

СТАРЫЕ И НОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ААРОНОВА — БОМА

Г. Н. Афанасьев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор современного состояния теории эффекта Ааронова — Бомы. Особое внимание уделено дискуссии последних лет по существованию этого эффекта. Проанализирована экспериментальная ситуация, обсуждаются «решающие» эксперименты, связанные с АБ-эффектом.

We review the modern status of the Aharonov—Bohm effect. The special emphasis is put on the recent discussion of existence of the AB effect. The experimental situation is analysed in detail, and the crucial experiments testing the AB effect existence are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

В классической электродинамике сила, действующая на заряженную частицу, определяется напряженностями электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{H}] \right).$$

Это означает отсутствие рассеяния на областях пространства, в которых $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$. Электрический скалярный потенциал ϕ и магнитный вектор-потенциал \mathbf{A} в классической теории электромагнетизма играют вспомогательную роль: они служат, главным образом, для упрощения уравнений поля. Допустимы произвольные калибровочные преобразования, не меняющие напряженностей электромагнитного поля. Итак, в классической механике фундаментальными являются напряженности \mathbf{E} , \mathbf{H} .

Совершенно иная ситуация имеет место в квантовой механике. Причина состоит в том, что в уравнение Шредингера входят именно электромагнитные потенциалы, а не напряженности поля. Сидэ и Эренберг [1] первыми указали на исключительную роль электромагнитных потенциалов в квантовой механике. Спустя десять лет к этой же задаче обратились Ааронов и Бом [2]. В частности, они рассмотрели рассеяние заряженных частиц на магнитном поле цилиндрического соленоида. Оказалось, что рассеяние имеет место, даже если область, где напряженности \mathbf{E} , $\mathbf{H} \neq 0$, недоступна для падаю-

щих частиц *. Это явление, т. е. физические эффекты недоступных для частиц полей, называют эффектом Ааронова — Бома (АБ-эффект). В своей работе Ааронов и Бом использовали однозначные волновые функции. Между тем в многосвязном пространстве (например, части пространства вне непроницаемого цилиндрического соленоида) допустимы неэквивалентные представления углового момента, которым соответствуют неоднозначные (более того, разрывные) волновые функции. Равный статус этих представлений и отсутствие надежного критерия для выбора одного из них привели к оживленной дискуссии последних лет по существованию АБ-эффекта.

С другой стороны, эксперименты с рассеянием электронов на тороидальном соленоиде показывают наличие сдвига дифракционной картины при включении тока в соленоиде. Положительные их результаты в так называемой альтернативной (или гидродинамической) интерпретации АБ-эффекта приписываются проникновению падающих частиц в область, где $\mathbf{H} \neq 0$. Для этого есть несколько причин. Конечность длины реального цилиндрического соленоида приводит к утечкам магнитного поля вблизи концов соленоида. Это позволяет интерпретировать эксперименты с цилиндрическими соленоидами как результат рассеяния на хвостах магнитного поля. Вторая из упомянутых причин заключается в конечном значении реального потенциала, препятствующего проникновению частиц в область с $\mathbf{H} \neq 0$. Дополнительное осложнение для бесконечного цилиндрического соленоида связано с медленным убыванием вектор-потенциала, что приводит к существенному искажению падающей волны, которая перестает быть однозначной. Это приводит к многочисленным парадоксам с несохранением углового момента.

Мы будем придерживаться следующего плана изложения. В разд. 1 рассматривается рассеяние заряженных частиц на бесконечном цилиндрическом соленоиде. Мы показываем, что отличие результатов работы [3] от результатов Ааронова — Бома обязано не дефекту борновского приближения, использованного в [3] (как это утверждалось во многих работах, см., например обзор [4]), а различию физических ситуаций, рассмотренных в [2, 3]. Здесь же приводится асимптотика АБ-волновой функции, справедливая для всех значений угла рассеяния. В этой же части обсуждаются физический смысл и границы применимости дираковского фазового множителя.

В разд. 2 обсуждаются вопросы однозначности волновых функций в многосвязных пространствах. Показано, что допустимыми становятся многозначные волновые функции. Это связано с тем, что (в отличие от односвязного пространства) не проходит известное доказательство Паули об однозначности волновых функций. В частности, на таких функциях операторы углового момента не перестают быть эрмитовыми.

* Этот факт вызвал шок и удивление у большинства физиков. Как здесь не вспомнить В. Шекспира («Гамлет»): «Как много, друг Горацио, на свете есть такого, что и не снилось нашим мудрецам».

В разд. 3 анализируются попытки доказательства несуществования АБ-эффекта, встречающиеся в литературе последних лет. Все они связаны с использованием многозначных (вместо однозначных) волновых функций.

В разд. 4 показывается, что рассмотрение процесса включения магнитного поля в соленоиде позволяет частично устранить упомянутые в предыдущих разделах неопределенности с выбором волновых функций.

В разд. 5 рассматривается рассеяние заряженных частиц на двух бесконечных цилиндрических соленоидах с противоположными магнитными потоками. Необходимость такого рассмотрения вызвана осложнениями с выбором падающей волны для одного соленоида.

В разд. 6 рассматривается рассеяние заряженных частиц на тороидальном соленоиде. Это позволяет избежать краевых эффектов, связанных с утечками магнитного поля вблизи концов цилиндрического соленоида. Амплитуда рассеяния не содержит сингулярностей (в отличие от амплитуды рассеяния на цилиндрическом соленоиде), а интегральное сечение рассеяния оказывается конечным.

В разд. 7 рассматривается рассеяние на многосвязных пространствах. Показано, что в одном и том же многосвязном пространстве при нетривиальных вектор-потенциалах и однозначных волновых функциях АБ-эффект может существовать, но может и отсутствовать. Сформулированы условия для существования этого эффекта.

В разд. 8 обсуждается вопрос о том, какие калибровочные преобразования допустимы. Оказывается, что допустимыми являются любые калибровочные преобразования (в том числе и такие, которые полностью устраняют вектор-потенциал вне соленоида), если мы готовы работать с многозначными (после калибровочного преобразования) волновыми функциями. В противном случае мы вынуждены ограничиться вектор-потенциалами, удовлетворяющими теореме Стокса.

В разд. 9 рассмотрена альтернативная интерпретация АБ-эффекта. Она основывается на том, что результаты экспериментов по обнаружению АБ-эффекта связываются с проникновением падающих частиц в область с $H \neq 0$. На примере одного цилиндрического соленоида, двух цилиндрических соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и тороидального соленоида мы показываем, что подобная интерпретация несостоятельна.

В разд. 10 обсуждается АБ-эффект для связанных состояний. Наличие отличного от нуля вектор-потенциала в доступной для частиц области пространства приводит к дополнительным переходам между энергетическими уровнями.

В разд. 11 обсуждается современная экспериментальная ситуация по АБ-эффекту. Показано, что она почти однозначно говорит в пользу существования АБ-эффекта. Анализируются и предлагаются решающие эксперименты, позволяющие рассеять имеющиеся в литературе

сомнения по существованию этого эффекта. Здесь же обсуждается мысленный эксперимент, показывающий, что эффект недостижимых для частиц полей может быть наблюден и в односвязном пространстве.

1. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ЭФФЕКТА
ААРОНОВА — БОМА

1.1. Рассеяние на одном конечном цилиндрическом соленоиде. Рассмотрим рассеяние на непроницаемом цилиндре C_0 радиуса R , ось которого совпадает с осью z . Пучок заряженных бесспиновых частиц падает вдоль оси x . Волновая функция и амплитуда рассеяния равны:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= \sum_m i^{|m|} \left[J_{|m|}(k\rho) - H_m^{(1)}(k\rho) \frac{J_{|m|}(kR)}{H_{|m|}^{(1)}(kR)} \right] \exp(im\varphi); \\ f_0(\varphi) &= - \sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \sum_m \frac{J_{|m|}(kR)}{H_{|m|}^{(1)}(kR)} \exp(im\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь ρ, z, φ — цилиндрические координаты; $J_m, H_m^{(1,2)}$ — цилиндрические функции; $k^2 = 2\mu E/\hbar^2$.

Поместим теперь внутрь C_0 цилиндрический соленоид, соосный с C_0 с радиусом $a < R$. Вне соленоида только одна компонента векторного магнитного потенциала отлична от нуля: $A_\rho = A_z = 0, A_\varphi = \Phi/2\pi\rho$ (H — магнитное поле, Φ — его поток). Волновая функция и амплитуда рассеяния равны:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \sum_m \exp \left[i\pi \left(|m| - \frac{1}{2} |m - \gamma| \right) \right] \left[J_{|m-\gamma|}(k\rho) - \right. \\ &\quad \left. - H_{|m-\gamma|}^{(1)}(k\rho) \frac{J_{|m-\gamma|}(kR)}{H_{|m-\gamma|}^{(1)}(kR)} \right] \exp(im\varphi), \quad \gamma = \frac{e\Phi}{\hbar c}; \\ f(\varphi) &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sum_m \left\{ 1 + \exp \left[i\pi \left(|m| - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - |m - \gamma| \right) \right] \frac{H_{|m-\gamma|}^{(2)}(kR)}{H_{|m-\gamma|}^{(1)}(kR)} \right\} \exp(im\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Очевидно, $f \neq f_0$ и именно это отличие составляет суть эффекта АБ.

Вычитая из полной амплитуды f [см. (2)] амплитуду рассеяния f_0 на непроницаемом цилиндре в отсутствие магнитного поля [см. (1)], находим амплитуду рассеяния f_1 , обязанную наличию магнитного поля:

$$f_1 = f - f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sum f_{1m} \exp(im\varphi); \quad (3)$$

$$f_{1m} = \frac{H_{|m|}^{(2)}}{H_{|m|}^{(1)}} - \exp \left[i\pi \left(|m| - |m - \gamma| \right) \right] \frac{H_{|m-\gamma|}^{(2)}}{H_{|m-\gamma|}^{(1)}}. \quad (4)$$

В (4) функции Ханкеля зависят от аргумента $x = KR$. Рассмотрим случай тонкого соленоида ($KR \ll 1$). Тогда из (4) следует:

$$f_{1m} = \begin{cases} -1 + \exp(i\pi\gamma) & \text{при } m > \gamma; \\ -1 + \exp(-i\pi\gamma) & \text{при } m < \gamma. \end{cases} \quad (5)$$

При этом ряд амплитуды рассеяния суммируется в конечном виде

$$f_1(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{\sin \pi\gamma}{\sin \frac{\varphi}{2}} \exp \left[i \left(m_\gamma + \frac{1}{2} \right) \varphi \right]. \quad (6)$$

Здесь m — ближайшее целое, меньшее γ . Если к тому же $0 < \gamma \ll 1$, то:

$$f_{1m} = \begin{cases} i\pi\gamma, & m \geq 1; \\ -i\pi\gamma, & m \leq 0; \end{cases}$$

$$f_1(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{\pi\gamma}{\sin \frac{\varphi}{2}} \exp \left(\frac{i\varphi}{2} \right), \quad \sigma_{\text{AB}} = \frac{\pi\gamma^2}{2k} \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (7)$$

Выражения (7) были получены Аароновым и Бомом в 1959 г. [2].

С другой стороны, пренебрежем в уравнении Шредингера членами, квадратичными по вектор-потенциалу, а линейные члены перенесем в правую часть, рассматривая их как возмущение:

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \nabla \Psi = \frac{2i\gamma}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}. \quad (8)$$

Ищем Ψ в виде: $\Psi_0 + \Psi_1$. Здесь Ψ_0 — волновая функция в отсутствие магнитного поля [см. (1)]. Для Ψ_1 находим уравнение

$$\Delta \Psi_1 + k^2 \Psi_1 = \frac{2i\gamma}{\rho^2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \varphi};$$

Ψ_1 представляем в виде ряда по $\exp(im\varphi)$:

$$\Psi_1 = \sum \Psi_{1m} \exp(im\varphi).$$

Ψ_{1m} удовлетворяет уравнению

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_{1m}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Psi_{1m}}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \Psi_{1m} &= -\frac{2m\gamma}{\rho^2} \Psi_{0m}; \\ \Psi_{0m} &= i^{|m|} \left[J_{|m|}(k\rho) - H_{|m|}^{(1)}(k\rho) \frac{J_{|m|}(kR)}{H_{|m|}^{(1)}(kR)} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ψ_{1m} выражается через функцию Грина $G_{0m}(\rho, \rho')$ и Ψ_{0m} :

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{1m} &= -2m\gamma \int \frac{d\rho'}{\rho'} G_{0m}(\rho, \rho') \Psi_{0m}(\rho'); \\ G_{0m}(\rho, \rho') &= \frac{\pi}{2i} H_{|m|}^{(1)}(k\rho_{>}) \left[J_{|m|}(k\rho_{<}) - H_{|m|}^{(1)}(k\rho_{<}) \frac{J_{|m|}(kR)}{H_{|m|}^{(1)}(kR)} \right]; \\ \Delta G_{0m} + k^2 G_{0m} &= \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho'). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Наконец, устремляя в (10) $\rho \rightarrow \infty$, находим парциальные компоненты амплитуды рассеяния в борновском приближении:

$$f_{1m}^B = 2\pi i m \gamma \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho} \left[J_{|m|}(k\rho) - H_{|m|}^{(1)}(k\rho) \frac{J_{|m|}(kR)}{H_{|m|}^{(1)}(kR)} \right]^2.$$

Это выражение удается проинтегрировать в квадратурах:

$$f_{1m}^B = 2\pi i \gamma \frac{m}{|m|} \sum_{s=0}^{|m|-1} \varepsilon_s \left[J_s(kR) - \frac{J_{|m|}(kR)}{H_{|m|}^{(1)}(kR)} H_s^{(1)}(kR) \right]^2, \quad (11)$$

$$\varepsilon_s = (1 + \delta_{0s})^{-1}.$$

Заметим, что при $m = 0$ правая часть (11) исчезает. Поэтому в рассматриваемом приближении f_{10}^B не содержит членов, линейных по γ . С другой стороны, точная амплитуда f_{10} отлична от нуля как при R конечных [см. (4)], так и при $R \rightarrow 0$ [см. (7)]. Посмотрим, во что переходят амплитуды f_{1m}^B при $R \rightarrow 0$. Из (11) при $m \neq 0$ следует:

$$f_{1m}^B = i\pi \gamma \frac{m}{|m|}. \quad (12)$$

Сравнивая (7) и (12) заключаем:

$$f_{1m}^B = f_{1m} \quad (m \neq 0); \quad (13)$$

$$f_{10}^B = 0, \quad f_{10} = i\pi \gamma.$$

Вычислим теперь борновскую амплитуду рассеяния:

$$f_{1B} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}} \pi \gamma \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}. \quad (14)$$

Амплитуды f_1 и f_{1B} приводят к различным дифференциальным сечениям:

$$\sigma^B(\varphi) = \frac{\pi \gamma^2}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \neq \sigma_{AB}(\varphi) = \frac{\pi \gamma^2}{2k} \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) были получены в известной работе [3]. Их отличие от соответствующих величин (7) интерпретировалось в [3] как результат использования Аароновым и Бомом неоднозначной волновой функции. Позже было показано [6, 7], что волновая функция АБ является однозначной (неоднозначность падающей волны компенсируется неоднозначностью рассеянной волны). В многочисленных последующих работах (см., например, [4, 6, 8]) результат (7) работы Ааронова и Бома рассматривался как правильный, а отличие (14) и (15) от (17) трактовалось как результат неприменимости теории возмущений из-за медленного убывания $(1/r)$ вектор-потенциала.

Посмотрим, что получится, если точную амплитуду (4) разложить по степеням γ . При $m \neq 0$ имеем:

$$f_{1m} = \frac{H_{|m|}^{(2)}}{H_{|m|}^{(1)}} - \left(1 + i\pi\gamma \frac{m}{|m|} \right) \frac{H_{|m|}^{(2)} - \gamma \frac{m}{|m|} \frac{\partial H_{|m|}^{(2)}}{\partial v} \Big|_{v=|m|}}{H_{|m|}^{(1)} - \gamma \frac{m}{|m|} \frac{\partial H_{|m|}^{(1)}}{\partial v} \Big|_{v=|m|}} =$$

$$= \gamma \frac{H_{|m|}^{(2)}}{H_{|m|}^{(1)}} \frac{m}{|m|} \left[-i\pi + \frac{1}{H_{|m|}^{(2)}} \frac{\partial H_{|m|}^{(2)}}{\partial v} \Big|_{v=|m|} - \frac{1}{H_{|m|}^{(1)}} \frac{\partial H_{|m|}^{(1)}}{\partial v} \Big|_{v=|m|} \right]. \quad (16)$$

Производная от функций Ханкеля по индексам снова выражается через линейные комбинации функций Ханкеля [9]:

$$\frac{\partial H_{|m|}^{(1,2)}}{\partial v} \Big|_{v=|m|} = \mp \frac{i\pi}{2} H_{|m|}^{(1,2)} + \frac{m!}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{x}{2} \right)^{k-m} \frac{1}{k!} \frac{1}{m-k} H_k^{(1,2)}. \quad (17)$$

Вычитая эти соотношения друг из друга, получаем

$$\left[\frac{1}{H_{|m|}^{(2)}} \frac{\partial H_{|m|}^{(2)}}{\partial v} - \frac{1}{H_{|m|}^{(1)}} \frac{\partial H_{|m|}^{(1)}}{\partial v} \right]_{v=|m|} = i\pi +$$

$$+ \frac{i|m|}{J_{|m|}^2 + N_{|m|}^2} \sum_{k=0}^{|m|-1} \left(\frac{x}{2} \right)^{k-|m|} \frac{J_k N_{|m|} - J_{|m|} N_k}{k! (|m| - k)}.$$

Подставляя это выражение в (16):

$$f_{1m} = \gamma \frac{m}{|m|} \frac{H_{|m|}^{(2)}}{H_{|m|}^{(1)}} \frac{i m!}{J_{|m|}^2 + N_{|m|}^2} \sum_{k=0}^{|m|-1} \left(\frac{x}{2} \right)^{k-|m|} \frac{J_k N_{|m|} - J_{|m|} N_k}{k! (m-k)}. \quad (18)$$

Чтобы сравнить с (5), необходимо в (18) устремить аргумент беселевых функций $x = kR$ к нулю. При этом примем во внимание, что разность $J_k(x) N_{|m|}(x) - J_{|m|}(x) N_k(x)$ выражается в виде конечного ряда по обратным степеням x [9]. Максимальный показатель, который встречается в этом ряде, равен $|m| - k$ ($0 \leq k \leq |m| - 1$). Это означает, что в сумму (18) наибольший вклад при $x \rightarrow 0$ вносит член с $k = 0$:

$$J_0 N_{|m|} - N_0 J_{|m|} \approx -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^{|m|} (|m| - 1)!$$

Учитывая поведение $J_{|m|}(x)$, $N_{|m|}(x)$ при малых x ($J_m \approx \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!}$, $N_m \approx -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m$), получаем

$$\frac{i m!}{J_m^2 + N_m^2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{x}{2} \right)^{k-m} \frac{J_k N_m - J_m N_k}{k! (m-k)} \rightarrow -i\pi \quad (x \rightarrow 0) \quad (19)$$

Таким образом, при $m \neq 0$:

$$f_{1m} = i\pi\gamma \frac{m}{|m|},$$

что совпадает с (7). Случай $m = 0$ требует отдельного рассмотрения. Имеем [9]:

$$\left. \frac{\partial H_v^{(1)}}{\partial v} \right|_{v=0} = -\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}, \quad \left. \frac{\partial H_v^{(2)}}{\partial v} \right|_{v=0} = \frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}, \quad (20)$$

т. е. сумма в (17) не дает вклада. Для f_{10} получаем

$$f_{10} = \frac{H_0^{(2)}}{H_0^{(1)}} - \exp(-i\pi\gamma) \frac{H_\gamma^{(2)}}{H_\gamma^{(1)}} = \frac{H_0^{(2)}}{H_0^{(1)}} - (1 - i\pi\gamma) \frac{H_0^{(2)} + \frac{i\pi\gamma}{2} H_0^{(2)}}{H_0^{(1)} - \frac{i\pi\gamma}{2} H_0^{(1)}} \approx 0 \quad (21)$$

(членами порядка γ^2 и более высокого пренебрегаем).

Итак, предел $\gamma \rightarrow 0$, $kR \rightarrow 0$ исходного выражения (2) совпадает с пределом $kR \rightarrow 0$ борновской амплитуды. Это означает, что отличие сечений σ^B и σ_{AB} [см. (15)] не является следствием неприменимости борновского приближения, как это утверждается, например, в обзоре [4]. Рассмотрим этот вопрос более подробно [10]. При переходе от (4) к (15) предполагалось, что при малых kR с хорошей точностью выполняется соотношение $H_{|m-\gamma|}^{(2)}/H_{|m-\gamma|}^{(1)} \approx -1$ или, что то же самое,

$$|J_{|m-\gamma|}(x)| \ll |N_{|m-\gamma|}(x)|. \quad (22)$$

Из поведения $J_\nu(x)$ при малых x и произвольных ν $J_\nu(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}$ и определения $N_\nu \left(= \frac{J_\nu \cos \nu\pi - J_{-\nu}}{\sin \nu\pi} \right)$ следует, что неравенство (22) заведомо выполнено, если $m \neq 0$ (напомним, что $0 \leq \gamma \leq 1/2$). Остается рассмотреть случай $m = 0$. Условие (22) выполнено при $x \ll 1$, если γ не слишком мало. Чтобы быть более точным, представим $J_\gamma(x)$ в виде

$$J_\gamma(x) \approx \exp\left(\gamma \ln \frac{x}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \quad (x \ll 1).$$

Если выполнено условие

$$\left| \gamma \ln \frac{x}{2} \right| \gg 1,$$

то

$$|J_\gamma(x)| \ll |J_{-\gamma}(x)|, \quad |J_\gamma(x)| \ll |N_\gamma(x)|$$

и мы получаем (5). Если же

$$\left| \gamma \ln \frac{x}{2} \right| \ll 1,$$

то допустимо разложение по γ

$$J_\gamma(x) = J_0 + \frac{\pi\gamma}{2} N_0, \quad N_\gamma(x) = N_0(x) - \frac{\pi\gamma}{2} J_0$$

и мы приходим к (21) или, что то же самое, к борновской амплитуде.

Таким образом, отличие сечений (7) и (15) обязано различным физическим ситуациям. Именно сечению (7) соответствуют условия

$$\gamma \ll 1, \quad kR \ll 1, \quad \left| \gamma \ln \frac{kR}{2} \right| \gg 1. \quad (23)$$

Сечению же (8) соответствуют условия

$$\gamma \ll 1, \quad kR \ll 1, \quad \left| \gamma \ln \frac{kR}{2} \right| \ll 1. \quad (24)$$

Отметим, что условиям (24) гораздо легче удовлетворить на эксперименте.

Вернемся еще раз к волновой функции, описывающей рассеяние на бесконечном экранированном соленоиде конечного радиуса R , $\Psi = \Psi_{AB} + \Psi_R$:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{AB} &= \sum \exp \left[i\pi \left(|m| - \frac{1}{2} |m - \gamma| \right) \right] J_{|m-\gamma|}(k\rho) \exp(im\varphi); \\ \Psi_R &= - \sum \exp \left[i\pi \left(|m| - \frac{1}{2} |m - \gamma| \right) \right] H_{|m-\gamma|}^{(1)}(k\rho) \times \\ &\quad \times \frac{J_{|m-\gamma|}(kR)}{H_{|m-\gamma|}^{(1)}(kR)} \exp(im\varphi). \end{aligned} \right\} (25)$$

С асимптотическим поведением второго слагаемого все ясно: оно описывает рассеянную волну: $\Psi_R \approx \frac{\exp(ik\rho)}{\sqrt{\rho}} f_\gamma(\varphi)$,

$$f_\gamma(\varphi) = - \left(\frac{2}{\pi ik} \right)^{1/2} \sum \frac{J_{|m-\gamma|}(kR)}{H_{|m-\gamma|}^{(1)}(kR)} \exp [im\varphi + i\pi (|m| - |m - \gamma|)].$$

Более сложным является асимптотическое поведение Ψ_{AB} . На больших расстояниях Ψ_{AB} сводится к искаженной плоской волне

$$\Psi_{in} = \exp(ikx) \exp[i\gamma(\varphi - \pi)] \quad (26)$$

и к рассеянной волне Ψ_s . Для нее в работах [7] были получены выражения, которые имели смысл в той или иной области изменения угла рассеяния φ . Следующее выражение для Ψ_s , найденное в [11], справедливо при всех φ :

$$\Psi_s \approx i \sin \pi\gamma \exp \left(\frac{i\varphi}{2} \right) \frac{\exp(ik\rho)}{\left(1 - 2\pi ik\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{1/2}}. \quad (27)$$

При $k\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} \gg 1$ приходим к выражениям, найденным в [7]:

$$\Psi_s \approx \sin \pi\gamma \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sqrt{2\pi k\rho}} \frac{\exp(ik\rho)}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (28)$$

Далее на положительной полуоси x (сверху и снизу)

$$\left. \begin{aligned} \Psi_s(\varphi=0) &= i \sin \pi\gamma \exp(ik\rho); \\ \Psi_s(\varphi=2\pi) &= -i \sin \pi\gamma \exp(ik\rho). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Таким образом, Ψ_{in} и Ψ_s по отдельности испытывают скачок на положительной полуоси x . Тем не менее их сумма (т. е. Ψ_{AB}) всюду непрерывна. В частности,

$$\Psi_{in}(\varphi=0) + \Psi_s(\varphi=0) = \Psi_{in}(\varphi=2\pi) + \Psi_s(\varphi=2\pi) = \cos \pi\gamma \exp(ik\rho). \quad (30)$$

Заметим, что разрывность Ψ_{in} и Ψ_s приводит к возникновению ряда парадоксальных ситуаций. Мы их рассмотрим в разд. 3.

1.2. О физическом смысле дираковского фазового множителя. Уравнение Шредингера (у.Ш.), которому удовлетворяет функция Ψ :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i\gamma \right)^2 \Psi \right] = E\Psi, \quad (31)$$

формально удовлетворяется следующим решением:

$$\Psi = \Psi_0 \exp(i\gamma\varphi). \quad (32)$$

Здесь Ψ_0 — решение уравнения Шредингера в отсутствие магнитного поля. Если в качестве Ψ_0 взять однозначное решение (1), удовлетворяющее условию $\Psi_0(2\pi) = \Psi_0(0)$, то унитарность преобразования (32) приводит к тому, что плотность и ток вероятности одинаковы для Ψ и Ψ_0 . Это означает, что магнитное поле не дает вклад в рассеяние.

С другой стороны, если Ψ в (32) — однозначная функция, то Ψ_0 — неоднозначна:

$$\Psi_0(2\pi) = \Psi_0(0) \exp(-2i\pi\gamma). \quad (33)$$

Докажем, что в этом случае [т. е. при выполнении условия (33)] волновые функции Ψ в (2) и (32) одни и те же. В самом деле, решение свободного уравнения Шредингера с граничным условием (33) имеет вид

$$\Psi_0 = \sum A_m \left[J_{|m-\gamma|}(k\rho) - H_{|m-\gamma|}^{(1)}(k\rho) \frac{J_{|m-\gamma|}(kR)}{H_{|m-\gamma|}^{(1)}(kR)} \right] \exp[i(m-\gamma)\varphi]. \quad (34)$$

Подставляя (34) в (32) и фиксируя A_m из условия исчезновения сходящейся цилиндрической волны при $\rho \rightarrow \infty$, приходим к (2).

Представление волновой функции в виде (32) или в более общем виде

$$\Psi_D(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) \quad \{ (35) \}$$

было впервые введено Дираком [12] в 1931 г. Здесь Ψ_D — волновая функция при наличии магнитного поля; Ψ_0 — решения свободного уравнения Шредингера. Экспоненциальный множитель в (35) часто называют магнитным фазовым множителем. Недостаток дираковского рецепта состоит в том, что Ψ_D не является однозначной функцией (если Ψ_0 — однозначное решение свободного уравнения Шредингера), а следовательно, и неправильно описывает квантовое состояние при наличии магнитного поля. Если же Ψ в (31) — однозначная волновая функция, то соотношение (35), хотя и правильно, но практически бесполезно, поскольку найти решение свободного уравнения Шредингера с граничным условием типа (33) отнюдь не легче, чем решить «неурезанное» уравнение с однозначными волновыми функциями. Несмотря на эту трудность, дираковский рецепт (35) часто использовался для предсказания различных эффектов магнитного поля, и эти эффекты наблюдались на эксперименте. Рассуждения обычно проводятся следующим образом. Ψ_0 представляется в виде суммы

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = \Psi_0^{(1)}(\mathbf{r}) + \Psi_0^{(2)}(\mathbf{r}).$$

Каждое слагаемое соответствует волнам, приходящим в \mathbf{r} различными путями 1 и 2. Эффект магнитного поля учитывается добавлением магнитного фазового фактора в каждое слагаемое по отдельности:

$$\Psi_D(\mathbf{r}) = \Psi_0^{(1)}(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} d\mathbf{r}\right) + \Psi_0^{(2)}(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} d\mathbf{r}\right).$$

Или вынося одну из экспонент за скобки, получаем

$$\Psi_D(\mathbf{r}) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} d\mathbf{r}\right) \left[\Psi_0^{(1)}(\mathbf{r}) + \exp\left(\frac{ie\Phi}{\hbar c}\right) \Psi_0^{(2)}(\mathbf{r}) \right]. \quad (36)$$

Здесь Φ — магнитный поток через замкнутый контур, составленный из C_1 , C_2 . Множитель $\exp\left(\frac{ie\Phi}{\hbar c}\right)$ приводит к интерференции между $\Psi_0^{(1)}$ и $\Psi_0^{(2)}$. Общий множитель перед квадратными скобками в (36) приводит к многозначности Ψ_D .

В интересной работе [13], к изложению которой мы переходим, был выяснен физический смысл дираковского магнитного фактора. Рассмотрим сначала бесконечно тонкий цилиндрический соленоид. В отсутствие магнитного поля для плоской волны имеем стандартное

разложение

$$\Psi_0 = \exp(ikx) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l J_{|l|}(kr) \exp(il\varphi). \quad (37)$$

Заменяем теперь суммирование по l формулой суммирования по Пуассону:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} F(l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda F(\lambda) \exp(2i\pi m\lambda). \quad (38)$$

Здесь $F(\lambda)$ — произвольная интерполяция $F(l)$ на нецелые значения l . Применительно к (37) получаем:

$$\Psi_0(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m(\rho, \varphi); \quad (39)$$

$$T_m(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp\left(\frac{i\pi}{2} |\lambda| \right) J_{|\lambda|}(kr) \exp[i\lambda(\varphi + 2\pi m)].$$

Отдельные слагаемые (39) неоднозначны:

$$T_m(r, \varphi + 2\pi) = T_{m+1}(r, \varphi). \quad (40)$$

Условие (40) обеспечивает однозначность всей суммы (39), несмотря на неоднозначность ее отдельных членов. Заметим далее, что T_m содержат φ в комбинации $\varphi + 2\pi m$. Поэтому T_m можно интерпретировать как волну, принимающую значение $\varphi + 2\pi m$ после m полных оборотов (против часовой стрелки) вокруг начала координат. Автор работы [13] называет ее m -й «вихревой волной», отвечающей волновой функции Ψ_0 . Каждая такая волна является многозначным решением уравнения Шредингера в отсутствие магнитного поля. Применим теперь дираковский рецепт (35) к каждой вихревой волне

$$T_m^D(\rho, \varphi) = T_m(\rho, \varphi) \exp[i\gamma(\varphi + 2\pi m)]. \quad (41)$$

Заметим, что фаза дираковского магнитного фактора взята равной $\varphi + 2\pi m$, поскольку именно это значение приобретает полный угол после m оборотов. Подставим теперь в (39) вместо T_m выражение (41). Тогда

$$\Psi(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m^D(\rho, \varphi) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp\left(\frac{i\pi}{2} |\lambda| \right) J_{|\lambda|}(kr) \exp[i(\lambda + \gamma)(\varphi + 2\pi m)]. \quad (42)$$

Рассматриваем $\lambda + \gamma$ как новую переменную и применяем к (42) формулу, являющуюся обращением (38):

$$\Psi(\rho, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^{|l-\gamma|} J_{|l-\gamma|}(k\rho) \exp(il\varphi). \quad (43)$$

Однозначная функция (43) удовлетворяет уравнению Шредингера и совпадает с АБ-волновой функцией.

Рассмотрим теперь соленоид конечного радиуса. Чтобы не допустить проникновения частиц внутрь соленоида, включим внутри соленоида бесконечный отталкивательный потенциал. В качестве Ψ_0 мы должны теперь использовать не плоскую волну, но решение, отвечающее рассеянию на непроницаемом цилиндре в отсутствие магнитного поля. Пусть разложение Ψ_0 по парциальным волнам имеет вид

$$\Psi_0(\rho, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_{|l|}(\rho) \exp(il\varphi). \quad (44)$$

Здесь $R_{|l|}(\rho)$ — решение радиального уравнения, отвечающее угловому моменту l и бесконечному отталкиванию внутри цилиндра. Применяем к (44) формулу суммирования Пуассона

$$\Psi_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m(\rho, \varphi), \quad T_m(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda R_{|\lambda|}(\rho) \exp[i\lambda(\varphi + 2\pi m)]. \quad (45)$$

Сдвигаем, как и в (41), с помощью дираковского магнитного фактора фазу в (45):

$$\Psi(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m(\rho, \varphi) \exp[i\gamma(\varphi + 2\pi m)]. \quad (46)$$

В итоге после обратного преобразования Пуассона получаем

$$\Psi(\rho, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_{|l-\gamma|}(k\rho) \exp(il\varphi),$$

что является точным решением.

Из всего этого можно сделать вывод, что можно получить однозначные волновые функции, если дираковский магнитный фактор применить к подходящему представлению волновых функций в отсутствие магнитного поля. Для АБ-эффекта таким представлением является разложение по вихревым волнам T_m . Это связано с тем, что непроницаемость цилиндра делает пространство многосвязным. Пути, соответствующие различным числам оборотов вокруг начала координат, не могут быть переведены друг в друга непрерывной деформацией. Поэтому магнитные фазовые сдвиги должны быть разными при разном числе оборотов.

Теперь можно понять, почему «неправильное» представление волновой функции в виде (36) ранее с успехом применялось для

анализа опытных данных. Может случиться, что в рассматриваемом интервале углов только две вихревые волны $T_m(\rho, \varphi)$ существенны. Например, они могут соответствовать $m = 0$ и $m = -1$. Тогда в данной области изменения φ волновую функцию можно аппроксимировать в виде

$$\Psi_0(\rho, \varphi) = T_0(\rho, \varphi) + T_{-1}(\rho, \varphi). \quad (47)$$

Применяя дираковский рецепт (41) к каждой вихревой волне, получаем аналог представления (36):

$$\Psi(\rho, \varphi) = \exp(i\gamma\varphi) [T_0(\rho, \varphi) + \exp(-2i\pi\gamma) T_{-1}(\rho, \varphi)]. \quad (48)$$

Мы уже указывали на неоднозначность этого выражения. Теперь становится ясной и причина этого. Именно отброшенные вихревые волны ($m \neq 0, -1$) хотя и малы в рассматриваемой области углов, но из-за соотношения (40) становятся большими при изменении на 2π . Поэтому их необходимо учитывать, чтобы гарантировать однозначность Ψ после обхода вокруг цилиндра.

Вернемся снова к соотношению (32). Обратим его:

$$\Psi_0 = \Psi \exp(-i\gamma\varphi). \quad (49)$$

Напомним, что Ψ — однозначное решение уравнения Шредингера при наличии магнитного, Ψ_0 — многозначное решение свободного уравнения Шредингера со специфическим граничным условием:

$$\Psi_0(2\pi) = \Psi_0(0) \exp(-2i\pi\gamma).$$

Унитарность преобразования (49) гарантирует совпадение всех наблюдаемых для Ψ и Ψ_0 . Теперь к Ψ_0 можно применить обычные рассуждения, трактующие АБ-эффект как результат интерференции волн, огибающих цилиндр с разных сторон.

Таким образом, само по себе представление решения в виде (32) правильно при условии однозначности Ψ . Поскольку само существование АБ-эффекта зависит от условий однозначности волновой функции, мы переходим к краткому рассмотрению вопроса об однозначности волновых функций в квантовой механике.

2. ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Многие работы, затрагивающие эти вопросы, обязаны следующему замечанию Дж. Блатта и В. Вайскопфа [14]: «... многозначные волновые функции не могут быть исключены заранее. Только физически измеримые величины, такие, как плотности вероятности и математические ожидания операторов, должны быть однозначными...»

Ограничимся рассмотрением бесспиновой частицы в нерелятивистской квантовой механике в односвязном пространстве. Волновая функция Ψ является функцией координат частиц. Тогда вопрос об однозначности или неоднозначности волновой функции можно поста-

вить следующим образом. Пусть в точке P имеем $\Psi(P)$. Придем ли мы к тому же значению $\Psi(P)$, если двигаясь вдоль некоторого замкнутого пути мы снова вернемся к P ? Операторы углового момента удовлетворяют соотношениям: $[L_i, L^2] = 0$, $[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jks}L_s$. В сферических координатах собственные функции L_z и L^2 удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$L_z Y_l^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m = m\hbar Y_l^m; \quad (50)$$

$$L^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m. \quad (51)$$

Из коммутационных соотношений следует, что собственные значения L_z заключены в пределах $-l \leq m \leq l$, причем l может быть целым или полуцелым. Для целых l регулярными решениями являются обычные сферические гармоники $P_l^m(\cos \theta) \exp(i m \varphi)$, которые являются однозначными функциями положения частицы. Типичными примерами волновых функций с полуцелыми индексами являются

$$Y_{1/2}^{1/2} \sim (\sin \theta)^{1/2} \exp(i\varphi/2) \quad (l = 1/2, m = 1/2);$$

$$Y_{3/2}^{1/2} \sim (\sin \theta)^{1/2} \cos \theta \exp(i\varphi/2) \quad (l = 3/2, m = 1/2).$$

Эти функции всюду конечны, но они не преобразуются друг через друга при действии оператора углового момента. Например, прилагая понижающий оператор $L_- = L_x - iL_y$ к $Y_{1/2}^{1/2}$, мы не получаем ожидаемого $Y_{1/2}^{-1/2}$. В самом деле,

$$L_- Y_{1/2}^{1/2} = \hbar \exp(-i\varphi) \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{1/2}^{1/2} \sim \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin \theta}} \exp(-i\varphi/2),$$

т. е. получаем функцию, которая хотя и имеет сингулярность при $\theta = 0, \pi$, но все еще является квадратично интегрируемой. Далее оказывается, что $L_-^2 Y_{1/2}^{1/2} \neq 0$. Более того, эта функция уже не является квадратично интегрируемой. Кроме того, $\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | L_x | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \neq 0$, хотя из коммутационного соотношения $L^2 L_x - L_x L^2 = 0$ вытекает обращение в нуль любого матричного элемента $\langle l m | L_x | l' m' \rangle$ при $l \neq l'$. Причина заключается в том, что $\langle L^2 Y_{3/2}^{-1/2}, L_x Y_{1/2}^{1/2} \rangle \neq \langle Y_{3/2}^{-1/2} L^2 L_x Y_{1/2}^{1/2} \rangle$, т. е. оператор L^2 не является эрмитовым относительно функций, генерируемых из двузначных функций последовательным применением L_- (или L_+).

Паули [15] распознал, что «лестничный» алгоритм (т. е. генерация волновых функций путем последовательного применения понижающих или повышающих операторов) приводит к сингулярным функциям, которые уже не входят в область определения L [например, L^2 перестает быть самосопряженным (или эрмитовым)]. Ввиду этого Паули предложил, что условие однозначности волновых функций должно быть заменено следующим: допустимыми являются

такие волновые функции, последовательное применение к которым операторов, характерных для рассматриваемой задачи на собственные значения, реализует представление соответствующей группы преобразований (например, группы вращений). Это и есть знаменитый критерий Паули.

Переходим к обсуждению свойств однозначности волновых функций в многосвязном пространстве [16]. Рассмотрим АБ-гамильтониан, описывающий частицу заряда e и массы μ в поле векторного магнитного потенциала \mathbf{A} (предполагается, что $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ везде, за исключением оси z):

$$H = (-i\nabla - e\mathbf{A})^2/2\mu, \quad A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi r \sin \theta},$$

причем $\oint A_\varphi dl = \Phi$ для любого контура, охватывающего ось z .

Легко убедиться, что дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{r} \times (-i\nabla - e\mathbf{A}) \\ (J_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e\Phi}{2\pi}, \quad J_\pm = J_x \pm iJ_y = \\ &= \exp(\pm i\varphi) \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \text{ctg } \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e\Phi}{2\pi} \text{ctg } \theta \right) \end{aligned}$$

удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[\mathbf{J}, H] = 0, \quad [J_k, J_m] = i\epsilon_{km s} J_s \quad (\theta \neq 0, \pi). \quad (52)$$

С помощью \mathbf{J} гамильтониан H можно записать в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(P_r^2 + \frac{1}{r^2} \mathbf{J}^2 \right), \quad (53)$$

где $P_r \Psi = -i \frac{\partial}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi)$ для произвольной функции Ψ . Единственное отличие от свободного случая ($\mathbf{A} = 0$) заключается в определении \mathbf{J} . Поэтому следует изучить вопрос о самосопряженности оператора

$$\mathbf{J}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{ie\Phi}{2\pi} \right)^2.$$

Условие самосопряженности записывается следующим образом:

$$\langle \Psi', \bar{\mathbf{J}}^2 \Psi \rangle - \langle \bar{\mathbf{J}}^2 \Psi', \Psi \rangle = 0. \quad (54)$$

Выясним, какие функции Ψ, Ψ' удовлетворяют этому соотношению. В развернутом виде (54) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \left[(1-x^2) \left(\Psi \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial x} - \bar{\Psi}' \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right]_{-1}^1 + \\ & + \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2} \left\{ \Psi \exp \left(-\frac{ie\Phi\varphi}{2\pi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\bar{\Psi}' \exp \left(\frac{ie\Phi\varphi}{2\pi} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \bar{\Psi}' \exp \left(\frac{ie\Phi\varphi}{2\pi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\Psi \exp \left(-\frac{ie\Phi\varphi}{2\pi} \right) \right] \right\}_0^{2\pi}. \quad (55) \end{aligned}$$

Условия обращения в нуль этого выражения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\theta, \varphi = 2\pi) &= \exp(2i\pi\alpha) \Psi(\theta, \varphi = 0); \\ \frac{\partial \Psi(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi} &= \exp(2i\pi\alpha) \frac{\partial \Psi(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где α — произвольный вещественный параметр. Кроме того, Ψ должно быть конечным при $\cos \theta = \pm 1$. При α нецелом и $0 < \varphi < 2\pi$ условия (56) неоднозначности Ψ нельзя исключить из физических соображений, поскольку как плотность заряда, так и плотность тока остаются однозначными.

Собственные функции J^2 , удовлетворяющие (56), ищем в виде:

$$\begin{aligned} Y(\theta, \varphi) &= \exp[i(m + \alpha)\varphi] P(\theta); \\ J^2 Y &= l(l + 1)Y, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \end{aligned} \quad (57)$$

l пока произвольно. Для $P(\theta)$ находим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l + 1) - \frac{m'^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0. \quad (58)$$

Здесь $m' = m + \alpha - e\Phi/2\pi$.

Легко убедиться, что собственные функции $Y(\theta, \varphi)$ реализуют представление группы вращений с генераторами J_i только при $\alpha - e\Phi/2\pi$ целом. При этом m' также целое и единственные функции, удовлетворяющие условию самосопряженности J^2 , имеют вид

$$Y(\theta, \varphi) \sim \exp\left(\frac{ie\Phi\varphi}{2\pi}\right) Y_{lm'}(\theta, \varphi), \quad l = |m'| + n, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (59)$$

где $Y_{lm'}$ — обычные сферические гармоники. Эти функции приводят к тем же физическим следствиям, что и в свободном случае. Таким образом, принятие критерия Паули приводит к той же динамике, что и для свободной частицы, т. е. к отсутствию АБ-эффекта.

При $\alpha - e\Phi/2\pi$ нецелом общее решение (58) представимо в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= (\sin \theta)^{m'} \left[aF\left(m' + l + 1, m' - l; m' + 1; \frac{1 - \cos \theta}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + b(1 - \cos \theta)^{-m'} F\left(l + 1, -l; 1 - m'; \frac{1 - \cos \theta}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

где a, b — произвольные константы и F — гипергеометрическая функция. Из условия конечности при $\cos \theta = 1$ получаем: $b = 0$ при $m' > 0$ и $a = 0$ при $m' < 0$. Пусть $m' > 0$, тогда при $\cos \theta \rightarrow -1$ находим:

$$P(\theta) \rightarrow a \frac{2^{m'} \Gamma(m' + 1) \Gamma(m')}{\Gamma(m' + l + 1) \Gamma(m' - l)} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{-m'/2}.$$

Это выражение удовлетворяет требованию конечности при $\theta = \pi$ при $l = |m'| + n$. К такому же выводу приводит случай $m' < 0$.

В итоге получаем следующие собственные функции:

$$Y(\theta, \varphi) = \text{const} \exp \left[i \left(m' + \frac{e\Phi}{2\pi} \right) \varphi \right] (\sin \theta)^{|m'|} P_{|m'|}^{m', |m'|}(\cos \theta), \quad (60)$$

где $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ — полином Якоби. Поскольку эти полиномы конечны при $x = \pm 1$, собственные функции (60) удовлетворяют условию самосопряженности J^2 . Далее при $\alpha = e\Phi/2\pi$ нецелом $|m'| \neq 0$ эти собственные функции исчезают на оси z . Поэтому они применимы и в том случае, если ось z недоступна для падающих частиц. Собственные функции (60) не реализуют, однако, представление группы вращений при m' и l нецелых. Легко убедиться, что действие на $Y(\theta, \rho)$ операторами J_{\pm} приводит к сингулярным функциям, т. е. выводит за пределы АБ-функций.

Итак, критерий Паули требует целочисленности $\alpha = e\Phi/2\pi$ и приводит к динамике свободной частицы. Критерий однозначности волновой функции требует целочисленности α и приводит к обычному описанию АБ-эффекта. Поскольку самосопряженность выполняется при любых вещественных α , то можно ожидать, что они будут соответствовать физическим ситуациям, отличным от двух только что упомянутых.

Рассмотрим временную эволюцию собственной функции H :

$$\Psi = \sum \exp [i(m + \alpha)\varphi] \Psi_m(r, \theta, t),$$

где

$$\Psi_m(r, \theta, t) = \int_0^{\infty} dk \exp \left(-\frac{ik^2 t}{2\mu} \right) \sum_{n>0} a_{mn} P_{m+\alpha-\frac{e\Phi}{2\pi}}(\theta) \frac{1}{\sqrt{r}} J_{|m+\alpha-\frac{e\Phi}{2\pi}|+n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Здесь $J_{\nu}(x)$ — функции Бесселя;

$$P_{m+\alpha-\frac{e\Phi}{2\pi}}(\theta) = (\sin \theta)^{|m+\alpha-\frac{e\Phi}{2\pi}|} C_n^{|m+\alpha-\frac{e\Phi}{2\pi}|+\frac{1}{2}}(\cos \theta);$$

$a_{mn}(k)$ — произвольные постоянные; $C_n^{\nu}(x)$ — полиномы Гегенбауэра, пропорциональные $P_n^{\nu-\frac{1}{2}, \nu-\frac{1}{2}}(x)$;

$$C_n^{\nu}(x) = \frac{\Gamma(h+2\nu) \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu) \Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)} P_n^{\nu-\frac{1}{2}, \nu-\frac{1}{2}}(x).$$

Введем оператор скорости

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{|\Psi|^2} \text{Re} [\bar{\Psi} (-i\nabla - l\mathbf{A}) \Psi].$$

Азимутальная компонента v равна

$$v_{\varphi} = \frac{1}{\mu r \sin \theta} \left[\alpha - \frac{e\Phi}{2\pi} + \operatorname{Re} \frac{\sum m \exp(im\varphi) \Psi_m(r, t)}{\sum \exp(im\varphi) \Psi_m(r, t)} \right].$$

Легко видеть, что v_{φ} зависит только от $\alpha - e\Phi/2\pi$, но не от α , Φ порознь. Это же относится и к остальным компонентам v , а также к $|\Psi|^2$. Далее авторы [16] отмечают, что хотя волновая функция Ψ зависит как от α , так и от Φ , все физические величины зависят только от разности $\alpha - e\Phi/2\pi$. Начальные значения ($t = 0$) $|\Psi|^2$ и v полностью определены, если заданы $a_{mn}(k)$ и $\alpha - e\Phi/2\pi$. Значения $|\Psi|^2$ и v в последующие моменты времени определяются однозначно и не зависят от Φ . Или иначе: пусть начальные условия фиксированы. Тогда величина $a_{mn}(k)$ и $\alpha - e\Phi/2\pi$ также фиксированы. Будем теперь и при заданных начальных условиях (т. е. при заданных ρ , v) изучать случаи, соответствующие различным потокам магнитного поля Φ . Им будут соответствовать различные α , но одна и та же разность $\alpha - e\Phi/2\pi$, а следовательно, те же v и $|\Psi|^2$. В этом смысле магнитный поток вдоль оси z не приводит к наблюдаемым физическим следствиям.

Эти соображения становятся более очевидными, если использовать цилиндрические координаты, r , φ [17]. В момент времени t имеем

$$\Psi(r, \varphi, t) = \sum \exp[i(m + \alpha)\varphi] \Psi_m(r, t), \quad (61)$$

где $\Psi_m(r, t)$ — волновой пакет, составленный из решений уравнения Шредингера

$$\Psi_m(r, t) = \int_0^{\infty} dk \exp\left(-\frac{ik^2 t}{2\mu}\right) C_m(k) J_{|m+\alpha-\gamma|}(kr). \quad (62)$$

При $t = 0$: $\Psi_m(r, 0) = \int_0^{\infty} dk C_m(k) J_{|m+\alpha-\gamma|}(kr)$. Отсюда находим

$$C_m(k) = k \int_0^{\infty} r dr J_{|m+\alpha-\gamma|}(kr) \Psi_m(r, 0).$$

Подставим C_m в (62):

$$\Psi_m(r, t) = \int_0^{\infty} r' dr' \Psi_m(r', 0) g_m(r, r', t), \quad (63)$$

где

$$g_m(r, r', t) = \int_0^{\infty} k dk \exp\left(-\frac{ik^2 t}{2\mu}\right) J_{|m+\alpha-\gamma|}(kr) J_{|m+\alpha-\gamma|}(kr').$$

Выпишем теперь $\rho = |\Psi|^2$ и v_φ :

$$\rho(r, \varphi, t) = \sum_{m, m'} \exp[i(m - m')\varphi] \Psi_m(r, t) \bar{\Psi}_{m'}(r, t);$$

$$v_\varphi = \frac{\hbar}{2\mu r} \left[\alpha - \gamma + \operatorname{Re} \frac{\sum m \exp(im\varphi) \Psi_m(r, t)}{\sum \exp(im\varphi) \Psi_m(r, t)} \right]. \quad (64)$$

Отметим два типа начальных условий. Пусть в начальный момент времени $t=0$ задана волновая функция. Тогда в последующие моменты времени волновая функция, а также $\rho = |\Psi|^2$ и \mathbf{j} явно зависят от магнитного потока [см. (61)], т. е. имеем АБ-эффект. Пусть теперь в начальный момент времени заданы ρ и \mathbf{j} ($\rho = \rho_0$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0$ при $t = t_0$). Из (64) следует, что ρ и \mathbf{j} зависят только от разности $\alpha - \gamma$. Поэтому при фиксированных ρ_0 , \mathbf{j}_0 значения ρ , \mathbf{j} в последующие моменты времени не зависят от γ , т. е. магнитного потока. В самом деле, значения $\gamma' = \gamma$ соответствуют тем же самым начальным условиям только при выполнении следующего условия: $\alpha' - \gamma' = \alpha - \gamma$. Ввиду этого равенства ρ и \mathbf{j} при разных γ и фиксированных ρ_0 , \mathbf{j}_0 одни и те же.

3. ПОПЫТКИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ АБ-ЭФФЕКТА

Типичное «доказательство» проиллюстрируем на примере плоского ротатора в магнитном поле:

$$H = \frac{1}{2\mu a^2} P_\varphi^2, \quad P_\varphi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}. \quad (65)$$

Однозначная собственная функция H имеет вид

$$\Psi_m = \exp(im\varphi) \exp\left[i\varphi \frac{F(2\pi) - F(0)}{\hbar} - iF(\varphi)/\hbar\right]. \quad (66)$$

Ей отвечает собственное значение

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[m + \frac{F(2\pi) - F(0)}{\hbar} \right]^2. \quad (67)$$

В отсутствие магнитного поля мы бы имели соответственно

$$H_0 = \frac{1}{2\mu a^2} (P_\varphi^0)^2, \quad P_\varphi^0 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \Psi_m^0 = \exp(im\varphi), \quad E_m^0 = \frac{\hbar^2 m^2}{2\mu a^2}. \quad (68)$$

Таким образом, $E_m \neq E_m^0$ при $F(0) \neq F(2\pi)$. С другой стороны, переход от (65) к (68) есть просто изменение представления для углового момента:

$$P_\varphi^0 = S P_\varphi S^{-1}, \quad S = \exp\left[\frac{i}{\hbar} F(\varphi)\right].$$

Переход от одного представления к другому не должен приводить к экспериментально наблюдаемым следствиям. Поскольку магнитное поле ($= \partial F/\partial \varphi$) можно исключить простым изменением пред-

ставления для P_φ , то АБ-эффект объявляется [18] математической функцией.

Нетрудно видеть, где кроется ошибка в этих рассуждениях. Именно нельзя рассматривать преобразования операторов отдельно от преобразования базиса, в котором эти операторы действуют. Выпишем операторы и волновые функции до и после изменения представления:

$$\Psi_m = \exp(im\varphi) \exp \left[i\varphi \frac{F(2\pi) - F(0)}{h} - i \frac{F(\varphi)}{\hbar} \right],$$

$$P_\varphi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + F(\varphi), \quad (69)$$

$$\tilde{\Psi}_m^0 = S\Psi_m = \exp(im\varphi) \exp \left[i\varphi \frac{F(2\pi) - F(0)}{h} \right], \quad P_\varphi^0 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (70)$$

Таким образом, P_φ и P_φ^0 эквивалентны только в том случае, если они действуют в пространстве функций Ψ_m и $\tilde{\Psi}_m^0$ соответственно. В этом случае Ψ_m и $\tilde{\Psi}_m^0$ отвечают одному и тому же собственному значению углового момента

$$\hbar m + F(2\pi) - F(0).$$

С другой стороны, представление

$$P_\varphi^0, \Psi_m^0 = \exp(im\varphi) \quad (71)$$

неэквивалентно (69) и (70), поскольку хотя соотношение $P_\varphi^0 = SP_\varphi S^{-1}$ выполнено, но $\Psi_m^0 \neq S\Psi_m$. Сходный пример был рассмотрен нами в разд. 1, где на примере рассеяния заряженных частиц магнитным полем цилиндрического соленоида было показано, что «изгнание» магнитного поля из доступной для падающих частиц области пространства вполне возможно. При этом решения свободного уравнения Шредингера должны удовлетворять неоднозначным граничным условиям.

Недоразумения возникают также при неправильной идентификации оператора углового момента [19]. Рассмотрим частицу заряда e , которая вращается вокруг оси z , но не проникает внутрь цилиндрического соленоида, ось которого совпадает с осью z . Когда ток через соленоид не протекает, угловой момент равен

$$L_z^0 = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Его собственные значения целочисленны. Если теперь постепенно включать ток, то на заряженную частицу действует электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\frac{2\pi}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} \dot{\Phi}.$$

Это приводит к изменению углового момента

$$L_z' = [\mathbf{r} \times e\mathbf{E}]_z = -\frac{e\dot{\Phi}}{2\pi}.$$

Полное приращение углового момента равно

$$\Delta L_z = - e\Phi/2\pi.$$

После того как ток выключен,

$$L_z = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e\Phi}{2\pi}.$$

Собственные значения L_z равны $m - e\Phi/2\pi$, т. е. нецелочисленны.

Чтобы выяснить, где кроется ошибка в этих рассуждениях, рассмотрим [20] нерелятивистский лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}.$$

Для рассматриваемого цилиндрического соленоида

$$A_\rho = A_z = 0, \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi\rho}.$$

Канонический импульс

$$\mathbf{p} = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{v}} = \mu \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

отличается от кинематического $\mu \mathbf{v}$ на величину $\frac{e}{c} \mathbf{A}$. Для углового момента получаем

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{r} \times \mathbf{A}.$$

В квантовой механике оператор \mathbf{p} , но не $\mu \mathbf{v}$, равен $\frac{\hbar}{i} \nabla$. Поэтому оператор углового момента один и тот же вне зависимости от наличия или отсутствия магнитного поля и равен

$$\frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \times \nabla = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Полнота его собственных значений и эрмитовость требуют целочисленности его собственных значений (в единицах \hbar).

В работах [21] было замечено, что внутри соленоида отличны от нуля как \mathbf{H} , так и \mathbf{E} (электрическое поле движущегося заряда). В скрещенных, электрическом и магнитном полях возникает угловой момент

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \frac{e}{4\pi c} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{H}) \frac{d^3 \mathbf{r}}{r^3}. \quad (72)$$

В итоге получаем

$$F_z = - \frac{e\Phi}{2\pi c}.$$

Примечательно, что угловой момент поля зависит только от полного потока Φ и не зависит от его пространственного распределения.

Рассмотрим теперь дейтрон, находящийся в начале координат, и достаточно удаленный бесконечный соленоид (например, на

Луне). Полный угловой момент такой системы равен

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} + \mathbf{F}, \quad (73)$$

где \mathbf{S} — суммарный спин нейтрона и протона; \mathbf{L} — механический орбитальный момент в дейтроне (центр массы дейтрона закреплен в начале координат). Поскольку поток Φ может принимать произвольные значения, то F_z может также принимать произвольные значения (а не только кратные целым или полуцелым значениям \hbar). Это ведет к следующей парадоксальной ситуации [21]: а) если полный угловой момент системы ограничен целым или полуцелым значением \hbar , то допустимые значения относительного углового момента, центробежный барьер и энергия связи дейтрона зависят от поля соленоида, находящегося на Луне. Если центробежный барьер дейтрона при $L_z = \hbar/2$ столь велик, что не существует связанных состояний, то можно разрушить дейтрон на Земле, включив небольшое магнитное поле в соленоиде на Луне; б) если потребовать, чтобы свойства дейтрона не зависели от того, что происходит с соленоидом на Луне, а этого можно добиться за счет целочисленности собственных значений L_z (то полный угловой момент будет принимать произвольные значения, не обязательно кратные целым или полуцелым значениям \hbar); в) обычное рассмотрение в рамках уравнения Шредингера с векторным потенциалом, конечным на бесконечности, показывает отсутствие влияния на дейтрон магнитного поля удаленного соленоида. Однако такое рассмотрение не учитывает вклада скрещенных полей в угловой момент. Этот вклад является физическим эффектом, который необходимо учитывать. Парадокс разрешается, если принять во внимание магнитный поток на бесконечности (обратный поток). Будем рассматривать бесконечный соленоид как предельный случай соленоида конечной длины L при $L \rightarrow \infty$. Обратный поток вне соленоида отодвигается в бесконечность по мере увеличения длины соленоида. Из (72) следует, что при учете обратного потока полный угловой момент поля равен нулю. Поскольку вклад обратного потока остается конечным при сколь угодно длинном соленоиде, парадоксы возникают, если обратный поток игнорируется для бесконечного соленоида. Для длинного конечного соленоида обычное уравнение Шредингера с векторным потенциалом включает вклад скрещенных полей в угловой момент. Это легко усмотреть в обычной калибровке $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и $\mathbf{A}(\infty) = 0$. В такой калибровке угловой момент (73) является генератором вращений, а дополнительный угловой момент, вносимый векторным потенциалом, в точности равен вкладу скрещенных полей

$$\mathbf{r} \times \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \mathbf{A}(\infty) = 0). \quad (74)$$

Выражение (74) справедливо для тех решений уравнений Максвелла, которые достаточно быстро убывают на бесконечности. Следовательно, этот формализм неявно учитывает вклад в угловой момент

удаленных обратных потоков. Мы приходим к следующим выводам: а) угловой момент поля физически обоснован и должен быть включен в полный угловой момент; б) вклад обратных потоков в угловой момент конечен для сколь угодно длинного соленоида и поэтому не может быть отброшен для бесконечного соленоида; в) обычный формализм (уравнение Шредингера с векторным потенциалом) правильно учитывает вклад скрещенных полей в угловой момент, если поля убывают достаточно быстро на бесконечности.

Подведем итоги: обычное уравнение Шредингера с векторным потенциалом корректно (хотя и неявно) учитывает как угловой момент поля, так и вклад обратных потоков.

Рассмотрим теперь весьма интересную работу [22], которая также ставит под сомнение существование АБ-эффекта. Пусть $z_\mu(x, \xi)$ ($\mu = 1 \dots 4$; $z_4 = iz_0$) — однозначные дифференцируемые функции координат x_μ и вещественного параметра ξ ($-\infty < \xi < \infty$), удовлетворяющие условиям: $z_\mu(x, 0) = \xi_\mu$, $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |z_\mu(x, \xi)| \rightarrow \infty$.

Типичными примерами z_μ , удовлетворяющими этим условиям, являются: а) $z_0 = x_0$, $z = x + \xi n$ (где $n^2 = 1$ и n не зависит от x_μ); б) $z_0 = x_0$, $z = x(1 - \xi)$.

Пусть $A_\mu(x)$ — однозначные функции, подчиняющиеся условиям:

$$\int_{-\infty}^0 A_\mu(z) \frac{\partial z_\mu}{\partial \xi} d\xi < \infty, \quad \lim_{(\xi \rightarrow -\infty)} A_\nu(z) \frac{\partial z_\nu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (75)$$

$$\int_{-\infty}^0 d\xi F_{\rho\nu}(\xi) \frac{\partial z_\rho}{\partial \xi} \frac{\partial z_\nu}{\partial x_\mu} < \infty, \quad \left(F_{\nu\rho} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu} \right),$$

причем подынтегральное выражение, содержащее $F_{\rho\nu}$, является непрерывной функцией ξ и x_μ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_{-\infty}^0 d\xi A_\nu(\xi) \frac{\partial z_\nu}{\partial \xi} = A_\mu(x) + \int_{-\infty}^0 d\xi F_{\rho\nu}(z) \frac{\partial z_\nu}{\partial \xi} \frac{\partial z_\rho}{\partial x_\mu}. \quad (76)$$

Это соотношение получается дифференцированием под знаком интеграла и последующим интегрированием по частям. Условие (75) необходимо для законности этих операций.

Пусть для заряженной частицы доступна область R (которая может быть одно- или многосвязной), где она взаимодействует с однозначным потенциалом A_μ . Тогда если существует однозначный и дифференцируемый путь $z_\mu(x, \xi)$, лежащий в R при любом x и такой, что условия (75), (76) выполняются, то физические эффекты, действующие на частицу, определяются исключительно напряженностями полей в R . Это вытекает из (76), если заметить, что интеграл в левой части (76) является однозначной функцией. Поэтому в силу

калибровочной инвариантности $A_\mu(x)$ эквивалентен потенциалу

$$A'_\mu = \int_{-\infty}^0 d\xi F_{\nu\rho} \frac{\partial z_\nu}{\partial \xi} \frac{\partial z_\rho}{\partial x_\mu},$$

который зависит только от напряженности полей в R .

Потенциал бесконечного цилиндрического соленоида ($A_\rho = A_z = 0$, $A_\psi = \frac{\Phi}{2\pi\rho}$) условиям (75) не удовлетворяет. Возьмем теперь соленоид конечной длины $2L$. Тогда $A_0 = A_\rho = A_z = 0$.

$$A_\psi = \frac{\Phi}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\operatorname{sgn}(L-z)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{L-z}\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{\operatorname{sgn}(L+z)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{L+z}\right)^2\right]^{1/2}} \right\}. \quad (77)$$

Этот потенциал вследствие быстрого ($\sim r^{-2}$) при $r \rightarrow \infty$ убывания удовлетворяет условиям (75). Таким образом, для конечного соленоида произвольной длины потенциал определяется напряженностью электромагнитного поля в R , т. е. утечками магнитного поля вне соленоида. Иначе говоря, для любого реально цилиндрического соленоида положительные результаты опытов по обнаружению АБ-эффекта можно объяснить утечками магнитного поля. В типичном опыте по обнаружению АБ-эффекта длина соленоида была меньше 2 см, а радиус — несколько микрометров. Расстояние от источника до экрана около 50 см. Мы заключаем, что все эксперименты с цилиндрическими соленоидами проводились в реальном односвязном пространстве. Односвязность обязана как конечности размеров соленоида, так и конечной высоте потенциального барьера, препятствующего проникновению заряженных частиц внутрь соленоида.

Несмотря на то что математическая сторона работы [22] сомнений не вызвала, все же были попытки [23] иной интерпретации ее результатов. Было отмечено, что утечки магнитного поля для конечного соленоида максимальны вблизи его концов ($z = \pm L$) и быстро спадают к центральной его части ($z = 0$). Если пучок заряженных частиц сосредоточен вблизи плоскости $z = 0$, то для этих частиц условия те же, что и для бесконечного идеального соленоида.

Перейдем к истолкованию АБ-эффекта в рамках гидродинамической интерпретации квантовой механики. Представим волновую функцию в виде

$$\Psi = \exp(R + iS).$$

Введем плотность ρ и ток вероятности \mathbf{j} :

$$\rho = |\Psi|^2 = \exp(2R),$$

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \nabla \Psi) - \frac{e}{mc} \rho \mathbf{A}, \quad (78)$$

ρ и \mathbf{v} удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} Q + \mathbf{F}. \quad (79)$$

Здесь $Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$, \mathbf{F} — сила Лоренца $\left[= e\mathbf{E} + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right]$,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}.$$

Вне соленоида $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$, поэтому

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } Q.$$

Или, интегрируя по любому замкнутому контуру вне соленоида,

$$\frac{d}{dt} \int (\mathbf{v} ds) = 0.$$

Это означает, что интеграл от поля скоростей вдоль любого замкнутого контура является интегралом движения. Если этот контур охватывает соленоид, то имеем

$$\int \mathbf{v} ds = \frac{i\hbar}{2m} \int \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \frac{\bar{\Psi}}{\Psi} d\varphi - \frac{e\Phi}{mc} = \frac{i\hbar}{2m} \ln \frac{\bar{\Psi}}{\Psi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{e\Phi}{mc}. \quad (80)$$

При $t \rightarrow -\infty$ асимптотика волновой функции совпадает с искаженной плоской волной (26):

$$\Psi(t = -\infty) = \Psi_{\text{inc}} = \exp[i(kx + \gamma(\varphi - \pi))], \quad e = \frac{e\Phi}{\hbar c}. \quad (81)$$

Подставляя (81) в (80), получаем

$$\int \mathbf{v} ds = 0. \quad (82)$$

При $t \rightarrow \infty$ асимптотика волновой функции имеет вид

$$\Psi(t = \infty) = \Psi_{\text{inc}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp(ik\rho) f(\varphi). \quad (83)$$

Ранее [см. (30)] мы видели, что эта функция однозначна. Поэтому

$$\int \mathbf{v} ds = -\frac{e\Phi}{mc}. \quad (84)$$

Выражения (82) и (83) совпадают, если $f(\varphi) = 0$, т. е. если отсутствует рассеяние на магнитном поле, окружающем соленоид. Отсюда делается вывод [24] об отсутствии АБ-эффекта. Ошибка в этих рассуждениях состоит в идентификации неоднозначной волновой функции (26) с падающей волны. Истинная волновая функция должна быть однозначной (см., например, [25] или статьи Янга (с. 5—9) и Ааронова (с. 10—14) в [26]).

Рассмотрим теперь парадокс, связанный с несохранением углового момента в поле бесконечного цилиндрического соленоида [24]. Согласно теореме Эрэнфеста:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \langle \Psi | \mathbf{r} \times \mathbf{F} | \Psi \rangle.$$

Здесь \mathbf{F} — сила Лоренца [в данном случае $= \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H})$], $m\mathbf{v} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, $\mathbf{L} = \langle \Psi | \mathbf{r} \times m\mathbf{v} | \Psi \rangle$. Поскольку вне соленоида $F = 0$, то величина \mathbf{L} не зависит от времени. Построив при $t = -\infty$ волновой пакет из функций (81), а при $t = \infty$ — из функций (82), мы убедимся, что в первом случае $L_z = \hbar\gamma$, а во втором $L_z = 0$. Налицо несохранение углового момента. Причина этого — в использовании при $t = -\infty$ неоднозначной волновой функции. Эти парадоксы детально рассмотрены в [27].

4. ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ВРЕМЕНИ АБ-ФОРМАЛИЗМ

Мы вкратце изложим содержание работ [16, 28]. Рассмотрим плоский ротатор — заряженную частицу, вращающуюся вокруг оси z по окружности радиусом a . Магнитный потенциал бесконечного соленоида меняется со временем:

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{\Phi(t)}{2\pi a}.$$

Магнитный поток, как и раньше, находится в недоступной для заряженной частицы области. Электрическое поле в месте нахождения заряда отлично от нуля:

$$E_r = E_\theta = 0, \quad E_\varphi = -\Phi'(t)/2\pi.$$

Зависящий от времени АБ-гамильтониан выглядит следующим образом:

$$H = \frac{1}{2\mu a^2} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e\Phi}{2\pi} \right)^2.$$

Решение зависящего от времени уравнения Шредингера ищем в виде

$$\Psi(\varphi, t) = \sum \exp[i(m + \alpha)\varphi] \Psi_m(t).$$

Здесь α — произвольный вещественный, не зависящий от времени параметр (в противном случае при дифференцировании Ψ по t возник бы член, пропорциональный φ). Уравнение для $\Psi_m(t)$ решается точно:

$$\Psi_m(t) = \exp \left[-i \int_0^t \frac{dt'}{\mu a^2} \left(m + \alpha - \frac{e\Phi(t')}{2\pi} \right)^2 \right].$$

«Гидродинамическая» скорость ($\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$, $\rho = |\Psi|^2$) равна

$$v_\varphi = \frac{1}{\mu a} \left[\alpha - \frac{e\Phi(t)}{2\pi} + \operatorname{Re} \frac{\sum m \Psi_m(t) \exp(im\varphi)}{\sum \Psi_m(t) \exp(im\varphi)} \right].$$

Что можно получить из этих выражений? Критерий целочисленности $\alpha - e\Phi/2\pi$ уже неприменим. В самом деле, далее, если в какой-то

момент $t_1 \frac{\alpha - e\Phi(t_1)}{2\pi}$ целочисленно, в другой момент t_2 это не будет выполняться. Рассмотрим теперь специальный случай зависимости $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \theta(t),$$

$\Phi_0 = \text{const}$; $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ и 1 при $t > 0$. Тогда

$$\Psi_m(t) = \begin{cases} a_m \exp \left[-\frac{it}{2\mu a^2} \left(m + \alpha - \frac{e\Phi}{2\pi} \right)^2 \right], & t > 0; \\ a_m \exp \left[-\frac{it}{2\mu a^2} (m + \alpha)^2 \right], & t < 0. \end{cases}$$

Собственные значения при $t < 0$ и $t > 0$ различаются.

То, что раньше интерпретировалось как результат наличия безвихревого векторного потенциала, сейчас можно понимать как результат воздействия электрического поля при $t = 0$.

Рассмотрим теперь рассеяние заряженных частиц на бесконечном цилиндрическом соленоиде с зависящим от времени потоком магнитного поля. Тогда вместо (61) имеем

$$\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sum \exp [i(m + \alpha)\varphi] \exp (ik_z z) \Psi_{m, k_z}(\rho, t),$$

где $\Psi_{m, k_z}(\rho, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[2i\mu \frac{\partial}{\partial t} - k_z^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \left(m + \alpha - \frac{e\Phi(t)}{2\pi} \right)^2 \right] \Psi_{m, k_z}(\rho t) = 0$$

Отсюда следует, что Ψ_{m, k_z} , а следовательно, v и $|\Psi|^2$ зависят только от разности $\alpha - e\Phi(t)/2\pi$. В частном случае $\Phi(t) = \Phi_0 \theta(t)$ уравнение для Ψ_{m, k_z} решается точно:

$$\Psi_{m, k_z}(\rho, t) = \int_0^{\infty} dk \exp \left(-it \frac{k^2 + k_z^2}{2\mu} \right) a_{m, k_z}(k) J_{|m + \alpha - \frac{e\Phi_0}{2\pi}|}(k\rho); \quad (t > 0) \tag{85}$$

$$\Psi_{m, k_z}(\rho, t) = \int_0^{\infty} dk \exp \left(-it \frac{k^2 + k_z^2}{2\mu} \right) b_{m, k_z}(k) J_{|m + \alpha|}(k\rho), \quad (t < 0),$$

b_{m, k_z} и a_{m, k_z} определяется из условия сшивки этих решений при $t = 0$:

$$b_{m, k_z}(k) = \int_0^{\infty} dk' a_{m, k_z}(k') \int_0^{\infty} d\rho k\rho J_{|m + \alpha|}(k\rho) J_{|m + \alpha - \frac{e\Phi_0}{2\pi}|}(k'\rho).$$

Эти соотношения доказывают неприемлемость решения (60), удовлетворяющего критерию Паули. В самом деле, соответствие найденного решения (85) с критерием Паули требует целочисленности α

при $t < 0$ и целочисленности $\alpha - \frac{e\Phi}{2\pi}$ при $t > 0$. Из (85) также следует, что амплитуды рассеяния при $t > 0$ ($\Phi \neq 0$) и $t < 0$ ($\Phi = 0$) отличны. Ранее это отличие связывалось с магнитным полем вне соленоида. Сейчас появляется альтернатива связать это изменение с наличием электрического поля.

Заметим, что вся техника, развитая в разд. 2 и в настоящем, имела целью доказать математическую непротиворечивость нецелых значений α . С точки зрения результатов, полученных в разд. 2, должны быть эквивалентны следующие две экспериментальные ситуации: а) случай, равный нулю напряженности магнитного поля ($\Phi = 0$); б) сначала включается магнитное поле ($\Phi \neq 0$), а затем излучается пучок электронов. Это связано с тем, что все физические величины зависят от разности $\alpha - e\Phi/2\pi$. Поэтому при одинаковых начальных условиях [$\bar{\Psi}$ и $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ совпадают при $t = 0$ для случаев а) и б)] разность $\alpha - e\Phi/2\pi$ одна и та же для случаев а) и б)]. Если же сначала генерируется пучок электронов, а затем изменяется магнитное поле [назовем это случаем в)], то константа α остается постоянной. Индуцированное электрическое поле приводит к изменению волновой функции и сдвигу интерференционной картины.

Итак, если константа α — целочисленна, то АБ-эффект наблюдается при любой последовательности включения магнитного поля и пучка электронов. Если же α — нецелое, то АБ-эффект существует только в случае в).

Мы заключаем, что корректное описание АБ-эффекта получается только при использовании однозначных волновых функций. Использование многозначных волновых функций, хотя и математически непротиворечиво, приводит к существенной неопределенности при интерпретации результатов опыта.

5. РАССЕЯНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ НА ДВУХ БЕСКОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СОЛЕНОИДАХ

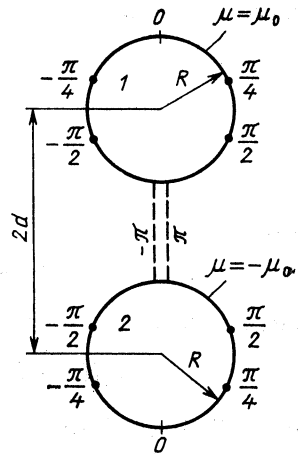
Ранее мы упоминали, что медленное ($\sim \rho^{-1}$) убывание вектор-потенциала для одного соленоида приводит к изменению асимптотики волновой функции. Разделение полной волновой функции на падающую и рассеянную волну становится неоднозначным, что приводит к возникновению различных парадоксов. Здесь мы попытаемся разубить этот узел, рассмотрев рассеяние заряженных частиц на двух бесконечных непроницаемых параллельных соленоидах с равными по значению, но обратными по знаку магнитными потоками [29—31].

5.1. Необходимые математические сведения. В дальнейшем мы будем широко пользоваться бицилиндрическими координатами μ, θ, z :

$$x = \frac{a \sin \theta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}, \quad y = a \frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}, \quad z = z \quad (86)$$

($-\infty < \mu < \infty, -\pi < \theta < \pi, -\infty < z < \infty$).

Рис. 1. Окружностями 1 и 2 показаны два цилиндрических соленоида, отвечающие значениям $\mu = \pm\mu_0$. Вдоль окружностей даны значения угла θ



При фиксированном μ и меняющихся θ , z точки (86) заполняют поверхность цилиндра радиуса $R = a / |\text{sh} \mu|$. Его ось, параллельная оси z , проходит через точку $x=0, y = d = a \text{cth} \mu$. Ввиду того что процесс рассеяния одинаков в любой из плоскостей, перпендикулярных оси z , достаточно ограничиться плоскостью $z = 0$. На рис. 1 изображены сечения двух соленоидов, отвечающих значениям $\mu = \pm\mu_0$. Для определенности припишем верхнему соленоиду ($\mu = \mu_0$) индекс 1, а нижнему ($\mu = -\mu_0$) — индекс 2. Тогда при $\mu_0 < \mu < \infty$ точка (86) лежит внутри первого соленоида, а при $-\infty < \mu < -\mu_0$ — внутри второго. При $-\mu_0 < \mu < \mu_0$ эта точка лежит вне соленоидов. При $\mu = \pm\mu_0$ изменение угла θ приводит к тому, что точки (86) пробегают вдоль одной из двух окружностей, изображенных на рис. 1. Там же показаны значения углов θ на этих окружностях. Отметим, что точкам на соседних отрезках $x = \pm \epsilon, -a < \epsilon < a$ ($0 < \epsilon \ll 1$) отвечают значения $\theta = \pm\pi$ соответственно. Бидецилиндрические координаты выражаются через полярные ρ, φ следующим образом:

$$\mu = \frac{1}{2} \ln \frac{\rho^2 + 2a\rho \sin \varphi + a^2}{\rho^2 - 2a\rho \sin \varphi + a^2}, \quad \sin \theta = \frac{2a\rho \cos \varphi}{[(\rho^2 - a^2)^2 + 4a^2\rho^2 \cos^2 \varphi]^{1/2}}.$$

Отсюда следует, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$\mu \approx \frac{2a}{\rho} \cos \varphi, \quad \theta \approx \frac{2a}{\rho} \sin \varphi.$$

Выразим вектор-потенциал в бидецилиндрических координатах. Проще всего исходить из уравнений Пуассона:

$$(\partial_\mu^2 + \partial_\theta^2) A_x = -a \frac{1 - \text{ch} \mu_0 \cos \theta}{|\text{ch} \mu_0 - \cos \theta|^2} [H_1 \delta(\mu - \mu_0) - H_2 \delta(\mu + \mu_0)];$$

$$(\partial_\mu^2 + \partial_\theta^2) A_y = -\frac{\text{sh} \mu_0 \sin \theta}{(\text{ch} \mu_0 - \cos \theta)^2} [H_1 \delta(\mu - \mu_0) + H_2 \delta(\mu + \mu_0)].$$

Здесь H_1, H_2 — напряженности магнитного поля внутри соленоидов (отметим, что для бесконечного цилиндрического соленоида $H_2 = \text{const}, H_x = H_y = 0$ внутри соленоида и $\mathbf{H} = 0$ снаружи). Непрерывными и убывающими при $\rho \rightarrow \infty$ решениями этих уравне-

ний являются

$$A_x = a \sum_{n=1}^{\infty} R_n^x(\mu) \cos n\theta + a \frac{H_1 - H_2}{\exp(2\mu_0) - 1};$$

$$A_y = a \sum_{n=1}^{\infty} R_n^y(\mu) \sin n\theta,$$
(87)

где

$$R_n^x = (H_2 e^{-2\mu_0 n} - H_1) e^{-\mu n}, \quad R_n^y = (H_2 e^{-2\mu_0 n} + H_1) e^{-\mu n}$$

внутри первого соленоида ($\mu > \mu_0$);

$$R_n^x = (H_2 - H_1 e^{-2\mu_0 n}) e^{\mu n}, \quad R_n^y = (H_2 + H_1 e^{-2\mu_0 n}) e^{\mu n}$$

внутри второго ($\mu < \mu_0$) и

$$R_n^x = (H_2 e^{-\mu n} - H_1 e^{\mu n}) e^{-2\mu_0 n}, \quad R_n^y = (H_1 e^{\mu n} + H_2 e^{-\mu n}) e^{-2\mu_0 n}$$

вне соленоидов ($-\mu_0 < \mu < \mu_0$).

Мы ограничимся наиболее интересным случаем ($H_1 = -H_2 = = H$). Тогда из (87) следует при $\rho \rightarrow \infty$

$$A_x \approx \frac{\Phi d}{\pi \rho^2} \cos 2\varphi, \quad A_y \approx \frac{\Phi d}{\pi \rho^2} \sin 2\varphi;$$

$$\left(\Phi = \pi R^2 H, \quad R = \frac{a}{\operatorname{sh} \mu_0}, \quad d = a \operatorname{cth} \mu_0 \right).$$

5.2. О производящей функции. Поскольку вне соленоидов $\mathbf{H} = = \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, то \mathbf{A} можно представить в виде градиента некоторой функции χ [32, 33]. Эта функция разрывна, поскольку для некоторых замкнутых контуров (точнее, для тех, которые охватывают один из соленоидов) $\oint \mathbf{A}_l dl \neq 0$. Функция χ равна

$$\chi = -\frac{\Phi}{2\pi} \left(\theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h} \sin n\theta e^{-2\mu_0 n} \operatorname{ch} \mu n \right).$$
(88)

Следующие свойства функции χ будут важны для дальнейшего: 1) на больших расстояниях χ убывают как ρ^{-1} ; 2) χ меняется скачком от $-\frac{1}{2}\Phi$ до $\frac{1}{2}\Phi$ при переходе через отрезок $(-d + R, d - R)$ оси y ; 3) χ — нечетная функция x .

Формализм производящей функции будет играть основную роль при получении амплитуды рассеяния. Ввиду его необычности и в иллюстративных целях мы покажем, как он работает на хорошо известном примере одного точечного цилиндрического соленоида. В этом случае производящая функция χ равна $\Phi\varphi/2\pi$. Область разрывности χ совпадает с положительной полуосью x . Для амплитуды рас-

сеяния в первом порядке теории возмущений имеем

$$f(\varphi) = \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \int e^{-ik(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} \mathbf{A} \nabla \Psi_0 dx' dy'. \quad (89)$$

Здесь Ψ_0 — волновая функция в отсутствие магнитного поля [в данном случае $\exp(ikx)$]. Полагая, как и выше, вне соленоида $\mathbf{A} = \text{grad} \chi$ и дважды интегрируя по частям, приводим (89) к виду

$$f = \frac{e}{2\hbar c} \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \int dx' dy' \text{div} [e^{-ik(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} \text{grad} \chi \Psi_0 - \chi \Psi_0 \text{grad} e^{-ik(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)}].$$

В силу теоремы Гаусса (с учетом разрывности функции χ) этот интеграл сводится к интегралу по окружности достаточно большого радиуса

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma ik R_0}{\sqrt{2\pi ik}} \int_0^{2\pi} e^{ikR_0[\cos \varphi' + \cos(\varphi - \varphi')]} \varphi' [\cos \varphi' + \cos(\varphi - \varphi')] d\varphi' \quad (90)$$

и к интегралу по линии разрывности функции χ

$$I_2 = \frac{\pi ik \gamma}{\sqrt{2\pi ik}} \sin \varphi \int_0^{R_0} dx e^{ikx(1 - \cos \varphi)} = \frac{\pi \gamma}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} [e^{ikR_0(1 - \cos \varphi)} - 1]. \quad (91)$$

Учитывая, что подынтегральное выражение в (90) является быстроосциллирующей функцией, получаем при $R_0 \rightarrow \infty$:

$$I_1 \approx - \frac{\pi \gamma}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} e^{ikR_0(1 - \cos \varphi)}. \quad (92)$$

Складывая I_1 и I_2 , получаем

$$f_{AB} = - \frac{\pi \gamma}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi},$$

т. е. АБ-амплитуду (14) для точечного соленоида. Заметим, что в данном случае из-за отсутствия убывания при $\rho \rightarrow \infty$ функции χ интеграл I_1 по окружности бесконечно большого радиуса не обращается в нуль.

5.3. Борновское приближение. Пусть пучок падающих частиц направлен вдоль оси x (рис. 2). В первом борновском приближении имеем

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{2ie}{\hbar c} \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V_1 \Psi_0(\mathbf{r}') dV'. \quad (93)$$

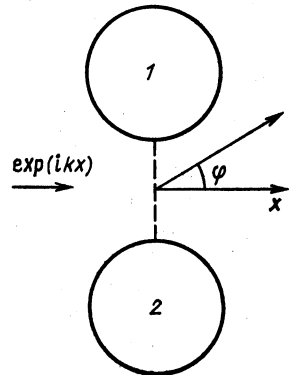


Рис. 2. Падающая волна распространяется перпендикулярно плоскости, проходящей через оси обоих соленоидов. Показан угол рассеяния φ . Пунктиром изображена область разрывности производящей функции χ

Здесь Ψ_0 , G_0 — волновая и грановская функции, отвечающие рассеянию на двух непроницаемых бесконечных цилиндрах, совпадающих с соленоидами в отсутствие магнитного поля. Они обращаются в нуль на поверхности (равно как и внутри) каждого из цилиндров, $V_1 = \text{A}\nabla$. Поскольку V_1 и Ψ_0 в (93) не зависят от z , то трехмерную функцию Грина $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ проинтегрируем по z и перейдем к двумерной $G_0(\rho, \rho')$, зависящей только от ρ, ρ' [например, интегрируя трехмерную плосковолновую функцию Грина

$$-\frac{\exp(ikR)}{4\pi R}, \quad R = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$$

по z' , приходим к двумерной функции Грина $\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|)$. В итоге вместо (93) получаем

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{2ie}{\hbar c} \int G_0(\rho, \rho') V_1 \Psi_0(\rho') d^2(\rho'), \quad (94)$$

причем интегрирование выполняется в области вне соленоидов, где $\text{A} = \text{grad}\chi$. С учетом этого $\text{A grad } \Psi_0 = \text{grad}\chi \text{ grad } \Psi_0 = \frac{1}{2} \Delta\chi\Psi_0 - \frac{1}{2} \chi\Delta\Psi_0 = \frac{1}{2} (\Delta + k^2)\chi\Psi_0$.

Поэтому

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{ie}{\hbar c} \int G_0(\rho, \rho') (\Delta + k^2)\chi\Psi_0 d^2\rho'.$$

После двукратного интегрирования по частям получаем

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{ie}{\hbar c} \chi\Psi_0 + \frac{ie}{\hbar c} \int \text{div}(G_0 \text{ grad } \chi\Psi_0 - \chi\Psi_0 \text{ grad } G_0) d^2\rho'. \quad (95)$$

Для получения амплитуды рассеяния необходимо найти предел этого выражения при $\rho \rightarrow \infty$. Рассмотрим по отдельности каждый из членов в правой части (95). Первый член при $\rho \rightarrow \infty$ сводится к падающей плоской волне и амплитуде рассеяния на двух непроницаемых цилиндрах в отсутствие магнитного поля. Второй член в (95) убывает при $\rho \rightarrow \infty$ как ρ^{-1} и потому не дает вклада в амплитуду рассеяния [учтем, что для двумерного рассматриваемого случая амплитуда рассеяния — коэффициент при $\exp(ik\rho)/\sqrt{\rho}$]. Если бы под знаком оператора div в (95) стояла непрерывная функция, то интеграл в (95) в силу теоремы Гаусса можно было бы свести к интегралам по поверхности соленоидов и поверхности цилиндра достаточно большого радиуса (точнее, по проекциям этих поверхностей на плоскость $z = 0$). Интеграл по поверхности соленоидов равен нулю ($\Psi_0 = G_0 = 0$ на них). Из-за асимптотического поведения функции χ обращается в нуль интеграл по C_0 . Учтем теперь, что под знаком оператора расходимости в (95) стоит разрывная функция. Детальное рассмотрение показывает, что возникает дополнительный интеграл по

области разрывности функции χ :

$$\int_{-d+R}^{d-R} dy' G_0 \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x'} - \Psi_0 \frac{\partial G_0}{\partial x'} \right) \Big|_{x'=0}, \quad \gamma = e\Phi/hc. \quad (96)$$

Волновое уравнение не разделяется в бицилиндрических координатах. Следуя методу Кирхгофа (см., например, [34]), будем считать, что Ψ_0 и G_0 в области между соленоидами можно аппроксимировать их плосковолновыми аналогами:

$$\Psi_0 \approx \exp(ikx), \quad G_0 \approx \frac{1}{4i} H_0^{(1)} [k \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}].$$

Переходя в (96) к пределу $\rho \rightarrow \infty$, получаем для амплитуды рассеяния на магнитном поле двух соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ (назовем ее для краткости магнитной амплитудой рассеяния) следующее выражение [31]:

$$f_1(\varphi) = \gamma \sqrt{\frac{2\pi i}{k}} \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin [k(d-R) \sin \varphi]. \quad (97)$$

Полная амплитуда рассеяния равна сумме амплитуды рассеяния на двух непроницаемых цилиндрах в отсутствие магнитных полей f_0 и f_1 . Если радиус цилиндров очень мал, то f_0 (для углов не слишком близких к нулям f_1) можно пренебречь по сравнению с f_1 . В итоге получаем для сечения рассеяния на двух точечных соленоидах:

$$\sigma_1(\varphi)_l = \frac{2\pi\gamma^2}{k} \sin^2 [k(d-R) \sin \varphi] \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

В отличие от сечения рассеяния на одном точечном соленоиде, сечение рассеяния на двух точечных соленоидах конечно при любых углах φ . Интегральное сечение $\sigma = \int \sigma_1(\varphi) d\varphi$ можно вычислить в предельных случаях малых и больших длин волн:

$$\sigma = \begin{cases} 16\pi^2 (d-R) \gamma^2, & k(d-R) \gg 1; \\ 6k\pi^2 (d-R)^2 \gamma^2, & k(d-R) \ll 1. \end{cases} \quad (98)$$

$$(99)$$

Границы применимости этих выражений — те же, что и метода Кирхгофа в оптике: длина волны k^{-1} должна быть малой по сравнению с шириной «щели» $d - R$. Поэтому справедливость выражения (99) сомнительна, хотя оно и исчезает при $d = R$ (как и должно быть).

Для произвольной ориентации (k_x, k_y) волнового вектора падающей волны магнитная амплитуда рассеяния равна

$$f_1 = \gamma \sqrt{\frac{2\pi i}{k}} \frac{k_x + k \cos \varphi}{k_y - k \sin \varphi} \sin [(d-R)(k_y - k \sin \varphi)]. \quad (100)$$

Следует всегда иметь в виду приближения, при которых это выражение было получено. Рассмотрим, например, случай, когда падающая волна распространяется вдоль оси y . В этом случае (100) при-

нимает вид

$$f_1 = \gamma \sqrt{\frac{2\pi i}{k}} \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \sin [k(d - R)(1 - \sin \varphi)].$$

Чтобы получить это выражение, мы аппроксимировали в области разрывности χ функции $(-d + R \leq y \leq d - R)$ точную волновую функцию Ψ_0 падающей волной $\exp(i ky)$. При этом не принимается в расчет, что в этой области $\Psi_0 \approx 0$ из-за наличия тени. В итоге выражение (100) справедливо для падающих волн с направлением волнового вектора, близким к оси x .

5.4. Высокоэнергетическое приближение. Вычислим теперь амплитуду рассеяния в высокоэнергетическом приближении. Для этого в уравнении Липпмана — Швингера

$$\Psi = \Psi_0 + \int G_0 \left(\frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \nabla + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \mathbf{A}^2 \right) \Psi d^2 \rho' \quad (101)$$

делаем следующие, типичные для этого метода приближения [35]: под знаком интеграла в (101) точную волновую функцию Ψ заменяем ее высокоэнергетическим приближением:

$$\Psi \approx \exp \left(ikx + \frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^x A_x dx \right).$$

Тогда

$$\Psi = \Psi_0 - \frac{2ke}{\hbar c} \int G_0 e^{ikhx'} \left(A_x + \frac{e}{2\hbar ck} \mathbf{A}^2 \right) \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^{x'} A_x dx \right) dx' dy'.$$

Для достаточно больших энергий квадратичным по вектор-потенциалу членом можно пренебречь:

$$\Psi = \Psi_0 + 2ik \int G_0 e^{ikhx'} \frac{\partial}{\partial x'} \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^{x'} A_x dx \right) dx' dy'.$$

Подставляя вместо G_0 ее плосковолновой аналог $\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)$ и переходя к пределу $\rho \rightarrow \infty$, получаем для магнитной амплитуды рассеяния

$$f_1 = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \int e^{ikhx'(1 - \cos \varphi)} e^{-iky' \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial x'} \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^{x'} A_x dx \right) dx' dy'.$$

Поскольку при высоких энергиях доминирует рассеяние на малые углы, то можно положить $\exp [ikx' (1 - \cos \varphi)] \approx 1$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} f_{H.E} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} [1 - \exp (2i\pi\gamma)] \frac{\sin [k (d-R) \sin \varphi]}{\sin \varphi}; \\ \sigma_{H.E} &= \frac{8}{\pi k} \left\{ \sin \pi\gamma \frac{\sin [k (d-R) \sin \varphi]}{\sin \varphi} \right\}^2; \\ \int \sigma_{H.E} d\varphi &= 16 (d-R) \sin^2 \pi\gamma. \end{aligned} \right\} (102)$$

Эти выражения совпадают с (97)–(99) при малых γ .

Обобщение на случай цилиндров различных радиусов — тривиально. Рассмотрим два цилиндра (рис. 3), соответствующие $\mu = \mu_1$ и $\mu = -\mu_2$ ($\mu_2 > 0$). Положим $R_1 = a/\text{sh} \mu_1$, $R_2 = a/\text{sh} \mu_2$, $d_1 = a \text{cth} \mu_1$, $d_2 = a \text{cth} \mu_2$. Тогда если магнитные потоки в цилиндрах

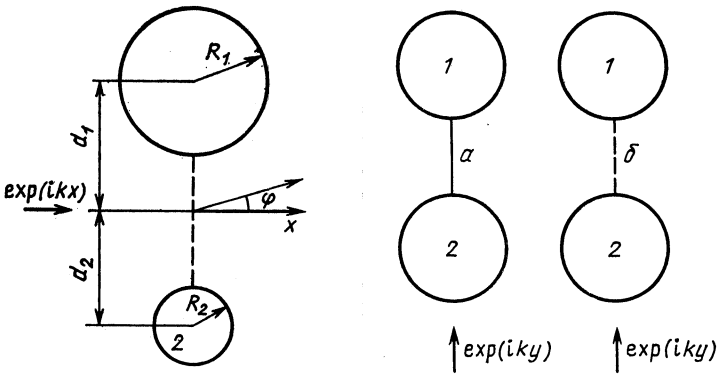


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для цилиндров разных радиусов

Рис. 4. Падающая волна рассеивается на двух непроницаемых соленоидах при наличии (а) и отсутствии (б) непроницаемой перегородки между ними

равны по значению и противоположны по знаку ($\Phi_1 = -\Phi_2 = \Phi$), то справедливы полученные ранее формулы (97) и (102) для сечений, где под d и R следует понимать $d = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)$ и $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$.

5.5 Рассеяние при необычной ориентации волнового вектора. Рассмотрим случай, когда начальный волновой вектор направлен вдоль оси y (рис. 4). Поместим между непроницаемыми соленоидами в плоскости $x = 0$ непроницаемую перегородку. Тогда на ней, как и внутри цилиндров, волновая функция обращается в нуль. Имеет место следующее очевидное соотношение:

$$\Psi_W^y = \Psi_W^0 \exp \left(\frac{ie\chi}{\hbar c} \right). \quad (103)$$

Здесь Ψ_W^γ и Ψ_W^0 — волновые функции, описывающие рассеяние заряженных частиц на двух непроницаемых цилиндрах, соединенных непроницаемой перегородкой при наличии и отсутствии тока в соленоиде соответственно. Они непрерывны и, как мы уже сказали, обращаются в нуль при $x = 0$, $|y| < d - R$. Очевидно, Ψ_W^0 — четная функция x . Рассмотрим теперь случай $\gamma = 1/2$. Из свойств производящей функции χ для двух соленоидов и из (103) следует, что $\Psi_W^{1/2}$ меняет знак при $x = 0$, $|y| < d - R$ и, следовательно, имеет узел как раз там, где находится непроницаемая перегородка. Поэтому физическая ситуация не изменится, если непроницаемую перегородку убрать. В результате имеем

$$\Psi^{1/2} = \Psi_W^{1/2} = \Psi_W^0 \exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar c}\right) \Big|_{\gamma=1/2}. \quad (104)$$

Для бесконечно тонких соленоидов ($\chi = -\Phi\theta/2\pi$) предыдущее выражение принимает вид [29]:

$$\Psi^{1/2} = \Psi_W^{1/2} = \Psi_W^0 \exp(-i\theta/2). \quad (105)$$

Здесь Ψ_W^0 — волновая функция, описывающая рассеяние на полосе, имеющей бесконечную длину вдоль оси z , ширину $2(d - R)$ вдоль оси y и нулевую толщину вдоль оси x . Для этой функции известно [36] замкнутое выражение. Соотношение (104) означает, что при $\gamma = 1/2$ и волновом начальном векторе вдоль оси y эффект магнитного поля эквивалентен введению непроницаемой перегородки между соленоидами [29, 30]. Заметим, что при $\gamma = 1/2$ волновая функция исчезает на отрезке оси y , лежащем между соленоидами даже в отсутствие непроницаемой перегородки. Этот факт будет использован в дальнейшем.

6. РАССЕЯНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ НА ТОРОИДАЛЬНОМ СОЛЕНОИДЕ

В предыдущем разделе мы видели, что изучение рассеяния на двух цилиндрических соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2$ имеет определенные преимущества по сравнению с рассеянием на одном соленоиде. Однако конечность длины соленоидов приводит к утечкам магнитного поля и к возможной интерпретации АБ-эффекта как рассеяния частиц на этих утечках. С этой точки зрения интересно рассмотреть рассеяние на соленоиде конечных размеров, простейшим из которых является тороидальный. Для дальнейшего нам будут необходимы основные факты, относящиеся к тороидальному соленоиду: вектор-потенциал, производящая функция и т. д.

□ 6.1. Векторный магнитный потенциал тороидального соленоида [37]. Магнитное поле тороидального соленоида $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$ равно нулю вне соленоида и $H_\varphi = \frac{g}{\rho}$, H_ρ , $H_z = 0$ — внутри. Здесь

ρ — расстояние точки внутри соленоида от оси соленоида (предполагается, что ось соленоида совпадает с осью z , а его экваториальная плоскость — с плоскостью $z = 0$). Константа g следующим образом зависит от полного числа витков n и силы тока J : $g = 2nJ/c$ (c — скорость света). Поток магнитного поля через сечение соленоида равен $\Phi = 2\pi g (d - \sqrt{d^2 - R^2})$. В дальнейшем мы будем широко использовать тороидальные координаты. Поэтому приведем необходимые математические детали. Цилиндрические координаты следующим образом связаны с тороидальными:

$$\rho = a \frac{\text{sh } \mu}{\text{ch } \mu - \cos \theta}, \quad z = a \frac{\sin \theta}{\text{ch } \mu - \cos \theta}, \quad \varphi = \varphi$$

$$(0 < \mu < \infty, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi),$$

μ, θ следующим образом выражаются через сферические координаты r, θ_s :

$$\text{cth } \mu = \frac{r^2 + a^2}{2ra \sin \theta_s}, \quad \text{ctg } \theta = \frac{r^2 - a^2}{2ra \cos \theta_s}. \quad (106)$$

Отсюда следует, что μ, θ стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$:

$$\mu \approx \frac{2a}{r} \sin \theta_s, \quad \theta \approx \frac{2a}{r} \cos \theta_s. \quad (107)$$

Из (106) следует, что соседним точкам, лежащим по разные стороны плоскости $r = 0$ при $\rho < a$, соответствуют отличающиеся на 2π значения θ :

$$\theta = \pm \left(\pi - \frac{2a |\delta z|}{|\rho^2 - a^2|} \right).$$

При фиксированном μ и меняющихся θ, φ точки x, y, z заполняют поверхность тора $(\rho - a \text{cth } \mu)^2 + z^2 = a^2 / \text{sh}^2 \mu$. Пусть значению $\mu = \mu_0$ отвечает поверхность соленоида T_0 . Тогда при $\mu < \mu_0 (> \mu_0)$ точки x, y, z лежат вне (внутри) соленоида. Радиусы поперечного сечения R и осевой линии d соленоида следующим образом выражаются через a, μ_0 : $R = a / \text{sh } \mu_0, d = a \text{cth } \mu_0$. При $\mu_0 \rightarrow \infty$ соленоид вырождается в нить радиуса a , лежащую в плоскости $z = 0$.

Декартовы компоненты вектор-потенциала в кулоновской калибровке ($\text{div } \mathbf{A} = 0$) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\Delta A_i = \frac{g}{a^2} \frac{(\text{ch } \mu_0 - \cos \theta)^2}{\text{sh } \mu_0} \delta(\mu - \mu_0) (\mathbf{n}_\theta)_i.$$

Здесь \mathbf{n}_θ — вектор, касательный к поверхности соленоида:

$$\mathbf{n}_\theta = - \frac{1}{\text{ch } \mu_0 - \cos \theta} (\sin \theta \text{sh } \mu_0 \cos \varphi, \sin \theta \text{sh } \mu_0 \sin \varphi, 1 - \text{ch } \mu_0 \cos \theta).$$

Из-за аксиальной симметрии A_z не зависит от угла φ , тогда как A_x, A_y зависят тривиальным образом: $A_x = A_\rho \cos \varphi, A_y = A_\rho \sin \varphi$.

Очевидно, $A_\varphi = A_x \sin \varphi - A_y \cos \varphi = 0$. Положив

$$A_\rho = \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} \tilde{A}_\rho, \quad A_z = \tilde{A}_z \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}, \quad (108)$$

получим следующие уравнения для \tilde{A}_ρ , \tilde{A}_z :

$$\begin{aligned} \left(\partial_\mu^2 + \operatorname{cth} \mu \partial_\mu + \partial_\theta^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu} \right) \tilde{A}_\rho &= - \frac{g \sin \theta \delta (\mu - \mu_0)}{(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^{3/2}}; \\ \left(\partial_\mu^2 + \operatorname{cth} \mu \partial_\mu + \partial_\theta^2 + \frac{1}{4} \right) \tilde{A}_z &= - \frac{g \delta (\mu - \mu_0)}{\operatorname{sh} \mu_0} \frac{1 - \operatorname{ch} \mu_0 \cos \theta}{(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (109)$$

Решения этих уравнений ищем в виде рядов по $\sin n\theta$, $\cos n\theta$: $A_z = \Sigma R_n^0(\mu) \cos n\theta$, $A_\rho = \Sigma R_n^1(\mu) \sin n\theta$. Разлагая подобным же образом правые части (109), находим обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для R_n . Непрерывные и конечные во всем пространстве (включая границу соленоида) решения этих уравнений выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} R_n^0 &= \frac{2\sqrt{2}g}{\pi} A_n^0 \begin{cases} P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0) & (\mu < \mu_0); \\ Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu) P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0) & (\mu > \mu_0); \end{cases} \\ R_n^1 &= - \frac{2\sqrt{2}g}{\pi} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0) \times \\ &\times \begin{cases} P_{n-\frac{1}{2}}^1(\operatorname{ch} \mu) [Q_{n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0) - Q_{n-\frac{3}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0)] & (\mu < \mu_0); \\ Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\operatorname{ch} \mu) [P_{n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0) - P_{n-\frac{3}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0)] & (\mu > \mu_0). \end{cases} \end{aligned} \quad (110)$$

Здесь мы положили: $A_0^0 = \frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0)$,

$$\begin{aligned} A_n^0 &= \frac{2\sqrt{2}g}{\pi} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) Q_{n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0) - \right. \\ &\left. - \left(n - \frac{1}{2} \right) Q_{n-\frac{3}{2}}(\operatorname{ch} \mu_0) \right]; \quad P_v^\mu(z), \quad Q_v^\mu(z) \end{aligned}$$

— функции Лежандра первого и второго рода соответственно. В дальнейшем мы будем подразумевать, что аргумент функций Лежандра равен $\operatorname{sh} \mu$, если он не указан явно. Легко убедиться, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Заметим, что A_z и A_ρ являются четными и нечетными функциями z соответственно. Далее $A_\rho = 0$ в плоскости $z=0$ и на оси z . На больших расстояниях A_ρ и A_z убывают как r^{-3} :

$$A_z \approx \frac{4ga^3}{\pi r^3} C (1 + 3 \cos 2\theta_s), \quad A_\rho \approx \frac{12ga^3}{\pi r^3} C \sin 2\theta_s. \quad (111)$$

Здесь константа $C = \frac{\pi^2}{32} \frac{\text{ch } \mu_0}{\text{sh}^3 \mu_0}$. Рассмотрим теперь более детально поведение A_z . На оси z

$$A_z(\rho = 0, z) = \frac{\sqrt{R} g d}{(d^2 + z^2)^{3/4}} Q_{1/2} \left(\frac{d^3 + z^2 + R^2}{2R \sqrt{d^2 + z^2}} \right), \quad (112)$$

что равно $\frac{16ga^3}{|z|^3} C$ для больших значений z . Рассмотрим теперь поведение A_z в плоскости $z = 0$. В начале координат

$$A_z = \frac{g}{\sqrt{\text{ch } \mu_0}} Q_{1/2} \left(\frac{1 + \text{ch}^2 \mu_0}{2 \text{ch } \mu_0} \right).$$

Внутри соленоида (точнее, при $\rho = a = \sqrt{d^2 - R^2}$) $A_z = g Q_{1/2} \times (\text{ch } \mu_0) P_{-\frac{1}{2}}(\text{ch } \mu_0)$. При больших значениях ρ потенциал A_z отрицателен: $A_z = -\frac{8g}{\pi} \frac{a^3}{r^3} C$. Можно показать, что A_z меняет знак внутри соленоида. Приведенные формулы становятся более обозримыми для случая тонкого соленоида ($R/d \ll 1$ или $\mu_0 \gg 1$). В этом случае вектор-потенциал

$$A_\rho \approx \sqrt{2} \pi g \exp(-2\mu_0) \sin \theta \sqrt{\text{ch } \mu - \cos \theta} P_{1/2}^1; \\ A_z \approx \frac{\pi g}{\sqrt{2}} \exp(-2\mu_0) \sqrt{\text{ch } \mu - \cos \theta} (P_{-\frac{1}{2}} - \cos \theta P_{1/2}) \quad (113)$$

вне соленоида и $A_\rho \approx g \exp(-\mu) \sin \theta$, $A_z \approx g \exp(-\mu) \cos \theta$ внутри его. В плоскости $z=0$ A_z растет от значения $2\pi g \exp(-2\mu_0) = \pi g R^2 / (2d^2)$ в начале координат до $g \exp(-2\mu_0) = gR / (2d)$ на внутренней границе ($\rho = d - R$) соленоида. Внутри соленоида A_z обращается в нуль при $\rho = d$ и принимает отрицательное значение $-\frac{gR}{2d}$ на внешней границе ($\rho = d + R$). Для больших значений ρ A_z

остаётся отрицательным, убывая при $\rho \rightarrow \infty$: $A_z \approx -\frac{\pi g a^3}{r^3} \exp(-2\mu_0)$. Рассмотрим теперь $A_z(\rho, z)$ как функцию z при ρ фиксированно. На оси z : $A_z(0, z) = \frac{\pi g}{2} \frac{dR^2}{(z^2 + d^2)^{3/2}}$. При фиксированном $\rho < d$ функция $A_z(\rho, z)$ положительна при всех z . При $\rho > d$ A_z отрицательно для малых z и положительно для больших. Нули A_z в плоскости (ρ, z) лежат на линии, которая начинается в точке $(d, 0)$ и имеет асимптотами прямые $z = \pm \rho / \sqrt{2}$. Это приводит к тому, что $\oint A_\rho dl$ вдоль замкнутого контура равен потоку магнитного поля, если контур интегрирования происходит через отверстие соленоида, и нулю — в противном случае.

6.2. Производящая функция тороидального соленоида [37, 38]. Поскольку вне соленоида $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, то \mathbf{A} можно представить в виде градиента некоторой функции χ . Так как $\oint A_\rho dl \neq 0$ для замкнутого

контура, проходящего через отверстие соленоида, то χ — многозначная функция декартовых координат. Для удобства рассмотрим сначала тонкий соленоид ($R/d \ll 1$). Используя вектор-потенциал, найденный ранее [см. (113)], легко получить соотношения, определяющие функцию χ_0 :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta} = \frac{A_\theta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} = \frac{g\pi}{\sqrt{2}} \exp(-2\mu_0) \frac{\cos \theta P_{-1/2} - P_{1/2}}{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2}},$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} = \frac{A_\mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} = \sqrt{2} \pi g \exp(-2\mu_0) P_{-1/2}^1 \frac{1}{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2}}. \quad (114)$$

Примем условие, согласно которому аргумент функций Лежандра равен $\operatorname{ch} \mu$, если он не указан явно. Интегрируя (114) по θ , μ и сравнивая, получаем

$$\chi_0(\theta, \mu) = \frac{\pi g a}{\sqrt{2}} \exp(-2\mu_0) \times$$

$$\times \left(P_{-\frac{1}{2}} \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}} - P_{\frac{1}{2}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \pi g a \exp(-2\mu_0) \sin \theta \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}} P_{-\frac{1}{2}}^1 -$$

$$- 2\pi g a \exp(-2\mu_0) \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sgn} \theta. \quad (115)$$

Интегралы по углу θ выражаются через эллиптические интегралы E , F :

$$\chi_0(\theta, \mu) = \sqrt{2} \pi g a \exp(-2\mu_0) \left\{ \frac{\operatorname{ch} \mu P_{-\frac{1}{2}} - P_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + \operatorname{ch} \mu}} F\left(\delta, \sqrt{\frac{2}{1 + \operatorname{ch} \mu}}\right) - \right.$$

$$\left. - P_{-\frac{1}{2}} \left[\sqrt{1 + \operatorname{ch} \mu} E\left(\delta, \sqrt{\frac{2}{1 + \operatorname{ch} \mu}}\right) - \frac{\sin \theta}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}} \right] \right\}.$$

Из этого выражения и из асимптотического поведения функций Лежандра при $\mu \rightarrow 0$ следует:

$$\chi_0 \approx -\pi g \exp(-2\mu_0) \frac{a^3}{r^2} \cos \theta_s (r \rightarrow \infty) \quad (116)$$

(r , θ_s , φ — обычные сферические координаты). Таким образом, на больших расстояниях χ_0 убывает как r^{-2} . Разлагаем подынтегральные выражения в (115) по $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ и интегрируем по θ : $\chi_0 =$

$$\left\{ -2\theta + \sum \frac{\sin n\theta}{n} \left[P_{-\frac{1}{2}} \left(Q_{n+\frac{1}{2}} + Q_{n-\frac{3}{2}} \right) - 2P_{\frac{1}{2}} Q_{n-\frac{1}{2}} \right] \right\}. \quad (117)$$

Легко проверить, что интеграл $\oint A_l dl$ равен ($\mu = \text{const} < \mu_0$):

$$a \int_{-\pi}^{\pi} A_{\theta} \frac{d\theta}{\text{ch } \mu - \cos \theta} = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta} d\theta = -4\pi g a \exp(-2\mu_0),$$

т. е. с точностью до знака потока Φ магнитного поля, если контур интегрирования проходит через отверстие соленоида, и нулю в противном случае.

Для конечного ($R \approx d$) соленоида прямое интегрирование компонент вектор-потенциала A_{ρ} , A_z весьма затруднительно. Мы приведем здесь окончательный результат (подробнее см. [38]). Производящая функция для конечного соленоида имеет вид

$$\chi(\theta, \mu) = \frac{\chi_0(\theta, \mu)}{1 - \exp(-2\mu_0)} + \frac{4\sqrt{2}g}{\pi} \sqrt{\text{ch } \mu - \cos \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n P_{n-\frac{1}{2}} \sin n\theta, \tag{118}$$

где χ_0 (производящая функция для тонкого соленоида) определена соотношением (117), а

$$\beta_n = - \sum_{k=n}^{\infty} Q_{k-\frac{1}{2}}(\text{ch } \mu_0) Q_{k+\frac{1}{2}}(\text{ch } \mu_0).$$

Используя асимптотическое поведение лежандровских функций, получаем из (118):

$$\chi(\theta, \mu) \approx -\frac{\pi g}{4} \frac{\text{ch } \mu_0}{\text{sh}^3 \mu_0} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta_s. \tag{119}$$

Следующие свойства функции χ понадобятся в дальнейшем. Во-первых, χ убывает как r^{-2} на больших расстояниях от соленоида.

Во-вторых, χ претерпевает конечный скачок (равный $-\Phi = -\frac{4\pi g a}{\exp(2\mu_0)-1}$) при пересечении круга радиуса $d - R$, лежащего в экваториальной плоскости соленоида ($z = 0$). Иными словами, область разрывности производящей функции тороидального соленоида заполняет экваториальный круг радиуса $d - R$.

6.3. Амплитуда рассеяния заряженных частиц магнитным полем тороидального соленоида. В этом пункте мы рассмотрим рассеяние заряженных бесспиновых частиц безвихревым вектор-потенциалом тороидального соленоида. Для предотвращения проникновения частиц в область с $H \neq 0$ эта область экранируется бесконечно отталкивательным потенциалом подходящей геометрической формы. Ввиду этого волновая функция обращается в нуль на границе области бесконечного отталкивания (так же, как и внутри ее).

Первое борновское приближение. Итак, необходимо найти решение уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + V\Psi = E\Psi, \quad (120)$$

причем $V = \infty$, $\Psi = 0$ внутри экрана и на его границе и $V = 0$ в других точках пространства.

Рассмотрим сперва случай, когда соленоид T_0 заключен в экран тороидальной формы. Пусть он совпадает с T_0 . Тогда имеем в первом борновском приближении по вектор-потенциалу:

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{2ie}{\hbar c} \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{A} \nabla \Psi_0 dV'. \quad (121)$$

Здесь Ψ_0 и G_0 — волновая и гриновская функции, соответствующие рассеянию на непроницаемом торе в отсутствие магнитного поля. Очевидно, они исчезают на границе T_0 . Интегрирование в (121) проводится вне соленоида, где $\mathbf{A} = \text{grad } \chi$. Далее имеем тождественно:

$$\mathbf{A} \text{ grad } \Psi_0 = \frac{\partial \chi}{\partial x_h} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_h} = \frac{1}{2} \Delta (\chi \Psi_0) - \frac{1}{2} \chi \Delta \Psi_0 = \frac{1}{2} (\Delta + k^2) \chi \Psi_0$$

(Δ и k^2 — оператор Лапласа и волновое число соответственно). Тогда получаем

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{ie}{\hbar c} \int G_0 (\Delta + k^2) \chi \Psi_0 dV'. \quad (122)$$

Интегрируем (122) дважды по частям, используя уравнение для G_0

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{ie}{\hbar c} \chi \Psi_0 + \frac{ie}{\hbar c} \int \text{div} [G_0 \text{ grad } \chi \Psi_0 - \chi \Psi_0 \text{ grad } G_0] dV'. \quad (123)$$

Для вычисления амплитуды рассеяния необходимо найти предел (123) при $\rho \rightarrow \infty$. Первый член в правой части даст падающую плоскую волну и амплитуду рассеяния на непроницаемом торе в отсутствие магнитного поля. Вторым членом можно пренебречь, поскольку χ убывает как r^{-2} при $r \rightarrow \infty$. Переходим к третьему члену в (123). Забудем на мгновение, что векторная функция, на которую действует оператор дивергенции, разрывна (из-за χ -функции). Применяя теорему Гаусса, объемное интегрирование заменяем интегралом по поверхности, содержащей этот объем. Эта поверхность состоит из поверхности тора T_0 и поверхности сферы C_R достаточно большого радиуса R . Интеграл по поверхности тора исчезает, поскольку на ней обращаются в нуль как Ψ_0 , так и G_0 . Итак, остается интеграл по C_R :

$$R^2 \int \left[G_0 \frac{\partial (\chi \Psi_0)}{\partial R} - \chi \Psi_0 \frac{\partial G_0}{\partial R} \right] d\Omega' \quad (d\Omega' = \sin \theta'_s d\theta'_s d\varphi').$$

Поскольку на больших расстояниях $\Psi_0 \approx \exp(ikz)$,

$$\chi \approx -\frac{\pi g}{4} \frac{\text{ch } \mu_0}{\text{sh}^3 \mu_0} r^{-2} \cos \theta_s, \quad G_0 \approx -\frac{1}{4\pi r} \exp[ik(r - \mathbf{r}\mathbf{n}')],$$

то интеграл по C_R сводится к

$$-\frac{g}{16} \frac{ke a^3}{\hbar c} \frac{\text{ch } \mu_0}{\text{sh}^3 \mu_0} \frac{\exp(ikR)}{R} \int \cos \theta'_s (1 + \cos \theta'_s) \exp [ik(R \cos \theta'_s - r n')] d\Omega'.$$

Он обращается в нуль при $R \rightarrow \infty$. Учтем теперь, что под знаком оператора div в (123) стоит разрывная функция. Детальное рассмотрение показывает, что теорема Гаусса должна быть модифицирована. Именно поверхностный интеграл следует дополнить интегралом по области разрыва χ функции:

$$\frac{ie\Phi}{\hbar c} \int \left(G_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial z'} - \Psi_0 \frac{\partial G_0}{\partial z'} \right) \rho' d\rho' d\varphi \quad (\rho' \leq d - R, z' = 0). \quad (124)$$

Вычислим теперь амплитуду рассеяния. Для этого переходим в (124) к пределу $r \rightarrow \infty$, подставляя вместо G_0 ее асимптотику:

$$f = -\frac{e\Phi}{4\pi\hbar c} \int \left[\exp(-ikn\rho') \frac{\partial \Psi_0}{\partial z'} - \Psi_0 \frac{\partial}{\partial z'} \exp(-ikn\rho') \right] \rho' d\rho' d\varphi \quad (\rho' \leq d - R, z' = 0). \quad (125)$$

Мы видим, что амплитуда рассеяния зависит от поведения волновой функции вблизи соленоида. Последняя неизвестна в явном виде, поскольку волновое уравнение не разделяется в тороидальных координатах. Подставим вместо Ψ_0 плоскую волну $\exp(i k z)$. Тогда [38]:

$$f = \frac{\gamma k}{2} (1 + \cos \theta_s) \int \exp(+ik\rho' \sin \theta_s \cos \varphi) \rho' d\rho' d\varphi = \\ = \pi\gamma (1 + \cos \theta_s) (d - R) \frac{J_1[k(d - R) \sin \theta_s]}{\sin \theta_s}, \quad \gamma = e\Phi/\hbar c. \quad (126)$$

Для тонкого соленоида это выражение сводится к

$$\pi\gamma (1 + \cos \theta_s) d \frac{J_1(kd \sin \theta_s)}{\sin \theta_s}. \quad (127)$$

Это выражение было получено ранее в интересной работе [39]. Однако процедура получения (127) вызвала сомнения. Дело в том, что вектор-потенциалы, использованные в этой работе, имели δ -образные сингулярности в плоскости $z = 0$.

В результате отбрасываемый член $-\frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \mathbf{A}$ оказывается более сингулярным, чем принятый в расчет $-\frac{ie}{\hbar c} (2\mathbf{A} \text{ grad } \Psi_0 + \Psi_0 \text{ div } \mathbf{A})$ ($\text{div } \mathbf{A} \neq 0$ для потенциалов работы [39]).

Высокоэнергетическое приближение. Вычислим теперь магнитную амплитуду рассеяния на тороидальном соленоиде в высокоэнергетическом приближении. С этой целью мы делаем в уравнении Липпмана — Швингера

$$\Psi = \Psi_0 + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V_1 \Psi(\mathbf{r}') dV' \quad (V_1 = \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \nabla) \quad (128)$$

следующие, типичные для этого метода упрощения [35]: заменяем функцию Грина G_0 плоскостолновой функцией $-\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$; под знаком интеграла вместо Ψ используем ее высокоэнергетическое приближение

$$\exp\left(ikz + \frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^z A_z dz\right).$$

Это выражение правильно, если выполняется соотношение

$$\left|A^2 \frac{e}{\hbar ck}\right| \ll |A_z|.$$

В противном случае квадратичные по потенциалам члены должны быть добавлены в подынтегральное выражение. Для вектор-потенциалов, использованных в работе [39], это приводит к бесконечной амплитуде рассеяния, как и в первом борновском приближении. С другой стороны, потенциалы, использованные в данной работе, являются везде непрерывными и конечными функциями координат. Поэтому приведенное выше условие выполнено при достаточно больших энергиях. Для магнитной амплитуды рассеяния получаем

$$f(\mathbf{n}) = \frac{ek}{\hbar c} \int \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}') A_z \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^{z'} A_z dz\right) dV'. \quad (129)$$

Здесь $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ — переданный импульс; $\mathbf{k}' = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{k} = n_z k$. Поскольку при высоких энергиях доминирует рассеяние на малые углы, вектор \mathbf{q} можно считать перпендикулярным начальному вектору \mathbf{k} ; следовательно, \mathbf{q} лежит в плоскости $z = 0$. Тогда [38]:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{n}) &= \frac{ek}{\hbar c} \int d^2\rho' \exp(i\mathbf{q}\rho') \int_{-\infty}^{\infty} dz A_z \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^z A_z dz\right) = \\ &= -\frac{ik}{2\pi} \int d^2\rho \exp(i\mathbf{q}\rho) \left[\exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} A_z dz\right) - 1 \right] = \\ &= -ik [\exp(2i\pi\gamma) - 1] \int_0^{d-R} J_0(q\rho) \rho d\rho = \\ &= -ik(d-R) [\exp(2i\pi\gamma) - 1] J_1[q(d-R)]/q. \end{aligned} \quad (130)$$

Эта амплитуда переходит в борновскую амплитуду при малых γ и θ . Выражения (126) и (130) легко обобщаются на случай, когда тороидальный соленоид целиком заключен в непроницаемый тор (рис. 5):

$$f_B = \pi\gamma \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} J_1(ka \sin\theta); \quad (131)$$

$$f_{H.E} = -ika [\exp(2i\pi\gamma) - 1] J_1(qa)/q. \quad (132)$$

Рассеяние при необычной конфигурации волнового вектора. Рассмотрим опять рассеяние на тороидальном соленоиде, окруженном непроницаемым тором $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$. Пусть теперь начальный волновой вектор перпендикулярен оси z , например направлен вдоль оси x (рис. 6). Поставим при $z = 0$, $\rho \leq d - R$ непроницаемую перегородку. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\Psi_W^\gamma = \exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar c}\right) \Psi_W^0 \left(\gamma = \frac{e\Phi}{\hbar c}\right). \tag{133}$$

Здесь Ψ_W^γ и Ψ_W^0 — волновые функции, отвечающие рассеянию на непроницаемом торе с дырой, закрытой непроницаемой перегородкой при наличии и отсутствии тока в обмотке соленоида соответственно.

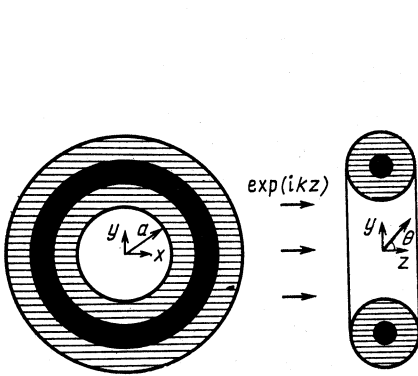


Рис. 5. Тороидальный соленоид (зачернен) окружен потенциальным барьером высотой V_0 , имеющим форму тора (заштрихован). При $V_0 \rightarrow \infty$ сечение рассеяния на магнитном поле стремится к конечному значению [см. (131) или (132)]

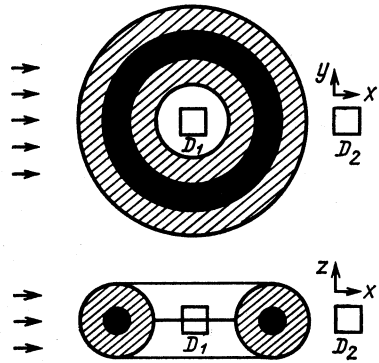


Рис. 6. Тороидальный соленоид (зачернен) окружен непроницаемым тором (заштрихован). При начальном волновом векторе в плоскости $z = 0$ и $\gamma = 1/2$ волновая функция исчезает на участке плоскости $z = 0$, совпадающей с дырой тора

Нижний индекс при волновых функциях означает наличие непроницаемой перегородки, верхний — показывает значение константы γ , при которой они вычислены. Функции Ψ_W^0 , Ψ_W^γ — всюду непрерывны и обращаются в нуль как внутри непроницаемых цилиндров, так и на поверхности непроницаемой перегородки. Далее χ — производящая функция тороидального соленоида. Из ее явного вида следует, что она меняется от $-\Phi/2$ до $\Phi/2$ при переходе через непроницаемую перегородку и является нечетной функцией z . Очевидно, Ψ_W^0 — четная функция z . Пусть теперь $\gamma = 1/2$. Из (133) следует, что $\Psi_W^{1/2}$ отличается знаком на разные стороны непроницаемой перегородки, обращаясь на ней в нуль. Следовательно, она имеет там узел. Поэтому непроницаемую перегородку можно убрать, не нарушая

физических условий. В итоге имеем

$$\Psi_W^{1/2} = \Psi_0^{1/2} = \exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar c}\right) \Big|_{\gamma=\frac{1}{2}} \Psi_W^0. \quad (134)$$

Для бесконечно тонкого соленоида Ψ_W^0 отвечает рассеянию на тонком диске радиуса d , лежащем в плоскости $z = 0$ [40]. Для такой волновой функции известно замкнутое выражение [36]. Итак, при $\gamma = 1/2$ и начальном волновом векторе в плоскости $z = 0$ наличие магнитного поля оказывается эквивалентным закрытию дыры тора непроницаемой перегородкой. Из (134) следует, что волновая функция при $\gamma = 1/2$ исчезает при $z = 0$, $\rho < d - R$ даже в отсутствие непроницаемой перегородки. Этот факт будет использован нами в дальнейшем.

7. РАССЕЯНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ИДЕАЛЬНОМ МНОГОСВЯЗНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данном разделе мы окружаем один или несколько соленоидов топологически неэквивалентными экранами и изучаем рассеяние на доступных для частиц магнитных полях. Вне соленоидов уравнению Шредингера удовлетворяет следующая волновая функция:

$$\Psi = \Psi_0 \exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar c}\right), \quad (135)$$

где χ — производящая функция, определенная выше, и Ψ_0 — волновая функция в отсутствие магнитного поля. Преобразование (135) — унитарно, и это гарантирует совпадение всех наблюдаемых для Ψ и Ψ_0 . Мы всегда выбираем волновую функцию Ψ (являющуюся решением исходного неурезанного уравнения Шредингера) однозначной. Поэтому (из-за разрывности χ функции) Ψ_0 неоднозначна. Отсутствие унитарного преобразования, связывающего непрерывную функцию Ψ с непрерывной функцией Ψ_0 , и является причиной возникновения АБ-эффекта. Существует, однако, важное исключение, когда обе функции, входящие в (135), непрерывны. Это имеет место тогда, когда область разрывности функции χ недоступна для падающих частиц. Тогда в месте разрыва $\Psi = \Psi_0 = 0$ и соотношение (135), которое в области разрывности выполняется тривиально: $0 = 0$, является унитарным преобразованием между непрерывными функциями с $A \neq 0$ и $A = 0$. В такой ситуации АБ-эффект отсутствует. Типичные примеры показаны на рис. 7–10: два цилиндрических соленоида ($\Phi_1 = -\Phi_2$) в непроницаемом цилиндре (рис. 7), тороидальный соленоид в непроницаемом цилиндре (рис. 8) и сфере (рис. 9), в одном из плеч непроницаемого тора (рис. 10). Мы замечаем, что в одном и том же многосвязном пространстве (например, пространстве вне непроницаемого тора) АБ-эффект может иметь место (рис. 6), но может и отсутствовать (рис. 10). Это же относится и к непроницаемому цилиндру: АБ-эффект существует, если внутри цилиндра

находится один соленоид, и отсутствует, если внутри него — два соленоида с $\Phi_1 = -\Phi_2$ (рис. 7) или тороидальный соленоид (рис. 8). Мы заключаем: существование АБ-эффекта определяется не только многосвязностью доступного для частиц пространства, нетривиаль-

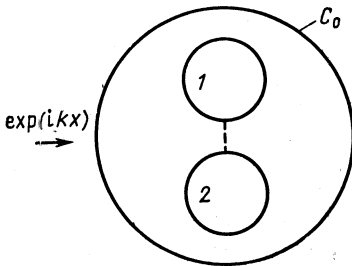


Рис. 7. Иллюстрация отсутствия АБ-эффекта в многосвязном пространстве. Два цилиндрических соленоида с $\Phi_1 = -\Phi_2$ окружены непроницаемым барьером цилиндрической формы

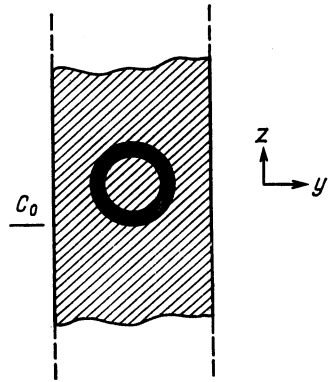


Рис. 8. Иллюстрация отсутствия АБ-эффекта в многосвязном пространстве. Тороидальный соленоид окружен непроницаемым цилиндрическим барьером

ностью вектор-потенциалов в нем и однозначностью используемых волновых функций [38, 41]. Условие его существования можно выразить либо с помощью производящей функции (АБ-эффект существует,

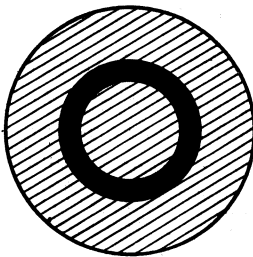


Рис. 9. Иллюстрация отсутствия АБ-эффекта. Причина — односвязность доступного для частиц пространства. Тороидальный соленоид окружен непроницаемым сферическим барьером

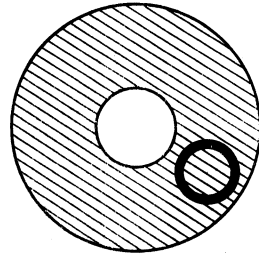


Рис. 10. Иллюстрация отсутствия АБ-эффекта в многосвязном пространстве. Тороидальный соленоид помещен в одно из плеч непроницаемого тора

если область разрывности $\chi \neq$ функции доступна для падающих частиц), либо посредством неинтегрируемого фазового множителя (существуют замкнутые, доступные для частиц пути, вдоль которых $\oint A_i dl \neq 0$ [42]).

8. О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛОВ

Поскольку вне соленоида $\mathbf{A} = \text{grad}\chi$, то можно попытаться в этой области устранить вектор-потенциал (полностью или частично) с помощью подходящего калибровочного преобразования. Известно [32, 43], что для одного бесконечного цилиндрического соленоида полное уничтожение вектор-потенциала вне соленоида приводит к возникновению на оси соленоида сингулярного магнитного поля, имеющего направление, обратное первоначальному. Для двух соленоидов сингулярное магнитное поле возникает на оси каждого из соленоидов. Наконец, в случае тороидального соленоида после упомянутого калибровочного преобразования возникает магнитное поле $H = -\Phi\delta(z)\delta(\rho - d)/2\pi$. В каждом из этих случаев после калибровочного преобразования задача оказывается неэквивалентной исходной. Следует сделать оговорку. Ситуации до и после калибровочного преобразования физически неэквивалентны, если в обоих случаях используются однозначные волновые функции. В самом деле, в предыдущем разделе мы видели, что вектор-потенциал вне соленоида всегда можно обратить в нуль с помощью унитарного преобразования. Платой за это является разрывность получающихся после калибровочного преобразования функций. Если эта плата оказывается для нас слишком высокой, то мы должны ограничиться калибровочными преобразованиями, не меняющими трансформационных свойств волновых функций.

8.1. Бесконечный цилиндрический соленоид. В качестве первого примера рассмотрим бесконечный цилиндрический соленоид радиуса R [38]. В этом случае наряду с обычным вектор-потенциалом ($A_x = -\frac{HR^2y}{2\rho^2}$, $A_y = \frac{HR^2x}{2\rho^2}$, $A_z = 0$ — вне соленоида и $A_x = -\frac{1}{2}Hy$, $A_y = \frac{1}{2}Hx$, $A_z = 0$ — внутри) можно работать с вектор-потенциалом \mathbf{A} , дающим то же магнитное поле, что и \mathbf{A} (т. е. $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ внутри соленоида и $\mathbf{H} = 0$ — снаружи). Единственной отличной от нуля компонентой \mathbf{A}' является A'_y , которая равна $H(x + \sqrt{R^2 - y^2})$ внутри соленоида. Вне соленоида $A'_y \neq 0$ в области $|y| \leq R$, $x > 0$ (рис. 11): $A'_y = 2H\sqrt{R^2 - y^2}$. Вектор-потенциалы \mathbf{A} и \mathbf{A}' связаны несингулярным калибровочным преобразованием:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \text{grad} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Функция α находится из уравнения

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = Hf(x, y).$$

Функция $f = x + \sqrt{R^2 - y^2}$ внутри соленоида. Вне его она равна $2\sqrt{R^2 - y^2}$ в заштрихованной области (рис. 11) и нулю — вне ее.

Для бесконечно тонкого соленоида A'_y вырождается в

$$A'_y = \Phi \delta(y) \theta(x),$$

т. е. вектор-потенциал отличен от нуля на положительной полуоси x .

Более общие калибровочные преобразования обсуждаются в [44].

8.2. Два соленоида с противоположными потоками. Для двух соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ следующий вектор-потенциал A' дает то же

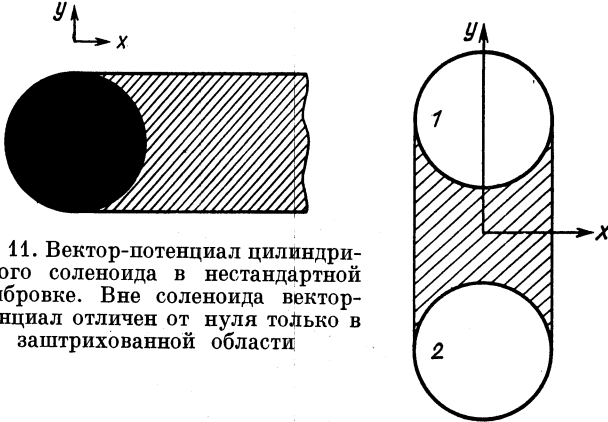


Рис. 11. Вектор-потенциал цилиндрического соленоида в нестандартной калибровке. Вне соленоида вектор-потенциал отличен от нуля только в заштрихованной области

Рис. 12. Вектор-потенциал двух цилиндрических соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ в некулоновской калибровке. Вне соленоидов вектор-потенциал отличен от нуля только в заштрихованной области

магнитное ($\pm H e_z$) поле внутри соленоидов, что и ранее полученный [31]: $A'_y = A'_z = 0$, $A'_x = f\Phi/\pi R^2$. Функция f равна (рис. 12): $d + \sqrt{R^2 - x^2} \mp y$ внутри первого и второго соленоидов соответственно; $f = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ между соленоидами ($-d + \sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq d - \sqrt{R^2 - x^2}$, $|x| < R$). Наконец $f = 0$ в остальных областях пространства. Вектор-потенциалы A и A' связаны несингулярным калибровочным преобразованием:

$$A = A' + \text{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Функция Ψ находится из уравнения $\Delta \Psi = -fH$. Для точечных соленоидов ($R \rightarrow 0$, но $\Phi = \text{const}$) вектор-потенциал отличен от нуля только на отрезке $|y| < d$ оси y :

$$A' = e_x \Phi \delta(x).$$

8.3. Тороидальный соленоид. Для тороидального соленоида $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$ следующий вектор-потенциал A' дает то же магнитное поле $H = e_\phi g/\rho$, $g = \frac{\Phi}{2\pi} (d - \sqrt{d^2 - R^2})^{-1}$ — внутри соле-

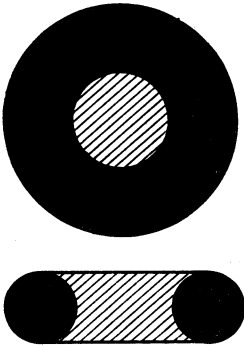


Рис. 13. Вектор-потенциал тороидального соленоида в некулоновской калибровке. Вне соленоидов вектор-потенциал отличен от нуля только в заштрихованной области

ноида, $\mathbf{H} = 0$ — снаружи, что и вектор-потенциал, полученный в [38]: $\mathbf{A}' = A'_z \mathbf{e}_z$, причем $A'_z = g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{\rho}$ — внутри соленоида и $A'_z = g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{d - \sqrt{R^2 - z^2}}$ — снаружи в заштрихованной области (рис. 13). Вектор-потенциалы \mathbf{A} и \mathbf{A}' связаны следующим калибровочным преобразованием:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \text{grad} \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Функции

$$\alpha = -\frac{g}{2\pi V \bar{\rho}} \int_{-R}^R dz_1 \beta(z, \rho, z_1);$$

$$\beta(\rho, z, z_1) = \ln(d - \sqrt{R^2 - z_1^2}) \int_0^{d - \sqrt{R^2 - z_1^2}} V \bar{\rho}_1 d\rho_1 Q_{-\frac{1}{2}}(x) -$$

$$- \ln(d + \sqrt{R^2 - z_1^2}) \int_0^{d + \sqrt{R^2 - z_1^2}} d\rho_1 V \bar{\rho}_1 Q_{-\frac{1}{2}}(x) +$$

$$+ \int_{d - \sqrt{R^2 - z_1^2}}^{d + \sqrt{R^2 - z_1^2}} V \bar{\rho}_1 d\rho_1 \ln \rho_1 Q_{-\frac{1}{2}}(x) \quad \left(x = \frac{\rho^2 + \rho_1^2 + (z - z_1)^2}{2\rho\rho_1} \right).$$

Для бесконечно тонкого тороидального соленоида $R \rightarrow 0$ получаем (при фиксированном Φ): $\mathbf{A}' = \mathbf{e}_z \Phi \delta(z) \theta(d - \rho)$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \text{grad} \frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

$$\alpha = \frac{R^2 g}{4\pi} \left[2\pi (\sqrt{z^2 + d^2} - |z|) - 2\sqrt{d} \int_0^\rho \frac{d\rho}{V \bar{\rho}} Q_{1/2} \left(\frac{z^2 + \rho^2 + d^2}{2d\rho} \right) \right].$$

Мы заключаем: если мы согласны работать с разрывными волновыми функциями, то с помощью подходящего калибровочного преобразования всегда можно полностью обратить в нуль вектор-потенциал вне соленоида. В противном случае следует ограничиться только несингулярными калибровочными преобразованиями, не меняющими трансформационных свойств волновых функций.

9. ОБ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭФФЕКТА
ААРОНОВА — БОМА

В предыдущих разделах мы окружали соленоиды различными абсолютно непроницаемыми топологически неэквивалентными экранами и изучали рассеяние на магнитном поле ($\mathbf{H} = 0, \mathbf{A} \neq 0$), окружающем эти соленоиды. С другой стороны, альтернативная интерпретация АБ-эффекта положительные результаты опытов по обнаружению этого эффекта приписывает как утечкам магнитного поля (обязанным конечности длины реального цилиндрического соленоида), так и неисчезающей вероятности рассеяния падающих частиц на областях пространства с $\mathbf{H} \neq 0$ (за счет конечности реального потенциального барьера). Апелляция к предельному случаю идеального соленоида неправомерна из-за многосвязности возникающего после перехода к бесконечным барьерам пространства. Мы видели, что в таком многосвязном пространстве допустимы неэквивалентные представления углового момента, которым отвечают неоднозначные волновые функции.

С другой стороны, реальные эксперименты проводятся в односвязном пространстве, где допустимы только однозначные волновые функции. В оставшейся части этого раздела мы окружаем соленоид потенциальными барьерами конечной высоты, изучаем рассеяние на них.

9.1. Бесконечный цилиндрический соленоид. Рассмотрим цилиндрический соленоид радиуса R , окруженный цилиндрическим потенциальным барьером C_0 высоты V_0 и радиуса $b \geq R$. Тогда в первом порядке теории возмущений по безразмерной константе $\gamma = e\Phi/\hbar c$ имеем для амплитуды рассеяния на магнитном поле

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sum f_{1m} \exp(im\varphi). \tag{136}$$

Парциальные амплитуды f_{1m} ($m \neq 0$) равны [41]:

$$\begin{aligned} f_{1m} = i\pi\gamma m \left\{ -\frac{4}{\pi^2\hbar_m^2} I_{|m|}^2(k_1R) - I_{|m|-1}(k_1R) I_{|m|+1}(k_1R) \right\} + \\ + \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\hbar_m^2} \frac{1}{|m|} \sum_{s=0}^{|m|} (-1)^{|m|-s} \Delta(0, s, m) [I_s^2 - I_s^2(k_1R)] + \\ + \frac{2}{|m|} \sum_{s=0}^{|m|} \Delta(0, s, m) [J_s - r_m H_s^{(1)}]^2, \end{aligned} \tag{137}$$

где $\Delta(0, s, m) = (1 + \delta_{0s})^{-1} (1 + \delta_{s, |m|})^{-1}$; $\gamma = e\Phi/\hbar c$.

Здесь и в дальнейшем аргументы обычных и модифицированных функций Бесселя не указываются, если они равны kb и k_1b соответственно; далее: $k = \sqrt{2\mu E/\hbar}$, $k_1 = \sqrt{2\mu(V_0 - E)/\hbar}$, $r_m = j_m/h_m$, $h_m = kbI_{|m|} \dot{H}_{|m|}^{(1)} - k_1 b \dot{I}_{|m|} H_{|m|}^{(1)}$, $j_m = kbI_{|m|} \dot{J}_{|m|} - k_1 b \dot{I}_{|m|} J_{|m|}$.

Первая строка в этом выражении равна вкладу в амплитуду рассеяния магнитного поля внутри соленоида; вторая — обязана магнитному полю вне соленоида, но внутри C_0 . Наконец, третья строка определяет вклад магнитного поля вне C_0 . При нулевом потенциальном барьере ($V_0 = 0$) выражение (137) переходит в

$$f_{1m}^0 = i\pi\gamma m \left[J_{|m|}^2(kR) - J_{|m|-1}(kR) J_{|m|+1}(kR) + \right. \\ \left. + \frac{1}{|m|} \sum_{s=0}^{|m|} \Delta(0, s, m) J_s^2(kR) \right].$$

Первая и вторая строки этого выражения обязаны магнитному полю внутри и вне соленоида. Для бесконечно тонкого соленоида ($R \rightarrow 0$) вклад магнитного поля внутри соленоида исчезает, тогда как вторая строка сводится к обычной АБ-амплитуде:

$$f_m^{\text{АБ}} = -i\pi\gamma \frac{m}{|m|}; \\ f_{\text{АБ}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sum f_m^{\text{АБ}} \exp(im\varphi) = -\frac{\pi\gamma}{\sqrt{2\pi ik}} \text{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Для бесконечно высокого потенциального барьера ($V_0 = \infty$) падающая волна не проникает внутрь C_0 :

$$f_{1m}^\infty = 2\pi i\gamma \frac{m}{|m|} \sum_{l=0}^{|m|} [J_l(kb) - s_m H_l^{(1)}(kb)]^2 \Delta(0, l, m) \\ (s_m = J_{|m|}(kb)/H_{|m|}^{(1)}(kb)). \quad (138)$$

Мы заключаем: для больших величин потенциального барьера вклад областей с $H \neq 0$ в амплитуду рассеяния пренебрежимо мал. Это означает, что положительные результаты опытов по обнаружению АБ-эффекта не могут быть объяснены конечностью значений потенциального барьера.

9.2. Два цилиндрических соленоида и тороидальный соленоид. Пусть теперь внутри C_0 находятся два соленоида с $\Phi_1 = -\Phi_2$. Тогда справедливо выражение (136), в котором

$$f_{1m} = \frac{e}{\hbar c} i^{-|m|} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} R_{0m} \exp(-im\varphi) \mathbf{A} \nabla \Psi_0 d\varphi. \quad (139)$$

Здесь \mathbf{A} — вектор-потенциал для двух соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$; $\Psi_0 = \sum i^{|m|} R_{0m} \exp(im\varphi)$; $R_{0m} = \frac{2i}{\pi} I_{|m|}(k_1\rho)$ — внутри C_0 и $R_{0m} = J_{|m|}(k\rho) - r_m H_{|m|}^{(1)}(k\rho)$ — снаружи.

Разобьем интеграл (139) на интеграл внутри соленоидов и вне их. Полагая во втором интеграле $\mathbf{A} = \text{grad}\chi$ и дважды интегрируя по

частям, приводим его к виду

$$\frac{e}{\hbar c} (-i)^{|m|} \int \rho d\rho d\varphi \operatorname{div} (R_{0m} e^{-im\varphi} \operatorname{grad} \chi \Psi_0 - \chi \Psi_0 \operatorname{grad} R_{0m} e^{-im\varphi}). \quad (140)$$

В силу теоремы Гаусса (с учетом разрывности χ -функции) этот интеграл сводится к сумме интегралов по поверхности соленоидов, по поверхности цилиндра бесконечного радиуса и по области разрывности χ -функции [совпадающей с отрезком $(-d + R, d - R)$ оси y]. Интеграл по поверхности цилиндра бесконечного радиуса обращается в нуль из-за быстрого убывания χ -функции. В итоге в (139) остается интегрирование по ближайшей окрестности, лежащей внутри C_0 . При $V_0 \rightarrow \infty$ функции R_{0m} и Ψ_0 внутри C_0 стремятся к нулю. Поэтому исчезают как f_{1m} , так и f_1 . Итак, для одного и того же цилиндрического барьера C_0 амплитуда рассеяния на магнитном поле приближается при $V_0 \rightarrow \infty$ в одном случае (внутри C_0 — один соленоид) к конечному значению (138), а во втором случае (внутри C_0 — два соленоида) — к нулю. Это выглядит странным, если АБ-эффект интерпретировать как результат рассеяния на областях пространства с $H \neq 0$, поскольку в обоих случаях при конечном V_0 вероятность проникновения частиц в область $H \neq 0$ также конечна.

Поместим теперь внутрь бесконечного цилиндрического барьера тороидальный соленоид (рис. 8). С помощью тех же рассуждений, что и выше, мы приходим к выводу, что магнитная амплитуда рассеяния непрерывно убывает по мере увеличения высоты потенциального барьера. Это же относится и к тороидальному соленоиду, помещенному в сферический потенциальный барьер (рис. 9) и в одно из плеч тороидального потенциального барьера (рис. 10). С другой стороны, магнитная амплитуда рассеяния стремится к конечной величине (131), (132) для тороидального соленоида, окруженного потенциальным барьером, имеющим форму тора (рис. 6). Итак, в одних случаях [цилиндрический соленоид в цилиндрическом потенциальном барьере, тороидальный соленоид в тороидальном потенциальном барьере (рис. 6)] амплитуда рассеяния стремится к конечной величине ($\neq 0$) по мере увеличения высоты барьера. В других же случаях (два цилиндрических соленоида с $\Phi_1 = -\Phi_2$ в цилиндрическом потенциальном барьере, тороидальный соленоид в цилиндрическом и сферическом потенциальных барьерах, в одном из плеч тороидального потенциального барьера) амплитуда рассеяния стремится к нулю по мере увеличения высоты барьера. Подобное различие трудно объяснить с точки зрения интерпретации АБ-эффекта как рассеяния на областях пространства с $H \neq 0$. В самом деле, вероятность проникновения частиц в область $H \neq 0$ примерно одна и та же для барьеров различных геометрических форм и стремится к нулю при $V_0 \rightarrow \infty$. С другой стороны, отличие от нуля магнитной амплитуды допускает естественную интерпретацию либо в рамках неинтегрируемого фазового множителя (вклад магнитного поля в амплитуду рассеяния

конечен), если после перехода $V_0 \rightarrow \infty$ остаются замкнутые, доступные для частиц пути, вдоль которых $\oint A_i dl \neq 0$ или же с помощью производящей функции (потенциальный барьер не полностью экранирует область разрывности производящей функции).

10. АБ-ЭФФЕКТ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Пусть заряженные частицы движутся между двумя непроницаемыми цилиндрами радиусов a и b . Соленоид с магнитным потоком Φ помещен внутри меньшего из цилиндров. Уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi = E\Psi, \quad \mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi. \quad (141)$$

Однозначная волновая функция, отвечающая угловому моменту m и исчезающая при $\rho = a$ и $\rho = b$, имеет вид

$$\Psi_m^\gamma = C_{m\gamma} [J_{|m-\gamma|}(k\rho)N_{|m-\gamma|}(ka) - J_{|m-\gamma|}(ka)N_{|m-\gamma|}(k\rho)]e^{im\varphi}. \quad (142)$$

Здесь $\gamma = e\Phi/\hbar c$, $C_{m\gamma}$ — несущественный нормировочный множитель. Собственные значения определяются из соотношения

$$J_{|m-\gamma|}(kb)N_{|m-\gamma|}(ka) - J_{|m-\gamma|}(ka)N_{|m-\gamma|}(kb) = 0.$$

Отсюда следует, что собственные значения зависят явно от γ , т. е. от магнитного потока Φ . При $ka \gg 1$, $kb \gg 1$ собственные значения получаются в явном виде [44]

$$k_{mn}(\gamma) = \frac{\pi n}{b-a} + \frac{4(m-\gamma)^2 - 1}{8\pi ab} \frac{b-a}{n}.$$

Уравнению Шредингера (141) удовлетворяет также следующая неоднозначная волновая функция:

$$\Psi_m^0 = C_m [J_{|m|}(k\rho)N_{|m|}(ka) - N_{|m|}(k\rho)J_{|m|}(ka)]e^{i(m+\gamma)\varphi}. \quad (143)$$

В этом случае собственные значения — те же, что и в отсутствие магнитного поля, т. е. при $\Phi = 0$:

$$J_{|m|}(kb)N_{|m|}(ka) - J_{|m|}(ka)N_{|m|}(kb) = 0.$$

Таким образом, при использовании неоднозначных волновых функций наличие магнитного поля не приводит к наблюдаемым следствиям. По сути дела, вокруг того (141) или иного (143) выбора волновых функций и разгорелась оживленная дискуссия последних лет по существованию АБ-эффекта.

Следующая интересная задача была рассмотрена в работах [44—47]. Пусть имеется постоянное магнитное поле H , направленное вдоль оси z . Ему отвечает следующий вектор-потенциал:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (H \times \boldsymbol{\rho}) = -\frac{1}{2} H \rho \mathbf{e}_\varphi.$$

Волновые функции и собственные значения уравнения Шредингера с таким вектор-потенциалом равны:

$$\Psi_{N, m}^0 \sim \rho^{|m|} L_N^{|m|} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \exp \left(- \frac{\rho^2}{4} \right) \exp (im\varphi),$$

$$E_0(N, m) = \frac{1}{2} (2N + 1 + |m| - m) \quad (144)$$

(E — в единицах $\hbar\omega$, ρ — в единицах $\frac{\hbar}{\sqrt{m\omega}}$, $\omega = \frac{eH}{mc}$). Поместим теперь в начало координат бесконечно тонкий цилиндрический соленоид с осью симметрии вдоль оси z . Тогда

$$\Psi_{N, m}^\gamma \sim \rho^{|m-\gamma|} L_N^{|m-\gamma|} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \exp \left(- \frac{\rho^2}{4} \right) \exp (im\varphi),$$

$$E_\gamma(N, m) \sim \frac{1}{2} (2N + 1 + |m - \gamma| + \gamma - m). \quad (145)$$

Пусть для определенности $0 < \gamma < 1$. Тогда при $m > 1$ энергетический спектр одинаков при наличии и отсутствии соленоида. При $m \leq 0$ спектры разнятся:

$$E_0 = N - m + 1/2, \quad E_\gamma = N - m + \gamma + 1/2.$$

Отметим существенное различие волновых функций (144) и (145). Например, дипольный матричный элемент в отсутствие соленоида

$$\langle \Psi_{N', m+1}^0 | x + iy | \Psi_{Nm}^0 \rangle$$

отличен от нуля только при $N' = N, N - 1$. Тот же матричный элемент при наличии соленоида ($m = 0$)

$$\langle \Psi_{N', 1}^\gamma | x + iy | \Psi_{N0}^\gamma \rangle$$

отличен от нуля при всех N' . Это означает, что в дополнение к переходам, связанным с циклотронными резонансами ($N \rightarrow N, N \rightarrow N + 1$), возникает бесконечное число переходов, обязанных отличию γ от нуля. Этот эффект может быть проверен экспериментально. В меняющемся со временем электрическом поле должны наблюдаться переходы между состояниями $\Psi_{N, 0}^\gamma, \Psi_{N', 1}^\gamma$.

11. ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКЕ ЭФФЕКТА ААРОНОВА — БОМА

Мы сознательно оставляем в стороне ранние эксперименты по обнаружению АБ-эффекта, выполненные на одном цилиндрическом соленоиде. Наличие утечек магнитного поля, обязанных как конечности длины соленоида, так и несовершенству его обмотки, вызывало справедливую критику и приводило к неопределенности в интерпретации результатов эксперимента [48].

В настоящее время наиболее совершенными экспериментами по обнаружению магнитного АБ-эффекта являются опыты Тономуры с магнитным полем тороидальной конфигурации [49]. При рассеянии электронов наблюдался сдвиг интерференционной картины при изменении потока магнитного поля внутри тороида. Чтобы предотвратить проникновение электронов в область с $H \neq 0$, последняя экранировалась сверхпроводящим слоем и слоем меди. Утечки магнитного поля контролировались магнитным интерферометром. Они казались чрезвычайно малыми. Несмотря на это, в физической литературе было высказано предположение, что они могут симулировать АБ-эффект. В разд. 9 мы показали, что это весьма маловероятно. Следующий эксперимент был предложен в работе [38], который как-будто

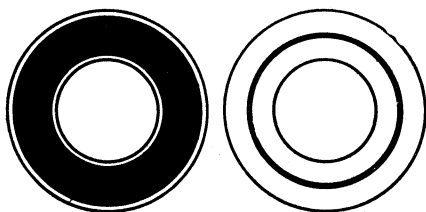


Рис. 14. Две конфигурации тороидального магнитного поля внутри тороидального потенциального барьера, которые идентичны с точки зрения обычной квантовой механики, но отличаются с альтернативной точки зрения на АБ-эффект

позволяет рассеять упомянутые сомнения в существовании АБ-эффекта. Он основан на следующем замечании. Обратимся к выражениям (131), (132), которые определяют вклад f_m магнитного поля в полную амплитуду рассеяния f . Последняя является суммой амплитуды рассеяния в отсутствие магнитного поля f_0 и f_m . Из (131), (132) следует, что f_m зависит от радиуса дыры тора a и магнитного потока Φ . Амплитуда f_0 зависит только от параметров тора, содержащего соленоид (т. е. от a и радиуса сечения тора R). Тогда при фиксированных a , R и Φ можно менять параметры соленоида без изменения f . Это иллюстрирует рис. 14, где показаны две конфигурации, которые совершенно эквивалентны с обычной квантовомеханической точки зрения [в рамках которой выражения (131), (132) были получены], которая объясняет АБ-эффект рассеянием на областях пространства с $H = 0$, $A \neq 0$. С другой стороны, эти две конфигурации отличны с точки зрения альтернативной интерпретации АБ-эффекта (см. разд. 9). В самом деле, вероятность проникновения падающих частиц в область с $H \neq 0$ значительно больше для конфигурации, показанной на левой части рис. 4, чем для конфигурации, показанной справа.

Представляет также интерес экспериментальное изучение рассеяния заряженных частиц на тороидальном соленоиде, помещенном в непроницаемую сферу (рис. 9) или в одно из плеч непроницаемого тора (рис. 10). Обычное квантовомеханическое рассмотрение предсказывает в обоих случаях нулевой вклад магнитного поля в амплитуду рассеяния. С другой стороны, этот вклад отличен от нуля в рамках альтернативной интерпретации АБ-эффекта.

Пусть виток провода радиуса b охватывает цилиндрический соленоид радиуса $R < b$. Тогда сопротивление витка провода (несмотря на то, что он целиком расположен в области, где $H = 0$) является периодической функцией потока Φ магнитного поля H внутри соленоидов. Этот эффект наблюдался экспериментально [50]. Таким образом, можно говорить о силовом воздействии вектор-потенциала. Например, при изменении A может сработать спусковое устройство, включенное в цепь витка с током, расположенное в области $H = 0$. По этим вопросам имеется прекрасный обзор и его русский перевод [51].

В работах [52] был предложен следующий эксперимент по проверке возможности наблюдения нецелых значений углового момента. Цилиндрический соленоид окружается сверхпроводящим цилиндром. Тогда при допущении возможности нецелого квантования углового момента (т. е. для неоднозначных волновых функций) во внешнем цилиндре должен возникать магнитный поток

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} \frac{neH}{c}. \quad (146)$$

Здесь Φ_0 — магнитный поток внутри соленоида. При использовании однозначных волновых функций в сверхпроводящем цилиндре возникает магнитный поток

$$\Phi' = \frac{1}{2} \frac{neH}{c}. \quad (147)$$

Отличие (146) от (147) может быть проверено экспериментально.

«Решающие» эксперименты по проверке существования АБ-эффекта. Следующий эксперимент как будто позволяет однозначно подтвердить или опровергнуть существование АБ-эффекта [53]. Он основывается на следующем теоретическом предсказании: при определенных условиях наличие недоступных для частиц полей (например, магнитного поля H внутри непроницаемого соленоида) может привести к уменьшению плотности и тока вероятности в доступных для частиц областях пространства. Рассмотрим, например, бесконечный цилиндрический соленоид радиуса a , окруженный непроницаемым цилиндром радиуса R . В отсутствие тока в соленоиде волновая функция Ψ_0 определяется соотношением (1). На больших расстояниях Ψ_0 отличается от падающей плоской волны $\exp(i kx)$ членами порядка $(R/\rho)^{1/2}$. Это же относится и к наблюдаемым величинам $\Psi\Psi$ и $j = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi\nabla\bar{\Psi} - \bar{\Psi}\nabla\Psi)$. Включим теперь ток в соленоиде. Тогда волновая функция Ψ определяется соотношением (2). Ааронов и Бом показали, что для точечного неэкранированного соленоида, расположенного в начале координат, при падающей волне, распространяющейся вдоль отрицательной полуоси x , волновая функция исчезает на положительной полуоси x при $\gamma = 1/2$. Этот замечательный факт имеет место и для конечного экранированного соленоида.

В самом деле, полагая в (2) $\gamma = 1/2$ и перегруппировывая члены суммы (что возможно из-за ее абсолютной сходимости), мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\frac{1}{2}} &= \Psi_{AB}^{1/2} + \Psi_s^{1/2}; \\ \Psi_{AB}^{1/2} &= -2 \exp\left(\frac{i\varphi}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} i^m J_{m+\frac{1}{2}}(k\rho) \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi; \\ \Psi_s^{1/2} &= 2 \exp\left(\frac{i\varphi}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} i^m H_{m+\frac{1}{2}}^{(1)}(k\rho) \times \\ &\quad \times \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(kR)}{H_{m+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR)} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi. \end{aligned} \right\} (148)$$

Отсюда следует, что $\Psi_{\frac{1}{2}} = \Psi_{AB}^{1/2} = \Psi_s^{1/2} = 0$ на положительной полуоси x ($\varphi = 0$). При $\rho \rightarrow \infty$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{AB}^{1/2} &= -i \exp\left(ikx + \frac{i\varphi}{2}\right) + \frac{i \exp(i\varphi/2) \exp(ik\rho)}{\left(1 - 2\pi i k \rho \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{1/2}}; \\ \Psi_s^{1/2} &= \frac{\exp(ik\rho)}{\sqrt{\rho}} f_{\frac{1}{2}}(\varphi); \\ f_{\frac{1}{2}}(\varphi) &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi i k}} \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(kR)}{H_{m+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR)} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi. \end{aligned} \right\} (149)$$

Итак, волновая функция (а также наблюдаемые $|\Psi|^2$ и j) при $\gamma = 1/2$ исчезает на положительной полуоси x позади соленоида. Это приводит к следующей схеме эксперимента (рис. 15). Поместим за соленоидом

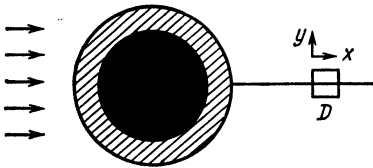


Рис. 15. Цилиндрический соленоид (зачернен) окружен непроницаемым цилиндром (заштрихован). При начальном волновом векторе вдоль оси x и $\gamma = 1/2$ скорость счета детектора D , расположенного на оси x позади цилиндра, равна нулю

детектор D . В отсутствие тока в соленоиде за счет дифракции падающих частиц имеется конечная вероятность попадания частиц в детектор D . При $\gamma = 1/2$ скорость счета идеального детектора D должна упасть до нуля. Реальный детектор имеет конечные размеры. Обсудим возникающие из-за этого осложнения. Отметим прежде всего, что наибольшее искажение волновой функции магнитным полем имеет место при малых kR . Для этого достаточно сравнить волновую

функцию и амплитуду рассеяния при нулевом магнитном поле:

$$\Psi_s^0 \approx -H_0^{(1)}(k\rho) \left[1 + \frac{2i}{\pi} \left(\ln \frac{kR}{2} + C \right) \right]^{-1}, \quad C = 0,577 \dots;$$

$$f_0(\varphi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \left[1 + \frac{2i}{\pi} \left(\ln \frac{kR}{2} + C \right) \right]^{-1}$$

и при $\gamma \left(\equiv \frac{e\Phi}{hc} \right) = \frac{1}{2}$:

$$\Psi_s^{1/2} = -2 \exp\left(\frac{i\varphi}{2} - \frac{i\pi}{4}\right) kRH_1^{(1)}(k\rho) \sin(\varphi/2);$$

$$f_{\frac{1}{2}}(\varphi) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \exp\left(\frac{i\varphi}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) kR \sin(\varphi/2).$$

При больших энергиях пользоваться представлением волновой функции в виде рядов (1), (2), (148), (149) нецелесообразно, поскольку они содержат много знакопеременных членов. В этом случае адекватным является приближение Кирхгофа. Для части Ψ_s^0 волновой функции, описывающей рассеянную волну ($\Psi_0 = \exp(ikx) + \Psi_s^0$), получаем

$$\Psi_s^0(x, y) = -\frac{k}{4} \int_{-R}^R dy' \left[H_0^{(1)}(kt) + \frac{ix}{t} H_1^{(1)}(kt) \right], \quad t = \sqrt{x^2 + (y - y')^2}.$$

При $k\rho \rightarrow \infty$:

$$\Psi_s^0 = -\left(\frac{k}{8\pi i}\right)^{1/2} \int_{-R}^R dy' \frac{\exp(ikt)}{\sqrt{t}} (1 + x/t). \quad (150)$$

При $k \rightarrow \infty$ и фиксированных R, ρ подынтегральное выражение быстро осциллирует. При $|y| < R$ значение интеграла в (150) определяется вкладом стационарной точки $y' = y$. Используя метод стационарной фазы, получаем

$$\Psi_s^0 \approx -\exp(ikx) \quad (k \rightarrow \infty, |y| < R, x > 0).$$

Подставляя это выражение в Ψ_0 , получаем: $\Psi_0 \approx 0$, т. е. за соленидом возникает геометрическая тень. При $\rho \gg R$ из (150) следует

$$\Psi_s^0 = -\sqrt{\frac{k}{8\pi i\rho}} (1 + \cos\varphi) \int_{-R}^R \exp(ikt) dy'. \quad (151)$$

При $\rho \rightarrow \infty$ и фиксированном k имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_s^0 &= \frac{\exp(ik\rho)}{\sqrt{\rho}} f_0(\varphi); \\ f_0(\varphi) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{\sin(kR \sin\varphi)}{\sin\varphi} (1 + \cos\varphi); \\ \sigma_0(\varphi) &= \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{\sin(kR \sin\varphi)}{\sin\varphi} (1 + \cos\varphi) \right]^2. \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

Приближение Кирхгофа работает (см., например, [34]), если длины волн падающих частиц малы по сравнению с размером препятствий, на которых происходит рассеяние (в данном случае это соответствует случаю $kR \gg 1$). Вычисленные в этом приближении поля отличаются от точных только в непосредственной близости от рассеивателя. Численные расчеты [54] показывают, что приближение Кирхгофа удовлетворительно работает при $kR \approx 2 \div 3$. В типичных экспериментах [55] по рассеянию электронов на цилиндрическом соленоиде E (энергия электронов) ≈ 20 кэВ, $R \approx 10^{-4}$ см. Это дает $k = 10^{10}$ см $^{-1}$, $kR \sim 10^6$. Поэтому применимость приближения Кирхгофа сомнений не вызывает.

При конечных значениях kR и $k\rho \gg 1$ волновая функция и сечение рассеяния в отсутствие магнитного поля осциллируют с периодом

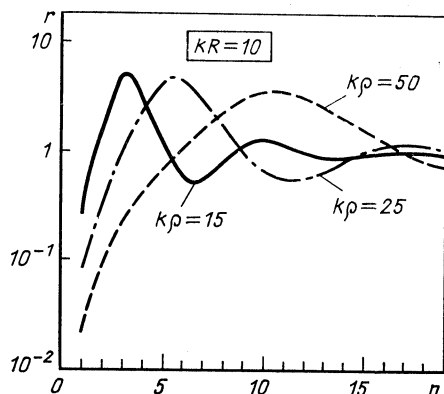
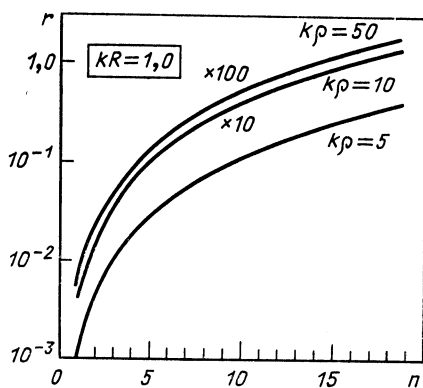


Рис. 16. Численная иллюстрация влияния магнитного поля на вероятность регистрации частиц. Область тени разбивалась на 40 равных частей. В каждой из этих точек квадрат абсолютного значения волновой функции при $\gamma = 1/2$ относился к квадрату абсолютного значения волновой функции в отсутствие магнитного поля, взятой на оси x при том же значении ρ . Значение $kR = 1$. Значения $k\rho$ указаны у каждой из кривых

Рис. 17. То же, что на рис 16, но при $KR = 10$

π/kR [см. (152)]. Амплитуда осцилляций особенно велика при малых значениях ϕ , т. е. в области за соленоидом. Введение непроницаемой перегородки, совпадающей с частью плоскости $y = 0$, простирающейся от $x = R$ до $x = \infty$ (это эквивалентно наличию внутри непроницаемого цилиндра магнитного потока Φ , удовлетворяющего условию $\gamma = e\Phi/hc = 1/2$), сильно меняет дифракционную теорию. Из-за осцилляций резкое уменьшение волновой функции имеет место только в непосредственной близости плоскости $y = 0$. Вычислим теперь $|\Psi|^2$ при конечных значениях kR и $k\rho$. Для этого воспользуемся волновыми функциями Ψ_0 и $\Psi_{1/2}$, определенными соотношениями (1) и (148). На рис. 16, 17 представлены результаты вычислений [56]

при $kR = 1$ и $kR = 10$ для различных значений kr , показанных на рисунках. При каждом значении kr область геометрической тени ($0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{R}{\rho}$) разбивалась на сорок равных частей. Поскольку абсолютные значения волновых функций при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$ не меняются при изменении знака φ , то достаточно вычислить волновые функции при $\varphi > 0$ в каждой из 21 точки $\varphi_n = \frac{n-1}{21} \arcsin \frac{R}{\rho}$ ($1 \leq n \leq 21$). Для каждого φ_n с помощью выражения (148) вычислялась плотность вероятности $|\Psi_{\frac{1}{2}}(\rho, \varphi = \varphi_n)|^2$. Для удобства она

относилась к квадрату абсолютного значения волновой функции в отсутствие магнитного поля, взятой на оси x при том же значении ρ . Таким образом, на рис. 16, 17 по оси ординат отложено отно-

шение $r = \frac{|\Psi_{\frac{1}{2}}(\rho, \varphi = \varphi_n)|^2}{|\Psi_0(\rho, \varphi = 0)|^2}$, по оси абсцисс — номер зоны n , для которой вычисляется угол φ_n . Как и следовало ожидать, с ростом R и ρ возникают осцилляции. При этом область малости $|\Psi_{\frac{1}{2}}|^2$ сужает-

ся. При $kR \gg 1$ и $kr \gg 1$, что соответствует условиям экспериментов (см. [55]), область за соленоидом оказывается в геометрической тени. В ней волновая функция очень мала. Поэтому введение упомянутой непроницаемой перегородки, лежащей в плоскости $y = 0$ и простирающейся от $x = R$ до $x = \infty$ (что, как мы видели, эквивалентно созданию внутри соленоида магнитного потока Φ с $\gamma = e\Phi/\hbar c = 1/2$), практически ничего не изменит в этой области. В обоих случаях, т. е. при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$, скорость счета детекторов, помещенных за соленоидом, будет крайне мала. С первого взгляда может показаться, что реализация предложенных в [53] экспериментов по проверке существования АБ-эффекта в таких условиях бессмысленна. Тем не менее это не так. Дело в том, что при постановке экспериментов [55] широко используются отрицательно заряженные электростатические системы (так называемые бипризмы Френеля), которые отклоняют пучок электронов к оси x . Эффективно это приводит к уменьшению волнового числа k [57]. В результате в области тени возникает интерференционная картина. При симметричном относительно плоскости $y = 0$ положении бипризм волновая функция по-прежнему обращается в нуль в плоскости $y = 0$ ($R < x < \infty$). Этот факт может быть проверен экспериментально.

Ранее мы видели, что при $\gamma = 1/2$ волновая функция обращается в нуль между двумя соленоидами с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и в экваториальной плоскости ($z = 0$) тороидального соленоида $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$. Из этого факта следует, что детекторы частиц (D_1 , см. рис. 6, 18), установленные в местах исчезновения волновой функции, должны перестать регистрировать частицы при $\gamma = 1/2$. С другой стороны, скорость счета детекторов, установленных за двумя соленоидами с $\Phi_1 = -\Phi_2$

и за тороидальным соленоидом (D_2 , см. рис. 6, 18), примерно одна и та же при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$.

Фраунгоферовская дифракция на двух цилиндрических и тороидальном соленоидах. Ранее были получены амплитуды рассеяния заряженных частиц на магнитном поле двух цилиндров с $\Phi_1 = -\Phi_2$ (рис. 2) и на магнитном поле тороидального соленоида (рис. 5). Однако на эксперименте измеряется не сечение рассеяния $\sigma_m = |f_m|^2$ на магнитном поле соленоида, а сдвиг дифракционной

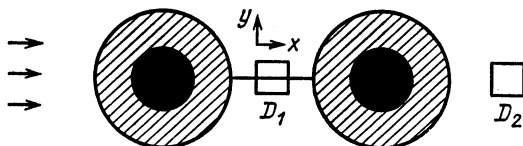


Рис. 18. Два цилиндрических соленоида с $\Phi_1 = -\Phi_2 = \Phi$ окружены непроницаемыми цилиндрическими барьерами (заштрихованы). Падающая волна распространяется вдоль оси x . При $\gamma = \frac{e\Phi}{\hbar e} = \frac{1}{2}$ волновая функция исчезает на отрезке оси x , лежащем между цилиндрами. Поэтому скорость счета детектора D_1 падает до нуля

картины, обязанной магнитному потоку внутри соленоида. Для этого необходимо найти сечения рассеяния при отсутствии ($\sigma_0 = |f_0|^2$) и наличии магнитного поля внутри соленоида ($\sigma_\gamma = |f_0 + f_m|^2$), сравнить их между собой и с экспериментально наблюдаемым сдвигом дифракционной картины.

В приближении Кирхгофа амплитуда и дифференциальное сечение рассеяния на двух непроницаемых цилиндрах радиуса R [оси цилиндров проходят через точки $\pm d$ ($d > R$) оси y параллельно оси z , начальный волновой вектор вдоль оси x , рис. 2] равны [56]:

$$\left. \begin{aligned} f_0^{2c} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(kR \sin \varphi) \cos(kd \sin \varphi); \\ \sigma_0^{2c} &= \frac{2}{\pi k} \left[\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(kR \sin \varphi) \cos(kd \sin \varphi) \right]^2. \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Для сечения рассеяния на непроницаемом торе $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$ (начальный волновой вектор вдоль оси z , рис. 5) имеем соответственно:

$$\begin{aligned} f_0^T &= \frac{i}{2} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \{ (d + R) J_1[k(d + R) \sin \theta] - (d - R) J_1[k(d - R) \sin \theta] \}; \\ \sigma_0^T &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \{ (d + R) J_1[k(d + R) \sin \theta] - \\ &\quad - (d - R) J_1[k(d - R) \sin \theta] \}^2. \end{aligned} \quad (154)$$

Полная амплитуда рассеяния на соленоиде, окруженном непроницаемым барьером, складывается из амплитуды рассеяния f_0 в отсутствие

магнитного поля и амплитуды рассеяния f_m на магнитном поле вне непроницаемого барьера. В качестве f_m можно взять амплитуды рассеяния, полученные в разд. 5 [см. (97), (102) и 6 [см. (131), (132)], или амплитуды, найденные в [56] с помощью дираковского фазового множителя [12, 13]:

$$f_m^D = -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} [1 - \exp(2i\pi\gamma)] \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin [k(d - R) \sin \varphi]$$

для двух цилиндров с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и

$$f_m^D = \frac{i}{2} [1 - \exp(2i\pi\gamma)] (d - R) \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} J_1 [k(d - R) \sin \theta]$$

для тороидального соленоида.

Для полных амплитуд и сечений рассеяния получаем

$$\begin{aligned} f_\gamma^{2c} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \{ \sin [k(d + R) \sin \varphi] - \\ &\quad - \exp(2i\pi\gamma) \sin [k(d - R) \sin \varphi] \}, \\ \sigma_\gamma^{2c} &= \frac{2}{\pi k} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^2 [\sin^2(kd \sin \varphi) \cos^2(kR \sin \varphi) \sin^2 \pi\gamma + \\ &\quad + \sin^2(kR \sin \varphi) \cos^2(kd \sin \varphi) \cos^2 \pi\gamma] \end{aligned} \quad (155)$$

— для двух цилиндров с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и

$$\begin{aligned} f_\gamma^T &= \frac{i}{2} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \{ (d + R) J_1 [k(d + R) \sin \theta] - \\ &\quad - \exp(2i\pi\gamma) (d - R) J_1 [k(d - R) \sin \theta] \}, \\ \sigma_\gamma^T &= \sigma_0^T + \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 (d^2 - R^2) \sin^2 \pi\gamma J_1 [k(d + R) \sin \theta] \times \\ &\quad \times J_1 [k(d - R) \sin \theta] \end{aligned} \quad (156)$$

— для тороидального соленоида. Сечение σ_0^T определено в соотношении (154). Нас особо будет интересовать случай $\gamma = 1/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{1}{2}}^{2c} &= \frac{2}{\pi k} \left[\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(kd \sin \varphi) \cos(kR \sin \varphi) \right]^2, \\ \sigma_{\frac{1}{2}}^T &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \{ (d + R) J_1 [k(d + R) \sin \theta] + \\ &\quad + (d - R) J_1 [k(d - R) \sin \theta] \}^2. \end{aligned} \quad (157)$$

Выясним теперь, к каким экспериментальным следствиям приводит изучение рассеяния электронов на двух соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2$. Из (153) следует, что в отсутствие магнитного поля ($\gamma = 0$) сечение рассеяния на двух цилиндрах (рис. 2) имеет два семейства нулей при углах, определяемых соотношениями

$$\sin \varphi_n^{(R)} = \frac{h\pi}{kR}, \quad \sin \varphi_n^{(d)} = \frac{h + \frac{1}{2}}{kd} \pi,$$

или (для не слишком больших углов)

$$\varphi_n^{(R)} = \frac{n\pi}{kR}, \quad \varphi_n^{(d)} = \frac{n + \frac{1}{2}}{kd} \pi. \quad (158)$$

С другой стороны, при $\gamma = 1/2$ [см. (157)]:

$$\varphi_n^{(R)} = \frac{n + \frac{1}{2}}{kR} \pi, \quad \varphi_n^{(d)} = \frac{n\pi}{kd} \pi. \quad (159)$$

Из сравнения (158) и (159) заключаем, что включение магнитного поля приводит (при $\gamma = 1/2$) к сдвигу нулей первого семейства на величину $\frac{\pi}{2kR}$, а второго — на $\frac{\pi}{2kd}$. Однако на опыте видят не мини-

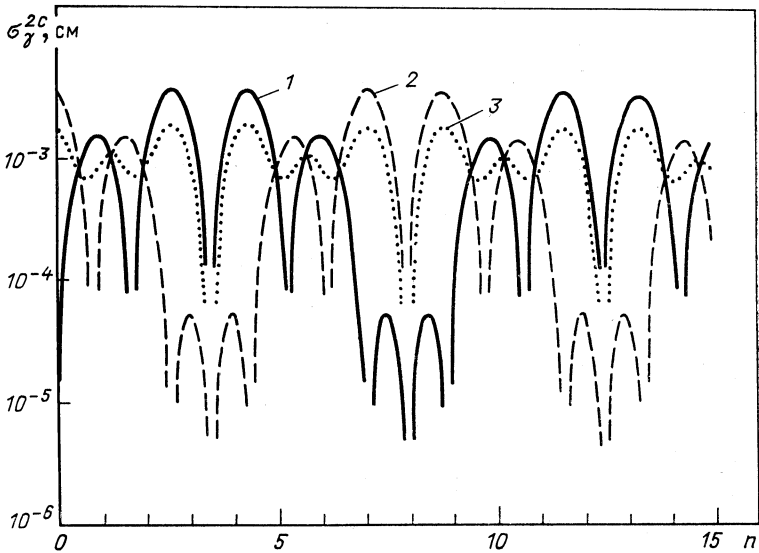


Рис. 19. Угловая зависимость сечения рассеяния электронов на двух соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2$. В рамках френелевской теории дифракции сплошная кривая отвечает значению $\gamma = 0$, прерывистая $\gamma = 0,5$, пунктирная $\gamma = 0,25$. Ситуация радикально меняется при использовании адекватной френелевской теории. Если расстояние от начала координат до места регистрации (см. рис. 1) равно 106,4, то френелевская теория дифракции в точности воспроизводит результаты френелевской теории с теми же значениями γ . При $\rho \approx 91$ кривая 1 соответствует $\gamma = 0,5$; кривая 2 — $\gamma = 0$; кривая 3 — $\gamma = 0,25$. При $\rho = 98$ значениям $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5$ соответствует одна и та же кривая 3

муму, а максимумы сечений. На рис. 19 изображены сечения, вычисленные при следующих параметрах: $k = 2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-1}$, $R = 10^{-4} \text{ см}$, $d = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$. По оси абсцисс отложены целые числа n , следующим образом связанные с углом рассеяния: $\varphi = (0,01 + 10^{-5} \cdot n)$ град.

Например, цифре 5 соответствует угол $\varphi = (0,01 + 5 \cdot 10^{-5})$ град. По оси ординат отложено сечение σ_y^{2c} [см. (155)] в сантиметрах. Сечения вычислялись при $\gamma = 0$ (кривая 1), $\gamma = 1/2$ (кривая 2) и $\gamma = 1/4$ (кривая 3). Для большей наглядности в верхней части рис. 20 представлены положения максимумов сечений и их величины. Сами

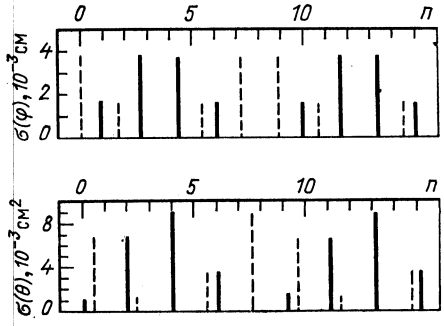


Рис. 20. Положения и значения максимумов сечений на двух цилиндрических соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2$ (верхняя часть рисунка) и на тороидальном соленоиде (нижняя часть): сплошные вертикальные отрезки соответствуют $\gamma = 0$, прерывистые $\gamma = 0,5$. Показаны только те максимумы, значения которых превосходят 10^{-3}

максимумы показаны вертикальными отрезками, длины которых совпадают с величиной сечения в максимуме. Сплошным отрезкам соответствует $\gamma = 0$, прерывистым — $\gamma = 0,5$.

Обратимся теперь к тороидальному соленоиду. Поскольку в реальных экспериментах (которые обсуждаются ниже) $kd \gg 1$ и $kR \gg 1$, то в сечениях (154), (157) при углах рассеяния не слишком малых функций Бесселя можно заменить их асимптотическими выражениями:

$$\sigma_0^T = \frac{1}{2\pi k} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} \left\{ \sqrt{d+R} \sin \left[k(d+R) \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right] - \sqrt{d-R} \sin \left[k(d-R) \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right] \right\}^2;$$

$$\sigma_{\frac{1}{2}}^T = \frac{1}{2\pi k} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} \left\{ \sqrt{d+R} \sin \left[k(d+R) \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \sqrt{d-R} \sin \left[k(d-R) \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right] \right\}^2.$$

Если $R \ll d$, то можно пренебречь R под знаком корня квадратного (но не под знаком синуса, поскольку $kR \gg 1$):

$$\sigma_0^T = \frac{2d}{\pi k} \left[(1 + \cos \theta) \sin(kR \sin \theta) \cos \left(kd \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right]^2 / \sin^3 \theta;$$

$$\sigma_{\frac{1}{2}}^T = \frac{2d}{\pi k} \left[(1 + \cos \theta) \cos(kR \sin \theta) \sin \left(kd \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right]^2 / \sin^3 \theta.$$

Как и для двух цилиндров с $\Phi_1 = -\Phi_2$, имеем два семейства нулевых сечения рассеяния:

$$\theta_n^{(R)} = \frac{n\pi}{kR}, \quad \theta_n^{(d)} = \frac{n - \frac{1}{4}}{kd} \pi \quad (\gamma = 0); \quad (160)$$

$$\theta_n^{(R)} = \frac{n - \frac{1}{2}}{kR} \pi, \quad \theta_n^{(d)} = \frac{n + \frac{1}{4}}{kd} \pi \quad \left(\gamma = \frac{1}{2} \right). \quad (164)$$

В итоге при включении магнитного поля нули первого семейства сдвигаются на $\Delta\theta_R = \pi/2kR$, а второго — на $\Delta\theta_d = \pi/2kd$. Известные эксперименты Тономуры [49] были выполнены при следующих условиях: E (энергия электронов) ≈ 150 кэВ, $R = 10^{-4}$ см, $d = 4 \cdot 10^{-4}$ см. Тогда $k = 2 \cdot 10^{10}$ см $^{-1}$, $kR = 2 \cdot 10^6$, $kd = 8 \cdot 10^6$. Это дает: $\Delta\theta_R = 8 \cdot 10^{-7}$, $\Delta\theta_d = 2 \cdot 10^{-7}$. В обсуждаемых экспериментах наблюдался сдвиг интерференционной картины в плоскости, перпендикулярной волновому вектору падающей волны (т. е. в плоскости $z = \text{const}$). К сожалению, авторы [49] не указывают расстояния от объекта рассеяния (тороидального соленоида) до места регистрации. Исходя из имеющегося в этой работе рисунка установки, примем это расстояние $r = 1$ м. Тогда имеем для сдвига уровней первого семейства $\Delta z_R = r\Delta\theta_R \approx 0,8$ мкм, а для второго $\Delta z_d = r\Delta\theta_d \approx 0,2$ мкм. Примерно такие сдвиги наблюдались в интерферограммах, приведенных в [49]. Типичная угловая зависимость сечения показана на рис. 21. Сечения вычислялись при параметрах опыта Тономуры. Началу координат соответствует угол $\varphi = 0,01^\circ$, шаг по оси абсцисс равен 10^{-5} . По оси ординат отложены сечения, вычисленные по формулам (154), (157). Сплошная кривая соответствует $\gamma = 0$, прерывистая $\gamma = 0,5$. Как и для рассеяния на двух цилиндрах, отчетливо виден сдвиг дифракционной картины при включении магнитного поля. Для большей наглядности на нижней части рис. 20 представлены положения максимумов и величины сечений в них.

Френелевская дифракция на двух цилиндрических соленоидах. Представление рассеянной волны в виде произведения расходящейся волны $\left(\frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r}} \right)$ — для двумерного случая и $\frac{\exp(ikr)}{r}$ — для трехмерного) и функции, зависящей только от углов, имеет место только на достаточно больших удалениях от рассеивателя. При этом наряду с условиями $kr \gg 1$ и $R/r \ll 1$ (которые мы всегда считаем справедливыми) должны выполняться условия: $kR^2/r \ll \pi$ (для одного цилиндрического соленоида) и $kdR/r \ll \pi$ (для двух цилиндрических соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и для тороидального соленоида). В оптике рассеяние света при таких условиях называется дифракцией Фраунгофера [34]. В выполненных экспериментах на одном цилиндрическом соленоиде [55] имеем $kR^2/r \approx 5$. Как мы уже упомянули, в работах Тономуры [49] не приводится расстояние от тороидального соленоида до места регистрации. Для определенности примем его равным,

как и выше, 1 м. Тогда $kdR/r \approx 8$. Ввиду этого полученные выше выводы о сдвиге интерференционной картины носят качественный характер. Поскольку величина kdR/r не мала по сравнению с π , то в волновой функции должен быть учтен вклад этих членов. На оптическом языке это соответствует дифракции Френеля [34]. Члены более высокого порядка ($kdR^3/\rho^2 \approx 3 \cdot 10^{-5}$ — для одного соленоида

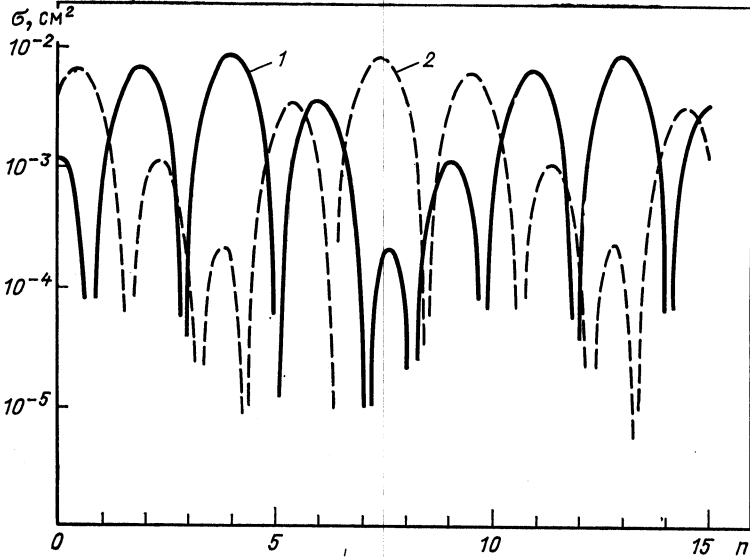


Рис. 21. Угловые сечения рассеяния электронов на тороидальном соленоиде, вычисленные в рамках фраунгоферовской теории дифракции: 1 — $\gamma = 0$; 2 — $\gamma = 0,5$. Масштаб по оси абсцисс тот же, что и на рис. 19

и $kdR^2/r^2 \approx 8 \cdot 10^{-6}$ — для двух соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и для тороидального соленоида) малы и ими можно пренебречь. Покажем, как меняются сечения рассеяния на примере двух цилиндров с $\Phi_1 = -\Phi_2$. При выполнении условий $kd \gg 1, p \gg d, kdR^2/\rho^2 \ll 1$ волновая функция, соответствующая рис. 2, равна:

$$\Psi_\gamma = \exp(ikx) + \Psi_s, \tag{162}$$

$$\Psi_s = -\frac{1}{2\sqrt{2i}} \frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \exp \left[ik\rho \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \right] (A + iB);$$

$$A = C_1 + C_3 - \cos 2\pi\gamma (C_2 + C_4) + \sin 2\pi\gamma (S_2 + S_4);$$

$$B = S_1 + S_3 - \cos 2\pi\gamma (S_2 + S_4) - \sin 2\pi\gamma (C_2 + C_4). \tag{163}$$

Здесь $C_i = C(\rho_i)$; $S_i = S(\rho_i)$; $C(x)$ и $S(x)$ — обычные интегралы Френеля ($C = \int_0^x \cos \frac{\pi x^2}{2} dx, S = \int_0^x \sin \frac{\pi x^2}{2} dx$). Аргументы ρ_i рав-

ны: $\rho_1 = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left(\frac{d+R}{\rho} \cos \varphi + \operatorname{tg} \varphi \right)$, $\rho_2 = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left(\frac{d-R}{\rho} \cos \varphi + \operatorname{tg} \varphi \right)$,
 $\rho_3 = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left(\frac{d+R}{\rho} \cos \varphi - \operatorname{tg} \varphi \right)$, $\rho_4 = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left(\frac{d-R}{\rho} \cos \varphi - \operatorname{tg} \varphi \right)$.

При $|\operatorname{tg} \varphi| \gg (d+R)/\rho$ выражение (163) упрощается:

$$\Psi_s = \frac{\exp(ik\rho)}{\sqrt{\rho}} f_\gamma(\rho, \varphi);$$

$$f_\gamma(\rho, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \left\{ \exp \left[ik \frac{(d+R)^2}{2\rho} \cos^2 \varphi \right] \times \right.$$

$$\times \sin [k(d+R) \sin \varphi] - \exp(2i\pi\gamma) \exp \left[ik \frac{(d-R)^2}{2\rho} \cos^2 \varphi \right] \times$$

$$\left. \times \sin [k(d-R) \sin \varphi] \right\}. \quad (164)$$

Если детектор находится вне падающего пучка (D_1 , рис. 22), то $|f_\gamma|^2$ (с точностью до членов порядка $[(d+R)/\rho]^2$) совпадает с диффе-

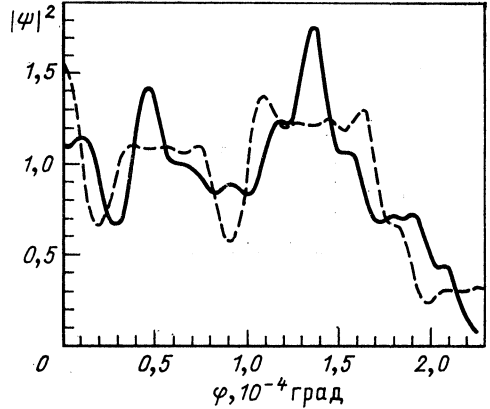
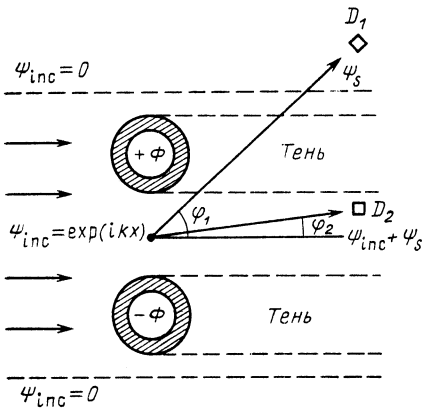


Рис. 22. Измерение дифракционных сечений с помощью детекторов, находящихся в разных физических условиях

Рис. 23. Плотность вероятности волновой функции для рассеяния электронов на двух соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2$ в рамках френелевской теории дифракции. Расстояние $\rho = 106,1$:

сплошная кривая $\gamma = 0$; прерывистая $\gamma = 0,5$. По оси абсцисс отложен угол рассеяния 10^{-4} град

ренциальным потоком через цилиндрическую поверхность радиуса ρ и является аналогом дифференциального сечения для конечных значений ρ :

$$\tilde{\sigma}_\gamma^{2c}(\rho, \varphi) = \frac{2}{\pi k} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^2 \left[\sin^2(kd \sin \varphi) \cos^2(kR \sin \varphi) \sin^2(\omega - \pi\gamma) + \right.$$

$$\left. + \sin^2(kR \sin \varphi) \cos^2(kd \sin \varphi) \cos^2(\omega - \pi\gamma) \right], \quad \omega = \frac{kdR}{\rho} \cos^2 \varphi. \quad (165)$$

Очевидно, при $\rho \rightarrow \infty$ френелевское сечение (165) переходит в фраунгоферовское (155). Нас особо будут интересовать случаи $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$:

$$\tilde{\sigma}_0^{2c} = \frac{2}{\pi k} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^2 [\sin^2(kd \sin \varphi) \cos^2(kR \sin \varphi) \sin^2 \omega + \sin^2(kR \sin \varphi) \cos^2(kd \sin \varphi) \cos^2 \omega]; \quad (166)$$

$$\tilde{\sigma}_{1/2}^{2c} = \frac{2}{\pi k} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^2 [\sin^2(kd \sin \varphi) \cos^2(kR \sin \varphi) \cos^2 \omega + \sin^2(kR \sin \varphi) \cos^2(kd \sin \varphi) \sin^2 \omega]. \quad (167)$$

О неопределенностях и интерпретации данных эксперимента. Остановимся вкратце на осложнениях, которые возникают, если опыты по рассеянию электронов на соленоидах интерпретировать с помощью выражений (153), (154), (156), (157), в которых не учитывается конечность расстояния от рассеивателя до места наблюдения. В качестве иллюстрации рассмотрим опять-таки рассеяние электронов на двух соленоидах с противоположными магнитными потоками. Обычно на эксперименте рассматривается небольшое число дифракционных максимумов и наблюдается их смещение при различных напряженностях магнитного поля внутри соленоидов. Пусть число наблюдаемых дифракционных полос для определенности равно 10. Если параметры k , R и d те же, что и в опытах Тономуры с тороидальным соленоидом, то 10 максимумов занимают интервал углов [см.

(158) и (159)], примерно равный $10 \cdot \frac{\pi}{kd} \approx 2 \cdot 10^{-6}$. Далее пусть φ_0 — угол, в окрестности которого проводится наблюдение рассеянных частиц. Поскольку kdR/ρ (при $\rho = 1$ м) примерно равно восьми, то в выражении (155) в $\sin(\omega - \pi\gamma)$ и $\cos(\omega - \pi\gamma)$ угол φ можно с хорошей точностью заменить φ_0 . Этого нельзя сделать в $kR \sin \varphi$ и $kd \sin \varphi$, поскольку (ввиду $kR \gg 1$ и $kd \gg 1$) они существенно меняются на интервале $10 \pi/kd$. Тогда вместо (155) имеем

$$\tilde{\sigma}_\gamma^{2c} = \frac{2}{\pi k} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^2 [\sin^2(kd \sin \varphi) \cos^2(kR \sin \varphi) \sin^2(\omega_0 - \pi\gamma) + \sin^2(kR \sin \varphi) \cos^2(kd \sin \varphi) \cos^2(\omega_0 - \pi\gamma)], \quad \omega_0 = \frac{kdR}{\rho} \cos^2 \varphi_0. \quad (168)$$

Рассмотрим выражение (168) при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$:

$$\tilde{\sigma}_0^{2c} = \frac{2}{\pi k} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^2 [\sin^2(kd \sin \varphi) \cos^2(kR \sin \varphi) \sin^2 \omega_0 + \sin^2(kR \sin \varphi) \cos^2(kd \sin \varphi) \cos^2 \omega_0]; \quad (169)$$

$$\tilde{\sigma}_{\frac{1}{2}}^{2c} = \frac{2}{\pi k} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^2 [\sin^2(kd \sin \varphi) \cos^2(kR \sin \varphi) \cos^2 \omega_0 + \sin^2(kR \sin \varphi) \cos^2(kd \sin \varphi) \sin^2 \omega_0]. \quad (170)$$

Пусть ω_0 кратно π . Тогда $\tilde{\sigma}_0^{2c} = \sigma_0^{2c}$, $\tilde{\sigma}_{\frac{1}{2}}^{2c} = \sigma_{\frac{1}{2}}^{2c}$. В этом случае находящийся на конечном расстоянии наблюдатель, пользуясь френгоферовскими выражениями (153) и (157), правильно опишет положения максимумов и минимумов сечения при наличии и отсутствии магнитного поля. Пусть теперь ω_0 кратно $\frac{\pi}{2}$ (точнее, равно $n + \frac{1}{2}$) π). Тогда $\tilde{\sigma}_0^{2c} = \sigma_0^{2c}$, $\tilde{\sigma}_{\frac{1}{2}}^{2c} = \sigma_0^{2c}$.

Поэтому наблюдатель, поместив детектор при $\rho = \rho_0$, $\varphi = \varphi_0$, измерив сечение при $\gamma = 1/2$ и сверив его с теоретически предсказанными (153) и (157), заключит, что при наличии магнитного потока с $\gamma = 1/2$ в соленоидах измеренное им сечение совпадает с теоретическим σ_0^{2c} , которое соответствует отсутствию магнитного поля. Отсюда он может сделать вывод, что наличие магнитного поля в недоступных для частиц областях пространства не оказывает влияния на рассеяние, и придет к выводу об отсутствии АБ-эффекта. Могут возразить, что экспериментатор не будет пользоваться теоретическими сечениями (153) и (157), а просто измерит дифракционную картину при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$ и по ее сдвигу будет судить о существовании АБ-эффекта. В самом деле, при ω_0 , целом или полуцелом, сдвиг дифракционной картины правильно воспроизводится френгоферовской теорией. Однако пусть $\rho = \rho_0$ и φ_0 в (169) и (170) таково, что $\omega_0 = \pi(n + 1/4)$. Тогда $\tilde{\sigma}_0^{2c} = \tilde{\sigma}_{\frac{1}{2}}^{2c}$. Это означает, что наблюдатель, поместивший детектор при $\rho = \rho_0$ и $\varphi = \varphi_0$, увидит одну и ту же дифракционную картину при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$. Из этого факта он сделает вывод об отсутствии АБ-эффекта. Вернемся снова к сечениям на рис. 19. Мы уже упоминали, что они отвечают дифракции Френгофера, которая только качественно описывает экспериментальную ситуацию. Пользуясь френгоферовской теорией дифракции и выбирая $\rho = 106,1$ см, $\varphi_0 = 0,01^\circ$ (при этом ω равно целому числу), мы в точности воспроизведем результаты френгоферовской теории дифракции, причем кривым 1, 2, 3 соответствуют значения $\gamma = 0; 0,5; 0,25$. При $\rho = 90,95$ (ω — полуцелое) кривая 1 соответствует $\gamma = 0,5$, а кривая 2 — $\gamma = 0$, кривая 3 по-прежнему соответствует $\gamma = 0,25$. При $\rho \approx 98$ значениям $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5$ соответствует одна и та же кривая 3.

В итоге мы призываем к осторожности при интерпретации результатов экспериментов по рассеянию электронов на соленоидах. Может случиться, что два различных экспериментатора, поместив свои регистрирующие установки на разных удалениях от соленоида, придут к противоположным выводам о существовании АБ-эффекта (один зафиксирует сдвиг дифракционной картины, а второй — нет). В случае рассеяния на двух соленоидах второй наблюдатель должен сдвинуться в радиальном направлении на величину $\Delta\rho = \left(\frac{4\omega_0}{\pi} - 1\right)^{-1}\rho_0$ для получения правильной (в смысле френгоферовской теории) величины дифракционного сдвига при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$.

Измерение интенсивности в прямом пучке. Посмотрим, что увидит наблюдатель при малых углах рассеяния. Поскольку детектор (D_2 , рис. 22) находится в прямом пучке, сечение уже не равно квадрату абсолютного значения коэффициента при расходящейся волне. В соответствии с правилами квантовой механики [58] оно пропорционально радиальной компоненте тока вероятности:

$$\sigma = \frac{m\rho}{\hbar k} j_\rho, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi}) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \bar{\psi} \psi. \quad (171)$$

Подставляя сюда волновую функцию ψ , определенную соотношением (162), и отбрасывая малые по сравнению с kR члены (при условии, что они не стоят под знаком экспоненты), получаем в интересующей нас области углов ($0 \leq \varphi \leq \varphi_0 = \frac{d-R}{\rho}$):

$$\begin{aligned} \sigma = \rho \left[\cos \varphi + \frac{1}{8} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 (A^2 + B^2) - \frac{(1 + \cos \varphi)^2}{2\sqrt{2} \cos \varphi} (A \cos \Delta + B \sin \Delta) \right] - \\ - \frac{e\rho}{\hbar kc} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 (A^2 + B^2) - \right. \\ \left. - \frac{1 + \cos \varphi}{\sqrt{2} \cos \varphi} (A \cos \Delta + B \sin \Delta) \right] A_\rho. \quad (172) \end{aligned}$$

Здесь A и B определены соотношениями (163),

$$\Delta = k\rho \left(\cos \varphi - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) + \frac{\pi}{4}.$$

При малых φ величина $\cos \varphi - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi$ примерно равна $9/24 \varphi^4$.

Беря для φ максимальное значение ($\varphi_0 \approx \frac{d-R}{\rho}$, $\rho \approx 1$ м), получаем $k\rho \left(\cos - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \leq 3 \cdot 10^{-11}$. Поэтому можно положить $\Delta \approx \frac{\pi}{4}$.

Оценим вклад в сечение рассеяния части тока вероятности, пропорциональной вектор-потенциалу \mathbf{A} . Для двух соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ с осями, проходящими через точки $y = \pm d$ (рис. 22), радиальная компонента вектор-потенциала равна

$$A_\rho = \frac{\Phi d \cos \varphi}{\pi(\rho^2 + d^2)} \left[1 - \frac{4\rho^2 d^2}{(\rho^2 + d^2)^2} \sin^2 \varphi \right]^{-1}.$$

Поскольку $\rho \gg d$, $A_\rho \approx \frac{\Phi d \cos \varphi}{\pi \rho^2}$ и $\frac{e\rho}{\hbar ck} A_\rho \approx \rho \frac{e\Phi}{\hbar c} \frac{2d}{k\rho} \approx \rho \frac{e\Phi}{\hbar c} \cdot 5 \cdot 10^{-18}$.

Возьмем для $\frac{e\Phi}{\hbar c}$ то же значение, что и в опытах Тономуры ($\frac{e\Phi}{\hbar c} \approx 5$). Тогда вкладом вектор-потенциала в сечение рассеяния можно пренебречь. В результате σ и $|\psi|^2$ оказываются пропорцио-

нальными ($0 \leq \varphi \leq \frac{d-R}{\rho}$):

$$\sigma = \rho |\psi|^2,$$

$$|\psi|^2 = 1 + \frac{1}{2}(A^2 + B^2) - A - B. \quad (173)$$

На рис. 23—25 показана зависимость $|\psi|^2$ от угла рассеяния для углов, лежащих между соленоидами ($-\varphi_0 < \varphi_0 < \varphi_0$, $\varphi_0 = \frac{d-R}{\rho}$)

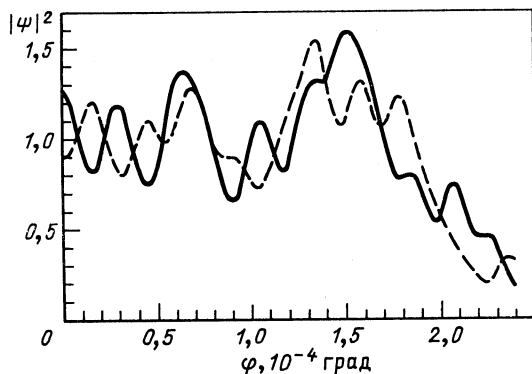


Рис. 24. То же, что на рис. 23, но при $\rho = 98$

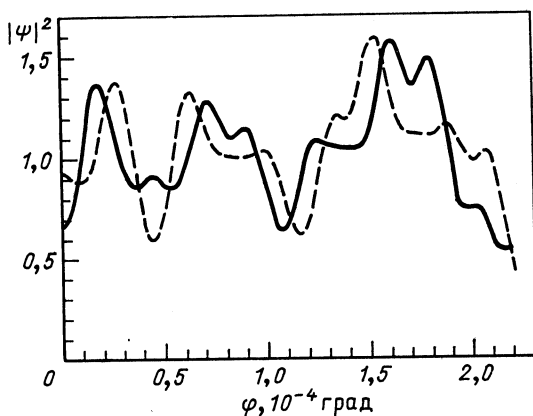


Рис. 25. То же, что на рис. 23, но при $\rho = 91$

при трех значениях ρ (106,1; 98; 90,95). Мы замечаем, что отсутствуют упомянутые выше осложнения, связанные с неопределенностью в интерпретации сдвига дифракционной картины при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5$ (во всяком случае, для рассматриваемых значений ρ). Далее отклонения $|\psi|^2$ от плосковолнового значения (равного 1)

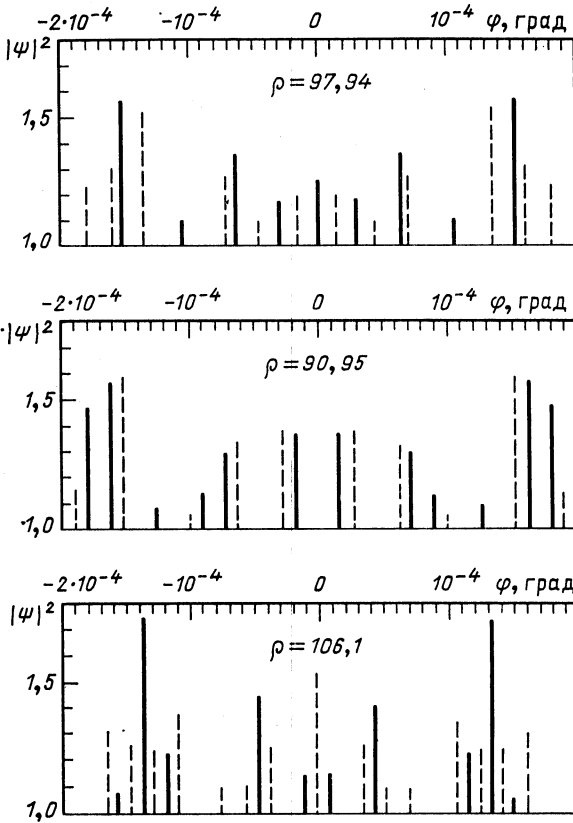


Рис. 26. Положения и максимумы $|\Psi|^2$. Условия те же, что и на рис. 23—25. Показаны только те максимумы, значения которых превышают 1

достигают 70% и могут быть наблюдаемы экспериментально. Достаточно велики и отличия $|\psi|^2$ при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5$. Спад $|\psi|^2$ при $\varphi > 2 \cdot 10^{-4}$ связан с приближением к области тени. На рис. 26 ради наглядности мы приводим положение и величины максимумов $|\psi|^2$ в области между соленоидами. Сплошным кривым соответствует $\gamma = 0$, прерывистым $\gamma = 0,5$. Приведены только те максимумы, значения которых превышают 1.

Мы заключаем: угловая область, лежащая между соленоидами, является наиболее перспективной для количественного подтверждения АБ-эффекта. В этой области отличия сечений при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5$ достаточно велики и могут быть проверены экспериментально. При получении сечения (172) мы предпологали, что при нахождении детектора в прямом пучке невозможно отличить рассеянные частицы от частиц падающего потока. Если же детектор регистрирует только

рассеянные частицы, то в (171) вместо полной волновой функции ψ следует подставить ψ_s [см. (163)]. Тогда при тех же экспериментальных условиях имеем при $|\varphi| < \frac{d-R}{\rho}$:

$$\sigma_s = \frac{1}{8} \rho \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 (A^2 + B^2) \left(1 - \frac{e}{\hbar kc} A_\rho \right).$$

Заключительные замечания об экспериментальной проверке АБ-эффекта. Мы хотели бы здесь указать на настоятельную необходимость количественной проверки АБ-эффекта (который мы понимаем как наблюдаемый эффект недоступных для частиц полей). Дело в том, что существуют альтернативные объяснения сдвига интерференционной картины при включении магнитного поля (см., например, [59—61] и особенно оживленную дискуссию (с. 307—312) после доклада Матеучи и Поцци (с. 297—306) в [62]). Эти объяснения носят качественный характер. Поэтому экспериментальное подтверждение возможно более точных расчетов сдвигов дифракционной картины при включении магнитного поля явилось бы веским аргументом в пользу физической природы вектор-потенциала (крайне невероятно, чтобы различные качественные интерпретации АБ-эффекта приводили к одному и тому же количественному результату). Следующие эксперименты могут, на наш взгляд, устранить упомянутые сомнения в существовании АБ-эффекта:

1) Эксперименты по рассеянию электронов на цилиндрических и тороидальных соленоидах для конфигураций начального волнового вектора, соленоидов и детекторов, показанных на рис. 6, 15, 16. В отсутствие магнитного поля детекторы D , D_1 и D_2 должны регистрировать частицы за счет использования электростатических биризм даже при очень больших kR и kd (которые реализуются на эксперименте). При $\gamma = \frac{e\Phi}{\hbar c} = \frac{1}{2}$ скорость счета детекторов D и D_1 должна резко уменьшиться, тогда как скорость счета детекторов D_2 должна остаться примерно той же, что и в отсутствие магнитного поля.

2) Рассеяние электронов на двух цилиндрических соленоидах с противоположными магнитными потоками при конфигурации начального волнового вектора, соленоидов и детекторов, показанных на рис. 22. Существенно, что имеются достаточно точные расчетные формулы для сечений (см. разд. 11), которые позволяют описать дифракционную картину при нулевой и отсутствии магнитного поля при реалистических размерах экспериментальной установки.

3) Рассеяние электронов на тороидальном соленоиде. К сожалению, прекрасные эксперименты Тономуры [49] только качественно могут быть описаны формулами (154), (156), (157) фраунгоферовской теории дифракции. Оценим расстояния, на которых начинают работать формулы фраунгоферовской теории дифракции. Если мы удовлетворимся значением параметра kdR/ρ , равным 0,1, то при k , d , R

тех же, что и в опытах Тономуры ($k = 2 \cdot 10^{10}$ см $^{-1}$, $R = 10^{-4}$ см, $d = 4 \cdot 10^{-4}$ см), получаем $\rho = 80$ м. Такие размеры нереальны как из-за размеров установки, так и из-за ослабления интенсивности рассеянных частиц. Как мы уже упоминали, адекватной для описания этих экспериментов является френелевская теория дифракции.

Можно ли наблюдать в односвязном пространстве недоступные для частиц поля? Обратимся снова к тороидальному соленоиду, окруженному непроницаемой сферой (рис. 9). Пространство, доступное для частиц, односвязно. Можно ли узнать о существовании магнитного поля, проводя эксперименты вне соленоида? Поскольку нет путей, доступных для частиц, вдоль которых $\oint A_i dl \neq 0$, то в соответствии с работой [42] таких экспериментов не существует. Следующий мысленный эксперимент противоречит этому утверждению. Мы замечаем, что магнитное поле внутри соленоида $\left[H = \frac{\Phi}{2\pi\rho} (d - \sqrt{d^2 - R^2})^{-1} \right]$ приводит к следующему увеличению массы соленоида:

$$\Delta m = \frac{\mathcal{E}_{\text{магн}}}{c^2}, \quad \mathcal{E}_{\text{магн}} = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{8\pi} \frac{\Phi^2}{d - \sqrt{d^2 - R^2}}.$$

Это меняет гравитационное поле вне соленоида. Таким образом, процесс рассеяния частиц с массой выглядит по-разному, когда ток в соленоиде включен и выключен. Это же относится и к параметрам орбит связанных состояний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Литература, посвященная АБ-эффекту, насчитывает тысячи наименований. В силу ограниченности объема обзора за его бортом осталось много интересных вопросов *. Упомянем только некоторые из них.

1) Эффект Ааронова — Карми [63, 64]. Кратко опишем его. Пусть в покоящейся системе координат имеем частицу заряда e и массы m , движущуюся со скоростью v . С точки зрения наблюдателя, находящегося во вращающейся с постоянной угловой скоростью ω системе координат, на частицу действуют сила Кориолиса и центробежная сила. Тогда можно ввести электрическое и магнитное поля, полностью компенсирующие эти силы в области, ограниченной двумя цилиндрами. С точки зрения нашего наблюдателя на частицу не действует сила. Тем не менее инерциальный вектор-потенциал \mathbf{a} ($\omega = \text{rot } \mathbf{a}$) отличен от нуля, что приводит к тем же физическим эффектам (например, к сдвигу интерференционной картины), что и в случае обычного АБ-эффекта. Этот эффект, как ни странно, был

* «То, что я понял, было прекрасно, и поэтому думаю, что то, чего я не понял, — еще прекраснее» (Сократ).

наблюден раньше [64, 65], чем предсказан. Тем самым доказано существование физических эффектов, обязанных неэлектромагнитному вектор-потенциалу.

2) Аналог АБ-эффекта для нейтральных частиц. Ааронов и Кашер [66] предсказали этот эффект, исходя из следующих соображений. Они заметили, что лагранжиан, описывающий взаимодействие заряженной частицы с точечным соленоидом, инвариантен относительно замены координат частицы и соленоида. Отсюда они заключили, что электрически заряженная нить должна воздействовать (как в случае обычного АБ-эффекта, магнитный соленоид действует на заряженную частицу) на нейтральную частицу, обладающую магнитным моментом. В настоящее время ставится эксперимент по проверке этого эффекта. Отметим имеющиеся в литературе сомнения [67] в его существовании.

3) Интерпретация АБ-эффекта в терминах модулярных переменных (см. [68], а также статью Ааронова (с. 10—19) в [26]). Мы уже упоминали, что при рассеянии заряженных частиц на магнитном поле тороидального соленоида, помещенного за непроницаемым экраном между двумя круговыми отверстиями, интерференционная картина отлична при $A = 0$ и $A \neq 0$. Между тем средние от произвольных степеней координат x_i и импульсов P_i и их произведений — одни и те же при $A = 0$ и $A \neq 0$. Для импульсов это, например, означает неизменность скоростей частиц при АБ-рассеянии. В только что упомянутых работах были построены величины, средние от которых были различными при $A = 0$ и $A \neq 0$. Одна из них имела вид $f = \frac{\sin \alpha \mathbf{p}}{\alpha}$. Здесь α — вектор, соединяющий центры отверстий в экране, \mathbf{p} — импульс рассеиваемой частицы. Несмотря на то что при разложении функции f в ряд среднее от каждого члена разложения $(\alpha \mathbf{p})^k$ равно нулю, среднее от функции f не равно нулю. Это же относится и к пределу функции f при $\alpha \rightarrow 0$.

4) Интерпретация АБ-эффекта в терминах фазы Берри [69].

5) АБ-эффект для когерентных состояний. По этому пункту имеется прекрасный обзор [44] на русском языке.

В заключение приведем слова Ф. М. Достоевского («Преступление и наказание»): «... Это могло бы составить тему нового рассказа, — но теперешний рассказ наш окончен».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ehrenberg W., Siday R. // Proc. Roy. Soc. 1949. Vol. B62. P. 8—15.
2. Aharonov Y., Bohm D. // Phys. Rev. 1958. Vol. 115. P. 485—491.
3. Фейнберг Е. Л. // УФН. 1962. Т. 78. С. 53—64.
4. Ruijsenaars S. N. M. // Ann. Phys. (N.Y.) 1983. Vol. 146. P. 1—34.
5. Olariu S., Popescu I. // Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57. P. 339—436.
6. Тютин И. В. // Препринт ФИАН № 27. М., 1974.
7. Скаржинский В. Д. // Краткие сообщения по физике. 1984. № 4. С. 8—12;
- Berry M. V., Chambers R. G., Large M. D. // Eur. J. Phys. 1980. Vol. 1. P. 154—162;
- Kawamura K., Zempo Y., Irie Y. // Progr. Theoret. Phys. 1982. Vol. 67. P. 1263—1277.

8. Corinaldesi E., Rafeli F.//Amer. J. Phys. 1978. Vol. 46. P. 1185—1187;
- Purcell K. M., Henneberger W. C.//Amer. J. Phys. 1978. Vol. 46. P. 1255—1256;
- Henneberger W. C.//Phys. Rev. 1980. Vol. A22. P. 1383—1388; Aharonov Y.,
- Au C. K., Lerner E. C., Liang J. Q.//Phys. Rev. 1984. Vol. D29. P. 2396—2398;
- Nagel B.//Phys. Rev. 1985. Vol. D32. P. 3328—3330.
9. Magnus W., Oberhettinger F., Soni R. P. Formulas and Theorems for the
- Special Functions of Mathematical Physics. Berlin: Springer, 1966.
10. Aharonov Y., Au C. K., Lerner E. C., Liang J. Q.//Phys. Rev. 1984.
- Vol. D29. P. 2396—2398; Nagel B.//Phys. Rev. 1985. Vol. D32. P. 3328—3330;
- Brown R. A.//J. Phys. 1985. Vol. A18. P. 2497—2508.
11. Takabajasi T.//Hadr. Journ. Suppl. 1985. Vol. 1. P. 219—238.
12. Dirac P. A. M.//Proc. Roy. Soc. 1931. Vol. A133. P. 60—72.
13. Berry M. V.//Eur. J. Phys. 1980. Vol. 1. P. 240—244.
14. Блатт Дж., Вайскопф В.//Теоретическая ядерная физика. М.: Изд-во
- иностр. лит. 1954. С. 607.
15. Pauli W.//Helv. Phys. Acta. 1939. Vol. 12. P. 147—168 (См. рус. пер.
- в кн.: В. Паули. Труды по квантовой теории/Под ред. Я. А. Смородинского.
- М.: Наука, 1977. С. 294—314.)
16. Roy S. M., Singh V.//Nuovo cimento. 1984. Vol. 79A. P. 391—409.
17. Henneberger W. C.//J. Math. Phys. 1981. Vol. 22. P. 116—117.
18. Bocchieri P., Loinger A.//Nuovo cimento. 1978. Vol. 47A. P. 475—482;
- Vol. 59A. P. 124—133; 1981. Vol. 66A. P. 164—172; Lett. Nuovo cimento. 1979.
- Vol. 25. P. 476—478; 1982. Vol. 35. P. 469—472; Vol. 39. P. 148—150; Bocchieri P.,
- Loinger A., Siragusa G.//Nuovo cimento. 1979. Vol. 51A. P. 1—17; 1980. Vol. 56A.
- P. 55—72.
19. Wilczek F.//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1144—1149.
20. Jackiw R., Redlich A. N.//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 555—559.
21. Peshkin M.//Phys. Rep. 1981. Vol. 80. P. 375—396; Lipkin H. J., Pesh-
- kin M.//Phys. Lett. 1982. Vol. 118B. P. 385—390.
22. Roy S. M.//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44. P. 111—114.
23. Greenberger D. M.//Phys. Rev. 1981. Vol. 23D. P. 1460—1463; Klein U.//
- Phys. Rev. 1981. Vol. 23D. P. 1463—1465; Lipkin H. J.//Phys. Rev. 1981. Vol. 23D.
- P. 1466—1467.
24. Kobe D. H., Liang J. Q.//Phys. Lett. 1986. Vol. A118. P. 475—477;
- Liang J. Q., Ding X. X.//Phys. Lett. 1987. Vol. A119. P. 325—328;
25. Bawin M., Burnel A.//J. Phys. 1985. Vol. A18. P. 2123—2126.
26. Proc. Intern. Symposium on Foundations of Quantum Mechanics in the
- Light of New Technology/Ed. S. Kamefuchi, Japan Phys. Soc., Tokyo, 1984.
27. Bawin M., Burnel A.//Phys. Lett. 1987. Vol. A122. P. 451—458.
28. Frolov P., Skarzhinsky V. D.//Nuovo cimento. 1983. Vol. B76. P. 32—46;
- Home D., Sengupta S.//Amer. J. Phys. 1983. Vol. 51. P. 942—947.
29. Peshkin M., Talmi I., Tassie L. J.//Ann. Phys. (N.Y.) 1961. Vol. 12.
- P. 426—435.
30. Nagel B.//Fundamental Aspects of Quantum Theory/Eds. V. Gorini,
- A. Frigerio. N.Y.: Plenum Press, 1986. P. 335—337.
31. Афанасьев Г. Н. Препринт ОИЯИ P2-87-154. Дубна, 1987.
32. Bohm D., Hiley V. J.//Nuovo cimento. 1979. Vol. A52. P. 295—308;
- Bohm D., Kaye R. D., Philippidis C.//Nuovo cimento. 1982. Vol. B71. P. 75—88.
33. Olariu S., Popescu I. I.//Phys. Rev. 1986. Vol. D33. P. 1701—1708;
- Rothe H. J.//Nuovo cimento. 1981. Vol. A62. P. 54—67; Afanasiev G. N.//JINR
- Rapid Commun. 1985. Vol. 6. P. 17—26.
34. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970; Мандельштам Л. И.
- Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука,
- 1972.
35. Glauber R.//Lectures in Theor. Physics. Interscience Publ., N.Y., 1954.
- Vol. 1; Ситенко А. Г. Теория рассеяния. Киев: Выща школа, 1975.
36. Море Ф. М., Фешбах Г.//Методы теоретической физики. М.: Изд-во
- иностр. лит., 1960. Т. 2.

37. Afanasiev G. N.//J. Comput. Phys. 1987. Vol. 69. P. 196—208; Афанасьев Г. Н. Препринт ОИЯИ P4-87-106. Дубна, 1987.
38. Афанасьев Г. Н. Препринт ОИЯИ P4-87-107. Дубна, 1987. Afanasiev G. N.//J. Physics. 1988. Vol. A21. P. 2095—2110.
39. Любоиц В. Л., Смородинский Я. А.//ЖЭТФ. 1978. Т. 75. С. 40—45. Препринт ОИЯИ P2-11189. Дубна, 1978.
40. Tassie L. J.//Phys. Lett. 1961. Vol. 5. P. 43—44.
41. Афанасьев Г. Н. Препринт ОИЯИ P4-87-569. Дубна, 1987; Вопросы атомной науки и техники. Сер. Общая и ядерная физика. 1988. Вып. 1. С. 49—57; Afanasiev G. N.//Nuovo cimento A. 1988. Vol. 99. P. 647—660.
42. Yang C. N., Wu T. T.//Phys. Rev. 1975. Vol. D12. P. 3845—3851.
43. Mignaco J. A., Novaes C. A.//Lett. Nuovo cimento. 1979. Vol. 26. P. 453—456.
44. Скаржинский В. Д.//Труды ФИАН. 1986. Т. 167. С. 139—161.
45. Багров В. Г., Гитман Д. М., Скаржинский В. Д.//Труды ФИАН. 1986. Т. 176. С. 151—165.
46. Lewis R. R.//Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28. P. 1228—1236.
47. Баканас Р.//Литовский физический сборник. 1988. Т. 28. № 1. С. 15—20.
48. Loinger A.//Riv. Nuovo cimento. 1987. Vol. 10. P. 1—29; Kobe D. H., Liang J. Q.//Phys. Rev. 1988. Vol. A37. P. 1133—1140; see also Bocchieri's and Loinger's papers in: Fundamental aspects of Quantum Theory/Eds. V. Gorini, A. Frigerio, N.Y.—Lond.: Plenum Press, 1986.
49. Osakabe N., Matsuda T., Kawasaki T. e.a.//Phys. Rev. 1986. Vol. A34. P. 819—822; see also the same authors paper in: Proc. 2nd Intern. Symp. «Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology»/Eds. M. Namiki, Y. Ohnuki, Y. Murajama, S. Nomara. Tokyo, Japan Phys. Soc., 1987. P. 97—105.
50. Альтшулер Б. Л., Аронов А. Г., Спивак Б. З. и др.//Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 476—478; Washburn S., Webb R. A.//Adv. Phys. 1986. Vol. 35. P. 375—422; Datta S., Melloch M. R., Bandyopadhyay S. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55, № 21. P. 2344—2347.
51. Schwarzschild B.//Physics Today, January 1986. P. 17—21 (См. рус. пер. обзора в сб. Физика за рубежом. Сер. А. 1987; М.: Мир, 1987. С. 225—240.)
52. Liang J. Q., Bocchieri P.//Phys. Lett. 1988. Vol. A127. P. 221—224; Liang J. Q., Ding X. X.//Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60. P. 836—839.
53. Афанасьев Г. Н. Препринт ОИЯИ P2-88-282. Дубна, 1988; Afanasiev G. N.//Nuovo cimento A. 1988. Vol. 100. P. 967—971.
54. Silver S.//J. Opt. Soc. Amer. 1962. Vol. 52. P. 131—135.
55. Missiroli G. F., Pozzi G., Valdre U.//J. Phys. E. 1981. Vol. 14. P. 649—668 and references therein.
56. Афанасьев Г. Н., Шилов В. М. Препринт ОИЯИ P4-88-841. Дубна, 1988.
57. Komrska J.//Advances in Electronics and Electron Physics/Ed. L. Marton. N.Y.—Lond.: Academic Press, 1971. P. 139—234.
58. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
59. Boyer T. M.//Nuovo cimento. 1987. Vol. B100. P. 685—701.
60. Comay E.//Fizika. 1988. Vol. 20. P. 241—251.
61. Namiot V. A.//Phys. Lett. 1988. Vol. A124. P. 9—11.
62. Quantum Uncertainties, Recent and Future Experiments and Interpretations/Eds. W. M. Honig, D. W. Kraft, E. Panarella. N.Y.: Plenum Press, 1987.
63. Aharonov Y., Carmi G.//Found. Phys. 1973. Vol. 3. P. 493—498; 1974. Vol. 4. P. 75—81; Harris J. H., Semon M. D.//Found. Phys. 1980. Vol. 10. P. 151.
64. Semon M. D.//Found Phys. 1982. Vol. 12. P. 49—57.
65. Zimmerman J. E., Mercereau//Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 14. P. 887.
66. Aharonov Y., Casher A.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 319—321.
67. Boyer T. H.//Phys. Rev. A. 1988. Vol. 36. P. 5083—5086.
68. Aharonov Y., Pendleton H., Petersen A.//Intern. J. Theor. Phys. 1969. Vol. 2. P. 213—230; Semon M. D., Taylor J. R.//Nuovo cimento. 1987. Vol. B97. P. 25—40; Vol. B100. P. 389—401.
69. Berry M. V.//Proc. Roy. Soc. Lond. 1984. Vol. A392. P. 45—57; Aharonov Y., Anandan J.//Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 1593—1596.