

## КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ТРЕХ ЧАСТИЦ С ФИКСИРОВАННЫМ ПОЛНЫМ ОРБИТАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ

*А. А. Квицинский, В. В. Кострыкин, С. П. Меркурьев*

Ленинградский государственный университет, Ленинград

Рассмотрена задача рассеяния в квантовых системах трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом. Получены уравнения Фаддеева для компонент  $T$ -матрицы и волновых функций, исследована структура волновых операторов и  $S$ -матрицы, асимптотики волновых функций. Для систем с быстроубывающим взаимодействием доказана серия спектральных тождеств (формулы Левинсона).

Scattering theory for the quantum three-body systems with fixed total angular-momentum is developed. We construct the Faddeev equations for components of  $T$ -matrix and wavefunctions, investigate properties of the wave operators and  $S$ -matrix, evaluate asymptotics of the wavefunctions. For systems with short-range potentials a set of sum rules (Levinson's formulas) is derived.

### ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория рассеяния для систем трех частиц в своей первоначальной формулировке была развита в импульсном пространстве [1]. Решение задач с далекодействующими потенциалами привело к необходимости исследования свойств волновых функций и ядра резольвенты также и в координатном представлении [2]. В результате наряду с уравнениями Фаддеева для компонент  $T$ -матрицы широкое распространение получили уравнения для компонент волновых функций в конфигурационном пространстве.

На основе этих уравнений были созданы эффективные методы расчета характеристик конкретных систем. Наиболее интенсивно они развивались в ядерной физике, в основном для описания систем трех нуклонов (см., например, обзоры [3, 4]). Эти методы основаны на разложении компонент волновых функций по тем или иным угловым базисам (наиболее распространены разложения по бисферическим [3] и гиперсферическим [4] гармоникам).

Дело в том, что в исходном виде уравнения Фаддеева содержат операторы в шестимерном пространстве. Прямое решение таких уравнений лежит за пределами возможностей современных компьютеров. Разложения же по базисным функциям приводят к бесконечным системам двумерных или одномерных уравнений. При численном решении

оставляют конечное число уравнений, которые дают основной вклад в решение. В случае систем с короткодействующими потенциалами их число обычно невелико, так что такие методы весьма эффективны. Именно благодаря этому обстоятельству были достигнуты значительные успехи в применении уравнений Фаддеева в задачах ядерной физики, где главный вклад дают так называемые  $s$ -состояния.

Гораздо более сложная ситуация возникает в случае систем, в которых доминирующим является кулоновское взаимодействие. В расчетах свойств таких систем необходимо, как правило, учитывать очень большое число базисных функций. По этой причине уравнения Фаддеева не получили заметного распространения в задачах атомной и молекулярной физики.

Основные трудности в использовании традиционных методов парциальных разложений вызваны тем, что базисные функции не учитывают свойств симметрии гамильтониана системы. Поэтому представления гамильтониана в таких базисах задаются бесконечными заполненными матрицами. В случае кулоновских систем элементы этих матриц медленно убывают с ростом нумерующих их квантовых чисел. В результате медленно сходятся и соответствующие разложения для волновых функций.

Эта трудность исчезает, если в качестве базисных функций взять элементы инвариантных подпространств гамильтониана. В этом случае оператор энергии распадается на прямую сумму операторов, действующих в пространствах конечной размерности. Поэтому решение задачи рассеяния сводится к решению систем уравнений конечного ранга.

Для систем трех частиц с центральными взаимодействиями соответствующий базис состоит из функций Вигнера — собственных функций операторов полного орбитального момента и одной из его проекций. Функции Вигнера образуют инвариантные подпространства гамильтониана, которые отвечают состояниям с фиксированным полным орбитальным моментом. Сужение гамильтониана на эти подпространства позволяет отделить три угловые переменные, описывающие вращение системы как целого. Техника соответствующего парциального анализа была развита еще на заре квантовой механики [5] и обобщена затем на системы с произвольным числом частиц [6].

В результате отделения вращательных степеней свободы уравнение Шредингера сводится к независимым конечным системам уравнений в трехмерном пространстве «внутренних» координат. Эти уравнения хорошо известны. Они широко использовались в расчетах связанных состояний атомных и молекулярных систем. Однако при этом практически не исследовались вопросы теории рассеяния, связанной с такими уравнениями. К ним относятся: изучение структуры волновых операторов и  $S$ -матрицы, анализ асимптотик волновых функций непрерывного спектра, формулировка уравнений Фаддеева для их компонент и т. п. Цель настоящей работы — решить данные задачи, т. е. построить теорию рассеяния для систем трех частиц

с фиксированным полным орбитальным моментом. Эта теория может служить математической базой создания новых мощных вычислительных методов, основанных на соответствующих уравнениях Фаддеева в трехмерном пространстве внутренних координат. Такие уравнения допускают прямое решение на современных суперкомпьютерах без каких-либо промежуточных аппроксимаций и упрощающих предположений о структуре взаимодействия.

В основном содержание обзора составляют новые результаты. Часть из них была анонсирована в статьях [7—10].

Теория рассеяния для систем трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом содержит все основные трудности и специфику исходной задачи рассеяния в полном шестимерном конфигурационном пространстве. Для краткости будем в дальнейшем называть последнюю полной задачей трех частиц.

Мы широко используем общую методологию теории рассеяния, развитую в полной задаче [1, 2]. Ссылаясь на соответствующие результаты без указания источника, будем иметь в виду монографию [11].

## 1. КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО И ГАМИЛЬТониАН СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ С ФИКСИРОВАННЫМ ПОЛНЫМ ОРБИТАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ

В этом разделе проводится редукция гамильтониана полной задачи трех частиц на подпространство состояний, отвечающих фиксированному полному орбитальному моменту системы. Формальная сторона дела сводится к отделению вращательных степеней свободы, которые описывают ориентацию в пространстве треугольника, образованного частицами. Три оставшиеся степени свободы определяют форму этого треугольника. Мы будем называть их внутренними координатами системы, а совокупность этих координат — внутренним пространством. Последнее представляет собой конфигурационное пространство системы при фиксированном полном орбитальном моменте.

Внутреннее пространство имеет нетривиальную геометрическую структуру — это трехмерное риманово многообразие с неевклидовой метрикой. Последовательное изучение геометрии внутреннего пространства проведено в работе [12], на которой основано наше изложение соответствующих вопросов. Оно использует стандартный аппарат и терминологию дифференциальной геометрии [13].

**Конфигурационное пространство полной задачи трех тел.** Рассматривается система трех бесспиновых частиц в пространстве  $R^3$ . Частицы нумеруются индексом  $\alpha = 1, 2, 3$ . Парой  $\alpha$  будем называть систему двух частиц с номерами  $\beta \neq \alpha$ . Пусть  $\mathbf{r}_\alpha$ ,  $m_\alpha$  — радиус-векторы и массы частиц. В с.д.м. конфигурация системы задается набором приведенных векторов Якоби  $\{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha\}$ . При  $\alpha = 1$  эти

векторы определены равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \left( \frac{2m_2 m_3}{m_2 + m_3} \right)^{1/2} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \\ \mathbf{y}_1 &= \left[ \frac{2(m_2 + m_3)m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \right]^{1/2} \left( \mathbf{r}_1 - \frac{m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_2 + m_3} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Выражения для векторов Якоби с  $\alpha = 2, 3$  получаются из (1) циклической перестановкой индексов. Векторы с разными индексами связаны ортогональным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_\alpha \\ \mathbf{y}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta} \\ -s_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\beta \\ \mathbf{y}_\beta \end{pmatrix}, \quad c_{\alpha\beta}^2 + s_{\alpha\beta}^2 = 1, \quad (2)$$

коэффициенты которого зависят от масс частиц:

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta} &= - \left[ \frac{m_\alpha m_\beta}{(M - m_\alpha)(M - m_\beta)} \right]^{1/2}, \quad M = \sum_{\alpha} m_\alpha, \\ s_{\alpha\beta} &= (-1)^{\beta - \alpha} \operatorname{sign}(\beta - \alpha) (1 - c_{\alpha\beta}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Итак, в с.ц.м. конфигурационное пространство трех частиц представляет собой евклидово пространство  $Q \simeq R^6 \simeq R^3 \otimes R^3$  с элементами  $X = \{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha\}$ . Скалярное произведение, метрика и элемент объема в  $Q$  определены стандартным образом:

$$\begin{aligned} (X, X') &= (\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}'_\alpha) + (\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{y}'_\alpha), \\ K_X &= dX^2 = d\mathbf{x}_\alpha^2 + d\mathbf{y}_\alpha^2, \quad dQ(X) = d\mathbf{x}_\alpha \wedge d\mathbf{y}_\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Гамильтониан полной задачи трех частиц в с.ц.м. имеет вид

$$H = H_0 + V, \quad V = \sum_{\alpha} V_{\alpha}(|\mathbf{x}_{\alpha}|), \quad H_0 = -\Delta_X = -\Delta_{\mathbf{x}\alpha} - \Delta_{\mathbf{y}\alpha}, \quad (4)$$

где  $V_{\alpha}$  — центральные потенциалы парных взаимодействий.

**Внутреннее пространство.** Ориентация в пространстве плоскости, натянутой на векторы Якоби, задается тремя углами Эйлера, которые параметризуют элементы  $g$  группы вращения  $SO(3)$ . Рассмотрим естественное действие этой группы на пространство  $Q$ :

$$X = \{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha\} \rightarrow gX = \{g\mathbf{x}_\alpha, g\mathbf{y}_\alpha\}. \quad (5)$$

Если векторы  $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha$  линейно независимы, то  $gX = X$  влечет  $g = e$  [ $e$  — единичный элемент  $SO(3)$ ]. Поэтому группа  $SO(3)$  действует свободно на множестве  $Q = Q - D$ , где  $D$  отвечает конфигурациям, в которых все частицы лежат на одной прямой:

$$D = \{X: a\mathbf{x}_\alpha + b\mathbf{y}_\alpha = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0\}.$$

Тем самым  $\dot{Q}$  — это пространство  $SO(3)$ -орбит фактор-многообразия  $M = \dot{Q}/SO(3)$ . Многообразие  $M$  назовем внутренним пространством системы трех частиц.

Данная структура, связывающая  $\dot{Q}$ , внутреннее пространство  $M$  и группу  $SO(3)$ , является главным расслоением  $\dot{Q}(M, SO(3), \pi)$  с пространством расслоения  $\dot{Q}$ , базой  $M$  и структурной группой  $SO(3)$ . Каноническая проекция  $\pi$  сопоставляет точкам  $\dot{Q}$  элементы базы  $M$ ,  $\pi\dot{Q} = M$ .

Очевидно, что  $M$  — трехмерное многообразие. Покажем, что оно топологически эквивалентно пространству

$$R_+^3 = \{r = (z_\alpha^1, z_\alpha^2, z_\alpha^3); z_\alpha^1, z_\alpha^2 \in (-\infty, \infty), z_\alpha^3 \in (0, \infty)\}, \quad (6)$$

состоящему из трехмерных векторов с компонентами

$$z_\alpha^1 = (\mathbf{x}_\alpha^2 - \mathbf{y}_\alpha^2)/\rho, \quad z_\alpha^2 = 2(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)/\rho, \quad z_\alpha^3 = 2|\mathbf{x}_\alpha \times \mathbf{y}_\alpha|/\rho, \quad (7)$$

где  $\rho$  — гиперрадиус системы:

$$\rho = (\mathbf{x}_\alpha^{2i} + \mathbf{y}_\alpha^{2i})^{1/2} = \left[ \sum_i (z_\alpha^i)^2 \right]^{1/2}.$$

При этом отображение  $\{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha\} \xrightarrow{\pi} r$  задает каноническую проекцию расслоения  $\dot{Q}(M, SO(3), \pi)$ .

Действительно,  $z_\alpha^i$  инвариантны относительно действия  $SO(3)$ . Прообраз  $\pi^{-1}(r)$  образуют векторы  $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha$ , удовлетворяющие системе уравнений (7). Они определяют длины векторов Якоби и угол между ними, т. е. задают треугольник, образованный некоторыми фиксированными векторами  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha(r), \overset{\circ}{\mathbf{y}}_\alpha(r)$  в  $R^3$ . Следовательно, прообраз  $\pi^{-1}(r)$  — это  $SO(3)$ -орбита вектора  $\overset{\circ}{X} = \{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\alpha(r), \overset{\circ}{\mathbf{y}}_\alpha(r)\}$ . Поэтому  $M = \dot{Q}/SO(3) \simeq R_+^3$ .

Поскольку база  $M \simeq R_+^3$  стягивается в точку, расслоение  $\dot{Q}(M, SO(3), \pi)$  тривиально, т. е.  $\dot{Q} \simeq SO(3) \otimes M$ . Иначе говоря, каждый элемент  $X \in \dot{Q}$  можно представить в виде

$$X = \{g, r\} \in SO(3) \otimes M; \quad g : X = g \overset{\circ}{X}(r); \quad r = \pi X. \quad (8)$$

Внутреннее пространство можно снабдить естественной структурой векторного пространства  $R_+^3$  со скалярным произведением

$$(r, \tilde{r})_M = \sum_i z_\alpha^i \tilde{z}_\alpha^i. \quad (9)$$

Связь параметризаций (6) с разными индексами  $\alpha$  задается преобразованием поворота в  $R_+^3$ , которое порождается аналогичным преобразованием (2) векторов Якоби:

$$\begin{pmatrix} z_\alpha^1 \\ z_\alpha^2 \\ z_\alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_{\alpha\beta} & \sin \omega_{\alpha\beta} & 0 \\ -\sin \omega_{\alpha\beta} & \cos \omega_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_\beta^1 \\ z_\beta^2 \\ z_\beta^3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\cos \omega_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}^2 - s_{\alpha\beta}^2, \quad \sin \omega_{\alpha\beta} = 2c_{\alpha\beta}s_{\alpha\beta}.$$

Координаты  $(\xi^1 \xi^2 \xi^3)$ , параметризующие внутреннее пространство, будем называть внутренними координатами системы трех частиц. Кроме декартовых координат (7) мы будем использовать еще три набора внутренних координат:

1. Координаты Dragt'a [14]  $(\xi^1 \xi^2 \xi^3) = (\rho \psi \varphi_\alpha)$ :

$$r = (z_\alpha^1, z_\alpha^2, z_\alpha^3) = (\rho \cos \psi \cos \varphi_\alpha, \rho \cos \psi \sin \varphi_\alpha, \rho \sin \psi), \quad (11)$$

$$\psi \in (0, \pi/2), \quad \varphi_\alpha \in [0, 2\pi].$$

2. Гиперсферические координаты  $(\xi^1 \xi^2 \xi^3) = (\rho \chi_\alpha \theta_\alpha)$ :

$$r = (z_\alpha^1, z_\alpha^2, z_\alpha^3) = (\rho \cos \chi_\alpha, \rho \sin \chi_\alpha \cos \theta_\alpha, \rho \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha),$$

$$\chi_\alpha \in [0, \pi], \quad \theta_\alpha \in (0, \pi). \quad (12)$$

3. Координаты Якоби  $(\xi^1 \xi^2 \xi^3) = (x_\alpha y_\alpha \theta_\alpha)$ :

$$x_\alpha = |x_\alpha| = \rho \cos(\chi_\alpha/2),$$

$$\cos \theta_\alpha = (\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha). \quad (13)$$

$$y_\alpha = |y_\alpha| = \rho \sin(\chi_\alpha/2),$$

Углы  $\theta_\alpha$  в (12) и (10) совпадают. Первые два набора внутренних координат суть обычные сферические координаты в  $R_+^3$ , в которых полярные углы  $\pi/2 - \psi$  и  $\varphi_\alpha$  определены относительно разных осей. Связь внутренних координат с разными индексами задается преобразованием (10). Из него, в частности, вытекает, что углы  $\varphi_\alpha$  при замене индекса сдвигаются на константу:

$$\varphi_\beta = \varphi_\alpha + \omega_{\alpha\beta},$$

а координаты  $\rho$  и  $\psi$  инвариантны относительно индекса  $\alpha$ .

Эта инвариантность имеет простую физическую причину — координаты  $\rho$  и  $\psi$  определяют главные моменты инерции треугольника, образованного тремя частицами. Действительно, пусть конфигурация системы описывается вектором  $X \in \dot{Q}$ . Соответствующий тензор инерции  $A(X)$  имеет вид

$$[A(X)]_{ij} = \delta_{ij} \rho^2 - x_\alpha^i x_\alpha^j - y_\alpha^i y_\alpha^j, \quad (14)$$

где индексы  $i, j = 1, 2, 3$  нумеруют декартовы координаты векторов Якоби. Нетрудно проверить, что главные оси тензора  $A(X)$  образу-

ют векторы  $e_1, e_2$  и  $e_3 = e_1 \times e_2$ , связанные с векторами Якоби соотношением

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} = \rho R(\varphi_\alpha/2) \begin{pmatrix} \cos(\psi/2) e_1 \\ \sin(\psi/2) e_2 \end{pmatrix}, \quad R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

При этом главные моменты инерции  $I_i = (e_i, A(X) e_i)$  равны:

$$I_1 = \rho^2 \sin^2(\psi/2), \quad I_2 = \rho^2 \cos^2(\psi/2), \quad I_3 = \rho^2. \quad (15)$$

Зафиксируем, наконец, параметризацию структурной группы  $SO(3)$ . Пусть вращение  $g \in SO(3)$  задает ориентацию главных осей инерции  $e_i$  относительно системы фиксированных ортов  $\overset{\circ}{e}_i$ . Обозначим  $(\phi^1 \phi^2 \phi^3)$  набор соответствующих углов Эйлера:

$$e_i = g \overset{\circ}{e}_i, \quad (16)$$

$$g = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} & \sin \phi^2 \cos \phi^1 \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} & \sin \phi^2 \sin \phi^1 \\ -\cos \phi_3 \sin \phi^2 & \sin \phi^3 \sin \phi^2 & \cos \phi^2 \end{pmatrix},$$

где  $\mathcal{R}_{11} = \cos \phi^1 \cos \phi^2 \cos \phi^3 - \sin \phi^1 \sin \phi^3$ ;  $\mathcal{R}_{12} = -\cos \phi^1 \cos \phi^2 \sin \phi^3 - \sin \phi^1 \cos \phi^3$ ;  $\mathcal{R}_{21} = \sin \phi^1 \cos \phi^2 \sin \phi^3 + \cos \phi^1 \sin \phi^3$ ;  $\mathcal{R}_{22} = -\sin \phi^1 \cos \phi^2 \times \sin \phi^3 + \cos \phi^1 \cos \phi^3$ .

В силу (8) такому выбору углов Эйлера отвечает следующая параметризация  $SO(3)$  в  $\dot{Q}$ :

$$X = g \overset{\circ}{X}, \quad \overset{\circ}{X} = \{\overset{\circ}{x}_\alpha, \overset{\circ}{y}_\alpha\}, \quad \begin{pmatrix} \overset{\circ}{x}_\alpha \\ \overset{\circ}{y}_\alpha \end{pmatrix} = \rho R(\varphi_\alpha/2) \begin{pmatrix} \cos(\psi/2) \overset{\circ}{e}_1 \\ \sin(\psi/2) \overset{\circ}{e}_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

**Метрика и элемент объема внутреннего пространства.** Евклидова метрика (3) пространства  $Q$  индуцирует метрическую структуру расслоения  $\dot{Q}(M, SO(3), \pi)$ . В частности, она определяет метрику базы  $M$ . В этом параграфе мы вычислим метрический тензор и элемент объема  $M$ .

Схема действий будет такова. Метрика  $K_X$  порождает скалярное произведение  $K_X^*$  в кокасательном пространстве  $T_X^* \dot{Q}$  к многообразию  $\dot{Q}$  в точке  $X$ . Мы выделим в нем два подпространства  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{int}}$  и  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{rot}}$ , отвечающих внутренним (int) и вращательным (rot) степеням свободы. Эти подпространства ортогональны в скалярном произведении  $K_X^*$ . Поэтому метрический тензор внутреннего пространства определяется сужением  $K_X^*$  на подпространство  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{int}}$ .

Опишем структуру пространств  $T_X^* \dot{Q}$ ,  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{int}}$  и  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{rot}}$ . Первое из них представляет собой стандартное линейное пространство

1-форм на  $\dot{Q}$  с базисом  $dx_\alpha^i, dy_\alpha^j$  либо  $d\xi^i, d\phi^j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), где  $\xi^i$  — произвольный набор внутренних координат, а  $\phi^j$  — углы Эйлера из (16). В качестве подпространства  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{int}}$  возьмем линейную оболочку базисных 1-форм  $d\xi^i$ , отвечающих внутренним координатам. Наконец,  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{rot}}$  состоит из 1-форм, ассоциированных с вращениями системы трех частиц. Последние описываются вектором угловой скорости

$$\omega = [A(X)]^{-1} (\mathbf{x}_\alpha \times d\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{y}_\alpha \times d\mathbf{y}_\alpha), \quad (18)$$

где  $[A(X)]^{-1}$  — обратная матрица тензора инерции (14). Выберем в качестве базиса в  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{rot}}$  компоненты векторной 1-формы  $\omega$  относительно главных осей инерции  $e_i$ . Они вычисляются на основе представления (17) и вытекающего из (16) соотношения

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 & -\sigma^2 \\ -\sigma^3 & 0 & \sigma^1 \\ \sigma^2 & -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}; \quad (19)$$

где  $\sigma^i$  — 1-формы на группе  $SO(3)$ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi^2 \cos \phi^3 & \sin \phi^3 & 0 \\ \sin \phi^2 \sin \phi^3 & \cos \phi^3 & 0 \\ \cos \phi^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\phi^1 \\ d\phi^2 \\ d\phi^3 \end{pmatrix}.$$

В результате получим разложение

$$\omega = \sum_i \omega^i e_i, \quad \omega^1 = -\sigma^1, \quad \omega^2 = -\sigma^2, \quad \omega^3 = -\sigma^3 + \frac{1}{2} \sin \psi d\varphi_\alpha. \quad (20)$$

Итак,  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{rot}}$  — это линейная оболочка 1-форм  $\omega^i$ .

Очевидно, что 1-формы  $d\xi^i$  и  $\omega^j$  образуют базис в  $T_X^* \dot{Q}$ . Отметим, что часть  $\frac{1}{2} \sin \psi d\varphi_\alpha$  1-формы  $\omega^3$  связывает внутренние и вращательные степени свободы системы и имеет смысл кориолисова взаимодействия.

С помощью формул (17), (19) и (20) перепишем теперь метрику (3) в терминах базисных 1-форм подпространств  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{int}}$  и  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{rot}}$ :

$$K_X = K_r + \sum_i I_i (\omega^i)^2, \quad (21)$$

где  $I_i$  — главные моменты инерции (15). Первое слагаемое отвечает внутренним координатам:

$$K_r = \sum_{ij} b_{ij} d\xi^i d\xi^j = d\rho^2 + \frac{\rho^2}{4} (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\varphi_\alpha^2), \quad (22)$$



где  $r = \pi X$  — точка базы  $M$  в расслоении  $\dot{Q}(M, SO(3), \pi)$ . Метрика (21) задает скалярное произведение  $K_X^*$  в  $T_X^* \dot{Q}$ :

$$\begin{aligned} K_X^*(d\xi^i, d\xi^j) &= b^{ij}, \quad K_X^*(\omega^i, \omega^j) = \delta_{ij} I_i^{-1}, \\ K_X^*(\omega^i, d\xi^j) &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $(b^{ij}) = (b_{ij})^{-1}$ . В этом скалярном произведении подпространства  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{int}}$  и  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{rot}}$  ортогональны. Сужение  $K_X^*$  на  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{int}}$  определяется метрикой (22). Тем самым выражение (22) задает метрический тензор внутреннего пространства. Он индуцирует скалярное произведение в кокасательном пространстве  $T_r^* M$  к многообразию  $M$  в точке  $r$ :

$$K_r^*(d\xi^i, d\xi^j) = b^{ij}. \quad (24)$$

Вычислим теперь элемент объема внутреннего пространства. С этой целью выразим меру (3) пространства  $Q$  через 1-формы  $d\xi^i, \omega^j$  с помощью представления (21) для метрики  $Q$ :

$$dQ(X) = \sigma(r) b^{1/2} (\wedge_i \omega^i) \wedge (\wedge_i d\xi^i) = 8 \pi^2 dg \wedge dM(r), \quad (25)$$

где  $b = \det(b_{ij})$ ;  $\sigma = (I_1 I_2 I_3)^{1/2}$ ;  $dg$ -нормированная инвариантная мера на группе  $SO(3)$ :

$$dg = \frac{1}{8\pi^2} \sin \phi^2 \wedge_i d\phi^i, \quad (26)$$

а  $dM$  имеет смысл элемента объема на внутреннем пространстве:

$$dM(r) = \sigma(r) b^{1/2} \wedge_i d\xi^i. \quad (27)$$

Приведем сводку формул для  $\sigma(r)$ , метрики и элемента объема внутреннего пространства в различных координатах:

1. Координаты Dragt'a (11):

$$K_r = d\rho^2 + \frac{\rho^2}{4} (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\varphi_\alpha^2), \quad \sigma(r) = \frac{\rho^3}{2} \sin \psi, \quad (28)$$

$$dM(r) = \frac{\rho^5}{16} \sin 2\psi d\rho \wedge d\psi \wedge d\varphi_\alpha.$$

2. Гиперсферические координаты (12):

$$K_r = d\rho^2 + \frac{\rho^2}{4} (d\chi_\alpha^2 + \sin^2 \chi_\alpha d\theta_\alpha^2), \quad \sigma(r) = \frac{\rho^3}{2} \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha, \quad (29)$$

$$dM(r) = \frac{\rho^5}{8} \sin^2 \chi_\alpha \sin \theta_\alpha d\rho \wedge d\chi_\alpha \wedge d\theta_\alpha.$$

3. Координаты Якоби (13):

$$K_r = dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2 + \frac{x_\alpha^2 y_\alpha^2}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} d\theta_\alpha^2, \quad \sigma(r) = x_\alpha y_\alpha \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \sin \theta_\alpha, \quad (30)$$

$$dM(r) = x_\alpha^2 y_\alpha^2 \sin \theta_\alpha dx_\alpha \wedge dy_\alpha \wedge d\theta_\alpha.$$

**Вклад внутренних и вращательных степеней свободы в оператор кинетической энергии.** Оператор кинетической энергии полной задачи трех частиц задается лапласианом (4) на пространстве  $Q$ . Мы выразим теперь его в терминах векторных полей на  $Q$ , отвечающих внутренним и вращательным степеням свободы.

Построенное выше разбиение кокасательного пространства  $T_X^* \dot{Q}$  на внутреннее и вращательное подпространства индуцирует аналогичное разбиение касательного пространства  $T_X \dot{Q}$  к многообразию  $\dot{Q}$  в точке  $X$  на подпространства  $(T_X \dot{Q})_{\text{int}}$  и  $(T_X \dot{Q})_{\text{rot}}$ . Последние представляют собой линейные оболочки векторов, дуальных к базисным 1-формам  $d\xi^i$  и  $\omega^j$ . Обозначим эти векторы  $(\partial/\partial\xi^i)^*$  и  $L_j$ . Они удовлетворяют соотношениям дуальности

$$\begin{aligned} d\xi^i ((\partial/\partial\xi^j)^*) &= \delta_{ij}, & \omega^i (L_j) &= \delta_{ij}, \\ \omega^i ((\partial/\partial\xi^j)^*) &= 0, & d\xi^i (L_j) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

По определению подпространства  $(T_X \dot{Q})_{\text{int}}$  и  $(T_X \dot{Q})_{\text{rot}}$  ортогональны в скалярном произведении (21), поскольку

$$\begin{aligned} K_X ((\partial/\partial\xi^i)^*, (\partial/\partial\xi^j)^*) &= b_{ij}, \\ K_X (L_i, L_j) &= \delta_{ij} I_i, & K_X (L_j, (\partial/\partial\xi^i)^*) &= 0. \end{aligned}$$

Опишем явный вид векторных полей  $(\partial/\partial\xi^i)^*$  и  $L_i$ . Согласно определению (18), (19) 1-форм  $\omega^i$ , дуальные к ним векторы  $L_i$  суть компоненты оператора

$$L = \mathbf{x}_\alpha \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha} + \mathbf{y}_\alpha \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_\alpha} \quad (32)$$

относительно главных осей инерции. Они вычисляются на основе формул (17), (19) и представляют собой генераторы правого действия группы  $SO(3)$  на  $\dot{Q}$ :

$$L = - \sum_i e_i L_i, \quad \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi^3 \sin \phi^2 & -\sin \phi^3 & -\cos \phi^3 \operatorname{ctg} \phi^2 \\ -\sin \phi^3 / \sin \phi^2 & -\cos \phi^3 & \sin \phi^3 \operatorname{ctg} \phi^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial\phi^1 \\ \partial/\partial\phi^2 \\ \partial/\partial\phi^3 \end{pmatrix}.$$

Векторные поля  $(\partial/\partial\xi^i)^*$  фиксируются условиями дуальности (31). Например, в координатах Dragt'a они имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^* = \frac{\partial}{\partial\rho}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^* = \frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha}\right)^* = \frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha} - \frac{1}{2} \sin \psi L_3. \quad (33)$$

Отметим, что оператор (32) с точностью до множителя совпадает с оператором полного орбитального момента системы трех частиц  $\hat{L}$ :

$$\hat{L} = -iL = -\sum_k e_k \hat{L}_k, \quad (34)$$

$$\hat{L}_k = -iL_k.$$

Дуальную к этому оператору векторную 1-форму угловой скорости (18) можно трактовать как связность на главном расслоении  $\dot{Q}(M, SO(3), \pi)$ . При этом векторные поля  $(\partial/\partial\xi^i)^*$  представляют собой горизонтальные лифты полей  $\partial/\partial\xi^i$  по отношению к связности  $\omega$ .

Представим теперь лагранжев (4) на пространстве  $Q$  в терминах векторных полей  $(\partial/\partial\xi^i)^*$ ,  $L_i$ . С этой целью рассмотрим отвечающий ему функционал кинетической энергии

$$\int_Q \left| \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y_\alpha} f \right|^2 dQ(X) = \int_Q K_X^*(\bar{d}f, df) dQ(X), \quad (35)$$

где  $df$  — 1-форма градиента:

$$df = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} dx_\alpha^i + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha^i} dy_\alpha^i \right).$$

Разложим ее на составляющие, лежащие в подпространствах  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{int}}$  и  $(T_X^* \dot{Q})_{\text{rot}}$ :

$$df = \sum_i \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)^* f \right] d\xi^i + \sum_i (L_i f) \omega^i.$$

Используя это представление и определение (23) скалярного произведения  $K_X^*$ , придем к следующему выражению для лагранжиана кинетической энергии:

$$K_X^*(\bar{d}f, df) = \sum_{ij} b^{ij} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)^* f \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right)^* f \right] + \sum_i I_i^{-1} (L_i f)^2.$$

Подставим его в функционал (35) и проинтегрируем по частям, используя факторизацию (25) меры  $dQ$ . В результате получим искомое представление для  $H_0$ :

$$H_0 = -\frac{1}{\sigma b^{1/2}} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)^* \sigma b^{1/2} b^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right)^* + \sum_i \frac{\hat{L}_i^2}{I_i}, \quad (36)$$

где  $\hat{L}_i$  — компоненты оператора полного орбитального момента (34).

Входящие в это выражение горизонтальные лифты векторных полей  $\partial/\partial\xi^i$  содержат члены, связывающие внутренние и вращательные степени свободы. Например, в координатах Dragt'a эта связь порождается последним слагаемым поля  $(\partial/\partial\varphi_\alpha)^*$  из (33). Она описывает кориолисово взаимодействие в системе трех частиц.

**Гамильтониан системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом.** Проведем отделение вращательных степеней свободы и редуцируем гамильтониан полной задачи трех частиц на подпространства состояний, отвечающих фиксированному полному орбитальному моменту.

Рассмотрим гильбертово пространство  $\mathcal{H} = L^2(\dot{Q})$ , в котором действует гамильтониан (4). Напомним, что  $\dot{Q} \simeq SO(3) \otimes M$ : вектору  $X \in \dot{Q}$  соответствует точка (8)  $\{g, r\} \in SO(3) \otimes M$ . Действие (5) группы вращений на  $\dot{Q}$  индуцирует ее представление  $T(g)$  в пространстве  $\mathcal{H} = L^2(SO(3) \otimes M)$ :

$$T(g)\Psi(g', r) = \Psi(gg', r). \quad (37)$$

Разложим это представление на неприводимые и покажем, что пространства неприводимых представлений — инвариантные подпространства гамильтониана  $H$ . Сужение  $H$  на эти подпространства определяет гамильтониан системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом.

Как известно [15], неприводимые представления  $SO(3)$  классифицируются собственными числами  $l(l+1)$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) оператора Лапласа — Бельтрами на группе  $SO(3)$ . Он совпадает с квадратом орбитального момента (34),  $\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2$ . Каждому  $l$  соответствует  $2l+1$  эквивалентных представлений  $T^{lm}(g)$ ,  $m = -l, -l+1, \dots, l$ . Они нумеруются собственными числами проекции  $\hat{L}_z$  оператора момента  $\hat{L}$  на фиксированную ось  $e_3$  из (16):

$$\hat{L}_z = (e_3, \hat{L}) = -i \frac{\partial}{\partial \phi^1}. \quad (38)$$

Неприводимые представления  $T^{lm}$  задаются матрицами  $D^l(g) = (D_{mn}^l(g))$  ( $m, n = -l, \dots, l$ ), составленными из функций Вигнера. Последние суть общие собственные функции операторов  $\hat{L}^2, \hat{L}_z$ . Определение функций Вигнера и некоторые их свойства описаны в приложении.

Реализуем теперь неприводимые представления  $T^{lm}$  в пространстве  $\mathcal{H}$ . Пусть  $\mathcal{H}^{lm}$  — инвариантные подпространства в  $\mathcal{H}$  операторов  $\hat{L}^2, \hat{L}_z$ . Это линейные оболочки функций  $D_{mn}^l(g)$  с фиксированными  $l, m$ :

$$\mathcal{H}^{lm} = \left\{ \Psi^{lm}(g, r) = \sum_{n=-l}^l D_{mn}^l(g) \Psi_n^{lm}(r) \right\}. \quad (39)$$

Определим действие  $T^{lm}$  в  $\mathcal{H}^{lm}$  согласно (37):

$$T^{lm}(g) \Psi^{lm}(g', r) = \sum_{n=-l}^l D_{mn}^l(gg') \Psi_n^{lm}(r).$$

Рассмотрим далее оператор кинетической энергии (36). На основе канонических коммутационных соотношений для компонент оператора момента  $\hat{L}$  нетрудно убедиться, что  $H_0$  коммутирует с  $\hat{L}^2$  и  $\hat{L}_z$ . Это справедливо и для полного гамильтониана  $H$ , так как потенциалы зависят только от внутренних координат. Поэтому  $\mathcal{H}^{lm}$  — инвариантные подпространства  $H$ .

Очевидно, что  $\mathcal{H}^{lm}$  изоморфны гильбертовым пространствам  $\mathcal{H}^l = L^2(M, \mathbb{C}^{2l+1}, dM)$ . Элементы  $\mathcal{H}^l$  — комплексные  $(2l+1)$ -вектор-функции  $f(r)$  на внутреннем пространстве, составленные из коэффициентов разложения (39):  $f(r) = (\Psi_n^{lm}(r), n = -l, \dots, l)$ . Их компоненты нумеруются значениями проекции момента  $\hat{L}_3 = (e_3, \hat{L})$  на главную ось  $e_3$  тензора инерции (14). Скалярное произведение в  $\mathcal{H}^l$ , согласованное со стандартным скалярным произведением в  $L^2(Q)$ , определяется мерой (27) внутреннего пространства:

$$(f, h)_{\mathcal{H}^l} = \frac{8\pi^2}{2l+1} \sum_{n=-l}^l \int_M f_n(r) \bar{h}_n(r) dM(r). \quad (40)$$

Мы будем называть  $\mathcal{H}^l$  пространством состояний системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом  $l$ .

Сужение гамильтониана  $H$  на  $\mathcal{H}^{lm}$  порождает матричный оператор  $H^l$ , действующий в пространстве состояний  $\mathcal{H}^l$ :

$$H^l = D^l(g^{-1}) H D^l(g). \quad (41)$$

Из представления (36) вытекает следующее выражение для этого оператора:

$$H^l = H_0^l + V \otimes I^l, \quad (42)$$

где  $I^l$  — единичная матрица ранга  $2l+1$ ;

$$H_0^l = -\frac{1}{\sigma b^{1/2}} \sum_{i,j} (\partial/\partial \xi^i)_i^* \sigma b^{1/2} b^{ij} (\partial/\partial \xi^j)_i^* + \sum_i I_i^{-1} (\hat{L}_i)_i^2. \quad (43)$$

Здесь  $(\partial/\partial \xi^i)_i^*$  и  $(\hat{L}_i)_i$  — матричные операторы, возникающие в результате редукции (41) векторных полей  $(\partial/\partial \xi^i)_i^*$  и  $\hat{L}_i$ . Операторы  $(\hat{L}_i)_i$  задаются постоянными матрицами, описанными в приложении. Явные выражения для  $(\partial/\partial \xi^i)_i^*$  в координатах Dragt'a следуют из равенств (33):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)_i^* &= \frac{\partial}{\partial \rho} \otimes I^l, & \left(\frac{\partial}{\partial \psi}\right)_i^* &= \frac{\partial}{\partial \psi} \otimes I^l, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha}\right)_i^* &= \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha} \otimes I^l - \frac{i}{2} \sin \psi (\hat{L}_3)_i. \end{aligned}$$

Тем самым в координатах Dragt'a кинетическая часть гамильтониана  $H^l$  имеет вид

$$H_0^l = - \left\{ \rho^{-5} \partial_\rho \rho^5 \partial_\rho + \frac{4}{\rho^2 \sin 2\psi} \partial_\psi \sin 2\psi \partial_\psi \right\} \otimes I^l - \\ - \frac{4}{\rho^2 \cos^2 \psi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha} \right)_l \right]^2 + \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{(\hat{L}_1)_l^2}{\sin^2(\psi/2)} + \frac{(\hat{L}_2)_l^2}{\cos^2(\psi/2)} + (\hat{L}_3)_l^2 \right\}, \quad (44)$$

где  $\partial_{\xi^i} = \partial/\partial \xi^i$ . Кориолисов член  $(i/2) \sin \psi (\hat{L}_3)_l$  оператора  $(\partial/\partial \varphi_\alpha)_l^*$  имеет смысл матричного калибровочного поля на внутреннем пространстве, которое связывает внутренние и вращательные степени свободы.

Внутреннее пространство  $M$ , на котором задан гамильтониан  $H^l$ , имеет границу  $\partial M$ . Она состоит из точек с нулевой координатой  $z_\alpha^3$  из (6), т. е.

$$\partial M = \{r = (\rho \psi \varphi_\alpha) : \psi = 0\} = \{r = (\rho \chi_\alpha \theta_\alpha) : \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha = 0\}. \quad (45)$$

При  $r \in \partial M$  сингулярен центробежный член  $(\hat{L}_1)_l^2/\sin^2(\psi/2)$  оператора (44). Поэтому  $H^l$  определен на плотном в  $\mathcal{H}^l$  множестве гладких вектор-функций, удовлетворяющих условию  $(\hat{L}_1)_l f(r) |_{r \in \partial M} = 0$ . Из выражения (П.2) для матрицы  $(\hat{L}_1)_l$  вытекает, что решения этого уравнения имеют вид

$$f(r) |_{r \in \partial M} = c(\rho, \varphi_\alpha) Y^l, \quad (46)$$

где  $c$  — произвольная функция, а  $Y^l$  — постоянный  $(2l+1)$ -вектор. Его координаты равны значениям сферических функций  $Y_{lm}(\pi/2, 0)$  ( $m = -l, \dots, l$ ). Равенство (46) задает граничное условие для собственных функций гамильтониана  $H^l$ .

## 2. ТЕОРИЯ РАССЕЙНИЯ ДЛЯ ГАМИЛЬТониАНА $H^l$ . БЫСТРОУБЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

В этом разделе развивается общая схема теории рассеяния для гамильтониана (42) с быстроубывающими парными потенциалами

$$V_\alpha(x) = O(x^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (47)$$

Мы введем  $T$ -матрицу гамильтониана  $H^l$ , построим уравнения Фаддеева для ее компонент, опишем сингулярности их ядер, вычислим ядра волновых операторов и  $S$ -матрицы.

Эти построения основаны на специальном представлении для гамильтониана  $H^l$ . Оно задается унитарным преобразованием, диагонализующим его кинетическую часть  $H_0^l$ . В нем  $H_0^l$  представляет собой диагональный матричный оператор умножения, а потенциалы суть интегральные матричные операторы. Тем самым в данном представлении оператор  $H^l$  устроен, по существу, так же, как

и гамильтониан полной задачи трех частиц в импульсном представлении. Это позволяет исследовать уравнения Фаддеева для  $H^l$  методами теории интегральных уравнений, развитыми в полной задаче. Необходимые модификации этих методов, связанные с матричной структурой гамильтониана  $H^l$ , различием в мерах пространств и т. п., достаточно тривиальны. Мы не будем останавливаться на их подробном описании и приведем многие результаты без доказательств, так как они в главном повторяют существующие построения теории рассеяния для полной задачи трех частиц.

**Диагональное представление для оператора кинетической энергии.** Как известно, оператор кинетической энергии (4) полной задачи трех частиц диагонализуется в импульсном представлении. Оно задается преобразованием Фурье  $\mathcal{F}$  в  $L^2(Q)$ :

$$(\mathcal{F} \Psi)(X) = (2\pi)^{-3} \int_Q \exp \{i(X, P)\} \Psi(P) dQ(P). \quad (48)$$

Здесь вектор  $P = \{\kappa_\alpha, p_\alpha\}$  составлен из импульсов, сопряженных векторам Якоби  $x_\alpha, y_\alpha$ . Переход к диагональному представлению для  $H_0$  осуществляется унитарным преобразованием  $H_0 \rightarrow \tilde{H}_0 = \mathcal{F}^* H_0 \mathcal{F}$ , которое переводит его в оператор умножения:  $H_0 \Psi(P) = P^2 \Psi(P), P^2 = \kappa_\alpha^2 + p_\alpha^2$ .

Вспомним теперь, что кинетическая часть гамильтониана (42) получена сужением (41) оператора  $H_0$  на подпространство  $\mathcal{H}^{lm}$  из (39). Поэтому диагональное представление для  $H_0^l$  должно определяться сужением преобразования Фурье (48) на  $\mathcal{H}^{lm}$ .

Действительно, пусть  $\{g(P), q\}$  и  $\{g(X), r\}$  — точки пространства  $SO(3) \times M$ , соответствующие векторам  $P$  и  $X$  из (48) в тривиальном расслоении  $\dot{Q}(M, SO(3), \pi)$ :

$$g = \pi P, \quad r = \pi X,$$

$$P = g(P) \overset{\circ}{P}(q), \quad X = g(X) \overset{\circ}{X}(r),$$

где векторы  $\overset{\circ}{P}$  и  $\overset{\circ}{X}$  задаются равенствами типа (17). Разложим ядро  $\mathcal{F}$  в ряд Фурье на группе  $SO(3)$  [15]:

$$\begin{aligned} \exp \{i(X, P)\} &= \exp \{i(g^{-1}(P)g(X) \overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{P})\} = \\ &= \pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Sp} [\mathcal{F}^l(r, q) D^l(g^{-1}(P)g(X))], \end{aligned} \quad (49)$$

где  $\mathcal{F}^l$  — матрица  $(2l+1) \times (2l+1)$ :

$$\mathcal{F}^l(r, q) = \frac{1}{\pi} \int_{SO(3)} \exp \{i(\overset{\circ}{X}, g \overset{\circ}{P})\} D^l(g) dg. \quad (50)$$

(Здесь и всюду ниже интеграл от матрицы понимается как матрица из интегралов от матричных элементов.)

Рассмотрим далее действие  $\mathcal{F}$  на подпространстве  $\mathcal{H}^{lm}$ . Из его определения (39), разложения (49) и факторизации (25) меры  $dQ$  вытекает, что  $\mathcal{H}^{lm}$  — инвариантное подпространство  $\mathcal{F}$ . Сужение  $\mathcal{F}$  на  $\mathcal{H}^{lm}$  порождает матричный интегральный оператор  $\mathcal{F}^l$  с ядром (50), действующий в пространстве состояний  $\mathcal{H}^l$  гамильтониана  $H^l$ :

$$(\mathcal{F}^l f)(r) = \int_M \mathcal{F}^l(r, q) f(q) dM(q), \quad f \in \mathcal{H}^l.$$

Легко проверить, что это преобразование унитарно в скалярном произведении (40) пространства  $\mathcal{H}^l$  и задает представление, в котором гамильтониан  $H_0^l$  — оператор умножения на диагональную матрицу:

$$H_0^l \rightarrow \tilde{H}_0^l = [\mathcal{F}^l]^* H_0^l \mathcal{F}^l = q^2 \otimes I^l, \quad (51)$$

где  $q^2 = (q, q)_M$  — квадрат евклидовой длины (9) вектора  $q$  в реализации  $M$  как векторного пространства  $R_+^3$ .

Потенциальная часть гамильтониана (42) в диагональном представлении для  $H_0^l$  равна сумме матричных интегральных операторов

$$V_\alpha^l = [\mathcal{F}^l]^* (V_\alpha \otimes I^l) \mathcal{F}^l. \quad (52)$$

Чтобы вычислить их ядро, получим явное выражение для ядра преобразования  $\mathcal{F}^l$ .

Параметризуем в интеграле (50) точки  $r$  и  $q$  внутренними координатами Якоби (13):

$$r = (x_\alpha y_\alpha \theta_\alpha), \quad q = (k_\alpha p_\alpha \theta_\alpha), \quad (53)$$

и перепишем определение (17) векторов  $\dot{X}$  и  $\dot{P}$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= g_\alpha(r) \{x_\alpha \dot{e}_3, y_\alpha e(\theta_\alpha)\}, \\ \dot{P} &= \tilde{g}_\alpha(q) \{k_\alpha e(\theta'_\alpha), p_\alpha \dot{e}_\alpha\}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$e(\theta) = \sin \theta \dot{e}_1 + \cos \theta \dot{e}_2$$

Вращения  $g_\alpha$  и  $\tilde{g}_\alpha$  вычисляются сравнением представлений (17) и (54). Они задаются углами Эйлера

$$g_\alpha(r) = g(\phi_\alpha, \pi/2, \pi/2), \quad \tilde{g}_\alpha(q) = g(\tilde{\phi}_\alpha, \pi/2, 3\pi/2),$$

которые выражаются через координаты Dragt'a ( $\psi\phi_\alpha$ ) и  $\psi'\phi'_\alpha$  точек  $r$  и  $q$ :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha \in [\pi, 2\pi] : \operatorname{tg} \phi_\alpha &= -\operatorname{tg}(\phi_\alpha/2) \operatorname{tg}(\psi/2), \\ \tilde{\phi}_\alpha \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi] : \operatorname{tg} \tilde{\phi}_\alpha &= \operatorname{ctg}(\phi'_\alpha/2) \operatorname{tg}(\psi'/2). \end{aligned}$$



Подставим (54) в интеграл (50) и перейдем к интегрированию по новой переменной  $g \rightarrow g_{\alpha}^{-1}(r) \tilde{g} g_{\alpha}(q)$ . В результате для ядра  $\mathcal{F}^l$  получим представление

$$\mathcal{F}^l(r, q) = D^l(g_{\alpha}(r)) \mathcal{F}_{\alpha}^l(r, q) D^l(\tilde{g}_{\alpha}^{-1}(r)), \tag{55}$$

в котором матрица  $\mathcal{F}_{\alpha}^l$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha}^l(r, q) = \pi^{-1} \int_{SO(3)} \exp\{ik_{\alpha}x_{\alpha}(g^{-1}e_3, e(\theta'_{\alpha}))\} \times \\ \times \exp\{ip_{\alpha}y_{\alpha}(e(\theta'_{\alpha}), ge_3)\} D^l(g) dg. \end{aligned} \tag{56}$$

Разложим в этом интеграле каждую из экспонент в ряд по сферическим функциям:

$$\exp\{iz(\hat{n}_1, \hat{n}_2)\} = 4\pi \sum_{\lambda=0}^{\infty} i^{\lambda} j_{\lambda}(z) \sum_{m=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda m}(\hat{n}_1) Y_{\lambda m}^*(\hat{n}_2),$$

где  $j_{\lambda}$  — сферические функции Бесселя [16]. Выразим далее сферические функции  $Y_{\lambda m}$  от аргументов  $g^{-1}e_3$  и  $ge_3$  через функции Вигнера равенством (II.5). При этом в (56) возникает интеграл от произведения трех функций Вигнера, который выражается через коэффициенты Клебша — Гордана формулой (II.4). В итоге приходим к следующему представлению для матрицы  $\mathcal{F}_{\alpha}^l$ :

$$\mathcal{F}_{\alpha}^l(r, q) = \frac{2}{\pi} \sum_{l_1 l_2=0}^{\infty} j_{l_1}(p_{\alpha}y_{\alpha}) j_{l_2}(k_{\alpha}x_{\alpha}) Q_{l_1}^l(\cos \theta_{\alpha}) C_{l_1 l_2}^l Q_{l_2}^l(\cos \theta'_{\alpha}), \tag{57}$$

где  $C_{l_1 l_2}^l$  — матрицы чисел

$$\begin{aligned} [C_{l_1 l_2}^l]_{mn} = (-1)^{m+n} (2l+1)^{-1} i^{l_1+l_2} [(2l_1+1)(2l_2+1)]^{1/2} \times \\ \times \langle l_2 0 l_1 m | lm \rangle \langle l_2 n l_1 0 | ln \rangle, \end{aligned} \tag{58}$$

а  $Q_{\lambda}^l$  — диагональные матрицы из нормированных присоединенных полиномов Лежандра [16]:

$$[Q_{\lambda}^l(t)]_{mn} = \delta_{mn} \left[ \frac{(2\lambda+1)(\lambda-|n|)!}{2(\lambda+|n|)!} \right]^{1/2} P_{\lambda}^{|n|}(t). \tag{59}$$

Отметим, что эти матрицы удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_{-1}^1 [Q_{l_1}^l(t)]^* Q_{l_2}^l(t) dt = \delta_{l_1 l_2} I_{l_1}^l \tag{60}$$

$$\sum_{l_1} [C_{l_1 l_2}^l]^* I_{l_1}^l C_{l_1 l_2}^l = \delta_{l_2 l_2'} I_{l_2}^l, \tag{61}$$

где  $I_\lambda^l$  — диагональные единичные матрицы, у которых при  $\lambda < l$  только часть диагонали не нулевая:

$$[I_\lambda^l]_{mn} = \begin{cases} \delta_{mn}, & \lambda \geq l, \\ \delta_{mn}, & \lambda < l, \quad |m| \leq \lambda, \\ 0, & \lambda < l, \quad |m| > \lambda. \end{cases} \quad (62)$$

Равенство (60) тривиально, а (61) вытекает из свойств ортогональности коэффициентов Глебша — Гордана (П. 6).

Таким образом, представления (55) и (57) описывают явный вид ядра диагонализующего преобразования  $\mathcal{F}^l$ . Теперь нетрудно вычислить ядра операторов парных потенциалов (52), используя известные условия ортогональности сферических функций Бесселя и соотношения (60), (61):

$$V_\alpha^l(q, q') = D^l(\tilde{g}_\alpha(q)) \tilde{V}_\alpha^l(q, q') D^l(\tilde{g}_\alpha^{-1}(q')), \quad (63)$$

$$\tilde{V}_\alpha^l(q, q') = \frac{\delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{p_\alpha^2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} v_\alpha^{(\lambda)}(k_\alpha, k'_\alpha) Q_\lambda^l(\cos \theta_\alpha) Q_\lambda^l(\cos \theta'_\alpha).$$

Последнее равенство записано в терминах координат Якоби точек  $q$  и  $q'$ :

$$q = (k_\alpha p_\alpha \theta_\alpha), \quad q' = (k'_\alpha p'_\alpha \theta'_\alpha). \quad (64)$$

Коэффициенты  $v_\alpha^{(\lambda)}$  суть обычные парциальные потенциалы парных взаимодействий в импульсном представлении:

$$v_\alpha^{(\lambda)}(k, k') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty j_\lambda(kx) V_\alpha(x) j_\lambda(k'x) x^2 dx.$$

Итак, гамильтониан системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом в диагональном представлении для  $H_0^l$  имеет вид

$$H^l = [\mathcal{F}^l]^* H_0^l \mathcal{F}^l = \tilde{H}_0^l + V^l; \quad V^l = \sum_\alpha V_\alpha^l. \quad (65)$$

По структуре он очень похож на гамильтониан полной задачи трех частиц в импульсном представлении: кинетическая часть  $H_0^l$  — оператор умножения (51), а парные потенциалы суть интегральные операторы, ядра которых содержат  $\delta$ -образные особенности (63).

**$T$ -матрица и уравнения Фаддеева.** На основе представления (65) мы введем  $T$ -матрицу гамильтониана  $H^l$  и сформулируем уравнения Фаддеева для ее компонент. На алгебраическом уровне это можно сделать так же, как и в полной задаче трех частиц.

Обозначим  $R^l(z)$  и  $R_0^l(z)$  резольвенты гамильтониана (65) и его кинетической части:

$$R^l(z) = (\tilde{H}^l - z)^{-1}, \quad R_0^l(z) = (\tilde{H}_0^l - z)^{-1}. \quad (66)$$

Это матричные интегральные операторы в  $\mathcal{H}^l$ , причем  $R_0^l$  — диагональный оператор умножения,  $[R_0^l(z) f](q) = (q^2 - z)^{-1} f(q)$ . Определим  $T$ -матрицу гамильтониана (65) и ее компоненты Фаддеева  $M_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) стандартными равенствами

$$T^l(z) = V^l - V^l R^l(z) V^l, \\ M_{\alpha\beta}^l(z) = \delta_{\alpha\beta} V_\alpha^l - V_\alpha^l R^l(z) V_\beta^l.$$

Очевидно, что  $T$ -матрица равна сумме своих компонент:

$$T^l(z) = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}^l(z). \quad (67)$$

Повторив выкладки, проведенные в полной задаче трех частиц, получим уравнения Фаддеева для компонент  $M_{\alpha\beta}^l$ :

$$M_{\alpha\beta}^l(z) = \delta_{\alpha\beta} T_\alpha^l(z) - T_\alpha^l(z) R_0^l(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}^l(z). \quad (68)$$

Здесь операторы  $T_\alpha^l$  суть  $T$ -матрицы гамильтонианов

$$\tilde{H}_\alpha^l = \tilde{H}_0^l + V_\alpha^l. \quad (69)$$

Опишем структуру ядер операторов  $T_\alpha^l$ . Они удовлетворяют уравнениям Липпмана — Швингера

$$T_\alpha^l(z) = V_\alpha^l - V_\alpha^l R_\alpha^l(z) T_\alpha^l(z), \quad R_\alpha^l(z) = (\tilde{H}_\alpha^l - z)^{-1}.$$

В силу представлений (63) в этих уравнениях переменные разделяются в координатах Якоби (64). Для ядер операторов  $T_\alpha^l$  получаются явные выражения типа (63):

$$T_\alpha^l(q, q'; z) = D^l(\tilde{g}_\alpha(q)) \tilde{T}_\alpha^l(q, q'; z) D^l(\tilde{g}_\alpha^{-1}(q')), \\ \tilde{T}_\alpha^l(q, q'; z) = \frac{\delta(p_\alpha - P'_\alpha)}{p_\alpha^2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} t_\alpha^{(\lambda)}(k_\alpha, k'_\alpha; z - p_\alpha^2) Q_\lambda^l(\cos \theta_\alpha) Q_\lambda^l(\cos \theta'_\alpha), \quad (70)$$

где  $t_\alpha^{(\lambda)}$  —  $T$ -матрица радиального оператора Шредингера

$$h_\alpha^{(\lambda)} = -x^{-2} \partial_x^2 x^2 \partial_x^2 + \lambda(\lambda + 1) x^{-2} + V_\alpha(x). \quad (71)$$

Таким образом, на диагонали ( $q = q'$ ) ядра  $T_\alpha$  содержат  $\delta$ -образные особенности. Они имеют также полюсные сингулярности по спектральному параметру, отвечающие дискретному спектру парных гамильтонианов (71). Чтобы описать такие сингулярности, введем

ряд обозначений для характеристик связанных состояний этих гамильтонианов.

Классифицируем дискретный спектр операторов  $h_\alpha^{(\lambda)}$  мультииндексом  $A_\alpha = \{\lambda, i\}$ , где  $i$  — номера связанных состояний гамильтониана  $h_\alpha^{(\lambda)}$  с фиксированными  $\alpha, \lambda$ . Объединим  $A_\alpha$  и номер пары  $\alpha$  в значок  $A = \{\alpha; A_\alpha\}$ . Пусть  $(-\kappa_A^2)$  — энергии связи, а  $\varphi_A(k)$  — формфакторы [11] связанных состояний  $h_\alpha^{(\lambda)}$ . Связанные состояния пары  $\beta$  будем характеризовать аналогичным индексом  $B = \{\beta, B_\beta\}$ .

Как известно, в точках дискретного спектра парные  $T$ -матрицы имеют особенности вида [11]

$$t_\alpha^{(\lambda)}(k, k'; z) = \sum_{A_\alpha} \frac{\varphi_A(k) \overline{\varphi_A(k')}}{z + \kappa_A^2} + \dots,$$

которые порождают аналогичные сингулярности ядер  $T_\alpha^l$ :

$$T_\alpha^l(q, q'; z) = \frac{\delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{p_\alpha^2} \left\{ \sum_{A_\alpha} \frac{\Phi_A^l(q) [\Phi_A^l(q')]^*}{z - p_\alpha^2 + \kappa_A^2} + \dots \right\}. \quad (72)$$

Здесь  $\Phi_A^{(\lambda)}$  — матрицы  $(2l + 1) \times (2l + 1)$ , составленные из формфакторов связанных состояний пары  $\alpha$ :

$$\Phi_A^l(q) = \varphi_A(k_\alpha) D^l(\tilde{g}_\alpha(q)) Q_\lambda^l(\cos \theta_\alpha). \quad (73)$$

Отметим, что при  $\lambda < l$  эта матрица имеет  $2(l - \lambda)$  нулевых столбцов. Они отвечают нулевым элементам диагонали матрицы  $Q_\lambda^l$  из (59):

$$[\Phi_A^{(l)}]_{mn} = 0 \text{ при } \lambda < l, |m| > \lambda (A_\alpha = \{\lambda, i\}). \quad (74)$$

Поэтому для матричных формфакторов справедливо условие нормировки типа (60):

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{[\Phi_{A'}^l(q)]^* \Phi_A^l(q)}{(k_\alpha^2 + \kappa_{A'}^2)(k_\alpha^2 + \kappa_A^2)} k_\alpha^2 dk_\alpha \sin \theta_\alpha d\theta_\alpha &= \delta_{AA'} I_A^l, \\ I_A^l &\equiv I_\lambda^l (A_\alpha = \{\lambda, i\}). \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Итак, мы описали ядра неоднородных членов уравнений Фаддеева (68). На основе этих результатов можно исследовать уравнение (68) по той же схеме, что и в полной задаче трех частиц: нужно рассмотреть итерации уравнений (68) и изучить сингулярности их ядер. Нетрудно убедиться, что особенности ядер  $T_\alpha^l$  типа  $\delta$ -функций исчезают уже в первой итерации. При этом ядро каждой итерации содержит полюсные парные особенности, порожденные сингулярностями (72) неоднородного члена. В результате для компонент  $M_{\alpha\beta}$  можно доказать представление

$$M_{\alpha\beta}^l(z) = \delta_{\alpha\beta} T_\alpha^l(z) + W_{\alpha\beta}^l(z), \quad (76)$$

в котором структура ядер  $W_{\alpha\beta}^l$  описывается разложением

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha\beta}^l(q, q'; z) = & \mathcal{F}_{\alpha\beta}^l(q, q'; z) + \sum_{A\alpha} \frac{\Phi_A^l(q)}{p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - z} \mathcal{Y}_{A\beta}^l(p_\alpha, q'; z) + \\
 & + \sum_{B\beta} \mathcal{G}_{\alpha B}^l(q, p_\beta; z) \frac{[\Phi_B^l(q')]^*}{p_\beta'^2 - \kappa_B^2 - z} + \\
 & + \sum_{A\alpha, B\beta} \frac{\Phi_A^l(q) \mathcal{H}_{AB}^l(p_\alpha, p_\beta; z) [\Phi_B^l(q')]^*}{(p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - z)(p_\beta'^2 - \kappa_B^2 - z)}. \quad (77)
 \end{aligned}$$

В нем выделены все парные полюсные особенности этих ядер. Все матричные коэффициенты типа  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  — гладкие функции своих переменных.

В полной задаче трех частиц компоненты  $T$ -матрицы также описываются представлениями, аналогичными (76), (77). Однако между ними есть весьма существенное различие. Ядра компонент Фаддеева в полной задаче, кроме парных сингулярностей, имеют дополнительные так называемые трехчастичные особенности. Они содержатся в слагаемом типа  $\mathcal{F}$  разложения, аналогичного (77). В нашем случае это не так — ядро  $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^l$  никаких особенностей не имеет.

Поясним причины, приводящие к этому важному результату. В полной задаче старшая трехчастичная особенность возникает в первой итерации уравнений Фаддеева. В нашем случае первая итерация имеет вид

$$Q_{\alpha\beta}^l(z) = -T_\alpha^l(z) R_0^l(z) T_\beta^l(z) (1 - \delta_{\alpha\beta}). \quad (78)$$

Ясно, что при вещественных  $z > 0$  становится сингулярным ядро  $(q^2 - z)^{-1} \otimes I^l$  оператора  $R_0^l$ , причем его сингулярности не пересекаются с парными особенностями (72) ядер  $T_\alpha^l$ . В полной задаче трех частиц аналогичные сингулярности ядра свободной резольвенты и порождают трехчастичные особенности компонент Фаддеева. В нашем случае вклад сингулярностей ядра  $R_0^l$  в (78) дается интегралом

$$- \int_{\mathcal{M}} dM(\hat{q}) \frac{\delta(p_\alpha - \tilde{p}_\alpha) \delta(p_\beta - \tilde{p}_\beta)}{\tilde{q}^2 - z} T_{\alpha\beta}(q, q'; \tilde{q}; z), \quad (79)$$

в котором  $T_{\alpha\beta}$  — гладкая функция всех своих аргументов [так как на поверхности  $\tilde{q}^2 = z$  ядра  $T_\alpha^l(q, \tilde{q}; z)$  и  $T_\beta^l(\hat{q}, q'; z)$  не имеют парных особенностей]. При  $\alpha \neq \beta$  в (79) можно взять в качестве переменных интегрирования параметры  $\tilde{p}_\alpha$ ,  $\tilde{p}_\beta$  и  $\tilde{q}^2$ . Интегралы по  $\tilde{p}_\alpha$  и  $\tilde{p}_\beta$  снимаются  $\delta$ -функциями. Оставшийся интеграл по  $\tilde{q}^2$  содержит сингуляр-

ный знаменатель  $(\tilde{q}^2 - z)$ . При  $z \rightarrow \lambda \pm i0$  ( $\lambda > 0$ ) это интеграл типа Коши [17]. Такие интегралы — гладкие функции  $\lambda$ . Поэтому ядро первой итерации не имеет других особенностей, кроме парных. Ясно, что это верно и для любой итерации уравнений (68).

Из проведенных рассуждений очевидно, что геометрической причиной отсутствия трехчастичных особенностей в нашей задаче является малая коразмерность многообразий  $\tilde{p}_\alpha = p_\alpha$  и  $\tilde{p}_\beta = p_\beta$  во внутреннем пространстве  $M$ . Это двумерные поверхности в  $M$ , которые пересекаются вдоль одномерной кривой. Интеграл по этой кривой в (79) и снимает сингулярность знаменателя. В полной задаче аналогичные многообразия  $\tilde{p}_\alpha = p_\alpha$  и  $\tilde{p}_\beta = p_\beta$  суть трехмерные гиперплоскости в  $Q$ , которые пересекаются в одной точке.

Итак, мы описали структуру  $T$ -матрицы гамильтониана  $H^l$ . Перейдем теперь к построению волновых операторов и  $S$ -матрицы системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом.

**Волновые операторы и  $S$ -матрица.** Опишем сперва пространства каналов реакций системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом. Они отвечают возможным асимптотическим состояниям системы. Последние можно разбить на два класса: трехчастичные и парные. Трехчастичные состояния соответствуют трем не взаимодействующим частицам и описываются гамильтонианом  $H_0^l$ . Пространство трехчастичного канала отождествим с гильбертовым пространством  $\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}^l$  состояний гамильтониана  $H^l$ . В парных асимптотических состояниях имеются связанная пара и свободная третья частица. Динамика таких состояний определяется оператором  $H_\alpha^l$  из (69). Пространства парных каналов суть подпространства  $\mathcal{H}^l$ , натянутые на собственные функции операторов  $\tilde{H}_\alpha^l$ . В силу представления (63) для потенциала  $V_\alpha^l$  эти собственные функции представляют собой столбцы матриц

$$L_A^l(q, p_\alpha) = \frac{\delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{p_\alpha^2} \Psi_A^l(q), \quad (80)$$

где  $\Psi_A^l$  — матрица из волновых функций парных гамильтонианов (71). Она пропорциональна матричному формфактору (73):

$$\Psi_A^l(q) = (k_\alpha^2 + \kappa_A^2)^{-1} \Phi_A^l(q). \quad (81)$$

Отметим, что эта матрица имеет нулевые столбцы при условии

$$A = \{\alpha, A_\alpha\} : \lambda < l \quad (A_\alpha = \{\lambda, i\}), \quad (82)$$

поскольку таким же свойством (74) обладает матричный формфактор. Обозначим  $n(A)$  число ненулевых столбцов матрицы  $\Psi_A^l$ :

$$n(A) = \begin{cases} 2l + 1, & \lambda \geq l, \\ 2\lambda + 1, & \lambda < l. \end{cases}$$

Пусть  $\tilde{\mathcal{H}}_A$  — подпространство  $\mathcal{H}^l$ , натянутое на ненулевые столбцы матрицы (80). Ясно, что оно изоморфно подпространству  $\mathcal{H}_A = L^2(R_+, \mathbb{C}_A^{2l+1}; p_\alpha^2 dp_\alpha)$   $(2l + 1)$ -вектор-функций  $f(p_\alpha)$ , у которых отличны от нуля  $n(A)$  компонент:

$$f(p_\alpha) = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{l-\lambda}, f_{-\lambda}(p_\alpha), f_{-\lambda+1}(p_\alpha), \dots, f_\lambda(p_\alpha), \underbrace{0, \dots, 0}_{l-\lambda} \right) \quad (83)$$

(при  $\lambda \geq l$  все компоненты  $f$  нетривиальны).

Изоморфизм осуществляется интегральным оператором, действующим из  $\mathcal{H}_A$  в  $\tilde{\mathcal{H}}_A$ :

$$(L^l f)(q) = \Psi_A^l(q) f(p_\alpha).$$

Пространство  $\mathcal{H}_A$  назовем пространством канала  $A$ . Гамильтониан канала  $A$  определяется сужением оператора  $\tilde{H}_\alpha^l$  на подпространство  $\tilde{\mathcal{H}}_A$ , которое порождает матричный оператор умножения в  $\mathcal{H}_A$ :

$$H_A^l = (p_\alpha^2 - \kappa_A^2) \otimes I_A^l,$$

где матрица  $I_A^l$  определена равенствами (62), (75).

Определим теперь волновые операторы системы трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом. Они действуют из пространств трехчастичного и парных каналов в пространстве  $\mathcal{H}^l$  состояний гамильтониана  $H^l$  и задаются каноническими пределами соответствующих операторов эволюции:

$$\left. \begin{aligned} U_0^{(\pm)} &= s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \exp\{itH^l\} \exp\{-itH_0^l\} (\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}^l), \\ U_A^{(\pm)} &= s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \exp\{itH^l\} L_A^l \exp\{-itH_A^l\} (\mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}^l). \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Существование этих пределов для быстроубывающих потенциалов (47) можно проверить так же, как и в полной задаче трех частиц.

Волновые операторы (84) обладают набором стандартных свойств:

1. Сплетающие свойства:

$$H^l U_0^{(\pm)} = U_0^{(\pm)} H_0^l, \quad H^l U_A^{(\pm)} = U_A^{(\pm)} H_A^l. \quad (85)$$

2. Частичная изометричность:

$$[U_A^{(\pm)}]^* U_B^{(\pm)} = \delta_{AB} \text{id}_{\mathcal{H}_A}, \quad (86)$$

где  $A = 0$  или  $\{\alpha, A_\alpha\}$ ;  $B = 0$  или  $\{\beta, B_\beta\}$ ;  $\text{id}$  — единичные операторы в пространствах соответствующих каналов.

3. Асимптотическая полнота:

$$U_0^{(\pm)} [U_0^{(\pm)}]^* + \sum_A U_A^{(\pm)} [U_A^{(\pm)}]^* = \text{id}_{\mathcal{H}^l} - P_d^l,$$

где  $P_d^l$  — проектор на подпространство дискретного спектра гамильтониана  $H^l$ .

Сплетающее свойство и частичная изометричность волновых операторов непосредственно вытекают из определений (80), (81), (84) и ортогональности (75) матричных факторов. Асимптотическую полноту можно доказать с помощью формализма стационарной теории рассеяния. Соответствующие построения фактически повторяют доказательство асимптотической полноты в полной задаче трех частиц.

Выразим теперь ядра волновых операторов через  $T$ -матрицу гамильтониана  $H^l$ . С этой целью удобно перейти от динамических определений (84) этих операторов к эквивалентным представлениям для их ядер в терминах резольвенты оператора  $H^l$ . Переход осуществляется элементарным преобразованием, приведенным в [11, с. 45]:

$$U_0^{(\pm)}(q, q') = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\mp i\varepsilon) R^l(q, q'; q'^2 \pm i\varepsilon),$$

$$U_A^{(\pm)}(q, p'_\alpha) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\mp i\varepsilon) \int_M R^l(q, \tilde{q}; p'_\alpha{}^2 - \kappa_A^2 \pm i\varepsilon) L_A^l(\tilde{q}, p'_\alpha) dM(\tilde{q}).$$

Ясно, что нетривиальные члены данных пределов порождаются особенностями ядра  $R^l(z)$  при вещественных  $z$ . Эти особенности описываются стандартным выражением резольвенты через  $T$ -матрицу,

$$R^l(z) = R_0^l(z) - R_0^l(z) T^l(z) R_0^l(z), \tag{87}$$

и представлениями (67), (76) и (77) для компонент  $T$ -матрицы. Нетрудно убедиться, что ядра  $U_0^{(\pm)}$  определяются вычетами ядра  $R^l(q, q', z)$  в полюсах типа  $(q'^2 - z)$ , отвечающих ядрам резольвент  $R_0^l$  в (87). Ядра волновых операторов  $U_A^{(\pm)}$  порождаются вычетами ядра  $R^l(q, q'; z)$  в парных особенностях  $(z - p'_\beta{}^2 + \kappa_B^2)^{-1}$ , которые содержатся в компонентах  $T$ -матрицы и описываются представлением (77). Несложные вычисления приводят к следующим выражениям для ядер волновых операторов:

$$U_0^{(\pm)}(q, q') = \delta(q - q') \otimes I^l - \frac{T^l(q, q'; q'^2 \pm i0)}{q^2 - q'^2 \pm i0},$$

$$U_A^{(\pm)}(q, p'_\alpha) = L_A^l(q, p'_\alpha) - \frac{T_A^l(q, p'_\alpha; p'_\alpha{}^2 - \kappa_A^2 \pm i0) I_A^l}{q^2 - p'_\alpha{}^2 + \kappa_A^2 \mp i0}, \tag{88}$$

где матрица  $T_A^l$  связана с коэффициентами типа  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{H}$  разложения (77):

$$T_A^l = \sum_\beta T_{\beta A}^l, \tag{89}$$

$$T_{\beta A}(q, p'_\alpha; z) = \mathcal{G}_{\beta A}(q, p'_\alpha; z) + \sum_{B\beta} \frac{\Phi_B^l(q) \mathcal{H}_{BA}^l(p_\beta, p'_\alpha; z)}{p_\beta^2 - \kappa_B^2 - z}.$$



Отметим, что при условии (82) матрицы  $U_A^{(\pm)}$  имеют  $2l + 1 - n$  ( $A$ ) нулевых столбцов. Они порождаются нулевыми столбцами матрицы  $L_A^l$  и нулевыми элементами диагонали матрицы  $I_A^l$ .

**$S$ -матрица.** Опишем теперь структуру  $S$ -матрицы гамильтониана  $H^l$ . Она состоит из элементов четырех типов:  $S_{AB}$ ,  $S_{A0}$ ,  $S_{0A}$  и  $S_{00}$ . Эти операторы отвечают реакциям с различной кластеризацией частиц в начальном и конечном состояниях. В соответствии с терминологией полной задачи будем называть их  $S$ -матрицами процессов рассеяния ( $2 \rightarrow 2$ ), ( $3 \rightarrow 2$ ), ( $2 \rightarrow 3$ ) и ( $3 \rightarrow 3$ ). Данные  $S$ -матрицы связывают между собой пространства каналов реакций и выражаются через волновые операторы каноническим образом:

$$S_{BA} = [U_B^{(-)}]^* U_A^{(+)} (\mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B),$$

где индексы  $A, B$  принимают те же значения, что и в (86).

На основе представлений (88) можно получить выражения для ядер этих  $S$ -матриц в терминах компонент  $T$ -матрицы:

$$\begin{aligned} S_{BA}(p_\beta, p'_\alpha) &= \delta_{AB} \frac{\delta(p_\beta - p'_\alpha)}{p_\beta^2} \otimes I_A^l - \\ &- 2\pi i \delta(p_\beta^2 - \kappa_B^2 - p'_\alpha{}^2 + \kappa_A^2) I_B^l \mathcal{H}_{BA}^l(p_\beta, p'_\alpha; p'_\alpha{}^2 - \kappa_A^2 + i0) I_A^l, \\ S_{A0}(p_\alpha, q') &= -2\pi i \delta(p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - q'^2) I_A^l \tilde{T}_A^l(p_\alpha, q', q'^2 + i0), \\ S_{0A}(q, p'_\alpha) &= -2\pi i \delta(q^2 - p'_\alpha{}^2 + \kappa_A^2) T_A^l(q, p'_\alpha; p'_\alpha{}^2 - \kappa_A^2 + i0) I_A^l, \\ S_{00}(q, q') &= \delta(q - q') \otimes I^l - 2\pi i \delta(q^2 - q'^2) T^l(q, q'; q'^2 + i0). \end{aligned}$$

Здесь матрицы  $T_A^l$  определены в (89), а  $\tilde{T}_A^l$  связаны с коэффициентами типа  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{H}$  разложения (77):

$$\begin{aligned} \tilde{T}_A^l &= \sum_\beta \tilde{T}_{A\beta}^l, \\ \tilde{T}_{A\beta}^l(p_\alpha, q'; z) &= \mathcal{Y}_{A\beta}^l(p_\alpha, q'; z) + \sum_{B\beta} \frac{\mathcal{H}_{AB}^l(p_\alpha, p'_\beta; z)}{p'_\beta{}^2 - \kappa_B^2 - z} [\Phi_B^l(q')]^*. \end{aligned}$$

Наличие  $\delta$ -функций в ядрах  $S$ -матриц отражает закон сохранения энергии. Коэффициенты при этих  $\delta$ -функциях на энергетической поверхности определяют  $S$ -матрицу системы при фиксированной энергии. Построение такой  $S$ -матрицы осуществляется разложением в прямые интегралы [18] пространств каналов реакций:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \int_0^\infty \oplus L^2(\hat{M}, \mathbb{C}^{2l+1}; d\hat{M}) \rho_0(E) dE, \\ \mathcal{H}_A &= \int_{-\kappa_A^2}^\infty \oplus \mathbb{C}_A^{2l+1} \rho_A(E) dE \end{aligned} \quad (90)$$

с весами

$$\rho_0(E) = E^2/16, \quad \rho_A(E) = \sqrt{E_A}/2; \quad E_A = E + \kappa_A^2. \quad (91)$$

Напомним, что пространство  $\mathbb{C}_A^{2l+1}$  состоит из векторов типа (83).

В первом разложении  $\hat{M}$  представляет собой единичную полу-сферу во внутреннем пространстве  $M$ , которое рассматривается как векторное пространство  $R_+^3$  со скалярным произведением (9).

Элементы  $\hat{M}$  суть единичные векторы  $\hat{q} = q/|q|$ ,  $q \in M$ . Мера  $d\hat{M}$  равна угловой части меры (27) внутреннего пространства:

$$d\hat{M}(\hat{q}) = \frac{1}{2} \sin 2\psi d\psi \wedge d\varphi_\alpha = \sin^2 \chi_\alpha \sin \theta_\alpha d\chi_\alpha \wedge d\theta_\alpha. \quad (92)$$

В соответствии с представлениями (90) элементы  $S$ -матрицы разлагаются в прямые интегралы от матриц рассеяния при фиксированной энергии:

$$S_{AB} = \int_{\lambda_{AB}}^{\infty} \oplus S_{AB}(E) dE,$$

где индексы  $A$  и  $B$  понимаются в более широком смысле, как и в (86). Для  $S$ -матриц процессов  $(2 \rightarrow 2)$  ( $A = \{\alpha, A_\alpha\}$ ),  $B = \{\beta, B_\beta\}$   $\lambda_{AB} = \max(-\kappa_A^2, -\kappa_B^2)$ . В других случаях  $\lambda_{AB} = 0$ .

$S$ -матрицы при фиксированной энергии связывают пространства слоев разложений (90) и задаются ядрами

$$S_{BA}(E) = \delta_{AB} I_A^l - 2\pi i \rho_A(E) I_B^l \mathcal{S}_{BA}^l(E_B^{1/2}, E_A^{1/2}; E + i0) I_A^l, \quad (93)$$

$$S_{0A}(\hat{q}; E) = -2\pi i \rho_A(E) T_A^l(E^{1/2}\hat{q}, E_A^{1/2}; E + i0) I_A^l, \quad (94)$$

$$S_{A0}(E; \hat{q}) = -2\pi i \rho_0(E) I_A^l \tilde{T}_A^l(E_A^{1/2}, E^{1/2}\hat{q}; E + i0), \quad (95)$$

$$S_{00}(\hat{q}, \hat{q}'; E) = \delta(\hat{q} - \hat{q}') \otimes I^l - 2\pi i \rho_0(E) T^l(E^{1/2}\hat{q}, E^{1/2}\hat{q}'; E + i0). \quad (96)$$

Ядро  $S_{00}$  — матрица  $(2l+1) \times (2l+1)$ . Ее элементы нумеруются значениями проекции полного орбитального момента. Ядра других  $S$ -матриц — также матрицы  $(2l+1) \times (2l+1)$ . Если индексы парных каналов удовлетворяют условию (82), они содержат нулевые блоки, которые порождаются нулевыми элементами диагоналей матриц  $I_A^l$ . Наличие таких блоков имеет простую физическую причину — модуль проекции момента  $\lambda$  пары  $\alpha$  в канале  $A$  не может быть больше  $\lambda$ , в то время как проекция полного момента изменяется от  $-l$  до  $l$ . Тем самым, физический смысл имеют только ненулевые элементы матриц  $S_{BA}$ ,  $S_{0A}$  и  $S_{A0}$ , которые образуют прямоугольные блоки размеров  $n(B) \times n(A)$ ,  $(2l+1) \times n(A)$  и  $n(A) \times (2l+1)$  соответственно.

Отметим, что  $S$  матрицы  $S_{BA}$  и  $S_{0A}$  суть операторы умножения на матрицу в векторном пространстве  $\mathbb{C}_A^{2l+1}$  со значениями в пространствах  $\mathbb{C}_B^{2l+1}$  и  $\mathcal{S} = L^2(\hat{M}, \mathbb{C}^{2l+1}; d\hat{M})$ . Процессы  $(3 \rightarrow 2)$

и  $(3 \rightarrow 3)$  описываются матричными интегральными операторами  $S_{A0}$ :  $\hat{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{C}_A^{2l+1}$  и  $S_{00}$ :  $\hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$ .

Полученные выше выражения для волновых операторов и  $S$ -матриц имеют много общего с соответствующими формулами полной задачи трех частиц. Однако есть и заметные различия. Они связаны с тем, что эти операторы в нашем случае и в полной задаче действуют в пространствах с весьма различной структурой. Например, в нашем случае  $S$ -матрицы процессов  $(2 \rightarrow 2)$  и  $(2 \rightarrow 3)$  при фиксированной энергии суть операторы умножения в векторном пространстве, а в полной задаче — это интегральные операторы в гильбертовых пространствах.

### 3. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ. БЫСТРОУБЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

В этом разделе описывается постановка задачи рассеяния для гамильтониана  $H^l$  в конфигурационном представлении (42). Мы построим волновые функции непрерывного спектра этого гамильтониана, исследуем их асимптотику и сформулируем дифференциальные уравнения Фаддеева для компонент волновых функций.

Основное внимание уделяется изучению асимптотик волновых функций. Мы покажем, что они включают стандартные сферические волны, описывающие процессы рассеяния  $(2 \rightarrow 2,3)$  и  $(3 \rightarrow 2,3)$ . Амплитуды этих волн совпадают с ядрами  $S$ -матриц при фиксированной энергии. Волновые функции процессов  $(3 \rightarrow 2, 3)$  содержат также так называемые члены однократного перерассеяния, которые возникают и в полной задаче трех частиц.

В полной задаче в асимптотику волновых функций  $(3 \rightarrow 2,3)$  входят еще члены двукратного перерассеяния. Они порождаются трехчастичными особенностями ядра  $T$ -матрицы. Как показано в предыдущем разделе, в нашей задаче  $T$ -матрица не имеет трехчастичных особенностей. Поэтому волновые функции не содержат членов двукратного перерассеяния, что заметно упрощает их асимптотическую структуру.

**Волновые функции процессов  $(2 \rightarrow 2,3)$ .** Волновые функции гамильтониана  $H^l$  связаны с ядрами волновых операторов преобразованием (51), диагонализующим оператор кинетической энергии  $H_0^l$ . В этом параграфе мы изучим волновые функции, соответствующие волновым операторам  $U_A^{(+)}$ :

$$\Psi_A(r, p_\alpha) = \int_M \mathcal{F}^l(r, q') U_A^{(+)}(q', p_\alpha) dM(q'). \quad (97)$$

Как и ядра  $U_A^{(+)}$ , функции  $\Psi_A$  суть матрицы  $(2l+1) \times (2l+1)$ . Они удовлетворяют матричному уравнению Шредингера, которое вытекает из сплетающего свойства волновых операторов (85):

$$(H^l - E \otimes I^l) \Psi_A(r, p_\alpha) = 0, \quad E = p_\alpha^2 - \kappa_A^2. \quad (98)$$

Каждый столбец матрицы  $\Psi_A$  также является решением этого уравнения и представляет собой одну из собственных функций непрерывного спектра гамильтониана  $H^l$ . Они описывают рассеяние третьей частицы с энергией  $p_\alpha^2$  на связанном состоянии  $A$  пары  $\alpha$  и нумеруются значениями проекции орбитального момента пары  $\alpha$  в начальном состоянии. Отметим, что при условии (82) матрица  $\Psi_A$  имеет  $2l + 1 - n(A)$  нулевых столбцов.

Приступим к изучению асимптотики функций  $\Psi_A$ . Используя выражение (88) для ядра  $U_A^{(+)}$ , представим их в виде суммы компонент

$$\Psi_A = \chi_A + \sum_{\beta} \Psi_{\beta A}. \quad (99)$$

Здесь  $\chi_A$  порождается первым членом (88),  $\chi_A = \mathcal{F}^l L_A^l$ , а слагаемые  $\Psi_{\beta A}$  выражают вклад компонент  $T$ -матрицы (89):

$$\Psi_{\beta A}(r, p_\alpha) = - \int_M \mathcal{F}^l(r, q') \frac{T_{\beta A}(q', p_\alpha; E + i0) L_A^l}{q'^2 - E - i0} dM(q'). \quad (100)$$

По определению, матрица  $\chi_A$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$(H_0^l + V_\alpha \otimes I^l - E \otimes I^l) \chi_A = 0.$$

Ее столбцы суть волновые функции начального состояния системы. Матрицу  $\chi_A$  нетрудно вычислить явно. С этой целью нужно перейти в (97) к интегрированию по координатам Якоби точки  $q'$  и воспользоваться представлениями (55), (57) и (80) для ядер  $\mathcal{F}^l$ ,  $L_A^l$  и соотношением ортогональности (60). В результате получим следующее выражение для  $\chi_A$  в терминах координат Якоби точки  $r$ :

$$\chi_A(r, p_\alpha) = \psi_A(x_\alpha) \sum_{k=|l-\lambda|}^{l+\lambda} j_k(p_\alpha y_\alpha) \mathcal{Y}_A^{(k)}(\hat{r}) (A_\alpha = \{\lambda, i\}), \quad (101)$$

где  $\psi_A$  — нормированная радиальная волновая функция парного гамильтониана (71), а  $\mathcal{Y}_A^{(k)}$  — матрицы  $(2l + 1) \times (2l + 1)$ :

$$\mathcal{Y}_A^{(k)}(\hat{r}) = (2/\pi)^{3/2} D^l(g_\alpha(r)) Q_k^l(\cos \theta_\alpha) C_{k\lambda}^l I_A^l. \quad (102)$$

Рассмотрим теперь интеграл (100). Напомним, что ядро  $T_{\beta A}^l$  содержит гладкую часть и парные особенности, отраженные в представлении (89). Эти особенности не пересекаются с сингулярностями знаменателя в (100). Тем самым каждая особенность подынтегральной функции дает аддитивный вклад в асимптотику компоненты  $\Psi_{\beta A}$ .

Вклад парных особенностей легко вычисляется. С этой целью следует записать интеграл (100) в координатах Якоби ( $k_\beta^l p_\beta^l \theta_\beta^l$ ) точки  $q'$  и заменить гладкие коэффициенты при парных особенностях их значением на поверхности  $p_\beta^2 = E + \kappa_\beta^2$ . Тогда интеграл по  $\theta_\beta^l$  снимается условием ортогональности (60), а интеграл по  $k_\beta^l$  задает

радиальную волновую функцию связанной пары  $\beta$ . Асимптотика оставшегося интеграла по  $p'_\beta$  определяется представлением

$$\int_0^\infty j_k(p'_\beta y_\beta) \frac{f(p'_\beta) p'^2_\beta dp'_\beta}{p'^2_\beta - a^2 - i0} \underset{y_\beta \rightarrow \infty}{\sim} (-i)^k \frac{\pi}{2} \frac{e^{i|a|y_\beta}}{y_\beta} f(|a|). \quad (103)$$

Опишем теперь вычисление вклада сингулярного знаменателя  $(q'^2 - E - i0)^{-1}$ . Введем во внутреннем пространстве векторную структуру (6) и обозначим  $\hat{q}' = q'/|q'|$  элемент единичной полу-сферы  $\hat{M} \subset M$  [см. представление (90)]. Поскольку особенность  $(q'^2 - E - i0)^{-1}$  не зависит от  $\hat{q}'$ , ее вклад в интеграл (100) можно записать в виде

$$\frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{|q'|^5 d|q'|}{q'^2 - E - i0} U(r, |q'|), \quad (104)$$

где  $U$  выражается интегралом по  $\hat{M}$  с мерой (92):

$$U(r, t) = - \int_{\hat{M}} d\hat{M}(\hat{q}') \mathcal{F}^l(r, t\hat{q}') W(t\hat{q}'). \quad (105)$$

Здесь  $W(q') = T^l_{\beta A}(q', p_\alpha; E + i0)$ . Покажем, что асимптотика последнего интеграла дается представлением

$$U(r, t) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \pi^{-1/2} (2/t\rho)^{5/2} \sum_{\pm} (\pm 1) \exp\{\pm it\rho \mp i\pi/4\} I^l_{\pm} W(t\hat{r}), \quad (106)$$

где  $\rho = |r|$ , а  $I^l_{\pm}$  — диагональные матрицы  $(2l + 1) \times (2l + 1)$ :

$$(I^l_{\pm})_{mn} = (\pm 1)^{m+1} \delta_{mn}. \quad (107)$$

Подставим в (105) интегральное представление (50) для ядра  $\mathcal{F}^l$ . В результате получим интеграл по многообразию  $SO(3) \times \hat{M} \simeq S^5$ , где  $S^{(5)}$  — сфера в  $\hat{Q}$ . Ее элементы — единичные векторы  $\hat{P} = g\hat{P}$ . При этом в силу (25) стандартная мера  $d\hat{P}$  на  $S^{(5)}$  равна произведению мер  $\pi^2 dg \wedge d\hat{M}$ . Тем самым можно записать (105) в виде интеграла по сфере  $S^{(5)}$  с ядром  $\exp\{it(\hat{X}, g\hat{P})\}$ . Как известно [11], при  $|\hat{X}| = \rho \rightarrow \infty$  такая экспонента представляет собой обобщенную функцию в  $L^2(S^{(5)}; d\hat{P})$ :

$$\exp\{it(\hat{X}, \hat{P})\} \sim (2\pi/t\rho)^{5/2} \sum_{\pm} (\mp i)^{5/2} e^{\pm it\rho} \delta(\hat{P} \mp \hat{X}).$$

Тем самым асимптотика  $U$  определяется значениями матрицы  $D^l(g) W(t\hat{q})$  в точках  $g\hat{P} = \pm \hat{X}$ . Согласно определению (17) векто-

ров  $\hat{P}$  и  $\hat{X}$ , в этих точках  $\hat{q} = \hat{r}$ ,  $g = g_{\pm} = g(\pi/2 \mp \pi/2, 0, 0)$ . Используя тождество  $D^l(g_{\pm}) = \pm I_{\pm}^l$ , получаем асимптотику (106).

Подставим теперь представление (106) в интеграл (104). При  $\rho \rightarrow \infty$  слагаемое со значком « $-$ » дает экспоненциально малый вклад, а вклад слагаемого с « $+$ » равен половине вычета подынтегральной функции в точке  $|q'| = \sqrt{E}$ . Он и определяет член асимптотики  $\Psi_{\beta A}$ , порожденный особенностью  $(q'^2 - E - i0)^{-1}$ .

Описанные выше вычисления приводят к следующему асимптотическому представлению для компонент  $\Psi_{\beta A}$ :

$$\Psi_{\beta A}(r, p_{\alpha}) \sim \sum_{\rho \rightarrow \infty} \sum_{B_{\beta}} \Psi_B(x_{\beta}) \frac{\exp(iE_B^{1/2} y_{\beta})}{y_{\beta}} \mathcal{Y}_B^l(\hat{r}) f_{BA}^l(E) + \rho^{-5/2} \exp(iE^{1/2} \rho) A_{\beta A}^l(\hat{r}, E), \quad (108)$$

где энергии  $E_B$  определены в (91), а матрица  $\mathcal{Y}_B^l$  равна сумме матриц (102):

$$\mathcal{Y}_B^l(\hat{r}) = -\frac{\pi}{2} \sum_k (-i)^k \mathcal{Y}_B^{(k)}(\hat{r}).$$

Вклад в сумму по  $B_{\beta}$  дают открытые каналы реакций  $(2 \rightarrow 2)$  с  $E_B > 0$ . Матрица  $f_{BA}^l$  состоит из амплитуд перестройки мишени, которые задают  $S$ -матрицу (93) процессов  $(2 \rightarrow 2)$ :

$$f_{BA}^l(E) = I_B^l \mathcal{H}_{BA}^l(E_B^{1/2}, E_A^{1/2}; E + i0) I_A^l.$$

Последнее слагаемое асимптотики (108) отвечает процессу рассеяния  $(2 \rightarrow 3)$ . В нем коэффициент при сферической волне представляет собой часть амплитуды развала, которая содержится в данной компоненте волновой функции:

$$A_{\beta A}^l(\hat{r}, E) = (\pi i/2)^{1/2} E^{3/4} T_{\beta A}^l(E^{1/2} \hat{r}, p_{\alpha}; E + i0) I_A^l.$$

Сумма этих амплитуд по всем компонентам пропорциональна ядру соответствующей  $S$ -матрицы (94).

Таким образом, асимптотика волновых функций описывается представлениями (99), (101) и (108).

**Волновые функции процессов  $(3 \rightarrow 2, 3)$ .** Эти волновые функции соответствуют волновым операторам  $U_0^{(+)}$ :

$$\Psi_0(r, q) = \int_M \mathcal{F}^l(r, q') U_0^{(+)}(q', q) dM(q').$$

Они удовлетворяют матричному уравнению Шредингера, эквивалентного сплетающему свойству (85):

$$(H^l - E \otimes I^l) \Psi_0(r, q) = 0, \quad E = q^2. \quad (109)$$

Тем самым столбцы матрицы  $\Psi_0$  суть волновые функции ветви  $(0, \infty)$  непрерывного спектра гамильтониана  $H^l$ . Они нумеруются значениями проекции полного орбитального момента  $l$  и описывают процессы рассеяния с тремя свободными частицами в начальном состоянии (точка  $q \in M$  задает относительные импульсы частиц).

Согласно представлениям (88) и (67) для ядра  $U_0^{(+)}$ , волновая функция  $\Psi_0$  равна сумме

$$\Psi_0 = \mathcal{F}^l + \sum_{\alpha} U_{\alpha} + \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}, \quad (110)$$

где слагаемые  $\mathcal{F}^l$  и  $U_{\alpha}$  порождены первыми членами равенств (88) и (76),

$$U_{\alpha}(r, q) = - \int_M \frac{\mathcal{F}^l(r, q') T_{\alpha}^l(q', q; E + i0)}{q'^2 - E - i0} dM(q'), \quad (111)$$

а  $\Phi_{\alpha}$  выражают вклад компонент  $T$ -матрицы  $W_{\alpha\beta}$ :

$$\Phi_{\alpha}(r, q) = - \sum_{\beta} \int_M \frac{\mathcal{F}^l(r, q') W_{\alpha\beta}(q', q; E + i0)}{q'^2 - E - i0} dM(q'). \quad (112)$$

По определению (51) ядро  $\mathcal{F}^l$  удовлетворяет свободному уравнению Шредингера  $(H_0^l - E \otimes I^l) \mathcal{F}^l = 0$ . Поэтому столбцы матрицы  $\mathcal{F}^l$  имеют смысл волновых функций системы трех невзаимодействующих частиц с фиксированным полным орбитальным моментом. По аналогии с обычной терминологией теории рассеяния мы будем называть в дальнейшем матрицу  $\mathcal{F}^l$  плоской волной во внутреннем пространстве. Напомним, что ее явный вид дается формулами (55), (57).

Слагаемые  $U_{\alpha}$  в (110) учитывают  $\delta$ -образные особенности  $T$ -матрицы, которые содержатся в ядрах  $T_{\alpha}$  [см. (70)]. В полной задаче трех частиц волновые функции  $(3 \rightarrow 2, 3)$  включают члены аналогичной структуры. Они описывают вклад в асимптотику процессов однократных двухчастичных столкновений. В нашем случае матрицы  $U_{\alpha}$  выражают вклад однократных двухчастичных столкновений при фиксированном полном орбитальном моменте системы.

Перейдем к анализу асимптотики волновой функции  $\Psi_0$ . Рассмотрим вначале ее компоненту  $\Phi_{\alpha}$ . В интеграле (112) ядра  $W_{\alpha\beta}$  имеют парные особенности, отраженные в представлении (77). Тем самым подынтегральная функция имеет по сути ту же структуру, что и в интеграле (100), асимптотика которого нами изучена. Повторяя проведенные при этом вычисления, получаем для  $\Phi_{\alpha}$  асимптотическое представление типа (108):

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha}(r, q) \sim \sum_{\rho \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} \psi_A(x_{\alpha}) \frac{\exp\{iE_A^{1/2} y_{\alpha}\}}{y_{\alpha}} \times \\ \times \mathcal{Z}_A^l(\hat{r}) f_{A0}^l(q) + \frac{\exp\{iE^{1/2} \rho\}}{\rho^{5/2}} \mathcal{A}_{\alpha 0}^l(\hat{r}, \hat{q}). \end{aligned} \quad (113)$$

Здесь матрицы  $f_{A0}^l$  суть амплитуды процессов ( $3 \rightarrow 2$ ) с образованием связанной пары  $\alpha$ . Они пропорциональны ядрам соответствующих  $S$ -матриц (95):

$$f_{A0}^l(q) = I_A^l \tilde{T}_A^l(E_A^{1/2}, q; E + i0).$$

Последнее слагаемое в (113) описывает процессы ( $3 \rightarrow 3$ ). Амплитуды  $\mathcal{A}_{\alpha 0}^l$  выражаются через компоненты  $T$ -матрицы  $W_{\alpha\beta}^l$ :

$$\mathcal{A}_{\alpha 0}^l(\hat{r}, q) = (\pi i/2)^{1/2} E^{3/4} \sum_{\beta} W_{\alpha\beta}^l(E^{1/2}\hat{r}, q; E + i0).$$

*Вклад однократных двухчастичных столкновений.* Явный вид матрицы  $U_{\alpha}$  дается следующим представлением, которое вытекает из ее определения (111) и равенств (55), (57) и (70) для ядер  $\mathcal{F}^l$  и  $T_{\alpha}$ :

$$U_{\alpha}(r, q) = \frac{2}{\pi} \sum_{l_1, l_2=0}^{\infty} j_{l_1}(p_{\alpha} y_{\alpha}) u_{\alpha}^{(l_2)}(x_{\alpha}, k_{\alpha}) \times \\ \times D^l(g_{\alpha}(r)) Q_{l_1}^l(\cos \theta_{\alpha}) C_{l_1 l_2}^l Q_{l_2}^l(\cos \theta'_{\alpha}) D^l(\tilde{g}_{\alpha}^{-1}(q)). \quad (114)$$

Оно записано в терминах координат Якоби (53) точек  $r$  и  $q$ . Функции  $u_{\alpha}^{(\lambda)}$  выражаются через  $T$ -матрицы парциальных парных гамильтонианов (71):

$$u_{\alpha}^{(\lambda)}(x, k) = - \int_0^{\infty} j_{\lambda}(k'x) \frac{t_{\alpha}^{(\lambda)}(k', k; k^2 + i0)}{k'^2 - k^2 - i0} k'^2 dk'.$$

Тем самым сумма  $\psi_{\alpha}^{(\lambda)}(x, k) = j_{\lambda}(kx) + u_{\alpha}^{(\lambda)}(x, k)$  представляет собой волновую функцию непрерывного спектра гамильтониана  $h_{\alpha}^{(\lambda)}$ . Асимптотика функции  $u_{\alpha}^{(\lambda)}$  согласно (103) выражается через фазу рассеяния  $\delta_{\alpha}^{(\lambda)}(k)$ , связанную с этим гамильтонианом:

$$u_{\alpha}^{(\lambda)}(x, k) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\exp[2i\delta_{\alpha}^{(\lambda)}(k)] - 1}{2ik} \frac{\exp(ikx - i\pi\lambda/2)}{x}. \quad (115)$$

Опишем теперь асимптотику матрицы  $U_{\alpha}$ . При  $y_{\alpha} \rightarrow \infty$  в (114) можно заменить сферические функции Бесселя их асимптотикой [16]. При этом по  $l_1$  возникает сумма произведений присоединенных полиномов Лежандра (59) и коэффициентов Клебша — Гордана (58). Эта сумма вычисляется с помощью равенств (П.5) и (П.3). В результа-



те получим представление, описывающее асимптотику  $U_\alpha$  в области  $x_\alpha \ll y_\alpha \rightarrow \infty$ :

$$U_\alpha(r, q) \underset{y_\alpha \rightarrow \infty}{\sim} (\pi i p_\alpha y_\alpha)^{-1} \sum_{\pm} e^{\pm i p_\alpha y_\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} u_\alpha^{(\lambda)}(x_\alpha, k_\alpha) \times \\ \times i^\lambda D^l(g_\alpha(r)) I_\pm^l d^l(\pm \cos \theta_\alpha) Q_\lambda^l(\pm \cos \theta_\alpha) Q_\lambda^l(\cos \theta'_\alpha) D^l(\tilde{g}_\alpha^{-1}(q)), \quad (116)$$

где матрицы  $I_\pm^l$  и  $d^l$  определены равенствами (107) и (П. 4).

При  $x_\alpha \rightarrow \infty$  в (116) можно заменить функции  $u_\alpha^{(\lambda)}$  их асимптотикой (115):

$$U_\alpha = \sum_{\pm} U_\alpha^{(\pm)}, \quad (117) \\ U_\alpha^{(\pm)}(r, q) \sim A_\alpha^{(\pm)}(r, q) \exp\{i V \bar{E} Z_\alpha^{(\pm)}\}.$$

Это представление описывает асимптотику матрицы  $U_\alpha$  в области  $x_\alpha \sim y_\alpha \rightarrow \infty$ . Амплитуды  $A_\alpha^{(\pm)}$  имеют вид

$$A_\alpha^{(\pm)}(r, q) = (\pi i p_\alpha x_\alpha y_\alpha)^{-1} D^l(g_\alpha(r)) I_\pm^l d^l(\pm \cos \theta_\alpha) \times \\ \times f_\alpha^{(\pm)}(k_\alpha, \theta_\alpha, \theta'_\alpha) D^l(\tilde{g}_\alpha^{-1}(q)), \quad (118)$$

где  $f_\alpha^{(\pm)}$  — диагональные матрицы, которые выражаются через двухчастичные фазы рассеяния:

$$f_\alpha^{(\pm)}(k, \theta, \theta') = (2ik)^{-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \{\exp[2i\delta_\alpha^{(\lambda)}(k)] - 1\} Q_\lambda^l(\pm \cos \theta) Q_\lambda^l(\cos \theta'). \quad (119)$$

Показатели экспонент в (117) равны

$$Z_\alpha^{(\pm)}(r, q) = E^{-1/2}(k_\alpha x_\alpha \pm p_\alpha y_\alpha). \quad (120)$$

В следующем разделе мы покажем, что функции  $Z_\alpha$  удовлетворяют уравнению эйконала во внутреннем пространстве. Тем самым они имеют смысл эйконалов однократных двухчастичных столкновений в системах с фиксированным полным орбитальным моментом.

Отметим, что амплитуды (119) суть гладкие функции всех своих переменных для быстроубывающих парных потенциалов (47) с  $\varepsilon > 2$ . При  $\varepsilon \leq 2$  амплитуды  $f_\alpha^{(\pm)}$  имеют низкоэнергетические особенности при  $k \rightarrow 0$  и угловые сингулярности при  $\theta' = \theta (f_\alpha^{(+)})$  и  $\theta = \pi - \theta' (f_\alpha^{(-)})$ . Особенности этих амплитуд можно исследовать методами, развитыми в работах [19].

Таким образом, мы описали асимптотику слагаемых волновой функции  $\Psi_0$ , отвечающих процессам рассеяния ( $3 \rightarrow 2,3$ ) и однократным двухчастичным столкновениям. Изучим теперь асимптотику плоской волны  $\mathcal{F}^l$ . Эта задача нетривиальна, поскольку явные выражения (55), (57) для плоской волны не отражают ее поведения

при  $\rho \rightarrow \infty$ . Дело в том, что в сумме (57) нельзя почленно перейти к пределу  $\rho \rightarrow \infty$ , так как возникающий при этом ряд расходится.

**Асимптотика плоской волны.** Мы изучим эту асимптотику на основе интегрального представления (56) для ядра  $\mathcal{F}^l$ , связанного с плоской волной равенством (55). Запишем интеграл (56) в терминах углов Эйлера ( $\phi^1 \phi^2 \phi^3$ ), которые задают параметризацию (16) элементов группы  $SO(3)$ . Возникающие при этом интегралы по углам  $\phi^1$  и  $\phi^3$  выражаются через функции Бесселя. Оставшийся интеграл по  $\phi \equiv \phi^2$  имеет вид

$$\mathcal{F}_\alpha^l(r, q) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \sin \phi \exp \{i \cos \phi (k_\alpha x_\alpha \cos \theta'_\alpha + p_\alpha y_\alpha \cos \theta_\alpha)\} \times \\ \times J^l(p_\alpha y_\alpha \sin \theta_\alpha \sin \phi) d^l(\cos \phi) I_-^l J^l(k_\alpha x_\alpha \sin \theta'_\alpha \sin \phi), \quad (121)$$

где матрицы  $I_-^l$  и  $d^l$  определены в (107) и (П. 1), а  $J^l$  — диагональные матрицы из функций Бесселя:  $[J^l(x)]_{mn} = \delta_{mn} i^n J_n(x)$ .

Пусть  $\sin \theta_\alpha \neq 0$  и  $\sin \theta'_\alpha \neq 0$ , т. е. точки  $r$  и  $q$  отделены от границы (45) внутреннего пространства  $M$ . Тогда в (121) можно заменить функции Бесселя их асимптотикой при  $y_\alpha \rightarrow \infty$  и  $x_\alpha \rightarrow \infty$ . При этом ядро  $\mathcal{F}_\alpha^l$  разбивается на сумму четырех интегралов от быстроосциллирующих экспонент. Показатель каждой из них представим в виде произведения большого параметра, не зависящего от  $\phi$ , на косинус некоторого угла:

$$\mathcal{F}_\alpha^l(r, q) \sim (16\pi^4 x_\alpha y_\alpha \sin \theta_\alpha k_\alpha p_\alpha \sin \theta'_\alpha)^{-1/2} \sum_{h=1}^2 \sum_{\pm} (\pm i)^{h-2} \times \\ \times \int_0^\pi d\phi \exp \{i \sqrt{E} Z_h \cos(\phi \pm \Delta_h)\} (\delta_{h1} I_{\mp}^l + \delta_{h2} I_{\pm}^l) d^l(\cos \phi) I_{\pm}^l. \quad (122)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} Z_h(r, q) &= E^{-1/2} [k_\alpha^2 x_\alpha^2 + p_\alpha^2 y_\alpha^2 + 2k_\alpha p_\alpha x_\alpha y_\alpha \cos(\theta_\alpha + (-1)^h \theta'_\alpha)]^{1/2}, \\ \cos \Delta_h &= (k_\alpha x_\alpha \cos \theta'_\alpha + p_\alpha y_\alpha \cos \theta_\alpha) / (\sqrt{E} Z_h), \\ \sin \Delta_h &= (k_\alpha x_\alpha \sin \theta'_\alpha - (-1)^h p_\alpha y_\alpha \sin \theta_\alpha) / \sqrt{E} Z_h. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Вычислим теперь точки стационарной фазы  $\phi_h^{(\pm)}$  интегралов (122). Рассмотрим случай  $k=1$ . Из (123) вытекает, что  $\Delta_1 \in [0, \pi]$ , поэтому  $\phi_1^{(+)} = \pi - \Delta_1$ ,  $\phi_1^{(-)} = \Delta_1$ . При  $k=2$  положение точек стационарной фазы  $\phi_2^{(\pm)}$  зависит от знака параметра  $\sin \Delta_2$ :

$$\sin \Delta_2 > 0: \phi_2^{(+)} = \pi - \Delta_2, \phi_2^{(-)} = \Delta_2, \quad (124a)$$

$$\sin \Delta_2 < 0: \phi_2^{(+)} = 2\pi - \Delta_2, \phi_2^{(-)} = \Delta_2 - \pi. \quad (124b)$$

Тем самым условия  $\text{sign}(\sin \Delta_2) = \mp 1$  разбивают внутреннее пространство  $M$  на две области  $\Gamma_\alpha$  и  $M/\Gamma_\alpha$ , в которых асимптотика инте-

гралов (122) с  $k = 2$  имеет различный вид. Найдем область  $\Gamma_\alpha$ , выделенную неравенством

$$k_\alpha x_\alpha \sin \theta'_\alpha - p_\alpha y_\alpha \sin \theta_\alpha < 0. \tag{125}$$

С этой целью реализуем  $M$  как векторное пространство (6). Умножив неравенство (125) на  $x_\alpha$ , можно записать его в терминах скалярного произведения (9):

$$(\hat{r}, \hat{n}_\alpha(q))_M > \cos \omega_\alpha(q),$$

где  $\cos \omega_\alpha = k_\alpha \sin \theta'_\alpha (p_\alpha^2 + k_\alpha^2 \sin^2 \theta'_\alpha)^{-1/2}$ , а  $\hat{n}_\alpha(q)$  — единичный вектор с координатами  $(-\cos \omega_\alpha, 0, \sin \omega_\alpha)$ . Следовательно,  $\Gamma_\alpha$  представляет собой внутренность конуса с осью симметрии  $\hat{n}_\alpha$  и углом раствора  $2\omega_\alpha$  (рис. 1).

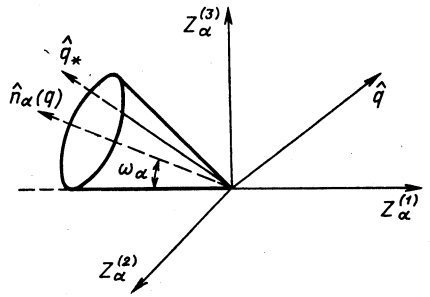


Рис. 1. Конус  $\Gamma_\alpha$  в  $R^3$ , внутри которого выполнено неравенство (92). Касается плоскости  $(Z_\alpha^{(1)}, Z_\alpha^{(2)})$  по лучу  $(-1, 0, 0)$ . На поверхности  $\Gamma_\alpha$  лежит луч  $\hat{q}_*$  — зеркальное отражение луча  $\hat{q}$  от плоскости  $(Z_\alpha^{(1)}, Z_\alpha^{(2)})$

Итак, при  $r \rightarrow \infty$  в  $\Gamma_\alpha$  точками стационарной фазы интегралов (122) с  $k = 2$  являются углы (124б), а вне  $\Gamma_\alpha$  — углы (124а).

Дальнейшее вычисление асимптотик интегралов (122) проводится по стандартным формулам метода стационарной фазы [19] и приводит к следующему представлению для плоской волны:

$$\mathcal{F}^l = \sum_{k=1}^2 \sum_{\pm} \mathcal{F}_k^{(\pm)}, \tag{126}$$

$$\mathcal{F}_k^{(\pm)}(r, q) \sim [8\pi^3 \sigma(r) \sigma(q) \cos(\Omega_k/2)]^{-1/2} \times A_k^{(\pm)}(\hat{r}, \hat{q}) \exp\{\pm iE^{1/2}Z_k \pm (-1)^k i\pi/4\}.$$

Напомним, что функция  $\sigma$  определена в (28)—(30). Она задает детерминант тензора инерции (14). Углы  $\Omega_k \in [0, \pi]$  зависят от направленных векторов  $r$  и  $q$  в реализации  $M$  как векторного пространства (6):

$$\cos \Omega_1 = (\hat{r}, \hat{q}_M), \quad \cos \Omega_2 = -(\hat{r}, \hat{q}_*M),$$

где  $\hat{q}_*$  — отражение вектора  $\hat{q}$  от границы  $R_+^3$  (см. рис. 1), т. е. гиперсферические координаты  $(\chi_\alpha^* \theta_\alpha^*)$  и  $(\chi_\alpha \theta_\alpha)$  векторов  $\hat{q}_*$  и  $\hat{q}$  связаны равенствами  $\chi_\alpha^* = \pi - \chi_\alpha$ ,  $\theta_\alpha^* = \pi - \theta_\alpha$ .

Выражения (123) для функций  $Z_k$  можно переписать в элегантном виде в терминах углов  $\Omega_k$ :

$$Z_k(r, q) = \rho \cos(\Omega_k/2). \quad (127)$$

В следующем разделе мы покажем, что функции  $Z_k$  удовлетворяют уравнению эйконала во внутреннем пространстве. Тем самым они имеют смысл эйконалов плоской волны для систем с фиксированным орбитальным моментом.

Амплитуды  $A_k^{(\pm)}$  зависят от углов (123) и задаются произведением матриц (105) и (II.1):

$$A_k^{(\pm)}(\hat{r}, \hat{q}) = D^l(g_\alpha(r)) B_k^{(\pm)}(\Delta_k) D^l(\tilde{g}_\alpha^{-1}(q)), \quad (128)$$

где

$$B_1^{(\pm)}(\Delta_1) = I_\pm^l d^l(\pm \cos \Delta_1) I_\mp^l, \\ B_2^{(\pm)}(\Delta_2) = \begin{cases} I_\pm^l d^l(\pm \cos \Delta_2) I_\pm^l, & r \in \Gamma_\alpha, \\ I_\mp^l d^l(\pm \cos \Delta_2) I_\mp^l, & r \in M/\Gamma_\alpha. \end{cases}$$

Амплитуды  $B_2^{(\pm)}$  имеют разрыв на границе  $\Gamma_\alpha$  [на ней  $\sin \Delta_2 = 0$  и точки стационарной фазы (124) сливаются с концами промежутка интегрирования в (122)]. Переходный режим этих амплитуд в окрестности границы  $\Gamma_\alpha$  описывается интегралами Френеля  $\Phi_\pm(t) =$

$$= (\mp i/\pi)^{1/2} \int_t^\infty dx \exp(\pm ix^2):$$

$$B_2^{(+)} = \sum_{\pm} \Phi_-(\pm \xi) I_\pm^l d^l(\cos \Delta_2) I_\pm^l,$$

$$B_2^{(-)} = \sum_{\pm} \Phi_+(\pm \xi) I_\mp^l d^l(-\cos \Delta_2) I_\mp^l,$$

где  $\xi = (\sqrt{E}Z_2/2)^{1/2} \sin \Delta_2$ .

Отметим, что асимптотика (126) неверна в особом направлении  $\hat{r} = \hat{q}_*$ , которое лежит на поверхности конуса  $\Gamma_\alpha$  (см. рис. 1). Дело в том, что  $Z_2(r, q) = 0$  при  $\hat{r} = \hat{q}_*$ , поэтому в интегралах (122) с  $k = 2$  нельзя перейти к пределу  $Z_2 \rightarrow \infty$  в окрестности этого направления. В результате при  $\hat{r} = \hat{q}_*$  слагаемые плоской волны  $\mathcal{F}_2^{(\pm)}$  убывают медленнее, чем в других направлениях внутреннего пространства. Мы исследуем этот особый случай в следующем разделе.

**Уравнения Фаддеева для компонент волновых функций.** Построенные в предыдущих параграфах асимптотики волновых функций представляют собой граничные условия, которые фиксируют соответствующие решения уравнений Шредингера (98) и (109). Как и в полной задаче трех частиц, эти уравнения эквивалентны системе уравнений Фаддеева для компонент волновых функций.

Компоненты  $\Psi_{\beta A}$  из (99) волновых функций (2  $\rightarrow$  2,3) удовлетворяют неоднородной системе уравнений Фаддеева

$$(H_0^l + V_\beta \otimes I^l - E \otimes I^l) \Psi_{\beta A} = -V_\beta \{ \delta_{\alpha\beta} \chi_A + \sum_{\gamma \neq \beta} \Psi_{\gamma A} \}, \quad (129)$$

где матрицы  $\chi_A$  определены представлением (101). Они описывают волновые функции начального состояния. Асимптотические граничные условия (108) для компонент  $\Psi_{\beta A}$  однозначно фиксируют решение уравнений (129).

Аналогичный вид имеют уравнения Фаддеева для компонент  $\Psi_\alpha = U_\alpha + \Phi_\alpha$  волновых функций (3  $\rightarrow$  2,3) [см. (110)]:

$$(H_0^l + V_\alpha \otimes I^l - E \otimes I^l) \Psi_\alpha = -V_\alpha \{ \delta_{\alpha 1} \mathcal{F}^l + \sum_{\beta \neq \alpha} \Psi_\beta \},$$

где  $\mathcal{F}^l$  — плоская волна (55). Граничные условия задаются асимптотиками (113) и (114) функций  $U_\alpha$  и  $\Phi_\alpha$ .

Отметим, что кроме указанных асимптотических граничных условий компоненты волновых функций должны удовлетворять также граничному условию (46) на границе внутреннего пространства.

#### 4. СИСТЕМЫ С КУЛОНОВСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

В этом разделе исследуется задача рассеяния для гамильтониана  $H^l$ , в котором парные потенциалы содержат дальнедействующую кулоновскую часть,

$$V_\alpha(x_\alpha) = n_\alpha/x_\alpha + v_\alpha(x_\alpha), \quad (130)$$

а быстроубывающие поправки  $v_\alpha$  удовлетворяют условию (59). Мы опишем асимптотику волновых функций и сформулируем определяющие их граничные задачи на основе уравнения Шредингера и уравнений Фаддеева. Основное внимание уделяется изучению асимптотики волновой функции  $\Psi_0$ , отвечающей процессам (3  $\rightarrow$  2,3). Исследование функций  $\Psi_A$  гораздо проще в техническом отношении. Как и в полной задаче трех частиц, кулоновское взаимодействие приводит к достаточно очевидным модификациям в асимптотике  $\Psi_A$  по сравнению со случаем быстроубывающих потенциалов. Мы опишем эти модификации, не останавливаясь на тривиальных обоснованиях.

Асимптотику функций  $\Psi_0$  мы построим методом эйконала, который применялся и в полной задаче. В рамках метода эйконала асимптотики волновых функций кулоновских систем определяются тем же набором асимптотических волн, что и в случае быстроубывающих потенциалов. Кулоновские эффекты учитываются дополнительными фазами, искажающими эти волны. Данные фазы можно вычислить, решая уравнение эйконала, связанное с оператором кинетической энергии. В нашем случае это уравнение эйконала на римановом многообразии  $M$  с метрикой (22).

**Асимптотика волновых функций (2 → 2,3) и уравнения Фаддеева для их компонент. Асимптотики.** Для кулоновских систем волновые функции процессов (2 → 2,3) можно представить в виде суммы компонент, аналогичной (99):

$$\Psi_A(r, p_\alpha) = \chi_A^{(c)}(r, p_\alpha) + \sum_{\beta} \Psi_{\beta A}^{(c)}(r, p_\alpha),$$

где матрица  $\chi_A^{(c)}$  имеет смысл падающей кулоновской волны. Она описывает движение третьей частицы в кулоновском поле связанной пары  $\alpha$  и удовлетворяет уравнению Шредингера с эффективным гамильтонианом

$$H_\alpha^{(c)} = H_0^l + V_\alpha \otimes I^l + \frac{n_{\alpha\alpha}}{y_\alpha} \otimes I^l,$$

где  $n_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} n_\beta / |s_{\beta\alpha}|$  [кинематические коэффициенты  $s_{\beta\alpha}$  определены в (2)]. Оператор  $H_\alpha^{(c)}$  допускает разделение переменных, поэтому матрица  $\chi_A^{(c)}$  вычисляется явно:

$$\chi_A^{(c)}(r, p_\alpha) = \psi_A(x_\alpha) \sum_{k=|l-\lambda|}^{l+\lambda} F_k(\eta_A, p_\alpha y_\alpha) \mathcal{Y}_A^{(k)}(\hat{r}). \quad (131)$$

Это представление аналогично (101) и переходит в него при  $\eta_{\alpha\alpha} = 0$ . В нем  $\eta_A$  — стандартные кулоновские параметры,

$$\eta_A = n_{\alpha\alpha} (2E_A^{1/2})^{-1},$$

а  $F_k$  — регулярные кулоновские волновые функции,

$$F_k(\eta, z) = [2^k e^{-\pi\eta/2} \Gamma(k+1+i\eta) / (2k+1)!] z^k e^{-iz} \Phi(k+1-i\eta, 2k+2, 2iz),$$

где  $\Phi$  — вырожденная гипергеометрическая функция [16].

Асимптотика компонент  $\Psi_{\beta A}^{(c)}$  содержит сферические волны из (108):

$$\Psi_{\beta A}^{(c)}(r, p_\alpha) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{B_\beta} \psi_B(x_\beta) \frac{\exp\{iE_B^{1/2} y_\beta + iW_B(y_\beta)\}}{y_\beta} \mathcal{Y}_B^l(\hat{r}) f_{BA}^l(E) + \frac{\exp\{iE^{1/2} \rho + iW_0(r)\}}{\rho^{5/2}} \mathcal{A}_{\beta A}^l(\hat{r}, E), \quad (132)$$

которые искажаются кулоновскими фазами

$$W_B(y_\beta) = -\eta_B \ln(2\sqrt{E_B} y_\beta),$$

$$W_0(r) = -\frac{\rho}{2\sqrt{E}} \sum_{\gamma} \frac{n_\gamma}{x_\gamma} \ln(2\sqrt{E} \rho). \quad (133)$$

Последнее слагаемое в (132) описывает процессы развала ( $2 \rightarrow 3$ ), а матрицы  $f_{BA}^l$  определяют амплитуды неупругих процессов ( $2 \rightarrow 2$ ). Амплитуды упругого рассеяния ( $2 \rightarrow 2$ ) равны сумме

$$f_A^l(E) = f_{AA}^l(E) + f_{A,c}^l(E),$$

где  $f_{A,c}^l$  — матрица кулоновских амплитуд, порожденных функцией  $\chi_A^{(c)}$ :

$$[f_{A,c}^l(E)]_{mn} = (-1)^{m+n+1} [i\pi \sqrt{E_A} (2l+1)]^{-1} \sum_{k=|l-\lambda|}^{l+\lambda} (2k+1) \times \\ \times \exp[2i\delta_k^{(c)}(\eta_A)] \langle \lambda m k 0 | l m \rangle \langle \lambda n k 0 | l n \rangle.$$

Здесь  $\delta_k^{(c)}(\eta)$  — стандартные кулоновские фазы:  $\delta_k^{(c)}(\eta) = \arg \Gamma(k+1+i\eta)$ .

Уравнения Фаддеева для компонент  $\Psi_{\beta A}^{(c)}$  по виду совпадают с соответствующими уравнениями в полной задаче трех заряженных частиц:

$$\{H_0^l + V_\beta \otimes I^l + \sum_{\gamma \neq \beta} V_\gamma^{(0)} \otimes I^l - E \otimes I^l\} \Psi_{\beta A} = F_{\beta A} - \hat{V}_\beta \sum_{\gamma \neq \beta} \Psi_{\gamma A}.$$

Функции  $V_\alpha^{(0)}$  и  $\hat{V}_\alpha$  задают стандартное [11] разбиение парных потенциалов (130) на дальнедействующую и быстроубывающую части,  $V_\alpha = \hat{V}_\alpha + V_\alpha^{(0)}$ . Неоднородные члены этих уравнений выражаются через волновую функцию (131) начального состояния:

$$F_{\beta A} = \left\{ \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{n_{\alpha\alpha}}{y_\alpha} - \sum_{\gamma \neq \alpha} V_\gamma^{(0)} \right) + (\delta_{\alpha\beta} - 1) \hat{V}_\beta \right\} \chi_A^{(c)}.$$

**Метод эйконала.** Опишем схему построения асимптотики волновой функции  $\Psi_0$ , основанную на уравнении эйконала во внутреннем пространстве.

Напомним, что кинетическая часть гамильтониана  $H^l$  задается дифференциальным оператором (43) на римановом многообразии  $M$ . Будем искать решение уравнения Шредингера

$$(H_0^l + V \otimes I^l - E \otimes I^l) \Psi = 0 \quad (134)$$

в виде

$$\Psi = A e^{iS}, \quad (135)$$

где  $S$  — вещественная функция;  $A$  — матрица  $(2l+1) \times (2l+1)$ . Подставив это представление в (134), получим систему уравнений

$$(K_\tau^* (dS, dS) + V - E) \otimes I^l = -A^{-1} H_0^l A, \quad (136)$$

$$2 \sum_{i,j} b^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} S \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right)_l^* A - A \Delta_M S = 0. \quad (137)$$

Здесь  $dS \in T_r^*M$  — 1-форма градиента, а  $K_r^*$  — скалярное произведение (24) в кокасательном пространстве  $T_r^*M$ . Матричные операторы  $(\partial/\partial\xi^j)^*$  определены в (43), а  $\Delta_M$  — дифференциальный оператор,

$$\Delta_M = - [\sigma b^{1/2}]^{-1} \sum_{i,j} (\partial/\partial\xi^i) \sigma b^{1/2} b^{ij} (\partial/\partial\xi^j).$$

Отметим, что он совпадает с оператором кинетической энергии (43) при  $l = 0$ .

Предположим теперь, что амплитуда  $A$  на больших расстояниях изменяется достаточно медленно:

$$\| A^{-1} H_0^! A \| \ll |V(r)|,$$

где  $\| \cdot \|$  — обычная норма матрицы. Тогда в уравнении (136) можно пренебречь правой частью. В результате оно принимает вид уравнения Гамильтона — Якоби на римановом многообразии  $M$ :

$$K_r^*(dS, dS) = E - V(r). \quad (138)$$

Равенство (137) имеет смысл соответствующего уравнения непрерывности.

При  $r \rightarrow \infty$  потенциал в уравнении Гамильтона — Якоби (138) есть малое возмущение, поэтому асимптотически его решение равно сумме

$$S(r) = \sqrt{E} Z(r) + W(r), \quad (139)$$

где функция  $Z$  удовлетворяет уравнению эйконала

$$K_r^*(dZ, dZ) = 1, \quad (140)$$

а фаза  $W$  в старшем порядке определяется уравнением

$$K_r^*(dZ, dW) = -(2\sqrt{E})^{-1} V(r). \quad (141)$$

Оно легко интегрируется. Введем на многообразии  $M$  векторное поле  $\partial/\partial Z$ . Пусть  $\gamma_r(t)$  — интегральная кривая этого поля, которая при  $t = Z$  проходит через заданную точку  $r \in M$ . Тогда (141) можно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения на кривой  $\gamma_r$ ,

$$\frac{\partial W(\gamma_r(t))}{\partial t} = -(2\sqrt{E})^{-1} V(\gamma_r(t)), \quad (142)$$

решение которого имеет вид

$$W(r) = -(2\sqrt{E})^{-1} \int^Z V(\gamma_r(t)) dt + C(\xi_Z^2, \xi_Z^3). \quad (143)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования. Она может зависеть от координат  $\xi_Z^i$ , ортогональных эйконалау  $Z$ :

$$K_r^*(dZ, d\xi_Z^i) = 0, \quad K_r^*(d\xi_Z^i, d\xi_Z^j) = \delta_{ij} K_r^*(d\xi_Z^i, d\xi_Z^j). \quad (144)$$



Ясно, что при  $Z \rightarrow \infty$  вклад в фазу (143) дают только медленноубывающие слагаемые потенциала.

Таким образом, каждому решению уравнения эйконала (140) соответствует асимптотическое решение (135) уравнения Шредингера. Его амплитуда определяется уравнением непрерывности (137), а фаза равна сумме (139) эйконала и добавочной фазы (143). Перейдем теперь к построению асимптотических решений, связанных с волновой функцией  $\Psi_0$  гамильтониана  $H^I$ .

**Асимптотика волновых функций (3  $\rightarrow$  2,3).** В предыдущем разделе мы выяснили, что в случае быстроубывающих потенциалов асимптотика волновых функций  $\Psi_0$  определяется следующим набором эйконалов: а) эйконалы плоской волны  $Z = \pm Z_k$  ( $k = 1, 2$ ); б) эйконалы однократных двухчастичных столкновений  $Z = Z_\alpha^{(\pm)}$ ; в) сферический эйконал  $Z = \rho$ . Непосредственным вычислением можно проверить, что все эти эйконалы удовлетворяют уравнению эйконала (140), а соответствующие им амплитуды в представлениях (113), (117) и (126) — уравнению непрерывности (137). Тем самым дело сводится к вычислению фазовых поправок (143) к этим эйконалам, порожденных кулоновским потенциалом

$$V_c(r) = \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{x_{\alpha}}. \tag{145}$$

*Сферический эйконал  $Z = \rho$ .* В качестве координат, ортогональных к этому эйконалу, можно взять гиперсферические координаты  $(\chi_{\alpha}, \theta_{\alpha})$  точки  $r$ . Интегральные кривые векторного поля  $\partial/\partial\rho$  суть лучи  $\{\chi_{\alpha} = \text{const}, \theta_{\alpha} = \text{const}\}$ . Фаза (143) легко вычисляется и описывается формулой (133). Соответствующее асимптотическое решение совпадает с последним членом асимптотики (132) волновых функций  $\Psi_A$ .

*Эйконалы плоской волны  $Z = \pm Z_k$  ( $k = 1, 2$ ).* Определим вначале внутренние координаты, ортогональные эйконалам  $Z_k$  в смысле (144). Заметим, что выражение (127) для этих эйконалов очень похоже на определение (13) координаты Якоби  $x_{\alpha}$ . Они отличаются только тем, что полярные углы точки  $r$  отсчитываются от разных направлений. Пусть  $(\Omega_k, \Phi_k^{(\alpha)})$  — сферические координаты вектора  $\hat{r}$  относительно оси  $\hat{q}_k$  ( $\hat{q}_1 = \hat{q}, \hat{q}_2 = -\hat{q}_*$ ). Ясно, что величины  $(Z_k, u_k = \rho \sin(\Omega_k/2), \phi_k^{(\alpha)})$  имеют смысл координат Якоби точки  $r$ , построенных по отношению к оси  $\hat{q}_k$ . Поскольку метрика (22) внутреннего пространства инвариантна относительно вращений, координаты  $(Z_k, u_k, \phi_k^{(\alpha)})$  ортогональны,

$$K_r = dZ_k^2 + du_k^2 + \frac{Z_k^2 u_k^2}{Z_k^2 + u_k^2} [d\phi_k^{(\alpha)}]^2. \tag{146}$$

При этом углы  $\Omega_k, \phi_k^{(\alpha)}$  связаны с гиперсферическими координатами  $(\chi_\alpha \theta_\alpha)$  преобразованием поворота в  $R_+^3$ :

$$\begin{aligned} & (\cos \chi_\alpha, \sin \chi_\alpha, \cos \theta_\alpha, \sin \chi_\alpha \sin \theta_\alpha)^T = \\ & = g_k(\hat{g}) (\cos \Omega_k, \sin \Omega_k \cos \phi_k^{(\alpha)}, \sin \Omega_k \sin \phi_k^{(\alpha)})^T, \end{aligned} \quad (147)$$

которое переводит ось  $\hat{e}_1 = (1, 0, 0)$  в  $\hat{g}_k$ . Оно задается матрицей

$$g_k(\hat{g}) = \begin{pmatrix} \cos \chi'_\alpha & -\sin \chi'_\alpha & 0 \\ \sin \chi'_\alpha \cos \theta'_\alpha & \cos \chi'_\alpha \cos \theta'_\alpha & (-1)^k \sin \theta'_\alpha \\ (-1)^{k+1} \sin \chi'_\alpha \sin \theta'_\alpha & (-1)^{k+1} \cos \chi'_\alpha \sin \theta'_\alpha & \cos \theta'_\alpha \end{pmatrix}, \quad (148)$$

где  $(\chi'_\alpha \theta'_\alpha)$  — гиперсферические координаты точки  $\hat{g}$ .

Отметим, что углы  $\phi_k^{(\alpha)}$  с разными  $\alpha$  различаются на константу:

$$\begin{aligned} \phi_k^{(\beta)} &= \phi_k^{(\alpha)} - \delta_{\beta\alpha}, \\ \sin \delta_{\beta\alpha} &= \sin \omega_{\beta\alpha} \sin \theta'_\alpha / \sin \chi'_\beta, \\ \cos \delta_{\beta\alpha} &= (\cos \omega_{\beta\alpha} \sin \chi'_\alpha - \sin \omega_{\beta\alpha} \cos \chi'_\alpha \cos \theta'_\alpha) / \sin \chi'_\beta, \end{aligned} \quad (149)$$

где углы  $\omega_{\beta\alpha}$  определены в (10).

Выразим теперь с помощью соотношения (148) координаты Якоби через ортогональные координаты  $Z_k, u_k, \phi_k^{(\alpha)}$ :

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \left[ Z_k^2 \cos^2 \frac{\chi'_\alpha}{2} + u_k^2 \sin^2 \frac{\chi'_\alpha}{2} - Z_k u_k \cos \phi_k^{(\alpha)} \sin \chi'_\alpha \right]^{1/2}, \\ y_\alpha &= \left[ Z_k^2 \sin^2 \frac{\chi'_\alpha}{2} + u_k^2 \cos^2 \frac{\chi'_\alpha}{2} + Z_k u_k \cos \phi_k^{(\alpha)} \sin \chi'_\alpha \right]^{1/2}, \\ x_\alpha y_\alpha \cos \theta_\alpha &= \frac{1}{2} (Z_k^2 - u_k^2) \sin \chi'_\alpha \cos \theta'_\alpha + \\ & + Z_k u_k (\cos \chi'_\alpha \cos \theta'_\alpha \cos \phi_k^{(\alpha)} + (-1)^k \sin \theta'_\alpha \sin \phi_k^{(\alpha)}). \end{aligned} \quad (150)$$

При фиксированных  $u_k, \phi_k^{(\alpha)}$  и  $Z_k = t \in [0, \infty)$  эти формулы параметризуют интегральные кривые векторных полей  $\partial/\partial Z_k$ . Равенство (150) задает кулоновский потенциал (145) на этих кривых. Вычисление интеграла (143) приводит к следующим выражениям для фаз, соответствующих эйконалам  $\pm Z_k$ :

$$W_k^{(\pm)}(r, q) = \sum_\alpha \eta_\alpha \ln [2k_\alpha x_\alpha (1 \mp \zeta_\alpha^{(k)}(\hat{r}, \hat{q}))], \quad (151)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_\alpha &= n_\alpha / (2k_\alpha), \\ \zeta_\alpha^{(k)} &= \frac{k_\alpha Z_k - p_\alpha u_k \cos \phi_k^{(\alpha)}}{\sqrt{E} x_\alpha} = \frac{k_\alpha x_\alpha + p_\alpha y_\alpha \cos(\theta_\alpha + (-1)^k \theta'_\alpha)}{\sqrt{E} Z_k}. \end{aligned}$$

Такие фазы отвечают выбору нулевых констант интегрирования в (143), что согласовано с аналогичным выбором в полной задаче трех заряженных частиц.

Соответствующее асимптотическое решение уравнения Шредингера описывается представлением (126), в котором эйконалы искажаются кулоновскими фазами:

$$\mathcal{F}_c^l = \sum_{k=1}^2 \sum_{\pm} \mathcal{F}_{k,c}^{(\pm)},$$

$$\mathcal{F}_{k,c}^{(\pm)}(r, q) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} [8\pi^3 \sigma(r) \sigma(q) \cos(\Omega_k/2)]^{-1/2} \times$$

$$\times A_k^{(\pm)}(\hat{r}, \hat{q}) \exp\{\pm i\sqrt{E} Z_k + iW_k^{(\pm)} \pm (-1)^k i\pi/4\}. \quad (152)$$

Эта асимптотика неверна в окрестности двух особых направлений:

$$i) \hat{r} = \hat{q} \quad (\Omega_1 = 0); \quad ii) \hat{r} = \hat{q}_* \quad (\Omega_2 = \pi). \quad (153)$$

Первое из них имеет смысл направления рассеяния вперед. В этом направлении  $\zeta_{\alpha}^{(1)} = 1$  и  $W_1^{(+)} = \infty$ . Аналогичный эффект хорошо известен и в полной задаче трех частиц — кулоновские фазы, искажающие плоскую волну, сингулярны в направлении рассеяния вперед. Наличие особого направления ii) не связано с дальнодействием кулоновского потенциала. В предыдущем разделе мы видели, что в этом направлении неверна исходная асимптотика (126) плоской волны. Мы отложим пока анализ асимптотики функции  $\mathcal{F}_c^l$  в особых направлениях (153) и перейдем к построению асимптотических решений, порожденных эйконалами  $Z_{\alpha}^{(\pm)}$ .

Эйконалы однократных двухчастичных столкновений  $Z = Z_{\alpha}^{(\pm)}$ . Набор подходящих ортогональных координат в этом случае образуют переменные  $(Z_{\alpha}^{(\pm)}, u_{\alpha}^{(\pm)} \theta_{\alpha})$ , где

$$u_{\alpha}^{(\pm)} = (k_{\alpha} y_{\alpha} \mp p_{\alpha} x_{\alpha}) E^{-1/2}.$$

Действительно, согласно определению (120) эйконалов  $Z_{\alpha}^{(\pm)}$  переход от координат Якоби  $(x_{\alpha}, y_{\alpha})$  к  $(Z_{\alpha}^{(\pm)}, u_{\alpha}^{(\pm)})$  осуществляется поворотом в плоскости  $x_{\alpha}, y_{\alpha}$ . Так как радиальная часть метрики (30) инвариантна относительно таких поворотов, введенные координаты удовлетворяют критерию ортогональности (144). Интегральные кривые векторных полей  $\partial/\partial Z_{\alpha}^{(\pm)}$  определяются обратным поворотом

$$x_{\alpha} = (k_{\alpha} Z_{\alpha}^{(\pm)} \mp p_{\alpha} u_{\alpha}^{(\pm)}) E^{-1/2},$$

$$y_{\alpha} = (k_{\alpha} u_{\alpha}^{(\pm)} \pm p_{\alpha} Z_{\alpha}^{(\pm)}) E^{-1/2}$$

и условиями  $u_\alpha^{(\pm)} = \text{const}$ ,  $\theta_\alpha = \text{const}$ . При этом из связи (10) гиперсферических координат с разными индексами вытекает, что на этих интегральных кривых координаты  $x_\beta$  с  $\beta \neq \alpha$  равны:

$$x_\beta^2 = [Z_\alpha^{(\pm)}]^2 \cos^2 \tau_{\beta\alpha}^{(\pm)} + [u_\alpha^{(\pm)}]^2 \sin^2 \tau_{\beta\alpha}^{(\pm)} \pm Z_\alpha^{(\pm)} u_\alpha^{(\pm)} \cos \sigma_{\beta\alpha}^\pm,$$

где

$$\begin{aligned} \cos 2\tau_{\beta\alpha}^{(\pm)} &= \cos \omega_{\beta\alpha} \cos \chi'_\alpha \pm \sin \omega_{\beta\alpha} \sin \chi'_\alpha \cos \theta_\alpha; \\ \cos \sigma_{\beta\alpha}^{(\pm)} &= -\cos \omega_{\beta\alpha} \sin \chi'_\alpha \pm \sin \omega_{\beta\alpha} \cos \chi'_\alpha \cos \theta_\alpha. \end{aligned}$$

Вычислив с помощью этих представлений интеграл (143), получим следующее выражение для соответствующих фаз:

$$\begin{aligned} W_\alpha^{(\pm)} &= -\eta_\alpha \ln(2k_\alpha x_\alpha) - \sum_{\beta \neq \alpha} \eta_{\beta\alpha}^{(\pm)} \ln 2 \{k_{\beta\alpha}^{(\pm)} x_\beta + \xi_{\beta\alpha}^{(\pm)}\} + \\ &+ C_\alpha^{(\pm)}(u_\alpha^\pm, \theta_\alpha), \end{aligned} \quad (154)$$

где

$$\begin{aligned} k_{\beta\alpha}^{(\pm)} &= \sqrt{E} \cos \tau_{\beta\alpha}^{(\pm)}, \quad \eta_{\beta\alpha}^{(\pm)} = n_\beta / 2k_{\beta\alpha}^{(\pm)}; \\ \xi_{\beta\alpha}^{(\pm)} &= \sqrt{E} (\cos^2 \tau_{\beta\alpha}^{(\pm)} Z_\alpha^{(\pm)} \pm \cos \sigma_{\beta\alpha}^{(\pm)} u_\alpha^{(\pm)}), \end{aligned}$$

а  $C_\alpha^{(\pm)}$  — константы интегрирования. Их можно фиксировать методом эталонных уравнений. (Нужно решить эйкональное приближение с асимптотическим решением уравнения Шредингера в области  $x_\alpha \ll y_\alpha \rightarrow \infty$ . Последнее строится явно путем разделения переменных.) Соответствующая техника подробно описана в [11] на примере полной задачи трех частиц. Поэтому мы приведем только результат:

$$C_\alpha^{(\pm)} = \sum_{\beta \neq \alpha} \{ \eta_\beta \ln(\sqrt{E} |u_\alpha^{(\pm)}| \nu_{\beta\alpha}^{(\pm)}) + \eta_{\beta\alpha}^{(\pm)} \ln(\sqrt{E} |u_\alpha^{(\pm)}| \mu_{\beta\alpha}^{(\pm)}) \}, \quad (155)$$

где параметры  $\nu$  и  $\mu$  выражаются через коэффициенты преобразования (2):

$$\begin{aligned} \nu_{\beta\alpha}^{(\pm)} &= k_\alpha^{-1} [k_\beta |s_{\beta\alpha}| \mp s_{\beta\alpha} (s_{\beta\alpha} p_\alpha + c_{\beta\alpha} k_\alpha \cos \theta'_\alpha)], \\ \mu_{\beta\alpha}^{(\pm)} &= k_\alpha^{-1} [k_{\beta\alpha}^{(\pm)} |s_{\beta\alpha}| + s_{\beta\alpha} (\pm s_{\beta\alpha} p_\alpha + c_{\beta\alpha} k_\alpha \cos \theta'_\alpha)]. \end{aligned}$$

Асимптотическое решение уравнения Шредингера, отвечающее эйконалам  $Z_\alpha^{(\pm)}$ , описывается представлением (117), в котором эйконалы искажаются кулоновскими фазами (154):

$$\begin{aligned} U_\alpha^{(c)} &= \sum_{\pm} U_{\alpha, c}^{(\pm)}, \\ U_{\alpha, c}^{(\pm)} &\sim A_{\alpha, c}^{(\pm)} \exp \{ i \sqrt{E} Z_\alpha^{(\pm)} + i W_\alpha^{(\pm)} \}. \end{aligned} \quad (156)$$

Матрицы  $A_{\alpha,c}^{(\pm)}$  задаются равенством (118), в котором переопределены амплитуды  $f_{\alpha}^{(\pm)}$ :

$$f_{\alpha}^{(\pm)}(k, \theta, \theta') = (2ik)^{-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \exp\{2i\delta_{\alpha}^{(\lambda)}(k)\} Q_{\lambda}^l(\pm \cos \theta) Q_{\lambda}^l(\cos \theta'), \quad (157)$$

где  $\delta_{\alpha}^{(\lambda)}$  — фазы рассеяния на потенциале (130). Они равны сумме кулоновских фаз  $\delta_{\lambda}^{(c)}(\eta_{\alpha})$  и фаз  $\delta_{\alpha\lambda}^{(s)}$ , порожденных короткодействующей частью потенциала (130).

Амплитуды  $f_{\alpha}^{(\pm)}$  имеют сингулярности. Они содержатся в их чисто кулоновской части  $f_{\alpha,c}^{(\pm)}$ , которая дается рядом (157) с кулоновскими фазами  $\delta_{\lambda}^{(c)}$ . Этот ряд можно просуммировать с помощью формулы умножения для присоединенных полиномов Лежандра [15]:

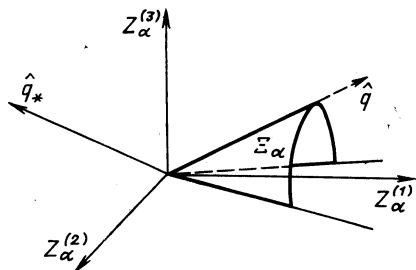
$$f_{\alpha,c}^{(\pm)} = -\frac{2^{i\eta_{\alpha}}}{4\pi k} \eta_{\alpha} \exp\{2i\delta_0^{(c)}(\eta_{\alpha})\} \times \\ \times \int_0^{2\pi} [1 + \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi]^{-1-i\eta_{\alpha}} E^l(\varphi) d\varphi,$$

где  $[E^l(\varphi)]_{mn} = \delta_{mn} e^{in\varphi}$ . Из данного представления вытекает, что амплитуда  $f_{\alpha,c}^{(\pm)}$  сингулярна при  $\theta = \theta'$ , а  $f_{\alpha,c}^{(-)}$  — при  $\theta = \pi - \theta'$ :

$$f_{\alpha,c}^{(\pm)}(k, \theta, \theta') = -\frac{\eta_{\alpha} \Gamma(1/2 + i\eta_{\alpha})}{2k\Gamma(1 - i\eta_{\alpha})} \times \\ \times (2\pi \sin \theta \sin \theta')^{-1/2} \left[ \frac{1 \mp \cos(\theta \mp \theta')}{2} \right]^{-1/2 - i\eta_{\alpha}} I^l + \dots \quad (158)$$

Построенное асимптотическое решение (156) теряет смысл при  $u_{\alpha}^{(\pm)} = 0$ , так как в таких точках сингулярна фаза  $W_{\alpha}^{(\pm)}$  [см. (155)].

Рис. 2. Особые направления в  $R_3^3$  асимптотики волновой функции (3 → → 2, 3) кулоновских систем. Лучи  $\hat{q}_*$  и  $\hat{q}$  те же, что и на рис. 1. Поверхности  $\Xi_{\alpha}$  образованы вращением луча  $\hat{q}$  вокруг осей  $\Xi_{\alpha}^{(1)}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). На рисунке изображена одна из них



Множество этих точек образует коническую поверхность  $\Xi_{\alpha} \subset M$ , изображенную на рис. 2:

$$\Xi_{\alpha} = \{r = (\rho\chi_{\alpha}\theta_{\alpha}) : \chi_{\alpha} = \chi'_{\alpha}\}. \quad (159)$$

Подведем теперь некоторые итоги.

*Асимптотика волновых функций*  $\Psi_0$  в системах с кулоновским взаимодействием дается суммой построенных выше эйкональных приближений:

$$\Psi_0 \sim \mathcal{F}_s^l + \sum_{\alpha} U_{\alpha}^{(c)} + \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{(c)}.$$

Первый член представляет собой искаженную плоскую волну (152). Вклад процессов однократных двухчастичных столкновений описывается представлением (156). Функции  $\Phi_{\alpha}^{(c)}$  содержат искаженные сферические волны, отвечающие процессам ( $3 \rightarrow 2,3$ ). Для них справедливо представление, аналогичное (132).

На рис. 2 изображено множество особых точек, в которых полученные асимптотики функций  $\mathcal{F}_c^l$  и  $U_{\alpha}^{(c)}$  теряют смысл. Перейдем к исследованию структуры этих функций в окрестностях данных особенностей.

**Особые направления.** *Направление рассеяния вперед* ( $\hat{r} = \hat{q}$ ). В этом направлении неверна асимптотика (152) для функции  $\mathcal{F}_{1c}^{(+)}$ , так как  $W_1^{(+)} = \infty$  при  $\hat{r} = \hat{q}$  (остальные три слагаемых искаженной плоской волны не имеют особенностей при  $\hat{r} = \hat{q}$ ). Мы построим асимптотическое решение уравнения Шредингера, которое остается гладким при  $\hat{r} = \hat{q}$ , а вне этого направления совпадает с эйкональным приближением  $\mathcal{F}_{1c}^{(+)}$ . При этом оказывается, что особенность в асимптотике  $\mathcal{F}_{1c}^{(+)}$  порождает сингулярность амплитуды рассеяния ( $3 \rightarrow 3$ ) в данном направлении.

Чтобы не отвлекаться на второстепенные детали, опишем все построения на примере систем с нулевым полным орбитальным моментом. В этом случае в представлении (152)  $A_k^{(\pm)} = 1$ . В соответствии с этим представлением будем искать упомянутое решение в виде

$$\mathcal{F}_{1c}^{(+)} = [8\pi^3 \sigma(r) \sigma(q) \cos(\Omega_1/2)]^{-1/2} U. \quad (160)$$

Тем самым вне особого направления асимптотика  $U$  описывается эйкональным приближением

$$U(r, q) \sim \exp \{i \sqrt{E} Z_1 + i W_1^{(*)} - i\pi/4\}. \quad (161)$$

Получим уравнение на  $U$ . С этой целью удобно записать уравнение Шредингера (134) для  $\mathcal{F}^{(+)}$  в сферических координатах  $(\rho \Omega_1 \phi_1^{(\omega)})$ , определенных в (147). Метрика внутреннего пространства в этих координатах аналогична (29):

$$K_r = d\rho^2 + \frac{\rho^2}{4} [d\Omega_1^2 + \sin^2 \Omega_1 (d\phi_1^{(\omega)})^2],$$

а оператор кинетической энергии задается по ней равенством (43), в котором  $(\partial/\partial\xi^i)_l^* = \partial/\partial\xi^i$  при  $l = 0$ . В результате придем к уравнению

$$(-\Delta_1 + V_c + \delta V - E) U = 0, \quad (162)$$

где  $V_c$  — суммарный кулоновский потенциал (145), а поправка  $\delta V$  равна

$$\delta V = -\rho^{-2} \left( 1 + \frac{1}{\sin^2 \psi} + \frac{1}{4 \cos^2 (\Omega_1/2)} \right)$$

( $\psi$  — координата Dragt'a точки  $r$ ). Дифференциальный оператор  $\Delta_1$  имеет вид

$$\Delta_1 = \left\{ \partial_\rho^2 + \frac{2}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{1}{\sin^2 (\Omega_1/2)} \partial_{\phi_1^{(\alpha)}}^2 + \frac{4}{\sin (\Omega_1/2)} \partial_{\Omega_1} \sin (\Omega_1/2) \partial_{\Omega_1} \right] \right\} + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 (\Omega_1/2)} \partial_{\phi_1^{(\alpha)}}^2.$$

Отметим, что выражение в фигурных скобках совпадает с оператором Лапласа в евклидовом пространстве

$$R^3 = \left\{ (x^1, x^2, x^3) = \left( \rho \cos \frac{\Omega_1}{2}, \rho \sin \frac{\Omega_1}{2} \cos \phi_1^{(\alpha)}, \rho \sin \frac{\Omega_1}{2} \sin \phi_1^{(\alpha)} \right) \right\}. \quad (163)$$

Построим теперь асимптотическое решение уравнения (162) в окрестности луча  $\hat{r} = \hat{q}$  методом параболического уравнения Фока. Подходящими координатами в нашем случае являются стандартные параболические координаты  $(\zeta, \xi, \phi_1^{(\alpha)})$  в пространстве (163):

$$\zeta = \rho \left( 1 + \cos \frac{\Omega_1}{2} \right) = \rho + Z_1,$$

$$\xi = \rho \left( 1 - \cos \frac{\Omega_1}{2} \right) = \rho - Z_1.$$

В них оператор  $\Delta_1$  дается выражением

$$\Delta_1 = \frac{4}{\zeta + \xi} (\partial_\zeta \xi \partial_\zeta + \partial_\xi \xi \partial_\xi) + \frac{1}{\zeta \xi} \left( \frac{\zeta + \xi}{\zeta + \xi} \right)^2 \partial_{\phi_1^{(\alpha)}}^2.$$

При  $r \rightarrow \infty$  в особом направлении  $\zeta \rightarrow 0$ ,  $\xi = 0$ . Поэтому с точностью до членов  $\sim \xi/\zeta^2$  можно заменить в (162) кулоновский потенциал выражением

$$V_c(r) \sim \frac{2n_0}{\zeta + \xi}, \quad n_0 = \sqrt{E} \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{k_{\alpha}}$$

и пренебречь поправкой  $\delta V$  [последнее справедливо, если луч отделен от границы (45) внутреннего пространства]. После этих при-

ближений уравнение (162) допускает разделение переменных в параболических координатах. Будем искать его решение в виде

$$U = \exp \{ i \sqrt{E} (\zeta - \xi) / 2 \} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \{ i m \phi_1^{(\alpha)} \}}{\sqrt{2\pi}} F_m(\xi, \zeta). \quad (164)$$

Функции  $F_m$  с точностью до членов  $\sim \xi/\zeta^2$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} & \left\{ \xi \partial_\xi^2 + (1 - i \sqrt{E} \xi) \partial_\xi - n_0/2 - \frac{m^2}{4\xi} \right\} F_m + \\ & + \left\{ \zeta \partial_\zeta^2 + (1 - i \sqrt{E} \zeta) \partial_\zeta - \frac{5m^2}{4\zeta} \right\} F_m = 0. \end{aligned} \quad (165)$$

Асимптотика нужных нам решений этих уравнений определяется условием спивания разложения (164) с эйкональным приближением (161) при  $\xi \rightarrow \infty$ . Из выражения (151) для фазы  $W_1^{(+)}$  вытекает, что в старшем порядке при  $\xi/\zeta \rightarrow 0$  она равна

$$W_1^{(+)} \sim \sum_{\beta} \eta_{\beta} \ln \left( \frac{p_{\beta}^2}{2 \sqrt{E}} \sin^2 \phi_1^{(\beta)} \xi \right), \quad \eta_{\beta} = \frac{n_{\beta}}{2k_{\beta}}.$$

Поэтому асимптотика  $F_m$  задается разложением экспоненты  $\exp(iW_1^{(+)})$  в ряд Фурье (164):

$$F_m(\xi, \zeta) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} c_m (\sqrt{E} \xi)^{i n_0}, \quad \eta_0 = \frac{n_0}{2 \sqrt{E}}, \quad (166)$$

с коэффициентами

$$c_m = \left( -\frac{i}{2\pi} \right)^{1/2} \prod_{\beta} (p_{\beta}^2/2E)^{i \eta_{\beta}} \int_0^{2\pi} d\phi_1^{(\alpha)} \exp \{ -i m \phi_1^{(\alpha)} \} \prod_{\beta} (\sin^2 \phi_1^{(\beta)})^{i \eta_{\beta}}.$$

В этом интеграле углы  $\phi_1^{(\beta)}$  с разными индексами связаны сдвигом (149).

Решения уравнений (165) с асимптотикой (166) в старшем порядке при  $\zeta \rightarrow \infty$  не зависят от  $\zeta$  и выражаются через регулярную вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$\begin{aligned} F_m(\xi) = c_m \frac{\Gamma(|m|/2 + 1 + i \eta_0)}{\Gamma(|m| + 1)} e^{-\pi \eta_0/2} (-i \sqrt{E} \xi)^{|m|/2} \times \\ \times \Phi(|m|/2 - i \eta_0, |m| + 1, i \sqrt{E} \xi). \end{aligned} \quad (167)$$

Таким образом, асимптотика функции  $\mathcal{F}_{1,c}^{(+)}$  в окрестности особого направления описывается представлениями (160), (164) и (167). При  $\xi \rightarrow \infty$  она распадается на сумму эйконального приближе-



ния (152) и искаженной сферической волны с сингулярной в направлении рассеяния вперед амплитудой

$$A_s(\hat{r}, \hat{q}) = a [\sin(\Omega_1(\hat{r}, \hat{q})/2)]^{-4-2i\eta_0},$$

$$a = -\frac{\sqrt{E}}{16\pi^2\sigma(q)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m (-i)^m \frac{\Gamma(|m|/2+1+i\eta_0)}{\Gamma(|m|/2-i\eta_0)} \exp\{im\phi_1^{(\alpha)}\}. \quad (168)$$

Это представление описывает главную угловую особенность амплитуды рассеяния ( $3 \rightarrow 3$ ) в кулоновских системах. Данная особенность слабее аналогичной сингулярности в полной задаче трех частиц.

Выше мы рассматривали случай нулевого полного орбитального момента. При  $l \geq 1$  все полученные формулы для  $\mathcal{F}_{1,}^{(+)}$  с нужно умножить на матричные амплитуды  $A^{(+)}$  из (152).

*Особое направление*  $\hat{r} = \hat{q}_*$ . В этом направлении неверна асимптотика (152) для функций  $\mathcal{F}_{c,2}^{(+)}$ , так как  $Z_2 = 0$  при  $\hat{r} = \hat{q}_*$ . Построим теперь асимптотическое решение уравнения Шредингера, которое вне луча  $\hat{r} = \hat{q}_*$  совпадает с суммой эйкональных приближений  $\mathcal{F}_{c,2}^{(+)} + \mathcal{F}_{c,2}^{(-)}$  и остается гладким при  $\hat{r} = \hat{q}_*$ .

В соответствии с представлением (152) будем искать такое решение в виде

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{2,c}^{(+)} + \mathcal{F}_{2,c}^{(-)} = [8\pi^3\rho^{-1}\sigma(r)\sigma(q)]^{-1/2}\Phi. \quad (169)$$

Вне особого направления асимптотика  $\Phi$  описывается эйкональным приближением

$$\Phi \sim \sum_{\pm} A_2^{(\pm)} \exp\{\pm i\sqrt{E}Z_2 + iW_2^{(\pm)} \pm i\pi/4\}/\sqrt{Z_2}, \quad (170)$$

где  $A_2^{(\pm)}$  — матричные амплитуды из (152). Из функционального вида асимптотики (170) ясно, что функцию  $\Phi$  удобно строить в цилиндрических координатах ( $Z_2, u_2 = \rho \sin \frac{\Omega_2}{2}, \phi_2^{(\alpha)}$ ). В них метрика внутреннего пространства дается выражением (146), а гамильтониан  $H^I$  определяется по этой метрике равенством (43). Подставив (169) в уравнение Шредингера (134), получим для  $\Phi$  матричное уравнение типа (162). С точностью до членов  $\sim Z_2/u_2^2$  оно имеет вид

$$\left(-\Delta_2 \otimes I^l + \frac{\tilde{n}_0}{u_2} \otimes I^l - E \otimes I^l\right)\Phi = 0, \quad (171)$$

где  $\tilde{n}_0 = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \sqrt{E}/p_{\alpha}$ ;

$$\Delta_2 = \partial_{Z_2}^2 + \frac{1}{Z_2} \partial_{Z_2} + \partial_{u_2}^2 + \frac{1}{u_2} \partial_{u_2} + (Z_2^{-2} + u_2^{-2}) \partial_{\phi_2^{(\alpha)}}^2.$$

Переменные в этом уравнении разделяются. Выясним асимптотические граничные условия, фиксирующие нужное нам решение. С этой

целью вычислим старший член эйкональной асимптотики (170) в окрестности особого направления.

Согласно определению (151), фазы  $W_2^{(\pm)}$  при  $Z_2/u_2 \rightarrow 0$  в старшем порядке равны

$$W_2^{(\pm)} \sim \sum_{\beta} \eta_{\beta} \ln \left\{ \frac{\sqrt{E} u_2}{2} \sin \chi_{\beta}' (1 \pm \cos \phi_2^{(\beta)}) \right\}.$$

Рассмотрим далее амплитуды  $A_2^{(\pm)}$ . Из выражений (123) для угла  $\Delta_2$  и определения (124) углов  $\phi_2^{(\alpha)}$  вытекает связь

$$\cos \Delta_2 = -\cos(\phi_2^{(\alpha)} + \theta_{\alpha}') + O(Z_2/u_2).$$

При этом положение точки  $r$  относительно конуса  $\Gamma_{\alpha}$  на рис. 1 в окрестности особого направления определяется углом  $\phi_2^{(\alpha)}$ :

$$\begin{aligned} r \in \Gamma_{\alpha} : \phi_2^{(\alpha)} &\in (0, \pi - \theta_{\alpha}') \cup (2\pi - \theta_{\alpha}', 2\pi), \\ r \in M/\Gamma_{\alpha} : \phi_2^{(\alpha)} &\in (\pi - \theta_{\alpha}', 2\pi - \theta_{\alpha}'). \end{aligned} \quad (172)$$

Тем самым вблизи луча  $\hat{r} = \hat{q}_*$  представление (128) для амплитуды  $A_2^{(\pm)}$  принимает вид

$$\begin{aligned} A_2^{(\pm)}(\phi_2^{(\alpha)}) &= D^l(g_{\alpha}(q_*)) B_2^{(\pm)}(\phi_2^{(\alpha)}) D^l(\tilde{g}_{\alpha}^{-1}(q)), \\ B_2^{(\pm)}(\phi_2^{(\alpha)}) &= \begin{cases} I_{\pm}^l d^l(\mp \cos(\phi_2^{(\alpha)} + \theta_{\alpha}')) I_{\pm}^l, & r \in \Gamma_{\alpha}, \\ I_{\mp}^l d^l(\mp \cos(\phi_2^{(\alpha)} + \theta_{\alpha}')) I_{\mp}^l, & r \in M/\Gamma_{\alpha}. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, решение уравнения (171) должно иметь следующую асимптотику при  $u_2, Z_2 \rightarrow \infty$ :

$$\Phi \sim c(q) u_2^{i\eta_0} \sum_{\pm} Z_2^{-1/2} \exp\{\pm i\sqrt{E} Z_2 \pm i\pi/4\} \tilde{A}^{(\pm)}(\phi_2^{(\alpha)}),$$

где  $\eta_0$  определено в (166),

$$\begin{aligned} c(q) &= \prod_{\beta} \left( \frac{\sqrt{E}}{2} \sin \chi_{\beta}' \right)^{i\eta_{\beta}}, \\ \tilde{A}^{(\pm)}(\phi_2^{(\alpha)}) &= \prod_{\beta} (1 \pm \cos \phi_2^{(\beta)})^{i\eta_{\beta}} A_2^{(\pm)}(\phi_2^{(\alpha)}). \end{aligned} \quad (173)$$

Такое решение задается рядом

$$\Phi = c(q) u_2^{i\eta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m J_m(\sqrt{E} Z_2) \frac{\exp\{im\phi_2^{(\alpha)}\}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (174)$$

где  $J_m$  — функция Бесселя [16], а  $A_m$  — постоянные матрицы ранга  $(2l + 1)$ . Они суть коэффициенты разложения в ряд Фурье матричных амплитуд (173):

$$A_m = \frac{(\pm i)^{m/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi_2^{(\alpha)} \tilde{A}^{(\pm)}(\phi_2^{(\alpha)}) \exp\{im\phi_2^{(\alpha)}\}.$$

Правая часть данного равенства принимает одинаковые значения при обоих знаках  $(\pm)$ . Это вытекает из свойств симметрии подынтегральной функции относительно сдвига  $\phi_2^{(\alpha)} \rightarrow \phi_2^{(\alpha)} + \pi$ . (При таком сдвиге меняются местами окрестности особого направления, лежащие внутри и вне конуса  $\Gamma_\alpha$  [см. (172)], причем углы  $\phi_2^{(\beta)}$  с  $\beta \neq \alpha$  также сдвигаются на  $\pi$  в силу (149).)

Итак, представления (169) и (174) описывают асимптотическую структуру искаженной плоской волны в окрестности особого направления  $\hat{r} = \hat{q}_*$ . Они справедливы и для систем с быстроубывающими потенциалами (в этом случае в них нужно положить  $\eta_\beta = \eta_0 = 0$ ).

*Окрестность конуса  $\Xi_\alpha$ .* Построим асимптотическое решение уравнения Шредингера, которое вне конуса (159) совпадает с эйкональным приближением  $U_{\alpha,c}^{(+)}$  из (156) и остается гладким при  $r \in \Xi_\alpha$ . Будем искать его в виде

$$U_{\alpha,c}^{(+)} = A_{\alpha,c}^{(+)} \exp\{i\sqrt{E} Z_\alpha^{(+)} + i\tilde{W}_\alpha\} F_\alpha, \tag{175}$$

где  $F_\alpha$  — неизвестная функция, матричные амплитуды  $A_{\alpha,c}^{(+)}$  определены в (156), а  $\tilde{W}_\alpha$  — гладкая часть фазы (154) при  $u_\alpha^{(+)} \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_\alpha &= W_\alpha^{(+)} - 2a_\alpha(\theta_\alpha) \ln(\sqrt{E} u_\alpha^{(+)}) \\ a_\alpha(\theta_\alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} \{\eta_\beta + \eta_{\beta\alpha}^{(+)}(\theta_\alpha)\}. \end{aligned}$$

Асимптотика  $F_\alpha$  вне конуса  $\Xi_\alpha$  определяется эйкональным приближением (156):

$$F_\alpha \sim [\sqrt{E} u_\alpha^{(+)}]^{2ia_\alpha}. \tag{176}$$

Получим уравнение для  $F_\alpha$ . С этой целью удобно вначале записать уравнение Шредингера для  $U_{\alpha,c}^{(+)}$  в координатах Якоби  $(x_\alpha, y_\alpha, \theta_\alpha)$  и отделить фактор  $A_{\alpha,c}^{(+)}$ . При этом радиальная часть гамильтониана  $H^1$  принимает вид лапласиана на плоскости  $(\partial_{x_\alpha}^2 + \partial_{y_\alpha}^2)$ . Угловая часть  $H^1$ , содержащая дифференцирование по  $\theta_\alpha$  и центробежные члены, порождает поправки  $\sim \rho^{-2}$ , которыми можно пренебречь. Затем следует перейти к координатам  $(Z_\alpha^{(+)} u_\alpha^{(+)}, \theta_\alpha)$  и отделить экспоненциальный множитель из (175). (В этих координатах упомянутый лапласиан равен  $\partial_{Z_\alpha^{(+)}}^2 + \partial_{u_\alpha^{(+)}}^2$ .) В возникающем уравнении сокра-

щается кулоновский потенциал, так как фаза удовлетворяет соотношению (142). С точностью до членов  $\sim \rho$  оно имеет вид

$$\left\{ \partial_{Z_\alpha^{(+)}}^2 + \partial_{u_\alpha^{(+)}}^2 + 2i \sqrt{E} \partial_{Z_\alpha^{(+)}} + 2i \left[ \frac{\partial \tilde{W}_\alpha}{\partial Z_\alpha^{(+)}} \partial_{Z_\alpha^{(+)}} + \frac{\partial \tilde{W}_\alpha}{\partial u_\alpha^{(+)}} \partial_{u_\alpha^{(+)}} \right] \right\} F_\alpha = 0. \quad (177)$$

Введем теперь параболические координаты

$$\zeta_\alpha = \rho + Z_\alpha^{(+)}, \quad \xi_\alpha = \rho - Z_\alpha^{(+)}$$

(при  $r \rightarrow \infty$  на  $\Xi_\alpha$   $\xi_\alpha = 0$ ,  $\zeta_\alpha \rightarrow \infty$ ). Перепишем уравнение (177) в этих координатах и оставим в нем только старшие члены при  $\xi_\alpha / \zeta_\alpha \rightarrow 0$ . Они порождаются первыми тремя слагаемыми в (177):

$$\left\{ \xi_\alpha \partial_{\xi_\alpha}^2 + \zeta_\alpha \partial_{\zeta_\alpha}^2 + i \sqrt{E} (\zeta_\alpha \partial_{\zeta_\alpha} - \xi_\alpha \partial_{\xi_\alpha}) + \frac{1}{2} (\partial_{\xi_\alpha} + \partial_{\zeta_\alpha}) \right\} F_\alpha = 0.$$

В этом уравнении переменные разделяются, причем константой разделения может быть произвольная функция угла  $\theta_\alpha$ . Нужное нам асимптотическое решение с граничным условием (176) при  $\xi_\alpha \rightarrow \infty$  выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$F_\alpha = \pi^{-1/2} e^{-\pi a_\alpha} \Gamma(1/2 + i a_\alpha) (\sqrt{E} \zeta_\alpha)^{i a_\alpha} \Phi(-i a_\alpha, 1/2, i \sqrt{E} \xi_\alpha). \quad (178)$$

Таким образом, асимптотика функции  $U_{\alpha, c}^{(+)}$  в окрестности конуса  $\Xi_\alpha$  описывается представлениями (175), (178). При  $\xi_\alpha \rightarrow \infty$  функция  $U_{\alpha, c}^{(+)}$  превращается в сумму эйконального приближения (156) и искаженной сферической волны с амплитудой

$$A_\alpha^{(s)} = -i (\rho^2 A_{\alpha, c}^{(+)}) \frac{\Gamma(1/2 + i a_\alpha)}{\sqrt{2} \Gamma(-i a_\alpha)} E^{-1/4} e^{i b_\alpha} \left[ \sin^2 \left( \frac{\chi_\alpha - \chi'_\alpha}{4} \right) \right]^{-1/2 - i a_\alpha}, \quad (179)$$

где

$$b_\alpha = \eta_\alpha \ln \cos^2 \left( \frac{\chi_\alpha}{2} \right) - \sum_{\beta \neq \alpha} \left\{ \eta_\beta \ln v_{\beta\alpha}^{(+)} + \eta_{\beta\alpha}^{(+)} \ln \left[ 2 \mu_{\beta\alpha}^{(+)} \cos^2 \left( \frac{\chi_\beta}{2} \right) \right] \right\}.$$

Эта амплитуда сингулярна при  $r \rightarrow \Xi_\alpha$  ( $\chi_\alpha \rightarrow \chi'_\alpha$ ). Следовательно, амплитуда рассеяния ( $3 \rightarrow 3$ ) в кулоновских системах имеет угловые сингулярности вида (179) на поверхностях трех конусов  $\Xi_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Данные конусы пересекаются по лучу  $\hat{r} = \hat{q}$ , задающему направление рассеяния вперед. На этом луче все три амплитуды  $A_\alpha^{(s)}$  имеют дополнительные сингулярности по углу  $\theta_\alpha$ . Они порождаются фактором  $\rho^2 A_{\alpha, c}^{(+)}$  и описываются представлением (158). Тем самым в направлении рассеяния вперед амплитуда рассеяния ( $3 \rightarrow 3$ ) кроме главной особенности (168) содержит более слабые сингулярности типа

$$\sum_\alpha B_\alpha \left[ \sin^2 \left( \frac{\theta_\alpha - \theta'_\alpha}{2} \right) \right]^{-1/2 - i \eta_\alpha} \left[ \sin^2 \left( \frac{\chi_\alpha - \chi'_\alpha}{2} \right) \right]^{-1/2 - i a_\alpha},$$

которые отвечают процессам однократных двухчастичных столкновений.

### 5. ФОРМУЛА ЛЕВИНСОНА И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА

В этом разделе снова рассматриваются быстроубывающие потенциалы типа (47) с  $\epsilon > 2$ . Для гамильтониана  $H^l$  с такими потенциалами мы получим полную серию спектральных тождеств, которые связывают характеристики дискретного спектра и  $S$ -матрицу. Эти результаты доказаны впервые в [9, 10] на примере систем с нулевым полным орбитальным моментом. Они представляют собой непосредственное обобщение на задачу трех тел формул следов для двухчастичного оператора Шредингера [21], в частности, классической формулы Левинсона [22].

В основе доказательства спектральных тождеств лежат две формулы, имеющие и самостоятельный интерес: 1) формула следа, выражающая след связной части  $R_c^l(z)$  резольвенты гамильтониана  $H^l$  через  $S$ -матрицу; 2) асимптотическое разложение  $\text{Sp} R_c^l(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . Ранее аналогичные результаты были установлены в полной задаче трех частиц [23, 24]. В полной задаче формула следа содержит сложные регуляризующие поправки, которые порождаются обсуждавшимися в разд. 2 трехчастичными особенностями  $T$ -матрицы. Наличие таких поправок не позволяет записать соответствующие спектральные тождества [24] непосредственно в терминах  $S$ -матрицы. Для систем с фиксированным полным орбитальным моментом эта трудность отсутствует, так как  $T$ -матрица гамильтониана  $H^l$  не имеет трехчастичных особенностей.

**Формула следа.** Эта формула связывает след связной части

$$R_c^l(z) = R^l(z) - R_0^l(z) + \sum_{\alpha} R_0^l(z) T_{\alpha}^l(z) R_0^l(z) \quad (180)$$

резольвенты гамильтониана  $H^l$  с его  $S$ -матрицей. Она выводится по обычной схеме [11, 23] путем преобразований сингулярностей ядра  $T$ -матрицы. В нашем случае  $T$ -матрица имеет только парные особенности, отраженные в представлении (77) для ее компонент. Тем самым в отличие от полной задачи трех частиц не возникает необходимости введения сложных регуляризаций, учитывающих трехчастичные особенности. В остальном техника вывода формулы следа для оператора (180) практически повторяет соответствующие построения в полной задаче [11, 23]. Поэтому мы приведем только результат:

$$2i \text{Sp Im } R_c^l(E + i0) = \text{Sp} (S^* \partial_E S)_c(E). \quad (181)$$

Здесь правая часть выражается через  $S$ -матрицу гамильтониана  $H^l$  при фиксированной энергии:

$$\begin{aligned} \text{Sp} (S^* \partial_E S)_c (E) \equiv & \sum_{A, B} \theta (E + \kappa_A^2) \theta (E + \kappa_B^2) \text{Sp} \{S_{AB}^* (E) \partial_E S_{AB} (E)\} + \\ & + \theta (E) \sum_A \{ \text{Sp} [S_{0A}^* (E) \partial_E S_{0A} (E)] + \text{Sp} [S_{A0}^* (E) \partial_E S_{A0} (E)] \} + \\ & + \theta (E) \text{Sp} \left\{ S_{00}^* (E) \partial_E S_{00} (E) - \sum_{\alpha} S_{\alpha}^* (E) \partial_E S_{\alpha} (E) \right\}, \quad (182) \end{aligned}$$

где  $S_{\alpha}$  суть  $S$ -матрицы гамильтонианов (69), а  $\theta$  — функция Хевисайда. Ядра остальных  $S$ -матриц определены в (93)—(96). Подчеркнем, что в каждом члене равенств (181) и (182) операция следа понимается в смысле того функционального пространства вектор-функций, в котором действует соответствующий матричный интегральный оператор.

**Асимптотика  $\text{Sp} R_c^l(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$ .** Получим вначале асимптотику связанной части  $T$ -матрицы  $T_c^l = T^l - \sum_{\alpha} T_{\alpha}^l$ . С этой целью в уравнении Липпмана — Швингера  $T^l(z) = V^l - V^l R_0^l(z) T^l(z)$  представим оператор  $R_0^l(z)$  в виде формального ряда по степеням  $z^{-1}$  [см. (66)],

$$R_0^l(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{H}_0^l)^k z^{-k-1},$$

и будем искать  $T$ -матрицу в аналогичном виде:

$$T^l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^l z^{-n}. \quad (183)$$

Приравнявая коэффициенты при  $z^{-n}$ , получаем рекуррентные соотношения для операторов  $T_n^l$ :

$$T_0^l = V^l, \quad T_n^l = V^l \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{H}_0^l)^k T_{n-k-1}^l \quad (n \geq 1). \quad (184)$$

Для операторов  $T_{\alpha}^l$  справедливо разложение (183) с коэффициентами  $T_{\alpha, n}^l$ . Они определяются формулами (184), в которых следует заменить  $V^l$  на  $V_{\alpha}^l$ . В результате получим разложение связанной части  $T$ -матрицы:

$$T_c^l(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n^l)_c z^{-n}, \quad (T_n^l)_c = T_n^l - \sum_{\alpha} T_{\alpha, n}^l. \quad (185)$$

Отметим, что коэффициенты этого разложения можно представить в виде

$$(T_n^l)_c = [\mathcal{F}^l] * W_c^{(n)} \mathcal{F}^l, \quad (186)$$

где  $\mathcal{F}^l$  — диагонализующее преобразование (51). Функции  $W_c^{(n)}$  выражаются через парные потенциалы рекуррентными соотношениями (184) в конфигурационном представлении:

$$W_c^{(n)} = W^{(n)} - \sum_{\alpha} W_{\alpha}^{(n)},$$

$$W^{(0)}(r) = V(r), \quad W^{(n)}(r) = V(r) \sum_{k=0}^{n-1} (H_0^l)^k W^{(n-k-1)}(r) \quad (n \geq 1),$$

а  $W_{\alpha}^{(n)}$  определяются этими же соотношениями с заменой  $V \rightarrow V_{\alpha}$ , так что

$$W_c^{(0)} = 0, \quad W_c^{(1)} = \sum_{\alpha \neq \beta} V_{\alpha} V_{\beta},$$

$$W_c^{(2)} = \left( V^3 - \sum_{\alpha} V_{\alpha}^3 \right) + \sum_{\alpha \neq \beta} V_{\alpha} H_0^l V_{\beta}$$

и т. д.

Подставим теперь разложение (185) в равенство  $R_c^l = -R_0^l T_c^l R_0^l$  и совершим циклическую перестановку операторов под знаком следа. Используя затем формулу (186), придем к представлению

$$\text{Sp } R_c^l(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(l)}(z) z^{-n}. \quad (187)$$

Коэффициенты этого ряда задаются интегралами

$$f_n^{(l)}(z) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^5 d\lambda}{(\lambda^2 - z)^2} Q_n^{(l)}(\lambda^2) \quad (188)$$

от функций

$$Q_n^{(l)}(\lambda^2) = \frac{1}{8} \int_M dM(r) W_c^{(n)}(r) \mu_l(r, \lambda), \quad (189)$$

а вес  $\mu_l$  выражается интегралом по единичной сфере во внутреннем пространстве с мерой (92):

$$\mu_l(r, \lambda) = \int_{\hat{M}} d\hat{M}(\hat{q}) \text{Sp} \{ [\mathcal{F}^l(r, \lambda \hat{q})]^* \mathcal{F}^l(r, \lambda \hat{q}) \}. \quad (190)$$

Вычислим асимптотику коэффициентов ряда (187) при  $|z| \rightarrow \infty$ . В силу (188) она определяется поведением функций  $Q_n^{(l)}(\lambda^2)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . В этом пределе можно заменить в интеграле (190) ядра  $\mathcal{F}^l$  их асимптотикой (126). В результате придем к представлению

$$Q_n^{(l)}(\lambda^2) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2l+1}{2\pi\lambda^3} \int_M dM(r) W_c^{(n)}(r) \sigma^{-1}(r).$$

Совершив затем в интеграле (188) масштабное преобразование  $\lambda \rightarrow |z|^{1/2} \lambda$ , нетрудно убедиться, что асимптотика коэффициентов  $f_n^{(l)}$  имеет вид

$$f_n^l(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{i(2l+1)}{4\pi \sqrt{z}} \int_M dM(r) W_c^{(n)}(r) \sigma^{-1}(r). \quad (191)$$

Следовательно, ряд (187) асимптотический при  $|z| \rightarrow \infty$ . Он задает искомое разложение функции  $\text{Sp} R_c^l(z)$ .

**Спектральные тождества.** Пусть гамильтониан  $H^l$  с быстроубывающими парными потенциалами имеет  $N_l$  связанных состояний кратности  $m_i$  с энергиями  $E_i < 0$ . Обозначим  $\varepsilon_0$  минимальную из энергий связи всех парных гамильтонианов (71),  $\varepsilon_0 = \min (-\kappa_A^2)$ .

Если последние не имеют связанных состояний, положим  $\varepsilon_0 = 0$ .

Введем функции

$$h_n^l(z) = \text{Sp} R_c^l(z) + (1 - \delta_{n0}) \sum_{k=1}^n f_n^{(l)}(z) z^{-n}, \quad n = 0, 1 \dots$$

Они аналитичны в плоскости  $z$  с разрезом  $(\varepsilon_0, \infty)$  и имеют простые полюсы с вычетами  $-m_i$  в точках  $z = E_i$ . При  $|z| \rightarrow \infty$  согласно (187) и (191)  $h_n^{(l)}(z) \sim |z|^{-n-3/2}$ . Скачок этих функций на разрезе, как вытекает из формулы следа (181) и представления (188), равен

$$h_n^{(l)}(z) \Big|_{E-10}^{E+10} = \text{Sp} (S^* \partial_E S)_c(E) + (1 - \delta_{n0}) \theta(E) \times \\ \times \pi i \sum_{k=1}^n E^{-k} \partial_E [E^2 Q_k^{(l)}(E)], \quad E > \varepsilon_0. \quad (192)$$

Рассмотрим теперь интеграл от функции  $z^n h_n^{(l)}(z)$  по контуру, охватывающему разрез  $(\varepsilon_0, \infty)$ . С одной стороны, контур можно стянуть к разрезу, на котором подынтегральная функция выражается через  $S$ -матрицу формулой (192). С другой стороны, контур можно замкнуть окружностью большого радиуса и вычислить интеграл по вычетам в точках  $z = E_i$ . В результате получим искомые спектральные тождества:

1)  $n = 0$  (формула Левинсона):

$$\pi = \sum_{k=1}^{N_l} m_k = \Omega_l(\varepsilon_0);$$

2)  $n = 1, 2 \dots$ :

$$2\pi i \sum_{k=1}^{N_l} m_k E_k^n = - \int_{\varepsilon_0}^{\infty} dE \left\{ E^n \text{Sp} (S^* \partial_E S)_c(E) + \right. \\ \left. + \pi i \theta(E) \sum_{k=1}^n E^{n-k} \partial_E [E^2 Q_k(E)] \right\},$$



где функция  $\Omega_l$  выражается через  $S$ -матрицу:

$$\Omega_l(\epsilon_0) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\epsilon_0} \text{Sp} (S^* \partial_E S)_c(E) dE.$$

Коэффициенты  $Q_k^{(l)}$  суть интегралы (189), содержащие степени потенциалов и их производных. Отметим, что в случае нулевого полного орбитального момента ( $l = 0$ ) весовой множитель (190) можно вычислить явно. В координатах Драгт'а точки  $r$  он выражается через функции Бесселя и гипергеометрическую функцию  ${}_3F_2$ :

$$\begin{aligned} \mu_l(r, \lambda) \Big|_{l=0} &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{\lambda\rho}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2}^2(\lambda\rho) (n+1)^2 \times \\ &\times {}_3F_2(-n, n+2, 1/2; 3/2, 1; \sin^2 \psi). \end{aligned}$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Здесь мы приведем сводку формул, описывающих свойства функций Вигнера и некоторые тождества, которые использовались в основном тексте. Подробное изложение теории функций Вигнера можно найти в [15, 25].

Пусть вращения  $g \in SO(3)$  характеризуются углами Эйлера  $(\phi^1 \phi^2 \phi^3)$ . Функции Вигнера имеют вид

$$D_{mn}^l(g) = e^{im\phi^1} d_{mn}^l(\cos \phi^2) e^{im\phi^3} \quad (m, n = -l, -l+1, \dots, l),$$

где множитель  $d_{mn}^l$  выражается через полиномы Якоби [16]:

$$d_{mn}^l(x) = 2^{-m} \left[ \frac{(l+m)! (l-m)!}{(l+n)! (l-n)!} \right]^{1/2} (1-x)^{\frac{m-n}{2}} (1+x)^{\frac{m+n}{2}} P_{l-m}^{(m-n, m+n)}(x). \tag{П.1}$$

Они суть общие собственные функции операторов  $\hat{L}^2$  и  $\hat{L}_z$  из (34) и (38), нормированные по мере (26):

$$\begin{aligned} \int_{SO(3)} dg D_{mn}^l(g) \overline{D_{m'n'}^l(g)} &= (2l+1)^{-1} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \\ \hat{L}^2 D_{mn}^l &= l(l+1) D_{mn}^l, \quad \hat{L}_z D_{mn}^l = m D_{mn}^l. \end{aligned}$$

Обозначим  $D^l(g)$  матрицу, составленную из функций Вигнера  $D_{mn}^l(g)$ . Для компонент (34) оператора полного орбитального момента справедливы соотношения  $\hat{L}_i D^l(g) = D^l(g) (\hat{L}_i)_l$ , где  $(\hat{L}_i)_l$  — числовые матрицы ранга  $2l+1$  с элементами

$$\begin{aligned} [(\hat{L}_1)_l]_{mn} &= +a(n) \delta_{m+1, n} - a(-n) \delta_{m-1, n}, \\ [(\hat{L}_2)_l]_{mn} &= -i(a(n) \delta_{m+1, n} - a(-n) \delta_{m-1, n}), \\ [(\hat{L}_3)_l]_{mn} &= m \delta_{mn}, \quad a(n) = \frac{1}{2} [(l+n)(l-n+1)]^{1/2}. \end{aligned} \tag{П.2}$$

Матрицы  $D^l(g)$  унитарны:  $[D^l(g)]^{-1} = D^l(g^{-1}) = [D^l(g)]^*$ . Следующая формула задает разложение тензорного произведения  $D^{l_1} \otimes D^{l_2}$ :

$$D_{m_1 n_1}^{l_1}(g) D_{m_2 n_2}^{l_2}(g) = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \sum_{m, n=-l}^l \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l m \rangle \langle l_1 n_1 l_2 n_2 | l n \rangle D_{m n}^l(g). \quad (\text{П.3})$$

Из нее вытекает выражение для интеграла от произведения трех функций Вигнера:

$$\int_{SO(3)} dg D_{m n}^l(g) \overline{D_{m_1 n_1}^{l_1}(g)} D_{m_2 n_2}^{l_2}(g) = (2l+1)^{-1} \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l m \rangle \langle l_1 n_1 l_2 n_2 | l n \rangle. \quad (\text{П.4})$$

Функции Вигнера определяют преобразование сферических функций при вращениях:

$$Y_{lm}(g\hat{e}) = \sum_{n=-l}^l D_{mn}^l(g) Y_{ln}(\hat{e}).$$

В частности, при  $\hat{e} = \hat{e}_3 = (0, 0, 1)$  получаем связь

$$Y_{lm}(g\hat{e}_3) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} D_{m0}^l(g). \quad (\text{П.5})$$

Приведем, наконец, два тождества, которые использовались при доказательстве формулы (61):

$$\sum_m \langle l_1 0 l_2 m | l m \rangle \langle l_1 0 l_2 m | l m \rangle = \frac{2l+1}{2l_1+1} \delta_{l_1 l_1'}, \quad (\text{П.6})$$

$$\sum_{l_1} (-1)^{m+n} \frac{2l_1+1}{2l+1} \langle l_2 m l_1 0 | l m \rangle \langle l_2 n l_1 0 | l n \rangle = \delta_{mn}.$$

Непосредственно в таком виде эти тождества в справочниках отсутствуют. Они вытекают из стандартных соотношений ортогональности для коэффициентов Клебша — Гордана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц // Труды МИАН СССР. М.: Наука, 1963. Т. 69.
2. Меркурьев С. П. // ЯФ. 1976. Т. 24. С. 289—297; ТМФ. 1977. Т. 32. С. 187—207; Ann. Phys. 1980. Vol. 130. P. 395—426.
3. Квицинский А. А., Куперин Ю. А., Меркурьев С. П. и др. // ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. Вып. 2. С. 267—317.
4. Ferreira L.S., Fonseca A.C., Streit L. (Eds.). Models and Methods in Few-Body Physics. Lecture Notes in Physics. Vol. 273. N.Y.: Springer-Verlag, 1987.
5. Hirschfelder J.O., Wigner E. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1935. Vol. 21. P. 113.
6. Curtis C.F., Hirschfelder J.O., Adler F. // J. Chem. Phys. 1950. Vol. 18. P. 1638—1642.
7. Квицинский А. А., Кострыкин В. В., Меркурьев С. П. // ДАН СССР. 1988. Т. 301. С. 581—584.

8. Kostrykin V.V., Kvitsinsky A.A., Merkuriev S.P.//Few Body Systems. 1989. Vol. 6. P. 97—113.
9. Квицинский А. А., Меркурьев С. П.//ДАН СССР. 1989. Т. 308. С. 1355—1358.
10. Merkuriev S.P., Kvitsinsky A.A.//Lett. Math. Phys. 1989. Vol. 17. P. 307—313.
11. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
12. Iwai T.//J. Math. Phys. 1987. Vol. 28. P. 1315—1326.
13. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1.
14. Dragt A.J.//J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 533.
15. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
16. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. А. Абрамовиц, И. Стиган: Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
17. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962.
18. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. Т. 4.
19. Квицинский А. А., Комаров И. В., Меркурьев С. П.//ЯФ. 1983. Т. 38. С. 101—114; Квицинский А. А.//ТМФ. 1984. Т. 59. С. 472—478; Квицинский А. А.//ТМФ. 1985. Т. 65. С. 226—237.
20. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
21. Фаддеев Л. Д., Буслаев В. С.//ДАН СССР. 1960. Т. 132. С. 13—16; Буслаев В. С.//ДАН СССР. 1962. Т. 143. С. 1067—1070.
22. Levinson N.//Mat.-fys. medd. Kgl. danske vid. selskab. 1949. Vol. 25. P. 1.
23. Буслаев В. С., Меркурьев С. П.//ТМФ. 1970. Т. 5. С. 372.
24. Bolle D., Osborn T.A.//Phys. Rev. 1982. Vol. A26. P. 3062—3072; Буслаев В. С., Черненко В. Г.//Вестник ЛГУ. Сер. Физика, химия. 1987. № 2. С. 16—20.
25. Biedenharn L.C., Louck J. Angular Momentum in Quantum Physics. Reading, MA: Addison—Wesley, 1981.