамики системы для энергий, превышающих критическую, следует изучить зависимость величины k_n от энергии при больших временах. В этом случае k_n перестает зависеть от начальных условий, если они выбраны в хаотической области, и, как уже отмечалось, является удобной характеристикой меры распространения хаоса в системе. Необходимых для этой цели траекторных расчетов для больших временных интервалов можно избежать, если воспользоваться свойством эргодичности хаотической компоненты движения. Нами проведены расчеты k_n за весьма короткие промежутки времени ($T \sim 5t$), но с усреднением по фазовому пространству (около 1000 начальных значений). Результаты, приведенные на

рис. 5, как и ожидалось, оказались близкими к данным работы [15], соответствующим траекторным расчетам при временах $T \sim 10^4 - 10^5 t$. Такая зависимость k_n от энергии отражает хорошо известный

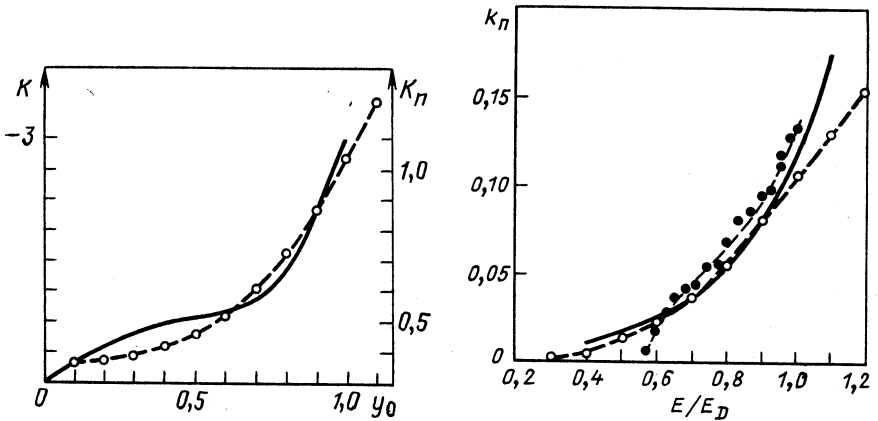


Рис. 4. Зависимость гауссовой кривизны K (сплошная линия) и меры локального разбегания траекторий k_n (штриховая линия) от выбора начальных условий ($x = 0$)

Рис. 5. Зависимость k_n от энергии при различных методах усреднения: точки — по времени, данные [15]; кружки — по начальным значениям; сплошная линия соответствует экспоненциальной зависимости, аппроксимирующей k_n по данным работы [15]; E_D — энергия диссоциации

рост стохастичности в потенциале Хенона — Хейлиса, полученный на основе анализа сечений Пуанкаре [14].

Используя такой метод определения меры локального разбегания k_n , мы получили возможность исследовать характер движения в по-

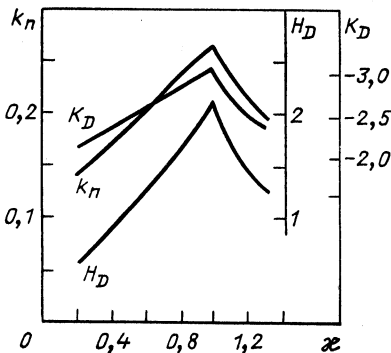


Рис. 6. Зависимость меры локального разбегания k_n , гауссовой кривизны K_D и средней кривизны H_D в седловых точках от параметра x . Энергия равна энергии диссоциации

тенциале (24) при вариации его параметров в широких пределах. На рис. 6 приведены зависимость k_n при седловой энергии от параметра

$\chi = -\frac{A}{B} \mu$, а также гауссова K_s и средняя $H_s = \text{Sp } \hat{S}(q)$ кривизны как функции этого же параметра. Хорошо видно, что отклонение параметра от единицы приводит к уменьшению меры динамического хаоса в системе, причем это уменьшение четко скоррелировано с уменьшением кривизны в седловых точках.

Таким образом, численные расчеты динамики в рассмотренном семействе нелинейных потенциалов подтверждают роль кривизны ППЭ в возникновении неустойчивости, приводящей к переходу от регулярного движения к хаотическому.

ДИНАМИКА ФИНИТНОГО ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛАХ С НЕСКОЛЬКИМИ ЛОКАЛЬНЫМИ МИНИМУМАМИ

Рассмотренный выше пример — динамика системы, описываемой обобщенным потенциалом Хенона — Хейлиса, подтверждает мысль о том, что критерий отрицательной кривизны дает существенный признак перехода от регулярного движения к хаотическому. Его применение для целого ряда гамильтоновых систем привело к обнадеживающим результатам [48]. Трактовка отрицательной кривизны ППЭ как источника локальной неустойчивости позволяет сделать правдоподобные предсказания о возможности существования хаотических режимов в рассматриваемой системе, а также оценить область энергий, при которых совершается переход к этим режимам. Эффективность подхода, основанного на анализе ППЭ, усиливается его общностью, позволяющей применять его к широкому классу нелинейных гамильтоновых систем независимо от их конкретной природы.

Несмотря на то что в целом ряде случаев критерий отрицательной кривизны правильно предсказывает критическую энергию перехода к хаосу, не следует забывать, что мы имеем дело не со строгим критерием, а лишь со слабым признаком потери устойчивости определенного типа регулярного движения, которая, вообще говоря, обязательно приводит к хаосу. Отчасти ограниченность критерия связана с допущениями, использованными при его обосновании, ключевой шаг — переход от неавтономных уравнений (14) к автономным (19) с помощью замены координаты, лежащей на опорной траектории, произвольной фазовой координатой. Такая процедура может быть оправдана только на достаточно малом временном интервале, когда матрица $\hat{\Gamma}$ может приближенно рассматриваться как постоянная. В этом смысле рассматриваемый анализ стабильности носит строго локальную природу, оставляя открытым вопрос о связи между локальной неустойчивостью и глобальным поведением системы.

Сложность ситуации хорошо иллюстрирует динамика финитного движения в потенциалах с несколькими локальными минимумами. Гамильтонова система с ППЭ, обладающей несколькими локальными минимумами, представляет достаточно простую модель, в рамках ко-

торой могут быть описаны основные особенности динамики перехода между различными равновесными состояниями, включая такие важные переходы, как химические реакции, ядерное деление и др. Более богатая по сравнению с потенциалами, имеющими единственный минимум, геометрия ППЭ допускает существование нескольких критических энергий даже для фиксированного набора параметров потенциала. Это обстоятельство приводит к существованию для таких потенциалов смешанных состояний: при одной и той же энергии в различных минимумах реализуются разные динамические режимы.

Специфика задачи может быть продемонстрирована на примере гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4} y^4 + x^2 y + ax^2 - y^2. \quad (37)$$

Массовые параметры для двух независимых направлений выбраны равными между собой, так как обнаружение стохастичности при равных массовых параметрах гарантирует ее существование и для того случая, когда они различны.

Геометрия двумерного однопараметрического потенциала

$$V(x, y; a) = \frac{1}{4} y^4 + x^2 y + ax^2 - y^2 \quad (38)$$

определяется пятью (при $a > \sqrt{2}$) критическими точками: двумя минимумами одинаковой глубины, первый из которых с координатами $(x = 0, y = -\sqrt{2})$ в дальнейшем будем называть левой ямой, а второй с координатами $(x = 0, y = \sqrt{2})$ — правой ямой, и тремя седлами с координатами $x = \pm \sqrt{a^3 - 2a}, y = -a$ и $(x = 0, y = 0)$. Параметр a определяет потенциальную энергию в боковых седлах

$$V(x = \pm \sqrt{a^3 - 2a}, y = -a) = \frac{1}{4} a^4 - a^2. \quad (39)$$

Энергия седла, расположенного в начале координат, не зависит от a и равна нулю. Поэтому при отрицательных энергиях движение будет локализовано в отдельной яме. При $a = 2$ (этот случай будет исследован наиболее подробно) энергии во всех седлах совпадают между собой.

Оценим теперь критическую энергию перехода к хаосу по критерию отрицательной кривизны. В этом случае задача сводится к отысканию условного экстремума — минимума потенциальной энергии на линии нулевой кривизны. Последняя описывается уравнением

$$(y + a)(3y^2 - 2) - 2x^2 = 0. \quad (40)$$

При $a = 2$ мы приходим к значению критической энергии, одинаковому для двух ям и равному

$$E_{\text{кр}} = V_{\text{min}}(K = 0) = -5/9. \quad (41)$$

Перейдем теперь к анализу численных решений уравнений движения, генерируемых гамильтонианом (38). На рис. 7 приведены сечения Пуанкаре при различных энергиях ($a = 2$), демонстрирующие переход от регулярного движения к хаотическому для двух минимумов. Движение, изображенное на рис. 7, *а*, носит четко выраженный квазипериодический характер как для левой, так и для правой ям. Обращает на себя внимание различие в структуре сечений Пуанкаре для различных минимумов: сложная структура с несколькими неподвижными точками в левом минимуме и простая структура с единственной неподвижной точкой в правом минимуме. При повышении энергии наблюдается постепенный переход к хаосу, однако изменение характера движения траекторий, локализованных в определенном минимуме, существенно различно. В то время как для левой ямы уже при энергии, равной по порядку величины половине седловой (рис. 7, *б*), происходит постепенный переход к хаосу, а при энергии, равной седловой (рис. 7, *в*), практически все начальные условия приводят к хаотическим траекториям, во втором минимуме при этих же энергиях движение остается квазипериодическим. Более того, даже при энергии, существенно превосходящей седловую, в правой яме сохраняется значительная доля фазового пространства, отвечающая квазипериодическому движению.

Анализ сечений Пуанкаре позволяет ввести критическую энергию перехода к хаосу, определив ее как энергию, при которой доля фазового пространства с хаотическим движением превосходит некоторое произвольно выбранное значение. Подобная неопределенность связана с отсутствием резкого перехода к хаосу для какого-то критического значения возмущения, которому подвергается интегрируемая задача. Поэтому при сравнении «приближенной» критической энергии, полученной численным моделированием, с ее «точным» значением, полученным с помощью аналитических оценок, т.е. на основании различных критериев стохастичности, должна быть проявлена известная осторожность. На рис. 8 представлена полученная с помощью анализа сечений Пуанкаре мера нарастания хаоса в левой яме как функция энергии. Стрелкой обозначено значение критической энергии, найденное по критерию отрицательной кривизны. При этой энергии стохастическая компонента движения достигает около 10 % доступного фазового пространства.

Таким образом, критическая энергия, определяемая по критерию отрицательной кривизны, для левой ямы хорошо согласуется с критической энергией, получаемой численным моделированием, и противоречит ей же для правой ямы, где численное моделирование обнаруживает появления хаоса лишь при достижении седловой энергии. Это противоречие заставляет обратиться к критериям стохастичности, базирующимся на теории нелинейного резонанса в многомерных системах.

Одним из первых широко используемых критериев перехода к хаосу является так называемый критерий перекрытия нелинейных резо-

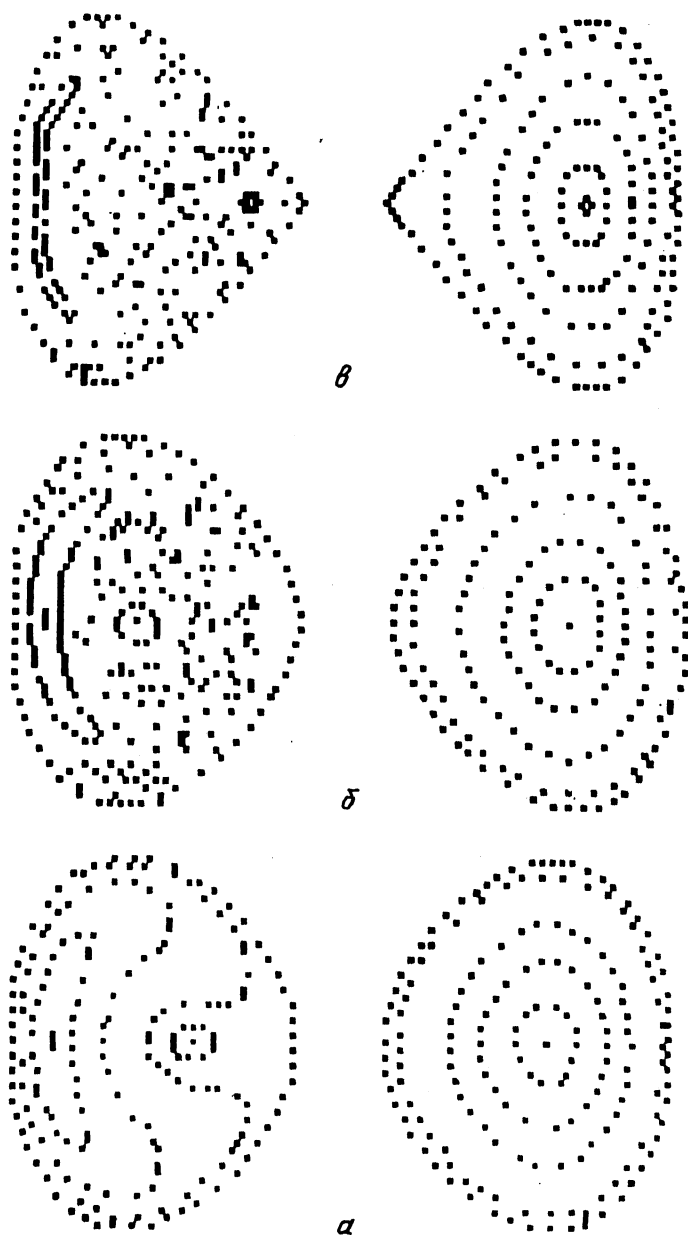
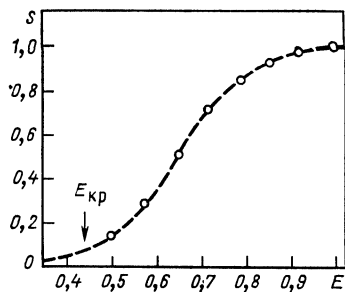


Рис. 7. Сечения Пуанкаре для потенциала (37) при различных энергиях:
 а — $E = -0,9$; б — $E = -0,5$; в — $E = 0$

Рис. 8. Мера нарастания хаоса в левой яме как функция энергии (S — доля начальных условий, генерирующих хаотические траектории)



нансов [19]. Согласно этому критерию, возникновение локальной неустойчивости в гамильтоновой системе обязано касанию сепаратрис отдельных нелинейных резонансов. Сценарий перехода к хаосу, в основе которого лежит перекрытие резонансов, таков [20].

Усредненное движение системы в окрестности нелинейного изолированного резонанса на плоскости переменных действие — угол подобно поведению частицы в потенциальной яме. Нескольким резонансам соответствует несколько потенциальных ям. Перекрытие резонансов означает, что происходит такое сближение потенциальных ям, при котором возможно случайное блуждание частицы между ними.

Этот подход должен быть несколько модифицирован для систем, описываемых гамильтонианом с единственным резонансным членом. В этом случае возникновение крупномасштабной стохастичности связывается [21] с разрушением стохастического слоя вблизи сепаратрисы единственного резонанса. Существо модификации заключается в приближенной редукции в окрестности резонанса исходного гамильтониана к гамильтониану нелинейного маятника, взаимодействующего с периодическим возмущением

$$H(v, x, \tau) = \frac{1}{2} v^2 - M \cos x - P \cos k(x - \tau). \tag{42}$$

Ширина w стохастического слоя резонанса равна [22]

$$w \sim \rho e^{-1/\rho} / M \rho^{2k+1}, \tag{43}$$

где

$$\rho = 2M^{1/2} / \pi k. \tag{44}$$

Если P/M имеет порядок ρ^s , то

$$w \sim \rho^{-\lambda} e^{-1/\rho}, \tag{45}$$

где

$$\lambda = 2k + 1 - s. \tag{46}$$

При

$$\rho_i = \frac{1}{\lambda} [1 - (1 + \lambda)^{-1/2}] \tag{47}$$

функция $w(\rho)$ имеет точку перегиба. Быстрый рост w позволяет определить порог разрушения стохастического слоя как значение

$$\rho_s = \lambda^{-2} [(1 + \lambda)^{1/2} - 1]^2 \tag{48}$$

величины ρ , при котором касательная к точке ρ_i функции w пересекает ось ρ .

Применим этот метод для нахождения порога перехода к крупномасштабной стохастичности системы, описываемой гамильтонианом (37). Этот гамильтониан в системе координат с началом в левой (верхний знак) и правой (нижний знак) ямах имеет вид

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \omega_1^2 x^2) + \frac{1}{2} (\dot{y}^2 + \omega_2^2 y^2) + x^2 y \mp \sqrt{2} y^3 + \frac{1}{4} y^4, \quad (49)$$

где

$$\omega_1 = [2 (a \mp \sqrt{2})]^{1/2}, \quad \omega_2 = 2. \quad (50)$$

Для $a = 2$

$$\omega_1 \simeq \begin{cases} 1,0824, \\ 2,6131. \end{cases} \quad (51)$$

Выполним каноническое преобразование к переменным действие — угол:

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(\frac{2\mathcal{J}_1}{\omega_1} \right)^{1/2} \cos \varphi_1, \quad y = \left(\frac{2\mathcal{J}_2}{\omega_2} \right)^{1/2} \cos \varphi_2; \\ \dot{x} &= (2\mathcal{J}_1 \omega_1)^{1/2} \sin \varphi_1, \quad \dot{y} = (2\mathcal{J}_2 \omega_2)^{1/2} \sin \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

В этих переменных гамильтониан (49) принимает

$$\begin{aligned} H(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2; \varphi_1, \varphi_2) &= H_0(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) + \\ &+ \sum_{m_1, m_2 \in \mathcal{Y}} f_{m_1 m_2}(\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2) \cos(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2); \end{aligned} \quad (53)$$

$$\mathcal{Y} : [0, 1], [0, 2], [0, 3], [0, 4], [2, 1], [2, -1],$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_0(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) &= \mathcal{J}_1 \omega_1 + \mathcal{J}_2 \omega_2 + \frac{3}{8} \frac{\mathcal{J}_2^2}{\omega_2^2} - 1; \\ f_{01} &= \frac{\mathcal{J}_1}{\omega_1} \left(\frac{2\mathcal{J}_2}{\omega_2} \right)^{1/2} \pm 3 \left(\frac{\mathcal{J}_2}{\omega_2} \right)^{3/2}; \\ f_{02} &= \frac{1}{2} \frac{\mathcal{J}_2^2}{\omega_2^2}, \quad f_{03} = \pm \left(\frac{\mathcal{J}_2}{\omega_2} \right)^{3/2}; \\ f_{04} &= \frac{1}{8} \frac{\mathcal{J}_2^2}{\omega_2^2}; \quad f_{21} = f_{2, -1} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{J}_1}{\omega_1} \left(\frac{2\mathcal{J}_2}{\omega_2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Член с индексами $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ называется резонансным для данного значения энергии E , если существуют переменные действия $(\mathcal{J}_1^r, \mathcal{J}_2^r)$, такие, что $E = H_0(\mathcal{J}_1^r, \mathcal{J}_2^r)$ и

$$r_2 \bar{\omega}_1(\mathcal{J}_1^r, \mathcal{J}_2^r) + r_2 \bar{\omega}_2(\mathcal{J}_1^r, \mathcal{J}_2^r) = 0, \quad (55)$$

где

$$\bar{\omega}_i = \partial H_0 / \partial \mathcal{J}_i \quad (i = 1, 2). \quad (56)$$

Если при энергиях, отвечающих финитному движению ($-1 < E < 0$), мы находимся достаточно далеко от резонанса, т.е. для всех (m_1, m_2)

$$|m_1\bar{\omega}_1 + m_2\bar{\omega}_2| \gg f_{m_1, m_2}, \quad (57)$$

то можно, избежав проблемы «малых знаменателей», выполнить каноническое преобразование к новым переменным действие — угол, устраняющим угловую зависимость в низшем по малому параметру, отождествляемому с энергией, порядке. Результатом этой процедуры является переопределение интегрируемой части H_0 ($\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2$) исходного гамильтониана и расширение множества \mathcal{U} зависящих от углов членов. При этом можно столкнуться с одним из следующих трех случаев:

1) резонансные слагаемые в интересующей нас области энергий по-прежнему отсутствуют;

2) возникает единственное резонансное слагаемое;

3) возникает несколько резонансных слагаемых.

В первом случае мы выполняем новое каноническое преобразование и продолжаем эту процедуру до тех пор, пока не столкнемся с ситуациями 2) или 3). Во втором случае критическая энергия, при которой происходит переход к крупномасштабной стохастичности, может быть определена по методу разрушения стохастического слоя [21], в то время как для нахождения критической энергии в третьем случае может быть использован критерий перекрытия резонансов [19].

Вблизи резонанса небольшая расстройка

$$|m_1\bar{\omega}_1 + m_2\bar{\omega}_2| \leq f_{m_1, m_2}, \quad (58)$$

может быть скомпенсирована членами высших порядков, получаемых с помощью повторного канонического преобразования нерезонансных членов. В случае $a = 2$ для резонанса $(2, -1)$ выполняется условие (58) слабой расстройки, и указанная выше процедура приводит к выражению

$$H_0 = \mathcal{J}_1\omega_1 + \mathcal{J}_2\omega_2 - 1 + \frac{3}{8} \frac{\mathcal{J}_2^2}{\omega_2^2} - \frac{4\omega_1 + 5}{32\omega_1^2(\omega_1 + 1)} \mathcal{J}_1^2 + \\ + \left[\pm \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + 1)} \right] \frac{\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2}{8\omega_1}. \quad (59)$$

В левой яме среди зависящих от углов членов оставим только два: резонансный

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{J}_1}{\omega_1} \left(\frac{2\mathcal{J}_2}{\omega_2} \right)^{1/2} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) \quad (60)$$

и «раскачивающий» [21]

$$\frac{\sqrt{2}}{64\omega_1} \left[\frac{3}{\omega_1 + 1} + \frac{1}{\omega_1} \right] \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2), \quad (61)$$

направление m которого является ближайшим к резонансному g . После этого прямое применение критерия разрушения стохастического слоя приводит к значению критической энергии в левой яме

$$E_{кр} \simeq -0,51, \quad (62)$$


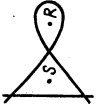
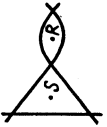
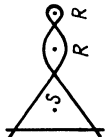
которое хорошо согласуется с результатом численного решения уравнений движения. Непосредственный анализ интегрируемой части гамильтониана (59) показывает, что в правой яме резонансы отсутствуют, следовательно, в полном соответствии с численными результатами переход к крупномасштабной стохастичности возможен лишь при достижении седловой энергии.

ПОТЕНЦИАЛЫ НИЗКИХ ОМБИЛИЧЕСКИХ КАТАСТРОФ И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ БИРКГОФФА—ГУСТАВСОНА

Продемонстрированное в предыдущем разделе смешанное состояние является типичным для широкого класса двумерных потенциалов с несколькими локальными минимумами. Мы ограничились исследованием потенциалов степени не выше шестой, симметричных относительно плоскости $x = 0$. Однако даже при таких ограничениях возможный набор потенциальных форм, зависящих, вообще говоря, от 12 параметров, слишком велик. Чтобы сократить объем работы, сохраняя при этом достаточную общность, можно воспользоваться методами теории катастроф [23]. Согласно последней, достаточно широкий класс полиномиальных потенциалов с несколькими локальными минимумами охватывается ростками низших омбилических катастроф типа D_4^\pm , D_5 , D_6^\pm , D_7 , подверженных определенным возмущениям. Так, потенциал типа Хенона — Хейлиса (24) с точностью до линейных возмущающих членов совпадает с эллиптической омбиликой D_4^- [23].

В таблице приведены значения критической энергии для низших омбилик, определенные по методу сечений Пуанкаре и критерию отрицательной кривизны. Для всех минимумов, обладающих сложной структурой сечений Пуанкаре с несколькими неподвижными точками, критическая энергия, полученная по критерию отрицательной кривизны, близка к полученной путем численного решения уравнений движения. Для минимумов, обладающих единственной неподвижной эллиптической точкой, хаос наблюдается лишь при достижении седловой энергии. Это наблюдение позволяет использовать для определения критической энергии следующую методику. Изучив структуру сечений Пуанкаре при низких энергиях в каждом из локальных минимумов, можно сразу выделить те из них, где критическая энергия может быть определена по критерию отрицательной кривизны. В остальных минимумах критическая энергия должна быть отождествлена с седловой. Подобная методика много проще использования критериев перехода к хаосу, связанных с тем или иным вариантом перекрытия нелинейных резонансов.

Таблица потенциалов огибающих катастроф

Потенциал	Росток	Возмущение	Условия M^*	Топология	E_M	E_D	$E_{кр}$
D_4^-	$x^2y - \frac{1}{3}y^3$	$ay^2 - by$	$b = \frac{3}{4}a^2$	 $a=1$ $b=3/4$	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{12}$
D_5	$x^2y + \frac{1}{4}y^4$	$ax^2 - by^2$	$b = \frac{1}{4}a^2$	 $a=2$ $b=1$	-1	0	$\frac{5}{-9}$
D_6^-	$x^2y - \frac{1}{5}y^5$	$ay^3 - by + cx^2$	$b = a^2$ $c = 2a$	 $a=1$ $b=1$ $c=2$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	-0,06
D_7	$x^2y + \frac{1}{6}y^6$	$ay^4 + by^2 + cx^2$	$b = \frac{3}{2}a^2$ $c = 2\sqrt{a}$	 $a=1/2$ $b=3/8$ $c=\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{12}$	0,034

* Энергии всех седловых точек равны E_D и энергии всех минимумов равны E_M .
 Примечание. При выполнении условий Максвелла [23] энергии всех седловых точек равны E_D , а энергии всех минимумов — E_M . Символом R обозначены минимумы, в которых хаос начинается лишь при достижении седловой энергии, символом S — минимумы, для которых критическая энергия может быть определена по критерию отрицательной кривизны.

Топологию сечений Пуанкаре можно воспроизвести, не прибегая к численному решению уравнений движения. Воспользуемся для этого методом рассмотрения классических несепарабельных систем, предложенным Биркгоффом [24]. Если гамильтониан $H(p, q)$ представим в виде степенного ряда, так что его квадратичные члены являются суммой гамильтонианов несвязанных гармонических осцилляторов с несоизмеримыми частотами, то существует каноническое преобразование $(p, q) \rightarrow (\xi, \eta)$, такое, что гамильтониан в новых переменных есть степенной ряд по $(\xi^2 + \eta^2)$. Густавсон [25] модифицировал метод Биркгоффа на случай соизмеримых частот. Полученный таким образом гамильтониан — нормальная форма Биркгоффа — Густавсона, обрезанный в соответствующем порядке по параметру нелинейности, обеспечивает интегрируемое приближение к исходному неинтегрируемому гамильтониану.

Рассмотрим процедуру преобразования к нормальной форме гамильтониана, представляющего степенной ряд по координатам и импульсам

$$H(u, v) = H^2(u, v) + H^{(3)}(u, v) + \dots, \quad (63)$$

где

$$H^{(s)}(u, v) = \sum_{|i|+|j|=s} a_{ij} u^i v^j, \quad s = 2, 3, \dots; \quad (64)$$

$$u^i = u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_N^{i_N}; \quad |i| = i_1 + i_2 + \dots + i_N.$$

Для систем с положительно определенным гамильтонианом $H^{(2)}$ существует каноническое преобразование $(u, v) \rightarrow (q, p)$, такое, что

$$H^2(q, p) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \omega_k (q_k^2 + p_k^2). \quad (65)$$

Будем говорить, что гамильтониан $H(q, p)$ представлен в нормальной форме, если

$$DH(q, p) = 0, \quad (66)$$

где

$$D = - \sum_k \omega_k \left(q_k \frac{\partial}{\partial p_k} - p_k \frac{\partial}{\partial q_k} \right). \quad (67)$$

Это условие эквивалентно требованию обращения в нуль скобок Пуассона $H^{(2)}$ и H , так как

$$D = -[H^{(2)}, \dots]. \quad (68)$$

Процедура приведения гамильтониана к нормальной форме может быть осуществлена [26] последовательностью канонических преобразований, каждое из которых приводит к нормальной форме не-

нормализованный член низшего порядка. Необходимая для выполнения отдельного преобразования производящая функция

$$F(\mathbf{P}\mathbf{q}) = \sum_k P_k q_k + W^{(s)}(\mathbf{P}, \mathbf{q}). \quad (69)$$

Связь между старыми (p, q) и новыми (P, Q) переменными

$$Q_k = q_k + \frac{\partial W^{(s)}}{\partial P_k}, \quad p_k = P_k + \frac{\partial W^{(s)}}{\partial q_k}, \quad H(p, q) = \Gamma(P, Q), \quad (70)$$

где $\Gamma(P, Q)$ — гамильтониан в новых переменных. Разлагая новый и старый гамильтонианы в ряд Тейлора вблизи точек \mathbf{P} и \mathbf{q} , приходим к уравнению для s -компоненты производящей функции $W^{(s)}$:

$$DW^{(s)}(\mathbf{P}, \mathbf{q}) = \Gamma^{(s)}(\mathbf{P}, \mathbf{q}) - H^{(s)}(\mathbf{P}, \mathbf{q}). \quad (71)$$

Для решения этого уравнения перейдем к переменным (η, ξ)

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_k + i\xi_k); \quad q_k = i\sqrt{2}(\eta_k - i\xi_k), \quad (72)$$

диагонализирующим оператор D :

$$D \rightarrow \tilde{D}(\eta, \xi) = i \sum \omega_k \left(\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} - \eta_k \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right). \quad (73)$$

Решение уравнения (71) в переменных η и ξ имеет вид

$$\tilde{W}^{(s)} = \tilde{D}^{-1}(\tilde{\Gamma}^{(s)} - \tilde{H}^{(s)}). \quad (74)$$

Здесь $\tilde{H}^{(s)}$ — известная функция, а функция $\tilde{\Gamma}^{(s)}$ может быть определена, исходя из требования конечности $\tilde{W}^{(s)}$. Следовательно, функция $\tilde{\Gamma}^{(s)}$ должна быть выбрана так, чтобы в точности сокращать все члены в $\tilde{H}^{(s)}$, которые могут привести к обращению в нуль знаменателя, входящего в выражение (74). Такие члены принято [25] называть нуль-пространственными членами. Выделяя в $\tilde{H}^{(s)}$ совокупность нуль-пространственных членов $\tilde{N}^{(s)}$, решение (74) представим в виде

$$\tilde{\Gamma}^{(s)} = \tilde{N}^{(s)}, \quad (75)$$

$$\tilde{W}^{(s)} = \tilde{D}^{-1}(\tilde{H}^{(s)} - \tilde{N}^{(s)}). \quad (76)$$

Чтобы сделать это решение единственным, достаточно потребовать, чтобы производящая функция не содержала нуль-пространственных компонент.

Приведем в качестве примера нормальную форму (до $s = 6$) для гамильтониана (37) при $a = 2$ вблизи правого минимума:

$$H(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) = 2,6131\mathcal{J}_1 + 2\mathcal{J}_2 - 0,2194\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 - 0,0167\mathcal{J}_1^2 - 0,375\mathcal{J}_2^2 - \\ - 0,0015\mathcal{J}_1^3 - 0,0283\mathcal{J}_1^2\mathcal{J}_2 - 0,1222\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2^2 - 0,1328\mathcal{J}_2^3. \quad (77)$$

Соизмеримость частот приводит к расширению множества нуль-пространственных членов. В самом деле,

$$\tilde{D}\eta_1^{m_1}\xi_2^{m_2} = i(m_1\omega_1 - m_2\omega_2)\eta_1^{m_1}\xi_2^{m_2} \quad (78)$$

и при выполнении условия

$$m_1\omega_1 - m_2\omega_2 = 0 \quad (79)$$

$\tilde{D}^{-1}\eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2}$ расходится. Для того чтобы избежать этой расходимости, функция $\tilde{\Gamma}^{(s)}$ в случае соизмеримых частот должна быть выбрана так, чтобы сокращать дополнительные члены в $\tilde{H}^{(s)}$, приводящие к расходимостям. Во всем остальном процедура приведения к нормальной форме совпадает со случаем несоизмеримых частот.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА КВАДРУПОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ АТОМНЫХ ЯДЕР

Основным объектом рассмотрения традиционной теории коллективных ядерных возбуждений являются регулярные решения соответствующих уравнений движения. При этом учет нелинейных эффектов, хотя и существенно модифицирует коллективные спектры и вероятности возбуждения соответствующих коллективных мод, не приводит к радикальному изменению характера движения. Как мы видели выше, трактовка ядра как нелинейной многомерной гамильтоновой системы допускает при определенных условиях переход от регулярного движения к хаотическому. В настоящем разделе исследуется эта возможность применительно к квадрупольным поверхностным колебаниям ядер, описываемым деформационным потенциалом [6]

$$U(a_0, a_2) = \frac{c_2}{2}(a_0^2 + 2a_2^2) + \sqrt{\frac{2}{35}}c_3a_0(6a_2^2 - a_0^2) + \frac{c_4}{4}(a_0^2 + 2a_2^2)^2, \quad (80)$$

где a_0 и a_2 — внутренние координаты поверхности ядра при квадрупольных колебаниях

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \{1 + a_0 Y_{2,0}(\theta, \varphi) + a_2 [Y_{2,2}(\theta, \varphi) + Y_{2,-2}(\theta, \varphi)]\}, \quad (81)$$

а константы c_2 , c_3 и c_4 можно рассматривать как феноменологические параметры, которые в рамках адиабатической зависимости от времени теории Хартри — Фока могут быть связаны с эффективными взаимодействиями нуклонов в ядре. Потенциал (80) представляет низшие члены разложения по параметрам деформации более общего выражения [27]

$$U(a_0, a_2) = \sum_{m,n} c_{mn} (a_0^2 + 2a_2^2)^m a_0^n (6a_2^2 - a_0^2)^n. \quad (82)$$

Так как при построении (82) использовались лишь трансформационные свойства взаимодействия и симметрия колебаний, то это же выражение описывает энергию квадрупольных колебаний жидкой капли произвольной природы, включая специфику капли лишь в коэффициенты c_{mn} .

Вместо координат a_0 и a_2 часто используют координаты β и γ :

$$a_0 = \beta \cos \gamma; \quad a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \beta \sin \gamma, \quad (83)$$

где β — параметр деформации аксиально-симметричного ядра, а γ — параметр неаксиальности. Для исследования топологии потенциала удобно перейти к координатам

$$x = \sqrt{2} a_2 = \beta \sin \gamma; \quad y = a_0 = \beta \cos \gamma, \quad (84)$$

в которых потенциал (80) приобретает вид

$$U(x, y; a, b, c) = \frac{a}{2} (x^2 + y^2) + b \left(x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) + c (x^2 + y^2)^2, \quad (85)$$

$$a = c_2, \quad b = 3 \sqrt{\frac{2}{35}} c_3, \quad c = \frac{1}{5} c_4$$

или

$$U(\beta, \gamma; a, b, c) = \frac{1}{2} a \beta^2 - \frac{1}{3} b \beta^3 \cos 3\gamma + c \beta^4. \quad (86)$$

Параметры c_2, c_3, c_4 (a, b, c) оценивались в различных феноменологических моделях [28]. Они изменяются в столь широких пределах, что имеет смысл исследовать потенциал (85) во всем диапазоне параметров. Как и раньше, будем предполагать равенство массовых параметров для двух независимых направлений.

Рассматриваемый потенциал является обобщением подробно исследованного выше потенциала Хенона — Хейлиса, однако в отличие от последнего движение в потенциале (85) для всех энергий является финитным. Это особенно важно в квантовом случае, где потенциал (85) обеспечивает при всех энергиях существование стационарных (а не квазистационарных, как это имеет место в случае потенциала Хенона — Хейлиса) состояний. Кроме того, потенциал квадрупольных колебаний, вообще говоря, является потенциалом с несколькими локальными минимумами, что представляет дополнительный интерес при изучении связи между особенностями динамики и геометрией ППЭ.

Исследуем теперь семейство потенциальных функций $U(x, y; a, b, c)$, используя для этого методы теории катастроф [23]. Свойства симметрии потенциала (80), подробно рассмотренные в [6], позволяют при изучении ППЭ ограничиться частным случаем $U(a_0, a_2 = 0)$: все критические точки потенциала лежат либо на прямой $a_2 = 0$ ($x = 0$), либо на прямых, получающихся из нее с помощью соответ-

ствующего преобразования симметрии. Параметр b можно без потери общности считать положительным: замена $b \rightarrow -b$ соответствует зеркальному преобразованию $y \rightarrow -y$.

Множество решений системы уравнений

$$U'_x = 0; \quad U'_y = 0; \quad \det \hat{S} = 0 \quad (87)$$

служит в пространстве параметров сепаратрисой, разделяющей его на области I, II, III, в каждой из которых потенциальная функция является структурно устойчивой. При переходе через сепаратрису $b^2/ac \equiv W = 16$ и $a = 0$ меняется число и природа критических

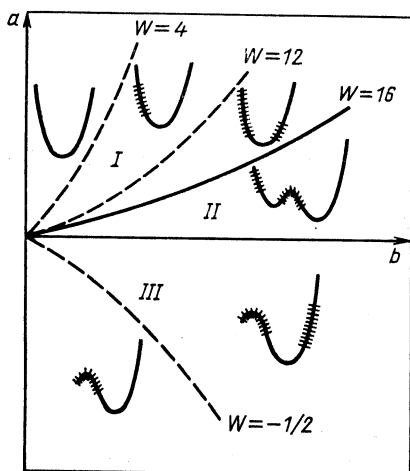


Рис. 9. Профили потенциала $U(x=0, y)$ ППЭ для наиболее характерных точек пространства параметров. Заштрихованы области отрицательной кривизны

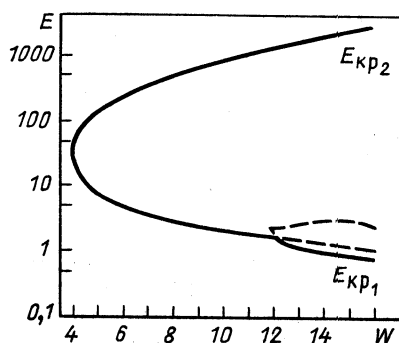


Рис. 10. Энергии на линии нулевой кривизны в сечении ППЭ $x=0$ для значений W в интервале $4 \leq W \leq 16$. Область между нижней ($E_{кр1}$) и верхней ($E_{кр2}$) критическими энергиями соответствует области классического хаотического движения ($a = 1,0$; $c = 0,01$)

точек. На рис. 9 представлены профили $U(x=0, y)$ потенциала (85) в наиболее характерных точках пространства параметров ($a, b, c = \text{const}$).

Рассмотрим кратко указанные выше структурно-устойчивые области пространства параметров. Область I ($0 \leq W < 16$) включает потенциалы, обладающие единственным экстремумом — минимумом в начале координат. Анализ гауссовой кривизны лежащих в этой области потенциалов позволяет разделить ее на три подобласти. В первой $0 < W < 4$ гауссова кривизна ППЭ всюду положительна, согласно сценарию стохастизации, связывающему возникновение

локальной неустойчивости с попаданием в области отрицательной кривизны ППЭ, движение ожидается регулярным. При $4 < W < 12$ область отрицательной гауссовой кривизны локализована при $y < 0$ в интервале

$$-\frac{1}{4} \frac{b}{c} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{W}}\right) < y < -\frac{1}{4} \frac{b}{c} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{W}}\right). \quad (88)$$

При $12 < W < 16$ область отрицательной кривизны появляется и при $y > 0$ в интервале

$$\frac{1}{12} \frac{b}{c} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12}{W}}\right) < y < \frac{1}{12} \frac{b}{c} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{W}}\right). \quad (89)$$

Энергии на линии нулевой кривизны в сечении ППЭ $x = 0$ для значений W в интервале $4 < W < 16$ приведены на рис. 10. Область II ($W > 16, a > 0$) включает потенциалы с двумя (при $x = 0$) минимумами, один из которых при $x = 0, y = 0$ соответствует сферически-симметричной равновесной форме ядра, а второй — деформированной. Эти два минимума разделены седловой точкой, в окрестности которой гауссова кривизна ППЭ отрицательна. Наконец, при переходе через сепаратрису $a = 0$, разделяющую области II и III, мы сталкиваемся с потенциалами, которые описывают ядра, деформированные в основном состоянии и не имеющие даже квазистабильного сферического возбужденного состояния. Область III может быть разделена на две подобласти, граница между которыми $W = -1/2$ представляет в пространстве параметров геометрическое место точек, на котором одновременно обращаются в нуль оба собственных значения матрицы устойчивости:

$$a + 2by + 4cy^2 = 0; \quad a - 2by + 12cy^2 = 0. \quad (90)$$

Эта область включает так называемые γ -нестабильные ядра, потенциальная энергия которых не зависит от γ .

Обратимся теперь к анализу численных решений уравнений движения в потенциале (85). Для значений параметра W в интервале $0 < W < 4$ все решения уравнений движения являются регулярными. Напомним, что в этом случае гауссова кривизна ППЭ всюду положительна. В интервале $4 < W < 16$ наблюдается постепенный переход от квазипериодического движения при низких энергиях к хаотическому движению при энергиях, допускающих достижение областей отрицательной гауссовой кривизны ППЭ. В области II ($W > 16$), где деформационный потенциал обладает несколькими локальными минимумами, численные решения уравнений движения демонстрируют уже описанное выше для омбилических катастроф смешанное поведение: в центральном минимуме и в минимуме, соответствующем деформированному основному состоянию, при энергии ниже седловой наблюдаются различные динамические режимы. Сечения Пуанкаре, иллюстрирующие такое поведение, для потенциала из области II с параметрами, обеспечивающими одинаковую глубину

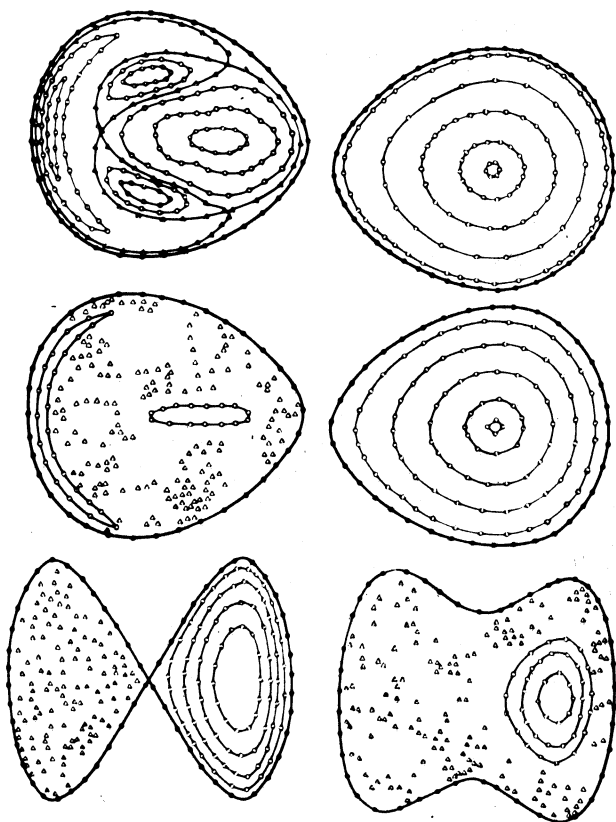


Рис. 11. Сечения Пуанкаре для движения в потенциале из области (см. рис. 9) Π с параметрами, обеспечивающими одинаковую глубину минимумов при различных энергиях: $E = 0,44E_c$, $0,65E_c$, E_c , $2E_c$ (E_c — энергия седловой точки)

центрального и периферийного минимумов, приведены на рис. 11. Наконец, при $a < 0$ в подобласти $-1/2 < W < 0$, где отрицательная кривизна отсутствует, все решения уравнений движения регулярны, а в подобласти $W < -1/2$ при достаточно высоких энергиях хаотическое движение сменяет регулярное.

Что касается критических энергий перехода к хаосу, то они удовлетворяют следующим хорошо просматривающимся закономерностям:

1) для потенциалов с одним центральным минимумом ($0 < W < 16$) для всех значений параметров критическая энергия совпадает с определенной по критерию отрицательной кривизны;

2) в случае потенциалов с несколькими локальными минимумами ($W > 16$) критическая энергия для центральной ямы, обладающей

в сечении Пуанкаре несколькими эллиптическими неподвижными точками (см. рис. 11) совпадает с найденной по критерию отрицательной кривизны; для минимумов, соответствующих несферическим равновесным состояниям и имеющим только одну эллиптическую неподвижную точку, критическая энергия совпадает с седловой;

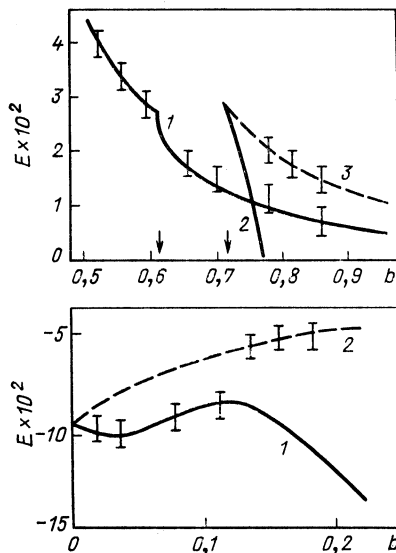


Рис. 12. Критическая энергия для различных значений параметров потенциала (85) ($a = 0,125$ — верхний рисунок; $a = -0,125$ — нижний рисунок), полученные на основе сечений Пуанкаре. Сплошной линией изображена критическая энергия, полученная по критерию отрицательной кривизны, пунктир — энергия в седле

3) аналогичная связь между числом неподвижных эллиптических точек и критической энергией перехода к хаосу имеет место и при $a < 0$.

На рис. 12 представлены критические энергии перехода к хаосу для потенциала квадрупольных колебаний ($a = \pm 0,125$, $c = 0,25$), определенные по критерию отрицательной кривизны (сплошная линия) и с помощью анализа сечений Пуанкаре. Стрелками указаны значения параметра b , соответствующие $W = 12$ и $W = 16$. Таким образом, и в случае потенциала квадрупольных колебаний эффективной является методика определения критической энергии, использованная при анализе движения в потенциале омбилических катастроф.

Используя параметры деформационного потенциала, рассчитанные в работе [29], мы выполнили [30] анализ классического фазового пространства гамильтониана квадрупольных колебаний, включающего члены шестой степени по деформации, изотопов 74 , 76 , 78 , ^{80}Kr . Большие экспериментальные значения энергии первых 2^+ -состояний для ядер 74 , ^{76}Kr указывают на сферическую форму поверхности ядра, в то время как вероятности электромагнитных переходов $2^+ \rightarrow 0^+$ и очень малые энергии первых вращательных состояний (пересчитанная на одно и то же число нуклонов эта энергия для изото-

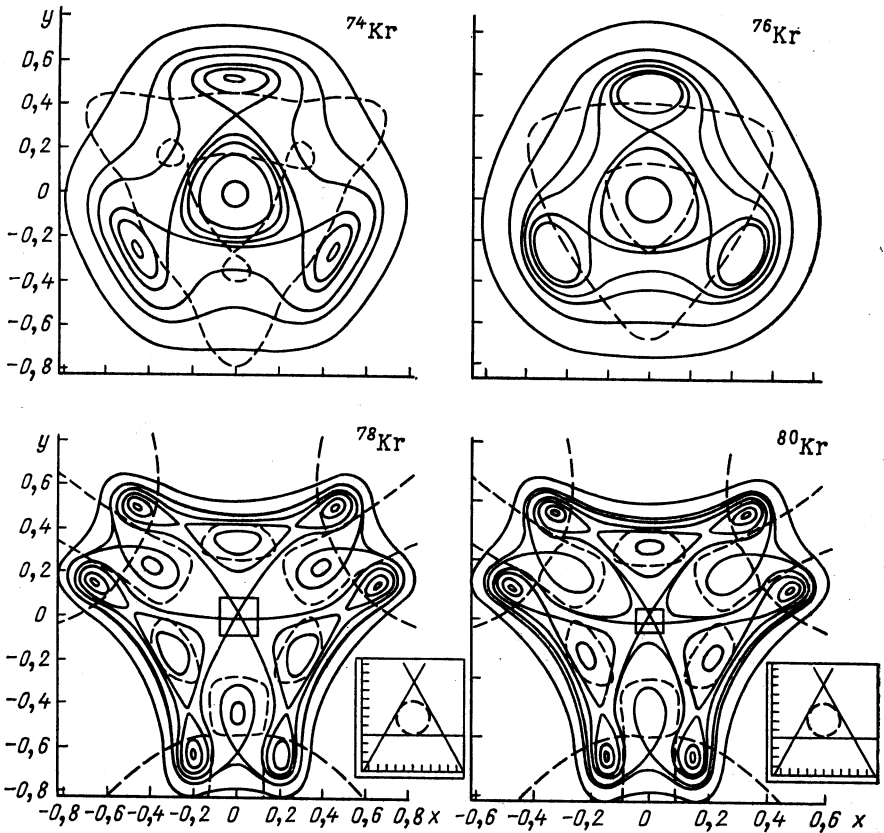


Рис. 13. Поверхности потенциальной энергии изотопов криптона (пунктирная линия обозначает линии нулевой кривизны)

па ^{74}Kr существенно меньше самой низкой из известных энергий для ^{240}Pu — 42,8 кэВ) подразумевают возможность «супердеформации». Эти данные рассматриваются как экспериментальное подтверждение теоретических предсказаний [31, 32] о возможности сосуществования форм. В супердеформированных ядрах уже при относительно низких энергиях возбуждения должны проявляться нелинейные эффекты, связанные с геометрией ППЭ. Включение в рассмотрение высших по деформации членов разложения приводит к значительному усложнению геометрии ППЭ. Как видно из рис. 13, для всех рассматриваемых изотопов криптона мы сталкиваемся с ППЭ сложной топологии с многими локальными минимумами.

Для всех локальных минимумов различных изотопов криптона численным решением уравнений движения определены критические энергии перехода к хаосу. Как и для рассмотренных выше потенциа-

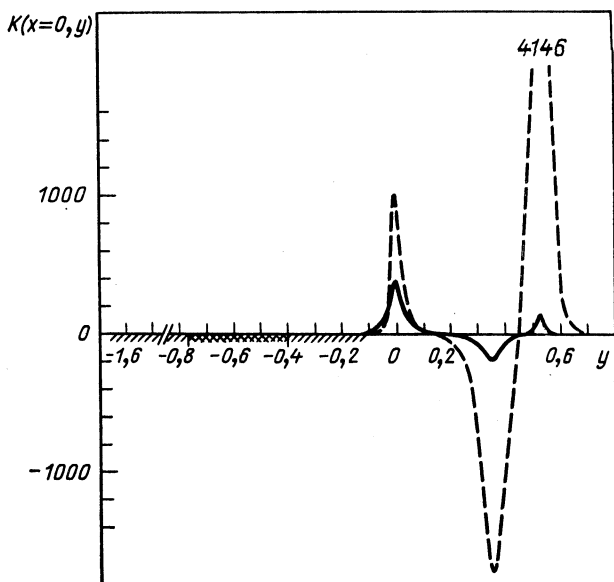


Рис. 14. Профили гауссовой кривизны $K(x=0, y)$ ППЭ с учетом деформационных членов шестого порядка (сплошная линия) и только членов четвертого порядка (штриховая). [Значения функции $K(x=0, y)$ в заштрихованной области оси $y = 0,1 \div 10^{-4}$.]

лов четвертой степени по деформации, в зависимости от топологии сечений Пуанкаре при низких энергиях, критические энергии хорошо совпадают либо с минимальной энергией на линии нулевой гауссовой кривизны, либо с седловой энергией.

В связи с обсуждением критической энергии перехода к хаосу, определяемой по критерию отрицательной кривизны, проследим за изменением знака и абсолютного значения гауссовой кривизны для ППЭ ^{74}Kr и эквивалентного потенциала четвертого порядка (85), параметры которого подобраны из условия совпадения экстремумов этих двух потенциалов и значений энергий в них. На рис. 14 представлена величина гауссовой кривизны $K(x=0, y)$ ППЭ ^{74}Kr и эквивалентного потенциала. Видно, что область отрицательной гауссовой кривизны ППЭ эквивалентного потенциала занимает значительно большую область пространства и имеет на порядок большее значение при $y > 0$, чем для ППЭ ^{74}Kr . Мера разбегания классических траекторий, приводящего к возникновению в системе стохастических свойств, определяется размером области и абсолютным значением отрицательной гауссовой кривизны. Это обстоятельство позволяет качественно понять причину перехода к хаосу для квадрупольных колебаний в ядре ^{74}Kr при сравнительно больших энер-

гиях, чем в эквивалентном потенциале: факторы, определяющие хаотический характер движения в ядре ^{74}Kr , существенно подавлены.

Сравнительно небольшая область пространства, в которой локализована отрицательная гауссова кривизна ППЭ изотопа ^{74}Kr , определяет и характер движения при энергиях, существенно превышающих седловую, отделяющую центральный минимум ППЭ от боковых. На рис. 15 представлена доля хаотических траекторий S , % по отноше-

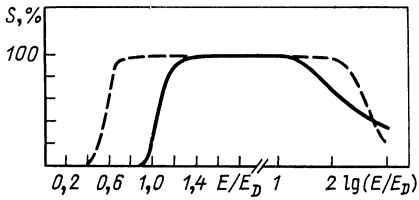


Рис. 15. Зависимость доли фазового пространства S , %, занятого хаотическими траекториями от энергии системы:

сплошная кривая соответствует потенциалу квадрупольных колебаний с учетом деформационных членов шестого порядка; пунктирная — с учетом только членов четвертого порядка

нию ко всем рассматриваемым в зависимости от энергии для движения в деформационном потенциале изотопа ^{74}Kr и в эквивалентном потенциале четвертого порядка. Из рисунка видно, что для ядра криптона критическая энергия перехода к хаосу приблизительно равна седловой. С возрастанием энергии в обоих потенциалах наступает 100 %-ный хаос. Однако при энергиях, значительно превышающих седловую, и для ядра ^{74}Kr , и для эквивалентного потенциала регулярный характер движения восстанавливается. Этот новый переход иллюстрируется сечениями Пуанкаре при высоких энергиях, представленными на рис. 16. Более раннее появление регулярного движения при высоких энергиях для квадрупольных колебаний поверхности ядра ^{74}Kr по сравнению с колебаниями в эквивалентном потенциале, как и при низких энергиях, объясняется меньшим абсолютным значением отрицательной гауссовой кривизны и большей степенью ее локализации. Подчеркнем, что подобное восстановление регулярного движения при высоких энергиях должно иметь место для любого потенциала с локализованной областью отрицательной гауссовой кривизны. В частности, оно имеет место для изотопа ^{76}Kr . Для изотопов же 78 , ^{80}Kr отрицательная кривизна не локализована в малой пространственной области, и потому регулярный характер движения при энергиях, доступных в численных расчетах, в этом случае не восстанавливается.

Заканчивая рассмотрение динамики автономных двумерных гамильтоновых систем с полиномиальными потенциалами, сформулируем кратко основные результаты относящиеся к определению критической энергии перехода от регулярного движения к хаотическому:

1) для любого локального минимума критическая энергия перехода к хаосу либо равна минимальной энергии на линии нулевой гауссовой кривизны

$$E_{\text{кр}} = U_{\text{min}} (K = 0), \quad (91)$$

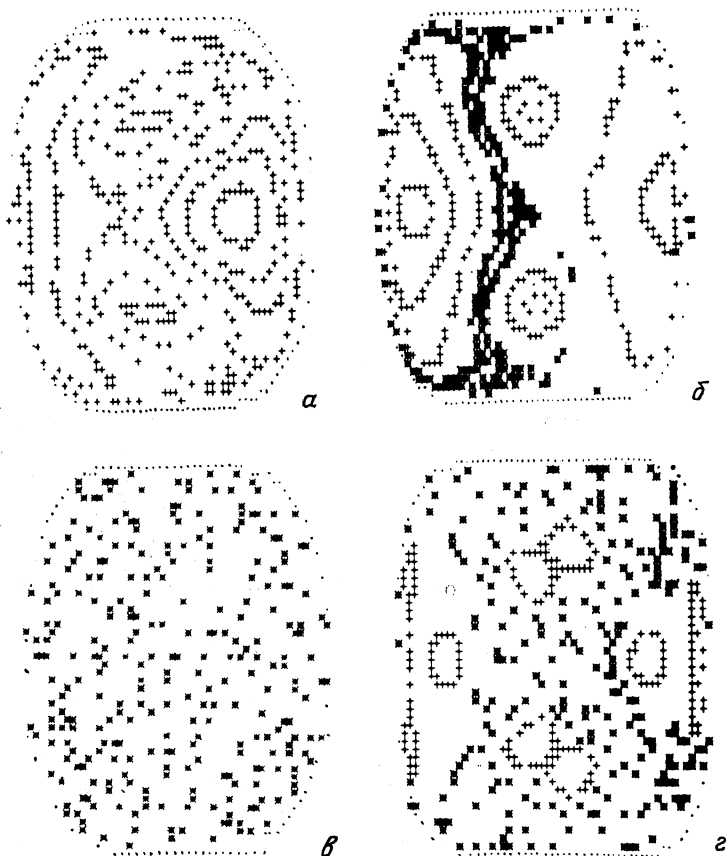


Рис. 16. Сечения Пуанкаре, иллюстрирующие восстановление регулярного характера движения в потенциалах квадрупольных колебаний четвертого порядка по деформации (а, в) и шестого порядка (б, г); (а, б — при энергии $E = 10\,000 E_D$, в, г — при $E = 100 E_D$)

либо совпадает с седловой энергией E_c ,

$$E_{кр} = E_c; \tag{92}$$

2) в локальном минимуме с единственной седловой точкой хаос начинается только при достижении седловой энергии, которая превышает $U_{\min}(K = 0)$;

3) в остальных случаях возможность применения критерия отрицательной кривизны определяется топологией сечения Пуанкаре при низких энергиях;

4) для потенциалов с локализованной областью отрицательной гауссовой кривизны при высоких энергиях наблюдается возврат

к регулярному движению, причем критическая энергия этого второго перехода определяется верхней границей области отрицательной кривизны.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС И ИНДУЦИРОВАННОЕ ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР

За почти полувековую историю процесс индуцированного деления ядер подвергся изучению существенно различными методами. Любый прогресс в понимании ядерной структуры находил немедленный отклик в физике деления. Так, например, изменение общепринятых представлений о существовании оболочечной структуры у сильно деформированных ядер [33] привело к радикальному пересмотру структуры барьера деления и позволило объяснить целый ряд критических экспериментов.

В настоящем разделе мы хотим обратить внимание на то обстоятельство, что стохастизация коллективного движения при высоких энергиях возбуждения позволяет по-новому взглянуть на динамику проникновения через многомерный потенциальный барьер, играющую решающую роль в задаче индуцированного деления.

Процесс индуцированного деления ядер геометрически может быть представлен как движение изображающей точки по некоторой траектории из минимума деформационного потенциала, соответствующего основному состоянию ядра, через седловую точку в долину осколков. Устойчивость такого движения во многом определяется геометрией поверхности потенциальной энергии. Так, существование на поверхности деформационного потенциала вблизи седла конечной области отрицательной кривизны приводит к экспоненциальному разбеганию первоначально близких траекторий, т. е. к неустойчивости движения. Действительно, с помощью вариационного принципа Мопертюи [34] траектории динамической системы могут быть представлены геодезическими некоторой римановой метрики, заданной в той части конфигурационного пространства, в которой потенциальная энергия не превышает полную. Рассмотрим две геодезические, исходящие из одной точки, находящейся в области отрицательной гауссовой кривизны $K(x, y) < 0$. В случае последующего пересечения эти линии образовали бы геодезический двуугольник, который по теореме Гаусса — Бонне должен иметь сумму внутренних углов $\alpha + \beta$, равную

$$\alpha + \beta = \int K(x, y) d\Omega, \quad (93)$$

где $d\Omega$ — элемент поверхности. Так как $K < 0$, то $\alpha + \beta < 0$. Следовательно, геодезический двуугольник, для которого $\alpha + \beta > 0$, в этом случае невозможен. Таким образом, в области отрицательной кривизны первоначально близкие траектории (при определенном выборе метрики) разбегаются. Это разбегание носит экспоненциальный характер: все решения уравнения Якоби для нормальных

отклонений на многообразии отрицательной кривизны растут при движении вдоль геодезической не медленнее экспоненты пройденного пути, показатель которой равен корню квадратному из модуля кривизны по тому двумерному направлению, для которого этот модуль наименьший [7]. Мерой возникающей неустойчивости является характерный путь S_* , на котором первоначально близкие геодезические разбегаются в e раз, т. е.

$$S_* = |K|_{\min}^{-1/2}. \quad (94)$$

В работах [35, 36] было показано, что экспоненциальная неустойчивость геодезических на многообразии отрицательной кривизны приводит к стохастизации соответствующего геодезического потока в фазовом пространстве. Еще раз подчеркнем, что лишь при выборе определенной метрики (метрики Мопертюи) результат о стохастизации фазового потока в области отрицательной кривизны является строгим. Применение критерия отрицательной кривизны непосредственно к решениям гамильтоновых уравнений движения требует известной осторожности и наиболее эффективно лишь в сочетании с численным экспериментом.

В области глобальной стохастичности, где не существует ограничивающих поведение системы интегралов движения, описание динамики системы в терминах уравнений движения естественно заменить статистическим описанием. В частности, фаза прохождения в процессе деления области отрицательной кривизны вблизи седла деформационного потенциала может быть описана в диффузионном приближении [37]. Введенную выше величину S_* следует рассматривать как шаг (длину) такой диффузии. Тогда коэффициент диффузии

$$D = \bar{V}S_*, \quad (95)$$

где \bar{V} — средняя скорость движения изображающей точки по поверхности деформационного потенциала в области с $K < 0$. Характерное время τ_* блуждания изображающей точки по области отрицательной кривизны с линейным размером L равно

$$\tau_* = L^2/D \quad (96)$$

при условии $S_* \ll L$, что и служит критерием применимости рассматриваемого приближения.

Применим описанную выше схему для оценки временной задержки, связанной с прохождением области отрицательной кривизны вблизи седловой точки деформационного потенциала делящегося ядра [38]. Для этой цели достаточно воспользоваться наиболее простой феноменологической моделью ядра — моделью жидкой капли. В этой модели существование седловой точки связано с конкуренцией между кулоновскими и поверхностными силами. Для деформаций,

сохраняющих аксиальную симметрию, уравнение ядерной поверхности

$$R(\theta) = R_0 [1 + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \alpha_{\lambda}(t) P(\cos \theta)]. \quad (97)$$

Нас интересуют только локальные характеристики этой поверхности вблизи седловой точки, где энергия деформации равна

$$U_{\text{деф}} = \hat{U}_{\text{деф}} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} C_{\lambda\lambda'} (\alpha_{\lambda} - \hat{\alpha}_{\lambda}) (\alpha_{\lambda'} - \hat{\alpha}_{\lambda'}). \quad (98)$$

Величины $\hat{U}_{\text{деф}}$, $\hat{\alpha}_{\lambda}$ и $\hat{\alpha}_{\lambda'}$ вычисляются непосредственно в седловой точке, $C_{\lambda\lambda'}$ — матрица коэффициентов жесткости, собственные векторы которой представляют независимые коллективные моды (устойчивые и неустойчивые) делящегося ядра, а собственные значения C_{λ} непосредственно определяют шаг диффузии

$$S_* = \bar{v} (\omega_{\lambda} \omega_{\lambda'})^{1/2}, \quad (99)$$

где

$$\omega_{\lambda} = (|C_{\lambda}|/B_{\lambda})^{1/2}, \quad B_{\lambda} = \rho R_0^5/\lambda, \quad (100)$$

ρ — плотность ядра; R_0 — радиус ядра.

Как показывают расчеты [39], для параметра делимости $0,39 < x < 1$ все коэффициенты жесткости, кроме C_2 , положительны. Граничное значение $x \simeq 0,39$ является точкой бифуркации, ниже которой существует семейство седловых точек асимметричной формы. Минимальной жесткостью из устойчивых мод обладает мода с $\lambda = 4$. Поэтому согласно (94) и (99)

$$S_* = v (\omega_2 \omega_4)^{-1/2}. \quad (101)$$

Для численной оценки воспользуемся значениями коэффициентов жесткости, полученными в работе [40]. Полагая $\bar{v} = \sqrt{2E_F/M}$, где E_F — пороговая энергия, $L \sim R_0$, для ядер с параметром делимости $x \sim 0,8$ окончательно получаем

$$\tau_* = \frac{L^2}{D} = \left(\frac{L}{v}\right) \left(\frac{L}{S_*}\right) \sim 10^2 \frac{R_0}{v}. \quad (102)$$

Таким образом, стохастизация фазового потока в области отрицательной кривизны ППЭ может существенно увеличить время прохождения этой области по сравнению с пролетным временем L/\bar{v} при условии $S_* \ll L$.

Напомним, что стандартный анализ индуцированного деления основан на известной формуле Бора — Уилера [41], но экспериментально наблюдаемые отклонения от этой формулы [42] инициировали ряд теоретических работ (см. [43]), базирующихся на идеях Крамерса [44], применившего диффузионный механизм для описания мономолекулярных химических реакций. Теория Крамерса позволяет

оценить время τ формирования квазистационарного потока через барьер, связав его с коэффициентом ядерного трения. При больших τ нейтронный распад будет более эффективно конкурировать с процессом деления, что приведет к уменьшению эффективной вероятности деления по сравнению с предсказываемой формулой Бора — Уилера. Возникновение диффузии через многомерный потенциальный барьер из-за экспоненциальной неустойчивости траекторий в области отрицательной кривизны (без источника случайной силы) служит альтернативой феноменологической диффузии Крамерса.

Аналогичные временные задержки, связанные с возникновением фрактальных структур для траекторий, проходящих вблизи седел, имеют место в многомерном потенциальном рассеянии [45].

КВАНТОВЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ

Существенный прогресс в понимании нелинейной динамики классических систем вызвал многочисленные попытки включить концепцию стохастичности в квантовую механику. Суть проблемы состоит в том, что, с одной стороны, энергетический спектр любой квантовой системы, совершающей финитное движение, является дискретным и, следовательно, ее эволюция квазипериодической, а, с другой, принцип соответствия требует возможности перехода к классической механике, обладающей кроме регулярных и хаотическими решениями. Ряд важных результатов в направлении разрешения этого очевидного противоречия уже получен [1, 46, 47]. Однако еще до полного решения проблемы интерес представляет ее ограниченный вариант — поиск особенностей поведения квантовых систем, классические аналоги которых (классические системы с тем же самым гамильтонианом) обнаруживают хаотическое поведение.

Первые попытки обнаружения проявления классической стохастичности в квантовых системах связаны с изучением энергетических спектров и стационарных волновых функций нелинейных неинтегрируемых модельных систем. Изучение спектров проводилось сравнением «точного» квантовомеханического спектра с его квазиклассическим аналогом. Под точным понимается спектр, полученный диагонализацией точного гамильтониана на разумным образом выбранном базисе (разумеется, обрезанном). Под квазиклассическим понимается спектр, полученный некоторым обобщением процедуры Бора — Зоммерфельда. При этом гамильтониан тем или иным способом преобразуется к функции только переменных действия (например, используя метод нормальных форм Биркгоффа — Густавсона), квантование которых и позволяет получить квазиклассический энергетический спектр.

Кажется естественным ожидать, что в окрестности критической энергии перехода к хаосу, где происходит разрушение приближенных интегралов движения, с помощью которых строится квазиклассический спектр, согласие последнего с точным спектром должно

существенно ухудшаться. Проанализируем этот эффект на примере спектра квадрупольных колебаний ядер, чья классическая динамика была подробно изучена в предыдущем разделе. В области с единственным экстремумом — минимумом в начале координат ($0 < W < 16$), приводя к нормальной форме все члены гамильтониана квадрупольных колебаний до четвертого порядка включительно, получаем следующее выражение для энергетического спектра:

$$E(N, L) = N + 1 + \frac{b_2}{12} [7L^2 - 5(N + 1)^2 + 1] + \frac{c}{2} [3(N + 1)^2 - L^2 + 1], \quad (103)$$

$$N = 0, 1, 2 \dots; \quad L = \pm N, \pm(N - 2) \dots$$

На рис. 17 представлена разность между точными уровнями энергии и вычисленными по формуле (103) для случая $W = 13$, $E_{кр} = 10$. Как видно из рисунка, квазиклассическая формула в области энергий, где классическое движение регулярно ($E < E_{кр}$), очень хорошо

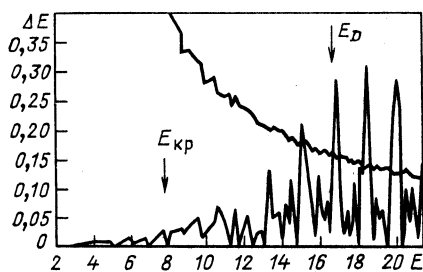


Рис. 17. Разность ΔE между точными квантовомеханическими уровнями энергии и квазиклассическими (103) для гамильтониана квадрупольных колебаний с параметрами $W = 13$, $c = 0,00135$, $a = 1$ ($E_{кр} = 10$). Верхняя линия — среднее значение расстояний между соседними уровнями

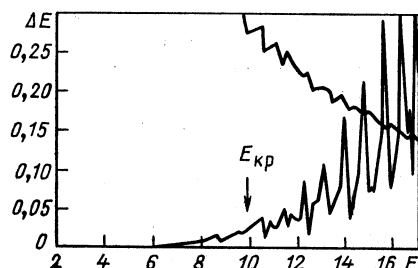


Рис. 18. То же, что на рис. 17, но для гамильтониана Хенона — Хейлса с параметром $b = 0,1$ ($E_{кр} = 8,3$; $E_D = 16,7$)

воспроизводит точный квантовомеханический спектр. При переходе к хаотической области ($E \gtrsim E_{кр}$) различие резко нарастает.

Полагая в формуле (103) $c = 0$, можно получить энергетический спектр гамильтониана Хенона — Хейлса. И в этом случае, как это видно из рис. 18, при переходе через значение классической критической энергии согласие между квазиклассическим и точным спектрами быстро ухудшается.

Что касается более сложной задачи о поведении непосредственно точного спектра в окрестности критической энергии, то до настоящего времени не выработана общепринятая точка зрения [48—50].

Для обнаружения интересующих нас квантовых проявлений классической стохастичности можно пойти дальше изучения свойств стационарных состояний и рассмотреть квантовые объекты, чьи классические аналоги непосредственно проявляют стохастическое поведение. Такими объектами, в частности, являются волновые пакеты, первоначально локализованные в определенных точках фазового пространства. Для построения таких волновых пакетов используются [48] когерентные состояния гармонического осциллятора, позволяющие ввести квазиклассическое фазовое пространство с плотностью

$$\rho_{\Psi}(\alpha) = |\langle \alpha | \Psi \rangle|^2 = \rho_{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (104)$$

Величина $\rho_{\Psi}(\alpha)$ представляет собой аналог обычной классической плотности и удовлетворяет уравнению движения, которое в главном порядке по \hbar совпадает с уравнением Лиувилля.

При диагонализации гамильтониана на базе осцилляторных волновых функций возникает набор коэффициентов $C(N, L)$;

$$|E\rangle = \sum_{NL} C(N, L) |N, L\rangle. \quad (105)$$

Этот же набор коэффициентов позволяет построить фазовую плотность для стационарных состояний

$$\rho_E(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = |\langle \alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | E \rangle|^2, \quad (106)$$

так как матричные элементы $\langle \alpha | NL \rangle$ хорошо известны [51]. В двумерном случае фазовая плотность для данного стационарного состояния есть функция четырех переменных q_1, p_1, q_2, p_2 , определяющих первоначальную локализацию волнового пакета в фазовом пространстве. Удобный способ изучения фазовой плотности стационарных состояний — построение контурных карт для различных сечений, получивших название квантовых сечений Пуанкаре.

Рассмотрим теперь временную эволюцию волновых пакетов, которые в начальный момент времени представляют когерентное состояние, локализованное в определенной точке фазового пространства:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle. \quad (107)$$

Временная эволюция такого волнового пакета определяется выражением

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_E |E\rangle \langle E | \alpha \rangle e^{-iEt}. \quad (108)$$

Важной характеристикой движения является вероятность обнаружить систему в момент времени t в начальном положении $|\alpha\rangle$,

$$\rho(t) = |g_{\alpha}(t)|^2, \quad (109)$$

где амплитуда вероятности $g_\alpha(t)$ — интеграл перекрытия $|\Psi(t)\rangle$ с начальной волновой функцией $|\alpha\rangle$,

$$g_\alpha(t) = \langle \alpha | \Psi(t) \rangle = \sum_E |\langle E | \alpha \rangle|^2 e^{-iEt}. \quad (110)$$

Использував определение фазовой плотности (104), получим

$$g_\alpha(t) = \sum_E \rho_E(\alpha) e^{-iEt}. \quad (111)$$

Мы видим, что динамика пакета определяется спектром начального когерентного состояния, т. е. теми стационарными состояниями, которые формируют исходное когерентного состояния. Другими словами, $g_\alpha(t)$ является почти периодической функцией времени при условии, что энергии собственных состояний, дающих доминирующий вклад в плотность, расположены регулярно. В работе [48] было обнаружено два предельных случая временной эволюции когерентных волновых пакетов, описывающих связанные состояния нелинейных неинтегрируемых систем. Эти два типа эволюции характеризуются:

а) квазипериодической временной эволюцией;

б) быстрым изменением вероятностей заселенности первоначальных состояний. Когерентные состояния, первоначально локализованные в окрестности центров классических регулярных областей, проявляют малую дисперсию и на больших временах следуют классической траектории. Экстремально быстрая дефазировка наблюдалась для волновых пакетов, которые были локализованы вдали от центров регулярных областей.

Остановимся кратко еще на одной физически интересной ситуации, в которой квантовая и классическая эволюции близки между собой [46, 47]. Рассмотрим эволюцию системы на временах, значительно меньших так называемого диффузионного масштаба t_d [46], $t_d \sim \hbar\eta$, где η — средняя плотность уровней энергии. В этом случае неопределенность энергии $\Delta E \gg \eta^{-1}$ много больше среднего расстояния между уровнями, и система еще «не чувствует» дискретности спектра. Следовательно, на таких временах ее эволюция будет такой же, как и в классическом пределе, что и подтверждают численные эксперименты [52, 53].

Таким образом, изучение классической динамики многомерных гамильтоновых систем оказывается полезным и для понимания квантовых проявлений классической стохастичности.

КВАНТОВЫЙ ХАОС И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЯДЕРНЫХ СПЕКТРОВ

Важные корреляции между особенностями динамики и структурой квантового энергетического спектра могут быть получены при изучении статистических свойств уровней. Статистические свойства позволяют лучше понять фундаментальные свойства системы. Такие

понятия, как температура и энтропия, важны для понимания систем многих частиц безотносительно к тому, можем мы или нет избежать статистического описания.

Будем интересоваться локальными свойствами спектра, т. е. отклонением в распределении уровней от средних значений или флуктуациями. Почему мы вынуждены обратиться к локальным характеристикам спектра? Дело в том, что глобальные характеристики типа числа состояний $N(E)$ или сглаженной плотности уровней $\rho(E)$ являются слишком грубыми характеристиками, в то время как такая локальная характеристика, как функция распределения расстояний между уровнями, очень чувствительна к свойствам потенциала и структуре границы. Достаточно, например, в квадрате слегка изогнуть одну из стенок, чтобы она стала рассеивающей, как классические траектории в такой системе (бильярде) становятся стохастическими [1]. При этом происходит сильная перестройка функции распределения расстояний между уровнями, хотя число состояний $N(E)$ изменяется незначительно или вообще не изменяется.

Для изучения статистических свойств спектра, во-первых, необходимо иметь достаточно большое число уровней в интервале, обеспечивающем постоянство среднего расстояния между уровнями D , а во-вторых, уметь идентифицировать квантовые числа рассматриваемой последовательности уровней: статистики уровней с одинаковыми и разными квантовыми числами существенно отличаются друг от друга.

Имеются две доступные для эксперимента основные энергетические области [54]. Первая — низколежащая область от основного состояния вплоть до энергий, где плотность уровней становится слишком большой и количество конкурирующих каналов распада делает невозможным идентификацию спина и четности. Для ядер с $A \sim 40$ верхний предел 7 МэВ. В этом интервале содержится около 20 уровней с 10 различными комбинациями J^π , T . В результате в нашем распоряжении оказывается всего несколько уровней с одинаковыми J^π , T . Ситуация не улучшается при переходе к более тяжелым ядрам.

Вторая область лежит выше порога отделения нейтрона (около 15 МэВ в легких ядрах и около 7 МэВ в тяжелых). В поглощении медленных нейтронов с энергией до нескольких килоэлектрон-вольт доминируют S -волновые ($l = 0$) резонансы. Если мишень, как, например, ^{166}Er , имеет в основном состоянии $J^\pi = 0^+$, то конечное состояние, образующееся в результате захвата нейтрона, имеет $J^\pi = 1/2^+$. Таким способом могут быть идентифицированы последовательности до 100 уровней в энергетическом интервале в несколько килоэлектрон-вольт. Данные по протонным резонансам относятся к более низким энергиям. Плотность уровней в этом районе существенно ниже, и для набора той же статистики требуется охватить больший энергетический интервал.

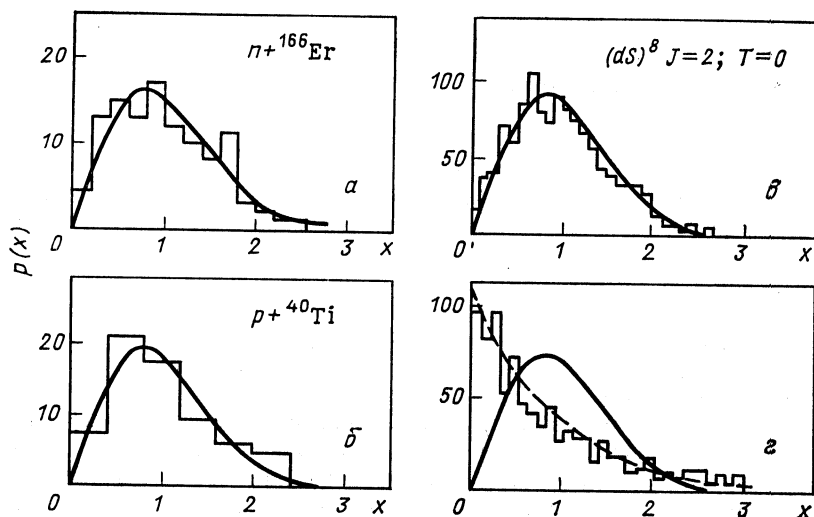


Рис. 19. Гистограммы распределения расстояний между соседними уровнями, построенными на основе всех имеющихся экспериментальных значений энергий для нейтронных (а) и протонных (б) резонансов, спектра оболочечной модели (в) и пуассоновского спектра, генерируемого набором случайных некоррелированных в порядке возрастания расположенных чисел (г)

Отчасти из-за недостатка экспериментальных данных численное моделирование является важной составной частью изучения флуктуаций энергетических уровней ядер. В частности, оболочечная модель с остаточным взаимодействием позволяет получать достаточно большие последовательности уровней. При этом одночастичный гамильтониан определяет среднюю плотность уровней в данном энергетическом интервале, а остаточное взаимодействие фиксирует положение конкретного уровня.

На рис. 19 изображены гистограммы распределения расстояний между соседними уровнями, $x = (E_{i+1} - E_i)/D$, взятые из трех различных источников [55—57]: нейтронные резонансы $n + {}^{166}\text{Er}$, изобар-аналоговые состояния в ядре ${}^{49}\text{V}$ и часть спектра оболочечной модели с остаточным взаимодействием. Хотя исходные спектры существенно отличались друг от друга, мы можем говорить о них как об имеющих одинаковое распределение расстояний между соседними уровнями. Гистограммы хорошо аппроксимируются непрерывной кривой

$$p(x) = \frac{\pi x}{2} e^{-\pi x^2/4}, \quad (112)$$

носящей название распределения Вигнера.

С другой стороны, рассмотрим возможность того, что уровни образуют случайную последовательность. Расстояния между сосед-

ними уровнями в этом случае распределены по Пуассону (рис. 19, z):

$$p(x) = e^{-x}. \quad (113)$$

Гистограммы рис. 19, a — e и 19, z существенно отличаются друг от друга. Если ядерные спектры демонстрируют эффект расталкивания уровней

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(x) = 0, \quad (114)$$

то для случайной последовательности наблюдается эффект кластеризации уровней — преобладание маленьких расстояний между ними.

Эффект расталкивания уровней был впервые рассмотрен фон Нейманом и Вигнером [58] еще в 1929 г. Его связь с проблемой ядерных спектров подчеркивалась в работах Вигнера [59, 60], Гуревича и Певзнера [61], Ландау и Смородинского [62]. Историю вопроса и основные работы этого направления можно найти в [63].

Остановимся кратко на некоторых физических аргументах, поясняющих феномен расталкивания уровней [64]. Рассмотрим гамильтониан, определенный в некотором фиксированном базисе с помощью своих матричных элементов. Оператор H можно рассматривать как вектор в этом пространстве. Расталкивание уровней можно считать обязанным тому факту, что подпространство, для которого соответствующий спектр является вырожденным, имеет меньшую размерность, чем общее пространство матричных элементов, так что вырождение или более слабый эффект — кластеризация маловероятны. Альтернативное пояснение [65] заключается в том, что если гамильтониан зависит от некоторого набора параметров, то пересечения уровней при изменении параметров можно добиться лишь в случае существования по крайней мере двух независимых параметров. В однопараметрическом случае можно показать неизбежность возникновения отталкивания на малых расстояниях.

До сих пор обсуждение относилось только к чистым последовательностям, т. е. к последовательностям с одинаковыми квантовыми числами. Примером смешанной последовательности является спектр, возникающий при поглощении медленных нейтронов ядром ^{181}Ta , для которого в основном состоянии $J^\pi = 7/2^+$. В этом случае в спектре нейтронных резонансов перепутываются последовательности уровней 3^+ и 4^+ . Эффект расталкивания уровней подавляется в этом случае обращением в нуль матричных элементов, связывающих состояния с различным значением момента. Корреляции между уровнями ослабевают, а распределение $p(x)$ эволюционирует к пуассоновскому (113). Если мы будем рассматривать различные чистые последовательности как независимые и каждую описывать некоторым распределением, то возможно построить результирующее распределение [61, 65]. Основная проблема поэтому заключается в понимании чистой последовательности уровней, а все остальные вопросы могут быть решены в рамках строгих методов теории вероятностей.

В 60-е годы Вигнером, Портером и Дайсоном (см. [63]) была построена статистическая теория энергетических уровней сложных систем, в основу которой была положена следующая гипотеза: распределение уровней энергии эквивалентно распределению собственных значений ансамбля случайных матриц определенной симметрии. Окончательный результат для функции распределения расстояний между соседними уровнями, полученный в этой теории, имеет вид

$$p(x) \sim x^\alpha e^{-bx^2}. \quad (115)$$

Критический показатель α , определяющий поведение функции распределения при $x \rightarrow 0$, зависит от симметрии матриц: $\alpha = 1$ для ортогональных, $\alpha = 2$ для унитарных и $\alpha = 4$ для симплектических ансамблей матриц.

Предсказания статистической теории уровней [главным образом предсказания для гауссова ортогонального ансамбля (ГОА) матриц] были детально сравнены со всем доступным множеством ядерных данных [63, 64]. Никаких существенных расхождений между теорией и экспериментом обнаружено не было. В частности, ансамбли случайных матриц прекрасно воспроизводят свойство спектральной жесткости ядерных спектров: малые флуктуации вокруг средних значений числа уровней на интервале заданной длины. Аналогичные сравнения были выполнены и для атомных спектров [66]. И здесь было обнаружено хорошее согласие с предсказаниями ГОА, хотя количество обработанных данных существенно меньше, чем в ядерной спектроскопии.

Совершенно новый и достаточно универсальный подход к проблеме статистических свойств энергетических спектров сложных систем может быть разработан на основе нелинейной теории динамических систем. Как показывают численные расчеты [67—71], подкрепленные серьезными теоретическими соображениями [1, 65, 71], главной универсальной особенностью систем, хаотических в классическом пределе, является феномен расталкивания уровней, в то время как для систем, чья динамика в классическом пределе регулярна, характерна кластеризация уровней. Это утверждение иногда называют гипотезой об универсальном характере флуктуаций энергетических спектров [67].

Среди систем, чьи спектры были подвергнуты детальному численному анализу, центральное место занимают двумерные бильярды. Двумерный бильярд — свободная частица массы m , свободно движущаяся по плоскости внутри некоторой области произвольной формы и испытывающая на границе упругое зеркальное отражение. Выбор в качестве объекта исследования двумерного бильярда удобен для наших целей по нескольким причинам:

- 1) эта система имеет низшее число степеней свободы, при которых в консервативной системе возможно хаотическое движение;
- 2) классическая динамика бильярда хорошо изучена;
- 3) для бильярдов существуют эффективные методы нахождения

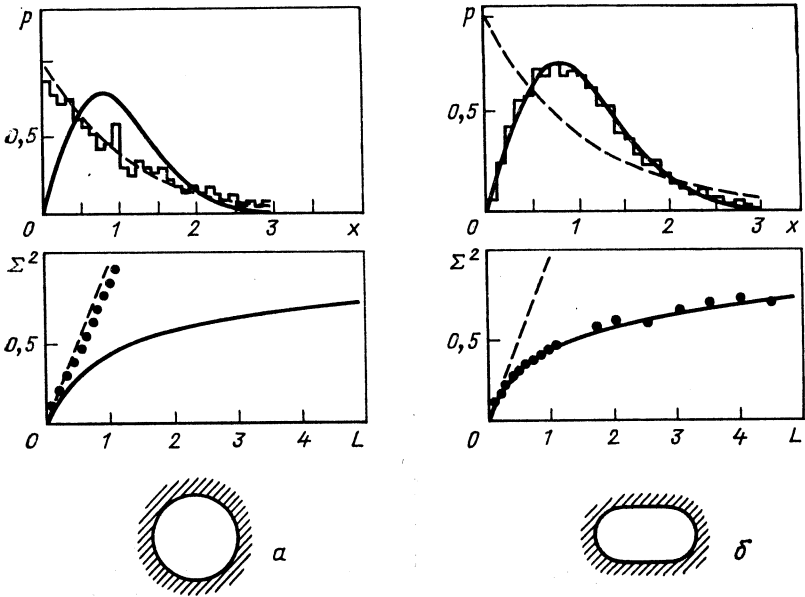


Рис. 20. Статистические характеристики энергетических спектров [$p(x)$ — функция распределения расстояний между соседними уровнями, $\Sigma^2(L)$ — дисперсия] для кругового бильярда (а) и бильярда типа «стадион» (б): сплошная линия соответствует распределению Вигнера; штриховая — распределению Пуассона

спектра (решение задачи Дирихле известно для границ разной формы);

4) бесконечное число собственных значений в дискретном спектре обеспечивает статистическую достоверность результатов.

Для бильярдов с определенной формой границ может быть реализована одна из двух экстремальных ситуаций: интегрируемая или неинтегрируемая. Так, в круговом бильярде (рис. 20, а) угловой момент является вторым (помимо энергии $E = p^2/2m$) интегралом движения, и такая система является интегрируемой. Бильярд типа «стадион» (рис. 20, б) — простейшая динамическая стохастическая система. На рис. 20 [49] представлены статистические характеристики энергетических спектров (функция распределения расстояний между соседними уровнями и дисперсия) этих двух систем. В полном соответствии с гипотезой об универсальном характере флуктуаций энергетических спектров функция распределения для интегрируемой системы — кругового бильярда — прекрасно аппроксимируется пуассоновским распределением, а дисперсия является линейной функцией длины рассматриваемого энергетического интервала. В неинтегрируемом случае наблюдаются эффект расталкивания уровней и медленный рост дисперсии, обусловленный жесткостью

соответствующего спектра. Все статистические характеристики спектра в этом случае практически совпадают с характеристиками ГОА случайных матриц.

В отличие от бильярдов, где характер движения не зависит от энергии, гамильтоновы системы общего положения являются системами с разделяющимся фазовым пространством, которое содержит как области, в которых движение является стохастическим, так и островки устойчивости. Как это обстоятельство отражается на статистических свойствах спектра? Берри и Робник [65] и независимо Богомольный [73], базируясь на квазиклассических аргументах,

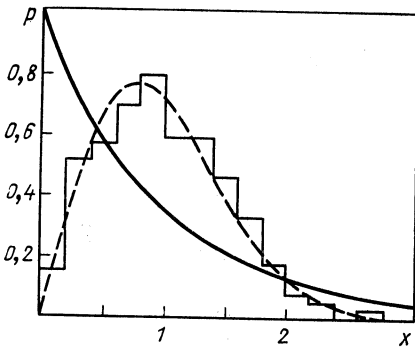


Рис. 21. Распределение расстояний между соседними уровнями для хаотической области движения в потенциале квадрупольных колебаний ($W = 13, E_{кр1} = 1,8$)

показали, что распределение расстояний между соседними уровнями представляет для такой системы независимую суперпозицию пуассоновского распределения с относительным весом μ , определяемым долей фазового пространства с регулярным движением, и распределения Вигнера с относительным весом $\bar{\mu}$ ($\mu + \bar{\mu} = 1$), определяемым долей фазового пространства с хаотическим движением:

$$p(x) = \mu^2 e^{-\mu x} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{\mu} x \right) + \left(2\mu\bar{\mu} + \frac{\pi}{2} \bar{\mu}^3 x \right) e^{-\mu x - \frac{\pi}{4} \bar{\mu}^2 x^2}. \quad (116)$$

Это интерполяционная формула между распределениями Пуассона (113) и Вигнера (112).

Для того чтобы проследить за корреляциями между статистическими свойствами квантового спектра и характером классического движения, обратимся опять к квадрупольным колебаниям ядер, описываемым потенциалом (85). В области пространства параметров, отвечающих потенциалам с единственным экстремумом ($0 < W < 16$) диагонализация гамильтониана может быть эффективно осуществлена на базисе волновых функций гармонического осциллятора. Базисные состояния удобно выбрать [48] в виде

$$|N, L, j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |NL\rangle + j |N, -L\rangle \}, \quad (117)$$

$$N = 0, 1, 2, \dots; L = N, N - 2, \dots; j = \pm 1.$$

Симметрия гамильтониана квадрупольных колебаний (85) приводит к тому, что матрица $\langle N', L', j' | H | N, L, j \rangle$ имеет блочную структуру. Она состоит из двух матриц A_1 -и A_2 -типа [$\text{Mod}(L, 3) = 0, j = \pm 1$] и двух одинаковых матриц E -типа [$\text{Mod}(L, 3) \neq 0, j = \pm 1$]. Возможность независимой диагонализации каждой из этих матриц позволяет существенно улучшить статистику: около 300 уровней каждого типа может быть получено с погрешностью около 1 % среднего расстояния между уровнями.

На рис. 21 представлена гистограмма распределения расстояний между соседними уровнями для гамильтониана квадрупольных коле-

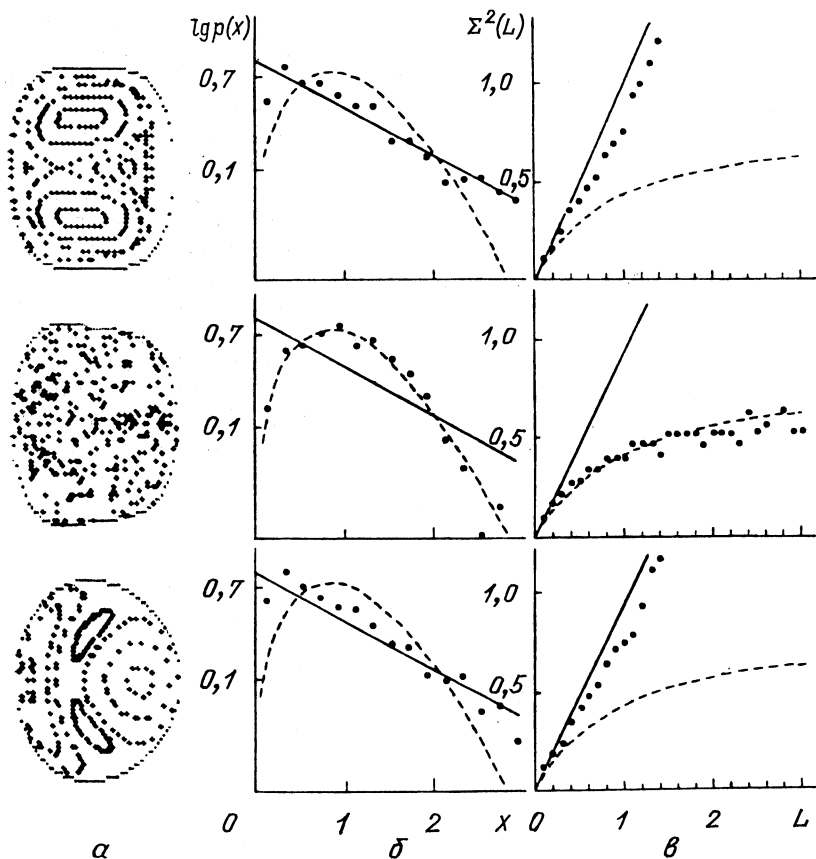


Рис. 22. Корреляция между характером классического движения и статистическими свойствами квантового спектра в тройном переходе ($R - S - R$) потенциала квадрупольных колебаний для $W = 13$:

a — карты Пуанкаре; b — распределение расстояний между соседними уровнями $p(x)$; σ — дисперсия $\Sigma^2(L)$; внизу $E_{\text{кр}1} \approx 90$ (первая регулярная область); посередине $E_{\text{кр}2} \approx 1,8$; $E_{\text{кр}3} \approx 1895$ (хаотическая область); сверху $E_{\text{кр}4} \approx 14,2$ (вторая регулярная область)

баний ($W = 13$, $E_{кр} = 1,8$). В этом случае все уровни энергии, вошедшие в распределение, соответствуют области классического хаотического движения. Как видно из рисунка, распределение $p(x)$ согласуется с распределением Вигнера, как и в случае бильярдов с хаотическим поведением (рис. 20, б).

Еще более отчетливая корреляция между статистическими свойствами квантового спектра и характером классического движения наблюдается в тройном переходе регулярность — хаос — регулярность ($R - S - R$), который, как было отмечено выше, имеет место в потенциалах с локализованной областью отрицательной кривизны. Рис. 22 иллюстрирует эту корреляцию для трех областей энергии: первой регулярной $E < E_{кр}$, (внизу), хаотической $E_{кр} < E < E_{кр}$, (посередине), второй регулярной $E > E_{кр}$, (вверху). Слева представлены типичные сечения Пуанкаре для этих областей энергий, справа — статистические характеристики спектра: логарифм функции распределения и дисперсия. Для хаотической области как функция распределения, так и дисперсия хорошо соответствуют предсказаниям ГОА. Логарифмический масштаб для функции распределения $p(x)$ удобен, чтобы проследить это соответствие при больших x . Для регулярных областей функция распределения в этой же шкале, согласно гипотезе об универсальном характере флуктуаций энергетических спектров, должна представлять прямую линию (логарифм распределения Пуассона). Расчеты демонстрируют согласие с этой гипотезой, хотя для малых расстояний между уровнями наблюдается небольшое отклонение. Такая тенденция к возникновению небольшого расталкивания в регулярной области, по-видимому, связана с небольшой примесью хаотической компоненты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее важные коллективные явления в атомном ядре — деление, глубокоупругие процессы, сопровождающие столкновения тяжелых ионов, являются коллективными процессами с большой амплитудой. Последовательная теория таких процессов должна быть существенно нелинейной теорией, опирающейся на последние достижения общей теории нелинейных динамических систем. Суть новых достижений этой теории в том, что при определенных условиях динамика строго детерминированной системы становится неотличимой от случайной. Трактовка ядра как многомерной нелинейной динамической системы делает возможным существование в нем принципиально новых стохастических или хаотических режимов. Переход от регулярного движения к хаотическому, вызванный изменением энергии или других параметров системы, должен существенно сказаться как на структуре ядра, так и на его взаимодействии с внешними полями. В частности, принципиально изменяется процесс перераспределения энергии по внутренним степеням свободы, требуется новый подход к описанию перехода через многомерные потенциальные барьеры,

новую окраску приобретает проблема структуры энергетических спектров сложных ядер.

Будущая программа исследований по стохастической ядерной динамике должна включать следующие основные направления:

- 1) поиск стохастических режимов;
- 2) разработка методик определения критической энергии перехода к хаосу;

3) исследование проявлений хаотической динамики при энергии, превышающей критическую.

В каждом из этих направлений первые шаги уже предприняты. Хаотические режимы были обнаружены при математическом моделировании столкновения тяжелых ионов в мультипольных поверхностных колебаниях ядер. Трактовка отрицательной кривизны ППЭ как источника локальной неустойчивости позволила сделать достоверные предсказания о возможности существования хаотических режимов, а также оценить область энергий, при которых совершается переход к этим режимам. Эффективность подхода, основанного на анализе ППЭ, усиливается его общностью, позволяющей применять его к широкому классу нелинейных гамильтоновых систем независимо от их конкретной природы.

Предполагаемое появление до конца текущего столетия γ -лазеров делает актуальной и задачу о возбуждении в ядре стохастических режимов под действием периодического внешнего поля. Принцип локализации квантового хаоса [47] приведет в этом случае к нетривиальным особенностям в поглощении энергии внешнего поля. Наконец, учет диссипативных эффектов позволит включить в рассмотрение проблему самоорганизации (возникновения структур) в атомном ядре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем М.: Наука, 1984.
2. Chirikov B. V. // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. P. 265—379.
3. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
4. Tabor M. // Adv. Chem. Phys. 1981. Vol. 46. P. 73—115.
5. Бор О., Мотгельсон Б. Структура атомного ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
6. Айзенберг И., Грайнер В. Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975.
7. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
8. Чириков Б. В. Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-131. Новосибирск, 1986.
9. Борн М. // УФН. 1959. Т. 69. С. 173—187.
10. Umar A. S., Stayer M. R., Gusson R. Y. // Phys. Rev. 1985. Vol. C32. P. 172—183.
11. Берман Г. П., Коловский А. Р. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1938—1947.
12. Toda M. // Phys. Lett. 1974. Vol. 48A. P. 335—336.

13. Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Кривошей И. В. // Химическая физика. 1986. Т. 5. С. 309—317.
14. Henon M., Heiles C. // Astron. J. 1964. Vol. 69. P. 73—79.
15. Benettin G., Galdani L., Strelajin J. // Phys. Rev. 1976. Vol. A14. P. 2338—2345.
16. Песин Ю. Б. // ДАН СССР. 1976. Т. 226. С. 774—776.
17. Колмогоров А. Н. // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 754—755.
18. Brumer P. // Adv. Chem. Phys. 1981. Vol. 47. P. 201—238.
19. Чириков Б. В. // Атомная энергия. 1959. Т. 6. С. 630—638.
20. Рабинович М. И., Трубников Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
21. Doviell P., Escande D., Codaccioni J. // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 49. P. 1879—1883.
22. Rechester A., Stix T. // Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 36. P. 587—590.
23. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
24. Биркгофф Д. Динамические системы. М.: ОГИЗ, 1941.
25. Gustavson F. G. // Astron. J. 1964. Vol. 71. P. 670—686.
26. Swimm R. T., Delos J. B. // J. Chem. Phys. 1979. Vol. 71. P. 1706—1716.
27. Mosel V., Greiner W. // Z. Phys. 1968. Vol. 217. P. 256—281.
28. Айзенберг И., Грайнер В. Микроскопическая теория ядра: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1976.
29. Seiwert M., Ramayya A. V., Maruhn J. A. // Phys. Rev. 1984. Vol. C29. P. 284—290.
30. Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Тарасов В. Н., Чеканов Н. А. М.: Препринт ХФТИ 88-43, ЦНИИ Атоминформ, 1988.
31. Хилл Д., Уиллер Дж. // УФН. 1954. Т. 52. С. 83—142.
32. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971.
33. Strutinsky V. M. // Nucl. Phys. A. 1967. Vol. 95. P. 420—442.
34. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1973.
35. Аносов Д. В. // Труды МИАН. 1967. Т. 90. С. 210—307.
36. Аносов Д. В., Синай Я. Г. // УМН. 1967. Т. 22. С. 107.
37. Кривошей И. В. // Химическая физика. 1985. Т. 4. С. 1443—1447.
38. Болотин Ю. Л., Кривошей И. В. // ЯФ. 1985. Т. 42. С. 53—56.
39. Swiatecki W., Cohen S. // Ann. Phys. 1963. Vol. 22. P. 406—437.
40. Пик-Пичак Г. А. Препринт ИАЭ 3130. М., 1979.
41. Bohr N., Wheeler A. // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. P. 426—450.
42. Gavron A., Beene J., Cheynis Betall // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. P. 1255—1258.
43. Grange P., Jun-Qing, Weidenmiller H. // Phys. Rev. 1983. Vol. C27. P. 2063—2072.
44. Kramers H. // Physica. 1940. Vol. VIII. P. 284—304.
45. Jung C. // J. Phys. A. 1986. Vol. 19. P. 1345—1351.
46. Chirikov V. V., Israilev F. M., Shepelyansky D. L. // Sov. Sci. Rev. 1981. Vol. 2C. P. 209.
47. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Предпринт ИЯФ СО АН СССР 85-29. Новосибирск, 1985.
48. Weismann Y., Jortner J. // J. Chem. Phys. 1979. Vol. 71. P. 1706—1716.
49. Bohigas O., Giannoni M. // Lecture Notes in Physics. 1984. Vol. 209. P. 1—97.
50. Percival I. C. // Adv. Chem. Phys. 1977. Vol. 36. P. 1—61.
51. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики: Пер. с англ. М.: Мир, 1970.
52. Shepelyansky D. L. // Physica. 1983. Vol. 8D. P. 208—222.
53. Casati G., Chirikov V. V., Israilev F. M., Ford J. // Lect. Notes in Phys. 1979. Vol. 93. P. 334—352.
54. Wong S. // Proc. Como conf. on quantum chaos/Ed. G. Casati 1984. P. 83—101.

55. Liou H. I., Camarda H. S., Rahn F.//Phys. Rev. 1972. Vol. C5. P. 1002.
56. Prochnow N. S., Newson H. W., Bilpuch E. C.//Nucl. Phys. 1972. Vol. A194. P. 353.
57. Soyeur M., Zuker A. P.//Phys. Lett. 1972. Vol. B41. P. 135.
58. Von Neuman J., Wigner E. P.//Phys. Z. 1929. Vol. 30. P. 467.
59. Wigner E. P. Oak Ridge Nat. Lab. Rept. ORNL-2309, 1957. P. 59—70.
60. Wigner E. P. Columbia Univ. Rept. CU-175 (TID-7547), 1957. P. 49—50.
61. Gurevich I. I., Pevsner M. I.//Nucl. Phys. 1956. Vol. 2. P. 575—581.
62. Ландау Л. Д., Смородинский Я. А. Лекции по теории атомного ядра. М.: Гостехиздат, 1955.
63. Porter C. E. (ed.) Statistical theories of spectra. N.Y.: Academic Press, 1965.
64. Brody T. A., Flores J., French J. B. e.a.//Rev. Mod. Phys. 1981. Vol. 53. P. 385—479.
65. Berry M. V., Robnik M.//J. Phys. A. 1984. Vol. 17. P. 2413—2421.
66. Camarda H. S., Georgopoulos P. D.//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 492—496.
67. Bohigas O., Giannoni M., Schmit C.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 1—3.
68. Bohigas O., Hag R. V., Pandey A.//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 1645—1649.
69. Delande D., Gay J. C.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 2006—2009.
70. Seligman T., Verbaarschot J., Zirnbaker M.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 215—219.
71. Seligman T., Nishioka H.//Lect. Not. in Phys. 1986. Vol. 263. P. 1—314.
72. Berry M. V., Tabor M.//Proc. R. Soc. 1977. Vol. A356. P. 375—394.
73. Богомольный Е. Б.//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 55—58.