

КОНТУРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

А. Н. Сисакян, О. Ю. Шевченко

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

И. Л. Соловцов

Гомельский политехнический институт, Гомель

Вводятся калибровочно-инвариантные полевые переменные и рассматриваются их свойства. Изучается зависимость калибровочно-инвариантного спинорного пропагатора от выбора контура. Показывается, что эта зависимость, а также все инфракрасные особенности аккумулируются фактором, равным вильсоновской петле с контуром, состоящим из исходного контура и отрезка прямой. Демонстрируется, что в предлагаемом подходе в двумерной квантовой хромодинамике не возникает трудностей, связанных с необходимостью введения дополнительной инфракрасной регуляризации. Формулируется естественная предельная процедура, дающая конфайнмент кварка. Обсуждается вопрос оптимального выбора контура. Предлагается новая схема квантования калибровочных полей. Показано, что переход из фазового пространства в конфигурационное может быть осуществлен таким образом, что под знаком функционального интеграла остаются две δ -функции, отражающие калибровочное условие и закон Гаусса. Получен новый пропагатор векторного поля и анализируется ряд калибровочных моделей.

Gauge-invariant and Path-dependent objects are introduced and their properties are investigated. It is proved that infrared singularities of the gauge-invariant spinor propagator can be factorized as the Wilson loop that contains the primary Path and the straight-line contour. It is shown that the proposed approach in QCD₂ has no difficulties resulting from auxiliary infrared regularization. The natural limit that provides quark confinement is formulated. A new scheme of quantization of gauge fields is proposed. The Path-integral in the configuration space is shown to contain two functional δ -functions that reflect the gauge condition and the Gauss law. A new propagator is obtained for a vector field, and a set of gauge models is studied.

ВВЕДЕНИЕ

Современное представление о мире элементарных частиц базируется на концепции калибровочной симметрии, сформировавшейся первоначально в электродинамике и обобщенной затем на случай не-

абелевых теорий. Сегодня такие калибровочные теории, как теория электрослабых взаимодействий и квантовая хромодинамика (КХД), имеют прочный экспериментальный и теоретический фундамент. Вместе с тем все более острыми становятся и нерешенные проблемы. К числу таких относится, например, центральная проблема квантовой хромодинамики — проблема запертия цвета, конфайнмента.

Один из основных подходов к проблеме конфайнмента КХД связан с анализом полных функций Грина в инфракрасной области (см. например, [1—6], а также обзор [7] и цитируемую там литературу). При этом, как правило, рассматриваются стандартные функции Грина, например изучается фермионный пропагатор вида

$$i \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle.$$

Вместе с тем известно, что инфракрасное поведение стандартного полного фермионного пропагатора существенно зависит от выбора калибровки. Так, в случае квантовой электродинамики в классе ковариантных α -калибровок электронный пропагатор имеет точку ветвления при $p^2 = m^2$, которая вырождается в простой полюс только при $\alpha = 3$ (калибровка Соловьева — Йенни) [8].

Выбор калибровки, по-видимому, оказывает существенное влияние на аналитические свойства пропагатора и в неабелевом случае [7, 9]. Кроме того, возникает проблема с трактовкой массы кварка [10, 11]. Пример двумерной КХД (КХД₂) показывает, что имеются серьезные трудности с выбором инфракрасной регуляризации при рассмотрении калибровочно-зависимого кваркового пропагатора в рамках $1/N$ -приближения.

Так, в работе [12] т Хоофт, доопределяя уравнение для кваркового пропагатора в калибровке светового конуса, использовал в инфракрасной области регуляризацию в виде $\theta(k_- - \lambda)$, где λ — параметр инфракрасного обрезания ($\lambda \rightarrow 0$ в пределе снятия регуляризации). При этом оказалось, что полюс кваркового пропагатора отодвигается на бесконечность в пределе $\lambda \rightarrow 0$, что с физической точки зрения истолковывалось как конфайнмент отдельного кварка.

Иной способ инфракрасной регуляризации обсуждался в [13], в которой инфракрасная особенность глюонного пропагатора понималась в смысле главного значения. При этом оказалось, что полюс находится в конечной точке при $p^2 = m^2 - g^2 N/\pi$.

Инфракрасная регуляризация, предложенная в работе [14] и основанная на использовании поворота Вика и последующем симметричном интегрировании, приводит к новому варианту для кваркового пропагатора — появляется разрез в комплексной плоскости p^2 .

Таким образом, уже в КХД₂ попытка описания конфайнмента кварка в терминах стандартного калибровочно-зависимого пропагатора встречает серьезные трудности (см. в связи с этим также [15, 16]).

Все эти результаты приводят к мысли, что изучение структуры калибровочных теорий целесообразно вести на языке калибровочно-ин-

вариантных (КИ) величин. В частности, для исследования проблемы конфайнмента кварков следует отказаться от рассмотрения калибровочно-зависимого пропагатора, который, по-видимому, не является адекватным для этой цели объектом, и перейти к рассмотрению КИ-величины.

Введение КИ-полевых переменных и изучение на их основе инфракрасной области ряда полевых калибровочных моделей и является одной из задач настоящей работы.

Другой вопрос, который мы собираемся здесь рассмотреть, связан с проблемой квантования калибровочных теорий. Следует отметить, что, несмотря на достаточно большой временной интервал, отделяющий нас от момента опубликования работ [17], эта проблема вызывает постоянный устойчивый интерес. В последнее время этот интерес заметно усилился (см. [18, 19] и ссылки, приведенные там). Этому, в частности, способствовало обнаруженное расхождение результатов вычисления по теории возмущений вильсоновской петли (заведомо калибровочно-инвариантного объекта) при работе в различных калибровках [20]. Причина несоответствия согласно [18—21] видится в том, что сингулярность в пропагаторе в гамильтоновой калибровке $A_0 = 0$ по импульсной переменной k_0 не следует понимать в смысле главного значения. При этом предлагаемый модифицированный пропагатор, исправляющий положение в координатном представлении, трансляционно-неинвариантен. Противоречия, к которым приводит эта трансляционная неинвариантность, рассмотрены в [19]. В данной работе мы обращаем внимание на возможность иного способа разрешения отмеченной трудности. Наша стартовая позиция стандартная — функциональный интеграл в фазовом пространстве [22, 23]. Мы показываем, что переход к конфигурационному представлению может быть осуществлен таким образом, что под знаком функционального интеграла возникают две функциональные δ -функции, обеспечивающие выполнение как калибровочного условия, так и закона Гаусса. Таким образом, осуществляется квантование только лишь физических степеней свободы векторных полей. Изложенный ниже метод мы будем называть δ^2 -квантованием.

1. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЛЕВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Рассмотрение КИ-полевых переменных восходит к работам Дирака и Фока [24, 25]. Развитию калибровочно-независимого формализма посвящено большое число работ (см., например, [26—30]). Приведенное ниже краткое изложение этого вопроса опирается в основном на работы [31—33]. Начнем с введения векторных КИ-полевых переменных в абелевом случае. Имеется несколько способов рассмотрения КИ-полей. Во-первых, пусть ξ — фиксированная точка пространства, а $C_{\xi x}$ — некоторый контур, соединяющий точки ξ и x . Тогда КИ-векторное поле $B_\mu(x | \xi)$ называемое нами полем из класса Фока,

имеет вид

$$B_{\mu}(x|\xi) = A_{\mu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \int_{C_{\xi x}} dz^{\nu} A_{\nu}(z). \quad (1)$$

В случае прямолинейного контура $C_{\xi x}$ поле $B_{\mu}(x|\xi)$ совпадает с обычным векторным потенциалом, определенным в калибровке Фока [25]*

$$(x - \xi)^{\mu} A_{\mu}(x) = 0.$$

Нетрудно видеть, что поле $B_{\mu}(x|\xi)$ инвариантно относительно градиентных преобразований векторного потенциала

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) + \partial_{\mu} \lambda(x).$$

В силу калибровочной инвариантности поля $B_{\mu}(x|\xi)$ и линейности связи с векторным потенциалом $A_{\mu}(x)$ согласно формуле (1) должно существовать выражение, связывающее поле $B_{\mu}(x|\xi)$ с тензором напряженности $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$, причем эта связь также должна быть линейной. Соответствующее выражение, которое мы будем называть формулой обращения, используя (1), можно получить в виде

$$B_{\mu}(x|\xi) = \int_{C_{\xi x}} dz^{\nu} F_{\nu\sigma}(z) \frac{\partial z_{\sigma}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2)$$

Отметим, что для введенных КИ-полей $B_{\mu}(x|\xi)$ предполагается, что точка ξ есть фиксированная точка пространства, поэтому построенные на этой основе функции Грина не обладают трансляционной инвариантностью. Эту трудность можно преодолеть, рассмотрев КИ-поля вида

$$B_{\mu}(x|f) = A_{\mu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \int d^4y f^{\nu}(x-y) A_{\nu}(y), \quad (3)$$

где функция $f^{\nu}(z)$ вещественна и удовлетворяет условиям:

$$\partial^{\nu} f_{\nu}(z) = \delta(z), \quad f^{\nu}(z)|_{S_{\infty}} = 0 \quad (4)$$

(S_{∞} — бесконечно удаленная поверхность). Такие поля впервые рассматривались Дираком [24], поэтому мы их будем называть КИ-полями класса Дирака. Так же как и в случае полей класса Фока, для полей (3) существует формула обращения

$$B_{\mu}(x|f) = \int d^4y f^{\nu}(x-y) F_{\mu\nu}(y). \quad (5)$$

Более подробное рассмотрение полей вида (1) и (3) можно найти в [31—33]. Здесь мы отметим, что значительно больше возможностей

* Впоследствии эта калибровка была перестроена и использовалась в [34, 35].

представляют КИ-поля, получаемые путем синтеза полей классов Фока и Дирака. В частности, возникающие таким образом поля позволяют построить КИ-фермионные функции Грина, обладающие рядом интересных свойств. Новый обобщенный класс КИ-полей возникает из естественного желания совместить поля класса Фока (1) с трансляционной инвариантностью. Этого можно добиться, не фиксируя определенную точку пространства ξ , а сделав ее зависимой от аргумента поля x : $\xi = \xi(x)$. При этом, конечно, калибровочная инвариантность поля (1) разрушается. Однако если использовать введенную функцию $f_\nu(z)$, то нетрудно построить КИ-поле вида

$$B_\mu(x | \xi; f) = A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \times \\ \times \left[\int_{\xi(x)}^x dz^\nu A_\nu(z) + \int d^4y f^\nu(\xi(x) - y) A_\nu(y) \right], \quad (6)$$

где функция f^ν удовлетворяет условиям (4). Для поля (6) в случае прямолинейного контура формула обращения имеет вид

$$B_\mu(x | \xi; f) = \int_0^1 d\alpha \alpha (x - \xi)^\nu F_{\mu\nu}(\xi + \alpha(x - \xi)) + \\ + \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} \left[\int_0^1 d\alpha (1 - \alpha)(x - \xi)^\nu F_{\rho\nu}(\xi + \alpha(x - \xi)) + \right. \\ \left. + \int d^4y f^\nu(x - y) F_{\rho\nu}(y) \right]. \quad (7)$$

Из вышеизложенного легко понять, как строить калибровочно-инвариантные* спинорные поля. Для этого достаточно определить новое поле

$$\Psi(x | \dots) = \exp(ig\Lambda(x | \dots)) \psi(x), \quad (8)$$

где $\Lambda(x | \dots)$ — функции, на которые действует оператор дифференцирования в выражениях (1), (3) и (6).

Рассмотрим теперь обобщение полей фоковского класса на неабелев случай. Поле Янга — Миллса $A_\mu(x)$ при калибровочных преобразованиях с параметром $u(x)$ преобразуется следующим образом:

$$A_\mu(x) \rightarrow u(x) A_\mu(x) u^{-1}(x) - \frac{i}{g} u(x) \partial_\mu u^{-1}(x), \quad (9)$$

* В случае полей из фоковского класса при любых локальных калибровочных преобразованиях в спинорных полях (8) возникает глобальный фазовый фактор, зависящий от фиксированной точки пространства. Для обсуждающейся в дальнейшем спинорной функции Грина такой фактор, очевидно, не существует.

а тензор напряженности

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (10)$$

преобразуется по закону

$$G_{\mu\nu}(x) \rightarrow u(x) G_{\mu\nu}(x) u^{-1}(x). \quad (11)$$

Определим

$$V(\xi, x) = \mathcal{P} \exp \left[ig \int_{C_{\xi x}} dz^\nu A_\nu(z) \right], \quad (12)$$

где \mathcal{P} означает упорядочение вдоль пути $C_{\xi x}$. При калибровочных преобразованиях имеем:

$$V(\xi, x) \rightarrow u(\xi) V(\xi, x) u^{-1}(x). \quad (13)$$

Выполним калибровочное преобразование с $u(x) = V(\xi, x)$ над исходными полями в лагранжиане. В результате векторное поле $A_\mu(x)$ перейдет в поле

$$B_\mu(x | \xi) = V(\xi | x) A_\mu(x) V^{-1}(\xi, x) - \frac{i}{g} V(\xi, x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^{-1}(\xi, x), \quad (14)$$

а напряженность $G_{\mu\nu}(x)$ в

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(x | \xi) &= V(\xi, x) G_{\mu\nu}(x) V^{-1}(\xi, x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} B_\nu(x | \xi) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} B_\mu(x | \xi) + \\ &+ ig[B_\mu(x | \xi), B_\nu(x | \xi)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Легко проверить теперь, что при локальных калибровочных преобразованиях с параметром $u(x)$ исходных полей $A_\mu(x)$ новые поля (14) и (15) преобразуются глобально с одним и тем же законом преобразования:

$$B_\mu(x | \xi) \rightarrow u(\xi) B_\mu(x | \xi) u^{-1}(\xi), \quad (16)$$

$$G_{\mu\nu}(x | \xi) \rightarrow u(\xi) G_{\mu\nu}(x | \xi) u^{-1}(\xi). \quad (17)$$

Если точку ξ устремить к бесконечности и положить $u(\infty) = 1$, то введенные поля (14) и (15) станут КИ-полями. Соответствующие (14) спинорные поля в лагранжиане также получаются из исходных с помощью калибровочного преобразования (12).

Пусть $z_\mu(s)$ — точка на контуре $C_{\xi x}$ ($z_\mu(0) = \xi_\mu$; $z_\mu(1) = x_\mu$). Тогда, используя уравнение параллельного переноса

$$\frac{dz^\nu}{ds} \left[A_\nu(z) - \frac{i}{g} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \right] V^{-1}(\xi, z) = 0, \quad (18)$$

находим, что поле B_μ удовлетворяет условию

$$\frac{dz^\mu}{ds} B_\mu(z | \xi) = 0, \quad (19)$$

которое можно рассматривать как обобщенное калибровочное условие Фока*. Если поле A_μ подчинить условию (19), то

$$\oint_{C_{\xi x}} \exp \left(i g \int dz^\nu A_\nu(z) \right) = 1.$$

Калибровки такого типа рассматриваются в [6] и носят название контурных калибровок. С помощью (19) легко проверить справедливость формулы обращения

$$B_\mu(x | \xi) = \int_{C_{\xi x}} dz^\nu G_{\nu\sigma}(z | \xi) \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\mu}. \quad (20)$$

Таким образом, в неабелевом случае формула обращения (20) имеет тот же вид, что и формула (2) для абелева случая.

Определим, следуя [27], так называемые контурные производные

$$\tilde{\partial}_{\mu\nu}(x | C) = \lim_{\Delta x_\mu \rightarrow 0} [u(x + \Delta x | C') - u(x | C)] / \Delta x^\mu, \quad (21)$$

где контуры C и C' отличаются друг от друга только на Δx_μ .

Для напряженностей (15) выполняется тождество

$$\tilde{\partial}_\rho G_{\mu\nu}(x | \xi) + \tilde{\partial}_\mu G_{\nu\rho}(x | \xi) + \tilde{\partial}_\nu G_{\rho\mu}(x | \xi) = 0, \quad (22)$$

и их связь с полями (14) в терминах контурных производных задается соотношением

$$G_{\mu\nu}(x | \xi) = \tilde{\partial}_\mu B_\nu(x | \xi) - \tilde{\partial}_\nu B_\mu(x | \xi), \quad (23)$$

которое по форме совпадает с абелевым случаем. Абелев вид имеют также и уравнения движения свободного поля (15)

$$\tilde{\partial}_\nu G^{\mu\nu}(x | \xi) = 0. \quad (24)$$

С учетом (24) можно показать, что введенное поле (14) удовлетворяет «условию Лоренца»

$$\tilde{\partial}_\mu B^\mu(x | \xi) = 0. \quad (25)$$

Соотношение (25), которое получено при использовании уравнений движения (24), будем называть вторичным калибровочным условием (аналогично терминологии Дирака «вторичная связь»). В абелевом случае (25) переходит в обычное условие Лоренца. Калибровочное условие, которое накладывается на исходные векторные поля, будем называть первичной калибровкой.

* Действительно, в случае прямолинейного контура $C_{\xi x}$:

и (19) дает калибровку Фока $z_\mu = \xi_\mu + s(x - \xi)_\mu$

$$(z - \xi)^\mu B_\mu(z | \xi) = 0.$$

Введение КИ-полевых переменных нельзя понимать как истребление в теории функционального калибровочного произвола. Функциональный произвол по-прежнему остается (это, например, произвол в выборе контура $C_{\xi x}$ для поля фоковского класса). Однако между множеством калибровок и множеством КИ-полей нет взаимнооднозначного соответствия. КИ-формализм имеет меньшую степень произвола по сравнению с калибровочным произволом. Так, например, в неабелевом случае построение КИ-поля с помощью проектирования на калибровку, для которых имеются неоднозначности Грибова, невозможно. Таким образом, класс проекторов, допускающих введение КИ-поля, уже класса всевозможных калибровок. Кроме того, использование контурно-зависимых полей дает возможность привлечь для анализа аргументы симметричного и геометрического характера, позволяющие естественным образом фиксировать нежелательный функциональный произвол.

В электродинамике широко используется обладающая рядом преимуществ калибровка Соловьева — Йенни, которая возникает в классе ковариантных α -калибровок при выборе $\alpha = 3$. Однако изначально выбор $\alpha = 3$ ничем не продиктован. Покажем, что применение контурного КИ-формализма позволяет раскрыть «секрет» калибровки Соловьева — Йенни, сопоставив ей геометрически симметричную картину. Итак, будем интересоваться пропагатором введенных полей B_μ

$$D_{\mu\nu}(x, y) = -i \langle 0 | TB_\mu(x) B_\nu(y) | 0 \rangle. \tag{26}$$

Аргументы пропагатора x и y определяют направляющий вектор геометрически выделенного прямолинейного контура интегрирования, фигурирующего при построении КИ-поля B_μ . Выбирая контуры в полях $B_\mu(x)$ и $B_\nu(y)$ идущими от соответствующих аргументов вдоль отрезка (x, y) на бесконечность, получаем*:

$$\left. \begin{aligned} B_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_0^\infty dt (x-y)^\alpha A_\alpha(x+t(x-y)), \\ B_\nu(y) &= A_\nu(y) - \frac{\partial}{\partial y^\nu} \int_0^\infty d\tau (x-y)^\beta A^\beta(y-\tau(x-y)). \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

В силу калибровочной независимости пропагатора (26) для его вычисления поле A_μ в выражениях (27) можно выбирать в произвольной калибровке. В результате несложные вычисления дают

$$D_{\mu\nu}(z) = -\frac{i}{2\pi^2} \frac{1}{(z^2-i0)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{z_\mu z_\nu}{z^2} \right), \tag{28}$$

$$z = x - y.$$

* Поля (27) возникают в обобщенном классе КИ-полей.

Выражение (28) в точности совпадает с пропагатором в калибровке Соловьева — Йенни.

Нетрудно понять, как строятся КИ-спинорные поля. Например, в абелевом случае спинорные поля класса Фока и Дирака имеют вид

$$\Psi(x|\xi) = \exp \left[-ig \int_{C_{\xi x}} dz^\nu A_\nu(z) \right] \psi(x), \quad (29)$$

$$\Psi(x|f) = \exp \left[-ig \int d^4y f^\nu(x-y) A_\nu(y) \right] \psi(x). \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что спинорные поля класса Фока (29) при локальных калибровочных преобразованиях приобретают глобальный фактор $\exp [ig\lambda(\xi)]$. Кроме того, поскольку точка ξ предполагается фиксированной, то нарушается трансляционная инвариантность спинорного и векторного пропагаторов, построенных из полей фоковского класса. Этим трудностей можно избежать, устремив точку ξ к бесконечности. Именно так мы поступим при рассмотрении КХД.

2. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ СПИНОРНЫЙ ПРОПАГАТОР

Рассмотрим КИ-спинорный пропагатор

$$G(x, y|C) = i \langle 0 | T \psi(x) \mathcal{P} \exp \left[ig \int_{C_{xy}} dz^\mu A_\mu(z) \right] \bar{\psi}(y) | 0 \rangle. \quad (31)$$

Калибровочная инвариантность (31) достигается за счет введения под знак T -произведения \mathcal{P} -упорядоченной контурной экспоненты. В результате спинорная функция Грина (31) приобретает зависимость от контура C_{xy} . Таким образом, пропагатор (31) является калибровочно-инвариантной, но контурно-зависимой величиной. Если потребовать трансляционную инвариантность (31), то для контура C_{xy} это будет означать, что при трансляциях $x \rightarrow x + a$, $y \rightarrow y + a$ контур C_{xy} должен перемещаться без деформаций как целое вместе со своими конечными точками. Иначе: для любой точки $z_\mu(x, y)$, лежащей на контуре C_{xy} должно выполняться

$$z_\mu(x + a, y + a) = z_\mu(x, y) + a_\mu. \quad (32)$$

Пусть s ($0 \leq s \leq 1$) — параметр, определяющий положение точки $z_\mu(s)$ на контуре C_{xy} : ($z_\mu(0) = x_\mu$, $z_\mu(1) = y_\mu$). Тогда в соответствии с (32)

$$z_\mu(s) = x_\mu + \varphi_\mu(x - y; s), \quad (33)$$

где φ_μ — некоторая векторная функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi_\mu(x - y; 0) = 0; \quad \varphi_\mu(x - y; 1) = (y - x)_\mu. \quad (34)$$

В случае построения пропагатора (31) из полей фоковского класса контур C_{xy} проходит через фиксированную точку ξ , которая при

трансляциях не смещается и, следовательно, трансляционная инвариантность (31) нарушается.

Из соображений геометрического характера ясно, что выделенным контуром интегрирования в (31) является отрезок прямой, соединяющей точки x и y . Прямолинейный контур может быть получен при построении спинорного пропагатора из полей обобщенного класса [33]. В дальнейшем мы увидим, что геометрически выделенный прямолинейный контур находит также и динамическое обоснование в ряде калибровочных моделей.

Модель Блоха — Нордсика. Лагранжиан модели Блоха — Нордсика отличается от лагранжиана КЭД заменой γ -матриц Дирака компонентами единичного времениподобного вектора: $\gamma_\mu \rightarrow u_\mu$, $u^2 = 1$. Следуя [36], вычисление пропагатора (31) будем производить на основе формализма функционального интеграла. Запишем (31) в виде

$$G(x, y|C) = \int D[\psi, \bar{\psi}] DA \exp [igS[\psi, \bar{\psi}; A]] \times \\ \times \psi(x) \exp \left[ig \int_{C_{xy}} dz^\mu A_\mu(z) \right] \bar{\psi}(y), \quad (35)$$

где $S[\psi, \bar{\psi}, A]$ — полное действие, а меры $D[\psi, \bar{\psi}]$ и DA нормированы так, что при $g = 0$ выражение (35) воспроизводит свободную функцию Грина. Кроме того, мера DA включает в себя некоторое калибровочное условие, вид которого в силу калибровочной инвариантности несуществен. Выполняя в (35) интегрирование по фермионным полям, получаем

$$G(x, y|C) = \int DA \frac{[\det i\hat{\partial} + g\hat{A} - m]}{\det [i\hat{\partial} - m]} G(x, y|A) \times \\ \times \exp \left[iS_0[A] + ig \int_{C_{xy}} dz^\mu A_\mu(z) \right], \quad (36)$$

где $S_0[A]$ — свободное действие векторных полей, а $G(x, y|A)$ — функция Грина фермиона во внешнем поле.

Отношение определителей в выражении (36) равно единице в силу отсутствия поляризации вакуума в модели Блоха — Нордсика. Фермионная функция Грина во внешнем поле удовлетворяет уравнению

$$[i\hat{\partial}_x + g\hat{A}(x) - m] G(x, y|A) = -\delta(x - y), \quad (37)$$

которое может быть решено методом пятого параметра Фока [8]. В результате для КИ-пропегатора (35) получаем

$$G(x, y|C) = i \int_0^{\infty} dv \delta(x - y - uv) e^{-iv(m^2 - i0)} \int DA \times \\ \times \exp \left\{ iS_0[A] + ig \int_0^y dv_1 u^\mu A_\mu(x - uv_1) + ig \int_{C_{xy}} dz^\mu A_\mu(z) \right\}. \quad (38)$$

С учетом δ -функции интеграл в (38) по v_1 переписывается в виде контурного интеграла по отрезку прямой, соединяющему точки y и x . Таким образом, контур C_{xy} замыкается отрезком прямой, и выражение (38) переписывается в явно КИ-виде

$$G(x, y|C) = i \int_0^{\infty} dv \delta(x - y - uv) \exp[-iv(m^2 - i0)] \times \\ \times \langle 0 | \mathcal{P} \exp \left[ig \oint_{\Gamma_{xy}} dz^\mu A_\mu(z) \right] | 0 \rangle. \quad (39)$$

Контур интегрирования в вильсоновском операторе изображен на рис. 1.

Как видно из (39), на поведение КИ-функции Грина существенное влияние оказывает вид вакуумного среднего от вильсоновского оператора, который, в свою очередь определяется выбором исходного контура C_{xy} . Если мы хотим придать пропагатору (39) самостоятельный физический смысл, следует заметить, что в модели Блоха — Нордсика существует калибровка $u^\mu A_\mu(x) = 0$, в которой модель расщепляется на два не взаимодействующих друг с другом фотонный и фермионный секторы. Иными словами, взаимодействие в модели носит фиктивный, чисто калибровочный характер, и физический фермионный про-

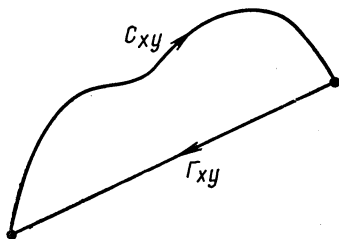


Рис. 1. Замкнутый контур Γ

пагатор должен быть свободным. Этого можно достичь, выбрав в качестве C_{xy} прямолинейный контур. Таким образом, соображения геометрического характера о выделенности прямолинейного контура находят в модели Блоха — Нордсика свое динамическое подтверждение. Как мы увидим ниже, прямолинейный контур является выделенным и в других моделях.

Начнем с электродинамики, где нас будет интересовать поведение КИ-спинорного пропагатора в инфракрасной области.

Уравнения Дайсона — Швингера. Следуя работам [33, 37], получаем уравнения Дайсона — Швингера для функции Грина (31), выбрав для простоты в качестве контура C_{xy} отрезок прямой, соединяющий точки x и y .

Введем в лагранжиан добавку с векторным источником J_μ : $\Delta\mathcal{L} = J_\mu(x) A^\mu(x)$. В представлении взаимодействия КИ-спинорный пропагатор запишем в виде

$$G(x, y | J) = S_0^{-1}[J] g(x, y | J), \quad (40a)$$

где

$$S_0[J] = \langle 0 | TS[J] | 0 \rangle; \quad (40б)$$

$$g(x, y | J) = i \langle 0 | T \psi(x) \mathcal{P} \exp \left[ig \int_x^y dz^\mu A_\mu(z) \right] \psi(y) S[J] | 0 \rangle, \quad (40в)$$

а $S[J]$ — это S -матрица при наличии источника.

Функция $g(x, y | J)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[i\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - g \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} - g \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_x^y dz^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu(z)} \right] \right) - m \right] \times \\ \times g(x, y | J) = -\delta(x-y) S_0[J]. \quad (41)$$

Определяя далее вакуумное среднее

$$u_\mu(x) = S_0^{-1}[J] \langle 0 | T A_\mu(x) S[J] | 0 \rangle, \quad (42)$$

с учетом (40) и (41) получаем

$$\left[i\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - g \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} - g \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_x^y dz^\nu \frac{\delta}{\delta J^\nu(z)} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - igu^\mu(x) - ig \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_x^y dz^\nu u_\nu(z) \right] \right) - m \right] G(x, y | J) = -\delta(x-y). \quad (43)$$

Нетрудно убедиться в калибровочной инвариантности полученного уравнения.

Второе уравнение Швингера для вакуумного среднего (42) содержит спинорную функцию Грина при совпадающих аргументах. Экспоненциальный фактор при этом пропадает, и уравнение имеет стандартный вид [8]

$$u_\mu(x) = \int d^4y D_{\mu\nu}^0(x, y) [J^\nu(y) + ig \text{Sp}(\gamma^\nu G(y, y | J))]. \quad (44)$$

Уравнения Дайсона возникают в результате преобразования (43) и (44) к интегральному виду. Перейдем к новой функциональной переменной $u_\mu(x)$. Воспользуемся соотношением

$$\frac{\delta}{\delta J^\nu(y)} = \int dz \frac{\delta u_\alpha(z)}{\delta J^\nu(y)} \frac{\delta}{\delta u_\alpha(z)} = - \int dz D_{\nu\alpha}(z, y) \frac{\delta}{\delta u_\alpha(z)}, \quad (45)$$

где $D_{\nu\alpha}$ — векторный пропагатор. Определим вершинную функцию

$$\Gamma_\mu(x, y | z) = \frac{\delta G^{-1}(x, y | u)}{\delta u^\mu(z)}. \quad (46)$$

Тогда

$$\frac{\delta G(x, y | u)}{\delta u^\mu(z)} = \int dx' dy' G(x, x' | u) \Gamma_\mu(x', y' | z) G(y', y | u), \quad (47)$$

и уравнение (43) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[i\hat{\partial}_x - m + g\hat{u}(x) + g\hat{\partial}_x \int_x^y d\xi^\nu u_\nu(\xi) \right] G(x, y | u) + \\ & + ig\gamma^\mu \int dx' dy' dz \left[D_{\mu\nu}(x, z) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_x^y d\xi^\alpha D_{\alpha\nu}(\xi, z) \right] \times \\ & \times G(x, x' | u) \Gamma^\nu(x', y' | z) G(y', y | u) = -\delta(x - y). \end{aligned} \quad (48)$$

Определяя КИ-векторное поле

$$B_\mu(x | y) = u_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_x^y d\xi^\nu u_\nu(\xi) \quad (49)$$

и массовый оператор

$$\begin{aligned} M(x, y | u) = & -ig\gamma^\mu \int dx' dz \left[D_{\mu\nu}(x, z) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_x^y d\xi^\alpha D_{\alpha\nu}(\xi, z) \right] \times \\ & \times G(x, x' | u) \Gamma^\nu(x', y | z), \end{aligned} \quad (50)$$

переписываем уравнение (48) в виде

$$\begin{aligned} [i\hat{\partial}_x - m + g\hat{B}(x | y)] G(x, y | u) - \int dy' \times \\ \times M(x, y' | u) G(y', y | u) = -\delta(x - y). \end{aligned} \quad (51)$$

Уравнение (51) нетрудно переписать в интегральной форме:

$$\begin{aligned}
 G(x, y | u) = & S_c(x - y) + g \int dy' S_c(x - y) \times \\
 & \times \hat{B}(y' | y) G(y', y | u) - \\
 & - \int dx' dy' S_c(x - x') M(x', y' | u) G(y', y | u).
 \end{aligned} \quad (52)$$

Массовый оператор (50) является КИ-объектом. В этом наиболее просто убедиться, если представить его в виде

$$\begin{aligned}
 M(x, y | u) = & ig\gamma^\mu \int dy' \langle 0 | T \psi(x) \exp \left[ig \int_x^{y'} d\xi A(\xi) \right] \times \\
 & \times \bar{\psi}(y') B_\mu(x | y') S[u] | 0 \rangle G^{-1}(y', y | u).
 \end{aligned} \quad (53)$$

Займемся теперь вторым уравнением Швингера (44). Вычисляя функциональную производную по $J_\nu(y)$ от его левой и правой частей, с учетом (45) получаем

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu}(x, y) = & D_{\mu\nu}^0(x, y) - ig \int dz d\tau D_{\mu\alpha}^0(x, z) \times \\
 & \times \text{Sp} \left[\gamma^\alpha \frac{\delta G(z, z | u)}{\delta u_\beta(\tau)} \right] D_{\beta\nu}(\tau, y).
 \end{aligned} \quad (54)$$

Или, определяя поляризационный оператор

$$\begin{aligned}
 P^{\alpha\beta}(z, \tau) = & ig \text{Sp} \left[\gamma^\alpha \frac{\delta G(z, z | u)}{\delta u_\beta(\tau)} \right] = \\
 = & ig \text{Sp} \left[\gamma^\alpha \int dz' dz'' G(z, z' | u) \Gamma^\beta(z', z'' | \tau) G(z'', z | u) \right],
 \end{aligned} \quad (55)$$

записываем (54) в виде

$$D_{\mu\nu}(x, y) = D_{\mu\nu}^0(x, y) - ig \int dz d\tau D_{\mu\alpha}^0(x, z) P^{\alpha\beta}(z, \tau) D_{\beta\nu}(\tau, y). \quad (56)$$

Инфракрасная асимптотика (уравнения Дайсона — Швингера). Для исследования поведения КИ-пропэгатора в инфракрасной области воспользуемся методом, разработанным в [38].

Точки на контуре будем параметризовать: $z_\mu = x_\mu + s(y - x)_\mu$, $0 \leq s \leq 1$. При $y = 0$ уравнение (43) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \left\{ i\gamma^\mu \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} + g \left(\hat{\varphi}_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\nu \int_0^1 ds \hat{\varphi}_\nu(sx) \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - ig \left(u_\mu(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\nu \int_0^1 ds u_\nu(sx) \right) \right) \right] - m \right\} \times \\
 \times G(x, 0 | u) = -\delta(x),
 \end{aligned} \quad (57)$$

где

$$\hat{\varphi}_\mu(x) = \int d\tau D_{\mu\nu}(x-\tau) \frac{\delta}{\delta u_\nu(\tau)}. \quad (58)$$

Перейдем в импульсное пространство. Рассмотрим величину

$$\Phi_\mu(p|u) = \int dx \exp(ipx) \left[\hat{\varphi}_\mu(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\nu \int_0^1 ds \hat{\varphi}_\nu(sx) \right) \right] \times \\ \times G(x, 0|u). \quad (59)$$

Определяя фурье-образ $\hat{\varphi}_\mu(k)$:

$$\hat{\varphi}_\mu(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \exp(-ikx) \hat{\varphi}_\mu(k), \quad (60)$$

получаем

$$\Phi_\mu(p|u) = \int dx \frac{dk}{(2\pi)^4} \int_0^1 ds e^{ipx} [e^{-ikh} \hat{\varphi}_\mu(k) - e^{-ikxs} \hat{\varphi}_\mu(k) + \\ + ix^\nu k_\mu s e^{-ikhxs} \hat{\varphi}_\nu(k)] G(x, 0|u). \quad (61)$$

Производя в последнем слагаемом в (61) интегрирование по частям, получаем

$$\Phi_\mu(p|u) = \int_0^1 ds \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \left[\hat{\varphi}_\mu(k) G(p-k|u) + k_\mu \frac{\partial \hat{\varphi}_\nu(k)}{\partial k_\nu} \times \right. \\ \left. \times G(p-sk|u) \right]. \quad (62)$$

Согласно [38], в инфракрасном пределе в выражении (62) можно сделать следующие приближения:

$$\Phi_\mu(p|u) \simeq \int_0^1 ds \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \left[\hat{\varphi}_\mu(k) + k_\mu \frac{\partial \hat{\varphi}_\nu(k)}{\partial k_\nu} \right] G(p|u) = \\ = \int \frac{\partial k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} (k_\mu \hat{\varphi}_\nu(k)) G(p|u) = 0. \quad (63)$$

Аналогично можно показать, что в инфракрасном пределе

$$\int dx e^{ipx} \left[u_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\nu \int_0^1 ds u_\nu(sx) \right] G(x, 0|u) \simeq 0. \quad (64)$$

Таким образом, в инфракрасной области $G(p)$ удовлетворяет уравнению

$$(\hat{p} - m) G(p) \simeq -1, \quad p^2 \simeq m^2, \quad (65)$$

т. е. в инфракрасной области ИК-функция Грина фермиона с прямолинейным контуром имеет простой полюс

$$G(p) = 1/(m - \hat{p}). \quad (66)$$

Отметим, что вопросы перенормировки, которые мы здесь не рассматриваем, в рамках теории возмущений исследовались в [39].

Инфракрасная асимптотика (функциональный метод). Поведение КИ-спинорного пропагатора в инфракрасной области на основе использования функционального интеграла рассматривалось в работах [33, 40, 41]. Функция Грина (31) записывается в виде функционального интеграла (35). Используя далее для $G(x, y|A)$ представление в виде [42]

$$\begin{aligned} G(x, y|A) = & i \hat{\partial}_x + g \hat{A}(x) + m \Big| \int_0^\infty ds \exp[-is(m^2 - i0)] \times \\ & \times \int DB \delta \left(x - y - 2 \int_0^s d\eta B(\eta) \right) \exp \left\{ -i \int_0^s d\xi \left[B^2(\xi) - g(2B_\mu(\xi) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sigma_{\mu\nu} i \partial_x^\nu(\xi) \right) A^\mu \left(x - 2 \int_\xi^s d\eta B(\eta) \right) \right] \Big\} \end{aligned} \quad (67)$$

и делая стандартные приближения*, справедливые в инфракрасной области [41, 42] (важно подчеркнуть, что при этом мы не нарушаем калибровочную инвариантность пропагатора), получаем

$$\begin{aligned} G(x, y|C) = & i \int_0^\infty ds \exp[-is(m^2 - i0)] \int DB \exp \left[-i \int_0^s d\xi B^2(\xi) \right] \times \\ & \times \left[i \hat{\partial}_x + m - i\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right] \delta \left(x - y - 2 \int_0^s d\eta B(\eta) \right) \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{2} g^2 \int dw_1 dw_2 J^\mu(w_1) D_{\mu\nu}(w_1, w_2) J^\nu(w_2) \right] \Big|_{j=0}, \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$\begin{aligned} J_\mu(w) = & j_\mu(w) + \int_{C_{xy}} dz^\mu \delta(w - z) + \\ & + 2 \int_0^s d\xi B_\mu(\xi) \delta \left(w - x + 2 \int_\xi^s d\eta B(\eta) \right), \end{aligned} \quad (69)$$

* Мы пренебрегаем вкладом массивных фермионных петель, а также $\sigma_{\mu\nu}$ в (67).

а мера функционального интегрирования DB нормирована условием

$$\int DB \exp \left[-i \int_0^s d\xi B^2(\xi) \right] = 1. \tag{70}$$

Отметим, что векторный пропагатор $D_{\mu\nu}$ в выражении (68) в силу калибровочной инвариантности может быть задан в любой удобной калибровке.

Перепишем (68) в виде

$$\begin{aligned} G(x, y|C) = & i \int_0^\infty ds \exp[-is(m^2 - i0)] \int DB \exp \left[-i \int_0^s d\xi B^2(\xi) \right] \times \\ & \times [i\hat{\partial}_x + m + g^2\hat{K}(x, y|B)] \delta(x - y - 2 \int_0^s d\xi B(\xi)) \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{2} g^2 \Phi(x, y|B) \right], \end{aligned} \tag{71}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{K}(x, y|B) = & \int_{C_{xy}} dz^\nu \gamma^\mu D_{\mu\nu}(x - z) + \\ & + 2 \int_0^s d\xi \gamma^\mu D_{\mu\nu} \left[2 \int_\xi^s d\eta B(\eta) \right] B^\nu(\xi); \\ \Phi(x, y|B) = & \int_{C_{xy}} dz_1^\mu \int_{C_{xy}} dz_2^\nu D_{\mu\nu}(z_1 - z_2) + \\ & + 4 \int_0^s d\xi_1 \int_0^s d\xi_2 B^\mu(\xi_1) D_{\mu\nu} \left[2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta B(\eta) \right] B^\nu(\xi_2) + \\ & + 2 \int_{C_{xy}} dz^\mu \int_0^s d\xi D_{\mu\nu} \left[z - x + 2 \int_\xi^s d\eta B(\eta) \right] B^\nu(\xi) + \\ & + 2 \int_0^s d\xi \int_{C_{xy}} dz^\nu B^\mu(\xi) D_{\mu\nu} \left[x - 2 \int_\xi^s d\eta B(\eta) - z \right]. \end{aligned} \tag{72}$$

Используя параметризацию точек контура в виде (33), нетрудно установить трансляционную инвариантность функций (72) и вслед за этим функции Грина (74).

Переходя в (71) к импульсному представлению, выполняя сдвиг функционального аргумента

$$B_\mu(\xi) = p_\mu + \omega_\mu(v), \quad \xi = vs. \tag{73}$$

и пренебрегая в выражениях, соответствующих \hat{K} и Φ , переменной ω_μ , получаем [41]

$$G(p|C) \simeq i \int_0^\infty ds \exp[is(p^2 - m^2 + i0)] \int D\omega \exp\left[-is \int_0^1 dv \omega^2(v)\right] \times \\ \times [\hat{p} + m + g^2 \hat{K}(2sp)] \exp\left[\frac{i}{2} g^2 \bar{\Phi}(2sp)\right], \quad (74)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \hat{K}(2sp) &= \gamma^\nu \int_{\Gamma_{0,2sp}} dz^\mu D_{\mu\nu}(z); \\ \bar{\Phi}(2sp) &= \int_{\Gamma_{0,2sp}} dz_1^\mu \int_{\Gamma_{0,2sp}} dz_2^\nu D_{\mu\nu}(z_1 - z_2). \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Замкнутый контур интегрирования в выражениях (75) состоит из исходного контура $C_{0,2sp}$ и отрезка прямой, соединяющего точки 0 и $2sp$. Его конфигурация аналогична приведенной на рис. 1. Если пренебречь в инфракрасном пределе вкладом функции $\hat{K}(2sp)$, содержащей γ -матрицу и связанной со спиновыми эффектами, то из (74) получим

$$G(p|C) \simeq i(\hat{p} + m) \int_0^\infty ds \exp(is(p^2 - m^2 + i0)) \times \\ \times \left\langle 0 \left| \mathcal{P} \exp\left[ig \int_{\Gamma_{0,2sp}} dz^\mu A_\mu(z)\right] \right| 0 \right\rangle. \quad (76)$$

Выражение (76) аналогично (39), полученному в модели Блоха — Нордсика, которая, как известно, воспроизводит функции Грина электродинамики в инфракрасной области.

Фурье-образ (76) в инфракрасном пределе может быть найден с помощью метода стационарной фазы. В результате в координатном пространстве получим

$$G(x-y|C) = G_0(x-y) \left\langle 0 \left| \mathcal{P} \exp\left[ig \oint_{\Gamma_{xy}} dz^\mu A_\mu(z)\right] \right| 0 \right\rangle, \quad (77)$$

где $G_0(x-y)$ — свободная функция Грина, а замкнутый контур Γ_{xy} изображен на рис. 1.

Таким образом, поведение КИ-фермионного пропагатора в инфракрасной области отличается от свободного мультипликативным фактором, равным вакуумному среднему вильсоновского оператора со специфическим контуром Γ_{xy} . Этот множитель, в котором сосредоточены все инфракрасные особенности, полностью аккумулирует зависимость от контура исходной функции Грина. Таким образом,

инфракрасное поведение спинорного пропагатора тесным образом связано с поведением вильсоновской петли с контуром Γ_{xy} . Если исходный контур прямолинейный, то пропагатор согласно (76) имеет простой полюс (66).

Двумерная квантовая хромодинамика в 1/N-приближении. Рассмотрим следуя [32] кварковый пропагатор, построенный из КИ-полей фоковского класса с прямолинейным контуром интегрирования, который соединяет фиксированную точку пространства ξ и аргумент поля. Соответствующее глюонное поле $B_\mu(x|\xi)$ удовлетворяет условию

$$(x - \xi)^\mu B_\mu(x|\xi) = 0. \tag{78}$$

Кварковый КИ-пропагатор в терминах исходного глюонного поля $A_\mu(x)$ и кваркового поля $q(x)$ имеет вид

$$G(x, y|\xi) = i \langle 0 | Tq(x) \mathcal{P} \exp \left[ig \int_x^y dz^\mu A_\mu(z) \right] \bar{q}(x) | 0 \rangle. \tag{79}$$

Контур интегрирования в (79) представляет собой ломаную линию, изображенную на рис. 2.

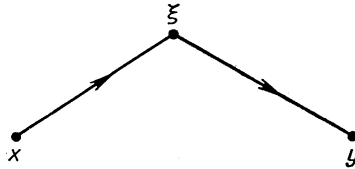


Рис. 2. Контур интегрирования в КИ-кварковом пропагаторе

Очевидно, что функция (79) трансляционно-неинвариантна. Трансляционная инвариантность восстанавливается в пределе

$$\xi_\mu = A\eta_\mu, \quad A \rightarrow \infty, \tag{80}$$

где η — некоторый вектор, выделяющий направление. КИ — глюонный пропагатор полей $B_\mu(x|\xi)$, в свободном случае имеет вид*

$$D_{\mu\nu}(x, y|\xi) = D_{\mu\nu}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_x^\xi dz^\alpha D_{\alpha\nu}(z, y) + \frac{\partial}{\partial y^\nu} \int_y^\xi dw^\beta D_{\mu\beta}(x, w) + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \int_y^\xi dz^\alpha \int_y^\xi dw^\beta D_{\alpha\beta}(z, w). \tag{81}$$

Все контурные интегралы в (81) берутся по прямолинейному отрезку, а функция $D_{\mu\nu}(x, y)$ есть глюонный пропагатор, взятый в произвольной калибровке.

* Тривиальные цветовые индексы мы опускаем.

Функция Грина (81) обладает следующим свойством:

$$D_{\mu\nu}(x, y|\xi) = D_{\mu\nu}(x - \xi, y - \xi|0). \quad (82)$$

Так же как и для спинорного пропагатора, трансляционная инвариантность восстанавливается в пределе $\xi \rightarrow \infty$.

Получим явное выражение для КИ-глюонного пропагатора. Для этого в правую часть (81) следует подставить $D_{\mu\nu}(x, y)$ в произвольной калибровке. Например, в калибровке $A_0 = 0$ в двумерном пространстве-времени имеем

$$D_{\mu\nu}(x, y) = -g_{\mu 1} g_{\nu 1} \delta(x_1 - y_1) \left[\frac{1}{2} |x_0 - y_0| + B(x_0 - y_0) - A \right]. \quad (83)$$

Произвольные постоянные A и B в (83) отражают остаточный калибровочный произвол. Обычно их выбирают равными нулю, прибегая к некоторым дополнительным аргументам. В нашем случае при подстановке (83) в (81) зависимость от A и B пропадает. Таким образом, КИ-глюонный пропагатор не имеет неоднозначностей, характерных для калибровочно-неинвариантной формулировки.

Функция (81) имеет вид

$$D_{\mu\nu}(x, y|\xi) = \frac{i}{4} [(\tilde{\xi} - \tilde{x})_{\mu} (\tilde{\xi} - \tilde{y})_{\nu} + (\tilde{\xi} - \tilde{y})_{\mu} (\tilde{\xi} - \tilde{x})_{\nu}] \delta[(\xi - x)(\tilde{\xi} - \tilde{y})] \times \\ \times \left[\frac{\xi_0 - y_0}{\xi_0 - x_0} \theta\left(\frac{\xi_0 - x_0}{\xi_0 - y_0} - 1\right) + \frac{\xi_0 - x_0}{\xi_0 - y_0} \theta\left(\frac{\xi_0 - y_0}{\xi_0 - x_0} - 1\right) \right]. \quad (84)$$

Здесь для любого 2-вектора z введено обозначение

$$\tilde{z}_{\mu} = \varepsilon_{\mu}^{\nu} z_{\nu} = (z_1, z_0). \quad (85)$$

Свободный пропагатор (84) имеет несколько необычный вид по сравнению с наиболее часто применяемыми пропагаторами в калибровке светового фронта $A_{-} = 0$ или в аксиальной калибровке $A_1 = 0$, из выражений для которых легко виден кулоновский закон взаимодействия зарядов в двумерном пространстве-времени. Однако нетрудно убедиться, что выражение для КИ-энергии взаимодействия зарядов, записанное через пропагатор (84), можно преобразовать к стандартному виду с обычным, линейно растущим с расстоянием потенциалом взаимодействия зарядов.

Уравнение для КИ-кваркового пропагатора (79) в главном порядке $1/N$ -приближения имеет вид [32]

$$\hat{M}(x, y|\xi) = -i\hat{g}^2 D_{\mu\nu}(x, y|\xi) [\gamma^{\mu} \hat{G}(x, y|\xi) \gamma^{\nu}], \quad (86)$$

где $\tilde{g}^2 = (2g)^2 \frac{N^2 - 1}{N}$; $D_{\mu\nu}$ определяется (84), а \hat{M} — массовый оператор, отвечающий КИ-функции Грина (79).

Для получения трансляционно-инвариантных результатов устремим $\xi \rightarrow \infty$ согласно (80). При этом функция (84) принимает вид

$$D_{\mu\nu}(x, y | A\eta) = \frac{1}{2} A \tilde{\eta}_\mu \tilde{\eta}_\nu \delta[\tilde{\eta}(x-y)] + O(A^0). \quad (87)$$

Таким образом, ведущий по A член в $D_{\mu\nu}$ является трансляционно-инвариантным. Здесь следует отметить, что он, однако, не дает вклада в такую физическую величину, как, например, энергия. Вклад в нее определяется следующим членом разложения функции $D_{\mu\nu}(x, y | A\eta)$, пропорциональным A^0 . Как будет показано ниже, для нашей цели выписанный явно первый член разложения по A в (87) играет определяющую роль.

В импульсном пространстве уравнение (86) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{M}_A(p) &= -\frac{i\tilde{g}^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \hat{\eta} \tilde{G}_A \left(p + \frac{1}{A} \tilde{\eta}\tau \right) \hat{\eta} = \\ &= -\frac{i\tilde{g}^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \hat{\eta} \frac{1}{M_A \left(p + \frac{1}{A} \tilde{\eta}\tau \right) + m - \left(\hat{p} + \frac{1}{A} \tilde{\eta}\tau \right) - i\epsilon} \hat{\eta}. \end{aligned} \quad (88)$$

Рассмотрим теперь различные случаи выбора направления η . При $\eta^2 = 0$ (точка ξ стремится к бесконечности вдоль светового конуса) уравнение (88) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \hat{M}(p_-, p_+) &= -\frac{i\tilde{g}^2}{2\sqrt{2}} A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \gamma_- \times \\ &\times \frac{1}{\gamma_- M(p_-, p_+ + \tau) + m - (p_- \gamma_+ + (p_+ + \tau) \gamma_-) - i\epsilon} \gamma_-. \end{aligned} \quad (89)$$

Здесь мы ввели стандартные переменные светового фронта

$$\left. \begin{aligned} p_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_0 \pm p_1); \\ \gamma_{\pm}^2 &= \gamma_{\pm}^2 = 0; \quad \{\gamma_-, \gamma_+\} = 2 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

и положили для конкретности $\eta = (1, 1)$.

Нетрудно видеть, что уравнение (89) имеет решение вида

$$\hat{M}(p_-, p_+) = \gamma_- M(p_-, p_+) \equiv \gamma_- M(p_-). \quad (91)$$

При этом для интеграла в правой части (89) справедлива следующая цепочка выкладок:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \gamma_- \frac{1}{\gamma_- M(p_-, p_+ + \tau) + m - (p_- \gamma_+ + (p_+ + \tau) \gamma_-) - i\varepsilon} \gamma_- = \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \gamma_- \frac{m + p_- \gamma_+ + \gamma_- (\tau - M(p_-, \tau))}{m^2 - 2p_- (\tau - M(p_-, \tau)) - i\varepsilon} \gamma_- = \\
 & = 2\gamma_- p_- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \frac{1}{m - 2p_- \tau - i\varepsilon} = i\gamma_- p_- \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \delta(p_- \tau - m) = \\
 & = \frac{i}{2} \gamma_- \operatorname{sgn} p_-. \tag{92}
 \end{aligned}$$

Таким образом, точное решение уравнения (89) в этом случае имеет вид (91), где

$$M(p_-) = \frac{\tilde{g}^2}{4\sqrt{2}} A \operatorname{sgn} p_-.$$

При $A \rightarrow \infty$ полюс у КИ-спинорной функции Грина уходит на бесконечность, что можно трактовать как конфайнмент отдельного кварка.

При $\eta^2 \neq 0$ решим уравнение (88) в приближении Блоха — Нордсика, которое, как известно в случае электродинамики, воспроизводит теорию в инфракрасной области. Согласно этому приближению заменим в (88) γ -матрицы на векторы: $\gamma_\mu \rightarrow u_\mu$, где $u^2 = 1$. Тогда уравнение (88) примет вид

$$M_A(p) = -\frac{i\tilde{g}^2}{4\pi} (\tilde{\eta}u)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{M_A\left(p + \frac{1}{A} \tilde{\eta}\tau\right) + m - (pu) - \frac{1}{A} (\tilde{\eta}u) \tau - i\varepsilon}. \tag{93}$$

Уравнение (93) имеет решение, не зависящее от p :

$$M_A(p) = M_A = \operatorname{const}. \tag{94}$$

Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}
 M_A & = -\frac{i\tilde{g}^2}{4\pi} (\tilde{\eta}u)^2 + A \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{M_A + m - (pu) - (\tilde{\eta}u) \tau - i\varepsilon} = \\
 & = \frac{\tilde{g}^2}{4\pi} A (\tilde{\eta}u)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta(M_A + m - pu - u\tilde{\eta}\tau) = +\frac{1}{4} \tilde{g}^2 (\tilde{\eta}u) A. \tag{95}
 \end{aligned}$$

Таким образом, $M_A \sim A$, и при $A \rightarrow \infty$ полюс пропагатора уходит на бесконечность, что так же, как и при $\eta^2 = 0$, отвечает конфайнменту кварка.

Отметим, что все уравнения в предлагаемом подходе хорошо определены в инфракрасной области и трудностей, связанных с различными способами инфракрасной регуляризации, здесь уже не возникает. Требование трансляционной инвариантности приводит к естественной предельной процедуре: $\xi \rightarrow \infty$, в результате чего КИ-массовый оператор кварка также стремится к бесконечности. Наконец, подчеркнем, что носитель обобщенной функции (84) сосредоточен на прямой, соединяющей точки x и y . Следовательно, при переходе к импульсному пространству ненулевой вклад дадут только прямолинейные контуры интегрирования. Таким образом, так же как и в выше-рассмотренных моделях, в КХД₂ в пользу геометрически выделенного прямолинейного контура имеются и динамические аргументы. Приведенный анализ позволяет предположить, что выделенность прямолинейного контура носит модельно-независимый характер.

В заключение этого раздела отметим, что подобно пропагатору могут быть рассмотрены и КИ-волновые функции. Динамические уравнения для релятивистских двухчастичных волновых функций были получены в [43].

3. δ^2 -КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Начнем со случая взаимодействия фотонов с внешним полем. Рассмотрим обычный континуальный интеграл в фазовом пространстве в кулоновской калибровке $\partial^i A_i = 0$ [22, 23]:

$$Z[j] = \int D\pi DA \delta(\pi_0) \delta(\partial^i \pi_i + gj_0) \delta(\partial^i A_i) \delta(\partial^i \partial_i A_0 + j_0) \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \pi^i (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + j^\mu A_\mu \right] \right\}. \quad (96)$$

Подчеркнем, что наша стартовая точка (96) фиксируется однозначно, так как после наложения на поле калибровки $\partial^i A_i \approx 0$ в фазовом пространстве второе калибровочное условие $\partial^i \partial_i A_0 + j_0 \approx 0$ с необходимостью следует из первого на гамильтоновых уравнениях движения [23], подобно первичной $\pi_0 \approx 0$ и вторичной $\partial^i \pi_i + j_0 \approx 0$ связям. Все обозначения в (96) стандартные, поэтому расшифровывать их не будем. Подчеркнем лишь, что исходный функционал (96) уже содержит две δ -функции, подчиняющие векторное поле A_μ как калибровочному условию $\partial^i A_i = 0$, так и закону Гаусса $\partial^i \partial_i A_0 + j_0 = 0$. Выполняя интегрирование по импульсным переменным,

приходим к выражению

$$Z[j] = \int DA \delta(\partial^i A_i) \delta(\partial^i \partial_i A_0 + j_0) \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right] \right\}. \quad (97)$$

Стандартный путь преобразования (96) к конфигурационному пространству оставляет тем не менее лишь δ -функцию от калибровочного условия (δ^1 -квантование), а δ -функция, подчиняющая переменную A_0 закону Гаусса, не фигурирует. Переход δ^2 -функционала (97) в стандартный δ^1 -функционал основан на том простом факте, что выражение $\exp \left[-\frac{i}{2} (b, K^{-1} b) \right]$ можно записать двумя способами:

$$\exp \left[-\frac{i}{2} (b, K^{-1} b) \right] = \int Dx \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} (x, Kx) + (bx) \right] \right\} \quad (98)$$

или

$$\exp \left[-\frac{i}{2} (b, K^{-1} b) \right] = \int Dx \delta(x - x_0) \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} (x, Kx) + (bx) \right] \right\}, \quad (99)$$

где x_0 — решение классического уравнения движения

$$Kx_0 + b = 0. \quad (100)$$

Таким образом, для перехода от выражения (97) к δ^1 -функционалу, содержащему только лишь $\delta(\partial^i A_i)$, следует, решив уравнение Гаусса $\partial^2 A_0 = j_0$ в виде $A_0 = \frac{1}{\partial^2} j_0$, что, кстати, предполагает убывание поля A_0 на бесконечности, и сняв с помощью $\delta \left(A_0 - \frac{1}{\partial^2} j_0 \right)$ интеграл по A_0 , записать полученное выражение в виде функционального интеграла типа (98), назвав при этом новую вспомогательную переменную интегрирования опять-таки полем A_0 . Ясно, что при этом мы искусственно расширяем область интегрирования в конфигурационном пространстве полей A_μ и выходим за поверхность, которая диктуется квантованием в фазовом пространстве и определяется двумя условиями: калибровкой и законом Гаусса.

Вместе с тем понятно, что как выражение (98), так и выражение (99) вполне допустимы, т. е. δ^1 - и δ^2 -функционалы на данном этапе рассмотрения фактически эквивалентны*. Однако, как мы увидим ниже, при переходе к другим калибровкам, когда переменная A_0 испытывает калибровочные преобразования, δ^1 - и δ^2 -способы квантования дают разные результаты. Это происходит из-за того, что потеря закона Гаусса при искусственном расширении конфигурационного пространства интегрирования в δ^1 -квантовании приводит к необходимости накладывать дополнительное условие на допустимые

* Вопрос о граничных условиях мы пока оставляем за рамками нашего анализа.

векторы состояния (для калибровок, не полностью фиксирующих калибровочный произвол). Так, в δ^1 -квантовании в калибровке $A_0 = 0$ необходимо искусственно наложить закон Гаусса на векторы состояния [21].

С помощью сдвига переменной интегрирования: $A_0 \rightarrow A_0 + \partial^{-2}j_0$ выражение (97) переписывается в виде

$$Z[j] = \int DA \delta(\partial^i A_i) \delta(A_0) \exp\{i S_{\text{ef}}(A, j)\}, \quad (101)$$

где

$$S_{\text{ef}} = S_0 + S_{\text{int}}^{\text{ef}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} j^\mu \delta_{\mu\nu}^c j^\nu + j^\mu A_\mu \right];$$

$$\delta_{\mu\nu}^c = \eta_\mu \eta_\nu |\partial^2, \quad \eta_\mu \equiv (1, 0, 0, 0).$$

Таким образом, в отличие от обычного подхода эффективное действие в (101) содержит мгновенное кулоновское взаимодействие зарядов $\frac{1}{2} (j_0, \frac{1}{\partial^2} j_0)$, а функциональное интегрирование осуществляется только лишь по физическим степеням свободы векторного поля — поперечным фотонам*. Соответствующий (101) производящий функционал S -матрицы (задающий S -матрицу вне массовой поверхности) имеет вид

$$S(A) = \exp(iS_0(A)) \int DB \delta(\partial^i (A_i - B_i)) \delta(\partial^2 (A_0 - B_0)) \times \\ \times \exp\left\{-i \int d^4x A^\mu K_{\mu\nu}^{\text{tr}} B^\nu + iS_{\text{ef}}\right\}, \quad (102)$$

где

$$K_{\mu\nu}^{\text{tr}} = g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu.$$

Переход к калибровке $\Phi A = 0$ осуществляется в (102) с помощью невырожденного преобразования (см., например, (45, 46)**:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \frac{1}{\partial^2} [\Phi A - \partial^i A_i]. \quad (103)$$

В результате $S(A)$ примет вид

$$S(A) = \exp[iS_0(A)] \int DB \delta[\Phi(A - B)] \delta[L(A - B)] \times \\ \times \exp\left\{-i \int d^4x A^\mu K_{\mu\nu}^{\text{tr}} B^\nu + iS_{\text{ef}}\right\}, \quad (104)$$

где

$$L_\mu = K_{0\mu}^{\text{tr}}.$$

* В связи с этим см. [44], где использовался операторный метод квантования.

** Φ_μ может быть как вектором, например $\Phi_\mu = n_\mu$, $\Phi_\mu = x_\mu$ (калибровочное условие Фока — Швингера $x_\mu A^{\mu} = 0$), так и оператором, например $\Phi_\mu = \partial_\mu$, а также любой их безразмерной линейной комбинацией.

Соответствующий (104) производящий функционал функций Грина имеет вид

$$Z[j] = \int DA \delta(\Phi A) \delta(LA) \exp \left\{ i \left[S(A) + \int d^4x \left(\frac{1}{2} j^\mu \delta_{\mu\nu}^c j^\nu + j^\mu A_\mu \right) \right] \right\} = \\ = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x j^\mu \delta_{\mu\nu}^c j^\nu \right\} Z^{\text{tr}}[j]. \quad (105)$$

Функционал $Z^{\text{tr}}[j]$ в (105) определяет пропагатор поперечных фотонов $D_{\mu\nu}$ в калибровке $\Phi A = 0$:

$$Z^{\text{tr}}[j] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int dx dy j^\mu(x) D_{\mu\nu}(x, y) j^\nu(y) \right\}. \quad (106)$$

Тогда согласно (105) пропагатор, фигурирующий в правилах диаграммной техники $\Delta_{\mu\nu}$, равен

$$\Delta_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}^c. \quad (107)$$

Пропагатор $D_{\mu\nu}$ легко может быть вычислен для всех практически используемых калибровок. Нетрудно найти его связь с пропагатором в δ^1 -схеме. А именно если $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}$ пропагатор, возникающий в стандартном δ^1 -подходе в некоторой калибровке, то пропагатор $D_{\mu\nu}$ в той же калибровке связан с $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}$ соотношением

$$D_{\mu\nu} = \tilde{\Delta}_{\mu\nu} - \frac{[\tilde{\Delta}_{\mu\alpha} L^\alpha][L^\beta \tilde{\Delta}_{\beta\nu}]}{[L^\mu \tilde{\Delta}_{\mu\nu} L^\nu]}. \quad (108)$$

При выборе калибровки $nA = 0$ находим

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2 + i0} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{(nk)} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(nk)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(n\eta) k^2}{(nk) [\eta^2 k^2 - (\eta k)^2]} (k_\mu \eta_\nu + k_\nu \eta_\mu) - \frac{(n\eta)^2 k^2 k_\mu k_\nu}{(nk)^2 [\eta^2 k^2 - (\eta k)^2]} - \frac{k^2 \eta_\mu \eta_\nu}{\eta^2 k^2 - (\eta k)^2} \right]. \quad (109)$$

Пропагатор (109) одновременно удовлетворяет двум условиям: $n^\mu D_{\mu\nu} = 0$ и $L^\mu D_{\mu\nu} = 0$. Отметим, что последнее слагаемое в (109) есть не что иное, как $\delta_{\mu\nu}^c$. Таким образом, в пропагаторе $\Delta_{\mu\nu}$, который определен согласно (107) и фигурирует в фейнмановских правилах диаграммной техники, кулоновский член отсутствует. Это, конечно, является необходимым с точки зрения калибровочной инвариантности. Однако мы видим, что пропагатор $\Delta_{\mu\nu}$ [выражение (109) с отброшенным последним слагаемым], возникающий в предлагаемом δ^2 -подходе, существенно отличается от стандартного пропагатора $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}$

в калибровке $nA = 0$ [первые три слагаемых в выражении (109)]. Совпадение пропагаторов $\Delta_{\mu\nu} = \tilde{\Delta}_{\mu\nu}$ происходит при $n\eta = 0$, например, для калибровки $A_3 = 0$. Но именно для пространственно-подобных n_μ стандартный пропагатор $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}$ не приводит к противоречию в вычислениях вильсоновской петли. Обратим внимание и на тот факт, что унитарность S -матрицы в стандартном подходе также удается явно продемонстрировать только для пространственно-подобных n_μ [47].

В случае калибровки $A_0 = 0$ ($n_\mu = \eta_\mu$) там, где δ^1 -подход встречает трудности, пропагатор $\Delta_{\mu\nu}$ не совпадает со стандартным $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}$, а переходит в обыкновенный кулоновский $\Delta_{\mu\nu}^c$, что автоматически обеспечивает согласованность расчета вильсоновской петли в различных калибровках.

Таким образом, если δ^1 -подход приводит к калибровке $nA = 0$ к пропагатору одному и тому же [с точностью до обхода полюсов по (n, k)] для всех направлений n_μ , δ^2 -квантование существенно различает времени- и пространственно-подобные векторы n_μ .

Производящий δ^2 -функционал Грина в КЭД имеет вид

$$Z[j; \eta, \eta] = \int D[\bar{\psi}\psi] DA \delta(\Phi A) \delta(\partial^i F_{i0} + J_0) \times \\ \times \exp\left\{i \left[S(A; \psi, \psi) + \int d^4x (j^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right]\right\}, \quad (110)$$

где $S(A; \bar{\psi}, \psi)$ — полное действие в КЭД, а $J_\mu = g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + j_\mu$. Вторая δ -функция (110) обеспечивает выполнение закона Гаусса $\partial^i F_{i0} + J_0 = 0$ под знаком функционального интеграла. Выражение (110) можно переписать в другом, эквивалентном виде

$$Z[j; \bar{\eta}, \eta] = \int D[\bar{\psi}\psi] DA \delta(\Phi A) \delta(\partial^i F_{i0}) \exp\left\{iS(A; \bar{\psi}, \psi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (J_0 \partial^{-2} J_0) + \int d^4x [j^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]\right\}. \quad (111)$$

Вторая δ -функция в (111) обеспечивает выполнение свободного закона Гаусса, а в действии дополнительно появляется кулоновский член.

Модель Блоха — Нордсика. Вычислим калибровочно-инвариантный спинорный пропагатор

$$G(x, y|C) = i\mathcal{P} \exp \left\{ ig \int_{c_{xy}} dz^\mu \frac{\delta}{\delta j_\mu(z)} \frac{\delta^2 Z[j; \bar{\eta}, \eta]}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \right\} \Big|_{j=0, \eta=\bar{\eta}=0}. \quad (112)$$

Интегрирование в показателе экспоненты, обеспечивающей калибровочную инвариантность выражения (112), выполняется по произвольному контуру, соединяющему точки x и y .

Воспользовавшись производящим функционалом (111) и записывая кулоновский член в действии в виде функционального интеграла до переменной Λ , после интегрирования по спинорным полям получим

$$G(x, y|C) = \int D\Lambda \exp \left[-\frac{i}{2} (\Lambda, \partial^2 \Lambda) \right] \int DA \delta(\Phi A) \delta(LA) \times \\ \times \exp \left\{ iS_0(A) + ig \int_{C_{xy}} dz^\mu (A_\mu + \eta_\mu \Lambda) \right\} G(x, y|A_\mu + \eta_\mu \Lambda), \quad (113)$$

где $G(x, y | B_\mu)$ — функция Грина во внешнем поле B_μ . При выводе (113) мы, как и ранее, учли, что детерминант, возникающий в результате интегрирования по спинорным полям, равен единице ввиду отсутствия поляризации вакуума в модели Блоха — Нордсика. Выражение для функции Грина во внешнем поле может быть выписано явно:

$$G(x, y|A_\mu + \eta_\mu \Lambda) = i \int_0^\infty dv \delta(x - y - uv) \exp[-iv(m^2 - i0)] \times \\ \times \exp \left[-ig \int_x^y dz^\mu (A_\mu + \eta_\mu \Lambda) \right]. \quad (114)$$

Контурное интегрирование в (114) выполняется по отрезку прямой, соединяющему точки x и y . Подставляя (114) в (113), получаем

$$G(x, y|C) = G_0(x - y) W_c[\Gamma_{xy}] W_{tr}[\Gamma_{xy}], \quad (115)$$

где G_0 — свободный пропагатор, а $W_c[\Gamma_{xy}]$ и $W_{tr}[\Gamma_{xy}]$ — вильсоновские петли, определяемые соответственно кулоновским членом и поперечными фотонами:

$$\left. \begin{aligned} W_c[\Gamma_{xy}] &= \int D\Lambda \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\Lambda, \partial^2 \Lambda) + ig \oint_{\Gamma_{xy}} dz^\mu \Lambda; \right. \\ W_{tr}[\Gamma_{xy}] &= \int DA \delta(\Phi A) \delta(LA) \exp \left\{ iS_0[A] + ig \oint_{\Gamma_{xy}} dz^\mu A_\mu(z) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Контур интегрирования Γ_{xy} в (116) изображен на рис. 1.

Квантовая электродинамика. Рассмотрим в рамках δ^2 -квантования поведение КИ-спинорного пропагатора (112) в инфракрасной области. Воспользуемся корпускулярным представлением для функции Грина во внешнем поле [42]

$$G(x, y|B) = [i\hat{\partial}_x + m + g\hat{B}(x)] i \int_0^\infty d\tau \int_{\substack{z(\tau)=x \\ z(0)=y}} Dz \exp \left[ig \int_{\gamma_{yx}} dz^\mu B_\mu(z) \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int_0^\tau d\xi (\dot{z}^2 + m^2 - i\sigma_{\mu\nu} \partial^\nu B^\mu) \right]. \quad (117)$$

Интегрирование в (117) проводится по всем путям γ_{yx} , соединяющим точки y и x . Пренебрегая далее, как обычно, поляризацией вакуума и членом $\sigma_{\mu\nu}$, получаем

$$\begin{aligned}
 G(x, y|C) = & \int DA \delta(\Phi A) \delta(LA) \exp \left\{ iS_0[A] + ig \oint_{\Gamma_{xy}} dz^\mu A_\mu(z) \right\} \times \\
 & \times \int D\Lambda \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\Lambda, \partial^2 \Lambda) + ig \oint_{\Gamma_{xy}} dz^\mu \eta_\mu \Lambda(z) \right\} \times \\
 & \times \left\{ i\hat{\partial}_x + m + g\gamma^\mu \left[A_\mu(x) + \eta_\mu \Lambda(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_x^y dz^\mu (A_\mu(z) + \eta_\mu \Lambda(z)) \right] \right\} \times \\
 & \times i \int_0^\infty d\tau \int_{\substack{z(\tau)=x \\ z(0)=y}} Dz \exp \left\{ ig \int_{\bar{\gamma}_{yx}} dz^\mu [A_\mu(z) + \eta_\mu \Lambda(z)] \right\} \times \\
 & \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int_0^\tau d\xi^k (\dot{z}^2 + m^2) \right]. \tag{118}
 \end{aligned}$$

Контур $\bar{\gamma}_{yx}$ получится замыканием контура γ_{yx} отрезком прямой, соединяющим точки x и y , а контур Γ_{xy} — тот же, что и на рис. 1. Пренебрегая членами, содержащими γ -матрицы, и замечая, что в инфракрасной области основной вклад дают прямолинейные контуры γ_{yx} , из (118) получаем в точности формулу (115).

В рассмотренном абелевом случае факторизация вильсоновских петель, соответствующих статической части — кулоновскому взаимодействию и динамической части — поперечным фотонам, носит искусственный характер. Однако в неабелевом случае аналогичное разделение может иметь принципиальное значение.

Двумерные модели. δ^2 -Квантование позволяет несколько по-другому взглянуть на двумерные калибровочные теории. Дело в том, что в двух измерениях отсутствуют поперечные фотоны, их пропагатор $D_{\mu\nu} = 0$ [в чем нетрудно убедиться непосредственно, используя выражение (109)]. Таким образом, интегрирование по векторному полю в двумерии тривиально. Функционал (111) переписывается в виде

$$Z[j; \bar{\eta}, \eta] = \int D[\bar{\psi}, \psi] \exp \left\{ iS_0(\bar{\psi}, \psi) + \frac{1}{2} (J_0, \partial_1^{-2} J_0) + (\bar{\eta}\psi) + (\bar{\psi}\eta) \right\}. \tag{119}$$

Функционал (119) описывает фермионы, взаимодействующие друг с другом посредством закона Кулона. Причем выражение (119) будет одним и тем же для всех калибровок $\Phi A = 0$.

Таким образом, δ^2 -квантование не оставляет в двух измерениях никакого калибровочного произвола. В безмассовом случае (модель

Швингера) бозонизация (119) приводит к массивному скалярному полю с массой $g/\sqrt{\pi}$.

В неабелевом случае δ^2 -квантование изменяет духовый сектор теории. Так, в случае КХД₂ S -матрица имеет вид (временные асимптотики векторного поля удовлетворяют стандартным фейнмановским условиям излучения)

$$S = \int_{A \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} A_{\text{out}}^{\text{in}}} DA \delta(\nabla^\mu \bar{\mathcal{F}}_{\mu 0}) \delta(\Phi^\mu A_\mu) \exp [iS(A)], \quad (120)$$

где S — неабелево действие, а ∇_μ — обычная ковариантная производная. Легко видеть, что во всех калибровках $\Phi A = 0$ и, в частности, в калибровке Лоренца $\partial A = 0$ отсутствуют духи и самодействие глюонных полей, а пропагатор $\Delta_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}/k^2$ одинаков для всех выборов оператора Φ_μ , фиксирующего калибровку.

В заключение этого раздела отметим, что те же результаты получаются, если в качестве исходной калибровки в фазовом пространстве для δ^2 -квантования использовать не кулоновскую, а любую другую калибровку, совместную с фазовым пространством, например условие $A_3 = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем кратко основные результаты данной работы. Показано, как в рамках лагранжева формализма построить КИ-полевые переменные, которые являются КИ-объектами. Калибровочная независимость новых полей по отношению к локальным калибровочным преобразованиям исходных полей не следует рассматривать как полное избавление теории от калибровочного произвола. Функциональный произвол по-прежнему остается. Он связан с зависимостью новых полей от контура. Однако множество КИ-полей не находится во взаимоднозначном соответствии с множеством полей, определенных в различных калибровках. Так, например, в неабелевом случае невозможно построить КИ-поле с помощью проектирования на поля в тех калибровках, для которых имеются неоднозначности Грибова. Кроме того, переход к контурно-зависимым переменным позволяет привлечь для анализа соображения геометрического характера. Поэтому при вычислении калибровочно-зависимых величин, например функций Грина, можно ставить вопрос об оптимальном выборе контура или, иначе, об оптимальном выборе калибровки. В электродинамических вычислениях широко используется калибровка Соловьева — Йенни, обладающая по сравнению с иными калибровками рядом преимуществ. Развиваемый здесь формализм позволяет раскрыть «секрет» этой калибровки, продемонстрировать ее выделенность с точки зрения симметричного геометрического анализа. Та же идея применяется и для исследования спинорного пропагатора в ряде

калибровочных моделей. При этом оказалось, что геометрически выделенный прямолинейный контур во всех рассмотренных калибровочных теориях обосновывается также и с точки зрения динамики.

Характерным для введенных векторных полей является существование так называемой формулы обращения, однозначно выражающей эти поля через тензоры напряженности, и вторичного калибровочного условия, которое для поля Янга — Миллса имеет вид условия Лоренца, записанного в терминах контурных производных.

В работе исследована зависимость от контура КИ-спинорного пропагатора. В модели Блоха — Нордсика и в инфракрасной области квантовой электродинамики показано, что вся зависимость от контура и все инфракрасные особенности сосредоточены в мультипликативном факторе — вильсоновской петле со специфическим контуром, образованным исходным контуром в пропагаторе и прямолинейным отрезком. Таким образом, демонстрируется, что поведение спинорного пропагатора в инфракрасной области тесно связано с поведением вильсоновской петли.

В абелевом случае инфракрасная область исследуется как на основе полученных в работе уравнений Дайсона — Швингера для КИ-пропагатора, так и с помощью функциональных методов. Показано, что в случае прямолинейного контура КИ-спинорный пропагатор имеет особенность в виде простого полюса.

В КХД₂ рассмотрен кварковый пропагатор в рамках $1/N$ -разложения. Важной особенностью предлагаемого подхода является тот факт, что возникающие в нем уравнения не требуют дополнительной инфракрасной регуляризации, неоднозначность выбора которой в стандартном подходе приводила к существенным трудностям. В предлагаемом подходе существует естественная предельная процедура, приводящая к восстановлению симметрий двух типов. Во-первых, восстанавливается калибровочная инвариантность глюонного и кваркового полей; во-вторых, функции Грина приобретают трансляционную инвариантность. В результате такого предельного перехода полюс кваркового пропагатора отодвигается на бесконечность, что можно трактовать как конфайнмент отдельного кварка.

В работе предлагается новый метод квантования калибровочных полей, названный нами δ^2 -методом. Мы исходим из стандартного функционального интеграла в фазовом пространстве и показываем, что переход к конфигурационному пространству может быть осуществлен таким образом, что под знаком функционального интеграла возникают две функциональные δ -функции, одна из которых стандартная и обеспечивает выполнение калибровочного условия, а вторая обеспечивает наложение закона Гаусса. Мы демонстрируем способ перехода к произвольным линейным калибровкам и получаем новый пропагатор векторного поля. В случае широко применяемых калибровок $n^\mu A_\mu = 0$ новый пропагатор различает времени- и пространственно-подобные векторы n_μ и не приводит к противоречию в вычислении вильсоновской петли, а также проливает свет на труд-

ности в непосредственном доказательстве унитарности S -матрицы для времениподобных векторов n_μ . В рамках δ^2 -метода рассматривается ряд калибровочных моделей теории поля. В частности, в двумерных моделях в силу отсутствия поперечных фотонов δ^2 -подход не оставляет никакого калибровочного произвола и в неабелевом случае меняет духовый сектор теории.

Авторы глубоко признательны Н. Б. Скачкову, в соавторстве с которым были получены многие из изложенных в этом обзоре результатов.

Мы благодарны также В. Г. Кадышевскому и В. Н. Капшаю, Л. В. Прохорову, А. В. Радюшкину, А. А. Славнову и С. А. Фролову за интерес к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelstam S.//Phys. Rev. 1979. Vol. D20. P. 3223—3238.
2. Pagels H.//Phys. Rev. 1977. Vol. D15. P. 2991—3002.
3. Baker M., Ball J. S., Zachariassen F.//Nucl. Phys. 1981. Vol. B186. P. 531—572; 1983. Vol. B229. P. 445—455.
4. Arbuzov V. A.//Phys. Lett. 1983. Vol. 125B. P. 497—500.
5. Ефимов Г. В. Препринт ОИЯИ P2-84-716. Дубна, 1984.
6. Kogchensky G. P., Radyushkin A. V.//Phys. Lett. 1986. Vol. 171B. P. 459—467; Иванов С. В., Корчемский Г. П., Радюшкин А. В.//ЯФ. 1986. Т. 44. С. 230—240.
7. Арбузов Б. А.//ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 5—50.
8. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
9. Куликов А. В.//ЯФ. 1985. Т. 42. С. 453—461.
10. Politzer H. D.//Nucl. Phys. 1976. Vol. B117. P. 397—404; Narison S.//Phys. Repts. 1982. Vol. 31. P. 263.
11. Kanaya K., Sugawara H., Pakvasa S., Tuan S. F.//Phys. Lett. 1982. Vol. 116B. P. 61—65; Kanaya K.//Phys. Rev. 1982. Vol. D26. P. 1758—1766.
12. 't Hooft G.//Nucl. Phys. 1974. Vol. B72. P. 461; 1974. Vol. B75. P. 461—473.
13. Callan C. G., Coote N., Cross D. J.//Phys. Rev. 1976. Vol. D13. P. 1649—1669.
14. Wu T. T.//Phys. Lett. 1977. Vol. 71B. P. 142—144.
15. Einhorn M. B.//Phys. Rev. 1976. Vol. D14. P. 3451—3471.
16. Coleman S. I.//Ettore Majorana Int. School of Subnuclear Physics Erice, 1979.
17. Faddeev L. D., Popov V. N.//Phys. Lett. 1967. Vol. B25. P. 30—31; De Witt B. S.//Phys. Rev. 1967. Vol. 162. P. 1113—1120.
18. Lim S. C.//Phys. Lett. 1984. Vol. B149. P. 201—205; Cheng H., Tsai E. C.//Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 57. P. 511—514; Yamagishi P.//Phys. Lett. 1987. Vol. B189. P. 161—163; Lim S. C.//Phys. Rev. 1988. Vol. D37. P. 3765—3782.
19. Ivanov S. V.//Phys. Lett. 1987. Vol. B197. P. 539—543; Yad. Fiz. 1988. Vol. 48. P. 1392—1401.
20. Caracciolo S., Curci C., Menotti P.//Phys. Lett. 1982. Vol. 113B. P. 311—316.
21. Landshoff P. V.//Phys. Lett. 1986. Vol. B169. P. 69—73; Steiner F.//Phys. Lett. 1986. Vol. B173. P. 321—326; Славнов А. А., Фролов С. А.//ТМФ. 1986. Т. 58. С. 360—367.
22. Фаддеев Л. Д.//ТМФ. 1969. Т. 1. С. 3—18.

23. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1976; Sundermeyer K. Constrained Dynamics Lecture Notes in Physics. Vol. 169. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
24. Dirak P.A.M.//Canad. J. Phys. 1955. Vol. 33. P. 650—656.
25. Fock V. A.//Sov. Phys. 1937. Vol. 12. P. 404—408.
26. De Witt B. S.//Phys. Rev. 1962. Vol. 125. P. 2189—2191.
27. Mandelstam S.//Ann. Phys. 1962. Vol. 19. P. 1—24; Phys. Rev. 1968. Vol. 175. P. 1580—1603.
28. Steinmann O.//Ann. Phys. 1984. Vol. 157. P. 232—254; Helv. Phys. Acta. 1985. Vol. 58. P. 995—1003.
29. d'Emilio E., Mintchev M.//Phys. Rev. 1983. Vol. D27. P. 1840—1851; Nuovo cimento. 1982. Vol. 69A. P. 43—61.
30. Минчев М. X., Тодоров И. Т.//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 59—100.
31. Skachkov N. B., Solovtsov I. L., Shevchenko O. Yu.//JINR Rapid Communications 1985. N 8—85. P. 42—46; 1985. N 9—85. P. 39—42; Preprint JINR E2-85-430. Dubna, 1985.
32. Skachkov N. B., Solovtsov I. L., Shevchenko O. Yu.//Z. Phys. C. Part and Fields. 1985. Vol. 29. P. 631—635.
33. Скачков Н. Б., Соловцов И. Л., Шевченко О. Ю.//ТМФ. 1987. Т. 71. С. 54—66.
34. Швингер Ю. Частицы, источники, поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. Т. 2.
35. Cronström C.//Phys. Lett. 1980. Vol. 90B. P. 267—269; Dubovikov M. S., Smilga A. V.//Nucl. Phys. 1981. Vol. B185. P. 109—124.
36. Соловцов И. Л.//Изв. вузов. Сер. физика. 1985. № 1. С. 65—70.
37. Skachkov N. B., Solovtsov I. L., Shevchenko O. Yu.//JINR Rapid Communications. 1985. N 10—85. P. 13—18.
38. Логунов А. А.//ЖЭТФ. 1955. Т. 29. С. 871—874.
39. Stefanis N. G.//Nuovo cimento. 1984. Vol. 83A. P. 205—209; Preprint HD — THER-83-27. Heidelberg, 1983.
40. Соловцов И. Л.//Изв. АН БССР. 1985. № 5. С. 99—104.
41. Сисакян А. Н., Скачков Н. Б., Соловцов И. Л., Шевченко О. Ю.//ТМФ. 1989. Т. 78. С. 258—266; JINR Rapid Communications. 1987. N 3. P. 12—16.
42. Барбашов Б. М.//ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 607—624; Блохинцев Д. И., Барбашов Б. М.//УФН. 1968. Т. 106. С. 593—616.
43. Капшай В. Н., Скачков Н. Б., Соловцов И. Л.//Тр. VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Противно: ИФВЭ, 1983. Т. 2. С. 262—267; Preprint JINR E2-83-26. Dubna, 1983. P. 14.
44. Бьёркен Д., Дрелл С. Релятивистская квантовая теория: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
45. Васильев А. Н., Письмак Ю. М.//Вестник ЛГУ. 1975. № 10. С. 7—13; 1975. № 16. С. 7—12.
46. Сисакян А. Н., Скачков Н. Б., Шевченко О. Ю.//Препринты ОИЯИ P2-87-728. Дубна, 1987; P2-87-729. Дубна, 1987.
47. Konetschny W., Kummer W.//Nucl. Phys. 1976. Vol. B108. P. 367—370.