«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1990, ТОМ 21, ВЫП. 5

УДК 530.145+539.143.3

О РАСЧЕТЕ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ТРИТОНА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Ф. М. Лев

Институт прикладной математики (Хабаровское отделение)
Дальневосточного отделения АН СССР, Хабаровск

Дан обзор применения релятивистской квантовой механики для расчета энергии связи тритона. Выведена формула, позволяющая вычислить релятивистскую поправку к энергии связи в первом приближении по v^2/c^2 (где v — скорости нуклонов в тритоне, а c — скорость света), если известны нерелятивистская энергия связи и парциально-волновое разложение фаддеевских компонент нерелятивистской волновой функции. Проведено парциально-волновое разложение релятивистских уравнений Фаддеева, решение которых определяет энергию связи и волновую функцию тритона без разложения по степеням v^2/c^2.

The review of the application of relativistic quantum mechanics to the calculation of triton binding energy is given. We derive the formula which makes it possible to calculate the relativistic correction to the binding energy in the first approximation in v^2/c^2 (where v means the characteristic velocity of nucleons in triton and c is the velocity of light) if the nonrelativistic binding energy and the partial-wave decomposition of the Faddeev components of nonrelativistic wave function is known. There is given also the partial-wave decomposition of relativistic Faddeev equations, the solution of whose determines the binding energy and the triton wave function without expansion in powers of v^2/c^2.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема недосвязки тритона. Одной из основных проблем в физике малонуклонных систем является так называемая проблема недосвязки легчайших ядер ^{3}H, ^{3}He и ^{4}He. Эта проблема заключается в том, что при учете лишь реалистических парных нуклон-нуклонных взаимодействий в рамках нерелятивистской квантовой механики расчет энергии связи дает значение, которое по абсолютной величине меньше, чем соответствующее экспериментальное значение (кроме того, имеется расхождение между теорией и экспериментом и для таких низкоэнергетических параметров, как зарядовые радиусы указанных ядер, длина дублетного нуклон-дейтронного рассеяния и т. д.). Поскольку в случае ядер гелия задача усложняется из-за необходимости учета кулоновского взаимодействия, то ясно, что наиболее точные расчеты можно провести для тритона. К настоящему времени здесь получены результаты, которые можно считать практически исчерпывающими. Так, например, в работах [1, 2], проведенных группами в Лос-Аламосе и Сендаи, расчеты проводились в 34-канальном приближении для уравнений Фаддеева, и для различных реалистических нуклон-нуклонных потенциалов результат для энергии связи тритона (по абсолютной величине) оказался на 0,8 — 1,1 МэВ меньше, чем экспериментальное значение 8,48 МэВ. 34-Канальное приближение соответствует учету лишь тех элементов базиса $\{LSJlj\}$ (см. ниже), для которых $J \leqslant 4$. Оценка вклада элементов указанного базиса с $5 \leqslant J \leqslant 8$ показала [3], что этот вклад не превышает значение порядка 10 кэВ. 34-Канальный расчет проведен также для боннского потенциала [4], где результат 8,35 МэВ оказался близким к экспериментальному. Успех боннского потенциала обсуждается также в работе [5], однако в других работах (см., например, [6—8]) высказывается мнение, что боннский потенциал нельзя считать вполне реалистическим. В частности, увеличение энергии связи по сравнению с результатами для других потенциалов связывается в основном с меньшим значением тензорных сил в боннском потенциале, но это противоречит экспериментальным данным по магнитному формфактору дейтрона и, кроме того, параметры боннского потенциала подгонялись лишь по данным pn-рассеяния без учета данных по pp-рассеянию. Измерение коэффициента асимметрии в pn-рассеянии при энергии 10,03 МэВ, проведенное недавно авторами [9], показало, что результаты хорошо описываются парижским потенциалом, несколько хуже — ниймегенским и неудовлетворительно — боннским. Поэтому проблема недосвязки тритона остается открытой. Недавно М. И. Мухтаровой [10] проведены расчеты энергии связи тритона методом гиперсферических гармоник с точностью не меньшей, чем в 34-канальных фаддеевских расчетах, и при этом для известных реалистических потенциалов подтверждены результаты [1, 2].

Для объяснения указанного расхождения между теорией и экспериментом различными авторами рассматривался чаще всего вклад трехнуклонных взаимодействий, обусловленных двухпионным обменом. Имеются также работы, в которых проблема недосвязки связывается с необходимостью учета кварковых и других ненуклонных степеней свободы в ядрах, и, наконец, имеется весьма малое число работ, в которых учитываются релятивистские эффекты.

В последних 34-канальных расчетах энергии связи тритона с учетом трехнуклонных взаимодействий [2, 11] было показано, что эти взаимодействия могут приводить к дополнительному притяжению порядка 2 МэВ, и, таким образом, тритон даже пересвязывается. Однако результат сильно зависит от выбора параметра обрезания пион-нуклонного формфактора. Меняя этот параметр, можно добиться даже полного согласия теории с экспериментом, однако пока еще нет надежных теоретических оснований для того, чтобы предпочесть какое-либо конкретное значение указанного параметра. Например, автор [12] считает, что вклад трехнуклонных взаимодействий не превосходит 0,3 МэВ. В [13] дан обзор работ по трехнуклонным взаимодействиям, выполненных с 1978 до 1988 г. Что же касается вклада кварковых степеней свободы, то здесь недавно группой ИТЭФ проведен расчет в рамках модели составных кварковых мешков (СКМ) и получено значение 8,1 МэВ [14], однако при этом учитывалось лишь 5 каналов. О применении метода СКМ для расчета других низкоэнергетических параметров малонуклонных систем — см. работы [15—18] и цитируемую там литературу. Еще один вариант реалистического нуклон-нуклонного потенциала, эффективно учитывающего вклад кварковых степеней свободы, разработан в НИИЯФ МГУ [19—22]. При расчетах различных низкоэнергетических параметров в рамках этой модели вклад области больших относительных импульсов играет гораздо более существенную роль, чем в других реалистических моделях, и при этом, соответственно, более важен учет высших парциальных волн и релятивистских эффектов [23, 24]. До настоящего времени расчет энергии связи тритона в рамках модели НИИЯФ МГУ проведен лишь в пятиканальном приближении при упрощающих предположениях [25], что явно недостаточно. Отметим также, что, исходя из анализа нуклон-нуклонных данных до энергий 1 ГэВ, авторы [26] считают, что кварковые степени свободы в нуклон-нуклонных взаимодействиях пока еще не проявляются.

О выделении вклада релятивистских эффектов в трехнуклонные наблюдаемые. Работы, в которых вычислялась релятивистская поправка (РП) к энергии связи тритона, мы обсудим в конце статьи, а сейчас отметим, что сама возможность отдельного учета релятивистских эффектов требует обоснования, поскольку в рамках квантовой теории поля учет релятивизма приводит одновременно к необходимости учета рождения новых частиц. Нам представляется, однако, что при рассмотрении малонуклонных систем при низких энергиях, и особенно системы из трех нуклонов, вклад эффектов релятивистской кинематики может быть надежно выделен в связи со следующими соображениями.

Во-первых, известно, что в разумных релятивистских классических и квантовых теориях, таких, как классическая и квантовая электродинамика, общая теория относительности (ОТО), квантовая теория со скалярной и псевдоскалярной связью, квантовая хромодинамика (КХД) и т. д., можно ограничиться конечным числом степеней свободы не только в нулевом, но и в первом приближении по $1/c^2$ (а в ОТО — даже в приближении $1/c^4$) [27—31], поэтому можно попытаться вычислить вначале РП к энергии связи тритона лишь в первом приближении по $1/c^2$. Явное вычисление нуклон-нуклонного потенциала в приближении $1/c^2$ исходя из лагранжиана КХД в настоящее время невозможно, однако нет причин сомневаться, что такой потенциал существует. Другое соображение заключается в том, что при энергиях ниже порога рождения π-мезона все ненуклонные степени свободы, возможно, могут быть учтены при помощи некоторых эффективных двух- и трехнуклонных взаимодействий. Аргументы в пользу этого предположения приведены в [32—34], однако строгого доказательства здесь не существует. Наконец, еще одним аргументом в пользу эффективного учета лишь нуклонных степеней свободы при низких энергиях (см. [35—37]) является то, что неупругости в низших парциальных волнах для нуклон-нуклонного рассеяния начинают проявляться лишь с энергий 1—1,5 ГэВ, т. е. намного выше порога рождения π-мезона. С точки зрения квантовой теории поля такая ситуация представляется необычной и означает, что при низких энергиях эффекты релятивистской кинематики начнут проявляться раньше, чем неупругости.

Более подробная аргументация имеется в работах [32—38], однако, как нам представляется, изложенного достаточно, чтобы убедить читателя в том, что при низких энергиях естественным аппаратом для расчета релятивистских эффектов в малонуклонных системах является релятивистская квантовая механика (РКМ), т. е. подход, в котором, как и в обычной квантовой механике, число частиц сохраняется, но группой инвариантности является не группа Галилея, а группа Пуанкаре. Подробный обзор РКМ имеется, например, в лекциях автора [38], где обсуждается также связь РКМ с работами, в которых исследуется, как релятивистское квантовомеханическое описание может быть получено из квантовой теории поля. Поскольку основной целью настоящей статьи является вывод явных формул для расчета энергии связи тритона в рамках РКМ, мы здесь не будем обсуждать другие подходы, а относительно РКМ приведем в сжатом виде лишь то, что необходимо для понимания дальнейшего.

Как обычно, под релятивистской инвариантностью рассматриваемой квантовой системы мы будем понимать то, что волновая функция этой системы преобразуется по унитарному представлению группы Пуанкаре в некотором гильбертовом пространстве. Это представление может быть задано при помощи десяти генераторов, т. е. самосопряженных операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры Ли группы Пуанкаре. Основной целью РКМ является вывод таких явных формул для всех десяти генераторов, чтобы, наряду с нужными коммутационными соотношениями, для каждого генератора выполнялось также условие кластерной сепарабельности (или разделимости). В частном случае трех частиц это условие означает, что если выключить, например, все взаимодействия, в которых участвует частица 3, то каждый генератор переходит в сумму соответствующих генераторов для двух систем: системы, в которой частицы 1 и 2 взаимодействуют, и системы, состоящей из одной свободной частицы 3. Более подробно о свойстве кластерной сепарабельности — см., например, работы [39, 40]. Отметим, что свойство разделимости всех десяти генераторов является, вообще говоря, гораздо более сильным, чем одно лишь свойство разделимости S-матрицы. Можно привести аргументы (см., например, [38]), что релятивистские трехчастичные уравнения, выведенные в [41—43] и в предшествующих работах исходя из диаграммного и других подходов, противоречат разделимости во всех десяти генераторах.

Для расчета энергии связи тритона достаточно иметь лишь явную формулу для массового оператора трехнуклонной системы. В рамках РКМ различные выражения для трехчастичного массового оператора были выведены в работах Кэстера [44, 45], С. Н. Соколова [40], Баккера, Л. А. Кондратюка и М. В. Терентьева [46] (где улучшены, в частности, результаты В. Б. Берестецкого и М. В. Терентьева [47]), П. И. Гудавадзе, Т. И. Копалеишвили и А. И. Мачавариани [48] (где рассматривался лишь бесспиновый случай) и автора [49]. Хотя в этих работах используются различные формы динамики и различный выбор импульсных и спиновых переменных, очень важным «экспериментальным фактом» является, на наш взгляд, то, что (если устранить неточность в [44]) все указанные операторы являются унитарно эквивалентными (это будет показано в отдельном обзоре Кондратюка и автора) и, таким образом, приводят к одинаковым физическим результатам. Эти трехчастичные массовые операторы получаются также естественным образом исходя из общего подхода, основанного на методе пакующих операторов Соколова [40, 50], который предписывает, как построить генераторы представления для системы из любого заданного числа частиц [51—55], а в первом приближении по $1/c^2$ указанный результат согласуется с подходами Фолди и Крайчика [56] и Гайды [57] (см. [38, 58, 59]). Как показано в [38, 54, 55], решения, найденные в [40, 44—49, 51—55], согласуются с квантовой теорией поля в том смысле, что выбор пакующих операторов в них такой же, как и в квантовой теории поля, а линейный закон сложения взаимодействий в трехчастичном массовом операторе соответствует представлению полного лагранжиана взаимодействия в виде суммы лагранжианов различных взаимодействий. Наконец, найденное решение для трехчастичного массового оператора получается естественным образом, если кроме пуанкаре-инвариантности есть инвариантность и относительно преобразований суперсимметрии [60].

В случае четырех и большего числа тел общее решение для генераторов представления содержит дополнительные произвольные функции [50—52], а однозначное решение здесь имеется лишь в первом приближении по $1/c^2$ [59]. Поэтому случай трех нуклонов является выделенным, так как здесь условия релятивистской инвариантности, кластерной сепарабельности и соответствия с квантовой теорией поля позволяют найти точное решение.

Исходя из всего, сказанного выше, представляется обоснованным проведение расчета энергии связи тритона с использованием точной формулы для трехчастичного массового оператора, выведенного в рамках РКМ. Основной целью настоящей работы является вывод явных формул, позволяющих, в принципе, провести такой расчет в рамках фаддеевского подхода. Вывод этих формул является довольно громоздким, однако там, где выкладки опущены, мы приводим все необходимое для того, чтобы заинтересованный читатель мог провести вычисления самостоятельно. При этом мы подробно обсуждаем, к каким усложнениям приводит учет релятивизма.

Проведение релятивистского расчета энергии связи тритона представляется нам очень важным и по той причине, что стандартный нерелятивистский подход является, строго говоря, логически противоречивым. Действительно, в стандартном подходе массовый оператор трехчастичной системы записывается в виде (индекс nr означает «нерелятивистский»)

$$\hat{M}^{nr} = T^{nr} + \sum_{\alpha} v_{\alpha}^{nr}, \tag{1}$$

где T^{nr} — нерелятивистский оператор кинетической энергии трехчастичной системы в ее с. ц. и.; α пробегает значения 12, 31, 23, а операторы взаимодействия v_{α}^{nr} подбираются так, чтобы правильно описать соответствующие двухчастичные данные. При этом в v_{α}^{nr} включают члены, которые имеют релятивистское происхождение — спин-орбитальные и спин-спиновые (а в случае боннского потенциала — также и бесспиновый член, квадратичный по импульсу). Но тогда теория становится уже частично релятивистской, и такое простое сложение взаимодействий, как в (1), противоречит релятивистским коммутационным соотношениям уже в первом приближении по $1/c^2$. В этом можно убедиться, исходя из явного вида трехчастичного массового оператора в этом приближении (см. [38, 58] и разд. 2 настоящей работы).

Выше мы обсуждали возможность разложения по степеням $1/c^2$, и в связи с только что сказанным этот вопрос требует пояснения. Дело в том, что если мы хотим в релятивистском расчете воспользоваться результатами, уже полученными в стандартном подходе, то мы должны выразить релятивистский трехчастичный массовый оператор через те же операторы v_{α}^{nr}, что и выше [в этом случае связь имеет гораздо более сложный вид, чем в (1)]. После этого можно все функции от $\mathbf{q}$ и $\mathbf{Q}$, осуществляющие эту связь, разложить по степеням q/mc и Q/mc, где $\mathbf{q}$ и $\mathbf{Q}$ — относительные импульсы нуклонов [см. формулы (14) и (31)], $q = |\mathbf{q}|$, $Q = |\mathbf{Q}|$, а m — масса нуклона. При этом мы оставляем без изменения операторы v_{α}^{nr}. Разумеется, в указанной процедуре явно выделяется лишь часть членов порядка $1/c^2$ (поскольку такие члены есть и в операторах v_{α}^{nr}), и разложение по степеням $1/c^2$ явно реализуется при этом как разложение по степеням $1/m^2$. Таким образом, речь идет о таком разложении по степеням $1/m^2$, когда в качестве нулевого приближения выбирается результат стандартного подхода. Это имеет смысл, если волновая функция (ВФ) тритона, полученная в стандартном подходе, убывает достаточно быстро при больших q и Q.

В настоящей работе принята система единиц $\hbar = c = 1$, а метрический тензор в пространстве Минковского имеет отличные от нуля компоненты $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$. Коммутационные соотношения для генераторов представления группы Пуанкаре реализуются в виде

$$\left.\begin{aligned} &[P_\mu,\ P_\nu]=0;\quad [M_{\mu\nu},\ P_\rho]=-\mathrm{i}\,(g_{\mu\rho}P_\nu-g_{\nu\rho}P_\mu);\\ &[M_{\mu\nu},\ M_{\rho\sigma}]=-\mathrm{i}\,(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}+g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}-g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}-g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

где $\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3$; P_μ — операторы 4-импульса, а $M_{\mu\nu}$ — операторы 4-момента.

1. СИСТЕМА ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ В РКМ И ПРИНЦИП МИНИМАЛЬНОГО РЕЛЯТИВИЗМА

Реализация представления группы Пуанкаре для системы двух свободных частиц. Как обычно, будем считать, что элементарная частица массы m описывается унитарным неприводимым представлением группы Пуанкаре. Способы реализации такого представления хорошо известны (см., например, [61]). Мы выберем реализацию в пространстве функций $\varphi(\mathbf{p},\ \sigma)$, таких, что

$$\sum_\sigma\int|\varphi(\mathbf{p},\ \sigma)|^2\,d^3\mathbf{p}<\infty,\tag{3}$$

где $\mathbf{p}$ — импульс частицы, а σ — проекция спина. Рассмотрим лишь случай частиц со спином $1/2$, и тогда σ принимает лишь значения $\pm 1/2$. При этом генераторы представления, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (2), можно реализовать в виде (см., например, [61])

$$\begin{gathered}\mathbf{P}=\mathbf{p},\quad E=(m^2+\mathbf{p}^2)^{1/2},\quad \mathbf{M}=\mathbf{l}\,(\mathbf{p})+\mathbf{s},\\ \mathbf{N}=-\mathrm{i}\,(m^2+\mathbf{p}^2)^{1/4}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}(m^2+\mathbf{p}^2)^{1/4}+\frac{\mathbf{s}\times\mathbf{p}}{m+(m^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}},\end{gathered}\tag{4}$$

где $\mathbf{P}$ — оператор обычного импульса; $\mathbf{p}$ — оператор умножения на $\mathbf{p}$; E — оператор энергии; $\mathbf{l}\,(\mathbf{p})=-\mathrm{i}\mathbf{p}\times\partial/\partial\mathbf{p}$ — оператор орбитального момента; $\mathbf{s}$ — оператор спина;

$$\mathbf{M}=\{M^{23},\ M^{31},\ M^{12}\},\quad \mathbf{N}=\{M^{01},\ M^{02},\ M^{03}\}.$$

Если в качестве элемента объема в пространстве импульсов выбрать не $d^3\mathbf{p}$, а релятивистски-инвариантную меру $d\nu\,(\mathbf{p})=d^3\mathbf{p}/2\omega\,(\mathbf{p})$, $\omega\,(\mathbf{p})=(m^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}$, т. е., вместо (3) рассмотреть пространство функций $\varphi\,(\mathbf{p},\ \sigma)$, таких, что

$$\sum_\sigma\int|\varphi(\mathbf{p},\ \sigma)|^2\,d\nu\,(\mathbf{p})<\infty,\tag{3'}$$

то, как легко видеть, вид операторов $\mathbf{P}$, E и $\mathbf{M}$ останется прежним, но оператор буста будет иметь вид

$$\mathbf{N}=-\mathrm{i}\omega\,(\mathbf{p})\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}+\frac{\mathbf{s}\times\mathbf{p}}{m+\omega\,(\mathbf{p})}.\tag{4'}$$

Рассмотрим теперь систему двух свободных частиц. Так как разностью масс протона и нейтрона мы будем пренебрегать, то достаточно ограничиться случаем частиц одинаковой массы m. Можно считать, что, по определению, частицы не взаимодействуют друг с другом, если их совместная ВФ преобразуется по тензорному произведению соответствующих одночастичных представлений. При этом если частицы являются тождественными, то ВФ предполагается антисимметризованной. Таким образом, представление, описывающее систему двух свободных частиц 1 и 2, может быть реализовано, например, в пространстве функций $\varphi(\mathbf{p}_1, \sigma_1, \mathbf{p}_2, \sigma_2)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2} |\varphi(\mathbf{p}_1, \sigma_1, \mathbf{p}_2, \sigma_2)|^2 \, d\nu(\mathbf{p}_1)\, d\nu(\mathbf{p}_2) < \infty, \tag{5}$$

а каждый из генераторов представления равен сумме соответствующих одночастичных генераторов вида (4) (для $\mathbf{P}$, E, $\mathbf{M}$) и (4′) (для $\mathbf{N}$).

Вместо переменных $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, описывающих импульсы частиц по отдельности, введем переменные $\mathbf{P}$ и $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{P}}{M}\,\omega(\mathbf{p}_1) + \frac{(\mathbf{P}\mathbf{p}_1)\,\mathbf{P}}{M\,(M+E)}, \tag{6}$$

где $E = \omega(\mathbf{p}_1) + \omega(\mathbf{p}_2)$; $M = (E^2 - \mathbf{P}^2)^{1/2} = 2\omega(\mathbf{k})$. Тогда вместо реализации представления в пространстве функций, удовлетворяющих условию (5), мы получаем реализацию в пространстве H — в пространстве функций $\varphi(\mathbf{P}, \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2} \int |\varphi(\mathbf{P}, \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2)|^2 \frac{d^3\mathbf{k}}{M^2} \frac{d^3\mathbf{P}}{\left(1+\dfrac{\mathbf{P}}{M^2}\right)^{1/2}} < \infty. \tag{7}$$

Введем оператор

$$\mathcal{U} = \left(1 + \frac{\mathbf{P}^2}{M^2}\right)^{1/4} \gamma(\mathbf{P}, \sigma_1, \mathbf{k})\, \gamma(\mathbf{P}, \sigma_2, -\mathbf{k}), \tag{8}$$

где

$$\gamma(\mathbf{P}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = \frac{(E+M)(\omega(\mathbf{k})+m) + \mathbf{P}\mathbf{k} + i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{P}\times\mathbf{k})}{\{2\,(E+M)(\omega(\mathbf{k})+m)(E\omega(\mathbf{k})+Mm+\mathbf{P}\mathbf{k})\}^{1/2}}; \tag{9}$$

$M = 2\omega(\mathbf{k})$; $E = (M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}$, а $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули. При этом считается, что в формуле (8) $\boldsymbol{\sigma}_i$ $(i = 1, 2)$ действует лишь по соответствующей переменной σ_i.

Пусть $\tilde{H}$ — пространство функций $\tilde{\varphi}(\mathbf{P}, \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2} \int |\tilde{\varphi}(\mathbf{P}, \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2)|^2 \frac{d^3\mathbf{k}}{M^2}\, d^3\mathbf{P} < \infty. \tag{10}$$

Тогда легко видеть, что $\mathcal{U}^{-1}$ является унитарным оператором из H в $\tilde{H}$, а при помощи прямого расчета можно проверить, что действие генераторов рассматриваемого двухчастичного представления в $\tilde{H}$ имеет вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}, \quad E = (M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{l}(\mathbf{P}) + \mathbf{S},$$

$$\mathbf{N} = -i\,(M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/4} \frac{\partial}{\partial\mathbf{P}} (M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/4} + \frac{\mathbf{S}\times\mathbf{P}}{M + (M^2+\mathbf{P}^2)^{1/2}}, \tag{11}$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{l}(\mathbf{k}) + \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, а $\mathbf{s}_i$ $(i = 1, 2)$ — оператор спина соответствующей частицы. Этот расчет является довольно громоздким, а более простой (и более общий) способ вывода формул (11) заключается в использовании формализма прямого интеграла (см., например, [38, 54, 55]).

Сравнивая формулы (3) и (4), с одной стороны, и формулы (10) и (11) — с другой, можно сделать вывод, что переход к пространству $\tilde{H}$ в двухчастичном случае интерпретируется как разделение переменных на внешние и внутренние: роль внешней переменной играет $\mathbf{P}$, а роль внутренних переменных — $\mathbf{k}$, σ_1, σ_2. При этом M является массовым оператором составной системы, а $\mathbf{S}$ — оператором ее спина. Эти операторы действуют лишь в H_{int} — пространстве функций $\chi(\mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2} \int |\chi(\mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2)|^2 \frac{d^3\mathbf{k}}{4\omega(\mathbf{k})^2} < \infty. \tag{12}$$

Возвращаясь к пространству H, мы получаем, что действие генераторов представления Γ^i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ в этом пространстве имеет вид

$$\Gamma^i = \mathcal{U}\tilde{\Gamma}^i\mathcal{U}^{-1}, \tag{13}$$

где $\tilde{\Gamma}^i$ — генераторы (11) в $\tilde{H}$.

В нерелятивистском пределе оператор $\mathcal{U}$, очевидно, переходит в единицу, а вектор $\mathbf{k}$ — в вектор $\mathbf{q}$, который определяется обычной формулой

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \tag{14}$$

В дальнейшем нам понадобится формула, связывающая $\mathbf{k}$ и $\mathbf{q}$ в первом приближении по $1/m^2$:

$$\mathbf{k} = \mathbf{q} - \frac{(\mathbf{Pq})\,\mathbf{P}}{8m^2}. \tag{15}$$

Введение взаимодействия в систему двух частиц и принцип минимального релятивизма. Из формул (11) легко следует, что если заменить в них оператор M некоторым оператором $\hat{M}$ в H_{int}, коммутирующим с $\mathbf{S}$, то полученный таким образом новый набор генераторов $\hat{\tilde{\Gamma}}^i$ также будет удовлетворять нужным коммутационным соотношениям. Поэтому, как ясно из (13), простейший способ введения взаимодействия в систему двух частиц заключается в замене операторов Γ^i операторами

$$\hat{\Gamma}^i = \mathcal{U}\hat{\tilde{\Gamma}}^i\mathcal{U}^{-1}. \tag{16}$$

Впервые этот способ использовали Бакамджан и Томас [62]. В общем случае операторы $\mathcal{U}$ также надо заменить некоторыми операторами $\hat{\mathcal{U}}$, учитывающими взаимодействие. Можно показать [58, 38], однако, что для частиц равных масс формула (16) согласуется с квантовой теорией поля в приближении $1/m^2$ и, следовательно, по крайней мере в этом приближении, введение взаимодействия согласно (16) оправдано.

Условия разделимости (см. выше) требуют, чтобы при выключении взаимодействия оператор $\hat{M}$ переходил в M. Кроме того, из физических соображений необходимо, чтобы оператор $\hat{M}$ имел такой же непрерывный спектр, как и M, а в канале с квантовыми числами дейтрона — соответствующую точку дискретного спектра. Этим условиям можно удовлетворить многими способами. Нам будет удобно считать, что $\hat{M}^2 = M^2 + w$, где w — интегральный оператор в H_{int}:

$$w\chi(\mathbf{k}) = \int w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \chi(\mathbf{k}') \frac{d^3\mathbf{k}'}{4\omega(\mathbf{k}')^2}. \tag{17}$$

В этой формуле предполагается, что функция $\chi(\mathbf{k})$ является спинором по переменным σ_1, σ_2, а ядро $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — оператором по этим переменным. Уравнение на собственные значения оператора $\hat{M}^2$ в H_{int} имеет вид $\hat{M}^2\chi = \mu^2\chi$, а если обозначить $\mu^2 = 4(m^2 + \varkappa^2)$, то это уравнение записывается как

$$\left(\frac{\mathbf{k}^2}{m} + \frac{w}{4m}\right)\chi = \frac{\varkappa^2}{m}\chi. \tag{18}$$

Если вместо χ ввести функцию $\tilde{\chi}(\mathbf{k}) = \chi(\mathbf{k})/2\omega(\mathbf{k})$, так, чтобы $\tilde{\chi}(\mathbf{k})$ принадлежала пространству функций с нерелятивистской нормировкой $\int |\tilde{\chi}(\mathbf{k})|^2\, d^3\mathbf{k} < \infty$ (а точнее, соответствующему оснащенному пространству), то для $\tilde{\chi}(\mathbf{k})$ имеет место уравнение

$$\left(\frac{\mathbf{k}^2}{m} + v\right)\tilde{\chi} = \frac{\varkappa^2}{m}\tilde{\chi}, \tag{19}$$

где ядра операторов w и v связаны соотношением

$$w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 16m\omega(\mathbf{k})\,\omega(\mathbf{k}')\, v(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \tag{20}$$

Если мы рассматриваем двухнуклонную систему в системе ее центра инерции (т. е., при $\mathbf{P} = 0$), то векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{q}$ совпадают и уравнение (19) имеет вид обычного уравнения Шредингера. Факт, что если для частиц равных масс взаимодействие вводится аддитивно в квадрат массового оператора, то уравнение на собственные значения массового оператора сводится к обычному уравнению Шредингера, известен как принцип минимального релятивизма (см., например, [63—66]).

Мы видим, что и в релятивистском случае двухчастичный оператор взаимодействия может подбираться исходя из описания экспериментальных данных при помощи обычного уравнения Шредингера.

Строго говоря, в эксперименте определяется S-матрица, для которой имеет место формула $S = W_+^* W_-$, где

$$W_\pm = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{i\hat{M}t} e^{-iMt} \tag{21}$$

(s-lim означает сильный предел), а при помощи уравнения (19) определяется оператор $\tilde{S} = \tilde{W}_+^* \tilde{W}_-$, где

$$\tilde{W}_\pm = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{i\hat{M}^2 t} e^{-iM^2 t}. \tag{21'}$$

Однако, исходя из подхода, предложенного Фаддеевым [67, 68], можно легко убедиться, что если ядро оператора v достаточно гладкое и быстро убывает при больших импульсах, то выполняется принцип инвариантности $W_\pm = \tilde{W}_\pm$.

Величина $\varkappa$ в правой части (19) имеет смысл абсолютного значения импульса нуклонов в их с. ц. и. В то же время в рамках стандартного подхода двухчастичный оператор взаимодействия v^{nr} должен подбираться исходя из уравнения Шредингера, в которое, вместо $\varkappa^2/m$ в правой части, входит $\mu - 2m$. Связь между этими величинами, очевидно, следующая:

$$\frac{\varkappa^2}{m} = (\mu - 2m)\left(1 + \frac{\mu - 2m}{4m}\right). \tag{22}$$

Поэтому, казалось бы, оператор v нельзя отождествить с каким-либо известным реалистическим оператором v^{nr} (потенциалом Рида, парижским потенциалом и т. д.). Однако Кэстером было сделано следующее важное наблюдение [69]. Поскольку экспериментально фазы рассеяния известны как функции лабораторной энергии E_{lab}, то в стандартном подходе величину $\mu - 2m$ выражают через E_{lab} по нерелятивистской формуле $\mu - 2m = E_{\text{lab}}/2$ и решают уравнение (19) с $E_{\text{lab}}/2$ в правой части. Но $\varkappa^2/m = E_{\text{lab}}/2$ является точным релятивистским соотношением. Поэтому никаких релятивистских поправок в области рассеяния не возникает. В единственной же точке дискретного спектра, соответствующей дейтрону (здесь $\varkappa$ мнимо), поправка возникает. Подставляя в (22) вместо $\mu - 2m$ экспериментальное значение энергии связи дейтрона $-2{,}2246$ МэВ, получаем, что в этой точке $\varkappa^2/m = -2{,}2233$ МэВ. Таким образом, единственное изменение, вносимое релятивизмом в двухчастичную задачу, заключается в том, что нуклон-нуклонные потенциалы должны подгоняться не по истинной энергии связи дейтрона $-2{,}2246$ МэВ, а по «эффективной», равной $-2{,}2233$ МэВ. Ясно, что такое различие практически несущественно, и в дальнейшем мы будем считать, что $v = v^{nr}$.

В заключение этого раздела отметим, что, как следует из (11), (16) и определения $\hat{\tilde{\Gamma}}^i$, оператор энергии двухчастичной системы можно представить в виде $\hat{E} = E + V$, где E — оператор энергии для системы невзаимодействующих частиц, а оператор V дается формулой

$$V=(4m^2+4\mathbf{k}^2+\mathcal{U}w\mathcal{U}^{-1}+\mathbf{P}^2)^{1/2}-(4m^2+4\mathbf{k}^2+\mathbf{P}^2)^{1/2}. \tag{23}$$

Это ясно из того, что оператор $\mathcal{U}$ коммутирует с операторами умножения на $\mathbf{k}$ и $\mathbf{P}$.

2. СИСТЕМА ТРЕХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ В РКМ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПОПРАВКА К ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ТРИТОНА В ПРИБЛИЖЕНИИ $1/m^2$

Представление группы Пуанкаре, описывающее систему трех частиц 1, 2 и 3 с одинаковыми массами m, можно реализовать в пространстве функций $\varphi(\mathbf{p}_1, \sigma_1, \mathbf{p}_2, \sigma_2, \mathbf{p}_3, \sigma_3)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\int |\varphi(\mathbf{p}_1, \sigma_1, \mathbf{p}_2, \sigma_2, \mathbf{p}_3, \sigma_3)|^2\, d\nu(\mathbf{p}_1)\, d\nu(\mathbf{p}_2)\, d\nu(\mathbf{p}_3) < \infty. \tag{24}$$

Обозначим теперь $\mathbf{P}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3$ полный импульс трехчастичной системы, а $\mathbf{k}_i$ $(i=1, 2, 3)$ — импульсы частиц в с. ц. и., т. е. в системе отсчета, где $\mathbf{P}=0$. По аналогии с формулой (6) положим

$$\mathbf{k}_i=\mathbf{p}_i-\frac{\mathbf{P}}{M}\,\omega(\mathbf{p}_i)+\frac{(\mathbf{P}\mathbf{p}_i)\,\mathbf{P}}{M(E+M)}, \tag{25}$$

где M означает теперь свободный массовый оператор трехчастичной системы, а E — соответствующий оператор энергии: $E=\omega(\mathbf{p}_1)+\omega(\mathbf{p}_2)+\omega(\mathbf{p}_3)$, $M=(E^2-P^2)^{1/2}$. Из (25) следует, что $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0$, как и должно быть. В переменных $\mathbf{P}$, $\mathbf{k}_i$ $(i=1, 2, 3)$ пространство представления реализуется в виде пространства функций $\varphi(\mathbf{P}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\int |\varphi(\mathbf{P}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)|^2\, d\nu(\mathrm{int})\,\frac{d^3\mathbf{P}}{\left(1+\frac{\mathbf{P}^2}{M^2}\right)^{1/2}}, \tag{26}$$

где

$$d\nu(\mathrm{int})=d\nu(\mathbf{k}_1)\, d\nu(\mathbf{k}_2)\, d\nu(\mathbf{k}_3)\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3). \tag{27}$$

Обозначим $\tilde{H}$ пространство функций $\tilde{\varphi}(\mathbf{P}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\int |\tilde{\varphi}(\mathbf{P}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)|^2\, d\nu(\mathrm{int})\, d^3\mathbf{P} < \infty, \tag{28}$$

а H_{int} — пространство функций $\chi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} |\chi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)|^2\, d\nu(\mathrm{int}) < \infty. \tag{29}$$

Рассмотрим случай, когда частицы 1 и 2 взаимодействуют, а частица 3 свободна. Тогда представление группы Пуанкаре является тензорным произведением представления, описывающего взаимодействующую систему (12), и представления, описывающего свободную частицу 3. В рамках формализма прямого интеграла [54, 55] можно найти унитарный оператор $\mathcal{U}_{12,3}$ из H в $\widetilde{H}$, такой, что генераторы представления в $\widetilde{H}$ имеют «канонический» вид [ср. с (4) и (11)]:

$$\mathbf{P}_{12,3} = \mathbf{P}, \quad E_{12,3} = (M_{12,3}^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}, \quad \mathbf{M}_{12,3} = \mathbf{M} = \mathbf{l}(\mathbf{P}) + \mathbf{S},$$
$$\mathbf{N}_{12,3} = -i(M_{12,3}^2 + \mathbf{P}^2)^{1/4}\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}}(M_{12,3}^2 + \mathbf{P}^2)^{1/4} + \frac{\mathbf{S}\times\mathbf{P}}{M_{12,3} + (M_{12,3}^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}}. \tag{30}$$

Здесь оператор спина трехчастичной системы действует в H_{int} и имеет стандартный вид $\mathbf{S} = \mathbf{l}(\mathbf{k}_1) + \mathbf{l}(\mathbf{k}_2) + \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3$ (из трех импульсов $\mathbf{k}_i$ лишь два независимы), а массовый оператор $M_{12,3}$ также действует лишь в H_{int} и представляется в виде $M_{12,3} = M + V_{12}$, где под V_{12} мы будем понимать действие оператора (23), ограниченного на H_{int}. Опишем более подробно, как определяется такое ограничение.

По аналогии с (6) введем величины

$$\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k}_{12} = \mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{Q}_{12}}{M_{12}}\omega(\mathbf{k}_1) + \frac{(\mathbf{Q}_{12}\mathbf{k}_1)\mathbf{Q}_{12}}{M_{12}(E_{12}+M_{12})}, \tag{31}$$

где $E_{12} = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$, $M_{12} = (E_{12}^2 - \mathbf{Q}_{12}^2)^{1/2}$. Таким образом, $\mathbf{Q}_{12}$ и $\mathbf{k}_{12}$ являются соответственно полным и относительным импульсом для системы $\{1, 2\}$ в с. ц. и. трехчастичной системы. В этих переменных пространство H_{int} реализуется как пространство функций $\chi(\mathbf{Q}_{12}, \mathbf{k}_{12}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\int |\chi(\mathbf{Q}_{12}, \mathbf{k}_{12}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)|^2 \rho(Q_{12}, k_{12})\, d^3\mathbf{Q}_{12}\, d^3\mathbf{k}_{12} < \infty, \tag{32}$$

где $Q_{12} = |\mathbf{Q}_{12}|$, $k_{12} = |\mathbf{k}_{12}|$, $\rho(Q_{12}, k_{12}) = [4\omega(k_{12})\,\omega(Q_{12}) \times (4m^2 + 4k_{12}^2 + Q_{12}^2)^{1/2}]^{-1}$. Обозначим далее $\mathcal{U}_{12}$ оператор $\mathcal{U}$, определенный в предыдущем разделе с заменой в нем $\mathbf{P}$ и $\mathbf{k}$ на $\mathbf{Q}_{12}$ и $\mathbf{k}_{12}$ соответственно, а w_{12} — оператор, который действует по переменным $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, σ_1, σ_2 так же, как оператор w действует по $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, σ_1, σ_2. Иначе говоря, оператор w_{12} не действует по переменным $\mathbf{Q}_{12}$, σ_3, а его действие на функции от $\mathbf{k}_{12}$, σ_1, σ_2 дается формулой [ср. с (17)]:

$$w_{12}\chi(\mathbf{k}_{12}) = \int w_{12}(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}'_{12})\,\chi(\mathbf{k}'_{12})\,\frac{d^3\mathbf{k}'_{12}}{4\omega(k'_{12})^2}, \tag{33}$$

где $w_{12}(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}'_{12}) = w(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}'_{12})$. Если мы обозначим $v_{12}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — ядро оператора v, определенного из экспериментальных данных для системы $\{1, 2\}$ по уравнению (19), то вместо (20) будем иметь

$$w_{12}(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}'_{12}) = 16m\omega(k_{12})\,\omega(k'_{12})\,v_{12}(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}'_{12}). \tag{34}$$

С учетом этих определений можем теперь записать оператор V_{12} в виде

$$V_{12} = (4m^2 + 4k_{12}^2 + \mathcal{U}_{12} w_{12} \mathcal{U}_{12}^{-1} + Q_{12}^2)^{1/2} - (4m^2 + 4k_{12}^2 + Q_{12}^2)^{1/2}. \quad (35)$$

Обозначим через $\tilde{\Gamma}^i\,(M_{12,\,3})$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ генераторы (30) в $\tilde{H}$ как функции от $M_{12,\,3}$. Тогда генераторы рассматриваемого представления в H имеют вид

$$\Gamma^i_{12,\,3} = \mathcal{U}_{12,\,3} \tilde{\Gamma}^i\,(M_{12,\,3})\, \mathcal{U}^{-1}_{12,\,3}. \quad (36)$$

Возникает следующий вопрос. Как построить генераторы представления для случая, когда все частицы попарно взаимодействуют друг с другом? Используя метод пакующих операторов Соколова [40], это можно сделать следующим образом [54, 55]. Обозначим

$$\hat{M} = M + \sum_{\alpha} V_{\alpha}, \quad (37)$$

где V_{α} при $\alpha = 31$ и $\alpha = 23$ определяются в полной аналогии с V_{12}. Далее, допустим, что из операторов $\mathcal{U}_{12,\,3}$, $\mathcal{U}_{31,\,2}$ и $\mathcal{U}_{23,\,1}$, определенных для случаев, когда лишь одна пара частиц взаимодействует между собой, мы составили унитарный оператор $\hat{\mathcal{U}}$, такой, что если только частицы 1 и 2 взаимодействуют между собой, то $\hat{\mathcal{U}}$ переходит в $\mathcal{U}_{12,\,3}$ и т. д. Тогда генераторы искомого представления, удовлетворяющие условиям разделимости и нужным коммутационным соотношениям, можно выбрать в виде

$$\hat{\Gamma}^i = \hat{\mathcal{U}} \hat{\tilde{\Gamma}}^i\,(\hat{M})\, \hat{\mathcal{U}}^{-1}. \quad (38)$$

Оператор (37) является как раз тем трехчастичным массовым оператором, о котором речь шла во введении. Существенно, что разделимость во всех десяти генераторах приводит к тому, что операторы v_{α} входят в выражение для $\hat{M}$ под знаком корня. Для вариантов релятивистских трехчастичных уравнений, выведенных до сих пор в рамках диаграммного подхода (см. [41—43] и цитируемые там работы), это не имеет места. Разумеется, в нерелятивистском пределе операторы V_{α} переходят в v_{α}. Что же касается явного вида операторов $\mathcal{U}_{12,\,3}$, $\hat{\mathcal{U}}$ и т. д., то он нам нужен лишь если мы рассматриваем нашу трехчастичную систему как составную часть более сложной системы (например, при вычислении энергии связи N-частичной системы при $N \geqslant 4$ [59]). Если же нас интересует задача трех тел, то единственное, что требуется при учете лишь парных взаимодействий, — знание оператора $\hat{M}$ как функции операторов v_{α}. При этом задача нахождения энергии связи тритона сводится к задаче на собственное значение оператора $\hat{M}$ в H_{int}:

$$\hat{M}\chi = (3m + \varepsilon)\,\chi, \tag{39}$$

где ε — энергия связи ($\varepsilon < 0$).

Введем обозначения [ср. с (8) и (9)]

$$W_{12} = \left(1 + \frac{Q_{12}^2}{M_{12}^2}\right)^{1/4} w_{12} \left(1 + \frac{Q_{12}^2}{M_{12}^2}\right)^{-1/4}; \tag{40}$$

$$U_{12} = \gamma\,(\mathbf{Q}_{12},\ \boldsymbol{\sigma}_1,\ \mathbf{k}_{12})\,\gamma\,(\mathbf{Q}_{12},\ \boldsymbol{\sigma}_2,\ -\mathbf{k}_{12}). \tag{41}$$

Тогда оператор (35) представляется в виде

$$V_{12} = (4m^2 + 4k_{12}^2 + U_{12}W_{12}U_{12} + Q_{12}^2)^{1/2} - (4m^2 + 4k_{12}^2 + Q_{12}^2)^{1/2} \tag{42}$$

и, как следует из (33) и (34), действие оператора W_{12} — в виде

$$W_{12}\chi\,(\mathbf{Q}_{12},\ \mathbf{k}_{12}) = 4m \int \left(\frac{4m^2 + 4k_{12}^2 + Q_{12}^2}{4m^2 + 4k_{12}'^2 + Q_{12}^2}\right)^{1/4} \times$$
$$\times \left[\frac{\omega\,(k_{12})}{\omega\,(k_{12}')}\right]^{1/2} v_{12}\,(\mathbf{k}_{12},\ \mathbf{k}_{12}')\,\chi\,(\mathbf{Q}_{12},\ \mathbf{k}_{12}')\,d^3\mathbf{k}_{12}', \tag{43}$$

где предполагается, что функция $\chi\,(\mathbf{Q}_{12},\ \mathbf{k}_{12})$ является спинором по переменным σ_1, σ_2 и σ_3. Разумеется, аналогичным образом можно определить операторы U_α и W_α, которые имеют такой же вид в соответствующих переменных $\mathbf{Q}_\alpha$ и $\mathbf{k}_\alpha$.

Массовый оператор системы трех нуклонов в приближении $1/m^2$. Поскольку мы хотим вычислить поправку порядка $1/m^2$ к массовому оператору (1) в стандартном подходе, мы должны вначале, как и в нерелятивистском случае, выбрать в качестве двух независимых импульсов не $\{\mathbf{k}_\alpha,\ \mathbf{Q}_\alpha\}$ при каком-либо α, а $\{\mathbf{q}_\alpha,\ \mathbf{Q}_\alpha\}$, где [ср. с (14)] $\mathbf{q}_{12} = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$ и аналогично определяются $\mathbf{q}_\alpha$ при других α. Далее, от пространства функций, удовлетворяющих условию (32), мы должны перейти к пространству H_{int}^{nr} — пространству функций $\Psi\,(\mathbf{q}_\alpha,\ \mathbf{Q}_\alpha,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$, таких, что

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \int |\,\Psi\,(\mathbf{q}_\alpha,\ \mathbf{Q}_\alpha,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)\,|^2\,d^3\mathbf{Q}_\alpha\,d^3\mathbf{q}_\alpha. \tag{44}$$

Явный вид всех операторов в H_{int}^{nr} легко получается из соотношений [ср. с (15)]

$$\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha - \frac{(\mathbf{Q}_\alpha\mathbf{q}_\alpha)\,\mathbf{Q}_\alpha}{8m^2}, \quad \left|\frac{\partial^3\mathbf{k}_\alpha}{\partial^3\mathbf{q}_\alpha}\right| = 1 - \frac{Q_\alpha^2}{8m^2}, \tag{45}$$

верных в первом приближении по $1/m^2$. В частности, легко вывести, что в рассматриваемом приближении действие оператора W_α (более точно соответствующего унитарно преобразованного оператора) в H_{int}^{nr} дается формулой

$$W_\alpha = 4m\left(v_\alpha - \left[\frac{(\mathbf{Q}_\alpha\mathbf{q}_\alpha)}{8m^2}\left(\mathbf{Q}_\alpha\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}_\alpha}\right),\ v_\alpha\right]\right), \tag{46}$$

причем здесь и далее мы, как обычно, используем символ [. . .] для коммутатора и {. . .} — для антикоммутатора. Легко видеть, что в рассматриваемом приближении

$$U_\alpha = 1 - \frac{i}{8m^2}\,\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{Q}_\alpha \times \mathbf{q}_\alpha), \tag{47}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{12} = \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2$ и аналогично определяются другие $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$. Поэтому, с учетом формул (46) и (47), разложение корней в (42) приводит к следующему выражению для действия V_α в $H_{\rm int}^{nr}$ (в приближении $1/m^2$):

$$V_\alpha = v_\alpha + V'_\alpha,\quad V'_\alpha = -\frac{1}{4m}v_\alpha^2 - \frac{1}{16m^2}\times$$
$$\times\{v_\alpha,\ (4q_\alpha^2 + Q_\alpha^2)\} - \frac{1}{8m^2}\left[(\mathbf{Q}_\alpha\mathbf{q}_\alpha)\left(\mathbf{Q}_\alpha\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}_\alpha}\right),\ v_\alpha\right] +$$
$$+\frac{i}{8m^2}\left[\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{Q}_\alpha\times\mathbf{q}_\alpha),\ v_\alpha\right]. \tag{48}$$

Легко видеть, что в переменных $\{k_\alpha,\ Q_\alpha\}$

$$M = (4m^2 + 4k_\alpha^2 + Q_\alpha^2)^{1/2} + \omega(Q_\alpha). \tag{49}$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом приближении

$$M = 3m + T^{nr} + T',\quad T^{nr} = \frac{1}{m}\left(q_\alpha^2 + \frac{3}{4}Q_\alpha^2\right),$$
$$T' = -\frac{1}{8m^3}\left[2q_\alpha^4 + q_\alpha^2 Q_\alpha^2 + 2(\mathbf{q}_\alpha\mathbf{Q}_\alpha)^2 + \frac{9}{8}Q_\alpha^4\right]. \tag{50}$$

Поэтому с учетом формул (1), (37), (48) и (50) и того, что $v_\alpha = v_\alpha^{nr}$ (см. разд. 2) мы имеем

$$\hat{M} = 3m + \hat{M}^{nr} + T' + \sum_\alpha V'_\alpha, \tag{51}$$

а в V'_α можно заменить v_α на v_α^{nr}.

Мы видим, что поправка порядка $1/m^2$ к $\hat{M}^{nr}$, возникающая вследствие учета релятивистских коммутационных соотношений, имеет, вообще говоря, такой же порядок, как и релятивистские члены, включаемые в $\hat{M}^{nr}$, и поэтому стандартный подход является, вообще говоря, не вполне оправданным (см. обсуждение во введении). Впервые поправки порядка $1/m^2$ к $\hat{M}$ рассматривались Ю. М. Широковым [70], однако в его работе вычислены не все члены в (51). Разумеется, при вычислении T' нет проблем и вопрос заключается лишь в членах, входящих в V'_α. Подробно этот вопрос рассматривается, например, в [38, 57].

РП к энергии связи тритона в первом приближении по $1/m^2$. Пусть φ — волновая функция тритона, вычисленная в рамках стандартного подхода:

$$\hat{M}^{nr}\varphi = \varepsilon_0\varphi, \tag{52}$$

где ε_0 — нерелятивистское значение энергии связи ($\varepsilon_0 < 0$). Тогда из (39) и (51) следует, что РП к энергии связи в первом приближении по $1/m^2$ дается формулой

$$\Delta\varepsilon = \langle \varphi \mid T' + \sum_\alpha V'_\alpha \mid \varphi \rangle. \tag{53}$$

Рассмотрим случай, когда функция φ находится при помощи решения системы уравнений Фаддеева

$$(T^{nr} - \varepsilon_0)\,\varphi_\alpha = -v_\alpha^{nr}\varphi, \quad \varphi = \sum_\alpha \varphi_\alpha, \quad \alpha = 12,\,31,\,23. \tag{54}$$

Тогда из (48), (53) и (54) легко получить, что

$$\Delta\varepsilon = \langle \varphi \mid T' \mid \varphi \rangle + \frac{1}{4m^2}\,\mathrm{Re}\sum_\alpha \Big\{ \langle \varphi \mid \Big[2q_\alpha^2 + Q_\alpha^2 + (\mathbf{Q}_\alpha \mathbf{q}_\alpha)\Big(\mathbf{Q}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\alpha}\Big) - $$
$$- i\sigma_\alpha (\mathbf{Q}_\alpha \times \mathbf{q}_\alpha)\Big] (T^{nr} - \varepsilon_0) \mid \varphi_\alpha \rangle - m \, \| (T^{nr} - \varepsilon_0)\,\varphi_\alpha \|^2 \Big\}. \tag{55}$$

Используем теперь то, что если ввести дополнительно изоспиновые переменные, то в случае тритона все φ_α являются одинаковыми функциями от «своих» переменных и, следовательно, могут быть получены друг из друга при помощи циклической перестановки нуклонов. Кроме того, все φ_α антисимметричны относительно перестановки соответствующей пары частиц (например, $\varphi_{21} = -\varphi_{12}$) и, как легко видеть, $\mathbf{Q}_\alpha \times \mathbf{q}_\alpha$ одинаково при всех $\alpha = 12,\,31,\,23$. Поэтому из (50) и (55) получаем, что

$$\Delta\varepsilon = -\frac{3}{4m^3}\langle \varphi_{12} \mid \frac{3}{4}Q^4 + Q^2 m \mid \varepsilon_0 \mid + m^2\varepsilon_0^2 \mid \varphi_{12} \rangle +$$
$$+ \frac{3}{4m^3}\,\mathrm{Re}\,\langle \varphi_{31} + \varphi_{23} \mid q^4 + 2q^2Q^2 + (\mathbf{q}\mathbf{Q})^2 + \frac{3}{16}Q^4 +$$
$$+ (2q^2 + Q^2)\, m \mid \varepsilon_0 \mid + m \Big[(\mathbf{Q}\mathbf{q}) \Big(\mathbf{Q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\Big) - i\sigma_{12} (\mathbf{Q} \times \mathbf{q}) \Big] \times$$
$$\times (T^{nr} + \mid \varepsilon_0 \mid) \mid \varphi_{12} \rangle, \tag{56}$$

где для краткости мы обозначаем $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{12}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{12}$.

Мы видим, что РП к энергии связи может быть вычислена прямым интегрированием, если известны фаддеевские компоненты нерелятивистской ВФ тритона (точнее, фаддеевские компоненты ВФ тритона, вычисленные в рамках стандартного подхода) и нерелятивистская энергия связи. Таким образом, в рассматриваемом приближении нет нужды в решении релятивистских уравнений Фаддеева. Однако, как отмечалось во введении, вопрос о точности первого приближения по $1/m^2$ может быть выяснен лишь при сравнении $\Delta\varepsilon$ с результатом точного расчета. Что же касается технической части вычисления $\Delta\varepsilon$, то ясно, что здесь желательно иметь формулу, непосредственно выражающую эту величину через разложение фаддеевских компонент нерелятивистской задачи по парциальным волнам, и такая формула будет приведена ниже.

3. ПАРЦИАЛЬНО-ВОЛНОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА

Формулировка релятивистской задачи трех тел в терминах фаддеевских компонент. По аналогии с обычным случаем вместо уравнения (39) с оператором $\hat{M}$ в виде (37) можно решать систему уравнений для фаддеевских компонент χ_α:

$$(M+V_\alpha-3m-\varepsilon)\chi_\alpha=-V_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}\chi_\beta, \tag{57}$$

где α и β пробегают значения 12, 31, 23. Будем считать, что χ_α являются также функциями изоспиновых переменных, которые мы будем обозначать τ_i ($i=1, 2, 3$), а при любом фиксированном значении этих переменных χ_α принадлежат «релятивистскому» пространству H_{int} [см. (32)]. Тогда в случае тритона все χ_α получаются друг из друга при помощи циклической перестановки частиц и достаточно вместо трех уравнений (57) решать одно из них, например:

$$(M+V-s)\chi=-V\hat{P}\chi, \tag{58}$$

где $s=3m+\varepsilon$, здесь и далее $\chi\equiv\chi_{12}$, $V=V_{12}$, а оператор циклической перестановки $\hat{P}$ (от слова *permutation*) действует по правилу: $\hat{P}\chi_{12}=\chi_{31}+\chi_{23}$. От уравнения (58) можно перейти к уравнению

$$\chi=-R(s)V\hat{P}\chi, \tag{59}$$

где $R(s)=(M+V-s)^{-1}$ — резольвента оператора $M+V$, или к уравнению

$$\chi=-R_0(s)T(s)\hat{P}\chi, \tag{60}$$

где $T(s)=V-VR(s)V$, а $R_0(s)$ — резольвента оператора M. Существенно, что в трехчастичную задачу входит T-матрица для оператора $M+V$, а не двухчастичная t-матрица, как в стандартном подходе (это впервые отмечено в [46]).

Для явного решения уравнений (58) — (60) необходимо разложить функцию χ по некоторому базису. В стандартном подходе базис характеризуется обычно квантовыми числами $\{LSJlj\}$, определяемыми следующим образом: L — относительный орбитальный момент частиц 1 и 2; S — спин системы $\{1, 2\}$; J — полный момент системы $\{1, 2\}$, возникающий при сложении моментов L и S; l — орбитальный момент частицы 3 относительно системы $\{1, 2\}$; j — полный момент частицы 3, возникающий при сложении l со спином частицы 3, равным $^1/_2$. При этом учитывается действие двухчастичного оператора взаимодействия лишь в состояниях с конечным числом величин $\{LSJ\}$.

В релятивистском случае оператор, определяющий взаимодействие двух частиц в их с. ц. и., входит в трехчастичную задачу, будучи унитарно-преобразованным при помощи оператора U_{12}. Легко видеть, что U_{12} является вигнеровским вращением, описывающим преобразование спиновых переменных при переходе системы $\{1, 2\}$ от ее с. ц. и. в систему, в которой полный импульс частиц $\{1, 2\}$ равен $\mathbf{Q}_{12}$. Поэтому естественно ввести функцию $\tilde{\chi}$, такую, что $\chi = U_{12}\tilde{\chi}$, и разлагать по базису $\{LSJlj\}$ не χ, а $\tilde{\chi}$.

Поскольку χ (и, следовательно, $\tilde{\chi}$) должна быть антисимметрична относительно перестановки частиц 1 и 2, то квантовые числа L и S определяют изотопический спин системы $\{1, 2\}$, который, складываясь с изотопическим спином частицы 3 (равным 1/2), должен дать значение 1/2 для изотопического спина тритона.

Будем обозначать через $C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}$ коэффициент Клебша — Гордана, возникающий при сложении моментов j_1 и j_2 в полный момент j. Будем считать, для определенности, что рассматриваемая трехнуклонная система находится в состоянии, в котором z-проекции полного момента и полного изотопического спина равны 1/2. Учитывая сказанное выше и то, что спин тритона равен 1/2, мы можем теперь представить функцию χ в виде

$$\chi = U_{12}\sum_n C^{1/2\,1/2}_{J\mu j\nu} C^{J\mu}_{L\rho S\sigma} Y_{L\rho}(\mathbf{v}_{12})\, C^{S\sigma}_{1/2\xi 1/2\eta}\chi_\xi(\sigma_1)\,\chi_\eta(\sigma_2)\, C^{j\nu}_{l\lambda 1/2\varepsilon}\times$$
$$\times Y_{l\lambda}(-\mathbf{v}_3)\,\chi_\varepsilon(\sigma_3)\,\chi_{LS}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\,\chi_n(k, Q). \tag{61}$$

В этой формуле считается, что n определяет номер канала с числами $\{LSJlj\}$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{12}$, $k = |\,\mathbf{k}\,|$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{12}$, $Q = |\,\mathbf{Q}\,|$, $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{k}/k$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{Q}/Q$, по повторяющимся индексам проекций моментов предполагается суммирование, $\chi_\xi(\sigma_i)$ является стандартной собственной функцией оператора $(\mathbf{s}_i)_z$ с собственным значением ξ, $Y_{L\rho}(\mathbf{v}_{12})$ — стандартная сферическая функция [см. формулу (71)], а явная зависимость от изоспиновых переменных τ_i определяется числами L и S. Легко видеть, что

$$\chi_{LS}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,[2\chi_+(\tau_1)\,\chi_+(\tau_2)\,\chi_-(\tau_3) - \chi_+(\tau_1)\,\times$$
$$\times\,\chi_-(\tau_2)\,\chi_+(\tau_3) - \chi_-(\tau_1)\,\chi_+(\tau_2)\,\chi_+(\tau_3)], \tag{62}$$

если $L+S$ — четное, и

$$\chi_{LS}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\chi_+(\tau_1)\,\chi_-(\tau_2) - \chi_-(\tau_1)\,\chi_+(\tau_2)]\,\chi_+(\tau_3), \tag{63}$$

если $L+S$ — нечетное, причем в индексах мы для краткости пишем $\pm$ вместо $\pm 1/2$. Знак «минус» в аргументе сферической функции $Y_{l\lambda}$ связан с тем, что импульс частицы 3 в с. ц. и. трехчастичной системы равен $-\mathbf{Q}$. Разумеется, можно было бы опустить этот знак, введя в $\chi_n(k, Q)$ множитель $(-1)^l$.

Из (61) — (63) следует, что χ определяется набором функций от двух переменных $\{\chi_n(k, Q)\}$, причем нормировочный интеграл для χ

имеет вид

$$\|\chi\|^2 = \sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(Q, k)\, \chi_n(k, Q)^2\, k^2 Q^2\, dk\, dQ, \tag{64}$$

поскольку, как будет ясно из дальнейшего, функции $\chi_n(k, Q)$ можно выбрать действительными. Смысл разложения (61) заключается в том, что если двухчастичный оператор взаимодействия действует лишь в каналах с номерами $n \leqslant N$, то уравнения (58) — (60) сводятся к системе уравнений для N функций $\chi_1(k, Q), \ldots, \chi_N(k, Q)$, т. е. можно положить $\chi_n = 0$ при $n > N$. Для того чтобы перейти к указанной системе уравнений, мы должны для операторов A, входящих в (58) — (60), выяснить следующее. Если некоторая функция Ψ определяется при помощи разложения (61) набором $\{\Psi_1(k, Q), \ldots, \Psi_N(k, Q)\}$, то каков набор $\{\Psi'_1(k, Q), \ldots, \Psi'_N(k, Q)\}$, определяющий функцию $\Psi' = A\Psi$? Ниже мы увидим, что наибольшее усложнение по сравнению со стандартным случаем возникает в случае оператора $\hat{P}$.

Парциально-волновое разложение оператора $\hat{\mathbf{P}}$. Если функция χ представлена в виде (61), то очевидно, что $\hat{P}\chi = \chi_{31} + \chi_{23}$, где

$$\chi_{31} = U_{31} \sum_{n'} C^{1/2\,1/2}_{J'\mu'j'\nu'} C^{J'\mu'}_{L'\rho'S'\sigma'} Y_{L'\rho'}\left(\frac{\mathbf{k}_{31}}{k_{31}}\right) C^{S'\sigma'}_{1/2\xi'1/2\eta'} \chi_{\xi'}(\sigma_3)\, \chi_{\eta'}(\sigma_1) \times$$

$$\times C^{j'\nu'}_{l'\lambda'1/2\varepsilon'} Y_{l'\lambda'}\left(-\frac{\mathbf{Q}_{31}}{Q_{31}}\right) \chi_{\varepsilon'}(\sigma_2)\, \chi_{L'S'}(\tau_3, \tau_1, \tau_2)\, \chi_{n'}(k_{31}, Q_{31}), \tag{65}$$

и аналогично определяется χ_{23}. Поэтому если функция $\hat{P}\chi = \varphi$ определяется набором $\{\varphi_1(k, Q), \ldots, \varphi_N(k, Q)\}$, то из (61) — (63) следует, что

$$\varphi_n(k, Q) = \sum_{n'} C^{1/2\,1/2}_{J\mu j\nu} C^{J\mu}_{L\rho S\sigma} C^{S\sigma}_{1/2\xi 1/2\eta} \times$$

$$\times C^{j\nu}_{l\lambda 1/2\varepsilon} C^{1/2\,1/2}_{J'\mu'j'\nu'} C^{J'\mu'}_{L'\rho'S'\sigma'} C^{S'\sigma'}_{1/2\xi'1/2\eta'} \times$$

$$\times C^{j'\nu'}_{l'\lambda'1/2\varepsilon'} \int d^2\nu_{12} \int d^2\nu_3 Y_{L\rho}(\boldsymbol{\nu}_{12})^* \times$$

$$\times Y_{l\lambda}(-\boldsymbol{\nu}_3)^*\, Y_{L'\rho'}\left(\frac{\mathbf{k}_{31}}{k_{31}}\right) Y_{l'\lambda'}\left(-\frac{\mathbf{Q}_{31}}{Q_{31}}\right) \times$$

$$\times f_{LSL'S'}\, (\gamma_{12}^{-1}\gamma_{13})_{\xi\eta'}\, (\gamma_{21}^{-1})_{\eta\varepsilon'}\, (\gamma_{31})_{\varepsilon\xi'}\, \chi_{n'}(k_{31}, Q_{31}) + (\ldots), \tag{66}$$

где приняты следующие обозначения [ср. (9) и (41)]:

$$\gamma_\alpha = \frac{(E_\alpha + M_\alpha)(\omega(k_\alpha) + m) + Q_\alpha k_\alpha + i\sigma_\alpha(\mathbf{Q}_\alpha \times \mathbf{k}_\alpha)}{[2(E_\alpha + M_\alpha)(\omega(k_\alpha) + m)(E_\alpha\omega(k_\alpha) + M_\alpha m + Q_\alpha k_\alpha)]^{1/2}}, \tag{67}$$

M_α и E_α — масса и энергия пары α в с. ц. и. трех частиц, а α может принимать значения 12, 21, 31, 13. Далее, $(\gamma_\alpha)_{\xi\eta'}$ означает матричный элемент матрицы γ_α между состояниями с собственным значением спина ξ и η', т. е. $(\gamma_\alpha)_{\xi\eta'} = \langle \xi \mid \gamma_\alpha \mid \eta' \rangle$. Предполагается, что все векторы в (66) выражены через $\mathbf{k}$ и $\mathbf{Q}$, и тогда после интегрирования по $\mathbf{v}_{12}$ и $\mathbf{v}_3$ остается лишь зависимость от k и Q. Легко видеть, что $f_{LS'S'} = \langle \chi_{LS}(\tau_3, \tau_1, \tau_2) \mid \chi_{L'S'}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \rangle$ равно $-1/2$, если $L + S + L' + S'$ четное, а в остальных случаях равно $(\sqrt{3}/2) \times \times (-1)^{L+S}$. Наконец, $(\ldots)$ в формуле (66) обозначен вклад от χ_{23}, который вычисляется аналогично. Если выписать этот вклад явно и в интеграле сделать замену переменных $\mathbf{v}_{12} \to -\mathbf{v}_{12}$ (при этом $\mathbf{k}_{23}$ переходит в $\mathbf{k}_{13} = -\mathbf{k}_{31}$ и т. д.), то можно убедиться, что $(\ldots)$ равно вкладу от χ_{31}, выписанному явно в (66).

Из физических соображений ясно, что результат для $\varphi_n(k, Q)$ не изменится, если считать, что z — проекция спина тритона равна $-1/2$, а не $1/2$. В этом можно явно убедиться следующим образом. Из дальнейших вычислений будет ясно, что структура интеграла в (66) такова, что если $\chi_{n'}(k, Q)$ действительны, то и $\varphi_n(k, Q)$ действительны. Возьмем в (66) комплексное сопряжение и учтем, что $(\gamma^*)_{\xi\eta} = (-1)^{\xi+\eta+1}\gamma_{-\xi,-\eta}$, $Y^*_{L\rho} = (-1)^{L-\rho}Y_{L,-\rho}$. Затем поменяем знаки проекции моментов во всех коэффициентах Клебша — Гордана и учтем, что $C^{j,-m}_{j_1,-m_1,j_2,-m_2} = (-1)^{j_1+j_2+j+2m}C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}$, после чего указанное свойство проверяется без труда. Поэтому формулу (66) можно преобразовать, отбросив $(\ldots)$ и заменив $C^{1/2\,1/2}_{J\mu j\nu}C^{1/2\,1/2}_{J'\mu'j'\nu'}$ на $C^{1/2\varepsilon}_{J\mu j\nu}C^{1/2\varepsilon}_{J'\mu'j'\nu'}$.

Теперь мы перейдем к новым переменным для того, чтобы явно выполнить три интегрирования из четырех, входящих в формулу (66). Заметим, что всегда можно при помощи вращения перевести векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{Q}$ в плоскость zx, причем так, что вектор $\mathbf{k}_1$ направлен вдоль оси z, угол θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{Q}$ лежит в пределах $0 \leqslant \theta \leqslant 180°$ и вращение, переводящее $\mathbf{v}_{12}$ в $\mathbf{v}_3$, производится поворотом на угол θ против часовой стрелки. Если обозначить θ' угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$, а θ'' — угол между $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{k}_1$, то $\theta' + \theta'' = \theta$, а векторы $\mathbf{v}_{12}$ и $\mathbf{v}_3$ в этой системе отсчета (обозначим их $\mathbf{v}^0_{12}$ и $\mathbf{v}^0_3$) имеют компоненты: $(\mathbf{v}^{(0)}_{12})_x = -\sin\theta'$, $(\mathbf{v}^{(0)}_{12})_z = \cos\theta'$, $(\mathbf{v}^{(0)}_3)_x = \sin\theta''$, $(\mathbf{v}^0_3)_z = \cos\theta''$. Обозначим через g элемент группы вращений, такой, что

$$\mathbf{v}_{12} = g\mathbf{v}^{(0)}_{12}, \quad \mathbf{v}_3 = g\mathbf{v}^0_3. \tag{68}$$

Этот элемент параметризуется тремя углами Эйлера. Довольно громоздкое, хотя и технически простое вычисление приводит к результату

$$d^2\mathbf{v}_{12}d^2\mathbf{v}_3 = 8\pi^2 dg \sin\theta\, d\theta, \tag{69}$$

где dg — элемент инвариантного объема на группе $SO(3)$, такой, что объем всей группы равен единице.

Далее используем формулы

$$Y_{L\rho}(g\mathbf{v}_{12}) = \sum_{\rho'} \mathscr{D}^L_{\rho\rho'}(g^*)\, Y_{L\rho'}(\mathbf{v}_{12}); \tag{70}$$

$$Y_{L\rho}(\mathbf{v}) = (-1)^{1/2(\rho+|\rho|)}\, i^L \left[\frac{2L+1}{4\pi}\,\frac{(L-|\rho|)!}{(L+|\rho|)!}\right]^{1/2} P^{|\rho|}_L(\cos\theta)\, s^{i\rho\varphi}, \tag{71}$$

где $\mathscr{D}^j_{mm'}(g)$ — матрица неприводимого представления группы $SO(3)$ со спином j; θ и φ — полярные углы, характеризующие единичный вектор $\mathbf{v}$, а $P_L^{|\rho|}$ — присоединенный полином Лежандра. Если использовать также известные соотношения ортогональности для $\mathscr{D}$-функций и формулу для разложения их произведения по $\mathscr{D}$-функциям, то в нерелятивистском случае этих формул достаточно, однако в релятивистском случае возникают значительные усложнения в связи с тем, что в (66) входят γ-матрицы, учитывающие вигнеровские вращения. Для их преобразования мы используем вначале формулу

$$(\mathrm{i}\sigma\mathbf{v})_{\xi\eta} = -(4\pi)^{1/2} C^{1/2\eta}_{1\delta 1/2\xi} Y_{1\delta}(\mathbf{v}). \tag{72}$$

Тогда из (66), (67), (69) — (71) и известных формул для $\mathscr{D}$-функций следует, что функции $\varphi_n(k, Q)$ действительны, если $\chi_n(k, Q)$ действительны, поскольку коэффициенты Клебша — Гордана действительны, а ВФ тритона описывается лишь состояниями, в которых $L+l$ четное. Поэтому формула (66) действительно может быть преобразована, как указано выше. Используя (70) и то, что вектор $\mathbf{v}_3^{(0)} \times \mathbf{v}_{12}^{(0)}$, очевидно, имеет компоненты (0, —1, 0), получаем

$$\{\mathrm{i}\sigma(\mathbf{Q}\times\mathbf{k})\}_{\xi\eta} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,|\mathbf{Q}\times\mathbf{k}| \sum_{\delta'=\pm 1} C^{1/2\eta}_{1\delta 1/2\xi}\mathscr{D}^1_{\delta\delta'}(g) \tag{73}$$

(напомним, что по повторяющимся индексам проекций момента предполагается суммирование). Поэтому, с учетом (67), члены, возникшие из-за учета вигнеровских вращений, могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}(U_{12}^{-1}U_{31})_{\xi\eta\varepsilon\xi'\eta'\varepsilon'} = (\gamma_{12}^{-1}\gamma_{13})_{\xi\eta'}(\gamma_{21}^{-1})_{\eta\varepsilon'}(\gamma_{31})_{\varepsilon\xi'} = \\ = \frac{1}{c}\left[(a_1a_4 - b^2)\,\delta_{\xi\eta'} - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} b\,(a_1+a_4)\, C^{1/2\eta'}_{1\delta_1 1/2\xi}\sum_{\delta_1'}\mathscr{D}^1_{\delta_1\delta_1'}(g)^*\right]\times \\ \times\left[a_2\delta_{\eta\varepsilon'} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} bC^{1/2\varepsilon'}_{1\delta_2 1/2\eta}\sum_{\delta_2'}\mathscr{D}^1_{\delta_2\delta_2'}(g)^*\right]\times \\ \times\left[a_3\delta_{\varepsilon\xi'} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} bC^{1/2\xi'}_{1\delta_3 1/2\varepsilon}\times\sum_{\delta_3'}\mathscr{D}^1_{\delta_3\delta_3'}(g)^*\right],\end{gathered} \tag{74}$$

где δ_i' ($i = 1, 2, 3$) пробегают лишь значения ± 1, a_i ($i = 1, 2, 3, 4$); b и c являются функциями лишь от k, Q и θ; $b = |\mathbf{Q}\times\mathbf{k}| = Qk\sin\theta$, а явный вид остальных функций будет приведен ниже [см. формулы (89)].

Введем далее следующие обозначения: $\mathbf{k}_{13} = -\mathbf{k}_{31}$, θ_{13}' — угол между векторами $\mathbf{k}_{13}$ и $\mathbf{k}_1$, θ_{13}'' — угол между $\mathbf{Q}_{13} = \mathbf{Q}_{31}$ и $\mathbf{k}_1$, $d_{LSL'S'} = (-1)^{L'+S+1} f_{LSL'S'}$. Легко видеть, что

$$d_{LSL'S'} = \begin{cases} \sqrt{3}/2, & \text{если } L+S+L'+S' \text{ нечетное;} \\ 1/2, & \text{если } L+S \text{ и } L'+S' \text{ четные;} \\ -1/2, & \text{если } L+S \text{ и } L'+S' \text{ нечетные.} \end{cases} \tag{75}$$

Для интегрирования по g в (66) мы применим вначале (70), а все произведения $\mathscr{D}$-функций преобразуем к произведениям двух $\mathscr{D}$-функций, после чего интегрирование по g производится с учетом соотношений ортогональности для $\mathscr{D}$-функций и формул (72) — (74). Далее, используем вначале соотношение ортогональности для коэффициентов Клебша — Гордана и формулы (см., например, [71, 72])

$$C_{J\mu j\nu}^{1/2\varepsilon} C_{L\rho S\sigma}^{J\mu} C_{l\lambda 1/2\varepsilon}^{j\nu} C_{L\rho l\lambda}^{K\varkappa} C_{S\sigma 1/2\varepsilon}^{ym} = [(2J+1)(2j+1)(2K+1)(2y+1)]^{1/2} \times$$
$$\times C_{K\varkappa ym}^{1/2\varepsilon} \begin{Bmatrix} L & S & J \\ l & 1/2 & j \\ K & y & 1/2 \end{Bmatrix}; \tag{76}$$

$$C_{K\varkappa ym}^{1/2\varepsilon} C_{K'\varkappa' y'm'}^{1/2\varepsilon} C_{K'\varkappa' M\delta}^{K\varkappa} = 2(-1)^{K'+M+y+\frac{1}{2}} \left(\frac{2K+1}{2y'+1}\right)^{1/2} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} y & y' & M \\ K' & K & 1/2 \end{Bmatrix} C_{M\delta ym}^{y'm'}. \tag{77}$$

При помощи этих формул можно все имеющиеся $3nj$-символы выразить через произведения $6j$-, $9j$- и $3(n-3)$ j-символов. Их дальнейшее вычисление можно провести, используя технику «разрезания диаграмм» для $3nj$-символов [71, 72], которая заключается в том, что в рассматриваемые выражения мы вставляем нужным образом подобранные соотношения ортогональности для коэффициентов Клебша — Гордана так, чтобы при изменении порядка суммирования последовательно выражать произведения этих коэффициентов через $6j$- и $9j$-символы. При этом наряду с (76) и (77) оказываются удобными формулы

$$C_{j_2m_2j_1m_1}^{jm} = (-1)^{j-j_1-j_2} C_{j_1m_1j_2m_2}^{jm}; \tag{78}$$

$$C_{j_4m_4j_5m_5}^{j_3m_3} C_{j_1m_1j_5m_5}^{j_6m_6} C_{j_6m_6j_4m_4}^{j_2m_2} = (-1)^{2j_2} [(2j_3+1)(2j_6+1)]^{1/2} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} C_{j_3m_3j_1m_1}^{j_2m_2}, \tag{79}$$

которые проверяются исходя из связи между коэффициентами Клебша — Гордана и Вигнера и свойств симметрии коэффициентов Вигнера ($3j$-символов).

Окончательный результат можно представить в следующем виде. Введем обозначения

$$F_1 = (-1)^{\frac{1}{2}(L+L'-l-l')} d_{LSL'S'} (2K+1)(2y+1)(2K'+1)(2y'+1) \times$$
$$\times \Big[(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2j+1)(2S+1) \times$$
$$\times (2L'+1)(2l'+1)(2J'+1)(2j'+1)(2S'+1) \times$$
$$\times \frac{(L-|\rho|)!\,(l-|\lambda|)!\,(L'-|\rho'|)!\,(l'-|\lambda'|)!}{(L+|\rho|)!\,(l+|\lambda|)!\,(L'+|\rho'|)!\,(l'+|\lambda'|)!}\Big]^{1/2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} L & l & K \\ \rho & \lambda & -\varkappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & l' & K' \\ \rho' & \lambda' & -\varkappa' \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} L & S & J \\ l & 1/2 & j \\ K & y & 1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ l' & 1/2 & j' \\ K' & y' & 1/2 \end{Bmatrix} \times$$

$$\times P_L^{|\rho|}(\cos\theta')\, P_l^{|\lambda|}(\cos\theta'')\, P_{L'}^{|\rho'|}(\cos\theta'_{13})\, P_{l'}^{|\lambda'|}(\cos\theta''_{13}); \tag{80}$$

$$F_2 = \frac{\delta_{KK'}\delta_{yy'}\delta_{\varkappa\varkappa'}}{(2K+1)(2y+1)} (-1)^{\varkappa + \frac{1}{2}(|\rho|+|\lambda|+|\rho'|+|\lambda'|)} \times$$

$$\times \Bigg[(-1)^{S+S'+1} a_2 a_3 (a_1 a_4 - b^2) \begin{Bmatrix} 1/2 & y & S' \\ 1/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix} - 2b^2 (a_1 a_4 - b^2) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & S \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ S' & 1/2 & y \end{Bmatrix} + b^2 (a_1 + a_4) \begin{Bmatrix} 1/2 & y & S' \\ 1/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \left(\frac{a_2 (-1)^S}{2S'+1} + \frac{a_3 (-1)^{S'}}{2S+1} \right) \Bigg] + \sqrt{3}\, b\, (-1)^{\frac{1}{2}(1+|\rho|+|\lambda|+|\rho'|+|\lambda'|)} \times$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} K' & 1 & K \\ \varkappa' & 1 & -\varkappa \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K & 1 & K' \\ \varkappa & 1 & -\varkappa' \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} y & y' & 1 \\ K' & K & 1/2 \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \Bigg\{ (a_1 a_4 - b^2)\, a_2 (-1)^{S'} \begin{Bmatrix} 1/2 & y' & S \\ 1/2 & 1/2 & S' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & y' & y \\ S & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix} +$$

$$+ (a_1 a_4 - b^2)\, a_3 (-1)^S \begin{Bmatrix} 1/2 & y & S' \\ 1/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & y & y' \\ S' & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix} -$$

$$- a_2 a_3 (a_1 + a_4) \begin{Bmatrix} 1 & y' & S' \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ S & y & 1/2 \end{Bmatrix} + b^2 (a_1 + a_4) \times$$

$$\times \Bigg[\begin{Bmatrix} 1/2 & y & 1 \\ 1/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & y' & 1 \\ 1/2 & 1/2 & S' \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 1 & y' & y \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix} - \right.$$

$$\left. - 12 (-1)^{y+\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} 1 & 1/2 & y \\ 1 & 1/2 & y' \\ 2 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \right) - \frac{(-1)^{S+S'}}{8} \delta_{y1/2}\delta_{y'1/2} \Bigg] \Bigg\} +$$

$$+ \sqrt{15}\, b^2 (-1)^{\frac{1}{2}(|\rho|+|\lambda|+|\rho'|+|\lambda'|)} \begin{Bmatrix} y & y' & 2 \\ K' & K & 1/2 \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \left[\sqrt{2} \begin{pmatrix} K' & 2 & K \\ \varkappa' & 0 & -\varkappa \end{pmatrix} - \sqrt{3} \begin{pmatrix} K' & 2 & K \\ \varkappa' & 2 & -\varkappa \end{pmatrix} - \right.$$

$$-\sqrt{3}\begin{pmatrix} K & 2 & K' \\ \varkappa & 2 & -\varkappa \end{pmatrix}\Bigg]\Bigg[(-1)^{y+y'}(a_1a_4-b^2)\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} 1/2 & y & 1 \\ 1/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1/2 & y' & 1 \\ 1/2 & 1/2 & S' \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} y & y' & 2 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{Bmatrix}+$$
$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}(a_1+a_4)\left(a_2\delta_{S'_1}\begin{Bmatrix} 3/2 & y' & S \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}\times\right.$$
$$\left.\times\begin{Bmatrix} 2 & y' & y \\ S & 1/2 & 3/2 \end{Bmatrix}+a_3\delta_{S1}\begin{Bmatrix} 3/2 & y & S' \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 & y & y' \\ S' & 1/2 & 3/2 \end{Bmatrix}\right)\Bigg]-$$
$$-\frac{\sqrt{7}}{12}b^3(a_1+a_4)(-1)^{\frac{1}{2}(1+|\rho|+|\lambda|+|\rho'|+|\lambda'|)}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} 3/2 & 3/2 & 3 \\ K' & K & 1/2 \end{Bmatrix}\delta_{y3/2}\delta_{y'3/2}\delta_{S1}\delta_{S'1}\left[\sqrt{\frac{3}{5}}\left(\begin{pmatrix} K' & 3 & K \\ \varkappa' & 1 & -\varkappa \end{pmatrix}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\begin{pmatrix} K & 3 & K' \\ \varkappa & 1 & -\varkappa' \end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix} K' & 3 & K \\ \varkappa' & 3 & -\varkappa \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} K & 3 & K' \\ \varkappa & 3 & -\varkappa' \end{pmatrix}\right)\right]; \tag{81}$$

$$F_{nn'}=\frac{1}{c}\sum_{KyK'y'}\sum_{\rho\lambda\varkappa\rho'\lambda'\varkappa'}F_1F_2=F_{nn'}(k,Q,x),\quad x=\cos\theta. \tag{82}$$

Тогда

$$\varphi_n(k,Q)=\sum_{n'=1}^{N}\int_{-1}^{1}F_{nn'}(k,Q,x)\,\chi_{n'}(k_{13},Q_{13})\,dx. \tag{83}$$

Некоторые кинематические соотношения. Для полного определения оператора $\hat{P}$ необходимо все функции от импульсных переменных, входящие в интеграл (83), выразить через независимые переменные k, Q и x. Выразим все векторы $\mathbf{k}_i$ ($i=1, 2, 3$) через $\mathbf{k}$ и $\mathbf{Q}$. Нетрудно показать, что из (31) следует

$$\begin{gathered}\mathbf{k}_1=\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{Q}+\frac{\mathbf{Q}(\mathbf{kQ})}{M_{12}(M_{12}+E_{12})},\\ \mathbf{k}_2=-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{Q}-\frac{\mathbf{Q}(\mathbf{kQ})}{M_{12}(E_{12}+M_{12})},\quad \mathbf{k}_3=-\mathbf{Q},\end{gathered} \tag{84}$$

где M_{12} и E_{12} являются функциями лишь от k и Q:

$$M_{12}=2\omega,\quad E_{12}=(M_{12}^2+Q_{12}^2)^{1/2},\quad \omega=\omega(k)=(m^2+k^2)^{1/2}. \tag{85}$$

Из (84) следует, что $|\mathbf{k}_i|$ как функции от k, Q, x имеют вид

$$\left.\begin{aligned} k_1&=|\mathbf{k}_1|=\left(k^2+(1+r)^{1/2}kQx+\frac{1}{4}Q^2+k^2rx^2\right)^{1/2};\\ k_2&=|\mathbf{k}_2|=\left(k^2-(1+r)^{1/2}kQx+\frac{1}{4}Q^2+k^2rx\right)^{1/2};\\ k_3&=|\mathbf{k}_3|=Q,\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

где мы обозначили $r = r(k, Q) = Q^2/4\omega^2$. Обозначим далее $\omega_i = \omega_i(k_i)$ энергии частиц 1, 2 и 3 в их совместной с. ц. и. Ясно, что

$$\omega_i = (m^2 + k_i^2)^{1/2} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{87}$$

где k_i определяются из (86). Обозначим w_{13} энергию частицы 1 или частицы 3 в их совместной с. ц. и. (очевидно, эти величины совпадают). Легко видеть, что

$$\omega_{13} = \frac{1}{2}[(\omega_1 + \omega_3)^2 - k_2^2]^{1/2} \tag{88}$$

и, таким образом, ω_{13} также выражено через k, Q и x.

Теперь мы можем привести явные выражения для функций a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, b и c:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = m(\omega_1 + \omega_3) + 2\omega(\omega_1 + \omega + m), \; a_2 = m(\omega_1 + \omega_2) + 2\omega(\omega_2 + \omega + m);\\ &a_3 = m(\omega_1 + \omega_3) + 2\omega_{13}(\omega_3 + \omega_{13} + m),\\ &a_4 = m(\omega_1 + \omega_3) + 2\omega_{13}(\omega_1 + \omega_{13} + m);\\ &b = kQ(1 - x^2)^{1/2}, \quad c = 16(\omega_1 + \omega_2 + 2\omega)(\omega_1 + \omega_3 + 2\omega_{13}) \times\\ &\qquad \times \omega\omega_{13}(\omega + m)(\omega_{13} + m)(\omega_1 + m)[(\omega_2 + m)(\omega_3 + m)]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Перейдем теперь к аргументам присоединенных полиномов Лежандра в формуле (80). Из (84) и (85) следует, что

$$\begin{aligned} \cos\theta' &= \frac{1}{k_1}\left[k + \frac{1}{2}Qx + kx^2((1 + r)^{1/2} - 1)\right],\\ \cos\theta'' &= \frac{1}{k_1}\left[\frac{1}{2}Q + (1 + r)^{1/2}kx\right]. \end{aligned} \tag{90}$$

Далее, по аналогии с формулой (31) можно показать, что

$$\mathbf{k}_{13} = \frac{(\omega + \omega_{13})\mathbf{k}_1 - (\omega_1 + \omega_{13})\mathbf{k}_3}{\omega_1 + \omega_3 + 2\omega_{13}}, \quad k_{13} = (\omega_{13}^2 - m^2)^{1/2}. \tag{91}$$

Поэтому из (91) следует, что

$$\cos\theta'_{13} = \frac{(\omega_3 + \omega_{13})k_1 + (\omega_1 + \omega_{13})Q\cos\theta'}{(\omega_1 + \omega_3 + 2\omega_{13})k_{13}}. \tag{92}$$

Наконец, поскольку $\mathbf{Q}_{13} = -\mathbf{k}_2$, то из (84) следует, что

$$\cos\theta''_{13} = \frac{1}{k_1k_2}\left[k^2(1 + rx^2) - \frac{1}{4}Q^2\right], \quad Q_{13} = k_2. \tag{93}$$

Условия эрмитовости оператора $\hat{P}$. Оператор $\hat{P}$ действует в гильбертовом пространстве вектор-функций $\chi = \{\chi_1(k, Q), \ldots, \chi_N(k, Q)\}$, причем норма χ определяется формулой (64). Если

$\Psi = \{\Psi_1 (k, Q), \ldots, \Psi_N (k, Q)\}$, то

$$(\Psi, \hat{P}\chi) = \sum_{n, n'=1}^{N} \int_0^\infty \int_0^\infty dk\, dQ\, k^2 Q^2 \rho (Q, k) \int_{-1}^{1} dx\, \Psi_n (k, Q)^* \times \\ \times F_{nn'} (k, Q, x)\, \chi_{n'} (k_{13}, Q_{13}), \tag{94}$$

где k_{13} и Q_{13} выражены через k, Q и x. Обозначим x_{13} косинус угла между векторами $\mathbf{k}_{13}$ и $\mathbf{Q}_{13}$. Из формул предыдущего подраздела очевидно, что наборы $\{k, Q, x\}$ и $\{k_{13}, Q_{13}, x_{13}\}$ связаны друг с другом взаимно однозначно. Такое же утверждение имеет место и относительно связи этих наборов с $\{k_{23}, Q_{23}, x_{23}\}$. Воспользуемся теперь тем, что при интегрировании функций, зависящих лишь от $\{k, Q, x\}$,

$$\rho (Q, k)\, k^2 Q^2\, dk\, dQ\, dx = \frac{1}{8\pi^2}\, d\nu \text{ (int)}, \tag{95}$$

как следует из (32). Поскольку $d\nu$ (int) не меняется при любых перестановках частиц, то мы можем заключить теперь, что левая часть (95) также обладает этим свойством, например:

$$\rho (Q, k)\, k^2 Q^2\, dk\, dQ\, dx = \rho (Q_{13}, k_{13})\, k_{13}^2 Q_{13}^2\, dk_{13}\, dQ_{13}\, dx_{13}. \tag{96}$$

Из самого определения оператора $\hat{P}$ легко следует, что этот оператор эрмитов, а из (94) и (96) следует, что достаточным условием эрмитовости является

$$F_{nn'} (k, Q, x) = F_{n'n} (k_{13}, Q_{13}, x_{13}). \tag{97}$$

Надо иметь в виду, что $F_{nn'}$ неявно зависит и от знака y-компоненты вектора $\mathbf{v}_3^{(0)} \times \mathbf{v}_{12}^{(0)}$. Можно убедиться в том, что вектор $\mathbf{Q}_\alpha \times \mathbf{k}_\alpha$ одинаков при всех $\alpha = 12, 31, 23$, и, следовательно, при перестановке любой пары частиц он меняет знак. Поэтому при проверке (97) надо в правой части заменить b на $-b$. В то же время из (89) следует, что при замене $2 \leftrightarrow 3$ мы имеем: $a_1 \leftrightarrow a_4$, $a_2 \leftrightarrow a_3$, $c \leftrightarrow c$. После этого выполнение условия (97) легко проверяется исходя из формул (80) — (82) и свойств симметрии $6j$- и $9j$-символов. Теперь ясно также, что направление оси z было первоначально выбрано вдоль $\mathbf{k}_1$ для того, чтобы симметрия между начальными и конечными состояниями выражалась формулой взаимности (97).

Выражение для релятивистской поправки к энергии связи тритона в первом приближении по $1/m^2$ через разложение фаддеевских компонент по парциальным волнам. Поскольку в формуле (56) уже выделены члены, содержащие малость $1/m^2$ по сравнению с основным вкладом, то оператор $\hat{P}$, входящий в эту формулу, может быть взят в чисто нерелятивистском приближении. В этом приближении все члены в $\hat{P}$, содержащие функцию $b (k, Q, x)$, можно опустить. Кроме того, можно везде заменить $\mathbf{k}$ на $\mathbf{q}$, функции $a_i (k, Q, x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — на $8m^2$, а функцию $c (k, Q, x)$ — на $2^{12}m^8$. В этом подразделе мы принимаем, что нерелятивистская фаддеевская компонента $\chi =$

$= \chi_{12}$ определяет функции $\chi_n(q, Q)$ по разложению (61), причем в нерелятивистском пределе $U_{12} = 1$, а для действительных функций $\chi_n(q, Q)$ мы принимаем нерелятивистскую нормировку:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \chi_n(q, Q)^2 q^2 Q^2 \, dq \, dQ < \infty. \tag{98}$$

Тогда если $\hat{P}\chi$ определяется функциями $\varphi_i(q, Q)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, то, как следует из (80) — (83):

$$\begin{gathered}
\varphi_n(q, Q) = \sum_{n'=1}^{N} \sum_{Ky} \sum_{\rho\lambda\varkappa\rho'\lambda'} (-1)^{\frac{1}{2}(L+L'-l-l'+|\rho|+|\lambda|+|\rho'|+|\lambda'|)+\varkappa+S+S'+1} \times \\
\times d_{LSL'S'}(2K+1)(2y+1)\Big[(2L+1)(2l+1)(2J+1)\times \\
\times (2j+1)(2S+1)(2L'+1)(2l'+1)(2J'+1)(2j'+1)(2S'+1)\times \\
\times \frac{(L-|\rho|)!\,(l-|\lambda|)!\,(L'-|\rho'|)!\,(l'-|\lambda'|)!}{(L+|\rho|)!\,(l+|\lambda|)!\,(L'+|\rho'|)!\,(l+|\lambda'|)!}\Big]^{1/2}\times \\
\times \begin{pmatrix} L & l & K \\ \rho & \lambda & -\varkappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & l' & K \\ \rho' & \lambda' & -\varkappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & y & S' \\ 1/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix} \times \\
\times \begin{Bmatrix} L & S & J \\ l & 1/2 & j \\ K & y & 1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ l' & 1/2 & j' \\ K & y & 1/2 \end{Bmatrix} \int_{-1}^{1} P_L^{|\rho|}(\cos\theta') \times \\
\times P_l^{|\lambda|}(\cos\theta'') P_{L'}^{|\rho'|}(\cos\theta'_{13}) P_{l'}^{|\lambda'|}(\cos\theta''_{13}) \chi_{n'}(q_{13}, Q_{13}) \, dx,
\end{gathered} \tag{99}$$

где $d_{LSL'S'}$ определяется (75). В нерелятивистском пределе значительно упрощаются также кинематические формулы, и при интегрировании в (99), как следует из (86) — (88) и (90) — (93):

$$\left.\begin{aligned}
& q_1 = k_1 = \left(q^2 + qQx + \frac{1}{4}Q^2\right)^{1/2}, \\
& {}_2 = k_2 = \left(q^2 - qQx + \frac{1}{4}Q^2\right)^{1/2}; \\
& q_{13} = \frac{1}{2}\left(q^2 + 3qQx + \frac{9}{4}Q^2\right)^{1/2}, \quad Q_{13} = \left(q^2 - qQx + \frac{1}{4}Q^2\right)^{1/2}; \\
& \cos\theta' = \frac{1}{q_1}\left(q + \frac{1}{2}Qx\right), \quad \cos\theta'' = \frac{1}{q_1}\left(qx + \frac{1}{2}Q\right); \\
& \cos\theta'_{13} = \frac{1}{2q_1q_{13}}\left(q^2 + 2qQx + \frac{3}{4}Q^2\right), \quad \cos\theta''_{13} = \frac{1}{q_1q_2}\left(q^2 - \frac{1}{4}Q^2\right).
\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Как следует из формулы (56), нам необходимо выяснить также, каким набором функций от q и Q описываются элементы $(\mathbf{qQ})^2\chi$, $(\mathbf{Qq})(\mathbf{Q}\partial/\partial\mathbf{q})\chi$ и $i\sigma_{12}(\mathbf{Q}\times\mathbf{q})\chi$. Обозначим вначале $\{\Psi_{1n}(q, Q)\}$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ набор функций, описывающих $\Psi_1 = i\sigma_{12}\times\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{q})\chi$. Расчет этих функций нетрудно провести, исходя из

(61), при помощи перехода к сферическим компонентам векторов, формулы для интеграла от произведения трех сферических функций и формулы (79). Результат расчета следующий:

$$\Psi_{1n}(q,\ Q)=2\sqrt{6}\,qQ\sum_{n'}[1-(-1)^{S+S'}]\times$$
$$\times(-1)^{\frac{1}{2}(L+l+L'+l')+j+j'}[(2L+1)(2l+1)(2j+1)(2L'+1)\times$$
$$\times(2l'+1)(2j'+2)]^{1/2}\begin{pmatrix}L & L' & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l & l' & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1 & j & j'\\ 1/2 & l' & l\end{Bmatrix}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix}1 & J & J'\\ 1/2 & j' & j\end{Bmatrix}\chi_{n'}(q,\ Q)\times$$
$$\times\begin{cases}(-1)^{J'-l+1}(2J'+1)^{1/2}\begin{Bmatrix}1 & J' & L\\ L' & 1 & 1\end{Bmatrix}, & \text{если } S=0,\ S'=1;\\ (-1)^{J-l'}(2J+1)^{1/2}\begin{Bmatrix}1 & J & L'\\ L & 1 & 1\end{Bmatrix}, & \text{если } S=1,\ S'=0.\end{cases}\qquad(101)$$

Ясно, что в формулу (101) входят лишь члены с $|S-S'|=|L-L'|=|l-l'|=1$. Поэтому оператор $i\sigma_{12}(\mathbf{Q}\times\mathbf{q})$ дает вклад, лишь если учитываются орбитальные моменты разной четности. Легко видеть также, что этот оператор дает вклад лишь при учете P-волны. Действительно, если пренебречь P-волной, то оператор $i\sigma_{12}(\mathbf{Q}\times\mathbf{q})$ может, очевидно, иметь переходы лишь между D-волнами, поскольку $\mathbf{Q}\times\mathbf{q}$ соответствует орбитальному моменту, равному единице. Но спиновые функции D-состояний симметричны относительно всех перестановок частиц (поскольку D-волна входит в ВФ тритона со спином 3/2) и оператор σ_{12}, будучи антисимметричным относительно перестановки $1\leftrightarrow 2$, не имеет переходов между такими функциями. Поскольку вероятность P-волны в тритоне порядка 0,1 % [73], то может возникнуть впечатление, что вклад члена с $i\sigma_{12}(\mathbf{Q}\times\mathbf{q})$ в (56) незначителен. В этом, однако, нет полной уверенности, поскольку интеграл, определяющий этот вклад (см. ниже), сосредоточен в основном в области значительно бо́льших импульсов, чем нормировочный интеграл для ВФ тритона.

Для описания элемента $(\mathbf{qQ})^2\chi$ мы разложим $(\mathbf{qQ})^2$ на скалярную и тензорную части:

$$(\mathbf{qQ})^2=\frac{1}{3}q^2Q^2+\left(q_iq_k-\frac{1}{3}q^2\delta_{ik}\right)\left(Q_iQ_k-\frac{1}{3}Q^2\delta_{ik}\right),\qquad(102)$$

где по $i,\ k=1,\ 2,\ 3$ предполагается суммирование. Обозначим $\{\Psi_{2n}(q,\ Q)\}$ набор функций, определяющих элемент $\left(q_iq_k-\frac{1}{3}\delta_{ik}q^2\right)\times\left(Q_iQ_k-\frac{1}{3}\delta_{ik}Q^2\right)\chi$. Используя ту же технику, что и при расчете функций $\Psi_{1n}(q, Q)$, получаем

$$\Psi_{2n}(q,\ Q)=\frac{2}{3}q^2Q^2\sum_{n'}(-1)^{\frac{1}{2}(L+l-L'-l')+S+j-j'}\times$$
$$\times[(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2j+1)(2L'+1)\times$$
$$\times(2l'+1)(2J'+1)(2j'+1)]^{1/2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}L & L' & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l & l' & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}2 & J & J'\\ S & L' & L\end{Bmatrix}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix}2 & j & j'\\ 1/2 & l' & l\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1/2 & j & J\\ 2 & J' & j'\end{Bmatrix}\chi_{n'}(q,\ Q), \qquad (103)$$

причем вклад в сумму дают лишь члены с $S' = S$.

Рассмотрим, наконец, вклад оператора $(\mathbf{Qq})$ $(\mathbf{Q}\,\partial/\partial\mathbf{q})$. Очевидно, что $\partial\chi_n(q,\ Q)/\partial\mathbf{q} = \mathbf{v}\,\partial\chi_n(q,\ Q)/\partial q$, где $\mathbf{v} = \mathbf{q}/q$. Поэтому сложности могут возникнуть лишь при действии $\nabla_v = q\,\partial/\partial\mathbf{q}$ на сферическую функцию $Y_{l'\lambda'}(\mathbf{v})$. В данном случае остается лишь тензорный вклад, поскольку $\mathbf{v}\nabla_v Y_{l'\lambda'}(\mathbf{v}) = 0$. В этом можно убедиться, исходя из теоремы Вигнера — Эккарта и известных выражений для приведенных матричных элементов операторов $\mathbf{v}$ и ∇_v (см., например, § 107 в [74] и § 7 в [75]). Исходя из этого, можно показать также, что функции $\{\Psi_{3n}(q,\ Q)\}$, определяющие элемент $(\mathbf{Qv})$ $(\mathbf{Q}\nabla_v)\,\chi$, могут быть представлены в виде

$$\Psi_{3n}(q,\ Q)=\frac{2}{3}Q^2\sum_{n'}(-1)^{\frac{1}{2}(L+l-L'-l')+S+j-j'}\times$$
$$\times[(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2j+1)\times$$
$$\times(2L'+1)(2l'+1)(2J'+1)(2j'+1)]^{1/2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}L & L' & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l & l' & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1/2 & J & j\\ 2 & j' & J'\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}J & J' & 2\\ L' & L & S\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}j & j' & 2\\ l' & l & 1/2\end{Bmatrix}\times$$
$$\times\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{4}(L+L'+1)(L'-L)\right]\chi_{n'}(q,\ Q), \qquad (104)$$

причем в сумму входят лишь члены с $S' = S$. Что же касается вкладов с $\partial\chi_n(q,\ Q)/\partial q$, то ясно, что по аналогии с (103) в ответ для $\Delta\varepsilon$ будут входить функции $\Psi_{4n}(q,\ Q)$, такие, что

$$\Psi_{4n}(q,\ Q)=\frac{2}{3}qQ^2\sum_{n'}(-1)^{\frac{1}{2}(L+l-L'-l')+S+j-j'}\times$$
$$\times[(2L+1)(2l+1)(2J+1)(2j+1)(2L'+1)(2l'+1)\times$$
$$\times(2J'+1)(2j'+1)]^{1/2}\begin{pmatrix}L & L' & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l & l' & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}2 & J & J'\\ S & L' & L\end{Bmatrix}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix}2 & j & j'\\ 1/2 & l' & l\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1/2 & J & j\\ 2 & j' & J'\end{Bmatrix}\frac{\partial\chi_{n'}(q,Q)}{\partial q}. \qquad (105)$$

Теперь из (56) получаем, что окончательное выражение для $\Delta\varepsilon$ можно представить в виде

$$\Delta\varepsilon = -\frac{3}{4m^3}\sum_{n=1}^{N}\int_0^\infty\int_0^\infty dq\,dQ q^2Q^2\Big\{\Big(\frac{3}{4}Q^4+Q^2m\mid\varepsilon_0\mid+m^2\varepsilon_0^2\Big)\times$$

$$\times\chi_n(q,\ Q)^2-\Big[q^4+\frac{7}{3}q^2Q^2+\frac{3}{16}Q^4+(2q^2+Q^2)\,m\mid\varepsilon_0\mid\Big]\times$$

$$\times\varphi_n(q,\ Q)\,\chi_n(q,\ Q)-\varphi_n(q,\ Q)\,\Psi_{2n}(q,\ Q)+\Big(q^2+\frac{3}{4}Q^2+m\mid\varepsilon_0\mid\Big)\times$$

$$\times\varphi_n(q,\ Q)\Big[\Psi_{1n}(q,Q)-\Psi_{3n}(q,Q)-\Psi_{4n}(q,Q)-$$

$$-\frac{1}{3}Q^2q\frac{\partial\chi_n(q,\ Q)}{\partial q}\Big]\Big\}. \qquad (106)$$

Релятивистская система уравнений Фаддеева для волновой функции тритона в N-канальном приближении. Теперь мы вернемся к чисто релятивистской задаче, т. е. не будем использовать разложение по степеням $1/m^2$. Наша задача сейчас — представить релятивистскую систему уравнений в виде, возможно более близком к обычному. Поэтому в окончательной формулировке мы будем работать в гильбертовом пространстве элементов $\chi = \{\chi_1(k,\ Q),\ \ldots$ $\ldots,\ \chi_N(k,\ Q)\}$, таких, что скалярное произведение элементов χ' и χ в полной аналогии с нерелятивистским случаем определяется формулой [вместо (64)]:

$$(\chi',\ \chi)=\sum_{n=1}^{N}\int_0^\infty\int_0^\infty\chi_n'(k,\ Q)^*\,\chi_n(k,\ Q)\ k^2Q^2\,dk\,dQ. \qquad (107)$$

Соответственно вместо (83) окончательная формула для оператора $\hat{P}$ следующая: если $\chi=\{\chi_1(k,\ Q),\ \ldots,\ \chi_N(k,\ Q)\}$, а $\hat{P}\chi=$ $=\{\varphi_1(k,\ Q),\ \ldots,\ \varphi_N(k,\ Q)\}$, то

$$\varphi_n(k,\ Q)=\sum_{n'=1}^{N}\int_{-1}^{1}\Big[\frac{\omega_{13}\omega_2(\omega_1+\omega_3)}{\omega\omega_3(\omega_1+\omega_2)}\Big]^{1/2}\times$$

$$\times F_{nn'}(k,\ Q,\ x)\,\chi_{n'}(k_{13},\ Q_{13})\,dx, \qquad (108)$$

где все функции от k, Q и x определены выше.

Выше мы выразили оператор V [см. формулу (42)] через оператор v, который определяется по двухчастичным данным в почти полной аналогии с нерелятивистским случаем (см. обсуждение в разд. 1). В рассматриваемом сейчас гильбертовом пространстве оператор v, как и в обычном случае, задается набором ядер $v_{nn'}(k,k')$ таких, что если $\chi=\{\chi_1(k,\ Q),\ \ldots,\ \chi_N(k,\ Q)\}$, то $v\chi$ задается набором $\{\Psi_1(k, Q), \ldots, \Psi_N(k, Q)\}$ так, что

$$\Psi_n(k, Q) = \sum_{n'} \int_0^\infty v_{nn'}(k, k')\, \chi_{n'}(k, Q)\, k^2\, dk. \tag{109}$$

Фактически в сумму (109) входят не более чем два члена, так как оператор v диагонален по квантовым числам $\{SJlj\}$. Поскольку мы считаем, что оператор v можно отождествить с v^{nr} [см. обсуждение в разд. 1], то под $v_{nn'}(k, k')$ можно понимать известные ядра для стандартных феноменологических потенциалов.

Из формул (42) и (61) следует, что в рассматриваемом гильбертовом пространстве оператор V (точнее, соответствующий унитарно преобразованный оператор) представляется уже в довольно простом виде:

$$V = (4m^2 + 4k^2 + Q^2 + 4mv)^{1/2} - (4m^2 + 4k^2 + Q^2)^{1/2}. \tag{110}$$

Введем следующие обозначения: $B = 4m^2 + 4k^2 + Q^2 + 4mv$; $B_0 = 4m^2 + 4k^2 + Q^2$; $G(s) = (B + s)^{-1}$ и $G_0(s) = (B_0 + s)^{-1}$. Применим известную формулу для квадратного корня из положительного оператора:

$$B^{1/2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1/2}} [1 - sG(s)] \tag{111}$$

(интеграл понимается как сильный пределримановых интегральных сумм) и аналогичную формулу для оператора B_0. Введем далее оператор

$$t(s) = 4m\, [v - 4mvG(s)\, v]. \tag{112}$$

Тогда

$$G(s) - G_0(s) = -G_0(s)\, t(s)\, G_0(s). \tag{113}$$

С учетом (110), (111) и (113) получаем

$$V = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty s^{1/2}\, G_0(s)\, t(s)\, G_0(s)\, ds. \tag{114}$$

Оператор $t(s)$ выражается через v следующим образом:

$$t(s) = 4m \left[1 + 4mv \frac{1}{4m^2 + 4k^2 + Q^2 + s}\right]^{-1} v. \tag{115}$$

В рассматриваемом гильбертовом пространстве этот оператор задается набором ядер $t_{nn'}(k, k'; Q^2 + s)$ и если $\chi = \{\chi_1(k, Q), \ldots, \chi_N(k, Q)\}$, а $t(s)\chi$ определяется набором $\{\Psi_1(k, Q), \ldots, \Psi_N(k, Q)\}$, то

$$\Psi_n(k, Q) = \sum_{n'} \int_0^\infty t_{nn'}(k, k'; Q^2 + s)\, \chi_{n'}(k', Q)\, k'^2\, dk'. \tag{116}$$

Поэтому из (114) следует, что ядра, определяющие оператор V, могут быть вычислены по формуле

$$V_{nn'}(k,\ k';\ Q)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{t_{nn'}(k,\ k';\ Q^2+s)\,s^{1/2}\,ds}{(4m^2+4k^2+Q^2+s)\,(4m^2+4k'^2+Q^2+s)} \tag{117}$$

и действие V имеет вид

$$(V\chi)_n(k,\ Q)=\sum_{n'}\int\limits_0^\infty V_{nn'}\ (k,\ k';\ Q)\,\chi_{n'}\ (k',\ Q)\,k'^2\,dk'. \tag{118}$$

Уравнение (58) теперь может быть представлено как система уравнений для функций $\chi_n(k,\ Q)$ $(n=1,\ \ldots,\ N)$:

$$[(4m^2+4k^2+Q^2)^{1/2}+(m^2+Q^2)^{1/2}-s]\,\chi_n(k,\ Q)+$$
$$+\sum_{n'=1}^{N}\int\limits_0^\infty V_{nn'}\ (k,\ k';\ Q)\,[\chi_{n'}(k',\ Q)+\varphi_{n'}(k',\ Q)]\,k'^2\,dk'^2=0, \tag{119}$$

где функции $\{\varphi_n(k,\ Q)\}$ выражаются через $\{\chi_n(k,\ Q)\}$ при помощи (107).

Оператор $T(s)$ в (60) определяется набором ядер $T_{nn'}(k,\ k';\ Q,\ s)$, так что

$$(T(s)\,\chi)_n(k,\ Q)=\sum_{n'}\int\limits_0^\infty T_{nn'}(k,\ k';\ Q,\ s)\,\chi_{n'}(k',\ Q)\,k'^2\,dk'. \tag{120}$$

Эти ядра должны быть определены из соотношения

$$T(s)=\left[1+V\frac{1}{(4m^2+4k^2+Q^2)^{1/2}+(m^2+Q^2)^{1/2}-s}\right]^{-1}V. \tag{121}$$

Поэтому уравнение (60) может быть представлено в виде следующей системы уравнений для функций $\chi_n(k,\ Q)$ $(n=1,\ \ldots,\ N)$:

$$\chi_n(k,\ Q)=-[(4m^2+4k^2+Q^2)^{1/2}+(m^2+Q^2)^{1/2}-s]^{-1}\times$$
$$\times\sum_{n'=1}^{N}\int\limits_0^\infty T_{nn'}\ (k,\ k';\ Q,\ s)\,\varphi_{n'}(k',\ Q)\,k'^2\,dk' \tag{122}$$

или в виде

$$\chi=-A(s)\,\chi; \tag{123}$$

$$(A(s)\,\chi)_n(k,\ Q)=\sum_{n'=1}^{N}\int\limits_0^\infty dk'\,k'^2\int\limits_{-1}^{1}dx\,A_{nn'}(k,\ Q;\ k',\ x;\ s)\times$$
$$\times\chi_{n'}\ (k_{13}(k',\ Q,\ x),\ Q_{13}(k',\ Q,\ x)), \tag{124}$$

причем, как следует из (108) и (122),

$$A_{nn'}(k,\ Q;\ k',\ x;\ s) = -[(4m^2+4k^2+Q^2)^{1/2}+(m^2+Q^2)^{1/2}-s]^{-1}\times$$
$$\times\left[\frac{\omega'_{13}\omega'_2(\omega'_1+\omega'_3)}{\omega'\omega'_3(\omega'_1+\omega'_2)}\right]^{1/2}\sum_{n''=1}^{N} T_{nn''}(k,\ k';\ Q,\ s)\,F_{n''n'}(k',\ Q,\ x), \qquad (125)$$

где во всех штрихованных функциях ω от k, Q, x аргумент k заменен k'.

При численных расчетах обычно возникает необходимость в многократном вычислении действия оператора A (s) (см. разд. 5) и поэтому желательно избавиться от операции замены переменных в (124), т. е. желательно представить действие A (s) в виде

$$(A(s)\,\chi)_n(k,\ Q) = \sum_{n'=1}^{N}\int_0^\infty\int_0^\infty A_{nn'}(k,\ Q;\ k_{13},\ Q_{13};\ s)\times$$
$$\times\chi_{n'}(k_{13},\ Q_{13})\,dk_{13}\,dQ_{13}. \qquad (126)$$

Для вычисления ядра $A_{nn'}$ $(k,\ Q;\ k_{13},\ Q_{13};\ s)$ надо перейти от Q, k, x к переменным Q, k_{13}, Q_{13}.

Преобразуем вначале элемент объема в (124). В подынтегральное выражение (124) введем δ $(Q'-Q)\,dQ'$, воспользуемся (96), а затем снимем δ-функцию при помощи интегрирования по x_{13}. Из формул, аналогичных (86), можно показать, что

$$x_{13}\equiv x_{13}(Q,\ k_{13},\ Q_{13}) = \frac{2\,(m^2+k_{13}^2)^{1/2}}{k_{13}Q_{13}}\times$$
$$\times\left[\left(m^2+k_{13}^2+\frac{1}{4}Q_{13}^2\right)^{1/2}-(m^2+Q^2)^{1/2}\right]. \qquad (127)$$

Поэтому ядро $A_{nn'}$ $(k,\ Q;\ k_{13},\ Q_{13};\ s)$ обращается в нуль, если значение функции x_{13} $(Q,\ k_{13},\ Q_{13})$ не принадлежит интервалу $(-1,\ 1)$. Введем обозначение

$$f(Q,\ k_{13},\ Q_{13}) = \begin{cases}1, & \text{если } x_{13}(Q,\ k_{13},\ Q_{13})\in(-1,\ 1);\\ 0, & \text{если } x_{13}(Q,\ k_{13},\ Q_{13})\notin(-1,\ 1).\end{cases} \qquad (128)$$

Тогда с учетом сказанного можно показать, что

$$A_{nn'}(k,\ Q;\ k_{13},\ Q_{13};\ s) = -2\,\frac{k_{13}Q_{13}f(Q,\ k_{13},\ Q_{13})}{Q\,[(4m^2+4k^2+Q^2)^{1/2}+(m^2+Q^2)^{1/2}-s]}\times$$
$$\times\left[\frac{\omega_{13}\omega_{12}(\omega_1+\omega_2)}{\omega_3\omega_2(\omega_1+\omega_3)}\right]^{1/2}\sum_{n''=1}^{N} T_{nn''}(k,\ k_{12}(Q,\ k_{13},\ Q_{13});\ Q,\ s)\times$$
$$\times F_{n''n'}(Q,\ k_{13},\ Q_{13}). \qquad (129)$$

В этой формуле мы различаем k и k_{12}, считая, что k_{12} и все функции под знаком корня зависят от Q, k_{13}, Q_{13}. Соответствующие явные формулы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_2=(m^2+Q_{13}^2)^{1/2}, \quad \omega_3=(m^2+Q^2)^{1/2};\\ &\omega_1=2\left(m^2+k_{13}^2+\frac{1}{4}Q_{13}^2\right)^{1/2}-(m^2+Q^2)^{1/2}, \quad \omega_{13}=(m^2+k_{13}^2)^{1/2};\\ &\omega_{12}=\frac{1}{2}\left[(\omega_1+\omega_2)^2-Q^2\right]^{1/2}, \quad k_{12}=(\omega_{12}^2-m^2)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

При вычислении $F_{n''n'}(Q, k_{13}, Q_{13})$ мы должны все имеющиеся функции также выразить через Q, k_{13}, Q_{13}. Для функций a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) и c формулы (89) остаются в силе при условии, что ω заменяется ω_{12} и используются формулы (130). Далее, можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} &b=k_{13}Q_{13}(1-x_{13}^2)^{1/2}, \quad k_1=(\omega_1^2-m^2)^{1/2};\\ &\cos\theta'=\frac{1}{k_1k_{12}}\left[(\omega_1\omega_{12}-m^2)-\frac{2\omega_{12}(\omega_1\omega_2-\omega_{12}^2)}{\omega_1+\omega_2+2\omega_{12}}\right];\\ &\cos\theta''=-\frac{1}{k_1Q}(\omega_1\omega_3-m^2-2k_{13}^2);\\ &\cos\theta_{13}'=\frac{k_{13}}{k_1}+\frac{(\omega_1+\omega_{13})(\omega_1-\omega_3)\omega_{13}}{k_1k_{13}(\omega_1+\omega_3+2\omega_{13})};\\ &\cos\theta_{13}''=\frac{1}{k_1Q_{13}}(\omega_1\omega_2-m^2-2k_{12}^2) \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

и поэтому функция $F_{n''n'}(Q, k_{13}, Q_{13})$, как и ранее, может быть вычислена по формулам (80) — (82).

4. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В первых двух разделах настоящей работы дан обзор результатов, уже изложенных в литературе, в то время как результаты разд. 3 являются новыми. Они посвящены двум вопросам: 1) выводу явной формулы для РП к энергии связи тритона, если известны нерелятивистская ВФ тритона, вычисленная при решении N-канальной системы уравнений Фаддеева, и нерелятивистская энергия связи; 2) явному выводу релятивистской N-канальной системы уравнений Фаддеева, решение которой определяет энергию связи и ВФ тритона без разложения по степеням $1/m^2$. Для удобства читателя, намеревающегося проводить численные расчеты, мы приведем отдельно соответствующие алгоритмы (разумеется, они определяются предыдущим изложением).

Расчет РП к энергии связи тритона в первом приближении по $1/m^2$. Пусть нам известен набор функций $\{\chi_1(q, Q), \ldots, \chi_N(q, Q)\}$, полученных при решении стандартной N-канальной системы уравнений Фаддеева для волновой функции тритона, где q и Q — абсолютные значения векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{Q}$ [см. (14) и (31)], рассматриваемых в с. ц. и. системы трех частиц. Считаем, что нормировка этих функций определяется согласно (98). Пусть далее ε_0 ($\varepsilon_0 < 0$) — нерелятивистская энергия связи тритона. Тогда алгоритм расчета РП к энергии связи тритона в первом приближении по $1/m^2$ следующий. Вначале при помощи формул (100) вводим кинематические функции от q, Q, x и определяем набор функций φ_n (q, Q) при помощи (99). Далее, при помощи формул (101), (103) — (105) определяем набор функций $\Psi_{in}(q, Q)$ $(i = 1, 2, 3, 4;\ n = 1, 2, \ldots, N)$. Искомая релятивистская поправка к энергии связи тритона определяется тогда при помощи формулы (106).

Алгоритм построения релятивистской системы уравнений Фаддеева для волновой функции тритона в N-канальном приближении. Алгоритм явной конструкции уравнений (58) или (60) заключается в следующем. Выбираем вначале N каналов, в которых состояния трехнуклонной системы описываются квантовыми числами $\{LSJlj\}$, и рассматриваем гильбертово пространство, элементами которого являются наборы $\chi = \{\chi_1(k, Q), \ldots, \chi_N(k, Q)\}$, а скалярное произведение двух элементов χ' и χ определяется формулой (107). Считаем, что ядра $v_{nn'}$ (k, k') оператора v подобраны так, чтобы правильно описывать нуклон-нуклонные данные по уравнению (19), где k — абсолютная величина относительного импульса двух нуклонов в их с. ц. и. [см. (6)], а функции $\tilde{\chi}_n$ (k), описывающие внутреннее состояние двухнуклонной системы с квантовыми числами $\{LSJ\}$, принадлежат гильбертовому пространству функций со скалярным произведением

$$(\chi', \chi) = \sum_n \int_0^\infty \chi'_n(k)^* \chi_n(k)\, k^2\, dk, \tag{132}$$

где суммирование идет лишь по тем наборам $\{LSJ\}$, которые входят в N-канальное приближение. Выше мы объясняли, что под $v_{nn'}$ (k, k') можно понимать известные ядра для феноменологических потенциалов при выборе нормировки (132) (часто выбирают нормировку, когда интегрирование берется без k^2).

Для определения оператора $\hat{P}$ вводим вначале функции от k, Q, x $(k, Q \in [0, \infty), x \in [-1, 1])$, которые определяются формулами (85)—(93), затем функции F_1, F_2 и $F_{nn'}$ согласно (80) — (82), после чего действие оператора $\hat{P}$ определяется формулой (108).

Для определения оператора V находим вначале ядра $t_{nn'}$ $(k, k'; Q^2 + s)$, которые определяют оператор (115), затем по формуле (117) находим ядра $V_{nn'}(k, k'; Q)$ и определяем действие оператора V согласно (118). После того как операторы $\hat{P}$ и V определены, уравнение (58) в N-канальном приближении сводится к системе уравнений (119).

Пусть теперь мы хотим представить в N-канальном приближении уравнение (60), которое мы записали в виде (123). Тогда при помощи (121) необходимо вычислить дополнительно ядра $T_{nn'}$ $(k, k'; Q, s)$ оператора T (s), и если уравнение (123) представить в виде (124), то ядра оператора A (s) должны вычисляться по формуле (125).

Как уже отмечалось, для численных расчетов оператор $A(s)$ удобнее представить в виде (126). Для вычисления ядра $A_{nn'}(k, Q; k_{13}, Q_{13}; s)$ мы должны в этом случае действовать следующим образом. Вначале вводим функции от Q, k_{13}, Q_{13}, которые определяются формулами (89), (127), (128), (130), (131), (с $\omega = \omega_{12}$), и при помощи формул (80) — (82) вычисляем $F_{nn'}(Q, k_{13}, Q_{13})$. Далее, в вычисленных ранее ядрах $T_{nn'}(k, k'; Q, s)$ заменяем k' на $k_{12}(Q, k_{13}, Q_{13})$ и вычисляем ядро $A_{nn'}(k, Q; k_{13}, Q_{13}; s)$ по формуле (129) с учетом (127) и (130).

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Поскольку система уравнений в виде (119) или (123) имеет такую же структуру, что и в стандартном подходе, то для ее решения могут быть использованы хорошо разработанные методы, применяемые для нахождения энергии связи тритона в случаях, когда задача решается в импульсном представлении. В настоящее время считается, однако, что численное решение уравнений Фаддеева удобнее проводить в координатном представлении (см. обзор [76]) и самые точные расчеты, о которых шла речь во введении, также проведены в этом представлении.

В релятивистском случае переход к координатному представлению не вполне ясен, поскольку, как хорошо известно, здесь нет оператора, обладающего всеми нужными свойствами оператора координаты. Если положить, однако, что координата определяется оператором Ньютона — Вигнера или, как предложено в [77], преобразованием Шапиро [78], то релятивистские уравнения Фаддеева в таком координатном представлении станут не дифференциальными, а конечно-разностными. Если в случае двух тел некоторые конечно-разностные аналоги обычного уравнения Шредингера могут быть решены даже аналитически [77], то в случае трех тел возникают большие технические трудности. Поэтому нам представляется, что релятивистскую систему уравнений Фаддеева целесообразнее решать в импульсном представлении.

Как отмечают авторы [2], примененный ими метод Хорацека и Сасакавы [79] хорошо приспособлен для расчетов как в координатном, так и в импульсном представлении. Опишем вкратце основную идею этого метода.

Будем рассматривать решение системы уравнений Фаддеева, заданной в форме (123) — (124) или (123), (126), (129). Пусть из каких-либо соображений мы уверены, что функция F_0 в некотором смысле близка к χ (в каком — будем ясно из дальнейшего). Обозначим $A_0(s) = A(s)$, $F_{n+1} = -A_n(s) F_n$, $A_{n+1}(s) = A_n(s) P_n$, где P_i — ортогональный проектор перпендикулярно F_i, т. е. оператор, действующий по правилу

$$P_i F = F - \frac{(F_i, F)}{(F_i, F_i)} F_i. \tag{133}$$

Определим далее функции $\Phi_{n-1} = [1 + A_n(s)]^{-1} F_n$. Тогда легко показать, что

$$\Phi_{n-1} = F_n + \frac{(F_n, F_n)}{(F_n, F_n) - (F_n, \Phi_n)} \Phi_n \tag{134}$$

и имеет место

Утверждение. $(F_n, \Phi_n) = (F_n, F_n)$ тогда и только тогда, когда $\Phi_n = -A_n(s)\Phi_n$.

В частности, Φ_0 является решением (123) (т. е. $\Phi_0 = \chi$) тогда и только тогда, когда $(\Phi_0, F_0) = (F_0, F_0)$.

Пусть, например, мы случайно угадали решение и энергию связи, т. е. оказалось, что $F_0 = \chi$. Тогда очевидно, что $F_1 = F_0$, $F_2 = F_3 = \ldots = 0$, $\Phi_0 = F_0$. Если же F_0 близко к χ, а s близко к истинной массе тритона, то естественно ожидать, что F_n быстро убывает при увеличении n, поскольку F_n получается при $n!$-кратном применении ортогонального проектирования перпендикулярно F_0, $F_1, \ldots, F_{n-1}$. Поэтому при некотором $n = N_0$ можно с достаточной точностью положить $\Phi_{N_0} = F_{N_0+1}$. Тогда, как следует из (134),

$$\Phi_{N_0-1} = F_{N_0} + \frac{(F_{N_0}, F_{N_0})}{(F_{N_0}, F_{N_0}) - (F_{N_0}, F_{N_0-1})}, \tag{135}$$

и мы можем провести итерационную процедуру $F_0 \to F_1 \to \ldots$ $\ldots F_{N_0+1} = \Phi_{N_0}$. Далее вычисляем $(F_i, \Phi_{N_0}) = (F_i, F_{N_0+1})$ при $0 \leqslant i \leqslant N_0$ и исходим из рекуррентной формулы, следующей из (134):

$$(F_i, \Phi_{n-1}) = (F_i, F_n) + \frac{(F_i, \Phi_n)(F_n, F_n)}{(F_n, F_n) - (F_n, \Phi_n)} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1). \tag{136}$$

Используя эту формулу, можно, в конце концов, вычислить (F_0, Φ_0). Поэтому нахождение энергии связи тритона может быть проведено следующим образом: фиксируем некоторое достаточно большое N_0 и для различных s проводим процедуру вычисления (F_0, Φ_0). Истинной массе тритона отвечает тогда то и только то значение s, при котором $(F_0, \Phi_0) = (F_0, F_0)$. Ясно также, что исходя из (134) и (135) можно рекуррентным образом вычислить также и саму функцию Φ_0, удовлетворяющую уравнению (123).

Как следует из Утверждения, указанная процедура законна, если операторы $A_n(s)$ не имеют собственных значений, равных -1 при $n \geqslant 1$, и s, близких к истинной массе тритона, и именно это условие должно пониматься как близость F_0 к χ. Ввиду наличия в $A_n(s)$ ортогональных проекторов перпендикулярно $F_0, F_1, \ldots$ $\ldots, F_{n-1}$, указанное условие представляется естественным.

В реальном расчете для уменьшения машинного времени могут применяться и неортогональные проекторы (см. подробно [2]), однако нашей целью было лишь изложение идеи метода. Одним из удобств этого метода является, в частности, то, что ядро оператора $T(s)$ используется лишь при s, находящихся левее самой левой особенности этого ядра при $s = m + m_d$, где m_d — масса дейтрона. В качестве же F_0 в нашем случае можно взять, например, просто набор $\{\tilde{\chi}_1(k, Q), \ldots, \tilde{\chi}_{\tilde{N}}(k, Q)\}$, где $\{\tilde{\chi}_1(q, Q), \ldots, \tilde{\chi}_{\tilde{N}}(q, Q)\}$ — решение стандартной нерелятивистской задачи, причем, в принципе, не обязательно должно быть $\tilde{N} = N$, а можно взять и $\tilde{N} < N$, положив $\tilde{\chi}_n = 0$ при $N < n \leqslant N$.

Разумеется, мы не исключаем возможности, что и другие методы расчета окажутся эффективными. Так, например, в рамках стандартного нерелятивистского подхода представляется весьма перспективным так называемый гибридный метод, предложенный Р. И. Джибути (см., например, обзор [80] и статью [81]), в котором, используя фаддеевское разложение и гиперсферический базис, удается свести задачу к системе одномерных интегральных уравнений в импульсном представлении. При этом используется, что кинетическая энергия T^{nr} является квадратичной формой от импульсов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{Q}$ и не меняется при любых перестановках частиц. В релятивистском случае, однако, аналогом T^{nr} является свободный массовый оператор M и никакая функция от него не является квадратичной формой импульсов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{Q}$.

До последнего времени расчеты РП к энергии связи тритона проводились лишь в s-канальном приближении без учета спиновых эффектов и принимались во внимание лишь первые члены разложения по степеням $1/m^2$ [64—66, 82—86]. При этом вклад РП в кинетическую и потенциальную энергии по отдельности оказывался существенным, но в результате сильного сокращения этих вкладов результирующий эффект в энергии связи тритона не превышал значений порядка 0,2 МэВ (что привело некоторых физиков к убеждению, что роль релятивистских эффектов в проблеме недосвязки легчайших ядер не очень существенна). В работе [66] релятивистский расчет энергии связи тритона проведен в s-канальном приближении, но без разложения по степеням $1/m^2$. При этом оказалось, что результат сильно отличается от того, что имеет место при учете лишь первого члена разложения по степеням $1/m^2$. Как уже отмечалось, первый член разложения по $1/m^2$ приводит к разумному результату, если ВФ тритона убывает достаточно быстро в области больших относительных импульсов, однако на практике скорость убывания может оказаться недостаточной, и в этом можно убедиться на гораздо более простом примере — на примере дейтрона. Так, если в большинстве реалистических моделей результат вычисления РП к магнитному моменту дейтрона в первом приближении по $1/m^2$ отличается от точного на 10—20 % [87, 88], то для модели НИИЯФ МГУ эти результаты отличаются почти в 2 раза [24], а для РП к квадрупольному моменту сильное отличие имеется уже в большинстве случаев [88]. Можно сделать вывод, что вопрос о близости точного и приближенного значений энергии может быть выяснен лишь при сравнении соответствующих численных результатов.

В указанной работе [66] численное значение РП к энергии связи тритона также оказалось малым (0,2 МэВ), и при этом было указано на неточность предыдущей работы [89], где получено значение —1,7 МэВ. Значения искомой РП, не превышающие 0,25 МэВ, были получены и в подходах, отличных от РКМ (например, в квазипотенциальном подходе и в рамках подхода Бете — Солпитера), однако и здесь расчеты проводились лишь в s-канальном приближении [90].

Недавно в работе [91] была вычислена РП к энергии связи тритона в рамках пятиканального приближения для модели Рида с мягким кором, и расчет проводился в первом приближении по $1/m^2$. Формулы, выведенные в [91], являются частным случаем формул (99), (101), (103) — (106) при $N = 5$ и при пренебрежении вкладом P-волны [см. обсуждение формулы (101)]. Результат —0,54 МэВ оказался обусловленным в основном вкладом D-волны, так как при учете лишь двух каналов искомая РП составила —0,10 МэВ (в согласии с предыдущими расчетами), а при учете трех каналов —0,50 МэВ. Указанный результат может показаться неожиданным, поскольку вероятность D-волны в тритоне не превышает 10%. Надо иметь в виду, однако, что искомая РП определяется в основном высокоимпульсной частью ВФ тритона, где D-волна гораздо существенней, чем S-волна. В случае РП к магнитному моменту дейтрона доминирующая роль D-волны показана впервые в [87], а в случае РП к энергии связи тритона указанный эффект должен быть еще более заметным, поскольку эта величина определяется средними значениями от четвертой степени импульсов [см. (56)], а не от второй, как в случае РП к магнитному моменту дейтрона [87, 88]. Известно также, что при расчете вклада трехчастичных сил в 34-канальном приближении вклад каналов с большими номерами сравним с вкладом каналов с малыми номерами [2, 11].

Исходя из всего, сказанного выше, представляется весьма важным проведение релятивистского расчета, в котором было бы учтено достаточно большое число каналов. Как отмечалось выше, к большим усложнениям в релятивистской задаче по сравнению со стандартным случаем приводит необходимость учета вигнеровских вращений и более сложных кинематических соотношений. В нашем подходе это привело к весьма громоздкому выражению для оператора $\hat{P}$. Еще одно усложнение возникает из-за того, что оператор v входит в V под знаком квадратного корня (на необходимость этого впервые указано в [44]) и поэтому для того, чтобы выразить V через v, необходимо вычислить вначале оператор $t(s)$ [см. (115)], а затем провести интегрирование (114). В связи с указанными обстоятельствами релятивистский расчет потребует, по-видимому, гораздо больших затрат машинного времени, чем нерелятивистский, однако на мощных компьютерах проведение такого расчета возможно. Результат указанного расчета даст окончательный ответ на вопрос, каков вклад релятивистских эффектов в энергию связи тритона, и после этого будет, безусловно, бо́льшая ясность, каков вклад трехнуклонных взаимодействий и кварковых степеней свободы. В дальнейшем релятивистский многоканальный расчет должен быть проведен и для других трехнуклонных наблюдаемых, поскольку для многих из них пока еще нет удовлетворительного согласия между теорией и экспериментом.

Автор выражает благодарность В. Б. Беляеву, Р. П. Гайде, Р. И. Джибути, В. Г. Кадышевскому, Л. А. Кондратюку, В. И. Кукулину, И. М. Народецкому, Ю. А. Симонову, С. Н. Соколову, В. В. Соловьеву и Дж. Л. Фрайару за обсуждение вопросов, рассмотренных в настоящей работе. Весьма важными для автора были также соображения, высказанные в письмах Ф. Кэстера, и обсуждение на семинаре ИТЭФ, в частности замечания, высказанные А. М. Бадалян, Б. В. Гешкенбейном, А. Б. Кайдаловым и В. С. Поповым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chen C.R., Payne G.L., Friar J.L., Gibson B.F.**//Phys. Rev. C. 1985. Vol. 31. P. 2266—2273.
2. **Sasakawa T., Ishikawa S.**//Few Body Syst. 1986. Vol. 1. P. 3—12.
3. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.**//Phys. Rev. C. 1988. Vol. 37. P. 1138—1139.
4. **Machleidt R., Holinde K., Elster C.**//Phys. Rep. 1987. Vol. 149. P. 1—89.
5. **Brandenburg R.A., Chulick G.S., Machleidt R. e.a.**//Phys. Rev. C. 1988. Vol. 37. P. 1245—1252.
6. **Friar J.L.**//Few Body Syst. Suppl. 1987. Vol. 2. P. 51—63.
7. **Mathiot J.-F.**//Few Body Syst. Suppl. 1987. Vol. 2. P. 103—114.
8. **Sandhas W.**//Few Body Syst. Suppl. 1987. Vol. 2. P. 560—571.
9. **Holslin D., McAninch J., Quin P.A., Haeberli W.**//Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 61. P. 1561—1564.
10. **Мухтарова М. И.** //ЯФ. 1989. Т. 49. С. 338—350.
11. **Chen C.R., Payne G.L., Friar J.L., Gibson B.F.**//Phys. Rev. C. 1986. Vol. 33. P. 1740—1752.
12. **Yang Shin Nan**//Phys. Rev. C. 1987. Vol. 37. P. 444—447.
13. **Gibson B.F., McKellar B.H.J.**//Few Body Syst. 1988. Vol. 3. P. 143—170.
14. **Калашникова Ю. С., Народецкий И. М., Юров В. П.**//ЯФ. 1989. Т. 49. С. 632—643.
15. **Народецкий И. М.** Препринт ИТЭФ-69, 1988; Препринт ИТЭФ-90, 1988.
16. **Narodetskii I.M., Kalashnikova Y.S.**//Few Body Syst. 1988. Vol. 4. P. 115—132.
17. **Барышников А. Г., Блохинцев Л. Д., Народецкий И. М., Савин Д. А.**// ЯФ. 1988. Т. 48. С. 1273—1282.
18. **Dijk H., Bakker B.L.G.**//Nucl. Phys. A. 1989. Vol. 494. P. 438—488.
19. **Neudatchin V.G., Obukhovsky I.T., Kukulin V.I., Golovanova N.F.**// Phys. Rev. C. 1975. Vol. 11. P. 128—136.
20. **Krasnopolsky V.M., Kukulin V.I., Pomerantsev V.N., Sazonov P.B.**// Phys. Lett. B. 1984. Vol. 135. P. 20—24; Vol. 165. P. 7—12.
21. **Кукулин В. И., Краснопольский В. М., Померанцев В. Н., Сазонов П. Б.**//ЯФ. 1986. Т. 43. С. 559—569.
22. **Дородных Ю. Л., Неудачин В. Г., Обуховский И. Т., Юдин Н. П.**// ЯФ. 1989. Т. 50. С. 170—176.
23. **Каганов Б. Г., Кукулин В. И., Краснопольский В. М. и др.** //Международное совещание по теории малочастичных и кварк-адронных систем. Дубна: ОИЯИ, 1987. С. 70.
24. **Лев Ф. М., Овсянников Н. С.**//ЯФ. 1989. Т. 50. С. 1407—1410.
25. **Hahn K., Doleshall P., Schmid E.W.**//Phys. Lett. B. 1986. Vol. 169. P. 118—120.
26. **Elster Ch.e.a.**//Phys. Rev. C. 1988. Vol. 38. P. 1828—1842.

27. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. М.: Наука, 1973.
28. **Barnes T., Ghandour G.I.**//Phys. Lett. B. 1982. Vol. 118. P. 411—414.
29. **Olsson M.G., Miller K.J.**//Phys. Rev. D. 1983. Vol. 28. P. 674—676.
30. **Jacobs S., Olsson M.G., Suchyta J.**//Phys. Rev. D. 1987. Vol. 35. P. 2448—2461.
31. **Gupta S.R., Redford S.F.**//Phys. Rev. D. 1981. Vol. 24. P. 2308—2323.
32. **Glockle W., Muller L.**//Phys. Rev. C. 1981. Vol. 23. P. 1183—1195.
33. **Kummel H.**//Phys. Rev. C. 1983. Vol. 27. P. 765—772.
34. **Schutte D.**//Z. Phys. A. 1987. Vol. 326. P. 383—389.
35. **Кондратюк Л. А., Терентьев М. В.**//ЯФ. 1980. Т. 31. С. 1087—1106.
36. **Frankfurt L.L., Strikman M.I.**//Phys. Rep. 1981. Vol. 76. P. 215—275.
37. **Кондратюк Л. А.** Релятивизм нуклонов и кварковые степени свободы в легких ядрах// Элементарные частицы. М.: Атомиздат, 1982. Вып. 3. С. 49—80.
38. **Лев Ф. М.**//Некоторые вопросы релятивистской квантовой механики систем с заданным числом степеней свободы. В серии: «Лекции для молодых ученых ОИЯИ». ОИЯИ Р4-88-829. Дубна. 1988. Вып. 52.
39. **Соколов С. Н.**//ТМФ. 1975. Т. 23. С. 355—365.
40. **Соколов С. Н.**//ТМФ. 1978. Т. 36. С. 193—207.
41. **Garcilazo H.**//Phys. Rev. C. 1987. Vol. 35. P. 1804—1819.
42. **Сафронов А. Н.** Трехмерная релятивистская ковариантная фромулировка релятивистской проблемы трех тел. Депонировано в ВИНИТИ. 1987. № 2036.
43. **Fuda M.G.**//Phys. Rev. C. 1987. Vol. 35. P. 226—238.
44. **Coester F.**//Helv. Phys. Acta. 1965. Vol. 38. P. 7—16.
45. **Coester F.**//Constraint Theory and Relativistic Dynamics. World Scientific Publicating. Singapore Co. 1987. P. 157—170.
46. **Bakker B.L.G., Kondratyuk L.A., Terentiev M.V.**//Nucl. Phys. B. 1979. Vol. 158. P. 497—510.
47. **Берестецкий В. Б., Терентьев М. В.**//ЯФ. 1976. Т. 24. С. 1044—1054.
48. **Гудавадзе П. И., Копалеишвили Т. И., Мачавариани А. Г.**//Труды Тбилисского ун-та, 1983. Вып. 242. С. 153—171.
49. **Lev F.M.**//Fortschr. Phys. 1983. Vol. 31. P. 75—130.
50. **Соколов С. Н.**//ДАН СССР. 1977. Т. 233. С. 575—578.
51. **Coester F., Polyzou W.N.**//Phys. Rev. D. 1982. Vol. 26. P. 1348—1367.
52. **Mutze U.**//Habilitationssrift Univ. Munchen, 1982; Phys. Rev. D. 1984. Vol. 29. P. 2255—2269.
53. **Лев Ф. М.**//ЯФ. 1983. Т. 37. С. 1058—1069.
54. **Lev F.M.**//J. Phys. A. 1984. Vol. 17. P. 2047—2058.
55. **Lev F.M.**//Nucl. Phys. A. 1985. Vol. 433. P. 605—618.
56. **Foldy L.L., Krajcik R.A.**//Phys. Rev. D. 1975. Vol. 12. P. 1700—1710.
57. **Гайда Р. П.**//ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 427—493.
58. **Лев Ф. М.**//ЯФ. 1987. Т. 45. С. 26—32.
59. **Лев Ф. М.**//ЯФ. 1988. Т. 47. С. 1571—1576.
60. **Lev F.M.**//J. Phys. A. 1985. Vol. 18. P. L975—L978.
61. **Новожилов Ю. В.** Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.
62. **Bakamjian B., Thomas L.H.**//Phys. Rev. 1953. Vol. 92. P. 1300—1310.
63. **Brown G.E., Jackson A.D., Kuo T.T.S.**//Nucl. Phys. A. 1969. Vol. 133. P. 481—495.
64. **Kondratyuk L.A., Fogelzang J., Fanchenko M.S.**//Phys. Lett. B. 1981. Vol. 98. P. 405—408.
65. **Веселов А. И., Кондратюк Л. А.**//ЯФ. 1982. Т. 36. С. 343—352.
66. **Glockle W., Lee T.S.H., Coester F.**//Phys. Rev. C. 1986. Vol. 33. P. 709—716.
67. **Фаддеев Л. Д.** Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц//Тр. МИАН СССР. 1963. Т. 69. С. 1—122.

68. **Фаддеев Л. Д.**//Тр. МИАН СССР. 1964. Т. 73. С. 292—304.
69. **Coester F., Pieper S.C., Serduke S.J.D.**//Phys. Rev. C. 1974. Vol. 11. P. 1—10.
70. **Широков Ю. М.**//ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 474—477.
71. **Юцис А. П., Левинсон И. Б., Ванагас В. В.** Математический аппарат теории момента количества движения. Вильнюс: Госполитнаучиздат, 1960.
72. **Юцис А. П., Бандзайтис А. А.** Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс: Мокслас, 1977.
73. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.**//Z. Phys. A. 1983. Vol. 312. P. 169—175.
74. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. И.** Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
75. **Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Релятивистская квантовая теория. Часть 1. М.: Наука, 1968.
76. **Квицинский А. А., Куперин Ю. А., Меркурьев С. П.**//ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. С. 267—317.
77. **Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.**//ЭЧАЯ. 1972. Т. 27. С. 635—690.
78. **Шапиро И. С.**//ДАН СССР. 1956. Т. 106. С. 647—650; ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 1727—1730.
79. **Horacek J., Sasakawa T.**//Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28. P. 2151—2156; Phys. Rev. C. 1985. Vol. 32. P. 70—75.
80. **Джибути Р. И., Шитикова К. В.**//ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. С. 331—400.
81. **Liu F.-Q., Lim T.K.**//Few Body Syst. 1988. Vol. 5. P. 31—43.
82. **Живописцев Ф. А., Переломов А. М., Широков Ю. М.**//ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 478—481.
83. **Bhasin V.S., Jacob H., Mitra A.N.**//Phys. Rev. D. 1970. Vol. 1. P. 3496—3501.
84. **Jackson A.D., Tjon J.A.**//Phys. Lett. B. 1970. Vol. 32. P. 9—11.
85. **Hammel E., Baier H., Rinat A.S.**//Phys. Lett. B. 1979. Vol. 85. P. 193—196.
86. **Garcilazo H.**//Phys. Rev. C. 1981. Vol. 23. P. 559—562.
87. **Kondratyuk L.A., Strikman M.I.**//Nucl. Phys. A. 1984. Vol. 426. P. 575—598.
88. **Chung P.L., Keister B.D., Coester F.**//Phys. Rev. C. 1989. Vol. 39. P. 1544—1549.
89. **Coester F., Wiringa R.B.**//Few Body Problems in Physics. 1984. Vol. 2. P. 343—344.
90. **Tjon J.A.**//Nucl. Phys. A. 1987. Vol. 463. P. 157c—168c.
91. **Kondratyuk L.A., Lev F.M., Soloviev V.V.** Preprint ITEP-145, 1988. Few Body Syst., 1989. Vol. 7. P. 55—57.