

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ СИСТЕМ УСКОРИТЕЛЕЙ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

*Э. А. Айрян, Е. П. Жидков, А. В. Федоров,
Б. Н. Хоромский, И. А. Шелаяев, И. П. Юдин, О. И. Юлдашев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Приведен обзор современных методов расчета полей магнитных систем в задачах проектирования и эксплуатации ускорителей высоких энергий и других электрофизических установок. Рассматриваются основные математические постановки этого класса задач, анализируются их достоинства и недостатки. Исследования вопросов существования и единственности решения задачи в выбранной постановке, а также дискретизация задачи проводятся на примере комбинированной постановки относительно двух скалярных потенциалов. Значительное внимание уделяется методам решения систем алгебраических уравнений, получающихся в результате дискретизации задачи. Приводится краткая характеристика ряда программ, предназначенных для расчета магнитостатических полей. Для иллюстрации приведены примеры расчетов конкретных магнитных систем ускорителей заряженных частиц.

Modern methods for numerical calculations of magnetostatic fields in the problems of particle accelerator design and operation are reviewed. Basic mathematical formulations of these problems, their advantages and shortcomings are analysed. The investigation of existence and unicity of the solution as well as the discretization of the problem are considered for the hybrid formulation of two scalar potentials. Much attention is given to the numerical solution to the systems of nonlinear algebraic equations obtained from the problem discretization. Some programs used to calculate magnetostatic fields are briefly characterized. The examples of calculating the accelerator magnet systems are presented for illustration.

ВВЕДЕНИЕ

Основным инструментом современной экспериментальной физики атомного ядра и элементарных частиц более полувека служат ускорители заряженных частиц. Существующие ускорительные установки в СССР (в Дубне, Москве, Серпухове, Ленинграде, Новосибирске и других городах) и за рубежом постоянно модернизируются. Сооружаются новые ускорители.

Ускорители — дорогостоящие установки. Так, например, на реализацию проекта сверхпроводящего (СП) синхротрона нуклотрон [1]

запланированы затраты 10^7 руб. Рекордную сумму $4 \cdot 10^9$ дол. предполагается затратить на реализацию проекта СП суперколлайдера (периметр кольца ~ 100 км) SSC в США на энергию 20 ТэВ в каждом пучке, запуск которого планируется осуществить в конце текущего столетия.

В циклическом ускорителе магнитная система является основным узлом, обеспечивающим устойчивость движения пучка в течение нескольких секунд при ускорении или часов — в режиме накопления. Таким свойством обладает система, содержащая комбинацию дипольных поворотных и квадрупольных фокусирующих магнитов. Присутствие в магнитном поле более высоких мультиполей — секstupольных, додекапольных и других — нежелательно. Оно жестко ограничивается динамикой пучка до уровня 10^{-4} от основного поля. Получение таких «оптически чистых» полей является основной задачей проектирования новых магнитов.

В настоящее время один из основных методов, используемых при проектировании и создании магнитных систем, является математическое моделирование [2]. Математическое моделирование дает возможность резко уменьшить время анализа поля в магните выбранной конфигурации, повысить точность, сократить стоимость и такого анализа, и самого магнита. Наряду с этим математическое моделирование дает возможность исследовать те части конструкции магнита, измерения в которых или крайне затруднены, или даже невозможны (например, распределение индукции в магнитопроводе традиционных магнитов), но распределение поля в этих частях сказывается существенным образом на характеристиках (и работе) магнита (например, заметное увеличение поля в части сверхпроводящей обмотки снижает критический ток всего магнита).

В конечном счете только математическое моделирование позволяет найти оптимальную конструкцию магнита в каждом конкретном случае.

Эффективное проведение вычислительного эксперимента стало возможным благодаря успехам в развитии вычислительной техники и вычислительной математики. В вычислительной математике можно отметить развитие общей теории разностных схем [3—5], методов конечных элементов [6—8], методов граничных элементов [9—12], методов решения некорректных задач [13], методов решения систем линейных [14—31] и нелинейных [35—38] алгебраических уравнений. Кроме того, отметим монографии [39—45], содержащие обзор методов вычислительной математики.

Общая теория численных методов не всегда отвечает на вопросы, возникающие при решении практических задач. В этом случае для обоснования и проверки применяемых методов ставят различные численные эксперименты, используют дополнительную физическую информацию. Это касается, в частности, проблемы выбора начальных приближений для итерационных процессов, подбора различных релаксационных параметров и т. д.

Методы математического моделирования магнитных полей интенсивно развиваются начиная с 60-х годов. Существует обширная библиография по данной проблеме: монографии [46—55], обзоры [56—60, 227, 228], материалы специальных конференций, посвященных методам расчета магнитных полей [61—69], и многочисленные оригинальные работы. В настоящем обзоре предпринята попытка отразить достижения математического моделирования магнитных систем.

Приведем краткое содержание обзора. В разд. 1 приводятся различные постановки задачи магнитостатики, применяемые при расчете двух- и трехмерных магнитостатических полей. В разд. 2 на примере комбинированной постановки относительно двух скалярных потенциалов изучаются вопросы существования и единственности решения, исследуются качественные свойства решения. Приводится аппроксимация решения непрерывной задачи по методу Галеркина и формулируется теорема об оценке точности приближенного решения. В разд. 3 рассматриваются методы решения систем нелинейных и линейных алгебраических уравнений, получившихся в результате дискретизации непрерывной задачи. В разд. 4 дана краткая характеристика ряда программ для расчета магнитостатических полей, приводятся примеры расчетов по этим программам.

1. ОСНОВНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ

Рассматривается задача нахождения распределения магнитного поля, созданного стационарными токами в проводниках и намагниченностью находящихся в пространстве изотропных ферромагнетиков. В случае отсутствия поверхностных токов и токов, протекающих по ферромагнетику, эта задача сводится к нахождению вектор-функций $\mathbf{H}(P)$ и $\mathbf{B}(P)$ из системы уравнений Максвелла для стационарного магнитного поля [50]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(P) = \mathbf{J}(P); \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(P) = 0; \tag{2}$$

$$\mathbf{B}(P) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(P); \tag{3}$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} |\mathbf{H}(P)| = 0. \tag{4}$$

Здесь используются следующие обозначения: P — точка трехмерного пространства R^3 ; \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля; \mathbf{B} — вектор индукции магнитного поля; \mathbf{J} — известный вектор объемной плотности тока, отличный от нуля в ограниченной области $\Omega_C \subset R^3$ и удовлетворяющий соотношению $\int_{\Omega_C} \mathbf{J} d\Omega = 0$; $\mu = \mu(|\mathbf{H}|)$ — известная в ограниченной односвязной области $\Omega_T \subset R^3$ нелинейная функция магнитной проницаемости ферромагнетика (для немагнитной среды $\mu = 1$); μ_0 — магнитная проницаемость вакуума.

На границе раздела сред с различными магнитными характеристиками выполняются условия непрерывности нормальной и тангенциальной составляющих векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} соответственно:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0; \quad (5)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности раздела среды «1» и среды «2». Вектор намагниченности ферромагнетика \mathbf{M} связан с векторами индукции и напряженности согласно формуле

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}. \quad (7)$$

При нелинейной зависимости магнитной проницаемости μ от напряженности поля, сложной геометрии областей, занимаемых ферромагнетиком (Ω_I) и токовыми обмотками (Ω_C), нахождение распределения магнитного поля из системы уравнений (1)–(6) возможно только численными методами. Для этого применяются различные постановки задач магнитостатики [56, 70]. Под постановкой принято понимать выбор математической модели, представляющей собой совокупность уравнений и, быть может, некоторых дополнительных характеристик магнитного поля. Мы рассмотрим лишь те постановки, на основе которых были составлены программы, применявшиеся при расчете конкретных магнитных систем. Эти постановки удобно классифицировать или по виду используемых в них уравнений — дифференциальных, интегральных, дифференциальных и граничных интегральных (соответствующие постановки обычно называются дифференциальной, интегральной и комбинированной), или по неизвестным величинам, относительно которых решается задача. Мы будем придерживаться последней классификации. В качестве неизвестных могут быть выбраны векторы поля \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{M} , магнитостатические потенциалы A , φ , ψ , плотности так называемых вторичных источников. Кроме того, если магнитная система обладает осевой или продольной симметрией, векторы \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{M} имеют только по две ненулевых компоненты, а потенциалы и плотности вторичных источников являются скалярными функциями. Постановки относительно этих неизвестных называются двухмерными постановками задачи магнитостатики. В ряде случаев (при использовании магнитомягких материалов, при ненасыщении ферромагнетика) приемлемым для практических приложений является приближение $\mu = \text{const}$ во всей области Ω_I . При этом задачу можно поставить в виде граничного интегрального уравнения (ГИУ) по границе некоторой области. Многообразие постановок задачи магнитостатики прежде всего связано с возможностью выбора постановки, использование которой наиболее эффективно для решения конкретной физической задачи. При этом необходимым является исследование вопросов существования, многообразия и качественных свойств решений уравнений, определяющих постановку задачи.

Постановки относительно векторного потенциала. Согласно уравнению (2) в R^3 можно ввести в рассмотрение векторный потенциал \mathbf{A} , определяемый выражением

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

В силу (3) уравнение (1) приводится к виду

$$\text{rot } \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot } \mathbf{A}(P) = \mathbf{J}(P), \quad P \in R^3. \quad (8)$$

Для выполнения условий (5), (6) на границе раздела сред достаточно, чтобы:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1} \text{rot } \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \text{rot } \mathbf{A}_2 \right) = 0, \quad (10)$$

а условие (4) принимает вид

$$\lim_{P \rightarrow \infty} |\mathbf{A}(P)| = 0. \quad (11)$$

Дополнив уравнения (8)—(11) условием

$$\text{div } \mathbf{A}(P) = 0 \quad (12)$$

для однозначного определения векторного потенциала, мы получим дифференциальную постановку задачи для нахождения неизвестного потенциала \mathbf{A} , которая рассматривалась, например, в работах [71—75]. Основной сложностью постановки (8)—(12) является наличие трех неизвестных компонент векторного потенциала \mathbf{A} , определенных во всем пространстве R^3 , а также учет условий (11), (12) в процессе численного нахождения решения.

Перейдем к интегральной постановке. Возьмем ротор от обеих частей (7), используя (1), (12) и известные формулы [75] для дифференциальных операторов, получаем

$$\nabla^2 \mathbf{A}(P) = -\mu_0 (\text{rot } \mathbf{M}(P) + \mathbf{J}), \quad (13)$$

где ∇^2 — векторный оператор Лапласа. Из (13) получается интегральное представление векторного потенциала [55]

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_{\Omega_C} \frac{\mathbf{J}(Q)}{r} d\Omega + \text{rot} \int_{\Omega_I} \frac{\mathbf{M}(Q)}{r} d\Omega \right), \quad (14)$$

$$\mathbf{M} = \left(1 - \frac{1}{\mu_0} \right) \text{rot } \mathbf{A},$$

где $r = r(P, Q)$ — расстояние между точками P и Q . В случае $\mu = \text{const}$ имеем граничную постановку вида [55, 77]:

$$4\pi \mathbf{A}(P) = \mu_0 \mu \int_{\Omega_C} \frac{\mathbf{J}(Q)}{r} d\Omega + \int_{\Gamma_I} \left[\text{grad } \frac{1}{r} \times (\mathbf{n}(Q) \times \mathbf{A}(Q)) - \right. \\ \left. - \text{grad } \frac{1}{r} (\mathbf{n}(Q) \cdot \mathbf{A}(Q)) - \frac{1}{r} \mathbf{n}(Q) \times \text{rot } \mathbf{A}(Q) \right] dS, \quad (15)$$

где Γ_I — поверхность, ограничивающая область Ω_I , $\mathbf{n}(Q)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_I в точке Q . Уравнение (15) получается из векторной формулы Грина [50] с использованием условий (9), (10) и уравнения (8).

Векторный потенциал наиболее широко используется при расчете магнитных полей в двухмерной постановке [49, 57, 78—86]. Если ось Oz декартовой прямоугольной или цилиндрической системы координат направить вдоль оси симметрии магнитной системы, то вектор плотности тока и, следовательно, векторный потенциал имеют только компоненты J_z и A_z в прямоугольной системе координат и компоненты J_θ и A_θ — в цилиндрической. Постановка (8)—(12) в этом случае сводится к следующей системе уравнений относительно компоненты A_z векторного потенциала:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -J_z; \quad (16)$$

$$(A_z)_1 - (A_z)_2 = 0; \quad (17)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_z}{\partial n} \right)_1 - \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial n} \right)_2 = 0; \quad (18)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} |A_z(P)| = 0. \quad (19)$$

Чтобы не решать задачу нахождения A_z во всем пространстве R^2 и точно учесть условие (19), можно использовать комбинированную постановку [87—91]. Для этого выбирается замкнутый контур Γ , заключающий внутри себя ферромагнетики, а в некоторых случаях и токовые обмотки. На контуре Γ записывается граничное интегральное уравнение, которое можно рассматривать как краевое условие на границе расчетной области:

$$A_z(P) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_z(Q) \frac{\partial}{\partial n} \ln r dS + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial A_z}{\partial n}(Q) \ln r dS = 0. \quad (20)$$

Для решения задачи используются уравнения (16)—(18), (20).

Постановки относительно скалярных потенциалов. Основная трудность при использовании постановок относительно векторного потенциала заключается в необходимости нахождения трех неизвестных компонент вектора. Уменьшить количество неизвестных можно введением скалярного потенциала φ . Для этого напряженность магнитного поля представляется в виде

$$\mathbf{H}(P) = \mathbf{T}(P) - \text{grad } \varphi(P). \quad (21)$$

В силу (1) вектор \mathbf{T} удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } \mathbf{T}(P) = \mathbf{J}(P). \quad (22)$$

Например, вектор \mathbf{T} можно интерпретировать как поле, созданное токовыми обмотками. Тогда он определяется по закону Био —

Саварра:

$$\mathbf{T}_C(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_C} \mathbf{J}(Q) \times \text{grad} \frac{1}{r} d\Omega. \quad (23)$$

Учитывая (21), из (2) получаем уравнение для скалярного потенциала

$$\text{div } \mu \text{ grad } \varphi(P) = \text{div } \mu \mathbf{T}_C(P). \quad (24)$$

Используя (23), из (4)—(6) получаем соответствующие граничные условия для φ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0; \quad (25)$$

$$\mu_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 - \mu_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 = (\mu_1 - \mu_2) (\mathbf{T}_C \cdot \mathbf{n}), \quad (26)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} |\varphi(P)| = 0. \quad (27)$$

Уравнения (24)—(27) составляют дифференциальную постановку задачи магнитостатики относительно неизвестного скалярного потенциала φ . Подставив в уравнение (24) потенциал φ в виде

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_I} \mathbf{M}(Q) \cdot \text{grad} \frac{1}{r} d\Omega, \quad (28)$$

получим интегральную постановку относительно скалярного потенциала. Метод скалярного потенциала, как в дифференциальной постановке [92—94], так и в интегральной [95, 96], успешно применялся при решении ряда практических задач. При больших значениях μ в области Ω_I векторы \mathbf{T}_C и $\text{grad } \varphi$ становятся большими, близкими по значению. Это приводит к потере точности вычислений при численном решении задачи на ЭВМ, так как для вычисления \mathbf{H} по формуле (21) необходимо находить разность $\mathbf{T}_C - \text{grad } \varphi$. Для преодоления отмеченных трудностей, а также трудностей, связанных с вычислением интеграла в (23) в точках области Ω_I , вводят полный скалярный потенциал ψ по формуле

$$\mathbf{H}(P) = -\text{grad } \psi(P), \quad P \in \Omega_I. \quad (29)$$

Таким образом, приходим к постановке задачи магнитостатики относительно двух неизвестных скалярных потенциалов φ и ψ [97]:

$$\text{div } \mu \text{ grad } \psi(P) = 0, \quad P \in \Omega_I; \quad (30)$$

$$\Delta \varphi(P) = 0, \quad P \in R^3 \setminus (\Omega_I \cup \Gamma_I). \quad (31)$$

Уравнение (31) получается из (2), (21) с учетом того, что $\mu = 1$ в области $R^3 \setminus (\Omega_I \cup \Gamma_I)$ и $\text{div } \mathbf{T}_C = 0$. На границе области Ω_I имеют

место условия, вытекающие из (5), (6):

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} = \mathbf{T}_C \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n}; \quad (32)$$

$$\psi(P) - \varphi(P) = - \int_Q^P (\mathbf{T}_C \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (33)$$

где P — произвольная точка на поверхности Ω_I ; Q — произвольная точка из $R^3 \setminus (\Omega_C \cup \Gamma_C)$, обычно выбирается в центре симметрии магнита. Интегрирование в (33) ведется вдоль произвольной линии, целиком принадлежащей $R^3 \setminus (\Omega_C \cup \Gamma_C)$. Условие (5) обеспечивается уравнением (31) с условием (27). Постановка (30)—(33) и (27) широко используется и реализована в различных пакетах программ для расчета как двухмерных [98, 99], так и трехмерных магнитных полей [100—102]. В работах [103, 104] предлагается иной способ учета условия (33) на границе области Ω_I . В области $R^3 \setminus (\Omega_C \cup \Gamma_C)$ можно ввести скалярный потенциал η от токовых обмоток в вакууме:

$$\mathbf{T}_C(P) = -\text{grad } \eta(P), \quad P \in R^3 \setminus (\Omega_C \cup \Gamma_C). \quad (34)$$

Внутри и на границе области Ω_I будем иметь

$$\psi(P) = \varphi(P) + \eta(P). \quad (35)$$

Поэтому (33) можно записать в виде

$$\psi(P) - \varphi(P) = \eta(P), \quad P \in \Gamma_I, \quad (36)$$

а η определить из уравнения

$$\Delta \eta(P) = 0, \quad P \in \Omega_I, \quad (37)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial n}(P) &= -\mathbf{T}_C \cdot \mathbf{n}, \quad P \in \Gamma_I; \\ \eta(P_0) &= 0, \quad P_0 \in \Gamma_I, \quad P \neq P_0, \end{aligned} \quad (38)$$

где P_0 — какая-либо фиксированная точка границы области Ω_I . Таким образом, нахождение и интегрирование тангенциальной компоненты вектора \mathbf{T}_C в (33) заменяется на нахождение потенциала η из (37), (38).

Можно получить также и интегральную постановку относительно полного скалярного потенциала ψ [97, 100]. С этой целью подставляем в (35) выражение (28) для потенциала φ . В результате получаем интегральное уравнение относительно ψ :

$$\psi(P) = -\frac{1}{4\pi} \text{div} \int_{\Omega_I} \frac{\mathbf{M}(Q)}{r} d\Omega + \eta(P), \quad (39)$$

$$\mathbf{M} = (\mu - 1) \text{grad } \psi.$$

Граничная постановка в случае $\mu = \text{const}$ в области Ω_I получается

из (39) применением теоремы Гаусса — Остроградского и формулы для дивергенции произведения вектора на скаляр [76] и имеет вид

$$\mu\psi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_I} (\mu - 1) \psi(Q) \operatorname{grad} \frac{1}{r} \cdot \mathbf{n}(Q) dS + \eta(P). \quad (40)$$

Использование граничного уравнения (40) в практических расчетах описано в работах [100, 105].

Возвращаясь к дифференциальной постановке (23), (27), (30)—(33), отметим, что, хотя выделение из \mathbf{H} вихревой составляющей и использование двух скалярных потенциалов сводит задачу к нахождению скалярной функции, все-таки трудоемким остается вычисление интегралов (23). В работах [106—108] предлагается несколько видоизменить постановку (23)—(27). Авторы отказываются от интерпретации \mathbf{T} как поля от токовых обмоток. Вектор \mathbf{T} выбирается специальным образом, удовлетворяющим (22) и локализованным вне области Ω_I , что позволяет избежать, как и в постановке относительно двух скалярных потенциалов, потери точности при вычислении \mathbf{H} в Ω_I . С помощью такого выбора \mathbf{T} удается существенно упростить вычисление правой части в (24), хотя и в ущерб возможностям автоматизации при построении рассматриваемого вектора. Такая постановка задачи магнитостатики называется постановкой относительно модифицированного скалярного потенциала и применялась при решении трехмерных задач в работах [109—112]. Отметим, что модифицированный скалярный потенциал в комбинации с однокомпонентным векторным потенциалом широко используется и при решении двумерных задач [113, 114].

Рассмотрим теперь комбинированные постановки, использующие скалярные потенциалы. В работах [115, 116] предлагается вводить дополнительную область Ω (с границей Γ), включающую в себя область Ω_I . Внутри области Ω решается дифференциальная задача (30), (31) с условиями (32), (33) на границе области Ω_I , а условие (27) заменяется граничным интегральным уравнением

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(Q) \frac{1}{r} dS = \varphi(P), \quad P \in \Gamma, \quad (41)$$

связывающим функции φ и $\partial\varphi/\partial n$ на границе Γ области Ω . В работах [117, 118] предлагается уравнение (41) записывать на границе Γ_I области Ω_I . Тогда необходимо решать уравнение (30) в Ω_I , на Γ_I выполняются (32), (35), (41). Отметим, что аналогичные постановки использовались и при решении двумерных задач.

Постановки относительно плотностей вторичных источников. Математическая формулировка задачи расчета неизвестных плотностей вторичных источников сводится к интегральным уравнениям, вывод которых опирается на теорию потенциала. Приведем для примера вывод ГИУ относительно плотности простого слоя магнитных зарядов в предположении $\mu = \text{const}$. Согласно (24) и условию $\operatorname{div} \mathbf{T}_c =$

= 0 скалярный потенциал φ удовлетворяет уравнениям:

$$\Delta\varphi(P) = 0, \quad P \in \Omega_I; \quad \Delta\varphi(P) = 0, \quad P \in R^3 \setminus (\Omega_I \cup \Gamma_I) \quad (42)$$

и граничным условиям (25)—(27). Если искать φ в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_I} \frac{\sigma(Q)}{r} dS,$$

то уравнения (42) и условия (25), (27) будут удовлетворяться при этом автоматически. Для удовлетворения условия (26) воспользуемся свойством разрыва нормальной производной потенциала простого слоя и получим уравнение для расчета плотности σ :

$$\sigma(P) + \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} (\mathbf{n} \cdot \text{grad} \int_{\Gamma_I} \frac{\sigma(Q)}{r} dS) = 2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_C).$$

Подробнее постановки относительно плотностей вторичных источников рассматриваются в [54, 55], где также приведены уравнения относительно векторных вторичных источников. Для расчета магнитных систем с нелинейными характеристиками ферромагнетика наряду с поверхностной плотностью вводится объемная плотность магнитных зарядов [54].

Постановки относительно В, Н, М. Используются интегральные постановки задачи магнитостатики относительно векторов В, Н, М [119—125]. Постановки основаны на разложении (21) вектора напряженности магнитного поля. Вектор \mathbf{T}_C находится интегрированием в (23), а потенциал φ ищется в виде (28). В результате имеем интегральное уравнение

$$\mathbf{H}(P) = \mathbf{T}_C(P) + \frac{1}{4\pi} \text{grad} \int_{\Omega_I} \mathbf{M}(Q) \cdot \text{grad} \frac{1}{r} d\Omega, \quad P \in \Omega_I. \quad (43)$$

Учитывая условия связи

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu - 1} \mathbf{M} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{\mu - 1} \mathbf{M},$$

в качестве неизвестного в (43) можно выбрать любой из векторов В, Н, М. В данных постановках неизвестный вектор надо находить не во всем пространстве, а в ограниченной области Ω_I . После этого поле в любую точку можно пересчитать согласно (43).

В случае $\mu = \text{const}$ уравнение (43) сводится к ГИУ вида [228]:

$$\mathbf{H}(P) = \mathbf{T}_C(P) + \frac{1}{4\pi} \text{grad} \int_{\Gamma_I} \frac{\mathbf{M}(Q) \cdot \mathbf{n}(Q)}{r} dS,$$

а в случае двумерных постановок редуцируется к следующему:

$$\mathbf{H}(P) = \mathbf{T}_C(P) + \frac{1}{2\pi} \text{grad} \int_{\Omega_I} \mathbf{M}(Q) \cdot \text{grad} \ln r d\Omega.$$

В последнем уравнении все векторы имеют по две ненулевых компоненты, область Ω_I — двумерная.

Результаты использования постановок относительно векторов **В**, **Н**, **М** для решения практических задач можно найти в работах [121, 122, 126—128].

В настоящее время расчет трехмерных магнитных полей является дорогостоящей процедурой. Естественно стремление минимизировать затраты и в то же время получить достоверный результат. Это существенно зависит от выбора постановки для решения конкретной задачи. В заключение еще раз кратко остановимся на постановках задачи магнитостатики с точки зрения экономичности их использования для расчета магнитостатических полей.

Постановки относительно векторного потенциала нашли очень широкое применение для расчета двумерных и осесимметричных магнитных полей. Вычисления в случае трех пространственных переменных осложняются необходимостью нахождения трех неизвестных компонент вектора и введением дополнительного условия (12).

Для расчета трехмерных магнитостатических полей чаще всего используются постановки относительно двух скалярных потенциалов φ и ψ и относительно модифицированного скалярного потенциала. «Слабым» местом первой является необходимость вычисления тройных интегралов для нахождения вектора T_C , а вторая, хотя в какой-то мере и избавлена от этого, но требует индивидуального подхода при построении дополнительного вектора **Т**. Необходимо отметить, что в постановках относительно неизвестных потенциалов требуется определенная аккуратность при численном дифференцировании при переходе от потенциалов к векторам поля.

Постановки относительно плотностей вторичных источников используются для расчета магнитных полей в кусочно-однородных и нелинейных средах. Теоретические исследования свидетельствуют о том, что рассматриваемые интегральные уравнения могут быть некорректными, поэтому для их численного решения привлекается дополнительная информация об интегральных свойствах вторичных источников [54]. Пересчет к векторам поля осуществляется интегрированием плотности вторичных источников.

Постановки относительно векторов поля **В**, **Н**, **М** хотя и требуют нахождения трех неизвестных компонент вектора, но неизвестные сосредоточены внутри области, занятой ферромагнетиком. Поэтому использование интегральных постановок наиболее эффективно, когда область Ω_I невелика по объему, но имеет достаточно большие линейные размеры. Решение интегральных уравнений (42) на соответствующим образом выбранных подпространствах функций [129—131] позволяет избежать численных погрешностей при больших значениях магнитной проницаемости μ . Отметим, что возможно более интенсивное использование интегральных постановок в связи с развитием векторной и матричной вычислительной техники.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ В КОМБИНИРОВАННОЙ ПОСТАНОВКЕ И ИХ АППРОКСИМАЦИЯ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим уравнения (30), (31) для двух скалярных потенциалов $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $x \in R^n$, $n = 2, 3$, определенных во всем пространстве.

Далее сосредоточим основное внимание на трехмерных уравнениях, имея в виду, что все обсуждаемые результаты непосредственно переносятся на ряд двумерных моделей, обычно используемых при математическом моделировании магнитных полей. Это относится к уравнениям в (x, y) - и (r, z) -геометриях для одного или нескольких скалярных потенциалов, а также к уравнению в (x, y) -геометрии при использовании векторного потенциала A , определяемого соотношением $V = \text{rot } A$.

Система уравнений (27), (30)—(33) неудобна для численного анализа, поскольку определена во всем пространстве R^3 . Далее сформулируем эквивалентную ей краевую задачу в ограниченной области Ω , содержащей области Ω_I , с нелокальным краевым условием на границе Γ этой области. Это краевое условие, использующее интегральные операторы с потенциалами простого и двойного слоя, точно учитывает краевое условие на бесконечности $\varphi(\infty) = 0$. Краевая задача такого типа определяет так называемую комбинированную постановку задач магнитостатики. Название связано с тем, что в этой постановке используется комбинация граничных интегральных уравнений и квазилинейных эллиптических уравнений в ограниченной области. Для комбинированной постановки можно доказать существование и единственность обобщенного решения, а также установить свойства нелинейного оператора, гарантирующие применение экономичных итерационных методов решения возникающих уравнений, таких, как градиентные методы, ньютоновские методы и методы простых итераций с переобусловливателем.

Отметим, что различные методы учета краевого условия на бесконечности рассматривались в [11, 87, 115, 132—138]. Методы декомпозиции для ограниченной области рассматривались в работах [138—144], где имеется обширная библиография по этому вопросу. Алгоритмы решения ГИУ обсуждались в [9, 10, 12, 115, 136, 148] и цитируемой там литературе.

Рассмотрим уравнения для комбинированной постановки [135]. Пусть $\Omega_I \subset R^3$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ_I (соответствует нелинейной среде), а Ω — вспомогательная область с липшицевой границей Γ , $\Omega_I \subset \Omega$. Тогда краевая задача (27), (30)—(33) приводится к виду

$$E_2 u \equiv - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y) = 0,$$

$$y = \text{grad } u, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad u \in D(E_2) \quad (44)$$

с естественной областью определения

$$M(E_z) = C^2(\overline{\Omega}_I) \cup C^2(\overline{\Omega}/\overline{\Omega}_I)$$

и областью определения

$$D(E_z) = \{u \in M(E_z), [u]_{\Gamma_I} = 0, \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Gamma_I} = z(x),$$

$$G_1 u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in \Gamma; (u, g_0) = 0\}. \quad (45)$$

Здесь

$$u(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in \Omega_I \\ \varphi(x) + \varphi_0(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_I, \end{cases}$$

где φ_0 — гармоническая в области $R^3 \setminus \Omega_I$ функция со значением $\psi - \varphi$ на Γ_I и $\varphi_0(\infty) = 0$. Кроме того, функции $a_i(x, y)$, $i = 1, 3$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ определены равенством

$$a_i(x, y) = \begin{cases} y_i \\ \mu(x, |y|) y_i, & x \in \Omega \setminus \Omega_I, \end{cases} \quad (46)$$

$|y|^2 = \sum_{i=1}^3 y_i^2$, $G_1 = L^{-1}(E + K)$, где интегральные операторы K и L определены согласно формулам

$$Ku = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{|r_{PQ}|^2} u(P) dS_Q,$$

$$Lv = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |r_{QP}|^{-4} v(P) dS_Q,$$

а $|r_{QP}|$ — евклидова норма вектора r_{QP} , соединяющего точки $P, Q \in \Gamma$; n_P — вектор внутренней нормали в точке P ; E — тождественный оператор; g_0 — плотность потенциала Робена: $K^* g_0 = g_0$.

Пусть V — некоторое рефлексивное банахово пространство; V^* — сопряженное к нему, причем $V \subset H$ непрерывно и плотно вложено в некоторое гильбертово пространство H , $D(E_z) \subset V$, $R(E_z) \subset H$, Y — банахово пространство. Построим энергетическое расширение оператора E_z по формуле [145]

$$A' = T^* A_0 T, \quad A \in (V \rightarrow V^*), \quad (47)$$

где $T \in (V \rightarrow Y)$ — непрерывный линейный оператор, такой, что $\|Tu\|_Y = \|u\|_V$, $A_0 \in (Y \rightarrow Y^*)$ — нелинейный оператор, $T^* \in (Y^* \rightarrow V^*)$. Используем пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega$, пространство Соболева $H^1(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (|\text{grad } u|^2 + |u|^2) d\Omega$$

и его подпространство $H_{g_0}^1(\Omega)$ функций, след [146] $\gamma_0 u$ на Γ которых ортогонален g_0 на Γ , т. е. $(\gamma_0 u, g_0)_\Gamma = 0$. Используем также пространство Соболева порядка $\frac{1}{2} : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ [146] и сопряженное к нему пространства $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) = (\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma))^*$. Аналогично определяем подпространство $\mathbf{H}_{g_0}^{1/2} \equiv X \subset \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ функций, ортогональных g_0 на Γ : $(u, g_0) = 0$, а также сопряженное ему пространство $X^* = \mathbf{H}_1^{-1/2}(\Gamma)$ функций, ортогональных единице: $(u, 1) = 0$. Определим также оператор следа $\gamma_{0, g_0} : \mathbf{H}_{g_0}^1(\Omega) \rightarrow X$, являющийся сужением оператора γ_0 на X , который является линейным непрерывным оператором [146]. Согласно [115] справедлива

Лемма 1. Линейный оператор $G_1 = L^{-1}(E + K) \in \mathcal{L}(X \rightarrow X^*)$ и является симметрическим и положительно определенным

$$(G_1 u, u) \geq m_{G_1} \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X, \quad m_{G_1} > 0.$$

Определим следующие операторы и пространства: $H = L_2(\Omega)$; $V = H_{g_0}^1(\Omega)$ с нормой $\|u\|^2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \int_\Gamma \bar{u}^2 dS \right)$, $\bar{u} = \gamma_{0, g_0} u$;

$$Y = L_2^{(3)}(\Omega) \times H_{g_0}^{1/2}(\Gamma),$$

$$Y^* = L_2^{(3)}(\Omega) \times X^*; \quad T : u \rightarrow \{\text{grad } u; \gamma_{0, g_0} u\}; \quad (48)$$

$$A_{0k} : \{y, \varphi\} \rightarrow \{a_1(x, y), a_2(x, y), a_3(x, y), G_1 \varphi\} - \hat{g}, \quad \varphi \in X,$$

где линейный функционал $\hat{g} \in Y^*$ есть продолжение, согласно теореме Хана — Банаха, на все $L_2^{(3)}(\Omega)$ линейного непрерывного функционала g :

$$g(Th) = \int_{\Gamma_I} z(s) \gamma_0 h(s) ds, \quad \forall h \in V,$$

определенного на множестве значений оператора T для всякой функции $z \in H^{1/2}(\Gamma_I)$.

Лемма 2 [115]. Пусть $G_1 = L^{-1}(E + K)$, $z \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_I)$. Тогда операторы и пространства (48) задают энергетическое расширение $A_k = T^* A_{0k} T$ оператора (44), (45), (46).

Отмечаем, что операторное уравнение

$$Au = 0, \quad u \in V \quad (49)$$

называется обобщенной формулировкой краевой задачи (44), (45), если A является энергетическим расширением оператора E_z .

Пусть $\mu(x, t) \in C(\Omega_I) \times C[0, \infty)$ и выполнены какие-либо из свойств (при $x \in \Omega_I$; $t, s \in [0, \infty)$):

$$\mu(x, t)t - \mu(x, s)s \geq m(t - s), \quad t \geq s, \quad m > 0; \quad (50)$$

$$|\mu(x, t)t - \mu(x, s)s| \leq M_0 |t - s|, \quad (51)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \mu(x, t)t \right| \leq M_0, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (52)$$

Согласно [115] имеет место

Теорема 1. Пусть $G_1 = L^{-1}(E + K)$, $z \in H_1^{-1/2}(\Gamma_I)$, а функция $\mu(x, t)$ удовлетворяет условиям (50), (51). Тогда оператор $A_k = T^* A_{0k} T$ радиально непрерывен, коэрцитивен и строго монотонен и существует единственное обобщенное решение $u \in V$ уравнений (44), (45). Если $\mu(x, t)$ удовлетворяет также условию (52), то оператор A_k дифференцируем по Гато, причем эта производная симметрична и положительно определена.

Приведенная теорема устанавливает существование и единственность решений уравнения Максвелла в классе функций, представимых в виде (24), (29).

Для проведения численных расчетов на основе уравнения (49) его следует представить в более удобной форме. Для этого используем явное представление для операторов T , A_{0k} и функционала \hat{g} , определенных в (48). Тогда обобщенная формулировка уравнений (44), (45) приводит к следующей задаче: найти функцию $u \in H_{g_0}^1(\Omega)$, такую, что выполняется равенство

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \mu(x, |\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma_I} z(s) \bar{h}(s) ds + \int_{\Gamma} (G_1 \bar{u}) \cdot \bar{h}(s) ds = 0, \quad \forall h \in H_{g_0}^1(\Omega), \quad (53)$$

где черта означает след функции из V на границе Γ или Γ_I .

Обобщенная формулировка вида (53) может быть непосредственно использована для построения стандартной аппроксимации по методу Галеркина. Для этого, по существу, достаточно рассмотреть уравнение (53) не на всем пространстве $H_{g_0}^1(\Omega)$, а лишь на некотором его конечномерном подпространстве.

Пусть $X_n \subset H_{g_0}^1 \equiv X$ — линейное подпространство в X с нормой, индуцированной из X , а h_1, \dots, h_n — полная линейно независимая система базисных функций в X_n . Обозначим $I_n \in (X_n \rightarrow X)$ оператор вложения X_n в X , а $I_n^* \in (X^* \rightarrow X_n^*)$ — сопряженный к I_n оператор. Следуя [138, 145], рассмотрим систему уравнений метода Галеркина для решения $u_n \in X_n$:

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \mu(x, |\nabla u_n|) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma_I} z(s) \bar{h}_k(s) ds + \int_{\Gamma} (G_1 \bar{u}_n) \cdot \bar{h}_k(s) ds = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (54)$$

Уравнение (54) можно записать [145] как операторное уравнение в X_n :

$$A_{k, n} u_n = 0; \quad A_{k, n} = I_n^* A_k I_n \in (X_n \rightarrow X_n^*), \quad (55)$$

где оператор A_k определен в теореме 1.

Уравнения (54) или (55) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$, где $u_n = \sum_{i=1}^n b_i h_i$. Однако для вычисления компонент вектора $A_n u_n$ следует выбрать способы приближенного вычисления интегралов в (54), а также некоторую аппроксимацию элемента $G_1 u_n$. Отметим, что если требуется решить задачу (44), (45) с однородным условием Дирихле $u_\Gamma = 0$ на границе Γ , то достаточно выбрать в качестве $V = \dot{H}^1(\Omega)$, после чего третье слагаемое в (54) исчезает. В случае однородного условия Неймана $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0$ следует положить $V = H_{g_0}^1(\Omega)$, также исключив третье слагаемое из формулы (54).

В линейном случае, т. е. для функции μ , зависящей лишь от координаты x , равенство (54) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k \left[\int_{\Omega} \mu(x) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial h_m}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} (G_1 \bar{h}_k) \cdot \bar{h}_m(s) ds \right] = \\ = \int_{\Gamma_I} z(s) \bar{h}_m(s) ds, \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (56)$$

Если использовать $n \times n$ -матрицу $C = \{c_{km}\}$, где числа c_{km} определены в квадратных скобках формулы (56), и вектор $F = (f_1, \dots, f_n)^T$, где $f_m = \int_{\Gamma} z(s) \bar{h}_m(s) ds$, $m = \overline{1, n}$, то можно записать следующее уравнение:

$$Cb = F, \quad b \in R^n \quad (57)$$

для искомого вектора b . В силу высказанных ранее предположений матрица C симметрична и положительно определена. Некоторые методы решения уравнений вида (54) и (57), а также аналогичных им уравнений, возникающих при конечно-разностной аппроксимации уравнения (53), будут рассмотрены ниже.

Здесь кратко остановимся на общем подходе к оценке погрешности аппроксимаций, полученных на основе метода Галеркина. Согласно [145], свойства оператора A_h , определенного в теореме 1, переносятся на оператор $A_{h,n}$ из (55) в силу равенства $\|I_n u_n\| = \|u_n\|$. Поэтому, используя теорему 1, получаем, следуя [138, 143—145], утверждение об оценке погрешности решения u_n :

Лемма 3. При условиях теоремы 1 уравнение (54) имеет единственное решение, для которого справедлива оценка

$$\|u_n - u\|_X \leq \frac{3M_0}{m} \inf_{v \in X_n} \|v - u\|_X.$$

На основе леммы 3 можно получить оценки погрешности решений u_n для широкого класса конечно-элементных подпространств X_n , используя результаты по аппроксимации элементов пространств Соболева типа H^m [147]. Аналогично исследуются задачи Дирихле и Неймана в области Ω . Оценки приближений, полученных на основе метода Галеркина для уравнений в комбинированной постановке для семейства подпространств сплайнов, получены в [143].

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

Результатом применения какого-либо метода дискретизации к используемой постановке задачи магнитостатики является система, в общем случае, нелинейных алгебраических уравнений. Ниже в этом разделе приводятся в справочной форме несколько наиболее часто используемых и достаточно эффективных методов решения линейных систем алгебраических уравнений. Линейные алгебраические уравнения, помимо частных случаев основной задачи магнитостатики, когда магнитная проницаемость может быть постоянной или кусочно-постоянной, появляются также на каждом шаге любого итерационного процесса решения нелинейной задачи.

Методы решения системы линейных алгебраических уравнений разделяются на прямые и итерационные. Каждый из этих методов имеет как свои достоинства, так и недостатки. При выборе метода, конечно, необходимо учитывать особенности задачи: размерность системы, сколько раз требуется решать задачу с одной и той же матрицей, симметрия матрицы, ее разреженность, ширина ленты матрицы, число обусловленности, погрешность задания матрицы, ее масштаб и т. д. Если размерность системы велика и возникает необходимость в использовании внешней памяти ЭВМ, обычно используют итерационные методы, хотя в этом случае годятся и прямые. В то же время при небольшой размерности системы и полностью заполненной матрице, когда дискретизация достаточно «грубая» и из-за ошибок аппроксимации могут нарушаться спектральные свойства непрерывных операторов, лучше использовать прямые методы. Конкретные свойства прямых и итерационных методов будут ясны из дальнейшего изложения. С особенностями реализации методов, такими, как хранение информации в памяти ЭВМ, учет разреженности матрицы и т. д., можно ознакомиться, например, по литературе [20, 21, 24—34, 43]. Ниже дается краткая информация о некотором программном обеспечении методов решения систем линейных алгебраических уравнений, а также приводятся методы решения дискретизованных нелинейных задач магнитостатики. Все методы используются в конкретных комплексах программ, практичны и достаточно эффективны.

Прямые методы. Отличительной чертой прямых методов является то, что они позволяют за определенное число, обычно порядка $O(N^3)$ арифметических операций находить решение системы размерности N . Важной характеристикой прямых методов наряду с числом арифме-

тических операций и объемом используемой памяти ЭВМ является устойчивость к погрешности округления. Особо следует отметить компактные вычислительные схемы, позволяющие использовать режим накопления и, следовательно, получать решения с меньшим влиянием погрешностей округления. Пусть основным режимом работы арифметического устройства ЭВМ является арифметика с плавающей точкой и t -разрядной мантиссой машинного слова. Режим накопления [14, 19, 30] означает вычисление промежуточных результатов некоторого сложного выражения, аргументами которого являются числа с t -разрядной мантиссой в арифметике с $2t$ -разрядной мантиссой и представление окончательного результата, после округления, как числа с t -разрядной мантиссой. Этот режим на некоторых ЭВМ реализован аппаратно, а на некоторых моделируется специальными программами.

Приводимые ниже прямые методы, конечно, не охватывают все разнообразие существующих прямых методов, но в то же время являются одними из самых эффективных для широкого класса задач и часто используются на практике. Более подробную информацию о прямых методах можно получить в [14—45] и в цитируемой там литературе.

Метод Холецкого или метод квадратного корня [15, 18—20, 26, 30]. Метод используется для решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$Au = f, \quad (58)$$

когда матрица A является симметричной и положительно определенной. В этом методе A представляется в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц, транспонированных по отношению одна к другой:

$$A = LL^T. \quad (59)$$

Затем последовательно решаются системы уравнений с треугольными матрицами:

$$Lv = f, \quad L^T u = v.$$

Разложение (59) можно реализовать разными вычислительными схемами. Приведем компактную схему факторизации. Пусть $A = \{a_{ij}\}$, $L = \{l_{ij}\}$, $l_{ij} = 0$ при $i < j$, тогда схема имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} l_{11} &= a_{11}^{1/2}, \quad l_{j1} = a_{j1}/l_{11}, \quad j > 1; \\ l_{ii} &= \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2}, \quad i > 1; \\ l_{ji} &= \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right) / l_{ii}, \quad j > i. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Существует модификация метода, в которой отсутствует операция извлечения корня. В этой модификации используется факторизация

$A = \bar{L}D\bar{L}^T$, где L — по-прежнему нижняя треугольная матрица, $D = \{d_{ij}\}$ — диагональная матрица, т. е. $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Вычисления проводятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_{ji} &= a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{l}_{jk} \bar{l}_{ik} d_{kk}, \quad j = i, i+1 \dots; \\ d_{ii} &= \bar{l}_{ii}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Метод можно охарактеризовать следующими свойствами: 1) решение системы порядка N осуществляется за $N^3/3 + O(N^2)$ арифметических операций; 2) используется $N^2/2 + O(N)$ машинных слов оперативной памяти ЭВМ; 3) решение каждой новой системы с той же матрицей обходится в $2N^2 + O(N)$ операций и, наконец, 4) метод обладает численной устойчивостью.

Метод Гаусса [15, 16, 18—20, 27, 30, 33, 43]. В отличие от метода Холецкого, метод Гаусса применяется для решения систем уравнений с невырожденными матрицами общего вида. Пусть N — размерность системы. Метод начинается со следующего процесса:

$$A_{k+1} = L_k A_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

где матрица $A_1 = A$, структура матриц L_k и A_k будет описана ниже. Обозначим $A^{(k)} = \{a_{ij}^{(k)}\}$ — нижняя угловая подматрица порядка $N - k + 1$ в матрице A_k . Тогда элементы $A^{(k+1)}$ находятся по формуле

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i, j = k+1, k+2, \dots, N, \quad (62)$$

L_k — нижняя треугольная матрица с элементами $l_{ij}^{(k)}$, которые имеют следующий вид:

$$l_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ -a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, & j = k, i > j; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (63)$$

В результате $N - 1$ шагов имеем разложение матрицы A :

$$A = LU, \quad (64)$$

где $U = A_N$, $L = (L_{N-1} L_{N-2} \dots L_1)^{-1}$. Элементы матрицы L и U имеют вид

$$L_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j; \\ 1, & i = j; \\ -l_{ij}^{(j)}, & i > j; \end{cases} \quad U_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j; \\ a_{ij}^{(i)}, & i \leq j. \end{cases}$$

Затем решение системы находится последовательно из уравнений

$$Lv = f, \quad Uu = v.$$

Компактная схема для получения разложения (64) задается следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 U_{11} &= a_{11}, \quad U_{1j} = a_{1j}, \quad L_{j1} = a_{j1}/U_{11}, \quad j = 2, 3, \dots, N; \\
 U_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{ki}, \quad i = 2, 3, \dots, N; \\
 U_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{kj}, \quad L_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}U_{ki} \right) / U_{ii}, \quad (65) \\
 & \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad j = i + 1, i + 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

В процессе вычислений по формулам (62), (63) или (65) иногда делаются перестановки строк или столбцов, а может быть и строк и столбцов получающихся матриц. Перестановки используют с целью обеспечения неравенства нулю делителей, а также устойчивости вычислений к погрешностям округления. Если матрица A разреженная, то перестановки делаются еще и из соображений сохранения разреженности.

В результате погрешностей округления реально получается приближенная факторизация

$$A \approx \tilde{L}\tilde{U},$$

поэтому иногда бывает полезно использовать итерационное уточнение. Этот процесс можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 r^i &= f - Au^i, \\
 u^{i+1} &= u^i + \tilde{U}^{-1}\tilde{L}^{-1}r^i, \quad i = 1, 2, \dots, q - 1. \quad (66)
 \end{aligned}$$

При сходимости итерационного уточнения получается более точное решение системы (58), а также хорошая оценка для погрешности [27]. Метод Гаусса можно охарактеризовать следующими свойствами: 1) решение системы порядка N осуществляется за $2N^3/3 + O(N^2)$ арифметических операций; 2) для реализации требуется $N^2 + O(N)$ машинных слов оперативной памяти; 3) решение каждой новой системы с той же матрицей требует $2N^2 + O(N)$ арифметических операций; 4) при решении практических задач, как правило, обеспечивается численная устойчивость.

Отметим, что при использовании итерационного уточнения всего требуется $2N^2 + O(N)$ машинных слов оперативной памяти ЭВМ.

Метод трехдиагонализации [30]. Метод является одним из самых эффективных при решении систем уравнений с симметричными незнакоопределенными матрицами. Суть метода заключается в том, что исходная система уравнений приводится к системе с симметричной трехдиагональной матрицей, а затем полученная система решается методом Гаусса. Пусть N — размерность системы. Метод начинается со следующего процесса:

$$A_{k+1} = L_k A_k L_k^T, \quad k = 1, 2, \dots, N - 2, \quad (67)$$

где $A_1 = A$; L_k — нижняя треугольная матрица. Элементы матрицы L_k имеют следующий вид:

$$l_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ -a_{ik}^{(k)}/a_{k+1k}^{(k)}, & j = k + 1, i > j; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Элементы $a_{ij}^{(k+1)}$ нижней угловой подматрицы $A^{(k+1)}$ порядка $N - k$ в матрице A_{k+1} находятся по формулам

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik+1}^{(k)} a_{jk+1}^{(k)} - l_{jk+1}^{(k)} a_{ik+1}^{(k)} + l_{jk+1}^{(k)} l_{ik+1}^{(k)} a_{k+1k+1}^{(k)}, \\ i \geq j \geq 2.$$

Процесс (67) эквивалентен полученной факторизации матрицы A в следующем виде:

$$A = LTL^T, \tag{68}$$

где $T = A_{N-1}$ — симметричная трехдиагональная матрица; $L = (L_{N-2}L_{N-3} \dots L_1)^{-1}$. Матрицы L и T имеют следующие элементы:

$$L_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ l_{ij}^{(j-1)}, & i > j, j \neq 1; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

$$T_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^{(m)}, & m = \min(i, j); |i - j| \leq 1; \\ 0, & |i - j| > 1. \end{cases}$$

После получения факторизации (68) решение системы можно найти, последовательно решая уравнения

$$Lv = f, \quad Tw = v, \quad L^T u = w.$$

Приведем компактную схему вычисления разложения (68). Пусть $H = TL^T$ — матрица с элементами h_{ij} . Тогда для $k = 1, 2, \dots, N-1$ вычисления проводятся по формулам:

$$h_{ik} = T_{i-1i} L_{ki-1} + T_{ii} L_{ki} + T_{i+1i} L_{ki+1}, \quad i = 2, 3, \dots, k-1)$$

$$h_{jk} = a_{jk} - \sum_{m=2}^{j-1} L_{jm} h_{mk}, \quad j = k, k+1;$$

$$T_{kk} = h_{kk} - T_{k-1k} L_{kk-1};$$

$$T_{k+1k} = h_{k+1k};$$

$$L_{ik+1} = \left(a_{ik} - \sum_{m=2}^k L_{im} h_{mk} \right) / h_{k+1k}, \quad i = k+2, \dots, N.$$

В методе трехдиагонализации и в компактной схеме этого метода для возможности продолжения вычислений, для повышения их устойчивости, а также для сохранения разреженности делаются перестановки строк и столбцов получающихся матриц. Как и в методе Гаус-

са, чтобы повысить точность найденного решения, можно использовать процесс итерационного уточнения, аналогичный (66).

Компактная схема метода трехдиагонализации имеет свойства, аналогичные свойствам метода Холецкого. Небольшие различия связаны с решением трехдиагональной системы. При решении практических задач этим методом обеспечивается численная устойчивость. *Метод отражений или метод Хаусхолдера* [14, 19, 37]. Как и метод Гаусса, метод отражений применяется для решения систем уравнений с невырожденными матрицами общего вида. В методе сначала строится факторизация матрицы A вида

$$A = QR, \quad (69)$$

где Q — ортогональная, R — верхняя треугольная матрицы. Факторизация (69) строится последовательно по формулам

$$A_{k+1} = Q_k A_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

где матрица $A_1 = A$, матрицы Q_k — ортогональные. В результате перемножения матриц Q_k и A_k элементы k -го столбца матрицы A_{k+1} , лежащие ниже главной диагонали, становятся нулевыми, при этом первые $k-1$ столбцов остаются неизменными. Матрица Q_k называется преобразованием Хаусхолдера и имеет вид

$$Q_k = E - w^k (w^k)^T,$$

где $(w^k)_j = 0, j = 1, 2, \dots, k-1$, а остальные элементы вектора w^k выбираются так, чтобы Q_k была ортогональной и в произведении $Q_k A_k$ требуемые элементы k -го столбца были равны нулю. После получения факторизации (69) последовательно решаются системы уравнений:

$$Qv = f, \quad Ru = v,$$

где в силу ортогональности $Q^{-1} = Q^T$. Для повышения устойчивости вычислений иногда делают перестановки столбцов матриц. Метод позволяет эффективно использовать режим накопления и характеризуется следующими свойствами: 1) решение системы порядка N осуществляется за $4N^3/3 + O(N^2)$ арифметических операций; 2) для реализации требуется $N^2 + O(N)$ машинных слов оперативной памяти ЭВМ; 3) решение каждой новой системы с той же матрицей требует $3N^2 + O(N)$ арифметических операций; 4) метод обладает численной устойчивостью.

Отметим, что при решении систем нелинейных уравнений методом секущих использование QR -факторизации может быть более эффективным, чем использование LU -факторизации (метод Гаусса).

В табл. 1 сводятся основные характеристики приведенных четырех методов.

Итерационные методы. Современные итерационные методы для широкого класса задач, как правило, более экономичны, чем прямые методы. Однако скорость сходимости некоторых итерационных мето-

Таблица 1. Сравнение основных характеристик прямых методов

Метод	Оперативная память	Число арифметических операций
Холецкого: $A = A^T > 0$	$(1/2) N^2 + O(N)$	$(1/3) N^3 + O(N^2)$
Компактная схема метода трехдиагонализации: $A = A^T, \det(A) \neq 0$	$(1/2) N^2 + O(N)$	$(1/3) N^3 + O(N^2)$
Гаусса: $\det(A) \neq 0$	$N^2 + O(N)$	$(2/3) N^3 + O(N^2)$
Отражений: $\det(A) \neq 0$	$N^2 + O(N)$	$(4/3) N^3 + O(N^2)$

дов может существенно зависеть от начального приближения к точному решению системы, от числа обусловленности матрицы этой системы, от точности выбора числовых параметров итерационного процесса. Поэтому при выборе итерационного метода следует обращать особое внимание, насколько успешно в нем решаются вопросы, связанные со скоростью сходимости. Эффективность итерационного метода обычно определяется числом арифметических и логических действий на каждой итерации и числом итераций, необходимым для достижения заданной точности приближенного решения.

В качестве характеристики скорости сходимости итерационного метода вида

$$u^{k+1} = Su^k + z$$

обычно выбирают асимптотическую скорость сходимости R , определяемую по формуле

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{k} \log \|S^k\| = -\log \rho(S).$$

Оператор S называют оператором перехода, $\rho(S)$ — спектральный радиус S — максимальный из модулей собственных значений S .

Приведем наиболее часто используемые на практике, уже успевшие себя хорошо зарекомендовать итерационные методы. Более подробное рассмотрение этих методов можно найти в книгах [15, 18, 20, 24, 32, 39—45], а также в работах [149—151].

Метод последовательной поточечной верхней релаксации (ППВР) [15, 24, 32, 39—42]. Для системы уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}u_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (70)$$

метод определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_i^{k+\frac{1}{2}} &= \left[\sum_{j<i} a_{ij} u_j^{k+1} + \sum_{j>i} a_{ij} u_j^k + f_i \right] / a_{ii}; \\ u_i^{k+1} &= u_i^k - \omega (u_i^{k+\frac{1}{2}} - u_i^k), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Здесь ω — релаксационный параметр.

Если $A = \{a_{ij}\}$ — матрица со строгим диагональным преобладанием или неразложимая матрица со слабым диагональным преобладанием, то существует такое число $\omega^* > 1$, что метод сходится для любого $\omega \in (0, \omega^*)$. Если матрица A симметричная и положительно определенная, то метод сходится тогда и только тогда, когда $\omega \in (0, 2)$.

Важным для скорости сходимости метода является вопрос о выборе оптимального параметра $\omega = \omega_{\text{опт}}$. Пусть $A = D + L + U$, где D — диагональная, L — строго нижняя треугольная, U — строго верхняя треугольная матрицы. Если матрица $S = D^{-1}(L + U)$ является согласованно упорядоченной, все ее собственные числа вещественны и спектральный радиус $\rho(S) < 1$, то

$$\omega_{\text{опт}} = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - \rho(S)})}.$$

При решении практических задач значение $\rho(S)$, как правило, не бывает известно, поэтому параметр ω , близкий к $\omega_{\text{опт}}$, вычисляют приближенно. Этому вопросу посвящено большое количество работ. В качестве примера отметим алгоритмы вычисления ω в процессе итераций, разработанные в [32, 113, 152].

Для асимптотической скорости сходимости метода верна формула

$$R = -\ln(\omega_{\text{опт}} - 1).$$

Когда обусловленность матрицы A плохая, наблюдается медленная сходимость. Так, если A симметричная и положительно определенная, то $R \approx 2\sqrt{p}$, где p — число обусловленности.

Метод сопряженных градиентов (СГ) [14, 15, 20, 24, 42, 153]. Метод используется для решения систем с симметричными положительно определенными матрицами. Вычислительная схема метода задается формулами

$$p^1 = r^0 = Au^0 - f,$$

где u^0 — начальное приближение;

$$\left. \begin{aligned} r^i &= r^{i-1} + \alpha_i A p^i, \\ p^{i+1} &= r^i + \beta_i p^i, \\ u^i &= u^{i-1} + \alpha_i p^i, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где

$$\alpha_i = - \frac{(r^{i-1}, r^{i-1})}{(Ap^i, r^{i-1})} = - \frac{(r^{i-1}, p^i)}{(Ap^i, p^i)};$$

$$\beta_i = - \frac{(r^i, Ap^i)}{(Ap^i, p^i)} = \frac{(r^i, r^i)}{(r^{i-1}, r^{i-1})}.$$

При отсутствии погрешностей округления метод сходится самое большее за N итераций, где N — размерность системы. Если система плохо обусловлена, что бывает связано с ее большой размерностью, то итерационный процесс может быть численно неустойчивым. Полученный после N итераций вектор u^N может значительно отличаться от точного решения системы. Поэтому метод обычно применяется к переобусловленной системе уравнений. С методами построения переобусловливателей можно ознакомиться, например, в [14, 32, 149—151, 154].

Чебышевские итерационные методы (ЧИМ) [15, 24, 32, 42]. Двух-слойный метод Чебышева определяется следующим образом:

$$u^{k+1} = u^k - \tau_{k+1} H (Au^k - f), \tag{73}$$

где итерационные параметры τ_k вычисляются по формуле:

$$\tau_k = \left[\frac{\lambda^* + \lambda_*}{2} + \frac{\lambda^* - \lambda_*}{2} \mu_k \right]^{-1},$$

$$\mu_k \in M_n^* = \left\{ -\cos \frac{\pi i}{2n} \theta_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Здесь n — априорное число итераций, $1 \leq \theta_i^{(n)} \leq n$; $\theta_i^{(n)}$ — целые числа, упорядоченные таким образом, чтобы обеспечить минимальное влияние численной неустойчивости метода [24, 42]; λ_* и λ^* — нижняя и верхняя границы спектра матрицы произведения двух матриц H и A ; H — переобусловливающая матрица.

Если в формуле (73) используют постоянный параметр $\tau_k \equiv \tau = \left(\frac{\lambda^* + \lambda_*}{2} \right)^{-1}$, то метод называется методом простой итерации.

Устойчивым к вычислениям является полуитерационный метод Чебышева, который определяется следующим образом:

$$u^{k+1} = u^k - \begin{cases} \tau_1 H (Au^0 - f), & k = 0; \\ \tau_{k+1} H (Au^k - f) - \alpha_{k+1} (u^k - u^{k-1}), & k > 0. \end{cases} \tag{74}$$

Параметры τ_k и α_k вычисляются по формулам:

$$\tau_k \equiv \left(\frac{\lambda^* + \lambda_*}{2} \right)^{-1}, \quad \alpha_k = \left(1 - \frac{\sigma^2}{4} \alpha_{k-1} \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\alpha_1 = 2, \quad \sigma = (\lambda^* - \lambda_*) / (\lambda^* + \lambda_*).$$

Чебышевские методы сходятся, если собственные числа матрицы HA вещественны, положительны и матрица HA имеет полную систему собственных векторов.

Асимптотическая скорость сходимости методов дается соотношением: $R \approx 2/\sqrt{p}$, где $p = \lambda^*/\lambda_*$.

Значение величин λ_* и λ^* в практических задачах, как правило, не бывает известно. Для определения оценок границ спектра строят специальные алгоритмы, позволяющие вычислять эти оценки в процессе итераций [24, 42]. Хорошую оценку для λ^* можно получить, используя теорему Гершгорина.

Полуитерационный метод Чебышева также используется для ускорения сходимости симметризуемых итерационных методов [32].

Попеременно-треугольный метод (ПТМ) [24, 44]. Метод применяется для решения систем с симметричными положительно определенными матрицами. Итерационная схема метода имеет вид

$$u^{k+1} = u^k - \tau_{k+1} B_k^{-1} (A u^k - f),$$

где

$$B_k = (D + \omega_1^{(k)} A_1) D^{-1} (D + \omega_2^{(k)} A_2).$$

Пусть параметры $\omega_1^{(k)} = \omega_2^{(k)} = 2/\sqrt{\delta\Delta}$, числа δ и Δ определяются из неравенств:

$$A \geq \delta D, \quad A_1 D^{-1} A_2 \leq \frac{\Delta}{4} A, \quad \delta > 0, \quad \Delta > 0.$$

Матрица D , A_1 , A_2 обладают свойствами:

$$D = D^T > 0, \quad A = A_1 + A_2, \quad A_1 = A_2^T.$$

Параметры τ_k вычисляются по формулам

$$\tau_k = \left[\frac{\gamma^* + \gamma_*}{2} + \frac{\gamma^* - \gamma_*}{2} \mu_k \right]^{-1}, \quad \mu_k \in M_n^*,$$

где

$$\gamma_* = \frac{\delta}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{\Delta}} \right)^{-1}, \quad \gamma^* = \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4}.$$

При выбранных параметрах и условиях на матрицы D , A_1 , A_2 метод сходится. Асимптотическую скорость сходимости метода можно оценить следующим образом:

$$R \approx 2 \sqrt[4]{2/\eta}, \quad \text{где } \eta = \delta/\Delta.$$

Алгоритмы вычисления величин δ и Δ представлены в [24]. Там же приведены примеры выбора конкретных матриц D , A_1 , A_2 .

Метод симметричной последовательной верхней релаксации с ускорением по методу сопряженных градиентов (СПВР—СГ) [32]. Метод симметричной последовательной верхней релаксации определяется следующими формулами:

$$u^{k+1} = S_\omega u^k + f_\omega,$$

где

$$\begin{aligned} S_\omega &= P_\omega Q_\omega; \quad f_\omega = \omega(2 - \omega)(D + \omega U)^{-1} D(D + \omega L)^{-1} f; \\ P_\omega &= (D + \omega U)^{-1} ((1 - \omega)D - \omega L); \\ Q_\omega &= (D + \omega L)^{-1} ((1 - \omega)D - \omega U). \end{aligned}$$

Здесь использовались обозначения из разложения $A = D + L + U$. Для симметричной и положительно определенной матрицы A метод сходится для любого значения $\omega \in (0, 2)$.

Метод является симметризуемым, т. е. существует невырожденная матрица W , такая, что матрица $W(E - S_\omega)W^{-1}$ является симметричной и положительно определенной. В качестве W можно выбрать матрицу $D^{-1/2} \left(\frac{1}{\omega} D - U \right)$, и тогда систему уравнений

$$(E - S_\omega) u = f_\omega$$

можно преобразовать к виду

$$\tilde{A} \tilde{u} = \tilde{f}. \tag{75}$$

Здесь $\tilde{A} = W(E - S_\omega)W^{-1}$, $\tilde{u} = Wu$, $\tilde{f} = Wf_\omega$.

Далее метод сопряженных градиентов применяется к переобуловленной системе (75) согласно формулам:

u_0 — начальное приближение;

$$u^{k+1} = u^k + \alpha_k p^k, \quad k = 0, 1, \dots;$$

$$p^k = \begin{cases} \delta^0, & k = 0, \\ \delta^k + \beta_k p^{k-1}, & k = 1, 2, \dots; \end{cases} \tag{76}$$

$$\beta_k = - \frac{(W\delta^k, W(E - S_\omega)p^{k-1})}{(Wp^{k-1}, W(E - S_\omega)p^{k-1})} = \frac{(W\delta^k, W\delta^k)}{(W\delta^{k-1}, W\delta^{k-1})}, \quad k > 0;$$

$$\alpha_k = \frac{(Wp^k, W\delta^k)}{(Wp^k, W(E - S_\omega)p^k)} = \frac{(W\delta^k, W\delta^k)}{(Wp^k, W(E - S_\omega)p^k)}, \quad k \geq 0.$$

Здесь $\delta^k = -(E - S_\omega)u^k + f_\omega$.

В [32] есть также указания, как экономично реализовать формулы итерационного процесса (76).

Приведем результаты сравнения асимптотических скоростей сходимости перечисленных итерационных методов при решении модельной задачи. В качестве модельной задачи рассматривается краевая задача для двухмерного уравнения Пуассона в единичном квадрате с условиями Дирихле на границе этого квадрата. Дифференциальный оператор аппроксимируется пятиточечной разностной схемой на квадратной сетке с шагом h . В табл. 2 приведены данные для такой модельной задачи, когда h достаточно малая величина.

Метод неполного разложения Холецкого с методом сопряженных градиентов [149—151]. Метод можно использовать для произвольной невырожденной разреженной матрицы [150], однако эта общность тре-

Таблица 2. Сравнение асимптотической скорости сходимости итерационных методов для модельной задачи

Метод	ППВР	ЧИМ	ПТМ	СПВР-СГ
R	$2\pi h$	πh	$2\sqrt{\pi h}$	$2\sqrt{\pi h}$

бует дополнительной памяти ЭВМ и увеличивает число арифметических действий на одну итерацию. Для простоты рассмотрим случай, когда матрица системы A — симметричная и положительно определенная. Идея метода заключается в том, что используя формулы факторизации матрицы A методом Холецкого:

$$A = LL^T, \quad L = \{l_{ij}\},$$

формируется матрица \tilde{L} , такая, что

$$\tilde{L} = \{\tilde{l}_{ij}\}, \quad \tilde{l}_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, & (ij) \in \mathcal{P}, \\ 0, & (ij) \notin \mathcal{P}, \end{cases}$$

где $\mathcal{P} = \{(ij) \mid |i - j| = 0, 1, \dots, m\}$, m — полуширина ленты матрицы A . Далее исходная система преобразуется к виду

$$(\tilde{L}^{-1}A\tilde{L}^{-T})(\tilde{L}^T u) = \tilde{L}^{-1}f$$

и решается методом сопряженных градиентов согласно формулам:

$$r^0 = f - Au^0, \quad p^0 = (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1} r^0;$$

$$\alpha_k = \frac{(r^k, (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1} r^k)}{(p^k, Ap^k)};$$

$$u^{k+1} = u^k + \alpha_k p^k;$$

$$r^{k+1} = r^k - \alpha_k A p^k;$$

$$\beta_k = \frac{(r^{k+1}, (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1} r^{k+1})}{(r^k, (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1} r^k)};$$

$$p^{k+1} = (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1} r^{k+1} + \beta_k p^k, \quad k \geq 0.$$

Другие примеры выбора множества индексов \mathcal{P} имеются в работах [149, 151]. Ввиду своей практической эффективности метод пользуется большой популярностью у разработчиков комплексов программ, решающих задачу магнитостатики. Отметим также литературу, посвященную другим методам, основанным на неполной факторизации [42, 155—157].

Остановимся кратко на вопросе программного обеспечения методов решения систем линейных алгебраических уравнений. В настоящее время существует достаточно много хороших программ, реали-

зующих прямые методы. Методы Гаусса и Холецкого, реализованные в том или ином виде, обычно бывают в библиотеке программ любого физического научного центра. Прекрасным примером хорошо организованных, портативных программ могут служить программы библиотек IMSL, NAG, пакета LINPACK, кратко описанные в [31], пакета SPARSPACK, описанного в [26], программы библиотеки Harwell, описанные в добавлении к книге [34], пакета Y12M, описанного в [27]. В первых двух книгах имеются тексты некоторых программ на ФОРТРАНЕ. Хороший вариант реализации метода Гаусса в виде фортранной программы имеется в [43], реализация с использованием внешней памяти ЭВМ — в [158]. Тексты прекрасных программ есть также в [20, 21]. Алгоритмы из пакета ITPACK, использующие итерационные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений, и из пакета MINPACK, предназначенного для задач минимизации, имеются в [32] и [37] соответственно. Информацию о других зарубежных пакетах можно найти в [159]. Наибольшее распространение в советских вычислительных центрах имеют программы решения систем линейных уравнений из библиотеки Института математики АН БССР, библиотеки численного анализа НИИВЦ МГУ, пакета APAC Института кибернетики АН УССР. Более подробно информацию об этих библиотеках можно найти в сборниках «Математическое обеспечение ЕС ЭВМ» и «Программное обеспечение ЭВМ», а также в публикациях [160, 161] и имеющихся там ссылок. Ряд эффективных программ для решения системы алгебраических уравнений содержится в библиотеке «Дубна» ОИЯИ [162], библиотеке CERN [163] и в библиотеке программ журнала Computer Physics Communications.

В последнее время в связи с появлением новой вычислительной техники, созданием параллельных вычислительных систем многие численные методы пересматриваются заново с точки зрения своей эффективности. Разделы, посвященные вопросам разработки программного обеспечения для сверхмощных ЭВМ различной архитектуры, имеются в [164—167].

Методы решения дискретизованных нелинейных уравнений. Решение системы нелинейных уравнений общего вида представляет собой весьма трудную задачу. В математических постановках задач магнитостатики, как правило, бывает известно о существовании и единственности решения, монотонности, других свойствах оператора задачи [84, 85, 88, 124, 125, 130, 131, 135, 141]. Хорошая дискретизация должна сохранять свойства непрерывной задачи. В задачах магнитостатики может быть заранее известно близкое к решению системы нелинейных уравнений начальное приближение, что также облегчает процесс нахождения этого решения. Приведем несколько хорошо известных методов решения систем дискретизованных нелинейных уравнений. Более подробные сведения о приводимых методах, а также других методах ньютоновского типа можно найти в литературе [35—37, 40, 168—172]. Отметим, что задачу определения реше-

ния системы нелинейных уравнений

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_N) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (77)$$

можно свести к задаче минимизации функционала

$$l(u) = \sum_{i=1}^N [f_i(u)]^2. \quad (78)$$

Укажем литературу, в которой рассматривается задача минимизации, — [37—42].

Метод простой итерации [24, 36, 39—41]. Суть метода состоит в следующем: исходная система уравнений преобразуется к виду

$$u_i = g_i(u_1, u_2, \dots, u_N) \quad (79)$$

и итерации проводятся по формулам

$$u_i^{n+1} = g_i(u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

или в векторной форме

$$u^{n+1} = G(u^n). \quad (80)$$

В качестве итерационной схемы (80) иногда используют схему какого-либо итерационного метода решения линейных систем уравнений [36].

Если $\|G(u) - G(v)\| \leq g \|u - v\|$, $g < 1$, то система уравнений (79) имеет решение u^* и для погрешности справедлива оценка:

$$\|u^n - u^*\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|u^1 - u^0\|.$$

Иногда для ускорения сходимости итерационного процесса (80) может быть эффективным δ^2 -процесс экстраполяции [45]. Этот метод экстраполяции заключается в следующем: пусть u^n — найдено,

$$u_i^{n_1} = g_i(u_1^n, \dots, u_N^n), \quad u_i^{n_2} = g_i(u_1^{n_1}, \dots, u_N^{n_1}), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

тогда приближение u^{n+1} вычисляют по формуле

$$u_i^{n+1} = \frac{u_i^{n_2}u_i^{n_1} - (u_i^{n_1})^2}{u_i^{n_2} - 2u_i^{n_1} + u_i^n}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (81)$$

Отметим особенности метода простой итерации при решении задач магнитостатики. Обычно после каждой или нескольких итераций делается пересчет значений магнитной проницаемости или намагниченности. Включение параметра релаксации τ_k на каждой итерации, например, в формулу пересчета магнитной проницаемости

$$\mu^k = \tau_k \mu(u^k) + (1 - \tau_k) \mu^{k-1},$$

как правило, ускоряет скорость сходимости итерационного процесса. Величину τ_k выбирают в зависимости от поведения величины невязки [113, 173—175]. При пересчете магнитной проницаемости или намагниченности также можно использовать δ^2 -процесс экстраполяции.

Метод Ньютона [35—37]. Метод используется для решения системы нелинейных уравнений вида (77), или в векторной форме

$$F(u) = 0. \tag{82}$$

Итерационная схема метода задается следующим образом:

$$u^{k+1} = u^k - [F'(u^k)]^{-1} F(u^k), \tag{83}$$

где $F'(u^k)$ — матрица Якоби. Элементы матрицы $F'(u)$ имеют вид

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}.$$

Точные формулировки теорем о сходимости метода можно найти, например, в [35, 36]. Проверка условий локальной сходимости по существу сводится к проверке невырожденности матрицы Якоби и ее липшиц-непрерывности, как функции от u , в достаточно малой окрестности решения системы (82). Если метод сходится, то для погрешности на k -й итерации справедливы неравенства:

$$\|u^k - u^*\| \leq q \|u^{k-1} - u^*\|^2 \leq q^k \|u^0 - u^*\|^{2^k}, \quad q < 1,$$

где u^* — точное решение системы (82). В ряде задач метод может иметь глобальную сходимость, что определяется свойствами F .

К достоинствам метода можно отнести: 1) квадратичную сходимость от хорошего начального приближения; 2) возможность получения точного решения за одну итерацию для линейных задач. К недостаткам метода относят: 1) отсутствие глобальной сходимости для многих задач; 2) необходимость хранения в памяти ЭВМ и вычисления на каждой итерации матрицы Якоби; 3) необходимость в решении на каждой итерации системы линейных уравнений.

Иногда, в целях экономии вычислений, матрица Якоби вычисляется либо через несколько итераций, либо вообще только один раз [35, 36]. Такие методы называют модифицированными методами Ньютона.

Метод последовательной верхней релаксации — Ньютона [36]. Метод задается следующими формулами:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \omega f_i(u^{n,i}) \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_i}(u^{n,i}) \right]^{-1}, \quad 1 \leq i \leq N, \tag{84}$$

где

$$u^{n,i} = (u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^n, \dots, u_N^n)^T.$$

Результаты теоретического исследования метода приводятся в [36]. Там же имеются точные формулировки теорем о сходимости метода. В них важное значение имеет величина спектрального радиуса матрицы:

$$H_\omega(u^*) \equiv [D(u^*) + \omega L(u^*)]^{-1} [(1 - \omega)D(u^*) - \omega U(u^*)], \quad \omega > 0,$$

где $D(u^*)$, $L(u^*)$, $U(u^*)$ соответственно диагональная, нижняя и верхняя треугольные матрицы из разложения $F'(u^*) = D(u^*) +$

+ $L(u^*) + U(u^*)$. Если $\rho(H_\omega(u^*)) < 1$, то, в достаточно близкой к точному решению окрестности, метод сходится и скорость сходимости характеризуется предельным равенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sup} \|u^n - u^*\|^{\frac{1}{n}} = \rho(H_\omega(u^*)).$$

При определенных условиях на вид системы (77) и матрицы Якоби в [36] есть рекомендации по выбору оптимального параметра $\omega_{\text{опт}}$ из интервала $(0, 2)$. На практике значение ω , близкое к $\omega_{\text{опт}}$, определяется в ходе итерационного процесса [49]. Хорошим приближением к $\omega_{\text{опт}}$ может служить параметр, выбираемый по аналогии с линейным случаем.

Непрерывный аналог метода Ньютона [168—172]. В непрерывном аналоге метода Ньютона предполагается, что решение системы (82) зависит от параметра t , $0 \leq t < \infty$. Тогда для решения системы (82) имеем уравнения:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -[F'(u)]^{-1} F(u), \\ u(0) = u^0. \end{cases} \quad (85)$$

Точные формулировки теорем о существовании и единственности решения системы (85) можно найти в [168—172]. Наиболее труднопроверяемое условие, как и в методе Ньютона, — невырожденность матрицы $F'(u)$ в некоторой окрестности u^0 . Используя дискретизацию по методу Эйлера системы (85), получают следующий итерационный процесс:

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k [F'(u^k)]^{-1} F(u^k), \quad (86)$$

где u^0 — задано. Параметры τ_k на практике обычно выбирают в зависимости от поведения нормы невязки. Использование параметров τ_k существенно расширяет область сходимости метода Ньютона, который является частным случаем итерационного метода (86) при $\tau_k \equiv 1$.

Как и для метода Ньютона, для итерационного процесса (86) можно строить модификации, сокращающие объем вычислительной работы.

Глобально сходящаяся модификация метода секущих [37]. Иногда формулы для вычисления элементов матрицы $F'(u)$ бывают слишком громоздки. В этом случае обычно используют метод секущих или его модификации, называемые глобально сходящимися ввиду того, что они существенно расширяют область сходимости метода секущих [37]. Приведем формулы метода секущих:

$$\begin{aligned} A_k p^k &= -F(u^k); \\ u^{k+1} &= u^k + p^k; \\ z^{k+1} &= F(u^{k+1}) - F(u^k); \\ A_{k+1} &= A_k + (z^{k+1} - A_k p^k) (p^k)^T / (p^k, p^k). \end{aligned}$$

Как и в методе Ньютона, для сходимости метода секущих очень важны условия невырожденности матрицы Якоби $F'(u^*)$, а также ее липшиц-непрерывность в некоторой области, содержащей решение системы u^* [37]. При определенных условиях, например [37], метод сходится сверхлинейно, т. е. погрешности на $k + 1$ -й и k -й итерации связаны неравенством

$$\| u^{k+1} - u^* \| \leq c_k \| u^k - u^* \|,$$

где $\{c_k\}$ — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю. Главным критерием сверхлинейной сходимости является равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|(A_k - F'(u^*)) (u^{k+1} - u^k)\|}{\|u^{k+1} - u^k\|} = 0.$$

Приведем наиболее простой в реализации алгоритм глобально сходящейся модификации метода секущих [37]. Пусть задано начальное приближение u^0 и вычислена матрица A_0 — приближение к $F'(u^0)$. На k -й итерации:

1. Вычислить $F(u^k)$ и по некоторому критерию определить — можно ли закончить итерационный процесс или перейти к выполнению следующего шага.

2. Вычислить матрицу A_k по формулам:

$$z^k = F(u^k) - F(u^{k-1});$$

$$A_k = A_{k-1} + (z^k - A_{k-1}p^{k-1})(p^{k-1})^T / (p^{k-1}, p^{k-1}).$$

3. Получить факторизацию $A_k = Q_k R_k$, где Q_k — ортогональная, а R_k — верхняя треугольная матрицы, по формулам:

$$A_k = Q_{k-1} R_{k-1} + v \cdot \tilde{v}^T = Q_{k-1} (R_{k-1} + (Q_{k-1}^T v) \tilde{v}^T);$$

$$R_{k-1} + (Q_{k-1}^T v) \tilde{v}^T = Q_{k-1/2} R_k;$$

$$Q_k = Q_{k-1} Q_{k-1/2}.$$

Оценить число обусловленности матрицы A_k . Если обусловленность плохая, внести регуляризующее возмущение [13, 37].

4. Решить систему $A_k p^k = -F(u^k)$.

5. Выбрать λ_{km} из условия:

$$l(u^k + \lambda_{kj} p^k) > l(u^k) + \alpha \lambda_{kj} (\nabla l(u^k), p^k),$$

где $\lambda_{k1} = 1$; $\lambda_{kj+1} = \rho \lambda_{kj}$; $\rho \in [a, b]$; $0 < a < b < 1$; $\alpha \in (0, 1/2)$.

6. Вычислить $u^{k+1} = u^k + \lambda_{km} p^k$.

Здесь функционал $l(u)$ определен равенством (78), $\nabla l(u^k) = [A_k]^T F(u^k)$. Конкретные примеры введения регуляризации при вырожденной A_k , а также выбор параметров ρ и α приведены в книге [37].

Имеется один важный случай, когда алгоритм может найти неверное решение. Это может произойти, когда точка локального минимума функционала $l(u)$ не является корнем $F(u) = 0$. В этом случае $\det(F'(u)) = 0$.

4. ПАКЕТЫ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ

Во многих физических центрах существуют различные пакеты программ для решения задачи магнитостатики. Эволюция разработки таких пакетов представлена в табл. 3 из обзора [60]. В настоящее

Т а б л и ц а 3. Эволюция разработок пакетов программ для расчета магнитных полей

1962 г.	1967 г.	1972 г.	1977 г.	1982 г.	1987 г.
D2D I2D	I3D	D2D (NL) I3D (NL) D2D (PM) D3D *	D3D D3D (NL) D2D (A)	D3D (PM) D3D (A)	D2D (SH) D2D (VH)

D2D — дифференциальные уравнения, двухмерное пространство; I2D — интегральные уравнения, двухмерное пространство; D3D — дифференциальные уравнения, трехмерное пространство; I3D — интегральные уравнения, трехмерное пространство; NL — нелинейная задача; PM — постоянные магниты; A — анизотропия; SH — скалярный гистерезис; VH — векторный гистерезис; * — турбогенератор (специальный случай).

время актуальной становится задача автоматической генерации пакетов программ с нужными свойствами в зависимости от типа поставленной задачи [176]. Приведем уже установившиеся основные требования, которым должны удовлетворять пакеты программ, разрабатываемые для решения задачи магнитостатики [177]. Пакет программ должен содержать: входной блок (препроцессор), блок построения сетки, блок построения дискретизованных уравнений, блок решения системы алгебраических уравнений (процессор), блок обработки результатов и их визуализации (постпроцессор). Создание каждого блока представляет собой отдельную трудную задачу и является темой многочисленных публикаций [177, 178].

Входной блок содержит средства автоматизации задания данных задачи (геометрия области, свойства материалов и математической модели, вид уравнения, граничные условия). Соответственно со своими требованиями пользователь может задавать эту информацию, используя базу данных, содержащую типовую информацию по геометрии области ферромагнетика, токовых обмоток, по магнитным свойствам материалов, по вопросам построения сетки и т. д. [60, 110, 179, 180].

Блок построения двух- или трехмерных сеток для областей со сложной геометрией является одним из основных для успешного численного решения задачи. Распределение узлов сетки требует привязки не только к геометрии магнитной системы, но и учета априорно известных особенностей искомого решения. Эффективными

приемами учета особенностей решения вблизи углов и поверхностей раздела сред являются локальное сгущение сетки и использование в расчетах специальных базисных функций, позволяющих улучшить аппроксимацию сингулярных решений [7]. В дифференциальных постановках для учета поведения решения на бесконечности используются «бесконечные» элементы [101, 181], асимптотические граничные условия [133, 182—184] и другие методы [185, 186].

Для пакетов программ целесообразно автоматическое или полуавтоматическое построение сетки. Существует большое количество алгоритмов построения как регулярных [83, 187, 188], так и нерегулярных сеток [189, 190], среди которых одним из наиболее эффективных является построение триангуляции Делоне [191] для двумерных задач. Существуют также обобщения этого алгоритма для построения трехмерных сеток [192]. В последнее время интенсивно развивается подход, связанный с построением сеток, адаптивных к решению задачи [190, 193]. В этом случае, при наличии критерия для апостериорного анализа ошибки [194—196], сетка автоматически сгущается в тех областях, где ошибка максимальна. Процесс решения выполняется на нескольких сетках, поэтому возможно использование эффективных алгоритмов на последовательности сеток [197—201]. Этот подход делает возможным построение полностью автоматизированных пакетов программ.

Входной информацией для блока построения дискретизованных уравнений является информация об используемой постановке и о построенной сетке. Результатом является формирование системы алгебраических уравнений. Сложность реализации данного блока зависит от используемой аппроксимации. Для аппроксимации интегральных уравнений наиболее часто используют метод коллокации и метод Галеркина [9—12], а для аппроксимации дифференциальных уравнений — метод конечных разностей (МКР) [3—5, 82, 83, 111] или метод конечных элементов (МКЭ) как в проекционной, так и в вариационной формулировках [6—8, 71, 84, 85, 97, 101, 110].

Пакет программ может содержать различные методы решения системы алгебраических уравнений, которые применяются в зависимости от используемой постановки и специфики конкретной задачи.

Постпроцессор служит для наглядного представления полученных данных в виде графиков, гистограмм, изображения, если возможно цветного, распределения силовых линий и т. д., а также для дальнейшей их обработки с целью получения интересующих характеристик магнитной системы, таких, как гармоника компонент магнитного поля, эффективная длина магнита и др.

Отдавая должное разработке универсальных пакетов программ, следует также иметь в виду достоинства программ, специализированных на вполне определенный круг задач. Эти достоинства заключаются в относительной простоте структуры и, следовательно, программирования, компактности системы задания исходных данных, существенном улучшении таких характеристик, как время расчета,

точность, надежность, требования на память ЭВМ. Использование специализированных программ позволяет во много раз уменьшить требования к ресурсам ЭВМ, необходимым для проведения многочисленных расчетов при проектировании и эксплуатации дорогостоящих физических установок.

Приведем краткую информацию о некоторых программах, используемых для расчета магнитных систем ускорителей. Список выбранных программ, конечно, далеко неполный и не может претендовать на отражение всего разнообразия постановок задачи магнитостатики, методов решения дискретизованных уравнений, сервисного обеспечения, возможностей, предоставляемых для пользователя.

POISSON [202, 203] — наиболее широко распространенная программа для расчета двумерных полей. Имеется множество версий и модификаций этой программы [204]. Она основывается на работе [83], где было предложено использовать конечно-разностную или конечно-элементную аппроксимацию на регулярной треугольной сетке. Программа постоянно пополняется. В последнее время в нее

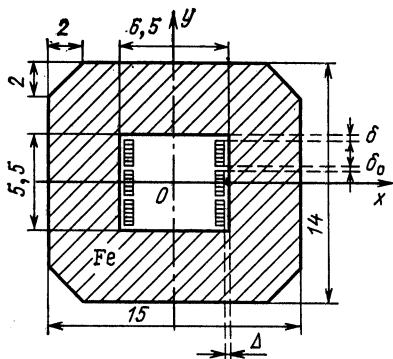


Рис. 1. Поперечное сечение поворотного магнита синхротрона СПИН

были добавлены возможности учета поведения решения на бесконечности с помощью асимптотических граничных условий [183], а также использование метода сопряженных градиентов с преобусловливанием для решения линейной задачи.

В качестве примера возьмем здесь расчет [205] распределения двумерного поля дипольного магнита сверхпроводящего синхротрона СПИН [206, 207] ЛВЭ ОИЯИ. На рис. 1 изображено поперечное сечение этого диполя. Расчетная сетка (фотография с дисплея) на 1116 узлов показана на рис. 2. Результаты расчетов приведены в табл. 6.

RAMZES-II [78] — пакет программ, созданный на основе пакета ЭСТАМП в ВЦ СО АН СССР, для расчета двумерных электромагнитных полей. В пакете используется дифференциальная постановка относительно однокомпонентного векторного потенциала, МКЭ для дискретизации задачи. Для решения системы алгебраических уравнений используются методы ПВР — Ньютона, разложение Холецкого и др. Имеется возможность рассчитывать системы с постоянными магнитами с учетом анизотропных свойств сред и некоторого приближения гистерезиса. Разрабатываются также модули пакета RAMZES-III [188, 208] для расчета трехмерных электромагнитных полей. Отметим богатый опыт разработчиков в создании пакетов прикладных программ.

GRIDS [209] — комплекс программ, разработанный в ОИЯИ в 1984 г. для расчета характеристик двухмерных полей магнитов со ступенчатой конфигурацией. Используется постановка относительно однокомпонентного векторного потенциала. Для точного учета условия

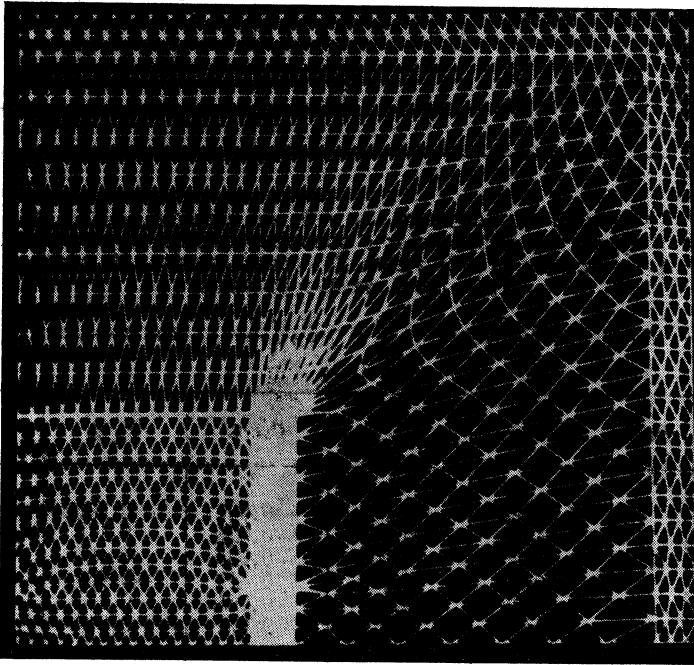


Рис. 2. Двухмерная расчетная сетка (фотография с дисплея) поворотного магнита синхротрона СПИН

убывания поля на бесконечности есть возможность использовать комбинированную постановку. Для дискретизации дифференциальных уравнений используется МКР, для ГИУ — метод коллокаций с кусочно-линейной аппроксимацией потенциала. Дискретизованная дифференциальная задача решается методом нелинейной ПВР с пересчетом μ по формулам нижней релаксации. При использовании комбинированной постановки система, состоящая из дискретизованного ГИУ и дискретизованного нелинейного дифференциального уравнения, решается таким же методом, как и в дифференциальной постановке [210]. К достоинствам комплекса следует отнести организацию расчетов на последовательности сеток с целью ускорения сходимости итерационного процесса, анализа и повышения точности получаемых результатов.

С помощью GRIDS рассчитывалось [211] поле магнита, конфигурация которого изображена на рис. 1. Использована последователь-

Таблица 4. Количество итераций и время счета при многосеточной (k_M, t_M) и обычной (k_U, t_U) организации вычислений (точность итерационного процесса $\varepsilon = 10^{-5}$)

Сетка	k_M	k_U	t_M, c	t_U, c
21×21	90	90	12	12
41×41	48	180	26	96
81×81	38	360	85	768

Таблица 5. Значения B_1 и C_n на радиусе $r_0 = 2,5$ см. Сравнение результатов, полученных с помощью GRIDS на различных сетках: I — сетка из 21×21 узлов, II — сетка из 41×41 узлов, III — сетка из 81×81 узлов.

$$B_y(r, \theta) = B_1 \left[1 + \sum_{n=3, 5, 7, \dots} C_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \cos(n-1)\theta \right]$$

I, A	Сетка	$B_1, Tл$	$C_3, \%$	$C_5, \%$	$C_7, \%$	$C_9, \%$
500	I	0,54826	-0,002	-0,001	0,186	0,378
	II	0,54826	-0,005	-0,024	0,119	0,267
	III	0,54825	-0,005	-0,026	0,110	0,271
2500	I	2,58777	2,833	0,519	-0,007	0,097
	II	2,59783	2,956	-0,044	0,114	0,243
	III	2,59456	2,981	0,071	0,010	0,281

Таблица 6. Значения B_1 и C_n (на радиусе $r_0 = 2,5$ см) в зависимости от тока в одном витке СП-обмотки. Сравнение результатов, полученных с помощью программ MIC2, POISSON и GRIDS (сетка 81×81 узлов)

I, A	Программа	$B_1, Tл$	$\frac{B_1/I}{10^{-4} Tл/A}$	$C_3, \%$	$C_5, \%$	$C_7, \%$	$C_9, \%$	$C_{11}, \%$
500	MIC2	0,54797	10,9594	-0,015	-0,026	0,110	0,273	0,285
	POI	0,54814	10,9628	-0,000	-0,016	0,135	0,265	0,079
	GRID	0,54824	10,9648	-0,007	-0,026	0,112	0,274	0,287
1000	POI	1,0963	10,963	-0,003	-0,012	0,134	0,266	0,078
	GRID	1,0965	10,965	-0,007	-0,024	0,112	0,275	0,287
1500	POI	1,6412	10,9413	0,102	0,007	0,128	0,264	0,081
	GRID	1,6426	10,9507	0,072	-0,022	0,108	0,275	0,288
2000	POI	2,1443	10,7215	1,164	0,099	0,084	0,277	0,056
	GRID	2,1619	10,8095	0,793	0,030	0,064	0,276	0,296
2500	POI	2,5796	10,3184	2,768	0,369	-0,011	0,244	0,125
	GRID	2,5945	10,3780	2,9799	0,070	0,012	0,285	0,273

ность трех сеток: I — 21×21 , II — 41×41 и III — 81×81 узлов. В табл. 4 приведены число итераций k_M и k_U , а также время счета t_M и t_U при многосеточной и обычной организации расчетов поля этого диполя. В табл. 5 приведено сравнение результатов, полученных

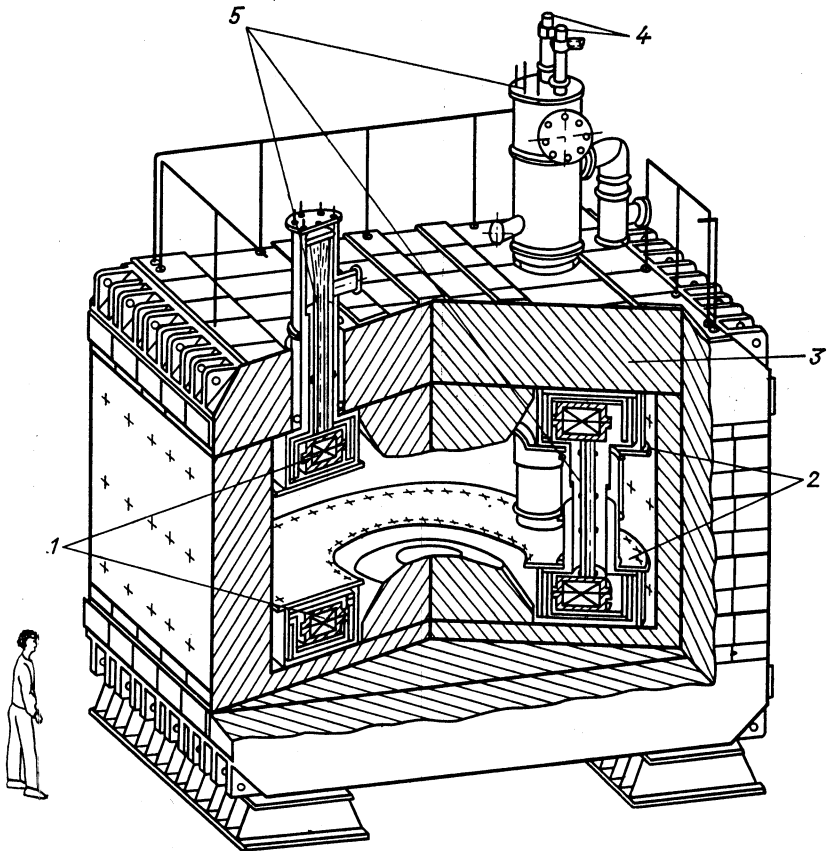


Рис. 3. Общий вид магнита спектрометра:

- 1 — обмотка возбуждения; 2 — кристат; 3 — магнитопровод; 4 — охлаждаемые тоководы;
5 — криогенные коммуникации

на различных сетках. В сводной табл. 6 приведены результаты расчетов поля данного диполя с помощью программ GRIDS, POISSON и MIC2 [212].

КОМПОТ [110, 213] — программный комплекс, разработанный в НИИЭФА (г. Ленинград) в 1986 г. для расчета трехмерных магнито-статических полей. Разработчики имеют богатый опыт разработки программных комплексов и расчета магнитных полей электрофизи-

ческих установок [57]. В комплексе используется дифференциальная постановка относительно модифицированного скалярного потенциала. Для дискретизации задачи используется МКЭ с тринейными базисными функциями и асимптотические граничные условия для учета убывания решения на бесконечности. Дискретизованная система уравнений решается методом нелинейной ПВР или непрерывным аналогом метода Ньютона. В последней версии комплекса для решения системы используется метод СПВР с применением полиномиальных процедур ускорения сходимости итерационного процесса [15].

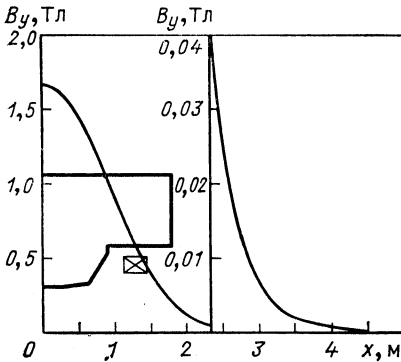


Рис. 4. Распределение основной компоненты B_y в плоскости $y = 0$

вид спектрометра. На рис. 4 представлено распределение компоненты B_y в плоскости $y = 0$ вдоль направления Ox в окно электромагнита.

ФЕМВ3 [118] — комплекс программ, разрабатываемый с 1980 г. в ИФВЭ (г. Серпухов), для решения задачи магнитоэластики. Используется комбинированная постановка относительно трех скалярных потенциалов. ГИУ записывается на границе области, занимаемой ферромагнетиком. Для дискретизации используется МКЭ для дифференциальных уравнений и метод коллокаций для ГИУ. Решение алгебраической системы уравнений находится в результате последовательного решения системы, полученной в результате дискретизации дифференциального уравнения, и системы, полученной в результате дискретизации ГИУ. Решение спивается по методу релаксации. Для улучшения сходимости коэффициенты релаксации выбираются методом минимальных невязок. Через несколько итераций выполняется пересчет μ . Коэффициент релаксации для пересчета μ выбирается индивидуально для каждого элемента на основе экстраполяции значений μ на двух предыдущих шагах. Имеется вариант комплекса — ФЕМВ2 — для расчета двумерных магнитоэластических полей. В качестве примера расчета, выполненного по программе ФЕМВ3, приведем расчет квадрупольной линзы [118]. Три четвертых объема этой линзы изображено на рис. 5. На рис. 6 представлены графики изменения градиента поля G (10^{-2} Тл/м) вдоль оси Ox (см) в медианной плоскости и вдоль оси Oz (см) по оси линзы.

МОК31 [215] — модульный комплекс программ, созданный для расчета пространственного распределения краевого поля синхротронного дипольного магнита. Комплекс разработан в ОИЯИ в 1987 г. Используется комбинированная постановка относительно двух ска-

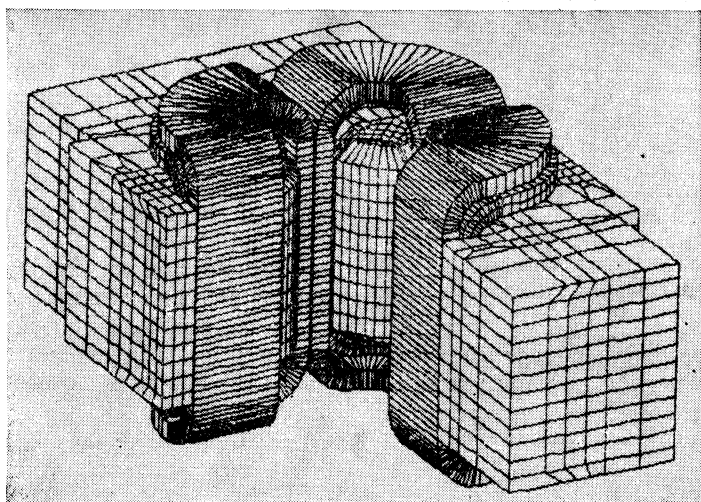


Рис. 5. Трехмерная расчетная сетка (3/4 объема) квадрупольной линзы

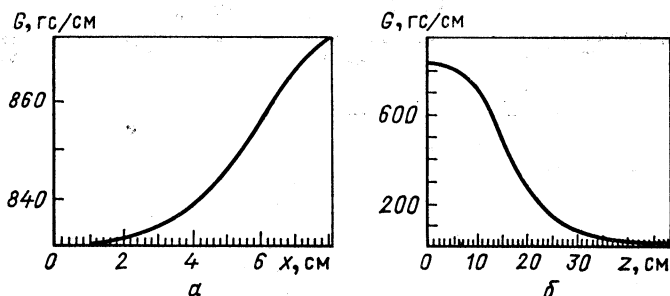


Рис. 6. Изменение градиента G (Гс/см):

a — вдоль оси Ox (см) в медианной плоскости; b — вдоль оси Oz (см) по оси линзы

лярных потенциалов. Для дискретизации дифференциальных уравнений используется МКР, ГИУ — метод коллокаций с кусочно-постоянной аппроксимацией потенциала. Система, полученная в результате дискретизации дифференциальных уравнений, решается методом, аналогичным используемому в программе CRIDS; система, полученная в результате дискретизации ГИУ, — поперечно-треугольным методом. На вспомогательной границе приближенные решения спи-

ваются методом простой итерации. Отличительной чертой комплекса является организация расчетов на последовательности сеток и использование вспомогательной границы в виде поверхности параллелепипеда, что позволило построить экономичные алгоритмы решения ГИУ.

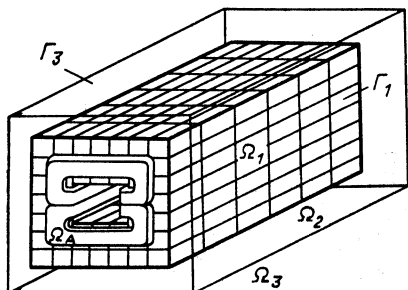


Рис. 7. Трехмерная расчетная сетка дипольного магнита

На рис. 7 представлена расчетная сетка диполя (область внутри железа и вспомогательная область). Распределение компонент поля B_x , B_z и B_y на торце магнита представлено на рис. 8. На рис. 8, а, б для индукций $\sim 0,55$ Тл показано появление на торце магнита поперечной компоненты поля B_x и продольной B_z , в то время как в центральной области магнита они минимальны. Спад основной компоненты поля B_y для индукции $\sim 0,55$ Тл (ток в СП-витке обмотки равен

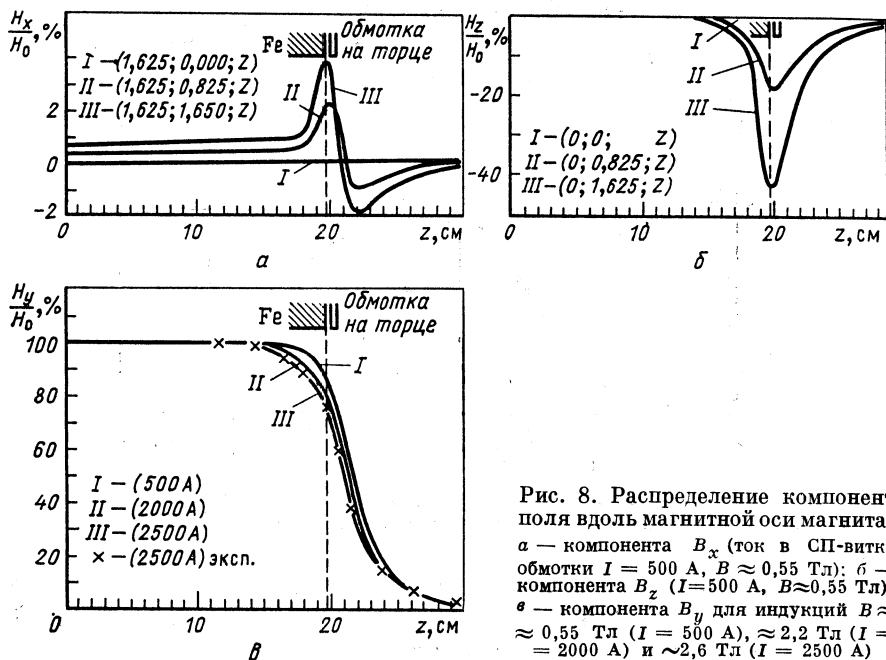


Рис. 8. Распределение компонент поля вдоль магнитной оси магнита: а — компонента B_x (ток в СП-витке обмотки $I = 500$ А, $B \approx 0,55$ Тл); б — компонента B_z ($I = 500$ А, $B \approx 0,55$ Тл); в — компонента B_y для индукций $B \approx 0,55$ Тл ($I = 500$ А), $\approx 2,2$ Тл ($I = 2000$ А) и $\approx 2,6$ Тл ($I = 2500$ А)

500 А), $\sim 2,2$ Тл (ток 2000 А) и $\sim 2,6$ Тл (ток 2500 А) показан на рис. 8, в.

MAGNA [216] — комплекс программ, предназначенный для расчета пространственного распределения поля внутри сердечника

спектрометра. Создан в ОИЯИ в 1985 г. Используется дифференциальная постановка относительно полного скалярного потенциала с заданными граничными условиями. Для дискретизации задачи используется МКЭ с элементами первого порядка в цилиндрической системе координат. Для решения нелинейной системы уравнений используется

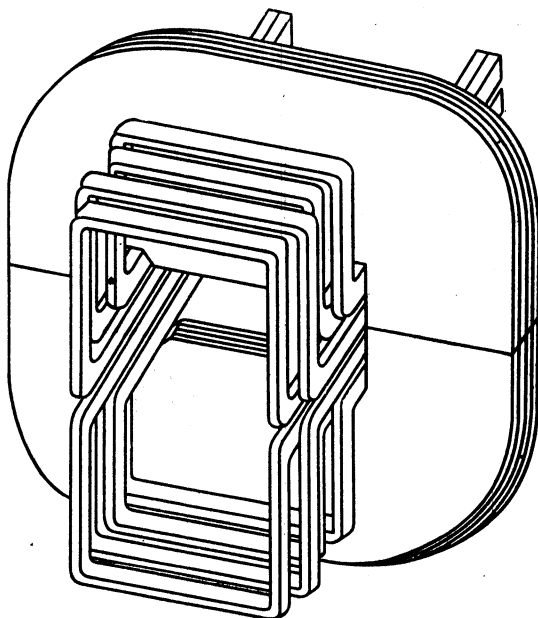


Рис. 9. Компьютерная модель дипольного магнита (superferric magnet) для сверхпроводящего суперколлайдера SSC

метод простых итераций с релаксацией μ . Решение линейной системы на каждой нелинейной итерации осуществляется методом Гаусса.

MAGNUS [101] — программа, разработанная в Texas Accelerator Center. Используются постановка относительно двух скалярных потенциалов, автоматический генератор сетки, МКЭ для дискретизации задачи, «бесконечные» элементы для учета убывания поля на бесконечности. Для решения системы уравнений применяется метод, основанный на автоматическом исключении неизвестных, находящихся вне области, занимаемой ферромагнетиком. Это позволяет решать нелинейную задачу только внутри этой области. Для построения и решения линеаризованной системы используется технология разреженных матриц [34]. Учитываются анизотропные свойства материалов.

Комплекс программ использовался, в частности, для расчета распределения поля дипольного магнита (superferric magnet) для сверхпроводящего суперколлайдера (SSC) [217]. На рис. 9 предета-

влено изображение торцевой части модели магнита. Исследовались возможности уменьшения мультипольных компонент поля и создание требуемого однородного (10^{-4}) поля за счет выбора соотношения токов в представленных на рис. 9 обмотках возбуждения.

TOSCA [218] — пакет программ, разработанный в Rutherford Appleton Laboratory (Великобритания). Для ввода данных, построения сетки, обработки результатов имеются графические интерактивные пре- и постпроцессоры. Используется постановка относительно двух скалярных потенциалов, МКЭ для дискретизации задачи. Имеется возможность для пользователя выбирать 8- и 20-узловые

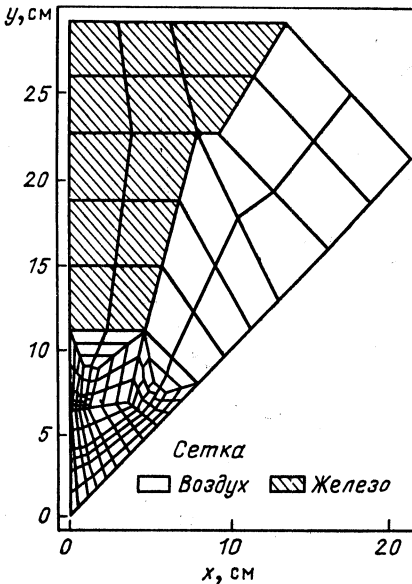


Рис. 10. Расчетная сетка в плоскости Oxy для $1/8$ части квадрупольного магнита

изопараметрические серендиповы элементы. Результирующая система уравнений решается с помощью процесса последовательных приближений, осуществляющего пересчет μ после каждого решения линейной системы. Линейная система решается методом сопряженных градиентов с переобуславливанием. В пакете имеется база данных, содержащая обширную информацию о токовых элементах, магнитных свойствах материалов и др.

Приведем пример вычислений [219] с помощью пакета TOSCA. На рис. 10 представлена сетка в плоскости Oxy для $1/8$ части квадрупольного магнита. В направлении оси Oz эта сетка продолжена призмами. Магнит характерен тем, что диаметр апертуры больше длины магнита, поэтому возникла необходимость в исследовании пространственного распределения магнитного поля. На рис. 11 представлены результаты сравнения вычисленного и измеренного по-

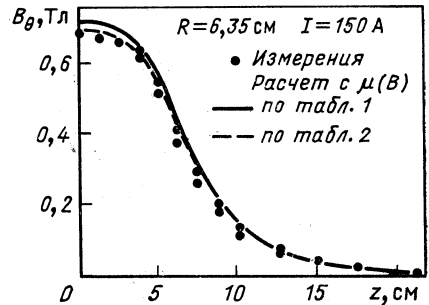


Рис. 11. Сравнение вычисленного и измеренного распределений поля квадрупольного магнита вдоль его магнитной оси

ля квадрупольного магнита в зависимости от силы тока в обмотке возбуждения. Вычисления проводились для двух различных таблиц зависимостей $|B|$ от $|H|$.

PADDY [102] — пакет программ, разработанный в компании Philips. Используется дифференциальная постановка задачи магнитостатики относительно двух скалярных потенциалов, дискретизация производится МКЭ на трилинейных шестигранных элементах. Для линеаризации полученной системы уравнений используется метод Ньютона — Рафсона, линейная система с разреженной матрицей решается методом неполного разложения Холецкого с методом сопряженных градиентов. Возможен расчет систем с постоянными магнитами и учет анизотропных свойств материалов.

PROFI [111] — пакет программ для расчета двух- и трехмерных магнитостатических полей, разрабатываемый с 1975 г. в Technische Hochschule (Дармштадт, ФРГ). Используется дифференциальная постановка относительно модифицированного скалярного потенциала. Дискретизация проводится методом конечных разностей (возможен МКЭ для двухмерных задач). Сетки строятся в декартовой и цилиндрической системах координат. Дискретизованная система уравнений решается методом нелинейной ПБР с пересчетом μ через несколько итераций. На рис. 12 представлен пример вычисления [220] компонент поля на торце дипольного C -образного магнита (рис. 12, *a* — общий вид) и представление с помощью PROF1 результатов (компоненты B_x , B_y , B_z) в виде изометрического изображения (рис. 12, *b*, *в*, *г*).

MAFIA-S3 [184] — часть разработанного в Deutsches elektronen — synchrotron (ФРГ, Гамбург) пакета программ MAFIA, предназначенная для расчета трехмерных магнитостатических полей. MAFIA-S3 имеет ряд общих блоков с пакетом PROF1. В блок решения добавлены возможность учета условия на бесконечности с помощью асимптотических граничных условий и использование многосеточного метода решения.

FLUX3D [221] — пакет программ, разработанный в Laboratoire d'Electrotechnique (Гренобль, Франция) для расчета трехмерных магнитостатических полей. Используются постановки относительно скалярного или векторного потенциала. Для дискретизации области автоматически строится разбиение Делоне на тетраэдры. Дискретизация задачи проводится МКЭ, для решения системы нелинейных алгебраических уравнений применяется метод Ньютона — Рафсона. Линейные уравнения решаются методом неполного разложения Холецкого с методом сопряженных градиентов. Пакет используется в САПР для моделирования электромагнитных полей.

GFUN3D [222] — пакет программ, созданный в Rutherford Appleton Laboratory в 1976 г. Один из первых пакетов программ для расчета трехмерных магнитных полей. Используется интегральная постановка относительно вектора намагниченности. Для дискретизации используется метод коллокации. Для решения системы не-

линейных дискретизованных уравнений применяется метод простой итерации с релаксацией вектора намагниченности. Существует более поздняя версия пакета [223].

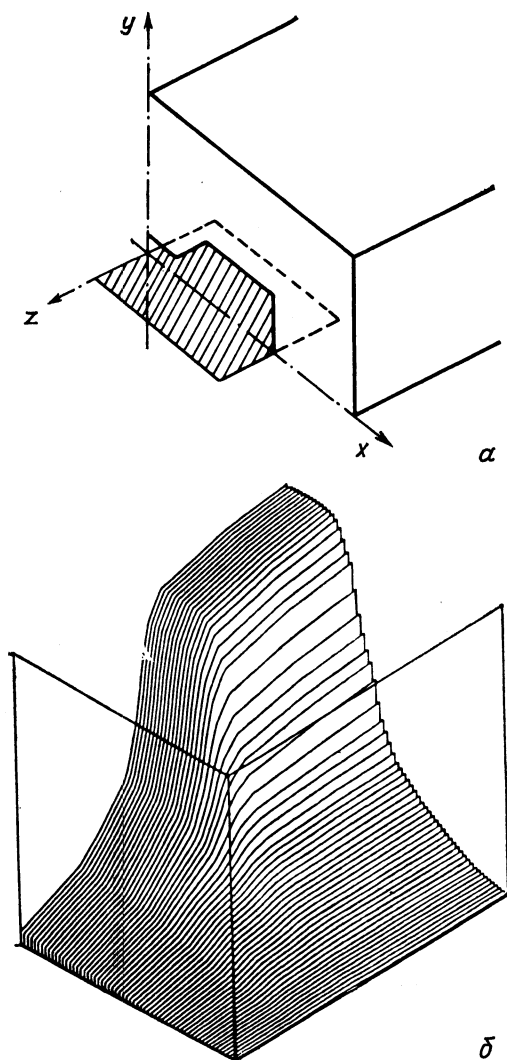
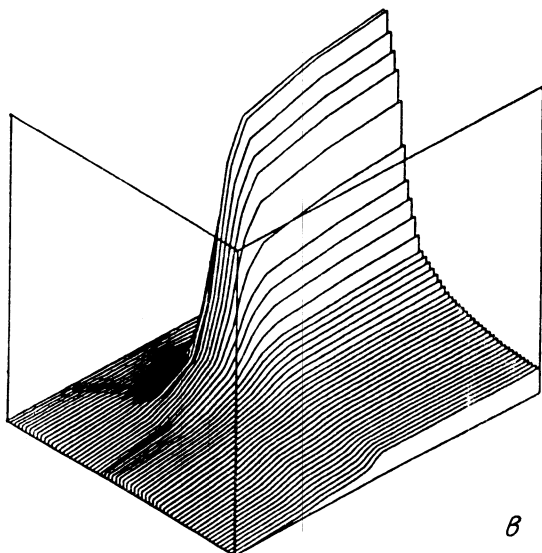


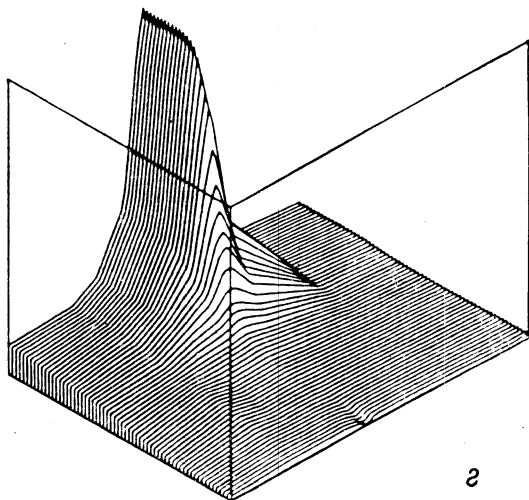
Рис. 12. Распределение компонент поля V_y , V_x и V_z на торце дипольного }C-об
 а — общий вид торца магнита; б — компонента V_y ; в — компонента V_x ; г — компонента

MAGSYS [123] — комплекс программ для расчета пространственных конфигураций циклотронных и синхротронных магнитных сис-

тем. Созданный в ОИЯИ в 1978 г. комплекс обобщает опыт работы разработчиков с пакетом GFUN3D. Используется интегральная постановка относительно вектора магнитной индукции, что делает



б



г

разного магнита:
 B_z

процесс численного решения более устойчивым. Введена возможность учета вращательной симметрии магнитопровода; для вычисле-

ния поля от обмоток можно использовать элементы в виде многогранников. Для решения системы нелинейных дискретизованных уравнений применяется метод простой итерации с релаксацией намагниченности в сочетании с методом минимальных невязок. Организация

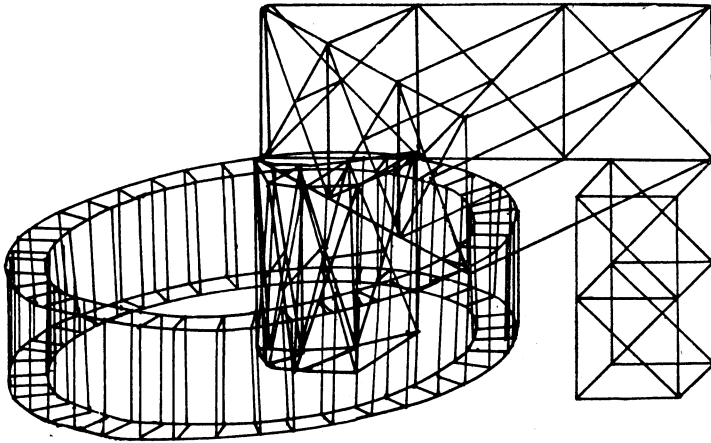


Рис. 13. Компьютерная модель Миланского циклотрона со сверхпроводящей обмоткой (разбиение на конечные элементы)

подготовки данных и анализ результатов могут осуществляться в интерактивном режиме на основе персональной ЭВМ ПРАВЕЦ-16, подключенной к локальной сети ОИЯИ [224]. Приведем пример расчета, выполненного с помощью программы MAGSYS. На рис. 13

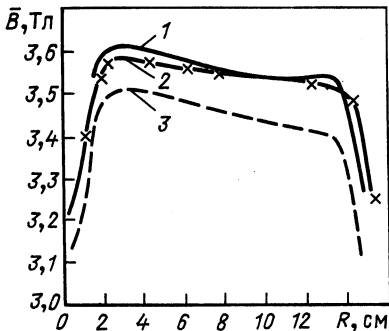


Рис. 14. Среднее магнитное поле Миланского циклотрона:

1 - расчет по MAGSYS; 2 - измеренная кривая; 3 - расчет двумерной методикой + метод равномерного намагничивания

представлена модель Миланского циклотрона со сверхпроводящей обмоткой, с соответствующим разбиением на конечные элементы. На рис. 14 изображены сравнительные значения среднего магнитного поля.

Комплекс программ для расчета трехмерных полей магнитных систем, использующий матричный процессор ЕС-2706 [225]. Комплекс

разработан в ОИЯИ в 1988 г. Используется интегральная постановка относительно вектора магнитной индукции. Для дискретизации задачи используется метод коллокации, для решения системы дискретизованных уравнений — метод простой итерации. Матричный процесс используется при вычислении элементов матрицы системы, поля от токовых обмоток, умножении матрицы на вектор в итерационном процессе. Комплекс использовался для расчета поля дипольного магнита. В табл. 7 приведены времена центрального процессора,

Таблица 7. Время центрального процессора, потраченное на различные этапы решения задачи на ЭВМ СДС-6500 и комплексе ЭВМ ЕС-1061, ЕС-2706

ЭВМ	Построение матрицы, с	Вычисление H , с	Решение системы (200 итер.), с	Пересчет поля в 88 точках, с
СДС-6500 100 элементов	524	163	563	563
ЕС-1061, ЕС-2706 60 элементов	18,3	2,3	9,5	21,6
ЕС-1061, ЕС-2706 100 элементов	33,2	2,9	15,6	26,9
ЕС-1061, ЕС-2706 480 элементов	458	3,2	802	68

потраченные на различные этапы решения задачи на машине СДС-6500 и машинном комплексе ЕС-1061, ЕС-2706, без учета времени работы матричного процессора.

MAG3D [226] — программа, предназначенная для расчета трехмерных магнитных систем на малых ЭВМ «Электроника 100/25», «Электроника-79». Используется прямой интегральный метод (GFUN-метод). Разбиение области железа производится на треугольные призмы или тетраэдры. Организован графический вывод: магнитные силовые линии, вектор сил в токовых элементах, вектор намагничивания в элементах разбиения, разбиение (в изометрии) на трехмерные элементы в области железа и токовых шин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные здесь методы и алгоритмы численного анализа магнитостатических задач дают представление об основных математических и программных средствах, используемых при решении этого круга вычислительных проблем, относящихся к категории высокой сложности. Математические основы качественного исследования уравнений опираются на теорию сильно монотонных операторов. При дискретизации дифференциальных уравнений методами конечных разностей или конечных элементов возникают сходные по спектральным характеристикам системы разреженных алгебраических уравнений, которые в общем случае нелинейны и содержат, при учете

краевых условий на бесконечности с помощью ГИУ, блоки, являющиеся плотными матрицами. К уравнениям с плотными матрицами большой размерности сводятся также объемные интегральные уравнения.

Исключая некоторые «экзотические» случаи, для двухмерных задач в настоящее время имеется ряд методов их эффективного решения, допускающих высокую степень автоматизации соответствующих вычислительных алгоритмов. Некоторые новые разработки здесь ведутся в связи с развитием параллельных алгоритмов [164—167].

Для трехмерных задач характерно не только формальное возрастание размерностей возникающих алгебраических систем, но и принципиальное качественное и логическое усложнение алгоритмов, изменение их вычислительных характеристик, значительное усложнение геометрии магнитной системы. Это предъявляет жесткие требования к вычислительным методам, выдвигая для разработчиков на первый план вопросы оптимизации и упрощения логики алгоритмов. Новые проблемы ставит разработка методов эффективных параллельных вычислений. В целом для трехмерных задач исследования по построению экономичных и универсальных алгоритмов в настоящее время не завершены и продолжают интенсивно развиваться. Разумеется, успехи здесь во многом зависят от наличия надежной и мощной вычислительной техники. Например, по нашим оценкам, для получения за разумное время требуемой точности для прецизионных расчетов магнитной системы средней сложности желательно иметь (наряду с надежной дисковой памятью) оперативную память порядка 8—16 Мбайт и быстродействие порядка 3—5 Мфлопс. Кроме того, для эффективной разработки и поддержки соответствующих программных систем необходимо иметь специализированные рабочие станции персональных компьютеров, связанные с базами данных и базами алгоритмов [60].

Авторы выражают благодарность П. Г. Акишину, С. Б. Ворожцову, Н. И. Дойникову, И. Б. Иссинскому, Г. Е. Мазуркевичу, И. М. Маторе, Р. В. Поляковой за полезное сотрудничество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baldin A. M., Averichev S. A., Beznogikh Yu. D. e.a.//IEEE Trans. on Nucl. Sci. 1983. Vol. NS-30, N4. P. 3247—3249.
2. Самарский А. А.//Коммунист. 1989. № 1. С. 82—92.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А.//ЖВМиМФ. 1961. Т. 1, № 1. С. 5—63.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
5. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
6. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
8. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач: Пер. с англ. М.: Мир, 1977.

9. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
10. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
11. Wendland W. L.//University of Stuttgart, Math. Inst. A., Preprint N10, July, 1988.
12. Wendland W. L.//Proc. of the Intern. Conf. on Numerical Methods and Applications, Sofia, 1985. P. 137—151.
13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
14. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
15. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 2-е. М.—Л.: Физматгиз, 1963.
16. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений: Пер. с англ. М.: Наука, 1970.
17. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры//Записки науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1975. С. 54—228.
18. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1966.
19. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
20. Уилкинсон Дж., Райниш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1976.
21. Бате К., Вилсон Е. Л. Численные методы анализа и метод конечных элементов: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1982.
22. Форсайт Дж., Моулер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1969.
23. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.
24. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
25. Тьюарсон Р. Разрежение матрицы: Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
26. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
27. Златев З., Эстербу О. Прямые методы для разреженных матриц: Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
28. Ильин В. П., Кузнецов Ю. И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985.
29. Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.
30. Икрамов Х. Д. Численные решения для симметричных линейных систем. Прямые методы. М.: Наука, 1987.
31. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
32. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы: Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
33. Икрамов Х. Д. Численные методы линейной алгебры. Решение линейных уравнений (Научно-популярная серия). М.: Знание, 1987, N 4.
34. Писсанецки С. Технология разреженных матриц: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
35. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Изд. 3-е. М.: Наука, 1984. С. 609—731.
36. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
37. Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
38. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

39. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. II. Изд. 3-е. М.: Наука, 1966.
40. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
41. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
42. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Изд. 3-е. М.: Наука, 1980.
43. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
44. Самарский А. А. Введение в численные методы. Изд. 2-е. М.: Наука, 1987.
45. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: Уч. пособие для вузов. М.: Наука, 1987.
46. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика: Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963.
47. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
48. Смайт М. Электростатика и электродинамика: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1964.
49. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
50. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма: Пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1948.
51. Демирчян К. С. Моделирование магнитных полей. Л.: Энергия, 1974.
52. Брехна Г. Сверхпроводящие магнитные системы: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
53. Colonias J. S. Particle Accelerator Design: Computer Programs. N.Y. — Lond.: Academic Press, 1974.
54. Тозони О. В., Маергойз И. Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев.: Техника, 1974.
55. Курбатов П. А., Аринчин С. А. Численный расчет электромагнитных полей. М.: Энергоатомиздат, 1984.
56. Дойников Н. И. Препринт НИИЭФА. Обзор ОБ-8. Л., 1976.
57. Дойников Н. И. Препринт НИИЭФА. Обзор ОБ-42. Л., 1981.
58. Ворожцов С. Б. ОИЯИ Д9-84-817. Дубна, 1985.
59. Tortschanoff T. CERN LEP-MA/84-30, 1984.
60. Trowbridge C. W.//IEEE Trans. on Mag. 1988. Vol. 24, N 1. P. 13—18.
61. Методы расчета электронно-оптических систем: сб. М.: Наука, 1977.
62. Алгоритмы и методы расчета электронно-оптических систем: Сб. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.
63. Современные методы расчета электронно-оптических систем. Материалы VIII Всесоюзного семинара по методам расчета электронно-оптических систем. Л.: ЛПИ, 1986.
64. Compumag 1, Oxford 1976, published Rutherford Appleton Laboratory/Ed: J. Simkin. Proc..., Chilton, 1976.
65. Compumag 2, Grenoble 1978, published Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, ERA 524 CNRS/Ed: J. C. Sabonnadiere. Proc..., Grenoble, 1978.
66. Compumag 3, Chicago 1981//IEEE Trans. in Magnetics. 1982. Vol. Mag-18, N2.
67. Compumag 4, Genoa 1983//IEEE Trans. in Magnetics. 1983. Vol. Mag-19, N6.
68. Compumag 5, Fort Collins 1985//IEEE Trans. in Magnetics. 1985. Vol. Mag-21, N6.
69. Compumag 6, Graz 1987//IEEE Trans. in Magnetics. 1988. Vol. Mag-24, N1.
70. J. Simkin, Trowbridge C. W. RL-78-009/B, 1978.
71. Coulomb J. L.//IEEE Trans. on Magnetics. 1981. Vol. MAG-17, N6. P. 3241—3246.
72. Demerdash N. A., Nehl T. W., Mohammed O. A. e.a.//Ibid. P. 3408—3410.
73. Csendes Z. J., Weiss J., Hoole S. R. H.//See [66]. P. 367—372.

74. Kotiuga R. P., Silvester P. P.//J. Appl. Phys. 1982. Vol. 53(11). P. 8399—8401.
75. Chari M. V. K., Konard A., Palmo M. A. e.a.//See [66]. P. 436—446.
76. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для инженеров и научных работников: Пер. с англ. М.: Наука, 1978.
77. Li L., Luomi J.//See [69]. P. 19—22.
78. Рапоцевич Е. П., Урванцев А. Л. Препринт ВЦ СО АН СССР Д481. Новосибирск, 1984.
79. Демирчян К. С. и др.//Изв. АН СССР. Сер. энергет. и трансп. 1974. № 1. С. 142—148.
80. Урванцев А. Л. Численное решение нелинейных магнитостатических задач методом конечных элементов: Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1981 (ВЦСО АН СССР).
81. Ворожцов С. Б., Закамская Л. Т., Заплатин П. Л. Препринт ОИЯИ 19-5013. Дубна, 1970.
82. Айрян Э. А., Жидков Е. П., Федоров А. В. и др.//Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. Будапешт, ЦИФИ-ОИЯИ. 1987. Вып. 5. С. 2—29.
83. Winslow A. M.//J. Comp. Phys. 1967. Vol. 2. P. 119—172.
84. Polak S. J., Wachtors A., de Beer A.//See [64]. P. 19—27.
85. Glowinski R., Marrocco A.//See [64]. P. 112—125.
86. Iselin C.//Proc. 3 Intern. Conf. on Magnet Technology, Hamburg, 1970. P. 83—99.
87. Айрян Э. А., Жидков Е. П., Хоромский Б. Н. и др. Сообщение ОИЯИ P11-82-871. Дубна, 1982.
88. Айрян Э. А., Жидков Е. П., Хоромский Б. Н. и др. Сообщение ОИЯИ Д11-87-49. Дубна, 1987.
89. Zienkiewicz O. C., Kelly D. W., Bettis P.//Intern. J. Num. Meth. Engng. 1977. Vol. 11. P. 335—376.
90. McDonald B. H., Wexler A.//IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 1972. Vol. MTT-20, N12. P. 841—847.
91. Salon S. J., Schneider J. M.//IEEE Trans. on Magnetics. 1981. Vol. MAG-17, N6. P. 2574—2576.
92. Zienkiewicz O. C., Lyness J., Owen D. R. J.//IEEE Trans. on Magnetics. 1977. Vol. Mag-13. P. 1649—1656.
93. Саеумаех S. CERN ISR-MA/70-19, 1970.
94. Müller W., Wolff W.//Electrotechnische Zeitschrift, EIZ-A. 1972. Vol. 93. P. 394—399.
95. Halacsy A. A.//Proc. 3rd Intern. Conf. on Magnet. Technology, Hamburg, 1970 (DESY, Hamburg, 1972). P. 113.
96. Iselin C.//See [64]. P. 15—18.
97. Armstrong A. G., Collie C. J., Simkin J. e.a.//See [65]. Paper 1.2.
98. Simkin J., Trowbridge C. W.//Intern. J. Numer. Meth. Engng. 1970. Vol. 14. P. 423—440.
99. Armstrong A. G., Biddlecombe C. S.//See [66]. P. 411—415.
100. Trowbridge G. W.//IEEE Trans. on Magnetics. 1982. Vol. MAG-18, N1, P. 293—297.
101. Pissanetsky S.//See [66]. P. 346—350.
102. De Beer A., Polak S. J., Wachtors A. J.//See [66]. P. 617—619.
103. Абрамов А. Г., Дайковский А. Г. и др. Препринт ИФВЭ 82-87. Серпухов, 1982.
104. Polak S. J., Wachtors A. J., van Welij J. S. e.a.//See [66]. P. 401—405.
105. Simkin J.//See [66]. P. 401—405.
106. Дойников Н. И., Симаков А. С.//ЖТФ, 1971. Т. 41, № 4. С. 835—838.
107. Müller W., Wolff W.//Electrotechnische Zeitschrift, ETZ-A. 1975. Vol. 96. P. 269—273.
108. Carpenter C. J., Locke D. H.//See [64]. P. 47—55.

109. Дойников Н. И., Симаков А. С.//ЖВМиМФ. 1973. Вып. 4.
110. Дойников Н. И., Ламзин Е. А., Симаков А. С. и др. Препринт/ЦНИИ-атоминформ. Б-0741. М., 1986.
111. Müller W., Kramer C., Krueger J. e.a.//See [67]. P. 2670—2673.
112. Sun Y., Tiang Z., Yao G. e.a.//See [68]. P. 2173—2176.
113. Perin R., van der Meer S. CERN/ISR/67-07, 1967.
114. Дойников Н. И., Симаков А. С.//ЖТФ. 1969. Т. 39. Вып. 8. С. 1463—1471.
115. Жидков Е. П., Мазуркевич Г. Е., Хоромский Б. Н. Сообщение ОИЯИ P11-86-230; P11-86-333. Дубна, 1986.
116. Meunier G., Goulomb J. L., Salon S. J.//IEEE Trans. on Magnetics, MAG-22. 1986. N5. P. 1040—1042.
117. Абрамов А. Г., Дайковский А. Г., Ершов С. Ю. и др. Препринт ИФВЭ 82-87. Серпухов, 1982.
118. Горловой М. В., Дайковский А. Г., Ершов С. Ю. и др.//Тр. V Всесоюз. семинара «Программа экспериментальных исследований на московской мезонной фабрике ИЯИ АН СССР. Звенигород, апрель 1987. М.: изд. ИЯИ АН СССР, 1987. С. 117—124.
119. Пеккер И. И.//Изв. вузов. Сер. Электромеханика. 1964, № 9. С. 1047—1051.
120. Пеккер И. И.//Изв. вузов. Сер. Электромеханика. 1969. № 6. С. 618—623.
121. Newman M. J., Trowbridge C. W., Turner L. P.//Proc. 4th Intern. Conf. on Magnet. Technology. Brookhaven, 1972. P. 617—626.
122. Акишин П. Г., Ворожцов С. Б., Жидков Е. П. Препринт ОИЯИ E9-11859. Дубна, 1978.
123. Борисовская З. В., Ворожцов С. Б., Калинин М. Б. и др. ОИЯИ B1-9-85-232. Дубна, 1985.
124. Акишин П. Г. Сообщение ОИЯИ P11-85-522. Дубна, 1986.
125. Акишин П. Г., Жидков Е. П., Кравцов В. Д. Сообщение ОИЯИ P11-87-732. Дубна, 1987.
126. Борисовская З. В., Ворожцов С. Б., Дударева Т. Н. Сообщение ОИЯИ 9-81-304. Дубна, 1981.
127. Борисовская З. В., Ворожцов С. Б., Дударева Т. Н. Сообщение ОИЯИ P -83-753. Дубна, 1983.
128. Акишин П. Г., Акопян В. П., Гаганов И. А. и др. Сообщение ОИЯИ P11-85-973. Дубна, 1985.
129. Акишин П. Г., Жидков Е. П., Кравцов В. Д. Препринт ОИЯИ E11-87-101. Дубна, 1987.
130. Friedman M. J.//Math. Comp. 1984. Vol. 43, N168. P. 415—431.
131. Pasciak J. E.//Math. Comp. 1984. Vol. 43, N168. P. 433—445.
132. Johnson S., Nedelec J. C.//Math. Comp. 1980. Vol. 35, N152. P. 1063—1079.
133. Сердюкова С. И. Сообщение ОИЯИ P5-84-718. Дубна, 1984.
134. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н. Препринт ОИЯИ P11-83-261. Дубна, 1983.
135. Жидков Е. П., Мазуркевич Г. Е., Хоромский Б. Н. Сообщение ОИЯИ P11-87-501. Дубна, 1987.
136. Zhidkov E. P., Khoromsky V. N.//Sov. J. Numer. Anal. Math. Mod. 1987. Vol. 2, N6. P. 463—488.
137. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н.//Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1988. Вып. 6. С. 134—145.
138. Хоромский Б. Н. Сообщение ОИЯИ P11-88-480. Дубна, 1988.
139. Хоромский Б. Н. Сообщение ОИЯИ P11-88-784. Дубна, 1988.
140. Агошков В. И., Лебедев В. И.//Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1985. Вып. 2. С. 173—227.
141. Кузнецов С. Б. Препринт ВЦ СО АН СССР № 111. Новосибирск, 1984.

142. Кузнецов Ю. А.//Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1985. Вып. 2. С. 265—350.
143. Грегуси М., Жидков Е. П., Мазуркевич Г. Е. и др.// Boundary Elements XI/Ed. Brebbia C. A., Springer-Verlag, 1989. Vol. 1.
144. Zhidkov E. P., Mazurkevich G. E., Khoromsky V. N.//Sov. J. Numer. Anal. Math. Mod. 1990. Vol. 5, N2.
145. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения: Пер. с нем. М.: Мир, 1978.
146. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложение: Пер. с франц. М.: Мир, 1971.
147. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: Пер. с франц. М.: Мир, 1980.
148. Boundary Elements X. (Ed. Brebbia C. A.). Springer-Verlag, 1988. Vol. 1—4.
149. Meijerink J. A., van der Vorst H. A.//Math. Comp. 1977. Vol. 31, N137. P. 148—162.
150. Kershaw D. S.//J. of Comp. Physics. 1978. Vol. 26. P. 43—65.
151. Meijerink J. A., van der Vorst H. A.//J. of Comp. Physics. 1981. Vol. 44. P. 134—155.
152. Carre V. A.//Comput. J. 1961. Vol. 4. P. 73—78.
153. Кузнецов Ю. А.//Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1983. Вып. 1. С. 267—301.
154. Axelsson O.//BIT. 1985. Vol. 25, N1, P. 166—187.
155. Булеев Н. И.//Матем. сб. 1960. Т. 5. № 2.
156. Булеев Н. И.//ЖВММФ. 1970. Т. 10. № 4.
157. Ильин В. П. Препринт ВЦ СО АН СССР, № 98. Новосибирск, 1982.
158. Акишин П. Г. ОИЯИ P11-84-493. Дубна, 1984; ОИЯИ P11-85-321. Дубна, 1985.
159. Sources and Development of Mathematical Software/Ed. Cowell W.R. Prentice-Hall, 1984.
160. Морозов В. А., Арушанян О. Б. Практическое пособие по вопросам конструирования библиотек программ. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 3—13.
161. Молчанов И. Н., Зубатенко В. С., Николенко Л. Д. и др. Алгоритмы и алгоритмические языки. М.: Наука, 1983. С. 129—139.
162. Библиотека программ на ФОРТРАНЕ. Т. I—III, IV, VI. ОИЯИ B1-11-8722. Дубна, 1974; ОИЯИ B2-11-9877. Дубна, 1977; ОИЯИ B2-11-9876. Дубна, 1976; ОИЯИ 11-83-619. Дубна, 1983; ОИЯИ 11-83-620. Дубна, 1983.
163. CERN Computer Centre, Programme Library, CERN, 1987.
164. Валях Е. Последовательно-параллельные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
165. Хокни Р., Джессхоуп К. Параллельные ЭВМ: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1986.
166. Параллельные вычисления/Под ред. Г. Родрига: Пер. с англ. М.: Наука, 1986.
167. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах. М.: Наука, 1986.
168. Гагурин М. К.//Изв. вузов. Сер. Математика. 1958. V. 5(6). С. 18.
169. Жидков Е. П., Макаренко Г. И., Пузынин И. В.//ЭЧАЯ. 1973. Т. 4. Вып. 1.
170. Жидков Е. П., Пузынин И. В.//ЖВММФ. 1967. Т. 7. С. 1086.
171. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н.//ДАН СССР. 1976. Т. 32. № 5. С. 1692—1696.
172. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н. ОИЯИ P5-8244. Дубна, 1974.
173. Ворождов С. Б., Закамская Л. Т., Заплатин Н. Л. ОИЯИ P19-5013. Дубна, 1970.
174. Akishin P. G., Vorozhtsov S. B., Zhidkov E. P.//См. [65]. Paper 1.3.
175. Жидков Е. П., Журавлев В. В., Кладницкий В. С. и др. ОИЯИ P9-88-508. Дубна, 1988.

176. Van der Linden W. P. M., van der Heijden J., Polak S. J. e.a.//См. [69]. P. 354—357.
177. **Пакеты** прикладных программ. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1983.
178. **Пакеты** программ для задач математической физики: Сб.//Под ред. В. П. Ильина. Новосибирск; ВЦ СО АН СССР, 1985.
179. Lowther D. A.//See [69]. P. 338—341.
180. Saldanha C. M., Lowther D. A.//See [69]. P. 334—337.
181. Bettess P.//Intern. J. Num. Meth. Engng. 1977. Vol. 11. P. 53—64; Ibid. 1980. Vol. 15. P. 1613—1626.
182. Parzen G., Jellett K. Particle Accelerators. 1971. Vol. 2. P. 169—179.
183. Caspi S., Helm M., Laslett L. J.//IEEE Trans. on Nucl. Sci. 1985. Vol. NS-32; LBL-19172, 1985.
184. Krawczyk F., Weiland T.//See [69]. P. 55—58.
185. Bettess P.//See [69]. P. 238—243.
186. Antunes C. F.//See [67]. P. 2555—2557.
187. Thompson J. F., Warsi Z.//J. Com. Phys. 1982. Vol. 47. P. 1—108.
188. Кузнецов А. Ю. Препринт № 707 ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1986.
189. Thacker W. C.//Intern. J. Num. Meth. Engng. 1980. Vol. 15, N9. P. 1335—1341.
190. Sherhard M. S.//See [68]. P. 2484—2489.
191. Cendes Z. J. e.a.//See [67]. P. 2551—2554.
192. Shenton D. N., Cendes Z. J.//See [68]. P. 2535—2538.
193. Cendes Z. J., Shenton D. N.//IEEE Trans. on Magnetics. 1985. Vol. Mag-21, N5. P. 1811—1816.
194. Babuska I., Rheinboldt W. C.//Intern. J. Num. Meth. Engng. 1978. Vol. 12. P. 1597—1615.
195. Biddlecombe C. S. e.a.//IEEE Trans. on Magnetics. 1986. Vol. MAG-22, N5. P. 811—813.
196. Pinchuk A. R., Silvester P. P.//See [68]. P. 2551—2554.
197. Федоренко П. П.//ЖВМиМФ. 1964. Т. 4. № 3. С. 559—564.
198. Бахвалов Н. С.//ЖВМиМФ. 1966. Т. 6. № 5. С. 861—885.
199. Brandt A.//Math. Comp. 1977. Vol. 31, N138. P. 333—390.
200. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н.//ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. Вып. 3. С. 622—668.
201. Ayrjan E. A., Zhidkov E. P., Khoromsky B. N.//Comp. Phys. Comm. 1983. Vol. 29. P. 125—130.
202. POISSON Group Programs. User's Guide. CERN, 1975.
203. Ворожцов С. Б., Дударева Т. Н., Полякова Р. В. и др. ОИЯИ Б1-11-12070. Дубна, 1978.
204. Holsinger R. F., Iselin Ch. F. The CERN-POISSON Program Package (POISCR) User's Guide, 1983.
205. Жидков Е. П., Полякова Р. В., Шелаев И. А. и др. ОИЯИ Р9-81-12. Дубна, 1981.
206. Шелаев И. А., Юдин И. П. ОИЯИ 9-12346. Дубна, 1979.
207. Shelaev I. A., Aksenov V. G., Alfeev V. S. e.a.//Proc. 12 Intern. Conf. on High-Energy Accelerators, Fermilab, Aug. 11—16, 1983, Batavia, Illinois, 1983. P. 416.
208. Урванцев А. Л.//См. [151]. С. 110—124.
209. Айрян Э. А., Хоромский Б. Н., Юдин И. П. и др. ОИЯИ Р11-84-802. Дубна, 1984.
210. Айрян Э. А., Жидков Е. П., Хоромский Б. Н. и др. ОИЯИ Р11-87-49. Дубна, 1987.
211. Айрян Э. А., Жидков Е. П., Полякова Р. В. и др. ОИЯИ Р11-86-80. Дубна, 1986.
212. Шелаев И. А., Юдин И. П. ОИЯИ Р9-80-333. Дубна, 1980; Юдин И. П. ОИЯИ Р9-85-153. Дубна, 1985.
213. Ламзин Е. А. Разработка алгоритма численного моделирования и рас-

чет трехмерных магнитостатических полей в электрофизических устройствах: Автореф. дис. канд. техн. наук. Л., 1989. (НИИЭФА)

214. Владимирев С. В. и др. Препринт ИТЭФ 88-99. М.: ЦНИИАтоминформ, 1988.
215. Жидков Е. П., Мазуркевич Г. Е., Хоромский Б. Н., Юдин И. П. ОИЯИ Р11-88-45. Дубна, 1988.
216. Ворожцов С. Б. ОИЯИ Р9-83-90. Дубна, 1983.
217. Pissanetzky S.//See [68]. P. 2457—2460.
218. Simkin J., Trowbridge C. W.//IEEE Proc. 1980. Vol. 127, BD. B, N6.
219. Early R. A., Cobb J. K. SLAC-PUB-4093, Sept. 1986.
220. Novender W.-R. DESY 87-118. 1987.
221. Coulomb J. L. e.a.//See [68]. P. 2499—2502.
222. Armstrong A. G. e.a. GFUN3D User Guide. Rutherford Lab. Internal Report RL-76-029/A, 1976.
223. Simkin J. RL, CAG 77/5, December, 1977.
224. Vorozhtsov S. B., Kalinkina M. B., Saenko V. A.//See [69]. P. 537—540.
225. Акишин П. Г., Жидков Е. П., Кравцов В. Д. ОИЯИ Р11-88-918. Дубна, 1988.
226. Тиунов М. А., Фомель Б. М. Препринт ИЯФ 83-150. Новосибирск, 1983.
227. Trowbridge C. W.//Proc. 4 Intern. Conf. on Magnet.//Technology, Brookhaven, 1972. P. 555—565.
228. Iselin C. F. CERN/SPS/81-7 (EMA). 1981.