

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К СТОЛКНОВЕНИЮ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ ПРИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЯХ

*Г. Рёнке*

Университет им. В. Пика, Росток, ГДР

*Х. Шульц*

Центральный институт ядерных исследований, Россендорф, ГДР

*К. К. Гудима, В. Д. Тонеев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С единых позиций рассмотрен вывод различных динамических уравнений, определяющих поведение неравновесной системы, образованной при столкновении тяжелых ионов. Наряду с общей эволюцией одночастичной функции распределения обсуждается влияние окружающей ядерной среды и корреляционных эффектов на динамику процесса взаимодействия. Прослежена взаимосвязь кинетических уравнений, лежащих в основе различных феноменологических моделей взаимодействия ядер при промежуточных энергиях. Кратко обсуждаются общие методы решения динамических уравнений применительно к рассматриваемым задачам и даны конкретные примеры таких решений. Отмечены проблемы и перспективы дальнейшего развития кинетического подхода в физике ядро-ядерных столкновений.

Derivation of various dynamical equations governing behaviour of a nonequilibrium system formed in heavy-ion collisions is considered on a single footing. A general evolution of a single particle distribution function as well as influence of the nuclear environment and correlation effects on dynamics of the interaction process are discussed. Relations are analysed of kinetic equations underlying different phenomenological models of heavy ion interactions at intermediate energies. General methods for solving dynamical equations are briefly discussed as applied to the problems mentioned above and some specific solutions are exemplified. Open problems and perspectives for farther development of the kinetic approach to nucleus-nucleus collisions are noted.

## ВВЕДЕНИЕ

Одна из наиболее важных задач физики тяжелых ионов состоит в определении уравнения состояния ядерной материи. В настоящее время в релятивистских ядро-ядерных столкновениях достигнуты экстремально высокие температуры  $T = 140 \div 200$  МэВ и сжатие до плотности, в несколько раз превышающей плотность нормальной

ядерной материи [1, 2]. Это позволяет экспериментально исследовать поведение ядерной материи в весьма необычных условиях. Однако в то же самое время задача извлечения из наблюдаемой картины эмиссии продуктов реакции достоверной информации о ранней стадии процесса столкновения, когда ядерная материя еще находится в сильно нагретом и сжатом состоянии, является чрезвычайно сложной.

Если наблюдаемые на опыте характеристики могут быть однозначно связаны с каноническими переменными, характеризующими возбужденную систему, то можно извлечь информации об основных параметрах уравнения состояния. Установление связи между экспериментально наблюдаемыми величинами и каноническими переменными уравнения состояния играет важную роль не только в развитии фундаментальных теоретико-полевых подходов в теории ядерной материи, но также представляет большой интерес для понимания процессов образования и коллапса сверхновых, исследования стабильности и структуры нейтронных звезд [3].

Хотя ядро-ядерное столкновение представляет собой весьма запутанный процесс, его теоретическое описание нередко основывается на простом предположении о тепловом и химическом равновесии. Термодинамическая равновесная модель часто используется для интерпретации распределений конечных продуктов в импульсном пространстве, но в действительности на эти распределения сильное влияние оказывает кинематика распадающейся горячей материи. Информация о состоянии горячей и сжатой системы на ранней стадии взаимодействия может быть также получена из анализа химического состава и корреляций продуктов в фазовом пространстве.

На пути исследования уравнения состояния возбужденной ядерной материи уже накоплен немалый экспериментальный материал, выработаны определенные концепции о стратегии исследования, получили развитие новые представления и понятия о механизме взаимодействия и физике происходящих процессов, установлены определенные связи между физическими явлениями. Прежде чем перейти к теоретическому исследованию динамики столкновения ядер, полезно перечислить основные результаты и новые понятия, для понимания которых и предназначается этот теоретический инструмент.

**Термодинамическое равновесие.** Это понятие выражает тот факт, что равномерное распределение внесенной энергии по различным степеням свободы достигнуто. Если скорости образования сложных частиц и их распада на составляющие сравниваются, то устанавливается химическое равновесие. В частности, отношение выходов частиц, полученное из инклюзивных распределений, показывает, что химическое равновесие может быть достигнуто, при этом относительные выходы частиц могут быть поняты в рамках простого закона действующих масс [4].

Другим важным результатом термодинамики является возможное проявление фазовых переходов, которые окажут существенное

влияние на динамическую эволюцию системы. Знание термодинамических свойств должно рассматриваться как необходимое условие для разработки динамической модели. В отсутствие равновесия термодинамика определяет наиболее вероятное состояние, к которому система стремится. С другой стороны, в предельном, стационарном случае динамические модели должны приводить к термодинамическому описанию. В частности, хорошие динамические модели могут дать достаточно надежное термодинамическое описание, включая, например, корреляции и формирование кластеров.

#### **Образование связанных состояний и химическое равновесие.**

Ядерная материя не может рассматриваться как идеальный газ фермионов. Нуклон-нуклонные взаимодействия приводят не только к эффектам среднего (хартри-фоковского) поля, но и к формированию связанных состояний нуклонов, таких, как дейтрон, тритий и т. п. Уравнение состояний и другие термодинамические свойства меняются под влиянием образования связанных состояний и корреляций в непрерывном спектре, что может быть учтено в рамках  $T$ -матричного подхода.

При высоких плотностях ядерной материи изменяются свойства как одночастичных, так и связанных состояний. Собственно энергетические эффекты приводят к сдвигу энергий одночастичных состояний и кластеров. Другой эффект влияния среды, подавление вероятности заселения состояний в фазовом пространстве за счет принципа Паули, ослабляет энергию связи кластеров. При определенной плотности (плотности Мотта) связанные состояния разрушаются, так что остается ферми-жидкость квазичастиц [5]. По сравнению с простым законом действующих масс, когда рассматривается идеальная смесь взаимопревращающихся кластеров, вероятность формирования кластеров в плотной горячей материи подавлена упомянутыми выше эффектами ядерной среды. В рамках самосогласованного подхода резонансы и корреляции в непрерывном спектре должны описываться на одном и том же уровне (в силу теоремы Левинсона, «выталкивание» связанного состояния в континуум не должно приводить к возникновению каких-либо скачков).

**Фазовая диаграмма ядерной материи.** Современные теоретические представления о разнообразии форм ядерной материи удобно представить на фазовой диаграмме (см., например, обзор [1]). При умеренных температурах  $T > T_c = 10 \div 15$  МэВ ядерная материя может рассматриваться как газ, состоящий в основном из нуклонов и легких составных частиц типа дейтронов, ядер трития,  ${}^3\text{He}$  и  $\alpha$ -частиц. При более высоких температурах становится важным процесс рождения частиц, и ядерная система представляет собой адронный газ нуклонов, пионов, дельта-частиц, странных частиц и т. п. Для температур ниже критической  $T_c$  поведение ядерной материи напоминает ван-дер-ваальсовское, характерное для фазовой неустойчивости смеси типа жидкость — газ [6]. Исследование явлений, сопровождающих фазовый переход, представляет интерес как для экспе-

риментаторов, так и для теоретиков и может дать существенный вклад в понимание свойств ядерной материи. Один из главных вопросов состоит в том, сохранятся ли характеристики фазовых переходов в конечных системах и не замаскируются ли они динамикой самого процесса столкновения.

Другой возможный фазовый переход, обсуждаемый в настоящее время, это — переход в кварковую материю, ожидаемый при температуре  $T \approx 200$  МэВ и/или плотности  $\rho \approx 5\rho_0$ . Влияние этого фазового перехода на динамику взаимодействия, а также его возможные сигналы сейчас привлекают большое внимание [1, 7].

**Механизм столкновения двух ядер.** Столкновение высокоэнергетических тяжелых ионов можно условно разделить на три стадии: на первой стадии, стадии сближения, происходит взаимное торможение ядер за счет последовательных нуклонных взаимодействий, что приводит к образованию фазы сильно сжатого вещества, которое живет достаточно долго, чтобы установилось тепловое и химическое равновесие (вторая стадия), и, наконец, последняя стадия, стадия разлета, на которой диссипируют тепловая энергия и энергия сжатия.

Динамические подходы типа каскадной [8—10] или гидродинамической [2, 7, 11, 12] модели подтверждают в определенной степени такую упрощенную картину. Действительно, плотность барионов и число частиц, испытавших столкновение, быстро растут как функции времени. В некоторый момент плотность барионов достигает максимального значения и остается вблизи его на короткое время. На стадии распада плотность и температура системы уменьшаются, но энтропия остается постоянной. Для характеристики состояния ядерного вещества часто используются такие термодинамические переменные, как температура, плотность и энтропия, и естественный вопрос, возникающий при этом, состоит в том, при каких условиях это упрощенное описание может быть использовано и как эти канонические переменные связаны с экспериментально наблюдаемыми величинами.

**Уравнение состояния.** Полная энергия системы  $E(\rho, T)$ , являющаяся функцией плотности и температуры, может быть представлена суммой двух слагаемых

$$E(\rho, T) = E_{\text{th}}(\rho, T) + E_{\text{pot}}(\rho), \quad (1)$$

где  $E_{\text{th}}(\rho, T)$  — энергия теплового возбуждения и  $E_{\text{pot}}(\rho)$  — потенциальная энергия. Для получения уравнения состояния надо вычислить давление в системе согласно соотношению

$$P(\rho, T) = (\partial E_{\text{th}}/\partial \rho)_{S=\text{const}} + (\partial E_{\text{pot}}/\partial \rho)_{S=\text{const}},$$

удерживая при этом энтропию постоянной.

Давление  $P(\rho, T)$  связано с распределением нуклонов в фазовом пространстве и экспериментально измеряется путем анализа потоков, т. е. измерением импульсов всех (заряженных) частиц в каждом отдельно взятом событии (см. [1, 13]).

Энтропия  $S(\rho, T)$  может быть связана с числом кластеров [1, 14]. Поскольку энтропия почти не меняется на стадии распада, измерение состава легких фрагментов позволяет заглянуть в более раннюю стадию процесса взаимодействия, когда материя еще сжата и нагрета [4, 15].

В области выше порога образования мезонов тепловое возбуждение  $E_{th}(\rho, T)$  ассоциируется непосредственно с выходом рожденных частиц, состоящих в основном из пионов с небольшой примесью странных частиц. В частности, множественность пионов была использована для определения теплового содержания горячей системы [16]. Зная полную энергию  $E(\rho, T)$ , из соотношения (4) можно извлечь информацию о потенциальной энергии  $E_{pot}(\rho)$ . В недавнем анализе столкновений тяжелых ионов исследована импульсная зависимость взаимодействия и показано [17], что «мягкое» уравнение состояния, аналогичное уравнению, используемому в астрофизике при рассмотрении звездного коллапса, описывает преимущественную эмиссию частиц вбок в ядерных столкновениях [18].

**Требования к динамической теории столкновений.** В целом можно сказать, что мы уже узнали довольно много о свойствах ядерной материи, хотя полученные результаты основаны скорее на качественном рассмотрении, чем на строгой количественной теории. Понимание процесса столкновения достигло в настоящее время такого уровня, что ставится вопрос о возможности динамического описания реакции. Ясно, что физические наблюдаемые переменные, характеризующие конечное состояние процесса столкновения, такие, как распределения по числу фрагментов, их относительной энергии и соответствующим углам вылета, возникают из различных физических источников. Можно ожидать, что эти распределения несут также определенный отпечаток квантовой неопределенности, указывая, в какой мере статистическое заселение возбужденных состояний достигает термодинамического равновесия. Таким образом, строгое рассмотрение всего процесса взаимодействия в рамках теории многих тел должно позволить отделить чисто статистическое содержание от соответствующих динамических и квантово-механических эффектов.

В настоящее время отсутствует релятивистское квантовополевое описание столкновения тяжелых ионов, хотя предложен ряд модельных подходов. Наиболее популярными среди них в области промежуточных энергий являются модели каскадного типа [8—10], подход, основанный на классических уравнениях движения [19], гидродинамическое описание [2, 7, 11, 12] и модели, базирующиеся на решении уравнений Власова — Улинга — Уленбека [20], учитывающих эффекты как среднего поля, так и столкновительного члена. При низких энергиях (ниже 10—20 МэВ/А) успешно применяется зависящий от времени метод Хартри — Фока [21]. Все эти, а также и другие подходы, используемые сейчас в физике столкновения тяжелых ионов, могут быть выведены исходя из многочастичного уравнения Шредингера. Основная задача данного обзора состоит в том, чтобы показать

взаимосвязь этих приближенных схем и попытаться получить в достаточно «прозрачном» виде квантовомеханическое кинетическое уравнение, включая самосогласованным образом эффекты среднего поля и двухчастичных столкновений. Такой подход выходит за рамки обычной равновесной концепции, присущей большинству приближений, использованных до сих пор. Хотя первые шаги в этом направлении уже сделаны [22—24], в данной работе мы дадим обзор этих попыток, подчеркивая неравновесный аспект проблемы.

Квантовая статистика неравновесных процессов еще не сформулирована в окончательной форме. Несмотря на различные полумпирические подходы к формулировке динамических моделей, оказывается возможным рассмотреть неравновесные процессы с единых позиций. Основные концепции и соотношения приводятся в разд. 1. Как можно вывести различные динамические модели, например обобщенное кинетическое уравнение и т. п., показано в разд. 2. Там же приведены конкретные примеры использования кинетических уравнений для описания динамики столкновения тяжелых ионов. Включение в динамические модели эффекта формирования кластеров обсуждается в разд. 3. Наконец, в заключении отмечены открытые проблемы и перспективы дальнейшего развития этого подхода.

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы дать обзор и выявить внутренние связи между различными динамическими моделями.

## 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К СТОЛКНОВЕНИЮ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ

Временная эволюция многочастичной системы может быть описана в рамках различных подходов. Представляет интерес указать соотношения между этими подходами с тем, чтобы вскрыть физические аспекты, стоящие за ними. Общее сравнение различных подходов в неравновесной статистической механике рассматривалось в литературе (см. [25—29]). Мы обсудим здесь эти проблемы применительно к ядерной системе многих тел.

**Фундаментальные уравнения квантовой статистики.** Описание временной эволюции системы из  $N$  нуклонов, образованной, например, при столкновении тяжелых ионов, должно быть прослежено исходя из фундаментальных уравнений физики многих частиц. Однако начать можно с различных уравнений движения и использовать при этом различные методы. Мы представим ниже основные подходы.

*Многочастичное уравнение Шредингера.* В рамках нерелятивистского потенциального подхода многочастичное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(1 \dots N, t) = H\psi(1 \dots N, t) \quad (2)$$

описывает развитие во времени чистого  $N$ -частичного квантового состояния, характеризуемого  $N$ -частичной волновой функцией  $\psi(1 \dots N, t)$ . Гамильтониан системы  $N$  нуклонов записывают как

$$H = T + V;$$

$$T = \sum_{i=1}^N p_i^2/2m_i = \sum_i E(i) a_i^\dagger a_i;$$

$$V = \sum_{i < j} V_{ij}(r_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{ij i' j'} V(ij, i' j') a_i^\dagger a_j^\dagger a_i a_j, \quad (3)$$

где индексы  $i, j$  одночастичных переменных включают квантовые числа, как, например, угловой момент, спин и изоспин. Исходя из начального состояния, полностью определенного в момент времени  $t = t_0$ , система эволюционирует согласно уравнению (2) к конечному моменту  $t$  (моменту измерения), при этом проекция на собственные состояния измеряющего детектора определяет вероятности перехода и соответствующие скорости счета детектора.

*Уравнение Лиувилля — фон Неймана.* Вместо чистого квантового состояния рассмотрим статистический ансамбль, характеризуемый функцией распределения вероятности найти систему в различных чистых квантовых состояниях. Квантовое состояние ансамбля задается статистическим оператором  $\rho(t)$ , и среднее значение для любой наблюдаемой  $A$  в момент  $t$  записывается как

$$\langle A \rangle = \text{Sp} \{ \rho(t) A \}. \quad (4)$$

Можно привести различные аргументы в пользу того, почему для описания столкновений тяжелых ионов необходимо использовать понятие статистического ансамбля, а не чистого квантового состояния: сложность системы не позволяет получить точное решение  $N$ -частичного уравнения Шредингера, а приближение, состоящее в отбрасывании части информации о взаимодействии и пренебрежении некоторыми степенями свободы, действует как связь системы с (стохастизирующей) тепловой ванной. Кроме того, начальные условия в момент  $t_0$  точно не известны, и поэтому из-за сильного перемешивания состояний системы соседние траектории будут экспоненциально удаляться друг от друга. Действительно, было показано, что отбрасывание части информации введением «сокращенного» описания, как, например, в концепции термодинамического зависящего от времени равновесия, или эволюции локального теплового равновесия, или эволюции одночастичной функции распределения и т. п., может служить мощным инструментом при описании столкновений тяжелых ионов.

Рассматривая в общем случае замкнутую систему с гамильтонианом  $H(t)$ , нетрудно из (2) вывести уравнение Лиувилля — фон Неймана

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = [H(t), \rho(t)], \quad (5)$$

которое есть уравнение движения для статистического оператора  $\rho(t)$ . Формальное решение (5) можно записать как

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^+(t, t_0),$$

где оператор временной эволюции  $U(t, t_0)$  находится из уравнения

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0) \quad (6)$$

с начальным условием  $U(t_0, t_0) = 1$ . Если  $H(t)$  не зависит явно от времени (т. е. нет внешних полей), формальное решение уравнения (6) есть

$$U(t, t_0) = \exp [i(t - t_0) H/\hbar]. \quad (7)$$

Однако имеются две проблемы:

1. Как определить начальное условие, т. е. как найти статистический оператор  $\rho(t_0)$ ? В случае равновесия имеется общий принцип построения равновесного статистического оператора  $\rho_{\text{eq}}$  из максимума энтропии

$$S = -k_B \text{Sp} (\rho_{\text{eq}} \ln \rho_{\text{eq}}) \rightarrow \max \quad (8)$$

с нормировкой  $\text{Sp} \rho_{\text{eq}} = 1$  и заданными средними значениями сохраняющихся величин  $C_n$

$$\langle C_n \rangle = \text{Sp} (\rho_{\text{eq}} C_n). \quad (9)$$

Вводя лагранжевы множители  $\lambda_n$ , решение вариационной задачи (8) с граничными условиями (9) дает гиббсовское состояние

$$\rho_{\text{eq}} = \exp (-\sum \lambda_n C_n) / \text{Sp} (-\sum \lambda_n C_n).$$

В неравновесном случае такие равновесные состояния выбираются иногда в качестве начального условия, т. е. при  $t = t_0$ ,  $\rho(t_0) = \rho_0$ .

2. В противоположность чистому квантовому состоянию, эволюция которого описывается уравнением Шредингера, в статистической теории можно ввести концепцию энтропии и из нее получить другие термодинамические функции, как свободная энергия или термодинамический потенциал. В равновесии энтропия определяется соотношением (8). В отсутствие равновесия энтропия изолированной системы должна возрастать со временем. Однако, поскольку уравнение Лиувилля — фон Неймана (5) описывает обратимую во времени эволюцию, его решение дает зависящую от времени величину  $\text{Sp} \{\rho(t) \ln \rho(t)\}$ , и это соотношение не может быть отождествлено с энтропией в неравновесном случае.

Такие проблемы, как выбор начального состояния  $\rho(t_0)$ , определение неравновесной энтропии и вывод необратимых уравнений эволюции из обратимых микроскопических уравнений, будут обсуждаться в следующем разделе.

*Иерархия уравнений движения для функций Грина.* Критическим моментом при выводе эволюционных уравнений для плотной нагретой ядерной материи, образующейся в столкновении тяжелых ионов,



является учет многочастичных эффектов. Концепция свободных сталкивающихся частиц не подходит для исследования поведения материи при ядерных плотностях в области промежуточных энергий. Как отмечено во введении, для получения свойств нагретой и сжатой ядерной материи мы должны рассмотреть многочастичные аспекты задачи, такие, как собственно энергетические эффекты, влияние принципа Паули, формирование связанных состояний и их разрушение (паулевское подавление) при высоких плотностях.

Для равновесного состояния квантостатистический подход формулируется на основе термодинамических функций Грина, что допускает систематическую пертурбативную трактовку системы, описываемой гамильтонианом (3). В неравновесном случае эта концепция обобщается на неравновесные функции Грина следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} g^>(1,1') &= \frac{1}{i\hbar} \langle a(1) a^+(1') \rangle; \\ g^<(1,1') &= -\frac{1}{i\hbar} \langle a^+(1') a(1) \rangle; \\ g^c(1,1') &= \theta(t_1 - t'_1) g^>(1,1') + \theta(t'_1 - t_1) g^<(1,1'); \\ g^{ac}(1,1') &= \theta(t_1 - t'_1) g^<(1,1') + \theta(t'_1 - t_1) g^>(1,1'); \\ g^{ret}(1,1') &= \theta(t_1 - t'_1) (g^>(1,1') - g^<(1,1')); \\ g^{adv}(1,1') &= \theta(t_1 - t'_1) (g^<(1,1') - g^>(1,1')), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где причинная  $g^c$ , аказуальная  $g^{ac}$ , запаздывающая  $g^{ret}$  и опережающая  $g^{adv}$  функции Грина удовлетворяют общему уравнению движения

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1^2}{2m} \right) g(1,1') = \delta(1-1') - i\hbar \int d2V(1-2) g_2(12,1'2^+), \quad (11)$$

но с различными граничными условиями.

Временная зависимость оператора в (10) соответствует гайзенберговскому представлению. В противоположность равновесному состоянию, когда корреляционные функции и функции Грина зависят лишь от разности времен, в неравновесном случае сохраняется зависимость от каждого временного аргумента. Такой метод неравновесных функций Грина был применен к многочастичным системам [22, 30, 31]. Используя диаграммную технику, можно сформулировать приближенное описание в рамках теории возмущения. Однако термодинамические аспекты (роль начальных условий, рост энтропии и т. п.) до настоящего времени еще не получили четкого развития.

В отличие от матрицы плотности  $\rho(t)$ , которая содержит полную информацию о системе, функция Грина непосредственно связана с наблюдаемыми величинами (одночастичная матрица плотности, двухчастичная матрица плотности и т. д.). Использование приведенных функций распределения вместо  $N$ -частичной функции широко

практикуется в статистической механике; связанное с этим появление иерархии уравнений движения и хорошо известная проблема ее обрывания будут кратко обсуждены ниже.

*Полевая теория.* Другие подходы, которые не рассматриваются здесь детально, исходят из релятивистски-инвариантного описания системы. Вместо потенциальной модели, характеризуемой гамильтонианом (3), базисные уравнения должны быть сформулированы на основе полевых теорий. Теоретико-полевое описание временной эволюции системы остается вне рамок данного обзора.

**Концепция решения уравнения Лиувилля — фон Неймана.** Для нахождения приближенного решения уравнения Лиувилля — фон Неймана необходимы некоторые дополнительные предположения. Обычно в неравновесной статистической механике вводится соответствующий сокращенный набор наблюдаемых  $\{B_n\}$ , средние значения которых характеризуют неравновесное состояние рассматриваемой системы. Такая концепция может быть использована для вывода необратимых уравнений эволюции из обратимых уравнений движения с помощью метода проекционного оператора [32]. Другие подходы используют этот набор  $\{B_n\}$  для определения уровня описания [33] или для корректного построения нового неравновесного ансамбля [29, 34]. Ниже для нахождения решения уравнения Лиувилля — фон Неймана мы будем следовать методу Д. Н. Зубарева [29].

Задав средние значения  $\langle B_n \rangle^t = \{\rho(t) B_n\}$  наблюдаемых  $\{B_n\}$  в момент времени  $t$ , сокращенный статистический оператор  $\rho_{\text{red}}(t)$  находится из условия максимума энтропии

$$S(t) = -k_B \text{Sp} \{\rho_{\text{red}}(t) \ln \rho_{\text{red}}(t)\} \quad (12)$$

при фиксированных средних значениях

$$\text{Sp} \{\rho_{\text{red}}(t) B_n\} = \langle B_n \rangle^t. \quad (13)$$

Решение имеет вид обобщенного гиббсовского состояния

$$\rho(t) = \exp \left\{ - \sum_n F_n(t) B_n \right\} / \text{Sp} \exp \left\{ - \sum_n F_n(t) B_n \right\}, \quad (14)$$

где термодинамические параметры  $F_n(t)$  (множители Лагранжа) определяются граничными условиями (13). Конечно, статистический оператор (14) еще не есть решение уравнения Лиувилля — фон Неймана, но он служит для правильного учета граничного условия (принципа Н. Н. Боголюбова ослабления начальных условий). Используя теорему Абеля, начальное условие включается в уравнение движения (5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) + \frac{i}{\hbar} [H(t), \rho(t)] = -\varepsilon (\rho(t) - \rho_{\text{red}}(t)), \quad (15)$$

где предел  $\varepsilon \rightarrow 0$  должен быть выполнен после перехода к термодинамическому пределу. Формальное решение уравнения (15) есть

$$\rho(t) = \varepsilon \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon t'} U(t, t') \rho_{\text{red}}(t') U^+(t, t') dt' = \rho_{\text{red}}(t) - \int_{-\infty}^t dt' \times \\ \times e^{\varepsilon t'} \frac{d}{dt'} \{U(t, t') \rho_{\text{red}}(t') U^+(t, t')\}. \quad (16)$$

Таким образом, зная временную зависимость набора наблюдаемых  $\langle B_n \rangle^t$  в прошлом,  $t' \leq t$ , мы можем по соотношению (4) вычислить зависящие от времени средние значения любого оператора.

Отмеченная выше проблема начальных условий решается заменой начального состояния  $\rho(t_0)$  на  $\rho_{\text{red}}(t_0)$ , при этом необходимо взять предел  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Этот принцип ослабления корреляций был впервые введен Н. Н. Боголюбовым [35] для обрывания БГКИ-иерархии уравнений при выводе уравнения Больцмана, и он предполагает, что двухчастичная функция распределения может быть аппроксимирована на ранней стадии взаимодействия и неточность рассмотрения корреляций ослабляется со временем, в результате чего из-за динамики системы будут накапливаться истинные корреляции. Например равновесные корреляции будут «вымываться» вне зависимости от начального неравновесного состояния, и только интегралы движения сохраняться. Решение уравнения Лиувилля — фон Неймана с обычным начальным условием после перехода к пределу  $t_0 \rightarrow -\infty$ , как того требует теорема Абеля, будет совпадать с решением уравнения (15) в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Определение энтропии для неравновесного случая (12) допускает рост энтропии замкнутых систем в ходе неравновесного процесса в противоположность выражению  $\text{Sp} \{ \rho(t) \ln \rho(t) \}$ , которое является константой движения. Очевидно, что подход к неравновесию включает в себя как предел равновесный случай, и все термодинамические соотношения непосредственно следуют из этого общего неравновесного случая. Обобщение концепции энтропии на неравновесные процессы согласно (12) представляется весьма естественным и должно рассматриваться как связь между механикой и статистической термодинамикой. В рамках этого подхода становится понятным, как необратимые эволюционные уравнения получаются из микроскопических обратимых уравнений движения. Включение бесконечно малого источника в правой части уравнения (15), который может быть интерпретирован как бесконечно малая связь с тепловой ванной, отбирает запаздывающее решение уравнения Лиувилля — фон Неймана, и это уничтожает симметрию по отношению к отражению времени.

Необходимо обсудить, конечно, как результат временной эволюции системы в соответствии с уравнением (15) будет зависеть от частного выбора  $\rho_{\text{red}}(t)$ , т. е. от введения соответствующих макро-наблюдаемых. Результаты для транспортных коэффициентов и т. п.

не зависят от специального выбора  $\rho_{\text{ред}}(t)$ , если предел  $\varepsilon \rightarrow 0$  выполнен правильно, см., например, [36]. Однако для вычисления оператора временной эволюции  $U(t, t')$  часто используется теория возмущений. Тогда результаты, полученные в конечном порядке теории возмущения, могут зависеть от выбора набора  $\{B_n\}$ . Можно частично избежать суммирований бесконечного порядка, если ввести подходящий сокращенный набор наблюдаемых величин.

Проиллюстрируем сказанное на примерах. Если предположить локальное равновесие, то придем к гидродинамическим уравнениям, задавая в качестве сокращенного набора наблюдаемых плотность частиц, плотность энергии и локальную плотность импульса [29]. Для получения кинетических уравнений (см. разд. 2) мы должны расширить набор наблюдаемых, взяв, в общем случае, числа заполнения одночастичных состояний  $\{a_k^\dagger a_k\}$  или оператор Вигнера (см. следующий раздел). Однако при этом образование связанных состояний и корреляции между частицами не могут быть описаны в низшем порядке теории возмущения. Обобщенное кинетическое уравнение, включающее формирование кластеров, находится (см. разд. 3) введении чисел заполнения для связанных состояний. Из теории транспортных коэффициентов известно [26, 29], что в высших порядках теории возмущения могут возникнуть расходящиеся члены, пропорциональные  $\varepsilon^{-n}$ . Они важны в плотных сильно взаимодействующих системах. Выполняя частичное суммирование бесконечных рядов теории возмущения можно удалить эти расходимости, при этом оказывается, что полученный результат согласуется с рассмотрением в низшем порядке пертурбативной теории, но с расширенным набором наблюдаемых  $\{B_n\}$ .

**Концепция решения для неравновесных функций Грина.** Поскольку неравновесные функции Грина (10) могут рассматриваться как прямое обобщение равновесных термодинамических функций Грина [22, 28, 30, 31], ряд основных концепций квантовой статистики систем многих тел может быть непосредственно применен к неравновесному случаю. Напомним определение преобразования Вигнера

$$n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} a_{\mathbf{p}-\mathbf{k}/2}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}/2} \quad (17)$$

среднее значение от которого

$$\langle n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle^t = f^W(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \quad (18)$$

называется вигнеровской функцией распределения в фазовом пространстве. Функция распределения Вигнера, усредненная по элементарной ячейке объема  $\hbar^3$ , связана с классической функцией распределения  $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  в фазовом пространстве

$$\frac{1}{\Delta\mu} \int_{\Delta\mu} f^W(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mu = f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + O\left(\frac{\hbar^3}{\Delta\mu}\right).$$

Обобщение на кластерную функцию распределения будет дано в разд. 3.

Из неравновесной функции распределения можно получить статистическую и динамическую информацию о системе. Вводя новые переменные  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ ,  $T = (t_1 + t_2)/2$ , а также  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ,  $t = (t_1 - t_2)$  и выполняя фурье-преобразование по относительным координатам

$$g(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T) = \int d^3r \int dt e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r} + i\omega t} g(\mathbf{r}t; \mathbf{R}T),$$

можно определить спектральную функцию

$$a(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T) = i [g^>(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T) - g^<(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T)],$$

которая содержит информацию о динамике системы (одночастичном спектре). Вторая функция, которую можно ввести, это функция распределения

$$F(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T) = \frac{1}{i} \frac{g^<(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T)}{a(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T)} = \frac{1}{i} \frac{g^>(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T)}{a(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T)} + 1,$$

содержащая информацию о статистических свойствах и связанная в случае термодинамического равновесия с фермиевской функцией распределения

$$F(\mathbf{p}\omega; \mathbf{R}T) = \frac{1}{e^{\beta(\omega - \mu)} + 1}.$$

Основной подход к решению иерархии уравнений (11) состоит в формулировке теории возмущения и разработке диаграммной техники для известной в квантовой статистике [37, 38] термодинамической функции Грина. Вместо одной термодинамической функции Грина в равновесии (мацубаровской) мы должны работать с двумя независимыми гриновскими функциями (причинной/акаузальной или опережающей/запаздывающей), поскольку имеется два различных временных направления, соответствующих операторам временной эволюции. Компактная формулировка теории возмущения была предложена Л. В. Келдышем, который ввел  $2 \times 2$ -матрицу гриновских функций, что может быть использовано, если неравновесный статистический оператор зависит только от одночастичного оператора. Им же разработана диаграммная техника, учитывающая наличие двух различных временных направлений [28, 30].

В частности, можно ввести собственную энергию  $\Sigma(1, \bar{1})$  соотношением

$$-i \int_C d2 V(1-2) g_2(12, 1'2') = \int_C d\bar{1} \Sigma(1\bar{1}) g(\bar{1}, 1'),$$

где путь интегрирования по времени  $C$  задан граничными условиями. При вычислении собственной энергии можно использовать известные

приближения (см. разд. 2). В частности, можно ввести приближение Хартри — Фока или просуммировать диаграммы лестничного типа или, наконец, учесть эффекты влияния окружающей среды, такие, как паулевскую блокировку, экранирование и т. п. Обобщение этого подхода на случай образования связанных состояний, отражающий ослабление начальных корреляций, может быть найдено в разд. 3,

**2. ОБОБЩЕННОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БЕЗ УЧЕТА ФОРМИРОВАНИЯ КЛАСТЕРОВ И ЕГО НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ**

Описав различные неравновесные подходы, мы представим теперь некоторые конкретные результаты. В этом разделе мы пренебрегаем возможным образованием кластеров. Обобщение одночастичных уравнений на случай, включающий формирование кластеров, будет дано в разд. 3.

**Вывод обобщенного кинетического уравнения в одночастичном представлении.** Выбрав сокращенный набор одночастичных наблюдаемых как  $\{B_n\} = \{n(\mathbf{p}, \mathbf{r})\}$ , временная зависимость средних значений может быть получена по формуле (16). Если гамильтониан  $H$  не зависит явно от времени, то  $\bar{U}(t, t')$  дается соотношением (7). Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \langle n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle^t = -D(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + I(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \quad (19)$$

где

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} \langle [H, n(\mathbf{p}, \mathbf{r})] \rangle_{\text{red}}^t \quad (20)$$

отвечает дрейфовому или власовскому члену уравнения, тогда как

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = - \int_{-\infty}^t dt' e^{st'} \text{Sp} \left\{ \frac{i}{\hbar} [H, n(\mathbf{p}, \mathbf{r})] e^{i(t-t')H/\hbar} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{i}{\hbar} [H, \rho_{\text{red}}(t')] + \frac{\partial}{\partial t'} \rho_{\text{red}}(t') \right) e^{-i(t-t')H/\hbar} \right\} \quad (21)$$

есть столкновительный член.

Власовский член (20) описывает обратимую во времени эволюцию и связан, как можно показать, с зависящим от времени методом Хартри — Фока. Столкновительный член (21) приводит к необратимому поведению, описывая процессы рассеяния. Вводя резольвенту (оператор Грина)

$$G(z) = \frac{1}{z - H}$$

с

$$\text{Im } G(E + i\epsilon) = \text{Im } G^+(E) = -i\pi\delta(E - H),$$

находим

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \int_{-\infty}^t dt' \exp\{i(E - E') + \varepsilon(t - t')/\hbar\} \times \\ \times \text{Sp} \left\{ \frac{i}{\hbar} [H, n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)] \text{Im} G^+(E) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{i}{\hbar} [H, \rho_{\text{red}}(t)] + \frac{\partial}{\partial t'} \rho_{\text{red}}(t') \right) \text{Im} G^+(E) \right\}. \quad (22)$$

Это общее выражение для столкновительного члена является нелокальным как в пространстве, так и во времени. Оно упростится, если мы пренебрежем нелокальностью во времени, т. е. положим  $\rho_{\text{red}}(t') \approx \rho_{\text{red}}(t)$  и  $\frac{\partial}{\partial t'} \rho_{\text{red}}(t') \approx 0$ , опуская тем самым эффекты запаздывания; тогда интегралы по  $t'$  и  $E'$  берутся. Пренебрегая далее пространственной нелокальностью, т. е. вариациями функции распределения относительно координаты  $\mathbf{r}$ , и, таким образом, трактуя  $\mathbf{r}$  как параметр, оказывается достаточным рассматривать только числа заполнения в импульсном пространстве

$$n(\mathbf{p}) = a^+(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}),$$

так что  $\rho_{\text{red}}(t)$  зависит от

$$\sum_{\mathbf{p}, \mathbf{r}} \psi(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \approx \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{r}} \psi(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) n(\mathbf{p}). \quad (23)$$

Столкновительный член, локальный в пространстве и времени, принимает вид

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{\pi} \text{Sp} \left\{ \frac{i}{\hbar} [H, n(\mathbf{p})] \times \right. \\ \left. \times \text{Im} G^+(E) \frac{i}{\hbar} [H, \rho_{\text{red}}^{(1)}(\mathbf{r}, t)] \text{Im} G^+(E) \right\}, \quad (24)$$

напоминающий формулу Кубо — Гринвуда, широко используемую в теории транспортных процессов [26].

**Уравнение Власова.** Опуская столкновительный интеграл в обобщенном кинетическом уравнении (19), мы приходим к уравнению Власова [26, 38, 39]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + D(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = 0.$$

Воспользовавшись общим выражением для гамильтониана (3) или

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2}{2m} a^+(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 q}{(2\pi\hbar)^9} V(q) a^+(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}) \times \\ \times a^+(\mathbf{p}_2 - q) a(\mathbf{p}_2) a(\mathbf{p}_1),$$

мы находим из (20)

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}/\hbar} \langle [H, n(\mathbf{p}, \mathbf{k})] \rangle_{\text{red}}^t. \quad (25)$$

Поскольку неравновесный статистический оператор имеет билинейную форму, можно воспользоваться теоремой Вика

$$\begin{aligned} \langle a^+(1) a^+(2) a(3) a(4) \rangle &= \langle a^+(1) a(4) \rangle_{\text{red}}^t \langle a^+(2) a(3) \rangle_{\text{red}}^t - \\ &- \langle a^+(1) a(3) \rangle_{\text{red}}^t \langle a^+(2) a(4) \rangle_{\text{red}}^t \end{aligned}$$

и, положив объем системы равным единице, преобразовать влассовский член кинетического уравнения к виду

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} \langle [H, n(\mathbf{p}, \mathbf{k})] \rangle_{\text{red}}^t &= -\frac{1}{\hbar m} \mathbf{p}\mathbf{k} f_1(p, r, t) + \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^3p_2 d^3q}{(2\pi\hbar)^6} \times \\ &\times \{ f_1(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2, \mathbf{k} - \mathbf{q}/2, t) f_1(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}/2, \mathbf{q}, t) \times \\ &\times [V(\mathbf{q}) + V(-\mathbf{q}) - V(-\mathbf{q} - \mathbf{p} + \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}/2) - V(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}/2)] - \\ &- f_1(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2, \mathbf{k} - \mathbf{q}, t) f_1(\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}/2, \mathbf{q}, t) [V(\mathbf{q}) + V(-\mathbf{q}) - \\ &- V(-\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}/2) - V(\mathbf{q} - \mathbf{p} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}/2)] \}. \quad (26) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (26) содержит как прямые, так и обменные члены. Оставляя только прямые члены, пропорциональные  $V(\mathbf{q})$ , мы приходим к потенциалу Хартри. Выполняя интегрирование по  $k$  в (25), влассовский член может быть приведен к знаковой форме

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \quad (27)$$

а потенциал Хартри  $u(\mathbf{r})$  определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \frac{i}{2\pi} \int d^3r_2 \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi\hbar)^6} [V(\mathbf{q}) + V(-\mathbf{q})] \times \\ &\times \left[ \exp\left(\frac{1}{2} \mathbf{q} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{q} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right)\right) \right] \times \\ &\times f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \approx \frac{i}{\hbar} \int \frac{d^3r_2 d^3p_2 d^3q d^3p}{(2\pi\hbar)^6} V(r') \times \\ &\times e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}')} \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) f_1(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2, t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{d^3r_2 d^3p_2}{(2\pi\hbar)^3} V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) f_1(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

где для упрощения предполагалось, что  $V(\mathbf{q})$  является гладкой функцией.

Полный учет хартри-фоковского вклада в (26) приводит при  $T = 0$  к самосогласованному формализму зависящего от времени метода Хартри — Фока. При конечных температурах среднее поле



строится из частично заполненных одночастичных состояний в соответствии с  $f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  таким образом, что потенциал сглаживается при высоких температурах. Однако, будучи основанным на приближении среднего поля, уравнение Власова не может описать столкновения частиц, которые необходимы для хаотизации системы в импульсном пространстве. Власовский член (27) является членом первого порядка по взаимодействию. Но хартриевский потенциал должен определяться самосогласованным образом, поэтому в пространственно неоднородном случае уравнение включает также и члены более высокого порядка.

Уравнение Власова является обратимым во времени, поэтому при стремлении времени к бесконечности никакого термодинамического равновесия не достигается. Например, в пространственно однородном случае, когда нет зависимости от  $\mathbf{r}$ , стационарным решением уравнения Власова будет произвольная функция от импульса.

**Уравнение Ландау — Больцмана.** Интеграл столкновения (24) описывает процессы взаимодействия двух частиц. В отличие от власовского члена он, по крайней мере, квадратичен по взаимодействию, поскольку  $[p^2/2m, n(\mathbf{p})] = [p^2/2m, \rho_{\text{red}}^{(1)}(t)] = 0$ . В рамках теории возмущения можно заменить оператор временной эволюции или соответственно функцию Грина  $G^+(E)$  пропагатором свободной частицы ( $H = H^0 + V$ )

$$G_0(z) = \frac{1}{z - H^0}.$$

Применив теперь теорему Вика, мы получим столкновительный член в представлении Ландау [24, 28].

Мы сейчас непосредственно переходим к выводу больцмановской формы столкновительного члена, который может быть выражен через  $T$ -матрицу или фазовые сдвиги соответственно. Тогда столкновительный член вновь преобразуется к форме Ландау в борновском приближении для фазовых сдвигов рассеяния или при замене  $T_2$ -матрицы взаимодействием  $V$ .

Введем многочастичную  $T$ -матрицу соотношением [23, 40]

$$T^+(E) = V(E - H + i\epsilon)^{-1}(E - H^0 + i\epsilon) = VG^+(E)(G_0^+(E))^{-1}.$$

По оптической теореме для  $T$ -матрицы мы можем связать  $\text{Im } G^+(E)$  в формуле (23) с  $\text{Im } G_0^+(E)$ :

$$\begin{aligned} \text{Im} \frac{1}{E - H + i\epsilon} &= \frac{-\epsilon}{(E - H + i\epsilon)(E - H - i\epsilon)} = \\ &= \frac{1}{E - H + i\epsilon} (E - H^0 + i\epsilon) \frac{-\epsilon}{(E - H^0 + i\epsilon)(E - H^0 - i\epsilon)} \times \\ &\times (E - H^0 - i\epsilon) \frac{1}{E - H - i\epsilon} = V^{-1}T^+(E) \text{Im } G_0^+(E)T^-(E)V^{-1}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (24) и учитывая, что

$$T^+ = V + VG_0^+T^+ = V + T^+G_0^+V, \\ V^{-1}T^+ = 1 + G_0^+T^+, T^+V^{-1} = 1 + T^+G_0^+$$

и

$$[n(\mathbf{p}), G_0^+] = [\rho_{\text{red}}^{(1)}(t), G_0^+] = 0,$$

находим

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Sp} \{ [T^+(E), n(\mathbf{p})] \times \\ \times \text{Im} G_0^+ [T(E), \rho_{\text{red}}^{(1)}(\mathbf{r}, t)] \text{Im} G_0^+ \},$$

где  $\rho_{\text{red}}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$  определяется соотношениями

$$\langle n(\mathbf{p}) \rangle_{\text{red}}^{\mathbf{r}, t} = f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f_{\mathbf{p}}.$$

Если рассматривать только бинарные столкновения, то много-частичную  $T$ -матрицу  $T$  надо заменить двухчастичной  $T$ -матрицей  $T_2$ :

$$T_2 = \int \frac{d^3p_1 d^3p_2 d^3p'_1 d^3p'_2}{(2\pi\hbar)^9} \hat{t}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) \times \\ \times \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) a^+(\mathbf{p}'_1) a^+(\mathbf{p}'_2) a(\mathbf{p}_2) a(\mathbf{p}_1). \quad (28)$$

Применяя теорему Вика, мы приходим к выражению Улинга — Уленбека [41] для столкновительного члена

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^3p_2 d^3p'_1 d^3p'_2}{(2\pi\hbar)^6} \left| \hat{t}(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2) - \hat{t}(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_1) \right|^2 \times \\ \times \delta(E_p + E_{p_2} - E_{p'_1} - E_{p'_2}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \times \\ \times \{ f_p f_{p_2} (1 - f_{p'_1}) (1 - f_{p'_2}) - f_{p'_1} f_{p'_2} (1 - f_p) (1 - f_{p_2}) \}. \quad (29)$$

Выражение Больцмана для столкновительного члена получается из этого соотношения, если опустить обменные члены и считать, что  $f \ll 1$ . В простейшем приближении мы будем иметь «лестничную»  $T$ -матрицу, описывающую задачу рассеяния двух изолированных частиц.

Уже на заре развития кинетической теории Больцманом было показано, что его уравнение описывает необратимую эволюцию системы ( $H$ -теорема). Стационарное решение уравнений Больцмана и Улинга — Уленбека описывает тепловое равновесие при заданных значениях кинетической энергии, числа частиц и полного импульса, которые являются сохраняющимися величинами при двухчастичных столкновениях. Из (29) непосредственно следует, что столкновительный член обращается в нуль, если  $f_p$  задать равновесным фермиев-

ским распределением

$$f_p = \{\exp \beta (E_p - \mu) + 1\}^{-1}.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что термодинамическое равновесие, соответствующее уравнению Больцмана, описывается идеальным квантовым газом фермионов. Это является следствием процедуры факторизации и может быть всегда прослежено из определения энтропии, которая в нашем случае есть больцмановская энтропия.

Кинетическое уравнение, стационарному решению которого отвечает термодинамическое равновесное состояние газа взаимодействующих фермионов, можно получить, если в сокращенный набор наблюдаемых переменных включить корреляции. Другая эквивалентная возможность сохранить полную (а не только кинетическую) энергию и прийти в термодинамическом пределе к взаимодействующему ферми-газу состоит в учете эффектов запаздывания в столкновительном члене, с отказом при этом от приближения локальности во времени [27].

На основе больцмановского столкновительного члена можно развить динамический подход к эволюции горячей и плотной ядерной материи. Используя эмпирические нуклон-нуклонные сечения, можно смоделировать броуновскую динамику, вводя вероятностную интерпретацию событий рассеяния в динамическое описание эволюции  $N$ -частичной системы [1, 8—10]. Эта концепция используется в каскадных расчетах (см. последний пункт разд. 2).

**Подход Власова — Улинга — Уленбека.** Подстановка (27) и (29) в кинетическое уравнение (19) приводит к замкнутой системе интегродифференциальных уравнений Власова — Улинга — Уленбека [41], описывающей временную эволюцию одночастичной функции распределения  $f_1(p, r, t)$ . В отличие от больцмановского столкновительного интеграла столкновительный член (29) включает эффекты влияния окружающей среды, как, например, блокировку вследствие принципа Паули.

В последние несколько лет уравнение Власова — Улинга — Уленбека получило широкое признание как основа динамического рассмотрения физики столкновения тяжелых ионов [20]. Именно с ним связывались основные надежды на извлечение наиболее достоверной информации об уравнении состояния нагретой и сжатой ядерной материи. Однако в конкретных модельных расчетах пренебрегалось обменными членами столкновительного интеграла (29), а двухчастичная  $T$ -матрица выражалась, как правило, через экспериментально измеряемые сечения рассеяния, что игнорирует эффекты окружающей среды (кроме паулевской блокировки). Это влияние среды рассматривается в следующем разделе. Кроме того, в общем случае одночастичное рассмотрение не является достаточным при описании эволюции системы. Ниже мы обсудим также учет двух-

частичных корреляций, а в разд. 3 — образование связанных состояний.

**Сечения взаимодействия в среде.** В рамках подхода Власова — Улинга — Уленбека кинетическое уравнение для одночастичной функции Вигнера  $f_1 (= f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1, t))$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \nabla_{\mathbf{r}_1} f_1 - \nabla_{\mathbf{r}_1} u(\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} f_1 = g_1 - l_1. \quad (30)$$

Здесь  $u(r)$  есть потенциал среднего поля, член  $l_1$  отвечает потере частиц из-за столкновений:

$$l_1 = \int \frac{d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2}{(2\pi\hbar)^6} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) \times \\ \times |T_2(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2; \widetilde{\mathbf{p}}_1 \widetilde{\mathbf{p}}_2; \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + i0)|^2 f_1 f_2 (1 - f'_1) (1 - f'_2), \quad (31)$$

а член  $g_1$ , характеризующий образование частиц в результате тех же процессов, получается из  $l_1$  заменой фактора  $f_1 f_2 (1 - f'_1) (1 - f'_2)$  на  $f'_1 f'_2 (1 - f_1) (1 - f_2)$ .

Оператор Паули  $Q = (1 - f_1) (1 - f_2)$  в уравнении (31) контролирует, запрещены или нет конечные состояния двух сталкивающихся нуклонов (паулевская блокировка конечных состояний). Сам процесс столкновения описывается двухчастичной  $T$ -матрицей  $T_2$ , которая связана с полной двухчастичной функцией Грина соотношением

$$T_2(z) G_2^0(z) = V G_2(z). \quad (32)$$

Здесь

$$G_2^0(z) = \frac{1 - f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon_2)}{z - \varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (33)$$

— свободный двухчастичный пропагатор для квазичастиц с энергией

$$\varepsilon_1 = p_1^2/2m + \text{Re} \sum (\mathbf{p}_1, \varepsilon_1 + i0). \quad (34)$$

В «лестничном» приближении  $T$ -матрица  $T(z)$  задается уравнением Бете — Голдстоуна

$$T(z) = V + V G_2^0(z) T(z) \quad (35)$$

и должна быть симметризована, что отмечено волнистой линией в уравнении (31). В случае локального термодинамического равновесия, характеризуемого температурой  $T$  и химическим потенциалом  $\mu$ , сдвиг энергии квазичастицы находится из собственной энергии

$$\Sigma(1, z) = \sum_2 \left\{ f(\varepsilon_1) V(12, \widetilde{1}\widetilde{2}) + \int \frac{d\omega}{\pi} \text{Im} T(12; \widetilde{1}\widetilde{2}; \omega + i0) \frac{f(\varepsilon_2) + g(\omega)}{\omega - z - \varepsilon_2} \right\}, \quad (36)$$

где  $f(\varepsilon)$  есть фермиевская, а  $g(\omega) = (\exp \beta(\omega - 2\mu) - 1)^{-1}$  — бозевская функции распределения. Следует подчеркнуть, что согласно (34)  $\varepsilon_1$  зависит от  $\Sigma$ , поэтому уравнение (34) должно решаться самосогласованным образом.

Привычная форма уравнения Власова — Улинга — Уленбека получается из (30), если ввести обобщенное нуклон-нуклонное сечение  $d\sigma/d\Omega$  соотношением

$$\frac{2\pi}{\hbar} \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) |T(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2; \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + i0)|^2 \times \\ \times \frac{d^3 p'_1}{(2\pi\hbar)^3} = |v_{12}| \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega,$$

где  $v_{12}$  — относительная скорость частиц 1 и 2 до столкновения.

В пределе низкой плотности, когда  $f_1 \ll 1$ , члены паулевской блокировки в уравнениях (31) и (32) могут быть опущены, и квази-частичная энергия (33) становится равной энергии свободных частиц. При этом правая часть уравнения (30) представляет собой обычный больцмановский столкновительный член, описывающий парные столкновения почти свободных нуклонов в разреженном газе. Таким образом, оправдана замена  $d\sigma/d\Omega$  сечением взаимодействия двух изолированных нуклонов  $d\sigma^0/d\Omega$ .

Для плотных систем необходимо учесть влияние среды на столкновительный член в (30). Соответствующей величиной, которая демонстрирует этот эффект, является средний свободный пробег нуклона в ядерном веществе

$$\lambda(p) = p \left\{ m \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega f(\varepsilon_2) |v_{12}| \frac{d\sigma}{d\Omega} (1 - f'_1) (1 - f'_2) \right\}^{-1}, \quad (37)$$

который непосредственно связан с членом убыли частиц  $l_1$  уравнения (31). Его поведение в ядерной материи при нулевой температуре и плотности  $\rho = 0,17 \text{ фм}^{-3}$  интенсивно исследовалось как теоретически, так и экспериментально [42, 43], и к настоящему времени достигнуто неплохое согласие между теорией и экспериментальными наблюдениями. Для конечных температур экспериментальные данные отсутствуют, хотя теоретические исследования были предприняты в ряде работ [44, 45]. Влияние окружающей среды на средний свободный пробег частицы проявляется различным образом:

1. Блокирующий конечные состояния паулевский фактор  $Q = (1 - f_1)(1 - f_2)$  контролирует доступный фазовый объем для конечных состояний двух сталкивающихся нуклонов. Это означает, что процессы рассеяния, при которых конечные состояния попадают внутрь сферы Ферми, запрещены, что особенно существенно при низких температурах. В этом случае средний свободный пробег нуклона резко возрастает по сравнению с пробегом нуклона, на который не воздействуют никакие эффекты среды, если паулевский фактор  $Q$  учтен согласно (37), но сечение аппроксимировано  $d\sigma^0/d\Omega$  [43] (рис. 1).

2. Само поперечное сечение содержит поправки на эффект окружающей среды, которыми полностью пренебрегается, если используется экспериментальное значение сечения нуклон-нуклонного рас-

сеяния. Решая уравнения для  $T$ -матрицы (35), эффекты паулевской блокировки должны быть еще раз учтены в соответствии с (33).

3. Далее, эффект среды проявляется также в собственной энергии  $T$ -матричного уравнения (35), модифицируя дисперсионное соотношение для свободных частиц.

Поскольку самосогласованное рассмотрение влияния ядерной среды включает вычисление столкновительного члена, термодинамический предел Власова — Улинга — Уленбека уравнения (30).

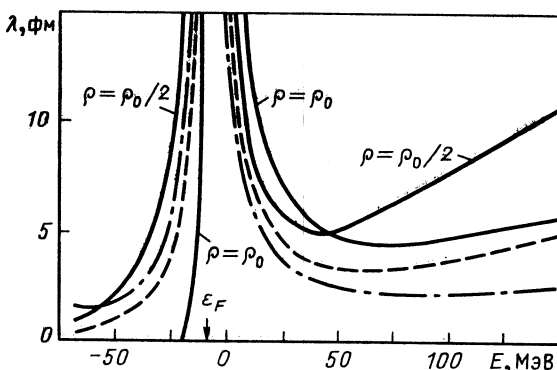


Рис. 1. Зависимость среднего свободного пробега нуклона в ядерном веществе при нулевой температуре от кинетической энергии:

сплошные кривые рассчитаны с полным учетом эффектов окружающей среды при двух значениях ядерной плотности  $\rho$ ; пунктирная кривая учитывает лишь паулевское подавление [формулу (37) с  $m = m_N$ ]; штрихпунктир рассчитан с использованием сечений свободного нуклон-нуклонного рассеяния  $d\sigma^0/d\Omega$ ; оба последних результата получены при  $\rho = \rho_0$ .

(стационарное решение) соответствует теории ядерной материи Бракенера, где мы имеем равновесное фермиевское распределение для энергии квазичастиц, вычисляемой самосогласованным образом из (36). Динамика уравнения Власова — Улинга — Уленбека [левая часть уравнения (30)] и введение концепции квазичастиц в дрейфовый член будут обсуждаться в следующем разделе.

Для получения качественных оценок мы рассмотрим эффективные нуклон-нуклонные сечения рассеяния  $d\sigma/d\Omega$  и средний свободный пробег  $\lambda(\rho)$ , вытекающие из решения уравнения Бете — Голдстоуна с сепарабельной формой нуклон-нуклонного потенциала Гони [46]. Пусть локальное термодинамическое равновесие характеризуется температурой  $T$  и химическим потенциалом  $\mu$ . Выбирая простую форму уравнения состояния  $\rho(\mu, T) = \sum_1 f(\epsilon_1)$ , получаем, что эффективное сечение и средний свободный пробег становятся функциями температуры и плотности окружающей среды. В принципе, уравнения для сдвига энергии квазичастиц и  $T$ -матрицы должны решаться самосогласованно. Однако для простоты мы рассмотрим

здесь только эффект паулевской блокировки в  $T$ -матрице, пренебрегая импульсной зависимостью сдвига энергии квазичастицы. Это соответствует обычной параметризации Скирма, где импульсная независимость сдвига приводит к перенормировке химического потенциала  $\tilde{\mu} = \mu - \Delta(\rho)$ .

Вклад  $S$ -волны в полное нуклон-нуклонное сечение рассеяния

$$\sigma_{NN} = \frac{3}{4} \int d\Omega \left( \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{1S_0} + \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{3S_1} \right)$$

как функция энергии относительного движения  $E = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2/2m$  показан на рис. 1 для потенциала Гони. В зависимости от плотности проявляется некоторый пик, который обусловлен сдвигом связанных состояний в непрерывный спектр состояний рассеяния из-за паулевской блокировки. Сдвиг спектрального веса связанных состояний в континуум можно видеть также на примере более простого потенциала Ямагучи  $V(p, p') = \lambda g(p) g(p')$  [47], для которого имеем

$$T(p, p', \mathbf{P}, z) = \lambda \frac{g(p) g(p')}{1 - J(\mathbf{P}, z)}$$

с

$$J = \lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} g^2(p) \frac{1 - f(\mathbf{P}/2 - \mathbf{p}) - f(\mathbf{P}/2 + \mathbf{p})}{p^2/2 - z}.$$

Можно показать, что в пределе низкой плотности обычный полюс связанного состояния при  $z = -2,225$  МэВ отвечает дейтрону. С увеличением плотности полюс движется к нулевой энергии и затем выходит в непрерывный спектр состояний рассеяния, если плотность превышает плотность Мотта. Таким образом, сечение сильно возрастает при малых энергиях, когда состояние дейтрона «растворяется» в непрерывном спектре. С увеличением плотности система становится вырожденной, и мнимая часть величины  $J(z)$  обращается в нуль при  $z = 2\tilde{\mu}$ .

При энергии ниже  $2\tilde{\mu}$  эффективное сечение уменьшается из-за блокировочного фактора Паули. Однако для энергий вблизи значения  $2\tilde{\mu}$  сечение рассеяния в среде существенно усиливается по сравнению с сечением взаимодействия свободных нуклонов (см. кривую на рис. 1, обозначенную как  $\rho = \rho_0$ ).

Чтобы проиллюстрировать, как зависимость  $T$ -матрицы от плотности влияет на столкновительный член, рассчитаем по (37) средний свободный пробег  $\lambda(p)$  с усредненным оператором Паули [43]

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= (4\pi)^{-1} \int d\Omega [1 - f(P/2 - p)][1 - f(P/2 + p)] = \\ &= [1 - \exp(2A)]^{-1} \left[ 1 + \frac{1}{A} \ln \frac{1 + \exp(A-B)}{1 - \exp(A+B)} \right], \end{aligned}$$

где  $A = (\tilde{\mu} - (P^2/4 + p^2)/2m)/T$  и  $B = pP/2mT$ .

Влияние температуры ядерной материи на средний свободный пробег  $\lambda$  при  $\rho = \rho_0$  показано на рис. 2. Средний свободный пробег  $\lambda(p)$  вычислен по (37) с полным учетом (усредненного) оператора Паули  $\bar{Q}$  [45]. Представленные на рис. 2 результаты показывают, что с увеличением температуры структура в сечении рассеяния становится менее заметной из-за эффективного ослабления действия принципа Паули.  $T$ -матричные расчеты для ядерной среды с учетом блокировки Паули, выполненные в связи с рассмотрением эффекта

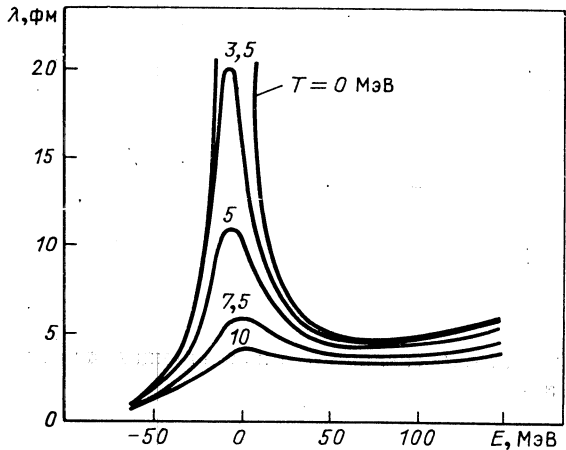


Рис. 2. Энергетическая зависимость среднего свободного пробега нуклона в ядре при различных температурах. Кривые рассчитаны с полным учетом эффектов окружающей среды при  $\rho = \rho_0$

Мотта, приводят к значительному изменению эффективного нуклон-нуклонного сечения в ядерном веществе. Влияние окружающей среды на средний свободный пробег нуклона уменьшает пробег по сравнению со значением, рассчитанным с учетом лишь запрета Паули для конечных состояний. Конечно, это обсуждение должно быть дополнено рассмотрением эффектов собственной энергии и вкладов более высоких парциальных волн.

**Собственная энергия и уравнение Ландау — Силина.** Как показано выше, уравнение Власова — Улинга — Уленбека позволяет учесть влияние среды на процесс рассеяния, но остается еще ряд открытых проблем. Например, необходимо ввести последовательное квазичастичное представление, описывающее в том числе и дрейфовый член. При этом надо убедиться, что нет двойного счета взаимодействий во власовском и столкновительном членах. Дальнейшее улучшение подхода требует включения корреляций, рассмотрения эффектов нелокальности столкновительного члена во времени (сохранение полной энергии, гидродинамика) и в пространстве (эффекты конечного размера при использовании квантовых состояний вместо плоских волн) и т. п. Для рассмотрения всех этих аспектов необходим, конечно, систематический многотельный подход.



Ниже мы обсудим учет корреляций и покажем, как вводится последовательное квазичастичное описание. Для этого мы используем формализм неравновесных функций Грина, изложенный, например, в работе [30], а также в связи с проблемой ядерной материи в [22].

Мы начнем с уравнений движения для одночастичных функций Грина

$$\left. \begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial r_1} \right)^2 \right) g_1^{\geq} (11') &= \int_{-\infty}^{\infty} d1 \Sigma^{\text{ret}} (11) g_1^{\geq} (11') + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d1 \Sigma^{\geq} g_1^{\text{ac}} (11'); \\ \left( -i \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial r_1'} \right)^2 \right) g_1^{\leq} (11') &= \int_{-\infty}^{\infty} d1 g_1^{\leq} (11) \Sigma^{\text{ac}} (11') + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d1 g_1^{\text{ret}} (11) \Sigma^{\leq} (11'), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где запаздывающая и опережающая функции определены соотношением

$$f^{\text{ret/ac}} (t, t') = f^0 (t) \delta (t - t') \pm \theta [\pm (t - t')] (F^> (t, t') - F^< (t, t')).$$

Из уравнений движения для запаздывающей и опережающей функций Грина (38)

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial r_1} \right)^2 \right) g_1^{\text{ret/ac}} (11') &= \delta (1 - 1') + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d1 \Sigma^{\text{ret/ac}} (11) g_1^{\text{ret/ac}} (11') \end{aligned} \quad (39)$$

с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} d1 (g_1^{\text{ret/ac}})^{-1} (11) g_1^{\text{ret/ac}} (11') = \delta (1 - 1') \quad (40)$$

находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d1 (g_1^{\text{ret}})^{-1} (11) g_1^{\geq} (11') &= \int_{-\infty}^{\infty} d1 \Sigma^{\geq} (11) g_1^{\text{ac}} (11'); \\ \int_{-\infty}^{\infty} d1 g_1^{\leq} (11) (g_1^{\text{ac}})^{-1} (11') &= \int_{-\infty}^{\infty} d1 g_1^{\text{ret}} (11) \Sigma^{\leq} (11'). \end{aligned}$$

Эта система уравнений может быть использована для вычисления спектральных и статистических свойств одночастичного распределения.

Для пространственно-временных переменных удобно ввести относительную координату и координату центра масс, чтобы затем выполнить преобразование Фурье по относительным координатам. В низшем приближении мы приходим к выражению конволюционного типа

$$\int \bar{d}x f(x, \bar{x}) u(\bar{x}, x') = I(x, x'); \quad y = x - x', \quad t = \bar{x} - x, \quad z = \frac{1}{2}x + x';$$

$$I(y, z) = \int dt f(y - t, z + t/2) u(t, z + t/2 - y/2) \approx \int dt f(y - t, z) u(t, z),$$

которое после фурье-преобразования факторизуется:

$$I(\omega, z) \simeq f(\omega, z) u(\omega, z).$$

Используя такие преобразования, после вычитания уравнений (40) находим

$$\{\text{Re}(g_1^{\text{ret}})^{-1}, \text{ig}_1^{\langle} \} - i \{ \Sigma^{\langle}, \text{Re} g_1^{\text{ret}} \} = g_1^{\langle} \Sigma^{\rangle} - g_1^{\rangle} \Sigma^{\langle}, \quad (41)$$

где  $\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \omega} \frac{\partial B}{\partial T} - \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial B}{\partial \omega} - \nabla_p A \nabla_R B + \nabla_R A \nabla_p B$ .

Тогда из соотношения (39) следует

$$(\omega \pm i\epsilon - p^2/2m - \Sigma^{\text{ret/ac}}(p\omega RT)) g_1^{\text{ret/ac}}(p\omega RT) = 1.$$

Вычисляя из этих уравнений величину

$$g_1^{\text{ret/ac}}(p\omega RT) = [\omega - p^2/2m \Sigma^{\text{ret/ac}}(p\omega RT) \pm i\epsilon]^{-1},$$

спектральную функцию преобразуем к виду

$$a(p\omega RT) = \frac{\Gamma(p\omega RT)}{(\text{Re}(g^{\text{ret}})^{-1}(p\omega RT))^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2(p\omega RT)},$$

где

$$\text{Re}(g^{\text{ret/ac}})^{-1} = \omega - p^2/2m - \text{Re} \Sigma^{\text{ret/ac}}$$

и фактор затухания

$$\Gamma(p\omega RT) = \text{Im} \Sigma^{\text{ret}}(p\omega RT)$$

являются, в общем случае, функциями  $p$  и  $\omega$ , т. е. диспергируют.

Квазичастичное представление получается в пределе слабого затухания,  $\lim \epsilon \rightarrow 0$ . Тогда спектральная функция записывается как

$$a(p\omega RT) = 2\pi\delta(\omega - p^2/2m - \text{Re} \Sigma^{\text{ret}}(p\omega RT)).$$

Введя энергию квазичастицы

$$E(pRT) = p^2/2m + \text{Re} \Sigma^{\text{ret}}(p\omega RT) |_{\omega=E(pRT)}, \quad (42)$$

зависимость  $\delta$ -функции от  $\omega$  можно представить в простой форме

$$f(p\omega RT) = \frac{1}{1 - \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \Sigma(p\omega RT)} \Big|_{\omega=E(pRT)} 2\pi \delta(\omega - E(pRT)).$$

Если пренебречь дисперсией собственной энергии, т. е. взять  $\Gamma(p\omega RT)$  при значении  $\omega = E(pRT)$ , то спектральная функция будет иметь вид лоренцева распределения.

Теперь нетрудно получить уравнение Ландау — Силина, если в обобщенном уравнении Больцмана (41) пренебречь членом  $\{i\Sigma^<, \operatorname{Re} g_1^{\text{ret}}\}$ . Вводя одночастичную функцию распределения

$$f(pRT) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (-i) g^<(p\omega RT) = F(p\omega RT) \Big|_{\omega=E(pRT)},$$

имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial E(pRT)}{\partial p} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial E(pRT)}{\partial R} \frac{\partial}{\partial p} \right\} f(pRT) = \\ = -f(pRT) i \Sigma^>(p\omega RT) \Big|_{\omega=E(pRT)} - \\ - i (1 - f(pRT)) \Sigma^<(p\omega RT) \Big|_{\omega=E(pRT)}. \end{aligned} \quad (43)$$

Это кинетическое уравнение содержит в левой части энергии квази-частиц, которые определяют дрейфовый член. Например, хартри-фоковские сдвиги энергии, которые дают вклад только в реальную часть  $\Sigma$  и приводят к аддитивной  $p$ -зависимости (приближение эффективных масс и т. д.), учтены здесь самосогласованным образом. Правая часть уравнения (43) описывает столкновительный член, и собственная энергия должна рассматриваться в рамках много-частичного подхода, с использованием, например, диаграммной техники. Связь между собственной энергией термодинамических функций Грина и столкновительным членом была указана Кадановым и Беймом [37]. В простейшем, борновском приближении для собственной энергии (хартри-фоковские члены не дают мнимой части и уже содержатся в энергии квазичастиц) мы получаем столкновительный член в представлении Ландау. Использование при расчете  $\Sigma$  лестничного приближения для  $T$ -матрицы приводит к к больцмановскому столкновительному члену, это приближение может быть улучшено за счет поправок на влияние ядерной среды, как было показано в предыдущем пункте. В частности, входящую в уравнение Ландау — Силина собственную энергию можно переписать в следующем виде:

$$\Sigma^{\cong}(p\omega RT) = -i \int \frac{dp' d\omega'}{(2\pi)^4} \langle pp' | T^{\cong}(\omega + \omega', T) | \bar{p}\bar{p}' \rangle g^{\cong}(p'\omega' RT)$$

или, используя оптическую теорему,

$$i \sum \cong (p\omega RT) = - \int \frac{dp' d\omega' \bar{d}p \bar{d}\omega \bar{d}p' \bar{d}\omega'}{(2\pi)^{12}} \times \\ \times 2\pi\delta(\omega + \omega' - \bar{\omega} - \bar{\omega}') \frac{1}{2} \langle pp' | \mathcal{T}_{12}(\omega + \omega' + \\ + i\epsilon, RT) | \bar{p}\bar{p}' \rangle|^2 ig_1^{\cong}(p'\omega'RT) ig_1^{\cong}(\bar{p}\bar{\omega}RT) ig_1^{\cong}(\bar{p}'\bar{\omega}'RT).$$

Вводя приближение квазичастиц для  $g_1^{\cong}$  и выполняя интегрирование по  $\omega$ , получаем для правой части (43)

$$\frac{1}{\Omega} \int \frac{dp' \bar{d}p \bar{d}p'}{(2\pi)^9} 2\pi\delta(E + E' - \bar{E}' - \bar{E}') \times \\ \times \frac{1}{2} \langle pp' | \mathcal{T}_{12}(E + E' + i\epsilon, RT) | \bar{p}\bar{p}' \rangle|^2 \times \\ \times \{ \bar{f}f' (1 - f) (1 - f') - (1 - \bar{f}) (1 - \bar{f}') f f' \}.$$

Самосогласованное вычисление  $T$ -матрицы с учетом влияния окружающей среды обсуждалось выше.

Дрейфовый член может быть приведен к форме уравнения Власова, если, например, воспользоваться приближением Хартри — Фока для собственной энергии. Следует отметить, что в рамках самосогласованной картины та же собственная энергия, которая описывает столкновительный член, должна использоваться при вычислении сдвига энергии квазичастицы (42).

Уравнение Власова — Силина еще не было применено к ядерной динамике, хотя квазичастичные эффекты важны при небольших энергиях столкновения.

Общий многочастичный подход к кинетическим уравнениям, изложенный здесь, не есть единственный путь улучшения подхода Власова — Улинга — Уленбека. Дальнейшее развитие подхода предполагает включение эффектов корреляций и формирования связанных состояний (см. разд. 3).

**Квантовое уравнение Энскога.** Больцмановское уравнение было введено для описания временной эволюции одночастичной функции распределения системы, плотность которой низка. При использовании концепции попарных столкновений предполагалось, что время столкновения мало по сравнению со временем свободного пролета. Эта концепция, позволяющая разделить акты двухчастичного рассеяния, становится неадекватной для плотных систем. Вместо свободного пролета мы имеем распределение в среде квазичастицы, характеризваемое эффектами собственной энергии. В плотных системах меняется и столкновительный член, поскольку само столкновение и окружающая ядерная среда испытывают взаимное влияние.

При выводе уравнения Больцмана из БВГКИ-иерархии столкновительный член получают из двухчастичной функции распределения в предположении, что она может быть записана в виде произведения двух одночастичных функций распределения. Для плотных систем в тепловом равновесии (классический случай) двухчастичная функция

распределения представляется как произведение максвелловского распределения в импульсном пространстве и функции парных корреляций. Было показано, что в этом случае столкновительный член уравнения Больцмана должен зависеть от функции парных корреляций, и, согласно Энскога, столкновительный член для классического газа жестких сфер может быть получен простым домножением больцмановского столкновительного члена на частотный фактор, который равен значению функции парной корреляции в точке контакта рассеивающихся сфер.

Чтобы получить четкое представление о том, какие эффекты учтены, и избежать двойного счета эффектов взаимодействия, необходим последовательный вывод столкновительного члена Энскога, позволяющий также описать и общий квантовый случай. К такому выводу мы и переходим, исключая рассмотрение высших корреляционных функций одночастичных распределений, которые будут обсуждены в разд. 3. В частности, данный вывод уравнений обобщает одночастичную картину путем включения равновесных корреляций.

Рассмотрим набор переменных сокращенного описания  $\{B_n\}$ , содержащий кроме вигнеровского оператора  $n(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  (17) также и оператор плотности энергии

$$h(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2m} \nabla \psi^+(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3 r' \psi^+(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}'),$$

так что

$$\rho_{\text{red}}(t) = \frac{1}{\hbar} \exp \left\{ - \int d^3 r \beta(\mathbf{r}, t) h(\mathbf{r}) - \int d^3 p d^3 r \lambda(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \right\}. \quad (44)$$

Множители Лагранжа  $\beta(\mathbf{r}, t)$  и  $\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  определяются соответственно средним значением оператора Вигнера, являющегося вигнеровской функцией (18), и средним значением энергии. Предполагая установление локального равновесия, можно ввести локальную температуру. По сравнению с исходным пунктом вывода кинетических уравнений, где появляется единственный параметр  $\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  (который связан с одночастичной функцией распределения), выражение (44) через член взаимодействия в гамильтониане содержит также двухчастичный оператор. В частности, если множители Лагранжа рассматривать как константы, соотношение (44) сводится к обычному статистическому оператору, при этом  $\lambda$  имеет смысл химического потенциала.

Как и ранее [см. (19)–(21)], нетрудно получить кинетическое уравнение в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = & \left\langle \frac{i}{\hbar} [H', n(\mathbf{p}, \mathbf{r})] \right\rangle_{\text{red}}^t - \\ & - \int_{-\infty}^t dt' e^{i(t-t')} \text{Sp} \left\{ \frac{i}{\hbar} [H', \right. \\ n(\mathbf{p}, \mathbf{r})] U(t, t') \left. \left\{ \frac{i}{\hbar} [H, \rho_{\text{red}}(t')] + \frac{\partial}{\partial t'} \rho_{\text{red}}(t') \right\} U^+(t, t') \right\}, \quad (45) \end{aligned}$$

но теперь с более общей записью неравновесного статистического оператора (44). Для транспорта энергии, который соответствует временной вариации локальной температуры, может быть получено аналогичное уравнение. Мы, однако, не будем здесь рассматривать эти температурные вариации. Первый член в правой части (45) соответствует обычному власовскому члену, описанному в разд. 2, если отвечающая взаимодействию часть гамильтониана  $H'$ , фигурирующая в (44), рассматривается по теории возмущения с использованием теоремы Вика. С другой стороны, для оценки вклада высших порядков в дрейфовый член может быть также использована мацу-баровская техника функций Грина.

Столкновительный член можно переписать как

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t-t')} \text{Sp}_{(2)} \left\{ \frac{i}{\hbar} [H', n(\mathbf{p}, \mathbf{r})] U(t, t') \left[ \frac{i}{\hbar} H, \hat{F}_2(t') \right] U^+(t, t') \right\},$$

где  $\hat{F}_2$  — двухчастичный оператор плотности

$$\langle 12 | \hat{F}_2 | 34 \rangle = \text{Sp} \{ \rho_{\text{red}}(t) a^+(1) a^+(2) a(3) a(4) \}.$$

Для двухчастичной плотности мы примем следующий анзац:

$$F_2(1, 2) = F_2^s(1, 2) + f(1, t) f(2, t) y(|\mathbf{r}_{12}|, t),$$

который поддается рассмотрению классической системы в равновесном состоянии. Здесь  $f^{\text{eq}}(1) \approx \exp(-\beta p^2/2m)$  есть максвелловское распределение,  $F_2^s(1, 2)$  — короткодействующая часть двухчастичной плотности, которая обращается в нуль вне области взаимодействия, и  $y(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  — некоторая гладкая функция. Например, для взаимодействия с резким отталкиванием в классической равновесной системе мы имеем

$$F_2(1, 2) = f^{\text{eq}}(1) f^{\text{eq}}(2) \exp(-\beta V(1, 2)) y(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

Поскольку  $y$  слабо зависит от потенциала взаимодействия, последний можно выбрать таким же, как для системы жестких сфер в случае равновесия.

Время двухчастичного столкновения мало по сравнению со временем развития одночастичной функции распределения, поэтому короткодействующей частью  $F_2^s(t')$  можно пренебречь в столкновительном члене, так как она отлична от нуля только в области взаимодействия. Таким образом, мы приходим к выражению

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t-t')} \text{Sp}_{(2)} \left\{ \frac{i}{\hbar} [H', n(\mathbf{p}, \mathbf{r})] \times \right. \\ \left. \times y(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t') U(t, t') \frac{i}{\hbar} [H, f(1, t') f(2, t')] U^+(t, t') \right\}.$$

Вследствие гладкости функции  $y(r)$  отброшены все члены, содержащие градиенты  $y(r)$ , которые возникают из-за коммутаторов. Если произведение одночастичных функций рассматривать по обычной

схеме, то мы приходим к хорошо известному столкновительному члену в больцмановской форме записи. Функцию  $y(r)$  перед столкновительным членом можно взять такую же, как для системы жестких сфер, но с эффективным радиусом, который фиксируется по термодинамическим свойствам системы.

Столкновительный член уравнения Энскога довольно хорошо работает и при высоких плотностях. Некоторые улучшения достигаются за счет последовательного учета более высоких членов разложения общего выражения для столкновительного члена.

Используя классический аналог уравнения Энскога, в работе [48] показано, что эффект типа отталкивания твердых шаров качественно приводит к такому же усилению выхода частиц в боковом направлении, как учет среднего поля в уравнении Власова — Улинга — Уленбека.

**Гидродинамические уравнения.** Описание иерархии неравновесных процессов основывается на предположении, что из-за сильного короткодействующего взаимодействия эволюция к состоянию равновесия происходит, начиная с синхронизации корреляционных функций более высокого порядка, которые последовательно достигают равновесия, и временная зависимость определяется одночастичной функцией распределения (кинетическая стадия). Затем устанавливается локальное равновесие, при котором одночастичная функция распределения характеризуется только первыми моментами плотности числа частиц

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \quad (46)$$

плотности (кинетической) энергии

$$h(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{2m} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \quad (47)$$

и плотности импульса

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \quad (48)$$

которые связаны с сохраняющимися величинами и инвариантами интеграла столкновений. В ходе последующей эволюции (гидродинамической стадии) за счет транспортных процессов будет происходить сглаживание пространственной зависимости этих локальных величин вплоть до установления в системе равновесия, когда указанные выше плотности станут однородными, т. е. не будут зависеть от  $\mathbf{r}$ . Тогда состояние системы определяется сохраняющимися величинами — полным числом частиц, полной энергией и полным импульсом, или соответствующими термодинамическими параметрами  $\mu$ ,  $\beta$  и  $\mathbf{v}$ , описывающими состояние Гиббса.

Неравновесные процессы на гидродинамической стадии взаимодействия характеризуются транспортными коэффициентами, которые связывают токи сохраняющихся величин с обобщенными силами,

порождаемыми градиентами термодинамических параметров. Выражения для транспортных коэффициентов можно найти, воспользовавшись теорией линейного отклика, которая предполагает, что отклонения от равновесного состояния настолько малы, что можно ограничиться первым порядком разложения. В этом случае транспортные коэффициенты выражаются через равновесные корреляционные функции, которые вычисляются с использованием обычной техники термодинамических функций Грина, чтобы включить, например, многотельные аспекты проблемы.

Для построения гидродинамического подхода к неравновесным процессам можно рассмотреть следующий сокращенный набор наблюдаемых переменных  $\{B_n\}$ :

$$\left\{ \psi^+(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^+(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r' \psi^+(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \right. \\ \left. \times \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}), \psi^+(\mathbf{r}) \frac{\hbar}{i} \nabla \psi(\mathbf{r}) \right\},$$

который согласуется с обобщенным гиббсовским состоянием, заданным параметрами  $\mu(\mathbf{r}, t)$ ,  $\beta(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ .

Мы не будем здесь выводить эти уравнения, а отсылаем интересующихся к книге [29]. В результате оказывается, что транспортные коэффициенты выражаются через равновесные корреляционные функции. Часть  $\rho_{\text{red}}$  неравновесного статистического оператора (16) описывает локальное равновесие и приводит к уравнениям Эйлера, тогда как диссипативная часть определяет транспортные коэффициенты.

В соответствии с термодинамикой необратимых процессов мы введем обобщенные токи  $j_m(\mathbf{r})$ , где  $j_0$  есть плотность тока энергии,  $j_1$  — тензор натяжений,  $j_{i+1}$  — плотность тока числа частиц типа  $i$ , для которых выполняются уравнения непрерывности соответствующих величин (46)–(48). Из принципа необратимости энтропии найдем обобщенные силы  $X_m(\mathbf{r}, t)$ :

$$X_0 = \nabla \beta, X_1 = -\beta \nabla \mathbf{v}, X_{i+1} = -\nabla \beta \mu_i. \quad (49)$$

Средние значения плотности токов вычисляются с помощью неравновесного оператора  $\rho$  и после линеаризации по обобщенным силам могут быть представлены в виде

$$\langle j_m(\mathbf{r}) \rangle = \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle_{\text{red}} + \sum_n \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t-t')} \langle j_m(\mathbf{r}) | j_n(\mathbf{r}'; t-t') \rangle X_n(\mathbf{r}', t'),$$

где введено обозначение

$$(A|B) = \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} d\tau \text{Sp} \{ \rho_0 A(-i\hbar\tau) B \}, \rho_0 = \frac{1}{Z_0} e^{-\beta(H - \sum_i \mu_i N_i)}.$$

Таким образом, транспортные коэффициенты выражены через равновесные корреляционные функции соответствующих плотностей тока.



При вычислении транспортных коэффициентов по теории возмущения обычно используют выражения для обратных транспортных коэффициентов [36]. Мы ограничимся здесь рассмотрением только коэффициентов трения, распространение на случай других транспортных коэффициентов не вызывает больших затруднений.

Рассмотрим стационарный случай, пренебрегая зависимостью от времени градиентов (49), и включим одночастичное распределение  $n_p = a_p^+ a_p$  или соответствующие моменты

$$P_n = \sum_p \hbar p_z (\beta E_p)^{n/2} a_p^+ a_p$$

в сокращенный набор статистического оператора

$$\rho_{\text{ред}} = \frac{1}{z_{\text{ред}}} \exp \left\{ - \int d^3 r \beta (\mathbf{r}) h(\mathbf{r}) - \int d^3 r \beta (\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^L F_n P_n \right\}.$$

Для заданных градиентов температуры и химического потенциала из условия стационарности

$$\frac{d}{dt} \langle P_n \rangle = 0$$

находим следующие выражения для транспортных коэффициентов:

$$\tau = \frac{V}{m} \frac{|d|}{\begin{vmatrix} 0 & N \\ N & d \end{vmatrix}},$$

где для элементов матриц  $d$  и  $N$  принято

$$N_n = \frac{\beta}{m} (P_0 | P_n), \quad d_{nm} = \int_{-\infty}^0 dt (\dot{P}_n(t) | \dot{P}_m(t)). \quad (50)$$

В простейшем случае ( $L = 0$ ) коэффициент трения выражается через функцию корреляции сила — сила  $(\dot{P}_0(t) | \dot{P}_0(t))$ .

Эти последние соотношения, которые получены для специального случая обобщенного кинетического уравнения (см. разд. 2), когда моменты одночастичной функции распределения приняты в качестве сокращенного набора наблюдаемых переменных, делают более очевидной связь между гидродинамической и кинетической теориями. Транспортные коэффициенты могут быть выражены через равновесные корреляционные функции, но они также связаны и со столкновительным членом обобщенного кинетического уравнения.

С другой стороны, очевидно, что при рассмотрении плотности энергии следует учесть не только кинетическую энергию, но и плотность потенциальной энергии  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Для этого необходимо рассмотреть функцию парной корреляции, что выходит за рамки одночастичного кинетического уравнения. Поскольку корреляции, по крайней мере в равновесном состоянии, учтены в гидродинамическом подходе, гидродинамические уравнения могут быть просто

выведены только из кинетических уравнений, в которых уже включены корреляции (см. разд. 3). Но гидродинамические уравнения проще кинетических, поскольку они имеют дело лишь с низшими моментами функций распределения, предполагая справедливость концепции локального термодинамического равновесия.

Гидродинамические модели широко используются для описания динамики ядерных столкновений (см. обзоры [2, 7, 12]). Результаты, полученные в рамках гидродинамического подхода, фактически инициировали активные исследования уравнения состояния возбужденной ядерной материи [1].

**Диффузионное приближение.** Решение уравнения Больцмана представляет собой сложную математическую задачу, поэтому интересно получить более простые уравнения. Если при каждом столкновении происходит только малая передача импульса, то временная эволюция одночастичной функции распределения в импульсном пространстве будет описываться уравнением диффузии. Вывод уравнения Фоккера — Планка из мастер-уравнения, описывающего баланс (т. е. «приток» и «отток») частиц, хорошо известен (см., например, [28]). Уравнение Фоккера — Планка является уже не интегро-дифференциальным, а дифференциальным уравнением второго порядка, что существенно упрощает задачу, допуская в отдельных случаях аналитическое решение.

Концепция уравнения Фоккера — Планка вводится при описании стохастических процессов, например, в связи с уравнением Ланжевена. В отличие от стохастических процессов типа броуновского движения наш подход к неравновесным состояниям исходит из динамического рассмотрения (уравнение Лиувилля — фон Неймана), однако возможно найти некоторые связи. В частности, в рамках теории линейного отклика (в формализме Мори) можно ввести концепцию стохастической силы и выразить транспортные коэффициенты через корреляционную функцию стохастических сил. Например, коэффициенты трения (50) можно представить в следующей форме:

$$\gamma = \frac{V}{nN^2} \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} (R(t) | R),$$

где величина

$$\mathfrak{R} = \dot{P}_0 - \frac{\int dt e^{\epsilon t} (\dot{P}_0 | P_0)}{\int dt e^{\epsilon t} (P_0 | P_0)} P_0$$

может рассматриваться как стохастическая сила.

Уравнение Фоккера — Планка записывается для одночастичной функции распределения и содержит дрейфовый и диффузный члены:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\alpha, t) = - \frac{\partial}{\partial \alpha} [A_1(\alpha, t) f_1(\alpha, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} [A_2(\alpha, t) f_1(\alpha, t)];$$

детальный вывод см. в [28].

В борновском приближении диффузный член может быть связан со столкновительным (власовским) членом следующим образом:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{st} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{j}_p,$$

$$\mathbf{j}_p = \int d^3 p_1 d^3 q q W(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}) \frac{\mathbf{q}}{\hbar^6} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}\right) f_1(\mathbf{p}) f_1(\mathbf{p}_1)$$

с

$$W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = \frac{2\pi}{\hbar} |V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)|^2 \delta(E_{p_1} + E_{p_2} - E_{p'_1} - E_{p'_2}).$$

Тогда для случая уравнения Власова—Ландау получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \mathbf{F}^{\text{eff}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}\right) f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, t) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \int d^3 p_2 d^3 q W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}, \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}) \times \\ & \times \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2}\right) f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_2, t), \end{aligned}$$

где эффективная сила определена соотношением

$$\mathbf{F}^{\text{eff}} = - \int \frac{d^3 x_2 d^3 p_2}{\hbar^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f_1(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2, t).$$

Интересная модель высокоэнергетических ядро-ядерных столкновений, основанная на уравнении Фоккера — Планка, предложена в [49].

**Численное решение эволюционных уравнений.** Мы уже отмечали выше, что многие типы динамических уравнений нашли широкое применение в физике столкновения тяжелых ионов. Естественно, что наиболее разработаны численные методы решения уравнений, отвечающих предельным случаям учета многочастичных аспектов проблемы — уравнению Больцмана и гидродинамическим уравнениям, хотя и здесь результаты расчетов по конкретным моделям, использующим один и тот же тип базисных уравнений, могут заметно различаться между собой. В частности, каскадная модель Куньона [10] весьма близко соответствует процессу, описываемому классическим уравнением Больцмана, тогда как в дубненском варианте модели [8] дополнительно учтены связь нуклонов в ядре (т. е. нуклоны удерживаются полем «замороженного» ядерного потенциала, не меняющегося в ходе процесса взаимодействия) и эффекты подавления столкновений из-за действия принципа Паули (в классическом приближении), что эффективно отвечает уже динамике столкновительного члена уравнения Улинга — Уленбека. Гидродинамические модели различаются в основном выбором уравнения состояния ядерной материи, способом учета эффектов вязкости ядерного вещества и отклонений от гипотезы локальности путем введения многокомпонентности ядерной жидкости (см. обзоры [2, 7, 12]).

Некоторым компромиссом между этими предельными случаями являются уравнения Власова — Больцмана и Власова — Улинга — Уленбека, учитывающие одновременно как столкновения между частицами, так и (многочастичные) эффекты среднего поля, контролирующее движение частицы в веществе. Численное решение этих интегродифференциальных уравнений для специфических начальных и граничных условий, определяемых физикой взаимодействия конечных ядерных систем, представляет сложную математическую задачу. Как правило, ее решение строится на комбинации методов статистического моделирования стохастического процесса столкновения ядерных нуклонов (подобно методу, используемому в каскадных моделях [8]) и «мгновенного подстраивания» ядерного поля (в духе решения уравнения Власова, см., например, [50]), в котором частицы движутся между столкновениями. При этом конкретные реализации метода могут базироваться или на одновременной генерации ансамбля ядерных взаимодействий (что и позволяет выполнить усреднение, необходимое для нахождения коллективного ядерного поля), или на прослеживании отдельных ядро-ядерных столкновений, но априори задавая одночастичную функцию распределения  $f_1$  набором (ансамблем) «тестовых» частиц. Связь ядерного поля с плотностью нуклонов может быть задана уравнением состояния, как это делается в гидродинамическом подходе, или на микроскопическом уровне, задавая нуклон-нуклонный потенциал. Более детальное обсуждение методов решения кинетических уравнений можно найти в обзорах [1, 51, 52] и цитированных выше оригинальных работах.

Динамика эволюции плотности системы, образованной при центральном столкновении двух ядер, иллюстрируется рис. 3 и 4. Напомним, что решением кинетического уравнения является одночастичная функция распределения  $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ , зависящая от семи переменных. Представленная на рисунках плотность есть интеграл от  $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  по импульсному пространству [см. формулу (46)], а использование цилиндрической симметрии центрального столкновения позволяет сократить число независимых переменных до трех, что допускает наглядное представление результатов. Приведены решения кинетических уравнений Власова и Власова — Улинга — Уленбека при трех энергиях для центральных столкновений  $\text{Ca} + \text{Ca}$  [53]. Используемое в расчетах уравнение состояния

$$u(r) = -356 (\rho/\rho_0) + 303 (\rho/\rho_0)^{7/6} \text{ МэВ}$$

отвечает коэффициенту сжимаемости ядерной материи  $K = 180 \text{ МэВ}$ .

Видно, что динамика власовского уравнения соответствует взаимопроникновению ядер, сопровождающемуся лишь их некоторым возбуждением (ср. начальные и конечные состояния на рис. 3 и 4). Переход от начальной энергии 50 МэВ/нуклон к 400 МэВ/нуклон меняет только временную шкалу, но не характер взаимодействия. Такое поведение качественно согласуется с результатами расчета по зависящему от времени методу Хартри — Фока [21]. Включение

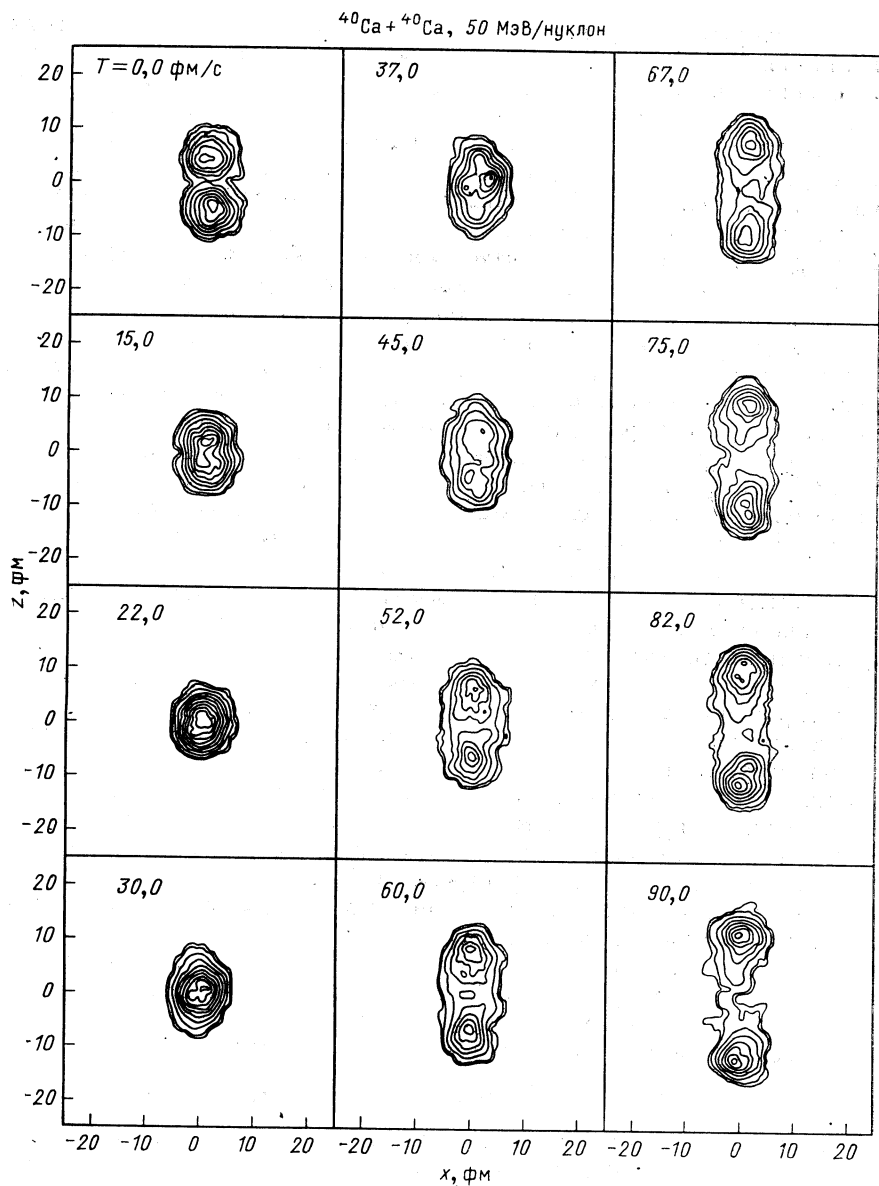
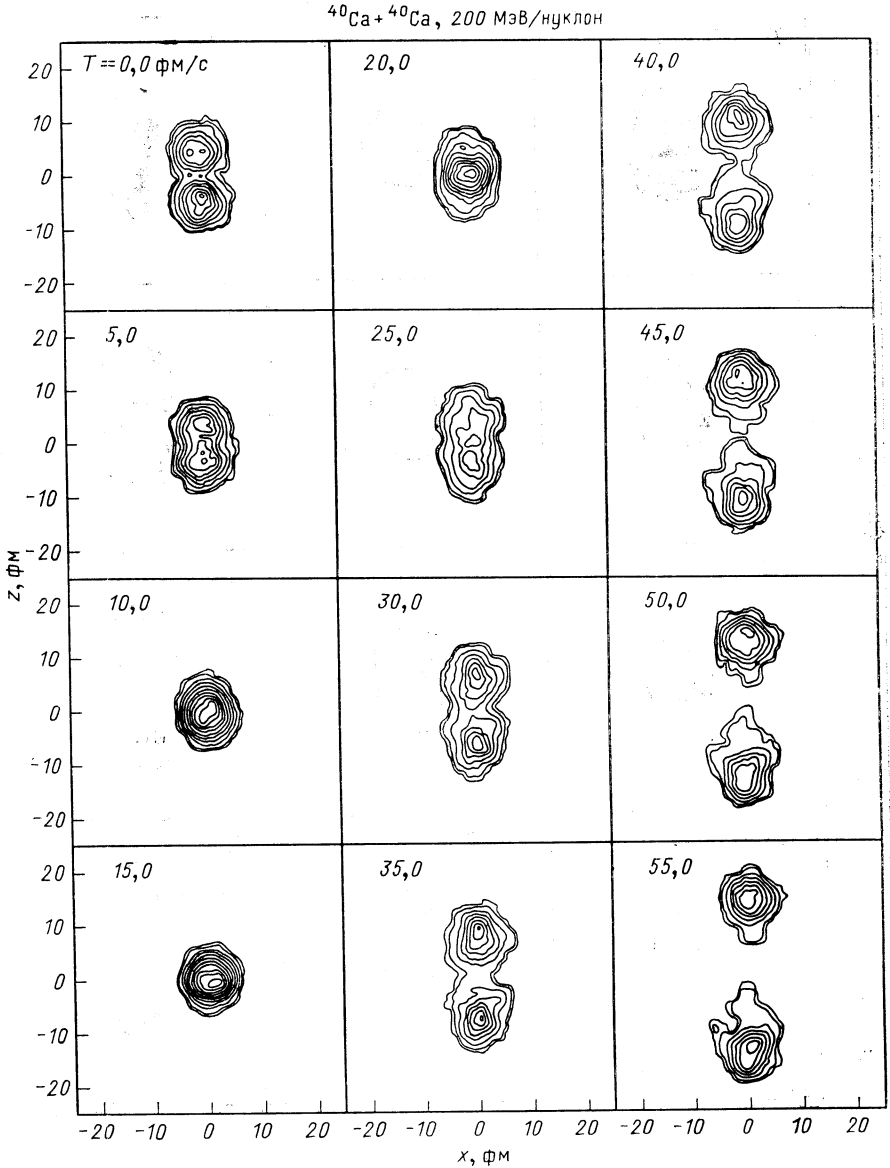


Рис. 3. Описываемая уравнением Власова эволюция плотности нуклонов в системе, образованной в центральных столкновениях  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$  при различных энергиях. Уровни плотности проведены при значениях  $\rho = 0,005; 0,01; 0,03 \text{ фм}^{-3}$  и далее с шагом  $0,03 \text{ фм}^{-3}$ . Время «моментального снимка» указано на рисунке

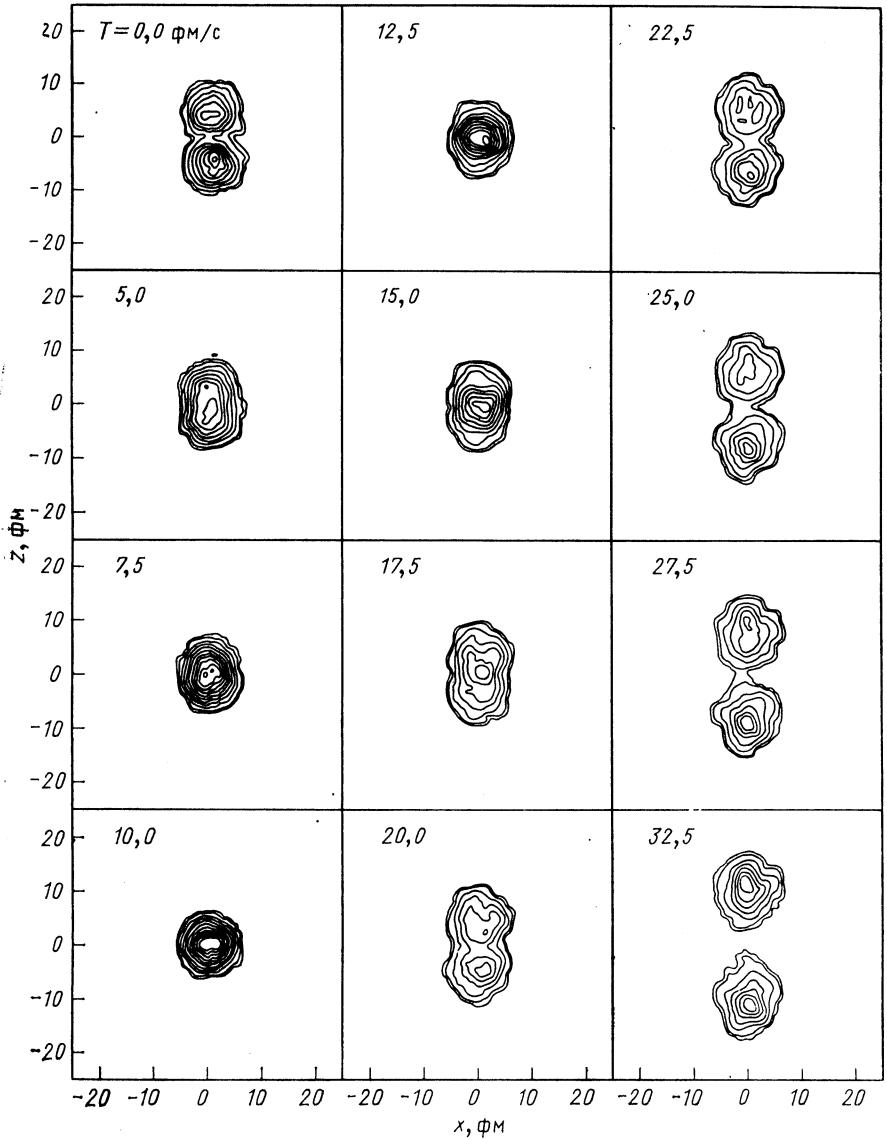
столкновительного члена приводит к значительному усилению движения частиц в направлении, перпендикулярном оси столкновения ядер, к появлению больших флуктуаций в распределении плотности ядерной материи, свидетельствующих о появлении неустойчивостей



в системе и приводящих в конечном итоге к развалу этой системы на куски.

Этими примерами мы ограничим рассмотрение конкретных решений кинетических уравнений применительно к столкновению тяже-

$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ , 400 МэВ/нуклон



Продолжение рис. 3

лых ионов. Сопоставление предсказаний различных моделей с опытом с целью получения информации о термодинамических переменных типа плотности, температуры, давления, энтропии и т. п. и тем

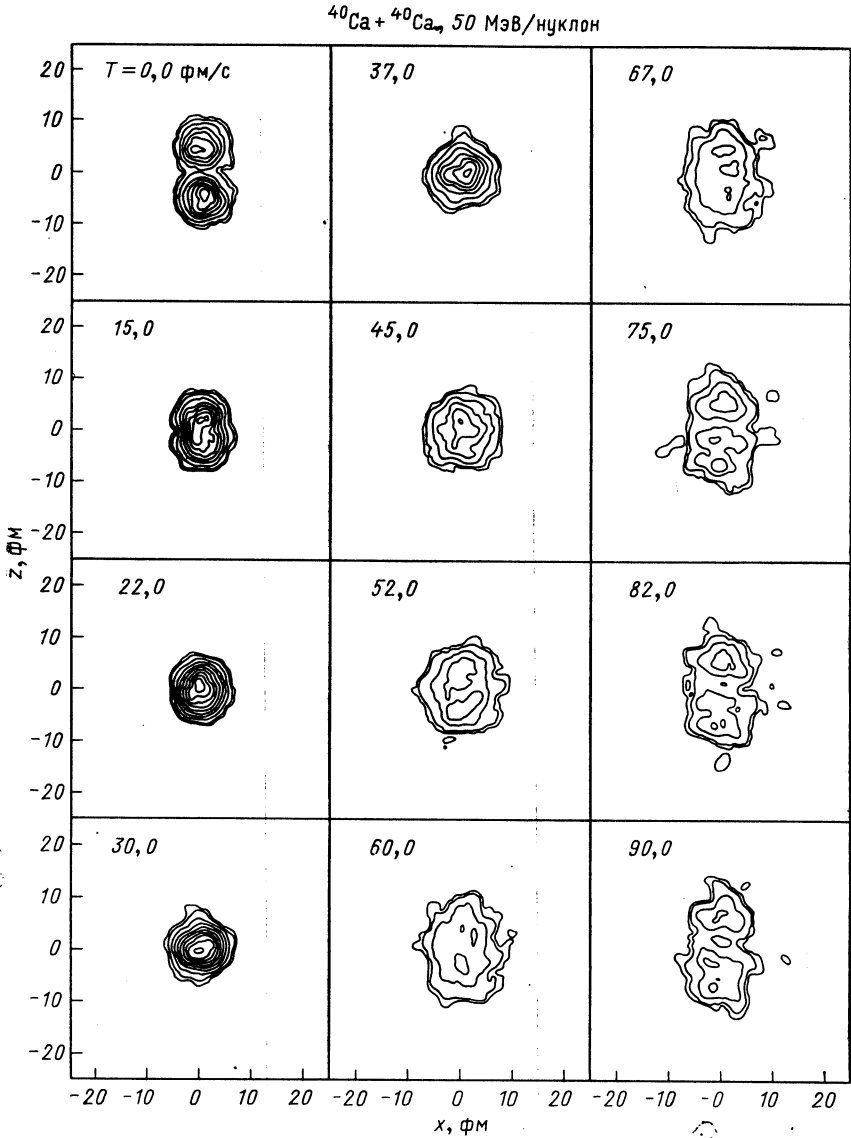
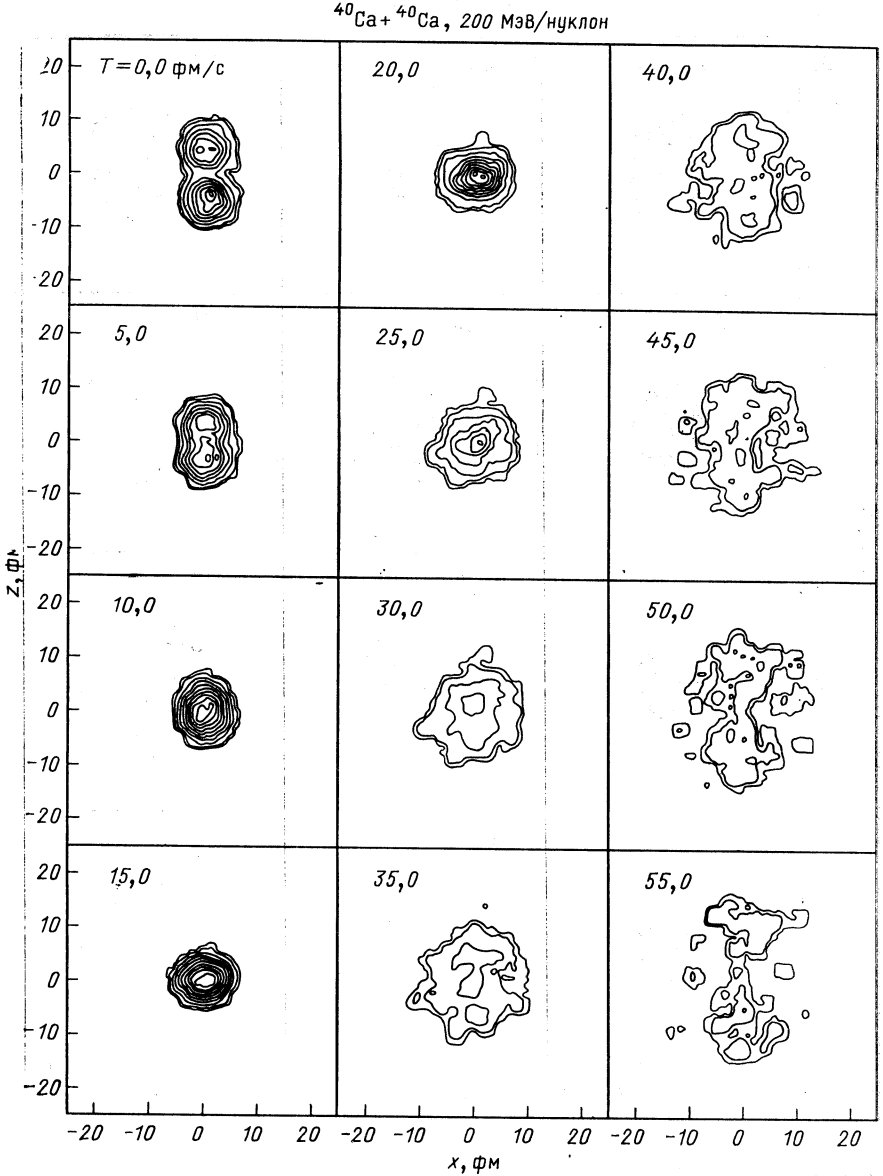


Рис. 4. Решение уравнения Власова — Улинга — Уленбека для центрального столкновения  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$  при различных энергиях. Обозначения как на рис. 3



самым об уравнении состояния ядерной материи выходит за рамки данного обзора (см. введение и приведенные там ссылки).

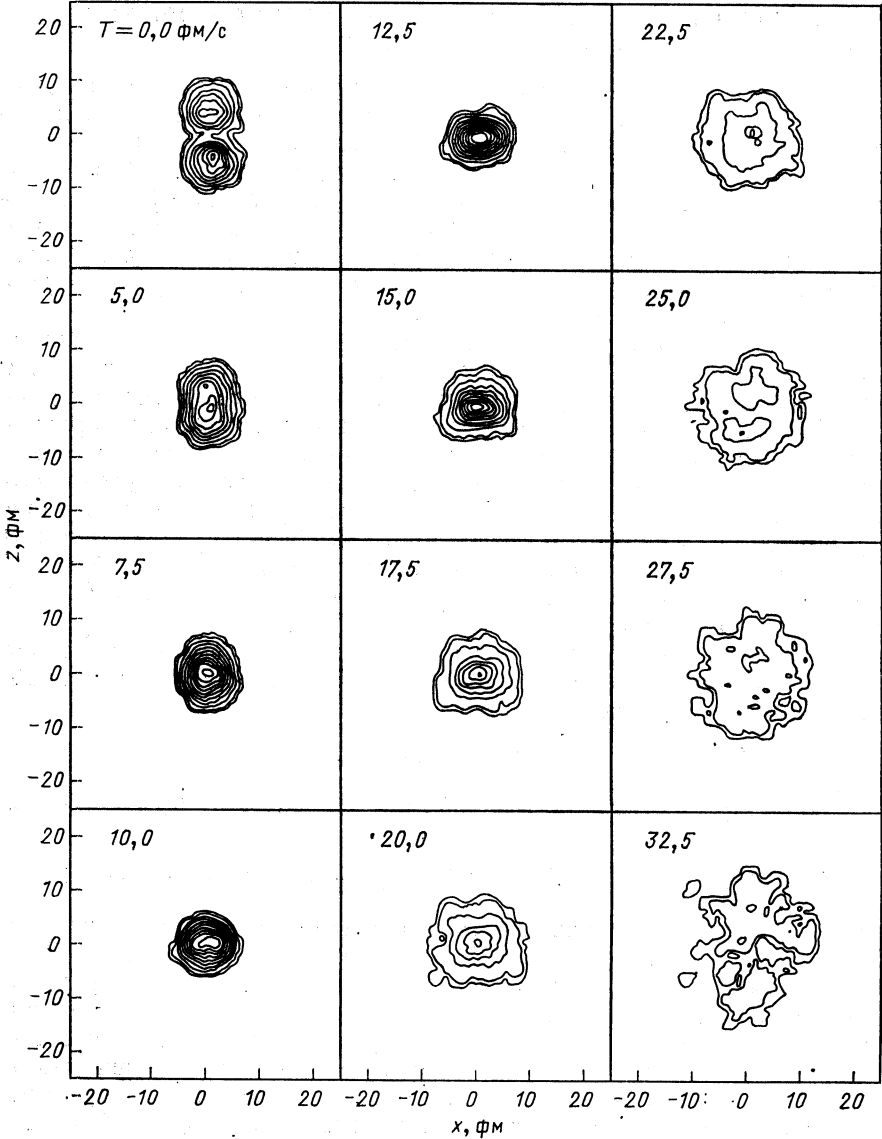
Необходимо отметить, что еще не существует окончательной ясности в вопросе о корректности найденных алгоритмов решения



Продолжение рис. 4

кинетических уравнений. Подтверждением этого могут служить существенные расхождения в предсказанных потоках частиц вбок, обнаруженные при сравнении двух моделей, базирующихся фактически на одном и том же кинетическом уравнении, но использующие

$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ , 400 МэВ/нуклон



Продолжение рис. 4

разные алгоритмы решения [54]. К дискуссии по этому вопросу в работах [55] следует добавить замечание о том, что в [54] решались кинетические уравнения с потенциалом, зависящим от импульса, хотя при выводе базисного кинетического уравнения этой зависимостью пренебрегалось.

### 3. ОБОБЩЕННОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С УЧЕТОМ ОБРАЗОВАНИЯ КЛАСТЕРОВ

В разд. 2 мы получили кинетические уравнения, исходя из одночастичного представления, когда неравновесное состояние определяется числами заполнения одночастичных состояний. Включение корреляций для описания, например, сохранения полной энергии или вывода столкновительного члена в форме записи Энского не просто выполнить при таком представлении. Необходимо расширить неравновесный подход, рассматривая не только одночастичную функцию распределения, но также двухчастичную и функции распределения более высокого порядка.

Эта проблема становится еще более важной, если мы обратимся к задаче образования связанных состояний, которые представляют собой долгоживущие корреляции частиц в системе. Используя принцип ослабления начальных корреляций, в рамках общего неравновесного подхода все не распадающиеся быстро корреляции необходимо рассматривать как наблюдаемые переменные сокращенного описания. Такая ситуация реализуется в плотных системах или при формировании связанных состояний. Обобщенное кинетическое уравнение мы получим расширением сокращенного набора наблюдаемых  $\{B_n\}$ , включив наряду с одночастичной плотностью  $\langle a_k^+ a_l \rangle$  двухчастичную плотность  $\langle a_k^+ a_l^+ a_k' a_l' \rangle$  и т. д.

Это означает, что неравновесное состояние системы описывается не только одночастичной матрицей плотности, или соответствующей одночастичной функцией Вигнера

$$f_1(p, r, t) = \int d^3 q e^{iqr} \langle a_{p-q/2}^+ a_{p+q/2} \rangle^t,$$

но также двухчастичной матрицей плотности, или двухчастичной функцией Вигнера, и т. д.:

$$f_2(p\mathbf{r}, p'\mathbf{r}', t) = \int d^3 q' d^3 q e^{i(q\mathbf{r}+q'\mathbf{r}')} \langle a_{p-q/2}^+ a_{p'-q'/2}^+ a_{p'+q'/2} a_{p+q/2} \rangle^t.$$

Таким образом, мы должны найти уравнения, которые описывают эволюцию во времени не только  $f_1(p, r, t)$ , но и  $f_2(p, r, p'\mathbf{r}', t)$  и т. д. Это приведет к связанной системе уравнений, которые надо решать одновременно, а затем воспользоваться принципом Боголюбова для синхронизации высших функций распределения [т. е. предположить, что вся зависимость от времени входит в них лишь через  $f_1(p, r, t)$ ]. Только в том случае, если  $f_2$  быстро «термализуется», возможно сокращенное описание системы с помощью обычного кинетического уравнения для  $f_1$ .

Феноменологически задача описания системы, в которой возможно образование кластеров, решается рассмотрением связанных состояний как нового типа частиц (нового химического компонента), так что мы можем сформулировать кинетические уравнения для смеси различных компонент. Однако такой подход возможен только в пределе низкой плотности, когда связанные состояния достаточно хорошо определены и приближенно удовлетворяют коммутационным соотношениям для бозонов или фермионов. В плотной материи свойства кластеров модифицируются из-за влияния окружающей среды и, кроме того, необходимо принять во внимание, что составляющие кластера должны удовлетворять принципу Паули (в фазовом пространстве чисел заполнения), приводящему к зависящим от плотности поправкам к коммутационным соотношениям. Таким образом, необходимо разработать последовательный многотельный подход к неравновесному состоянию, описывающий самосогласованным образом образование связанных состояний в ядерной среде.

Для описания формирования кластеров при столкновении тяжелых ионов сейчас используются различные представления. В рамках простой термодинамической модели вероятности формирования кластеров извлекаются из известного закона действующих масс. Улучшенный вариант модели включает также зависимость свойств кластера от плотности, допуская при этом, что гипотеза химического равновесия справедлива до некоторого значения плотности, плотности «замораживания». Аналогичную концепцию замораживания использует модель коалесценции, описывая образование кластеров как некоторую проекцию («свертку») одночастичного распределения в фазовом пространстве. Однако формулировка динамической картины образования кластеров в неравновесной системе является чрезвычайно сложной задачей, и мы приведем ниже лишь некоторые основные соотношения [24].

По сравнению с одночастичным кинетическим уравнением связанная система кинетических уравнений, описывающая формирование кластеров, включает как упругие столкновения, так и реакции, происходящие между составляющими. В рамках многотельного подхода на распространение частиц будут влиять не только традиционные эффекты среды (квазичастицы с эффективной массой), но и процессы рассеяния и реакции. Это замечание справедливо как для нуклон-нуклонного взаимодействия, так и в случае, когда включены другие типы составляющих (изобары, мезоны). Ниже мы покажем, как можно учесть эти эффекты.

**Функции Вигнера для распределения кластеров.** Введем операторы рождения и уничтожения связанного состояния, кластера

$$a_{A\alpha}^+(\mathbf{p}) = \sum_{1 \dots A} \psi_{A\alpha\mathbf{p}}^*(1 \dots A) a^+(1) \dots a^+(A). \quad (51)$$

Здесь  $\psi_{A\alpha\mathbf{p}}(1 \dots A)$  обозначена волновая функция  $A$ -нуклонного кластерного состояния с полным импульсом  $\mathbf{p}$  и внутренним кванто-

вым числом  $\alpha$ , а переменные  $1...A$  характеризуют одночастичные квантовые состояния с заданным импульсом, спином и изоспином.

Для описания результирующего неоднородного распределения частиц в координатном пространстве введем сокращенный набор операторов следующим образом:

$$B_n = \{n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r})\},$$

где

$$n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}/\hbar} a_{A\alpha}^\dagger_{\mathbf{p}-\mathbf{k}/2} a_{A\alpha}_{\mathbf{p}+\mathbf{k}/2} = \int \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}/\hbar} n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$$

есть преобразование Вигнера от плотности, ассоциируемой с кластером массового числа  $A$ . Средние величины

$$f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \langle n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle^t$$

являются вигнеровскими функциями соответствующих кластеров. Таким образом, кластеры рассматриваются как еще один тип частиц подобно новому компоненту в химической смеси.

Теперь кинетические уравнения для  $f_{A\alpha}$  могут быть получены из общего уравнения (19) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle^t = \text{Sp} \left\{ \rho(t) \frac{i}{\hbar} [H, n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r})] \right\} = \\ &= -D_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + I_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (52)$$

Власовский член уравнения

$$D_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} \langle [H, n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r})] \rangle_{\text{red}}^t \quad (53)$$

описывает обратимую во времени эволюцию подобно одночастичному случаю. Столкновительный член

$$\begin{aligned} I_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \int_{-\infty}^t dt' \exp \{ (i(E - E') + \varepsilon)(t - t')/\hbar \} \times \\ &\times \text{Sp} \left\{ \frac{i}{\hbar} [H, n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r})] \delta(E - H) \left( \frac{i}{\hbar} [H, \rho_{\text{red}}(t')] + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial}{\partial t'} \rho_{\text{red}}(t') \right) \delta(E - H) \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

приводит к необратимому поведению и описывает реакции и процессы рассеяния связанными и одночастичными состояниями.

Система уравнений (52) представляет собой систему связанных уравнений для различных типов кластеров  $(A, \alpha) = (1, \alpha_1), (2, \alpha_2)...$  и, в общем случае, может и не сводиться к одному кинетическому уравнению для одночастичной функции распределения  $f_{1\alpha}$  ( $\alpha$  обозначает спин или изоспин).

Как и в разд. 2, мы пренебрежем в столкновительном члене нелокальностью по времени, т. е.  $\rho_{\text{red}}(t') \approx \rho_{\text{red}}(t)$ , а также не будем рассматривать пространственную нелокальность, т. е. не будем учитывать вариаций относительно координаты  $r$  кластерной функции распределения при расчете процесса столкновения. Это означает, что эффекты запаздывания, пропорциональные  $\partial \rho_{\text{red}}(t')/\partial t'$ , могут быть опущены и столкновительный член зависит только от чисел заполнения в импульсном пространстве

$$n_{A\alpha}(\mathbf{p}) = a_{A\alpha}^+(\mathbf{p}) a_{A\alpha}(\mathbf{p}).$$

Выполняя интегрирование в (54) по  $t'$  и  $E'$ , получаем соотношение

$$I_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = -\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{\pi} \text{Sp} \left\{ \frac{i}{\hbar} [H, n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r})] \text{Im} \frac{1}{E-H+i\epsilon} \times \right. \\ \left. \times \frac{i}{\hbar} [H, \rho_{\text{red}}(t)] \text{Im} \frac{1}{E-H-i\epsilon} \right\}, \quad (55)$$

которое является обобщением формулы Кубо — Гринвуда [см. уравнение (24)]. Связанная система кинетических уравнений (52)—(54) имеет простой смысл в пределе низкой плотности как аналог химической смеси реагирующих газов. В этом случае мы действительно имеем смесь различных кластеров, характеризуемых  $(A, \alpha)$ , и соответствующий набор кинетических уравнений. Однако для плотных систем обобщенные кинетические уравнения, включающие образование кластеров, должны выводиться систематическим образом, чтобы правильно учесть многочастичные эффекты.

**Кластерное уравнение Власова — Улинга — Уленбека.** Мы начнем с общих уравнений (19)—(21) и выведем обобщенные уравнения для среднего поля (власовский член) и для столкновений. В отличие от рассмотрения в разд. 2 власовский член уравнения будет теперь отражать влияние отдельных частиц и кластеров на эволюцию составляющих в приближении среднего поля, тогда как столкновительный член учитывает реакции и процессы рассеяния между различными компонентами.

Для упрощения последующего вывода введем часть взаимодействия, ответственную за рассеяние кластера на кластере, следующим образом:

$$V_{A\alpha p, A'\alpha' p'}^{\text{clust. sc}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1 \dots A} \sum_{j=1' \dots A'} V_{ij}(\mathbf{q}) \times \\ \times \sum_{\substack{1 \dots A \\ 1' \dots A'}} \psi_{A\alpha p+\mathbf{q}}^*(1 \dots, i+\mathbf{q}, \dots A) \times$$

$$\times \psi_{A'\alpha' p'-\mathbf{q}}^*(1' \dots, j'-\mathbf{q}, \dots A') \psi_{A'\alpha' p'}(1' \dots A') \psi_{A\alpha p}(1 \dots A). \quad (56)$$

Матричные элементы с различными кластерными конфигурациями во входном и выходном каналах будем рассматривать как часть

кластер-кластерного взаимодействия, обусловленную реакциями. Далее, для не слишком больших значений плотности при вычислении коммутационных соотношений для кластерных операторов, определенных формулой (51), можно пренебречь поправкой на плотность. Тогда для обобщенного власовского члена имеем

$$D_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}/\hbar} \frac{1}{i\hbar} \langle [H, n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r})] \rangle_{\text{red}}^t,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} \langle [H, n_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r})] \rangle_{\text{red}}^t &= \frac{i}{\hbar m_A} \mathbf{p} \mathbf{k} f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, t) + \\ &+ \frac{1}{i\hbar} \sum_{A'\alpha'} \int \frac{d^3p' d^3q}{(2\pi)^6} V_{A\alpha p, A'\alpha' p'}^{\text{clust. sc}}(q) \times \\ &\times \{ f_{A\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2, \mathbf{k} - \mathbf{q}, t) f_{A'\alpha'}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}/2, \mathbf{q}, t) - \\ &- f_{A\alpha}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}/2, \mathbf{k} - \mathbf{q}, t) f_{A'\alpha'}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2, \mathbf{q}, t) \}. \end{aligned}$$

Здесь вместо функции распределения  $f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  введено ее фурье-преобразование  $f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, t) = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}/\hbar} f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  и опущены все вклады от обменных реакций. В символическом виде власовский член уравнения может быть переписан как

$$\begin{aligned} D_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \frac{1}{m_A} \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \sum_{A'\alpha'} V_{A'\alpha', A\alpha}^{\text{clust. sc}}(\mathbf{r}) \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (57)$$

Это соотношение обобщает дрейфовый член одночастичного уравнения Власова (27) в двух аспектах. Во-первых, модифицируется усредненный одностичный потенциал, обусловленный окружающими кластерами (произвольные  $A = 1, A'$ ), а во-вторых, возникает дополнительный вклад среднего поля, ассоциируемый с кластерами (случай  $A > 1, A'$ ).

В общем случае вычисление столкновительного члена  $I_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  [уравнение (55)] требует многочастичного подхода. Мы проделаем это ниже как для власовского, так и для столкновительного членов. Однако, аналогично выводу власовского члена, в пределе малой плотности можно применить теорему Вика для кластерных операторов, что позволяет существенно упростить рассмотрение столкновительного члена. В низшем порядке по кластер-кластерному взаимодействию (расширенное борновское приближение) столкновительный член  $I_{A\alpha}$  содержит вклад, который отвечает рассеянию различ-

ных кластеров, сохраняющему индивидуальность кластеров:

$$\begin{aligned}
 I_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{A'\alpha'} \int \frac{d^3p' d^3q}{(2\pi)^6} |V_{A\alpha p, A'\alpha' p'}^{\text{clust. sc}}(\mathbf{q})|^2 \delta(E_{A\alpha}(\mathbf{p}) + E_{A'\alpha'}(\mathbf{p}') - \\
 & - E_{A'\alpha'}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}) - E_{A\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{q})) \{f_{A\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{r}, t) \times \\
 & \times f_{A'\alpha'}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}, \mathbf{r}, t) (1 \pm f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)) (1 \pm f_{A'\alpha'}(\mathbf{p}', \mathbf{r}, t)) - \\
 & - f_{A\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) f_{A'\alpha'}(\mathbf{p}', \mathbf{r}, t) (1 \pm f_{A\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{r}, t)) \times \\
 & \times (1 \pm f_{A'\alpha'}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}, \mathbf{r}, t))\}. \quad (58)
 \end{aligned}$$

Знак в фазовом множителе перед числом заполнения определяется типом статистики кластера — статистика Ферми (+) или Бозе (—). В случае  $A = A' = 1$  столкновительный член (58) совпадает с одночастичным столкновительным членом (29), если заменить двухчастичную  $T$ -матрицу в борновском приближении потенциалом  $V(\mathbf{q})$ . Если плотность системы мала, то для кластеров приближенно выполняются коммутационные соотношения Ферми или Бозе (подобно различным компонентам в химической смеси), тогда можно перейти к более детальному анализу столкновительного члена, как при рассмотрении одночастичного кинетического уравнения (см. разд. 2). Включение членов более высокого порядка по взаимодействию кластеров приведет, в конечном итоге, к появлению в уравнениях  $T$ -матриц вместо потенциалов взаимодействия. Аналогично каналы реакции в столкновительном члене можно связать с сечениями неупругих процессов. Однако учет эффектов, зависящих от плотности системы, требует многолетнего подхода.

**Приложение к нуклон-дейтронной системе.** Для иллюстрации рассмотрим образование дейтронов в нагретом ядерном веществе. Этим примером мы покажем, как обобщаются уравнения Власова — Улинга — Уленбека, если включаются связанные состояния двух частиц. Система обобщенных кинетических уравнений (52) для этого случая может быть в символическом виде записана как

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} f_{1\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + D_{1\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= I_{1\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t); \\
 \frac{\partial}{\partial t} f_{2\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + D_{2\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= I_{2\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t).
 \end{aligned}$$

Оба кинетических уравнения как для нуклонов, так и для дейтронов связаны друг с другом через власовский и столкновительный члены. Для власовского члена уравнения мы имеем согласно (57)

$$\begin{aligned}
 D_{1\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_{1\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (u_{nn}(r) + u_{dn}(r)) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_{1\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t); \\
 D_{2\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{p}}{2m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_{2\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (u_{nd}(r) + u_{dd}(r)) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_{2\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t),
 \end{aligned}$$



где хартриевские потенциалы  $u_{nn}$ ,  $u_{nd}$  определяются одночастичной функцией распределения  $f_{1\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ , тогда как потенциалы  $u_{dn}$ ,  $u_{dd}$  содержат двухчастичную функцию  $f_{2\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ .

Каждый столкновительный член может быть представлен как сумма различных вкладов:

$$I_{1\alpha} = I_{nn,nn}(\mathbf{p}) + I_{nd,nd}(\mathbf{p}) + I_{nnn,nd}(\mathbf{p});$$

$$I_{2\alpha} = I_{dn,dn}(\mathbf{p}) + I_{dn,nnn}(\mathbf{p}) + I_{dd,dd}(\mathbf{p}) + I_{dd,dnn}(\mathbf{p}) + I_{dd,nnn}(\mathbf{p}).$$

Для краткости изложения мы приведем ниже выражения для столкновительных интегралов в борновском приближении, пренебрегая обменными членами и факторами, учитывающими числа заполнения в фазовом пространстве:

$$I_{nn,nn} = \sum_{\mathbf{p}_2\mathbf{q}} \frac{2\pi}{\hbar} |V(\mathbf{q})|^2 \delta(\Delta E) (-f_1(\mathbf{p})f_1(\mathbf{p}_2) + f_1(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}));$$

$$I_{nd,nd} = \sum_{\mathbf{p}_2\mathbf{q}} \frac{2\pi}{\hbar} |V(\mathbf{1p}, \mathbf{2p}_2, \mathbf{q})|^2 \delta(\Delta E) \times$$

$$\times (-f_1(\mathbf{p})f_2(\mathbf{p}_2) + f_1(\mathbf{p} + \mathbf{q})f_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}));$$

$$I_{dn,dn} = \sum_{\mathbf{p}_2\mathbf{q}} \frac{2\pi}{\hbar} |V(\mathbf{2p}, \mathbf{1p}_2, \mathbf{q})|^2 \delta(\Delta E) \times$$

$$\times (-f_2(\mathbf{p})f_1(\mathbf{p}_2) + f_2(\mathbf{p} + \mathbf{q})f_1(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}));$$

$$I_{dd,dd} = \sum_{\mathbf{p}_2\mathbf{q}} \frac{2\pi}{\hbar} |V(\mathbf{2p}, \mathbf{2p}_2, \mathbf{q})|^2 \times$$

$$\times \delta(\Delta E) (-f_2(\mathbf{p})f_2(\mathbf{p}_2) + f_2(\mathbf{p} + \mathbf{q})f_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}));$$

$$I_{nnn,nd} = \sum_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3\mathbf{q}} \frac{2\pi}{\hbar} |V(\mathbf{q}) \psi_{d,\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3-\mathbf{q}}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_3)|^2 \times$$

$$\times \delta(\Delta E) (-f_1(\mathbf{p})f_1(\mathbf{p}_2)f_1(\mathbf{p}_3) + f_1(\mathbf{p} + \mathbf{q})f_2(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{q})) +$$

$$+ \text{перестановочные члены};$$

$$I_{nd,nnn} = \sum_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3\mathbf{q}} \frac{2\pi}{\hbar} |V(\mathbf{q}) \psi_{d,\mathbf{p}}^*(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2)|^2 \delta(\Delta E) (-f_2(\mathbf{p})f_1(\mathbf{p}_3) +$$

$$+ f_1(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 + \mathbf{q})f_1(\mathbf{p}_2)f_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{q})) + \text{перестановочные члены};$$

$$I_{dd,dnn} = \sum_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4\mathbf{q}} \frac{2\pi}{\hbar} |\psi_{d,\mathbf{p}}^*(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2) \times$$

$$\times \psi_{d,\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4}^*(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) V(\mathbf{q}) \psi_{d,\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{p}_2)|^2 \times$$

$$\times \delta(\Delta E) (-f_2(\mathbf{p})f_2(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) + f_2(\mathbf{p} + \mathbf{q})f_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{q})f_1(\mathbf{p}_4)) +$$

$$+ \text{перестановочные члены};$$

$$I_{dd, nnnn} = \sum_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \mathbf{q}} \frac{2\pi}{\hbar} |\psi_{d, \mathbf{p}}^* (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2) \times \\ \times \psi_{d, \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4} (\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) V(q)|^2 \delta(\Delta E) (f_2(\mathbf{p}) f_2(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) + \\ + f_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}) f_1(\mathbf{p}_2) f_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{q}) f_1(\mathbf{p}_4)) + \text{перестановочные члены.}$$

Здесь мы воспользовались уравнением (56), а кроме того, не выписывали в явном виде слагаемые, которые получаются простой перестановкой индексов «перестановочные члены», и закон сохранения энергии в аргументе  $\delta(\Delta E)$ .

К сожалению, кинетические уравнения с учетом формирования кластеров еще не реализованы в динамических ядерных моделях, что не позволяет оценить точность информации об уравнении состояния, извлекаемой на основе одночастичных подходов.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели вывод различных динамических уравнений, управляющих эволюцией состояния системы двух сталкивающихся ядер. Основным принципом, позволяющим классифицировать эти уравнения или устанавливать связи между ними, является высказанный впервые Н. Н. Боголюбовым [35] принцип ослабления начальных корреляций, что приводит к идее о неполном, сокращенном описании системы. При этом на каждом уровне описания ключевой вопрос заключается в том, как учесть многочастичные корреляции. Вопрос не имеет простого ответа, но именно многочастичный аспект задачи представляет наибольший интерес, во многом предопределяя вид уравнения состояния и особенности поведения нагретой и сжатой ядерной материи.

Резюмируя обсуждение, на рис. 5 мы приводим схему, которая иллюстрирует взаимосвязь рассмотренных выше уравнений. Ограниченные рамки обзора не позволили нам обсудить методы решения многочастичного уравнения Шредингера. Мы фактически лишь упомянули о связи уравнения Власова с зависящим от времени методом Хартри — Фока и приближением случайных фаз, хотя эти связи и указаны на схеме. Интересующемуся читателю можно рекомендовать обзорные работы [21]. Вывод гидродинамических уравнений из кинетических был прослежен на примере только одного типа уравнений, хотя (как показано на схеме) он может быть проделан и во всех остальных случаях, приводя к несколько отличающимся выражениям для транспортных коэффициентов. Не нашла отражения на схеме недавняя попытка объединить кинетическое и гидродинамическое описание путем введения в сокращенный набор наблюдаемых переменных плотности энергии наряду с одночастичной функцией распределения [56], что позволяет выйти за приближение среднего поля. Применение этих уравнений к задаче описания динамики столкнове-

ния тяжелых ионов представляется весьма привлекательным для проверки устойчивости результатов, полученных в подходе Власова — Улинга — Уленбека.

Большой интерес вызывает распространение динамического подхода на более высокие энергии сталкивающихся тяжелых ионов. В настоящее время конкретные расчеты выполнены в основном

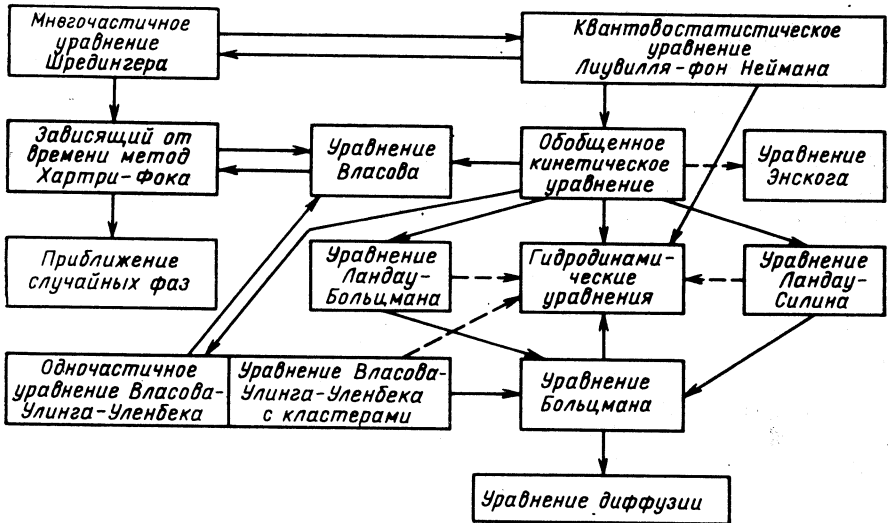


Рис. 5. Схема взаимосвязей различных динамических уравнений

лишь в рамках упрощенных моделей каскадного и гидродинамического типов. Переход к высоким энергиям выдвигает перед теорией новые требования — релятивизация подхода, включение процессов рождения частиц, ковариантность описания. Основой такой адронодинамики может служить квантово-полевая теория Валечки [57]. Переход на этот уровень описания может существенно повлиять на наши представления о процессе взаимодействия ядер. В качестве примера укажем лишь на работу [58], в которой решено релятивистское уравнение Власова, связанное с волновыми уравнениями для массивных классических полей. Показано, что при центральном соударении  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$  с энергией 600 МэВ/А происходит полное торможение, а не взаимопроникновение ядер, как в случае нерелятивистского описания (см., например, рис. 3). Попытка развить кинетику ядерного взаимодействия на основе теории Валечки предпринята в работах [59], хотя при этом основное внимание было уделено проблеме устойчивости возбужденной ядерной материи.

При дальнейшем повышении энергии все более важную роль играют кварк-глюонные степени свободы. Квантовая хромодинамика может стать основой при выводе кинетических уравнений для опи-

сания поведения кварк-глюонной плазмы. Отличительные особенности применения кинетических методов в этой области связаны с необходимостью введения нового квантового числа — «цвета», рассматриваемого наравне с другими динамическими переменными (например, с импульсом) и, таким образом, требующего расширения фазового пространства заменой базисных абелевых полей на неабелевы поля Янга — Миллса, появлением дополнительных источников кварк-антикварковых пар за счет их спонтанного рождения. Уже приняты первые шаги в построении квантовой транспортной теории кварк-глюонной плазмы [60]. Однако следует отметить, что цитированные результаты относятся к чистой фазе кварков и глюонов, что позволило избежать рассмотрения далекой от полного понимания проблемы конфайнмента кварков. Но при релятивистских столкновениях тяжелых ионов, когда имеется надежда создать условия для фазового перехода адронов в состояние кварк-глюонной плазмы, начальное и конечное (наблюдаемое) состояния неизбежно являются адронными, а в промежуточный момент может существовать любое смешанное состояние, включая плазменное. Поэтому требованием к фундаментальной теории является описание процессов конфайнмента и деконфайнмента. Сложность проблемы усугубляется еще и тем, что подавляющую часть релятивистских адрон-адронных столкновений составляют так называемые «мягкие» взаимодействия, для которых хромодинамическая константа  $\alpha_s$  не мала и, следовательно, теория возмущений неприменима. В этой ситуации для построения кинетической теории взаимодействия релятивистских ядер представляется весьма перспективным поиск новых квазичастиц, кандидатом на такую квазичастицу могут быть, например, адронные (кварк-глюонные) струны. Феноменологическая попытка реализовать эту идею для релятивистских ядерных столкновений была предпринята в работе [61].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тонев В. Д., Шульц Х., Гудима К. К., Рёнке Г.//ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. С. 1093—1172.
2. Clare R. B., Strottman D.//Phys. Repts. 1986. Vol. 141. P. 177—280; Stöcker H., Greiner W.//Phys. Repts. 1986. Vol. 137. P. 277—392.
3. Lamb D. Q., Lattimer J. M., Pethik C. J., Ravenhall D. G.//Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 41. P. 1623—1626; Nucl. Phys. A. 1981. Vol. 360. P. 459—482; Glendenning N. K.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 1120—1123; Report LBL-25375, California, 1988; Bethe H. A., Brown G. E., Applegate J., Lattimer J.//Nucl. Phys. A. 1979. Vol. 324. P. 487—533; Baron E., Bethe H. A., Brown G. E. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 736—739.
4. Gutbrod H. H., Löhner H., Poskanzer A. M. e.a.//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 127. P. 317—321; Doss K. G. R., Gustafsson H. A., Gutbrod H. H. e.a.//Phys. Rev. C. 1985. Vol. 32. P. 116—123; Kapusta J.//Phys. Rev. C. 1980. Vol. 21. P. 1301—1310.
5. Röpke C., Münchow L., Schulz H.//Nucl. Phys. A. 1982. Vol. 379. P. 536—552; Phys. Lett. B. 1982. Vol. 110. P. 21—24; Röpke G., Schmidt M., Münchow L., Schulz H.//Nucl. Phys. A. 1983. Vol. 399. P. 587—602.

6. Schulz H., Kämpfer B., Barz H.-W. e.a.//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 147. P. 17—22; Reinhard H., Schulz H.//Nucl. Phys. A. 1985. Vol. 432. P. 603—645.
7. Барц Х.-В., Кэмпфер Б., Лукач Б.//ЭЧАЯ. 1987. Т. 18. С. 1234—1282.
8. Гудима К. К., Тонеев В. Д.//ЯФ. 1978. Т. 27. С. 658—669; 1980. Т. 31. С. 1455—1461; Gudima K. K., Iwe H., Toneev V. D.//J. Phys. G. 1979. Vol. 5. P. 229—240; Toneev V. D., Gudima K. K.//Nucl. Phys. A. 1983. Vol. 400. P. 73c—90c.
9. Stevenson J. D.//Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 41. P. 1702—1705; Yariv Y., Fraenkel Z.//Phys. Rev. C. 1979. Vol. 20. P. 2227—2243.
10. Cugnon J.//Phys. Rev. C. 1980. Vol. 22. P. 1885—1896; Cugnon J., Mizutani T., Vandermeulen J.//Nucl. Phys. A. 1981. Vol. 352. P. 505—534.
11. Amsden A. A., Bertsch G. F., Harlow F. H., Nix J. R.//Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 35. P. 1055—1058; Amsden A. A., Harlow F. H., Nix J. R.//Phys. Rev. C. 1975. Vol. 15. P. 2059—2071; Amsden A. A., Goldhaber A. S., Harlow F. H., Nix J. R.//Phys. Rev. C. 1978. Vol. 17. P. 2088—2096; Stöcker H., Maruhn J., Greiner W.//Z. Phys. A. 1979. Vol. 293. P. 173—179; Phys. Rev. Lett., 1980. Vol. 44. P. 725—728; Stöcker H., Csernai L. P., Graebner G. e.a.//Phys. Rev. C. 1982. Vol. 25. P. 1871—1875; Csernai L. P., Lovas I., Maruhn J. e.a.//Phys. Rev. C. 1982. Vol. 26. P. 149—161; Stöcker H., Buchwald G., Csernai L. P. e.a.//Nucl. Phys. A. 1982. Vol. 387. P. 205c—217c; Buchwald G., Graebner G., Thies J. e.a.//Phys. Rev. C. 1983. Vol. 28. P. 2349—2353; Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 1594—1596; Рошаль Л. С., Русских В. Н.//ЯФ. 1981. Т. 33. С. 1520—1528; Мишустин И. Н., Русских В. Н., Сатаров Л. М.//ЯФ. 1988. Т. 48. С. 711—722.
12. Stöcker H., Hofmann J., Maruhn J., Greiner W.//Prog. in Part. Nucl. Phys. 1980. Vol. 4. P. 133—195.
13. Gustafsson A. A., Gutbrod H., Kolb B. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 1590—1593.
14. Bertsch G., Cugnon J.//Phys. Rev. C. 1981. Vol. 24. P. 1514—1520; Gudima K. K., Toneev V. D., Röpke G., Schulz H.//Phys. Rev. C. 1985. Vol. 32. P. 1605—1611; Schulz H., Röpke G., Gudima K. K., Toneev V. D.//Phys. Rev. C. 1986. Vol. 34. P. 1294—1298; Kapusta J., Strottman D.//Phys. Rev. C. 1981. Vol. 21. P. 1282—1285.
15. Siemens P., Kapusta J.//Phys. Rev. C. 1981. Vol. 43. P. 1486—1489.
16. Stock R.//Phys. Repts. 1986. Vol. 135. P. 259—315.
17. Gale C., Bertsch G., Das Gupta S.//Phys. Rev. C. 1987. Vol. 35. P. 1666—1671.
18. Aichelin J., Rosenhauer A., Peilert G. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 1926—1929.
19. Bodmer A. R., Panos C. N.//Phys. Rev. C. 1977. Vol. 15. P. 1342—1358; Nucl. Phys. A. 1981. Vol. 356. P. 517—522. Bodmer A. R., Panos C. N., MacKeller A. D.//Phys. Rev. C. 1980. Vol. 22. P. 1025—1054; Киселев С. М.//ЯФ. 1983. Т. 38. С. 911—914; 1984. Т. 39. С. 32—37; 1985. Т. 41. С. 94—100; Wilets L., Henley E. M., Kraft M., MacKeller A. D.//Nucl. Phys. A. 1977. Vol. 282. P. 341—350; Wilets L., Yariv Y., Chestnut R.//Nucl. Phys. A. 1978. Vol. 301. P. 359—364; Callaway D. J. E., Wilets L., Yariv Y.//Nucl. Phys. A. 1979. Vol. 327. P. 250—268.
20. Bertsch J., Kruse H., Das Gupta S.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 29. P. 673—675; Kruse H., Jacak J. B., Molitoris J. J.//Phys. Rev. C. 1985. Vol. 31. P. 1770—1774; Molitoris J. J., Hahn D., Stöcker H.//Prog. Part. Nucl. Phys. 1986. Vol. 15. P. 239—325; Molitoris J. J., Stöcker H., Winer B. L.//Phys. Rev. C. 1987. Vol. 36. P. 220—227; Aichelin J., Bertsch G.//Phys. Rev. C. 1985. Vol. 31. P. 1730—1738; Gregoire C., Remaud B., Sebille F., Vinet L.//Phys. Lett. B. 1987. Vol. 186. P. 14—19; Nucl. Phys. A. 1987. Vol. 465. P. 317—338; Remaud B., Gregoire C., Sebille F. e.a.//Nucl. Phys. A. 1985. Vol. 447. P. 555c—567c. Remaud B., Sebille F.//Nucl. Phys. A. 1987. Vol. 468. P. 327—347.
21. Мадур П.//ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. С. 418—482; Yamamura M., Kuriyama A.//Prog. Theor. Phys. Suppl. 1987. Vol. 93. P. 1—176.
22. Danielewicz P.//Ann. Phys. 1984. Vol. 152. P. 239—304; P. 305—327.
23. Botermans W., Malfliet R.//Phys. Lett. B. 1986. Vol. 171. P. 22—27.

24. Röpke G., Schulz H.//Nucl. Phys. A. 1988. Vol. 477. P. 472—486.
25. Carruthers P., Zachariassen F.//Rev. Mod. Phys. 1983. Vol. 55. P. 247—286.
26. Балеску Р.//Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 1, 2. М.: Мир, 1978.
27. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1971.
28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 10. М.: Наука, 1979.
29. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
30. Келдыш Л. В.//ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1515—1527.
31. Du Bois D. F.//Lect. in Theor. Phys. C. 1967. Vol. 9. P. 469—620.
32. Zwanzig R.//J. Chem. Phys. 1960. Vol. 33. P. 1338—1444; Nakajima S.//Prog. Theor. Phys. 1958. Vol. 20. P. 948—959; Mori H.//Phys. Rev. 1958. Vol. 112. P. 1829—1849; 1959. Vol. 115. P. 298—300.
33. Fick E., Sauermann C.//Quantenstatistik dynamischer Prozesse. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1983.
34. Robertson V.//Phys. Rev. 1966. Vol. 144. P. 151—161.
35. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.—Л.: Гостехиздат, 1946.
36. Christoph V., Röpke G.//Phys. State Solid (b). 1985. Vol. 131. P. 11—42.
37. Каданов Л., Бейм Г. Квантовая статистическая механика: Пер. с англ. М.: Мир, 1964.
38. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 9. М.: Наука, 1978.
39. Fetter A. L., Walecka J. D.//Quantum Theory of Many-Particle Systems. N. Y.: McGraw-Hill, 1974.
40. Ter Haar B., Malfliet R.//Phys. Lett. B. 1987. Vol. 196. P. 414—418.
41. Uehling E. A., Uhlenbeck G. E.//Phys. Rev. 1933. Vol. 43. P. 552—561.
42. Jeukenne J. P., Lejeune A., Mahaux C.//Phys. Repts. C. 1976. Vol. 25. P. 83—174; Negele J. W., Yazaki K.//Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. P. 71—74; Negele J. W.//Comm. on Nucl. Part. Phys. 1983. Vol. 12. P. 1—12.
43. Hasse R. W., Schuck P.//Nucl. Phys. A. 1985. Vol. 438. P. 157—186.
44. Collins M. T., Griffin J. J.//Nucl. Phys. A. 1980. Vol. 348. P. 63—74; Sinha B.//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 91—93; Dabrowski J., Piechocki W.//Acta Phys. Pol. B. 1985. Vol. 16. P. 1095—1118; Dabrowski J.//Acta Phys. Pol. B. 1986. Vol. 17. P. 1001—1011.
45. Blin A., Hiller B., Hasse R. W., Schuck P.//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 161. P. 211—216; Erratum. 1985. Vol. 165. P. 454.
46. Decharge J., Gogny D.//Phys. Rev. C. 1980. Vol. 21. P. 1568—1593.
47. Ring P., Schuck P. The Nuclear Many-Body Problem. Springer-Verlag, 1980.
48. Malfliet R.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 2386—2389.
49. Schürmann B., Zwermann W., Malfliet R.//Phys. Repts. 1987. Vol. 147. P. 1—85; Schürmann B., Zwermann W.//Phys. Rev. C. 1986. Vol. 33. P. 1668—1673.
50. Wong C. Y.//Phys. Rev. C. 1982. Vol. 25. P. 1460—1475.
51. Bertsch G. F., Das Gupta S.//Phys. Repts. 1988. Vol. 160. P. 188—233.
52. Hasse R. W., Jaenicke J., Schuck P.//Report GSI-88-50. Darmstadt, 1988.
53. Базнат М. И., Гудима К. К.//ЯФ. 1989. Т. 49. С. 321—326.
54. Sebille F., Royer R., Gregoire C. e.a. Report P-88-03. GANIL, 1988.
55. Hartnack C., Stöcker H., Greiner W. e.a.//Phys. Lett. B. 1988. Vol. 215. P. 33—35; Gregoire C., Remaud B., Sebille F. e.a.//Report P-88-08. GANIL, 1988.
56. Зубарев Д. Н., Морозов В. Г., Омелян И. П., Токарчук М. В.//Препринт ИТФ-88-102Р. Киев, 1988.
57. Serot B., Walecka J. D.//Adv. Nucl. Phys. 1986. Vol. 16. P. 1—320.
58. Feldmeier H., Schönhofen M., Cubero M. Report GSI-88-63. Darmstadt, 1988.

59. **Иванов Ю. Б.**//ЯФ. 1988. Т. 47. С. 1440—1451; **Ivanow Yu.**//Nucl. Phys. A. 1987. Vol. 474. P. 669—692; 693—716.

60. **Heinz U.**//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 351—354; Ann. Phys. 1985. Vol. 161. P. 48—80; **Kajantie K., Matsui T.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 164. P. 373—378; **Elze H.-Th., Gyulassy M., Vasak D.**//Nucl. Phys. B. 1986. Vol. 276. P. 706—728; Phys. Lett. B. 1986. Vol. 177. P. 402—408. **Catoff G., Kerman A., Matsui T.**//Phys. Rev. D. 1987. Vol. 36. P. 114—129.

61. **Амелин Н. С., Гудима К. К., Тонеев В. Д.**//Тр. IX Междунар. семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1988. С. 211—222; **Toneev V. D., Amelin N. S., Gudima K. K.**//Preprint GSI-89-52, Darmstadt, 1989.