«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1991, ТОМ 22, ВЫП. 1

УДК 539.14

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, СВЯЗАННЫХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА КдФ

Е. П. Жидков, Е. Х. Христов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Софийский университет, София

Изложена спектральная теория разложений по произведениям решений двух регулярных задач Штурма — Лиувилля и связанная с ней теория Λ-операторов. Показано, что на этой основе можно получить единообразно основные теоремы единственности и конструктивные методы решения соответствующих обратных задач, а также гамильтоновский формализм для уравнения Кортевега — де Фриза в периодическом случае. Намечена схема обобщения этих результатов на случай двух регулярных операторов Дирака.

The spectral theory of expantions over products of solutions of two regular Sturm-Liouville boundary-value problems and assosiated with it theory of Λ-operators are discussed. As a consequence of this theory we give a general approach to uniquness theorems in inverse spectral problems, effective methods for their solving, and some aspects of a hamiltonian approach for the KdV equation in a periodic case. We also sketch the generalization of this theory for the case of two regular self adjoint Dirac systems.

ВВЕДЕНИЕ

Современное развитие математической физики во многом подверглось влиянию нового метода, обычно называемого методом обратной задачи (МОЗ), интегрирования нелинейных эволюционных уравнений, которые в абстрактном виде можно записать как задачу Коши

$$v_t = K(v), \quad 0 < t < \infty, \quad v(0) = v_0, \tag{1}$$

где явное выражение для $K(v)$ определяется конкретной физической задачей. Фундаментальное место здесь занимает уравнение КдФ

$$r_t = 6rr_x - r_{xxx}, \quad r(x, 0) = r_0(x) \in \varphi. \tag{2}$$

Суть МОЗ, предложенного в [1], заключалась в построении трансформаций, которые линеаризуют эту задачу в подходящем пространстве спектральных данных, однозначно определяющих уравнение Штурма — Лиувилля

$$l(r)\,y \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2} + r(x,\ t)\right) y = \lambda y, \tag{3}$$

где функцию $r(x)$ далее называем, как обычно потенциалом. Это приводит к соответствующей обратной задаче (ОЗ), которая для оператора (3) сводилась к хорошо изученному к этому времени уравнению Гельфанда — Левитана — Марченко [2]. В появившейся вслед за основополагающими работами Лакса [3], Захарова и Шабата [4], Захарова и Фаддеева [5] работе [6] был изложен весьма общий подход, дающий линеаризирующую трансформацию в виде обобщенного преобразования Фурье, которое на примере КдФ сводится к теории разложения по квадратам $Y = y^2(x, \lambda)$ решений (3), которые удовлетворяют уравнению

$$LY' \equiv \frac{1}{4}\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + 4r(x) + r_x(x) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{-\infty}^{x} - \int\limits_{x}^{\infty}\right)\right\} Y' = \lambda Y' \left({}' = \frac{d}{dx}\right). \tag{4}$$

Само уравнение КдФ можно записать в виде $r_t = 4Lr_x$. Построение общего вида трансформации Беклунда, как было показано в [7], приводит к оператору, для которого собственными функциями являются произведения $Y = y_1 y_2$ решений двух уравнений $l(r_j)\,y_j = \lambda y_j$, $j = 1, 2$. Следуя установившейся традиции, такие операторы обычно называют Λ-операторами. Свойства этих операторов, как явствует, например, из монографии [7—9], играют весьма существенную роль в МОЗ. Как правило, они рассматривались на всей оси, в классе убывающих при $|x| \to \infty$ потенциалов. Вопрос о полноте произведения Y решений двух задач Штурма — Лиувилля на конечном интервале изучался еще в классической работе Борга [10], где были доказаны первые теоремы единственности в ОЗ. Конструктивное восстановление оператора Штурма — Лиувилля по спектральной функции было решено Гельфандом и Левитаном [11], где обратная задача сводилась к уравнению Фредгольма второго рода. Аналогичный результат для ОЗ рассеяния на полуоси был получен Марченко [12]. Далее было показано, что в некоторых случаях уравнение Гельфанда — Левитана допускает явные решения, которые легли в основу солитонных решений для уравнения КдФ. На основе уравнения Гельфанда — Левитана была получена и априорная характеристика класса функций, которые являются спектральными для оператора Штурма — Лиувилля с потенциалом из заданного пространства (см., например, далее, разд. 2). Этот факт сыграл важную роль в дальнейшем развитии методов ОЗ, главным образом, в связи с расширением приложения МОЗ к различным солитонным уравнениям. Теория уравнений, к которым применим МОЗ, естественным образом повлияла и на исследования по ОЗ. Сходство между методами решения ОЗ рассеяния для радиального оператора Шредингера и свойствами уравнения КдФ отмечалось, в частности, в [13], где решение ОЗ получалось на основе непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) [14], являющегося уравнением вида (1) (см. подробнее разд. 2). Для его конструктивной реализации была развита теория Λ-операторов на полуоси [15].

Настоящий обзор можно рассматривать как продолжение этих исследований. Основное место здесь занимает теория разложений по произведениям решений двух самосопряженных задач Штурма — Лиувилля на конечном интервале и их приложения в ОЗ и в МОЗ для уравнения КдФ.

В разд. 1 рассматриваются две задачи

$$l(q_j)\,y = \lambda y,\ y'(0) - h_j y(0) = 0,\ y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\quad j = 1,\ 2, \tag{5}$$

где $q_j \in L_2(0, \pi)$, h_j, H_j — конечные числа. Ввиду наличия граничных условий в (5) формулы разложения по произведениям здесь несколько сложнее, по сравнению со случаем всей оси [16], что отмечалось еще в [17]. В качестве элементарных приложений получены простые доказательства соответствующих теорем единственности в ОЗ, созвучные с их более конструктивной трактовкой [18, 19]. Идея, изложенная в разд. 2 для решения ОЗ с помощью НАМН, восходит к работам [17, 20, 21]. Этот подход сходен с конструкциями [22, 23]. Характерной чертой построенных в разд. 2 уравнений является возможность их явного решения формулами, которые являются аналогами известных солитонных решений для уравнений КдФ. В разд. 4 изучен сходный круг вопросов для задач

$$l(r_j)\,y = \lambda y,\ y(0) = y(\pi) = 0,\ r_j \in L_2(0, \pi),\ j = 1,\ 2. \tag{6}$$

В разд. 3 сначала получены формулы разложения по произведениям решений этих задач, следуя конструкции разд. 1, в виде, удобном для изучения обратных периодических задач Штурма — Лиувилля. На их основе доказаны теоремы единственности, а также важное для дальнейшего представление для конечно-зонных потенциалов. Далее показано как исходя из известного преобразования Крамма — Крейна, переводящего задачу (5) в (6), можно построить трансформацию формул разложения, полученных в разд. 2 для $q(x) = q(\pi - x)$, h, $H = h$ в соответствующие формулы для $r(x) = r(\pi - x)$, минуя конструкции разд. 1. Новым моментом в разд. 4 является формулировка задачи о разложении по произведениям решения (6) в виде краевой задачи на собственные функции для интегродифференциального оператора, являющегося обобщением указанного выше L-оператора на случай конечного интервала [24, 25]. В разд. 5 показано, что исходя из симплектических формул разложения, являющихся разложением единиц для оператора L на конечном интервале, можно построить гамильтоновый формализм для уравнения КдФ в периодическом случае, впервые предложенном в работе [26]. Полученные здесь уравнения в канонических переменных [26] дают в случае N-зонных потенциалов известные уравнения Дубровина [27], а в пределе $N \to \infty$ — сходные с [28]. Предложенный в разд. 5 подход к КдФ является обобщением метода [6, 8] на периодический случай [25]. Попутно указана связь между этими построениями и изложенными в [23]. В разд. 6 намечена схема построения спектральной теории Λ-операторов, связанных с регулярным оператором Дирака на конечном интервале, на основе которой можно изложить гамильтонову теорию, сходную с [25, 26], для нелинейного уравнения Шредингера в периодическом случае.

Сделаем несколько замечаний о форме изложения. Отметим, что хотя на протяжении всего текста мы рассматриваем только регулярные самосопряженные задачи, основные конструкции формул разложения излагаются в форме, удобной для изучения и несамосопряженных, а также для обобщения на случай сингулярных операторов Штурма — Лиувилля. При формулировке основных утверждений мы придерживаемся того уровня математической строгости, который обычно принят для рассматриваемого круга задач. Желание сохранить построения разд. 1—3 в рамках гильбертова пространства L_2 (0, π) оправдывает кажущуюся на первый взгляд надуманность некоторых из наших конструкций. Доказательства приводятся, как правило, в конспективном виде, со ссылками на работы, в которых они изложены подробно. Необходимые для этой работы сведения об операторах Штурма — Лиувилля, которыми в дальнейшем пользуемся без ссылок, имеются в [29, 30]. Цитирования в обзоре не претендуют на полноту. Подробное изложение методов и история обратных задач имеется, например, в [31]. Круг приложений изложенной спектральной теории в основном отражает научные интересы авторов и их результаты. Вне рамок этого обзора остались еще ряд интересных задач теоретической физики, где полнота произведений играет важную роль, таких, как устойчивость ОЗ [32], задача Коши для линеаризованного уравнения КдФ [33, 34], симплектические структуры и иерархия скобок Пуассона [35], задача о пертурбации квантовомеханического осциллятора [36], а также теория Λ-операторов для более сложных спектральных задач, включая их многомерные обобщения [37, 38].

1. ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДВУХ ЗАДАЧ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Формулы разложения. Рассмотрим две самосопряженные задачи Штурма — Лиувилля, определяемые дифференциальными уравнениями

$$l(q_j)\,y_j \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q_j(x)\right) y_j = \lambda y_j, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad j = 1,\ 2, \tag{7}$$

и граничными условиями

$$y_j'(0) - h_j y_j(0) = 0, \quad y_j'(\pi) + H_j y_j(\pi) = 0, \tag{8}$$

где вещественные функции $q_j \in L_2(0, \pi) = L_2$, числа h_j, H_j — конечные. Обозначим $\varphi_j(x, \lambda)$ и $\psi_j(x, \lambda)$ решения уравнений (7), для которых

$$\varphi_j(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_j'(0, \lambda) = h_j, \quad \psi_j(\pi, \lambda) = 1, \quad \psi_j'(\pi, \lambda) = H_j.$$

Тогда спектр $\sigma_j = \sigma(\hat{q}_j = (q_j(x), h_j, H_j))$ задачи (7), (8) определяется как множество нулей $\lambda_n^{(j)} = \lambda_n(\hat{q}_j)$, $n \geqslant 0$, их характеристических функций

$$\omega_j(\lambda) = W(\psi_j, \varphi_j) = \varphi_j'(\pi) + H_j \varphi_j(\pi) = h_j \psi_j(0) - \psi_j'(0), \tag{9}$$

где вронскиан $W(f, g) = fg' - f'g$. Положим для краткости $\lambda_n^{(j)} = \lambda_{2n+j}$, $n = 0, 1, \ldots, j = 1, 2$, и по спектрам σ_j построим множества $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma'' = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $\sigma' = \sigma \setminus \sigma''$. Так как при $n \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\lambda_{2n+j} = n^2 + \frac{2}{\pi} a_j + o(1); \quad a_j = h_j + H_j + \frac{1}{2} \int_0^\pi q_j(x)\, dx, \tag{10}$$

будем считать, не ограничивая общности, что если $\sigma'' \neq \phi$, то из $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2m+2}$ следует $n = m$. Напомним, что собственные функции

$$\varphi_n(\hat{q}_j; x) = C_n(\hat{q}_j)\, \psi_n(\hat{q}_j; x),$$

$$C_{2n+j} = \varphi_j(\pi, \lambda_n(\hat{q}_j)) = \psi_j^{-1}(0, \lambda_n(\hat{q}_j)), \tag{11}$$

их нормы

$$\alpha_{2n+j} = \| \varphi_n(\hat{q}_j) \|_{L_2}^{-2} = -(C_{2n+j} \dot{\omega}_j(\lambda_{2n+j}))^{-1} \quad (^\bullet = \partial / \partial \lambda); \tag{12}$$

$$\beta_{2n+j} = \| \psi_n(\hat{q}_j) \|_{L_2}^{-2} = -C_{2n+j} \dot{\omega}_j^{-1}(\lambda_{2n+j}). \tag{13}$$

Из представления

$$\omega_j(\lambda) = \pi (\lambda_0^{(j)} - \lambda) \prod_{n \geqslant 1} n^{-2} (\lambda_n^{(j)} - \lambda) \tag{14}$$

следует, что

$$C_n(\hat{q}_j) = (-1)^n \,|\, C_n(\hat{q}_j) \,|. \tag{15}$$

Введем гильбертовы пространства $\mathfrak{R}_2 = L_2 \times \mathbb{R}^2 \ni \hat{f} = (f(x), \alpha, \beta)$ и $\mathfrak{R}_1 = L_2 \times \mathbb{R} \ni \tilde{f} = (f(x), \alpha)$ со скалярными произведениями $(\hat{f}_1, \hat{f}_2)_2 = \int_0^\pi f_1(x) f_2(x)\, dx + \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2$ и $(\hat{f}_1, \hat{f}_1)_1 = \int_0^\pi f_1(x) f_2(x) \times$

$\times\, dx + \alpha_1\alpha_2$ соответственно. Пусть

$$\mathfrak{M} = \left\{ \hat{f} \in \mathfrak{N}_2 \,\middle|\, \frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)dx + \alpha + \beta = 0 \right\} \tag{16}$$

— подпространство $\mathfrak{N}_2$ элементов $\hat{f}$, ортогональных элементу $\hat{f}_0 = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$. Скалярное произведение в $L_2(0, \pi)$ будем обозначать, как обычно, $(f, g) = \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx$. Пусть

$$\Phi(x, \lambda) = \varphi_1(x, \lambda)\, \varphi_2(x, \lambda), \quad \hat{\Phi}(\lambda) = (\overline{\Phi}(x, \lambda),\ 1,\ \Psi(\pi, \lambda)),$$

$$\Psi(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda)\, \psi_2(x, \lambda), \quad \hat{\Psi}(\lambda) = (\Psi(x, \lambda),\ \Psi(0, \lambda),\ 1),$$

где $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Psi}$ рассматриваем как элементы $\mathfrak{N}_2$. Введем оператор

$$J = \left(2\frac{d}{dx},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right), \quad J\hat{f} = (2f'(x),\ \alpha,\ -\beta). \tag{17}$$

Отметим, что на линейном многообразии

$$\mathfrak{N}_2^{(c)} \ni \hat{f}_c = (f(x) \in C_1(0, \pi),\ \alpha = f(0),\ \beta = f(\pi))$$

оператор J является кососимметричным,

$$[\hat{f}_c,\ \hat{g}_c]_2 = (\hat{f}_c,\ J\hat{g}_c)_2 = -[\hat{g}_c,\ \hat{f}_c]_2, \quad J\hat{f}_c \in \mathfrak{M}. \tag{18}$$

В $\mathfrak{N}_1$ построим функции

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \left(\Phi(x, \lambda) - \frac{1}{2},\ \Phi(\pi, \lambda) - 1\right), \quad \tilde{\Psi}(\lambda) = (2\Psi'(x, \lambda),\ -1); \tag{19}$$

$$\tilde{\Psi}^+(\lambda) = \left(\Psi(x, \lambda) - \frac{1}{2},\ \Psi(0, \lambda) - 1\right), \quad \tilde{\Phi}^+(\lambda) = (-2\Phi'(x, \lambda),\ -1). \tag{20}$$

Справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} &(\hat{f},\ \hat{\Psi}(\lambda))_2 = (\tilde{f},\ \tilde{\Psi}(\lambda))_1; \quad \hat{f} \in \mathfrak{M},\ \tilde{f} = (f(x),\ \beta); \\ &(\hat{f},\ \hat{\Psi}(\lambda))_2 = (\tilde{f},\ \tilde{\Psi}^+(\lambda))_1; \quad \hat{f} \in \mathfrak{M},\ \tilde{f} = (f(x),\ \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Из известного тождества [5]

$$W(Y(x, \lambda)\, Z(x, \mu)) = \frac{1}{\lambda - \mu}\frac{d}{dx}\prod_{j=1,\,2} W(y_j(x, \lambda),\ z_j(x, \mu)), \tag{22}$$

где $Y = y_1y_2$, $Z = z_1z_2$, y_j и z_j — решения уравнений (7) при λ и μ соответственно, вытекают, в силу равенства (9), следующие соотношения:

$$(\widetilde{\Phi}(\lambda),\ \widetilde{\Psi}(\mu))_1=(\widetilde{\Phi}^+(\lambda),\ \widetilde{\Psi}^+(\mu))_1=[\hat{\Phi}(\lambda),\ \hat{\Psi}(\mu)]_2= \\ =(\lambda-\mu)^{-1}(\Omega(\lambda)-\Omega(\mu)),\quad \Omega(\lambda)=\omega_1(\lambda)\,\omega_2(\lambda). \tag{23}$$

Определим в $\mathfrak{R}_1$ системы $\{\widetilde{U}_n=(U_n\ (x),\ U_n^{(0)})\}_{n=1}^{\infty}$ и

$$\{\widetilde{V}_n\ =\ (V_n\ (x),\ V_n^{(0)})\}_{n=1}^{\infty}$$

следующим образом: при $\lambda_{2n+j}\in\sigma'$ положим

$$\widetilde{U}_{2n+j}=\dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+j})\,\widetilde{\Phi}(\lambda_{2n+j}),\ \ \widetilde{V}_{2n+j}=\widetilde{\Psi}(\lambda_{2n+j}), \tag{24}$$

при $\lambda=\lambda_{2n+j}\in\sigma''$ положим

$$\widetilde{U}_{2n+1}=2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda)\,\widetilde{\Phi}(\lambda),\quad \widetilde{U}_{2n+2}=2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda)\,\dot{\widetilde{\Phi}}(\lambda), \\ \widetilde{V}_{2n+1}=\dot{\widetilde{\Psi}}(\lambda)-\dddot{\Omega}(\lambda)\,(3\ddot{\Omega}(\lambda))^{-1}\,\widetilde{\Psi}(\lambda),\ \ \widetilde{V}_{2n+2}=\widetilde{\Psi}(\lambda). \tag{25}$$

Из тождеств (23) следует

Лемма 1.1. Справедливы соотношения биортогональности

$$(\widetilde{V}_n,\ \widetilde{U}_m)_1=(\hat{V}_n,\ \hat{U}_m)_2=\delta_{nm};$$

$$(\widetilde{V}_n^+,\ \widetilde{U}_m^+)_1=(\hat{V}_n^+,\ \hat{U}_m^+)_2=\delta_{nm}\quad n,\ m\geqslant 1,$$

где функции $\hat{U}_n=(U_n\ (x),\ U_n^{(0)},\ U_n^{(1)})$ и $\hat{V}_n=(V_n\ (x),\ V_n^{(0)},\ V_n^{(1)})$ получаются по формулам (24), (25) заменой $\widetilde{\Phi}$ на $\hat{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ на $\hat{\Psi}$, функции $\widetilde{U}_n^+$ — заменой $\widetilde{\Phi}$ на $\widetilde{\Psi}^+$, $\widetilde{V}_n^+$ — заменой $\widetilde{\Psi}$ на $\widetilde{\Phi}^+$, $\hat{U}_n^+$ и $\hat{V}_n^+$ строятся по $\widetilde{U}_n^+$ и $\widetilde{V}_n^+$ так же, как $\hat{U}_n$ и $\hat{V}_n$ по $\widetilde{U}_n$ и $\widetilde{V}_n$. Каждой функции $\widetilde{f}\in\mathfrak{M}$ сопоставим частные суммы рядов

$$S_N(\hat{f}\in\mathfrak{M})=\sum_{n=1}^{2N}\hat{V}_n(\hat{f},\ \hat{U}_n)_2=\sum_{n=1}^{2N}\widetilde{V}_n(\widetilde{f},\ \widetilde{U}_n)_1, \tag{26}$$

$$S_N^+(\hat{f}\in\mathfrak{M})=\sum_{n=1}^{2N}\hat{V}_n^+(\hat{f},\ \hat{U}_n^+)_2=\sum_{n=1}^{2N}\widetilde{V}_n^+(\widetilde{f},\ \widetilde{U}_n^+)_1, \tag{27}$$

где в (26) $\widetilde{f}=(f\ (x),\ \beta)$, а в (27) $\widetilde{f}=(f\ (x),\ \alpha)$.

Теорема 1.1. Для любой $\widetilde{f}=(f\ (x),\ \beta)\in\mathfrak{R}_1$ суммы $S_N\ (\widetilde{f})$ (26) сходятся по норме $\mathfrak{R}_1$ к f, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f(x)-\sum_{n=1}^{2N}V_n(x)\,(\widetilde{f},\ \widetilde{U}_n)_1\right\|_{L_2}=0, \tag{28}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left|\beta-\sum_{n=1}^{2N}V_n^{(0)}(\widetilde{f},\ \widetilde{U}_n)_1\right|=0, \tag{29}$$

а суммы $\widetilde{S}_N^+$ к $\widetilde{f}$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \| f - S_N^+ (\widetilde{f} = (f(x),\ \alpha)) \|_{\Re_1} = 0. \tag{30}$$

К этой теореме примыкает

Теорема 1.2. Для любых $f(x) \in L_1(0, \pi)$, α, $\beta \in \mathbb{C}$, таких, что выполняется условие (16), равномерно по $0 \leqslant x \leqslant \pi$:

$$-\int_x^\pi f(s)\,ds - 2\beta \equiv \int_0^x f(s)\,ds + 2\alpha = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} W_n(x)(\hat{f},\ \hat{U}_n)_2, \tag{31}$$

$$-\int_x^\pi f(s)\,ds - 2\beta \equiv \int_0^x f(s)\,ds + 2\alpha = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} W_n^+(x)(\hat{f},\ \hat{U}_n^+)_2, \tag{32}$$

где при $\lambda_n \in \sigma'$, $\lambda_{2n+2} \in \sigma''$ $W_n(x) = 2\Psi(x, \lambda_n)$, $W_n^+(x) = -2\Phi(x, \lambda_n)$, при $\lambda = \lambda_{2n+1} \in \sigma''$ $W_{2n+1}(x) = 2\dot{\Psi}(x, \lambda) - 2\dddot{\Omega}(\lambda)(3\ddot{\Omega}(\lambda))^{-1} \times \Psi(x, \lambda)$, $W_{2n+1}^+(x) = -2\dot{\Phi}(x, \lambda) + 2\dddot{\Omega}(\lambda)(3\ddot{\Omega}(\lambda))^{-1}\Phi(x, \lambda)$.

Следствие 1. Формулы разложения (28)—(30) можно записать в виде

$$\hat{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{V}_n(\hat{f},\ \hat{U}_n)_2,\quad \hat{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{V}_n^+(\hat{f},\ \hat{U}_n)_2,\quad \hat{f} \in \mathfrak{M}.$$

Замечание 1. Полагая в (31) $x = \pi$, получаем (29), а при $x = 0$ имеем $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(1)}(\hat{f},\ \hat{U}_n)_2$. Формула (28) формально получается из (31) дифференцированием последнего по x.

Замечание 2. Определим в пространстве $\Re_1$ систему ортогональных проекторов P_n равенствами

$$P_n \widetilde{f} = \widetilde{f}_n = \widetilde{V}_{2n-1}(\widetilde{f},\ \widetilde{U}_{2n-1})_1 + \widetilde{V}_{2n}(\widetilde{f},\ \widetilde{U}_{2n})_1,\quad n \geqslant 1.$$

Тогда теорема 1.1 утверждает, что последовательность двумерных подпространств $\Re_1^{(n)} = P_n(\Re_1)$ является базисом в $\Re_1$, т. е. любая функция $\widetilde{f} \in \Re_1$ разлагается единственным образом в ряд вида $\widetilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, где $\widetilde{f}_n \in \Re_1^{(n)}$. Из полученных далее равенств (57) видно, что ввиду известной асимптотики $\beta_n = \frac{2}{\pi} + o(n^{-1})$ сама система $\{\widetilde{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ в общем случае не является базисом в $\Re_1$.

Как уже отмечалось, оператор J определяет посредством билинейной формы $[\hat{f}_c, \hat{g}_c]_2$ симплектическую структуру в $\Re_2$. Простейшую симплектическую формулу разложения, вытекающую непосредственно из теорем 1.1 и 1.2, дает следующая

Теорема 1.3. Пусть краевые задачи (7), (8) изоспектральны, т. е. $\sigma' = \varnothing$, $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} = \lambda_n$, $n \geqslant 0$. Каждому λ_n отнесем пару функций

$$\hat{P}_n = \beta_{2n+1} \hat{\Psi}(\lambda_n), \quad \hat{Q}_n = \frac{1}{2}(\beta_{2n+2} \dot{\hat{\Psi}}(\lambda_n) - \alpha_{2n+1} \dot{\hat{\Phi}}(\lambda_n)). \tag{33}$$

Тогда: (I) система $\{\hat{P}_n, \hat{Q}_n\}_{n=0}^{\infty}$ является симплектическим базисом в $\mathfrak{M}$, т. е. для любой $\hat{f} \in \mathfrak{M}$ имеет место формула разложения

$$\hat{f} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{2N} \{J\hat{Q}_n (\hat{f}, \hat{P}_n)_2 - J\hat{P}_n (\hat{f}, \hat{Q}_n)_2\}, \tag{34}$$

где $J\hat{P}_n$, $J\hat{Q}_n \in \mathfrak{M}$ и

$$[\hat{P}_n, \hat{Q}_m]_2 = \delta_{nm}, \ [\hat{P}_n, \hat{P}_m]_2 = [\hat{Q}_n, \hat{Q}_m]_2 = 0. \tag{35}$$

(II). Если $\hat{f}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2, имеем равномерно по $0 \leqslant x \leqslant \pi$ разложение

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right) f(s)\,ds + \alpha - \beta = \sum_{n=0}^{\infty} 2\{Q_n(x)(\hat{f}, \hat{P}_n)_2 - P_n(x)(\hat{f}, \hat{Q}_n)_2\}, \tag{36}$$

где $P_n = \beta_{2n+1}\Psi(x, \lambda_n)$, $Q_n = \frac{1}{2}(\beta_{2n+2}\dot{\Psi}(x, \lambda_n) - \alpha_{2n+1}\dot{\Phi}(x, \lambda_n))$.

Эту теорему можно рассматривать как частный случай теоремы 1.4. Мы выделили ее, главным образом, в связи с тем, что ее доказательство, в отличие от теоремы 1.4, является прямым следствием теорем 1.1 и 1.2. Действительно, так как при $\lambda_{2n+j} \in \sigma''$ имеем из (II) равенство $\hat{\Phi}(\lambda_n) = C_n^{(1)} C_n^{(2)} \hat{\Psi}(\lambda_n)$, то

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1,\,2} \{W_{2n+j}(x)(\hat{f}, \hat{U}_{2n+j})_2 + W_{2n+j}^{+}(x)(\hat{f}, \hat{U}_{2n+j})_2\} =$$
$$= 2Q_n(x)(\hat{f}, \hat{P}_n)_2 - 2P_n(x)(\hat{f}, \hat{Q}_n)_2.$$

Таким образом, формула (36) получается в результате сложения разложений (31) и (32). Соотношения (35) проверяются с помощью тождества (22).

Обобщение теоремы 1.3 на случай, когда $\sigma' \neq \varnothing$, дает

Теорема 1.4. Пусть по краевым задачам (7), (8) построены системы $\{\hat{P}_n^{(j)}, \hat{Q}_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$, $j = 1, 2$, следующим образом:

$$\hat{P}_n^{(j)} = \dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+j})\, \hat{\Phi}(\lambda_{2n+j}), \quad \hat{Q}_n^{(j)} = \hat{\Psi}(\lambda_{2n+j}), \quad \lambda_{2n+j} \in \sigma'; \tag{37}$$

$$P_n = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda_{(n)})\,\Phi(\lambda_{(n)}), \quad \hat{Q}_n^{(j)} = \widehat{\psi_j(x, \lambda_{(n)})\,\chi_{3-j}(x, \lambda_{(n)})}, \ \lambda_{(n)} \in \sigma'', \tag{38}$$

где $\chi_j(x, \lambda_{(n)}) = \psi_j(x, \lambda_{(n)}) - C_{2n+j}^{-1}\dot{\varphi}_j(x, \lambda_{(n)})$ — решение уравнения (7) при $\lambda = \lambda_{(n)}$, $W(\chi_j, \varphi_j) = \dot{\omega}_j(\lambda_{(n)}) \neq 0$. Тогда для любой

$\hat{f} \in \mathfrak{M}$ имеет место разложение

$$\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \{J\hat{Q}_n^{(j)} (\hat{f},\ \hat{P}_n^{(j)})_2 - J\hat{P}_n^{(j)} (\hat{f},\ \hat{Q}_n^{(j)})_2\}, \tag{39}$$

где

$$[\hat{P}_n^{(j)},\ \hat{Q}_m^{(j)}]_2 = \delta_{nm},\quad [\hat{P}_n^{(j)},\ \hat{P}_m^{(j)}]_2 = [\hat{Q}_n^{(j)},\ \hat{Q}_m^{(j)}]_2 = 0. \tag{40}$$

При этом если $\hat{f}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2, то

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right) f(s)\,ds + \alpha - \beta = \sum_{n=0}^{\infty} 2\{Q_n^{(j)}(x)(\hat{f},\ \hat{P}_n^{(j)})_2 - P_n^{(j)}(x)(\hat{f},\ \hat{Q}_n^{(j)})_2\}, \tag{41}$$

где сходимость ряда в (39) понимается, как и в теореме 1.1, по норме $\mathfrak{R}_2$, а в (41) равномерно по $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Замечание 1. Формула разложения (41) остается справедливой для любой $\hat{f} \in \mathfrak{R}_2$ при $x \in \Delta \subset (0,\ \pi)$. Условие $\hat{f} \in \mathfrak{M}$ обеспечивает равномерную по $0 \leqslant x \leqslant \pi$ сходимость, а также возможность почленного дифференцирования по x в L_2, т. е. справедливость формулы (39). Точнее, если через $S_N^{(j)}$ ($\hat{f} \in \mathfrak{M}$) обозначить частную сумму ряда (39) и

$$\sigma_N(f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(y)\,dy + \sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{2}{\pi}\cos 2nx \int_0^\pi f(y)\cos 2ny\,dy + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi}\sin 2nx \int_0^\pi f(y)\sin 2ny\,dy\right\}$$

— частную сумму ряда Фурье для $f \in L_2$, то

$$\lim_{N\to\infty} \| S_N^{(j)}(f;\ x) - \sigma_N(f;\ x)\|_{L_2} = 0.$$

Приведем схему доказательств теорем 1.2 и 1.1, следуя [17]. Введем функцию

$$G(x,\ y,\ \lambda) = \frac{2}{\Omega(\lambda)} \begin{cases} \Psi(x,\ \lambda)\,\Phi(y,\ \lambda), & 0 \leqslant y \leqslant x; \\ \sum\limits_{j=1,\ 2} U_j(x,\ \lambda)\,U_{3-j}(y,\ \lambda) - \Phi(x,\ \lambda)\,\Psi(y,\ \lambda), & \\ & x \leqslant y \leqslant \pi, \end{cases} \tag{42}$$

где $U_j(x,\ \lambda) = \varphi_j(x,\ \lambda)\,\psi_{3-j}(x,\ \lambda)$, и далее построим функции

$$R(x,\ y,\ \lambda) = G(x,\ y,\ \lambda) - \frac{1}{2} G(x,\ 0,\ \lambda),\quad S(x,\ \lambda) =$$
$$= R(x,\ \pi,\ \lambda) - R(x,\ 0,\ \lambda).$$

Функции G, R и S являются при любых $x,\ y \in [0,\ \pi]$ целыми функциями от λ, имеющими полюсы не более второго порядка при $\lambda_n \in \sigma$.

Пусть $\lambda = k^2$ и $\tilde{c}_N$ — окружность в k-плоскости с радиусом $N - 1/2$, а c_N — ее образ в λ-плоскости. Рассмотрим с $f(x) \in L_1(0, \pi)$ и $\beta \in \mathbb{C}$ контурный интеграл

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\tilde{c}_N} \left\{ \int\limits_0^\pi R(x, y, \lambda) f(y)\, dy + \beta S(x, \lambda) \right\} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\tilde{c}_N} \left\{ \int\limits_0^\pi R(x, y, k^2) f(y)\, dy + \beta S(x, k^2) \right\} k\, dk = I_{N,1}(x) + \beta I_{N,2}(x),$$

где окружности c_N и $\tilde{c}_N$ обходятся один раз против часовой стрелки. По теореме о вычетах, с учетом равенств (11), находим

$$I_N(x) = \sum_{n=1}^{2N} W_n(x) (\tilde{f}, \tilde{U}_n)_1. \tag{43}$$

Подсчитаем теперь $I_N(x)$ непосредственно по контуру $\tilde{c}_N$ при $N \to \infty$. Пусть $\Gamma(x, y, k^2)$ — функция, которая получается из R при $q_j \equiv 0$, $h_j = H_j = 0$. Так как равномерно по $0 \leqslant x \leqslant \pi$ при $|k| \to \infty$, $k = \sigma + i\tau$

$$\varphi(x, k) = \cos kx + O\left(\frac{1}{k} e^{|\tau| x}\right),$$

$$\psi(x, k) = \cos k(\pi - x) + O\left(\frac{1}{k} e^{|\tau|(\pi - x)}\right),$$

причем $\omega^{-1}(k^2) = (-k \sin k\pi)^{-1}(1 + O(k^{-1}))$, $k \in \tilde{c}_N$, то равномерно по $0 \leqslant x, y \leqslant \pi$ при $|k| \to \infty$, $k \in \tilde{c}_N$ справедливы асимптотики $R(x, y, k^2) = \Gamma(x, y, k^2) + O(k^{-3})$, $S(x, k^2) = -2k^{-2} + O(k^{-3})$. Отсюда получаем, как обычно (см., например, [30]), что равномерно по $x \in [0, \pi]$

$$\lim_{N\to\infty} I_N(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_N} \left\{ \int\limits_0^\pi \Gamma(x, y, k^2) f(y)\, dy - \frac{2\beta}{k^2} \right\} k\, dk =$$

$$= -\int\limits_x^\pi f(y)\, dy - 2\beta.$$

Сравнивая это равенство с (43), получаем разложение (31). Доказательство теоремы 1.1 основано на следующих двух леммах.

Лемма 1.2 (о равносходимости). Для любой функции $f(x) \in L_1(0, \pi)$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sigma_N(f; x) - \sum_{n=1}^{2N} V_n(x) (f, U_n) \right\|_{L_2} = 0, \tag{44}$$

где $\sigma_N = (f;\ x) = \sum_{n=0}^{N-2} v_n(x)\ (f,\ u_n),\quad u_0(x) = 1,$

$$u_{2n-1}(k) = \cos 2nx,\ u_{2n}(x) = x \sin 2nx\ (n \geqslant 1),\quad v_0(x) = 2\pi^{-2}(\pi - x),$$
$$v_{2n-1}(x) = 4\pi^{-2}(\pi - x)\cos 2nx,\ v_{2n}(x) = 4\pi^{-2} \sin 2nx\ (n \geqslant 1).$$

Доказательство получается с помощью контурного интеграла

$$I'_{N,\,1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_N} \{R'_x(x,\ y,\ \lambda)\, f(y)\, dy\}\, d\lambda.$$

По теореме о вычетах $I'_{N,\,1}(x) = \sum_{n=1}^{2N} V_n(x)(f,\ U_n)$ и

$$J_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_N} \left\{ \int_0^\pi \Gamma'_x(x,\ y,\ \lambda)\, f(y)\, dy \right\} d\lambda = \sigma_N(f;\ x).$$

Далее при $|k| \to \infty,\ k \in \tilde{c}_N$ справедлива оценка

$$R_x(x,\ y,\ k^2) - \Gamma_x(x,\ y,\ k^2) = O(k^{-2} \exp(2\,|\tau|\,(y - x))) +$$
$$+ O(k^{-2} \exp(2\,|\tau|\,(x - y))) + k^2 \exp(2\,|\tau|\,(|\pi - 2x| - \pi)),$$
$$0 \leqslant y \leqslant x,\quad x \leqslant y \leqslant \pi.$$

Теперь для того, чтобы получить (44), остается заметить, что из этой оценки имеем равномерно по x в любом интервале $\Delta \subset (0,\ \pi)$

$$\lim_{N\to\infty} |J_N(x) - I'_{N,\,1}(x)| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{N\to\infty} \overline{\sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}} |J_N(x) - I'_N(x)| < \infty.$$

Лемма 1.3. Для любой функции $f(x) \in L_2(0,\ \pi)$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f(x) - \sum_{n=1}^{2N} V_n(x)(f,\ U_n) \right\|_{L_2} = 0.$$

Доказательство в силу леммы 1.2 сводится к установлению сходимости

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f(x) - \sum_{n=1}^{N} v_n(x)(f,\ u_n) \right\|_{L_2} = 0. \tag{45}$$

Рассмотрим следующую несамосопряженную краевую задачу:

$$y'' + 4\lambda y = 0\ (0 \leqslant x \leqslant \pi),\ y(\pi) = 0,\ y'(0) = y'(\pi). \tag{46}$$

Непосредственно проверяется, что функция $\Gamma_x(x,\ y,\ \lambda)$ определяет функцию Грина этой задачи; ее собственные числа $\mu_n = k_n^2\ (= 4\lambda_n)$, где $k_0 = 0,\ k_{2n-1} = k_{2n} = 2n\ (n \geqslant 1)$, причем каждому $\mu_n\ (n \geqslant 1)$ отвечает одна собственная функция $v_{2n}(x)$ и одна присоединенная $v_{2n-1}(x)$. Легко устанавливается, что система $u_n(x)$ является биортогональной к v_n в $L_2(0,\ \pi)$ и дает систему собственных $u_0(x)$,

$u_{2n-1}(x)$, $n \geqslant 1$, и присоединенных функций $u_{2n}(x)$ сопряженной к (46) краевой задачи $y'' + 4\lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = y(\pi)$. Хорошо известно, что любая система собственных и присоединенных функций задачи (46) является полной в $L_1(0, \pi)$. Важное для наших целей свойство базисности в L_2 [т. е. равенство (45)] вытекает из полученного В. А. Ильиным [39] необходимого и достаточного условия базисности в L_2 заданной полной и минимальной системы собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора. Это условие является в нашем случае легко проверяемым неравенством $\|v_n\|_{L_2}\, \|u_n\|_{L_2} \leqslant \mathrm{const}$ $(n \geqslant 1)$.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы 1.1, остается заметить, что из (43) имеем

$$I'_{N,\,2}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_N} S_x(x, \lambda)\, d\lambda = \sum_{n=1}^{2N} V_n(x)\, U_n^{(0)}.$$

Далее, в силу оценки

$$S'_x(x, k^2) = O\left(k^{-2}\left[e^{-2|\tau|x} + e^{-2|\tau|(\pi - x)} + e^{-2|\tau|(\pi - |\pi - 2x|)}\right]\right)$$

и леммы Гордана получаем равномерно по $x \in \Delta \subset (0, \pi)$

$$\lim_{N\to\infty} I'_{N,\,2}(x) = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \overline{\sup_{0\leqslant x\leqslant \pi}} |I'_{N,\,2}(x)| \leqslant \mathrm{const}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} \|\sum\limits_{n=1}^{2N} V_n(x)\, U_n^{(0)}\|_{L_2} = 0$, что вместе с леммами 1.2 и 1.3 доказывает разложение (28).

Разложения, приведенные в теореме 1.4, получаются с помощью функции

$$G^{(j)}(x, y, \lambda) = \frac{-2}{\Omega(\lambda)} \begin{cases} \Phi(x, \lambda)\Psi(y, \lambda) - U_{3-j}(x, \lambda)\, U_j(y, \lambda), \\ \qquad x < y < \pi; \\ -\Psi(x, \lambda)\Phi(y, \lambda) + U_j(x, \lambda)\, U_{3-j}(y, \lambda), \\ \qquad 0 < y < x, \end{cases} \tag{47}$$

в результате вычисленного, как в доказательстве теорем 1.1 и 1.2, контурного интеграла

$$I_N^{(j)}(f;\, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_N} \left\{ \int\limits_0^{x} G^{(j)}(x, y, \lambda) f(y)\, dy + \alpha G^{(j)}(x, 0, \lambda) + \right.$$
$$\left. + \beta G^{(j)}(x, \pi, \lambda) \right\} d\lambda.$$

Отметим, что при непосредственном вычислении интеграла $I_N^{(j)}(f, x)$ при $N \to \infty$ получается указанная в замечании 1 к теореме 1.4 равносходимость с обычным рядом Фурье, что существенно упрощает по сравнению с доказательством теоремы 1.1 установление сходимости в $L_2(0, \pi)$ $(\mathfrak{R}_2)$ для ряда частных сумм в (39).

Непосредственно из теоремы 1.2 следует, что справедлива следующая

Лемма 1.4. Система $\{\widetilde{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна и минимальна в пространстве $\mathfrak{R}_1$, т. е. если $(\widetilde{f}, \widetilde{U}_n)_1 = 0$, $n \geqslant 1$, то $f(x) = 0$ и $\beta = 0$. Минимальность вытекает из соотношений биортогональности леммы 1.1. Отсюда вытекает

Лемма 1.5. Система $\{\hat{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна и минимальна в $\mathfrak{R}_2$, т. е. если $f(x) \in L_2(0, \pi)$, α, $\beta \in C$,

$$\int_0^\pi f(x)\,\Phi(x, \lambda_n)\,dx + \alpha + \beta\Phi(\pi, \lambda_n) = 0, \quad \lambda_n \in \sigma;$$

$$\int_0^\pi f(x)\,\dot{\Phi}(x, \lambda_n)\,dx + \beta\dot{\Phi}(\pi, \lambda_n) = 0, \quad \lambda_n \in \sigma'';$$

то $\alpha = \beta = 0$ и почти всюду $f(x) = 0$.

Замечание 1. Вполне аналогично исходя из разложений, приведенных в теоремах 1.2—1.4, устанавливается полнота и минимальность в $\mathfrak{R}_2$ любой из систем $\{\hat{U}_n^+\}$, $\{\hat{P}_n, \hat{Q}_n\}$ и $\{\hat{P}_n^{(j)}, \hat{Q}_n^{(j)}\}$.

Рассмотрим теперь несколько подробнее случай краевых задач

$$y'' + (\lambda - q_j(x))\,y = 0, \quad q_j(x) = q_j(\pi - x) \in L_2^{(s)}, \tag{48}$$

$$y'(0) - h_j\,y(0) = 0, \; y'(\pi) + h_j\,y(\pi) = 0, \tag{49}$$

которые получаются из (7), (8) при $h_j = H_j$, $q_j \in L_2^{(s)} = \{f \in L_2 \mid f(x) = f(\pi - x)\}$, т. е. $\hat{q}_j = \hat{q}_j^{(s)} \in \mathfrak{R}_2^{(s)} = \{\hat{f} \in \mathfrak{R}_2 \mid f \in L_2^{(s)}, \alpha, \beta = \alpha\}$.

Как известно (см., например, [19]), собственные функции в этом случае удовлетворяют равенствам

$$\varphi_j(x, \lambda_{2n+j}) = (-1)^n\,\psi_j(x, \lambda_{2n+j}), \quad n \geqslant 0, \tag{50}$$

и, следовательно, их нормы

$$(\alpha_{2n+j}^{(s)})^{-1} = (\beta_{2n+j}^{(s)})^{-1} = (-1)^{n+1}\,\dot{\omega}_j(\lambda_{2n+j}).$$

Приведенные выше формулы разложения в этом случае существенно упрощаются. Проиллюстрируем это на примере теоремы 1.4, имея в виду дальнейшие приложения. Пусть при некотором $N < \infty$ имеем

$$\lambda_n^{(1)} \equiv \lambda_{2n+1} \neq \lambda_n^{(2)} \equiv \lambda_{2n+2}, \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

$$\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} = \lambda_{(n)}, \quad n > N. \tag{51}$$

При $\lambda_{2n+j} \in \sigma'$ положим

$$P_{n,j}^{(s)}(x) = \dot{\Omega}^{-1}(\lambda_n^{(j)})\left(\Phi(x, \lambda_n^{(j)}) - \frac{1}{4}(1 + \Phi(\pi, \lambda_n^{(j)}))\right),$$

$$Q_{n,j}^{(s)}(x) = \Psi(x, \lambda_n^{(j)}) - \Phi(x, \lambda_n^{(j)}),$$

а при $\lambda_n^{(j)}=\lambda_{(n)}\in\sigma''$ положим

$$P_n^{(s)}(x)=2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda_{(n)})\left(\Phi(x,\ \lambda_{(n)})-\frac{1}{2}\right), \tag{52}$$

$$Q_{n,\ j}^{(s)}(x)=\chi_{3-j}(x,\ \lambda_{(n)})\,\psi_j(x,\ \lambda_{(n)}),$$

$$\chi_j(x)=(-1)^n\dot{\varphi}_j(x,\ \lambda_{(n)})+\dot{\psi}(x,\ \lambda_{(n)}). \tag{53}$$

Теорема 1.5. Для любой функции $f\in L_2^{(s)}$ справедливы формулы разложения

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{n=0}^{N}2Q_{n,\ j}^{(s)\prime}(x)\,(f,\ P_{n,\ j}^{(s)}),\\ \frac{1}{2}\left(\int_0^x-\int_x^\pi\right)f(y)\,dy&=\sum_{n=0}^{\infty}2Q_{n,\ j}^{(s)}(x)\,(f,\ P_{n,\ j}^{(s)}),\quad j=1,\ 2,\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

где

$$2\,(Q_{n,\ j}^{(s)\prime},\ P_{m,\ j}^{(s)})=\delta_{nm},\quad j=1,\ 2,\quad n,\ m\geqslant 0. \tag{55}$$

Доказательство. Эти разложения являются прямым следствием теоремы 1.4, если положим

$$\mathfrak{M}^{(s)}=\left\{\hat{f}\in\mathfrak{N}_2^{(s)}\,\middle|\,\frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx+2\alpha=0\right\}$$

и будем рассматривать $f(x)$ как элемент из $\mathfrak{M}^{(s)}$. Тогда из $\hat{q}^{(s)}\in\mathfrak{N}_2^{(s)}$ имеем $Q_j^{(s)}(x,\ \lambda_{(n)})=-Q_j^{(s)}(\pi-x,\ \lambda_{(n)})$ при $\lambda_{(n)}\in\sigma''$ и, следовательно, $(\hat{f}^{(s)},\ \hat{Q}_{n,\ j}^{(s)})=0$, а при $\lambda_{2n+j}\in\sigma'$ имеем $(\hat{f}^{(s)},\ \hat{\Phi}(\lambda_{2n+j}))_2=(f^{(s)},\ \hat{\Phi}(\lambda_{2n+j}))_2$, так как $(f,\ \Phi(\lambda))=(f,\ \Psi(\lambda))$, $\forall f\in L_2^{(s)}$. Равенства (55) следуют непосредственно из (40).

Теоремы единственности в обратных задачах. Изложенные выше формулы разложения позволяют получить элементарное доказательство основных теорем единственности в обратных задачах для регулярного оператора Штурма — Лиувилля. Для этого напомним сначала, что из уравнений (7) имеем тождество

$$\frac{d}{dx}W(y_2(x,\ \lambda),\ y_1(x,\ \lambda))=\Delta q(x)\,y_1(x,\ \lambda)\,y_2(x,\ \lambda),\quad \Delta q=q_1-q_2. \tag{56}$$

Отсюда следует, что для коэффициентов разложения функции $\Delta\hat{q}=(q_1(x)-q_2(x),\ h_1-h_2,\ H_1-H_2)$ по системе $\{\hat{U}_n\}$ справедливы представления

$$\left.\begin{aligned}(\Delta\hat{q},\ \hat{U}_{2n+j})_2&=(-1)^{j-1}\beta_{2n+j},\quad \lambda_{2n+j}\in\sigma',\\ (\Delta\hat{q},\ \hat{U}_{2n+1})_2=0,\quad (\Delta\hat{q},\ \hat{U}_{2n+2})_2&=\beta_{2n+1}-\beta_{2n+2},\quad \lambda_{2n+j}\in\sigma''.\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Из (57) и леммы 1.5 следует сразу

Теорема 1.6 (единственности Марченко [40]). Если для краевых задач (7), (8) $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$, $\beta_{2n+1} = \beta_{2n+2}$, $n \geqslant 0$, то почти всюду $q_1(x) = q_2(x)$, $h_1 = h_2$, $H_1 = H_2$.

Теорема 1.2 вследствие равенств (57) позволяет найти явный вид $\Delta\hat{q}$. Точнее, справедлива

Теорема 1.7. Для любых двух задач Штурма — Лиувилля (7), (8), где $a(\hat{q}_1) = a(\hat{q}_2)$, $a(\hat{q})$ определяются из (10), имеет место равенство

$$\int_x^\pi (q_2(s) - q_1(s))\,ds + 2(H_2 - H_1) = \sum_{\lambda_n \in \sigma''} (\beta_{2n+1} - \beta_{2n+2}) W_{2n+2}(x) + \sum_{\lambda_n \in \sigma'} \sum_{j=1,\,2} (-1)^{j-1} \beta_{2n+j} W_{2n+j}(x).$$

При этом если $\lambda_n(\hat{q}_1) = \lambda_n(\hat{q}_2)$, $n \geqslant 0$, т. е. задачи (7), (8) изоспектральные, то

$$\int_x^\pi (q_2(s) - q_1(s))\,ds + 2(H_2 - H_1) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (\exp(l_n(\hat{q}_1)) - \exp(l_n(\hat{q}_2)))\,\dot{\omega}^{-1}(\lambda_n) W_{2n+2}(x),$$

где

$$l_n(\hat{q}) = \ln |C_n|, \quad C_n(\hat{q}) = (-1)^n |C_n|. \tag{58}$$

Следствие 1. Если $\lambda_n(\hat{q}_1) = \lambda_n(\hat{q}_2)$, $l_n(\hat{q}_1) = l_m(\hat{q}_2)$, $n \geqslant 0$, то $\hat{q}_1 = \hat{q}_2$.

Замечание. Напомним, что величины $\{\lambda_n(\hat{q}), \beta_n(\hat{q})\ n \geqslant 0\}$ определяют спектральную функцию $\rho(\hat{q}, \lambda)$ задачи (7), (8). Из представлений (13) для $\beta_n(\hat{q})$ и (14) для $\omega(\hat{q}; \lambda)$ следует, что функция $\rho(\hat{q}; \lambda)$ определяется однозначно по величинам $\{\lambda_n(\hat{q}), l_n(\hat{q}), n \geqslant 0\}$. Рассматривать наряду с $\lambda_n(\hat{q})$ величины $l_n(\hat{q})$ вместо $\beta_n(\hat{q})$ в качестве спектральных характеристик для задач (7), (8) было предложено в работе [22], что позволяет несколько проще изучать соответствующую ОЗ, на чем мы остановимся подробнее в разд. 2.

Сложнее устанавливается

Теорема 1.8 [18]. Пусть заданы краевые задачи $\hat{q}_1 = (q_1(x), h_1, H_1)$ и $\tilde{\hat{q}}_1 = (q_1(x), h_1, \tilde{H}_1)$, $H_1 \neq \tilde{H}_1$, для которых

$$\sigma(\hat{q}_1) = \{\lambda_n(\hat{q}_1)\}_{n=0}^\infty, \quad \sigma(\tilde{\hat{q}}_1) = \{\lambda_n(\tilde{\hat{q}}_1)\}_{n=0}^\infty,$$

и наряду с ними краевые задачи $\hat{q}_2 = (q_2(x), h_2, H_2)$, $\tilde{\hat{q}}_2 = (q_2(x), h_2, \tilde{H}_2)$, $H_2 \neq \tilde{H}_2$, для которых

$$\lambda_{2n+1} \equiv \lambda_n(\hat{q}_1) = \lambda_n(\tilde{\hat{q}}_2), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{59}$$

$$\lambda_n(\tilde{\hat{q}}_1) = \lambda_n(\hat{q}_2) \equiv \lambda_{2n+2}, \quad n = N, N+1, \ldots, \tag{60}$$

$$\lambda_n(\tilde{\hat{q}}_1) \neq \lambda_n(\hat{q}_2), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тогда

$$\int_x^\pi (q_2(s) - q_1(s))\, ds + \tilde{H}_2 - H_1 = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega(\tilde{\hat{q}}_1, \lambda_{2n+2})}{\omega(\hat{q}_1, \lambda_{2n+2})} \beta_{2n+2} W_{2n+2}(x), \tag{61}$$

где $W_{2n+2}(x)$ определяется как в теореме 1.2 [Здесь при $\lambda_n(\tilde{\hat{q}}_1) \neq \neq \lambda_n(\hat{q}_2)$ $\omega(\tilde{\hat{q}}_1, \lambda_{2n+2}) \neq 0$, а из $H_2 \neq \tilde{H}_2$ следует, что $\sigma'' = 0$ и, следовательно, $\omega(\hat{q}_1; \lambda_{2n+2}) \neq 0$].

Доказательство. Заметим сначала, что из (59), (60) следуют равенства

$$h_1 - h_2 + H_1 - \tilde{H}_2 + \frac{1}{2}\int_0^\pi (q_1(x) - q_2(x))\, dx = 0, \quad H_1 - \tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 - H_2.$$

Пусть теперь по краевым задачам (7), (8) построена система $\{\tilde{U}_n\}$ ($\sigma'' = \varnothing$). Так как условия (59), (60) эквивалентны равенствам $\omega_1(\lambda_{2n+1}) = \tilde{\omega}_2(\lambda_{2n+2}) = \omega_2(\lambda_{2n+2}) = 0$, $n \geqslant 0$, $\tilde{\omega}_1(\lambda_{2n+2}) = 0$, $n \geqslant N$, то из тождества (56) получаем $(\Delta\tilde{q}, \tilde{U}_{2n+1})_1 = 0$, $n \geqslant 0$,

$$(\Delta\tilde{q}, \tilde{U}_{2n+2})_1 = 0, \; n \geqslant N, \; (\Delta\tilde{q}, \Phi(\lambda_{2n+2}))_1 =$$
$$= \varphi_2(\pi, \lambda_{2n+2})\, \omega_1(\lambda_{2n+2}), \; n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где $\Delta\tilde{q} = (q_1(x) - q_2(x), H_1 - \tilde{H}_2)$, что в силу разложения (31) дает представление (61).

Следствие 1 (теорема единственности Борга [10]). Из равенств (59), (60) с $N = 0$, $H_2 \neq \tilde{H}_2$ следует, что $q_1(x) = q_2(x)$, $h_1 = h_2$, $H_1 = \tilde{H}_2$, $\tilde{H}_1 = H_2$.

Замечание 1. Имея в виду сформулированную выше теорему единственности Борга, теорему 1.7 можно рассматривать как аналог теоремы 1.6 для случая N-мерного возмущения исходных спектральных характеристик $\lambda_n(\hat{q}_1)$, $\lambda_n(\tilde{\hat{q}}_1)$, $n \geqslant 0$, определяющих однозначно q_1, h_1, H_1, $\tilde{H}_1$. Из соотношений биортогональности леммы 1.1 следует, что и соответствующее возмущение $\widetilde{\Delta q}$ является N-мерным, что соответствует обобщенной вырожденности уравнения Гельфанда — Левитана, установленной в работе [19], где дано иное доказательство формулы (61). Аналогом теоремы 1.8 для краевых задач (48), (49) является

Теорема 1.9. Пусть по краевым задачам (48), (49), где спектры удовлетворяют условию (51), построена функция $\widetilde{\Delta q}^{(s)} = (\Delta q = q_1 - q_2, \Delta h = h_1 - h_2)$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^x \Delta q^{(s)}(y)\,dy + \Delta h = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{2n+j}(\hat{q}_j^{(s)})\,Q_{n,\,j}^{(s)}(x), \quad j=1,\ 2. \tag{62}$$

Следствие 1 (теорема единственности Борга [10]). Если $\lambda_n\,(\widetilde{q}_1^{(s)}) = \lambda_n\,(\hat{q}_2^s)$, $n \geqslant 0$, то $\hat{q}_1^{(s)} = \hat{q}_2^{(s)}$.

Замечание 1. Впервые формулы вида (62) были получены в [18]. В силу соотношений биортогональности (55) размерность представления (62) равна размерности возмущения спектра в (51). В отличие от теоремы 1.7, которую можно получить и непосредственно из соответствующего уравнения Гельфанда — Левитана в ОЗ, теоремы 1.8 и 1.9 не являются прямым следствием этого уравнения. В [19], где в условиях теоремы 1.9 доказана обобщенная вырожденность уравнения Гельфанда — Левитана, было получено следующее уточнение соответствующей формулы из [18]:

$$\frac{1}{2}\int_0^x \Delta q(y)\,dy + \Delta h = \sum_{n=0}^{N} -\alpha_n^{(1)}\{(\varphi_2(\pi,\ \lambda_n^{(1)}) - (-1)^n)\,c_2(x,\ \lambda_n^{(1)}) +$$
$$+ (\varphi_2'(\pi,\ \lambda_n^{(1)}) + h_1\varphi_2(\pi,\ \lambda_n^{(1)}) + (-1)^n h_2)\,s_2(x,\ \lambda_n^{(1)})\}\,\varphi_1(x,\ \lambda_n^{(1)}), \tag{63}$$

где $s_2(x, \lambda)$, $c_2(x, \lambda)$ — решения уравнений (48) с $j = 2$, для которых $s_2(\pi, \lambda) = c_2'(\pi, \lambda) = 0$, $s_2'(\pi, \lambda) = c_2(\pi, \lambda) = 1$. Непосредственно проверяется, что

$$Q_{2n+1}^{(s)}(x) = -\varphi_1(x,\ \lambda_n^{(1)})\{(\varphi_2(\pi,\ \lambda_n^{(1)}) - (-1)^n)\,c_2(x,\ \lambda_n^{(1)}) +$$
$$+ (\varphi_2'(\pi,\ \lambda_n^{(1)}) + (-1)^n h_2)\,s_2(x,\ \lambda_n^{(1)})\}.$$

Следовательно, формула (62) отличается от (63) суммой

$$\sum_{n=0}^{N} -h_1\alpha_n^{(1)}\omega_2^{-1}(\lambda_n^{(1)})\,N_{2n+1}(x),$$
$$N_{2n+1}(x) = \Phi(x,\ \lambda_{2n+1}) - (-1)^n\varphi_2(\pi,\ \lambda_{2n+1})\,\Psi(x,\ \lambda_{2n+1}),$$

которая должна равняться нулю.

2. НЕПРЕРЫВНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА НЬЮТОНА В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

В этом разделе изложим вкратце методы построения непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) для решения ОЗ в постановках, приведенных в разд. 1. В их основу положена общая идея Гавурина [14] о решении операторного уравнения

$$f(v) = y_* \tag{64}$$

посредством задачи Коши

$$v_t = -[f'(v)]^{-1}(f(v) - y_*),\ v(0) = v_0,\ 0 \leqslant t < \infty, \tag{65}$$

где $f: X \to Y$ — нелинейный оператор, X, Y — B-пространства. $f'(v)$ — производная Фреше, $[f'(v)]^{-1}$ — обратный к ней оператор, y_* — заданный элемент из Y. Искомое решение v_* уравнения (64) получается как предел $\| v(t, v_0) - v_* \| = 0$, $t \to \infty$, решения $v(t, v_0)$ уравнения (65), называемого обычно НАМН. Важным свойством (65) является тот факт, что $v(t, v_0)$ есть прообраз отрезка

$$f(v(t)) = f(v_0)\exp(-t) + y_*(1 - \exp(-t)),\ 0 \leqslant t < \infty. \tag{66}$$

Сформулируем ОЗ в форме операторного уравнения (64) Задачам Штурма — Лиувилля (7), (8), т.е. элементу $\hat{q} = (q(x), h, H) \in \mathfrak{R}_2$, сопоставим $\tilde{q} = (q(x), H) \in \mathfrak{R}_1$ и рассмотрим оператор

$$f_{\mathrm{I}}(\tilde{q}) = \left\{\lambda_n(\tilde{q}),\ \beta_n(\tilde{q}),\ h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx = a_*,\ n \geqslant 0\right\}, \tag{67}$$

где a_* — фиксированное число, $\lambda_n = \lambda_n(\hat{q})$ — собственные числа, $\beta_n = \beta_n(\hat{q})$ — нормировочные постоянные (13). Хорошо известно, что для любого $\tilde{q} \in \mathfrak{R}_1$

$$\lambda_m(\tilde{q}) < \lambda_n(\tilde{q})\ (m < n),\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda_n(\tilde{q}) - n^2 - \frac{2}{\pi}a_*\right)^2 < \infty, \tag{68}$$

$$\beta_n(\tilde{q}) > 0\ (n \geqslant 0),\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\beta_n(\tilde{q}) - \frac{2}{\pi}\right)^2 < \infty. \tag{69}$$

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 2.1 [11]. Если для двух последовательностей чисел λ_n^*, β_n^*, $n \geqslant 0$, выполняются условия (68), (69), то существует единственный элемент $\tilde{q}_* = (q_*(x), H_*) \in \mathfrak{R}_1$ $\left(h_* = a_* - H_* - \frac{1}{2}\int_0^\pi q_*(x)\,dx\right)$, для которого $\lambda_n^* = \lambda_n(\tilde{q}_*)$, $\beta_n^* = \beta_n(\tilde{q}_*)$.

К этой обратной задаче, цитируемой далее как ОЗI, примыкает задача об определении оператора Штурма — Лиувилля по двум спектрам, далее цитируемая как ОЗII. Рассмотрим две краевые задачи (7), (8), где $\hat{q}_j = (q(x), h, H_j) \in \mathfrak{R}_2$, $(H_1 < H_2)$.

Построим по $\hat{q}_j$, где с некоторыми фиксированными a_j^* $(a_1^* < a_2^*)$ выполняются равенства $h + H_j + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x)\,dx = a_j^*$, $j = 1, 2$, элемент $\tilde{q} = (q(x), H_1) \in \mathfrak{R}_1$ и обозначим $\lambda_{2n+j}(\tilde{q})$ $n \geqslant 0$, $j = 1,2$ соответствующие собственные числа. Известно, что

$$\lambda_{2n+1} < \lambda_{2n+2} < \lambda_{2(n+1)+1} < (n \geqslant 0), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\lambda_{2n+j}(\tilde{q}) - n^2 - \frac{2}{\pi} a_j^* \right)^2 + \right.$$
$$\left. + n^2 \left(\lambda_{2n+2} - \lambda_{2n+1} - \frac{2}{\pi}(a_2^* - a_1^*) \right)^2 \right\} < \infty \tag{70}$$

при этом справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2.2 [41]. Если последовательности чисел λ_{2n+j}^*, $n \geqslant 0$, $j = 1,2$, удовлетворяют условиям (70), то существует единственный элемент $\tilde{q}_* = (q_*(x), H_1^*) \in \mathfrak{R}_1$, для которого $\lambda_{2n+j}^* = \lambda_{2n+j}^*(\tilde{q}_*)$, $n \geqslant 0$, $j = 1, 2$, где $h_* = a_1^* - H_1^* - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q_*(x)\,dx$, $H_2^* = H_1^* + (a_2^* - a_1^*)$.

Соответствующий ОЗII оператор

$$f_{\mathrm{II}}(\tilde{q}) = \{\lambda_{2n+j}(\tilde{q})\, a_j(\tilde{q}) = a_j^*, \ \tilde{q} = (q(x), H_1)\}_{n=0}^{\infty}. \tag{71}$$

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает, что уравнения

$$f_{\mathrm{I}}(\tilde{q}) = y_{\mathrm{I}}^* = \{\lambda_n^*, \ \beta_n^*\}_{n=0}^{\infty},$$
$$f_{\mathrm{II}}(\tilde{q}) = y_{\mathrm{II}}^* = \{\lambda_{2n+j}^*, \ j = 1, 2\}_{n=0}^{\infty} \tag{72}$$

имеют единственные решения в пространстве $\mathfrak{R}_1$. Следующие две теоремы дают явный вид уравнения (65) для решения уравнений (72).

Теорема 2.3. Пусть по формуле (72) построено множество

$$M_N(y_{\mathrm{I}}^*) = \{\tilde{q} = (q(x), H) \in \mathfrak{R}_1 \mid \lambda_n(\tilde{q}) = \lambda_n^*, \ \beta_n(\tilde{q}) = \beta_n^*,$$
$$n \geqslant N + 1\}, \tag{73}$$

где N — конечное число. Тогда для любого начального значения $\tilde{q}_0 = (q_0(x), H_0) \in M_N(y_{\mathrm{I}}^*)$ задача Коши

$$\tilde{q}_t(t) = \sum_{n=0}^{N} \{\beta_n(\tilde{q}(t))[\lambda_n^* - \lambda_n(\tilde{q}(t))\tilde{V}_{2n+1}(\tilde{q}(t))] +$$
$$+ [\beta_n^* - \beta_n(\tilde{q}(t))]\tilde{V}_{2n+2}(\tilde{q}(t))\}, \quad \tilde{q}(t) = (q(x, t), H(t)), \quad \tilde{q}(0) = \tilde{q}_0, \tag{74}$$

где $\widetilde{V}_{2n+1} = \dot{\widetilde{\Psi}}(\lambda_n)$, $\widetilde{V}_{2n+2} = \widetilde{\Psi}(\lambda_n)$, $\widetilde{\Psi}(\lambda)$ определяется формулой (19) с $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \hat{q}(t)$, $h(t) = a^* - H(t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x, t)\,dx$, имеет единственное решение $\widetilde{q}(t) \in M_N(y^*_{\mathrm{I}})$, для которого

$$\lim_{t\to\infty} \|\widetilde{q}(t) - \widetilde{q}_*\|_{\mathfrak{R}_1} = 0 \; (f(\widetilde{q}_*) = y^*_{\mathrm{I}}). \tag{75}$$

Теорема 2.4. Пусть по y^*_{II}(72) построено множество

$$M_N(y^*_{\mathrm{II}}) = \{\widetilde{q} = (q(x), H_1) \in \mathfrak{R}_1 | \lambda_{2n+j}(\widetilde{q}) = \lambda^*_{2n+j},\; n \geqslant N+1,\; j = 1,\; 2\}. \tag{76}$$

Тогда для любого начального значения $\widetilde{q}_0 = (q_0(x), H_{1,0}) \in M_N(y^*_{\mathrm{II}})$ задача Коши

$$\widetilde{q}_t(t) = \frac{1}{a_2^* - a_1^*} \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1,\,2} (-1)^j [\lambda^*_{2n+j} - \lambda_{2n+j}(\widetilde{q}(t))]\, V_{2n+j}(\widetilde{q}(t)), \tag{77}$$

$q(t) = (q(x, t), H_1(t))$, $\widetilde{q}(0) = \widetilde{q}_0 \in M_N(y^*_{\mathrm{II}})$, $0 < t < \infty$,

где функции $\widetilde{V}_{2n+j}(\widetilde{q}(t))$ определяются формулами (24)

$$\hat{q}_j(t) = (q(x, t), h(t), H_j(t)), \; h(t) + \\ + H_j(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x, t)\,dx = a_j^*,$$

имеет единственное решение $\widetilde{q}(t) \in M_N(y^*_{\mathrm{II}})$, для которого существует $\lim\limits_{t\to\infty} \widetilde{q}(t) = \widetilde{q}_* = (q_*, H_{1,*})$; $f(\widetilde{q}^*) = y^*_{\mathrm{II}}$.

Доказательству этих теорем предпошлем две леммы, которые представляют и самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. В любой точке $\hat{q} \in \mathfrak{R}_2$ существуют дифференциалы

$$\frac{d}{d\varepsilon}\lambda_n(\hat{q} + \varepsilon\hat{f})\Big|_{\varepsilon=0,\; \hat{f}\in\mathfrak{R}_2} = \left(\frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}},\; \hat{f}\right)_2, \quad \frac{d}{d\varepsilon}\beta_n(\hat{q} + \varepsilon\hat{f})\Big|_{\varepsilon=0} = \\ = \left(\frac{\partial\beta_n}{\partial\hat{q}},\; \hat{f}\right)_2, \tag{78}$$

где градиенты

$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}} = \left(\frac{\partial\lambda_n}{\partial q(x)},\; \frac{\partial\lambda_n}{\partial h},\; \frac{\partial\lambda_n}{\partial H}\right) = \alpha_n\hat{\Phi}(\lambda_n) = \beta_n\hat{\Psi}(\lambda_n), \tag{79}$$

$$\frac{\partial\beta_n}{\partial\hat{q}} = \left(\frac{\partial\beta_n}{\partial q(x)},\ \frac{\partial\beta_n}{\partial h},\ \frac{\partial\beta_n}{\partial H}\right) =$$

$$= \frac{1}{\dot{\omega}^2(\lambda_n)}\left\{\dot{\hat{\Phi}}(\lambda_n) - \frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)}\hat{\Phi}(\lambda_n)\right\}, \tag{80}$$

где $\hat{\Phi}(\lambda_n) = (\Phi(x, \lambda_n) = \varphi^2(x, \lambda_n),\ 1,\ \Phi(\pi, \lambda_n))$, α_n и β_n определяются формулами (12) и (13), $\omega(\lambda)$ — формулой (9).

Доказательство в основном хорошо известно [17, 20, 22, 42]. Следуя, например, доказательству приведенной далее леммы 5.1, можно получить, что для $f(x) \in L_2(0, \pi)$ имеют место формулы

$$\frac{d}{d\varepsilon}\lambda_n(q+\varepsilon f)|_{\varepsilon=0} = \alpha_n(f,\ \Phi(\lambda_n)),$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\beta_n(q+\varepsilon f)|_{\varepsilon=0} = \dot{\omega}^{-2}(\lambda_n)(f,\ \dot{\Phi}(\lambda_n) - \ddot{\omega}(\lambda_n)\dot{\omega}^{-1}(\lambda_n)\Phi(\lambda_n)),$$

определяющие, при фиксированных h и H, линейную по ε часть приращения $\lambda_n(\varepsilon)$ и $\beta_n(\varepsilon)$ при замене $q(x)$ на $q(x) + \varepsilon f(x)$. Далее, так как $\partial\psi(x, \lambda)/\partial h = 0$, $\partial\varphi(x, \lambda)/\partial H = 0$, то дифференцируя по h и H соответственно равенства $\omega(\lambda_n(h)) \equiv h\psi(0, \lambda_n(h)) - \psi'(0, \lambda_n(h)) = 0$ и $\omega(\lambda_n(H)) \equiv \varphi'(\pi, \lambda_n(H)) + H\varphi(\pi, \lambda_n(H)) = 0$, находим частные производные $\partial\lambda_n/\partial h = \alpha_n$, $\partial\lambda_n/\partial H = \beta_n$. Отсюда, используя для β_n вытекающие из (9) и (11) выражения

$$\beta_n(h) = -\psi^{-1}(0, \lambda_n(h))(h\dot{\psi}(0, \lambda_n, (h)) - \dot{\psi}'(0, \lambda_n(h)))^{-1}$$

и

$$\beta_n(H) = -\varphi(\pi, \lambda_n(H))(\dot{\varphi}'(\pi, \lambda_n(H)) + H\dot{\varphi}(\pi, \lambda_n(H)))^{-1},$$

получаем

$$\frac{\partial\beta_n}{\partial h} = -\frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)},\quad \frac{\partial\beta_n}{\partial H} = \frac{1}{\dot{\omega}^2(\lambda_n)}\times$$

$$\times\left\{\dot{\Phi}(\pi,\ \lambda_n) - \frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)}\Phi(\pi,\ \lambda_n)\right\},$$

что и требовалось доказать.

Замечая, что при $\hat{q}_j = (q(x), h, H_j)$ имеем

$$\dot{\Omega}(\lambda_{2n+j}) = (-1)^j(H_2 - H_1)\alpha_{2n+j}^{-1} = (-1)^j\frac{2}{\pi}(a_2 - a_1)\alpha_{2n+j}^{-1},$$

получаем

Следствие 1. При $H_1 \neq H_2$ градиенты

$$\frac{\partial\lambda_{2n+j}}{\partial\hat{q}_j} = \left(\frac{\partial\lambda_n^{(j)}}{\partial q(x)},\ \frac{\partial\lambda_n^{(j)}}{\partial h},\ \frac{\partial\lambda_n^{(j)}}{\partial H_j}\right) = \frac{(-1)^j\dot{\Omega}(\lambda_n^{(j)})}{H_2 - H_1}\hat{\Phi}(\lambda_{2n+j}).$$

Далее, так как дифференциал функционала $a(\hat{q})$ (10)

$$da(\hat{q})\hat{f} = \frac{d}{d\varepsilon} a(\hat{q}+\varepsilon\hat{f})|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi f(x)\,dx + \alpha + \beta,$$

получаем, с учетом равенств в (21),

Следствие 2. В любой точке $\tilde{q} = (q(x), H) \in \mathfrak{R}_1$ — дифференциал оператора $f_{\mathrm{I}}(\tilde{q})$ (67) имеет следующий вид:

$$df_{\mathrm{I}}(\tilde{q})\tilde{f} = \{\beta_n^{-1}(\tilde{f}, \tilde{U}_{2n+1})_1, \ (\tilde{f}, \tilde{U}_{2n+2})_1, \ \tilde{f} = (f(x), \ \beta) \in \mathfrak{R}_1,\} \ n \geqslant 0,$$

где функции $\tilde{U}_{2n+j}$ определяются формулами (79), 80), с последующей рестрикцией (21), а дифференциал оператора $f_{\mathrm{II}}(\tilde{q})$ (71) имеет вид

$$df_{\mathrm{II}}(\tilde{q})\tilde{f} = \{(-1)^j (H_2 - H_1)^{-1}(\tilde{f}, \ \tilde{U}_{2n+j})_1, \ j = 1, \ 2, \ n \geqslant 0\},$$

где $\tilde{U}_{2n+j}$ определяются формулами (24) с $\hat{q}_j = (q(x), h, H_j)$. Отсюда, редуцируя формулу разложения (28), (29), полученную в теореме 1.1, на случай $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \hat{q}$ и $\hat{q}_j = (q(x), h, H_j)$, $H_1 \neq H_2$, находим сразу обратные к операторам $df_{\mathrm{I}}(\dot{q})\hat{f}$ и $df_{\mathrm{II}}(\tilde{q})\tilde{f}$ соответственно. Точнее, справедлива

Лемма 2.2. Обратный к оператору $df_{\mathrm{II}}(\tilde{q})\tilde{f}$ дается формулой обращения

$$\tilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \tilde{V}_{2n+1}(\tilde{f}, \ \tilde{U}_{2n+1})_1 + \tilde{V}_{2n+2}(\tilde{f}, \ \tilde{U}_{2n+2})_1, \quad \tilde{f} \in \mathfrak{R}_1,$$

где $\tilde{V}_{2n+j}$ определяются как в теореме 2.3, а обратный к оператору $df_{\mathrm{II}}(\tilde{q})\tilde{f}$ — формулой

$$\tilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1,\,2} (H_1 - H_2)^{-1} \tilde{V}_{2n+j}(\tilde{f}, \ \tilde{U}_{2n+j})_1, \quad \tilde{f} \in \mathfrak{R}_1,$$

где $\tilde{V}_{2n+j}$ определяются как в теореме 2.4.

Доказательство теорем 2.3 и 2.4 вполне аналогично, и мы приведем только доказательство теоремы 2.3. Рассмотрим функции

$$\lambda_n(t) = \lambda_n(\tilde{q}_0)\,e^{-t} + \lambda_n^*(1 - e^{-t}), \ \beta_n(t) = \beta_n(\tilde{q}_0)\,e^{-t} + \beta_n^*(1 - e^{-t}) + \beta_n^*(1 - e^{-t}), \tag{81}$$

где $n \geqslant 0$, $0 \leqslant t < \infty$, $\tilde{q}_0 \in M_N(y_{\mathrm{I}}^*)$ (73). Из теоремы 2.1 и определения $M_N(y_{\mathrm{I}}^*)$ следует, что эти функции определяют однозначно однопараметрическое (по t) семейство краевых задач $\hat{q}(t) = (q(x, t), h(t), H(t))$, где $h(t) + H(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x, t)\,dx = a_*$, для которых

$\lambda_n(t) = \lambda_n(\hat{q}(t))$, $\beta_n(t) = \beta_n(\hat{q}(t))$, a_* находится по y_{I}^* из асимптотики (10). Следовательно, дифференцируя (81) по t, с учетом леммы 2.1, получаем систему уравнений

$$(\tilde{q}_t,\ \tilde{U}_{2n+1}(\tilde{q}(t)))_1 = \beta_m(\tilde{q}(t))\,[\lambda_n^* - \lambda_n(\tilde{q}(t))]; \tag{82}$$

$$(\tilde{q}_t,\ \tilde{U}_{2n+2}(\tilde{q}(t)))_1 = \beta_n^* - \beta_n(\tilde{q}(t)),\quad \tilde{q}(t) = (q(x,\ t),\ H(t)).$$

Отсюда в силу леммы 2.2 вытекает, что $\tilde{q}(t)$ является единственным решением уравнения (74). [Отметим, что из уравнения (74), в силу соотношений биортогональности леммы 1.2, следуют равенства (82), которые в силу леммы 2.1 можно записать в виде $\lambda_{n,\,t} = (\lambda_n^* - \lambda_n(\tilde{q}_0))e^{-t}$, $\beta_{n,t} = (\beta_n^* - \beta_n(\tilde{q}_0))\,e^{-t}$. Интегрируя по t, приходим к системе (81), которая эквивалентна первому интегралу (66) для уравнения (74).]

Замечание 1. Ограничения (73) и (76) на областях начальных значений для задач Коши (74) и (77) играют существенную роль при построении численных методов решения ОЗI и ОЗII, так как обеспечивают устойчивость соответствующих алгоритмов [20]. Используя имеющиеся в [29] оценки, можно показать, что при $N = \infty$ в (73) и (76) $M_N(y_{\mathrm{I}}^*) = M_N(y_{\mathrm{II}}^*) = \mathfrak{R}_1$. Это предположение естественным образом согласовывается с однозначной разрешимостью ОЗI и ОЗII во всем $\mathfrak{R}_1$ и с выпуклостью областей значений операторов $f_{\mathrm{I}}(\tilde{q})$ и $f_{\mathrm{II}}(\tilde{q})$. Условия $a(\hat{q}(0)) = a^*$ и $a(q_j(0)) = a_j^*$ дают те первые интегралы для уравнений (74), (77), при которых ряды при $N \to \infty$ сходятся по норме $\mathfrak{R}_1$, так как из (81) следует, в силу асимптотики (10), что $a(\hat{q}(t)) = a(\hat{q}(0)) = a_*$, $0 \leqslant t < \infty$. Теорему 2.4 можно рассматривать, как нетривиальное обобщение предложенного в [43] итерационного процесса для решения соответствующей обратной задачи.

Замечание 2. Решения уравнений (74) и (77) можно выписать в явном виде. Простейший пример в этом направлении получается, если в (74) положим $\lambda_n(\tilde{q}_0) = \lambda_n^*$ $(n \geqslant 0)$, $\beta_n(\tilde{q}_0) = \beta_n^*$ $(n \neq m,\ n \geqslant 0)$ и $\beta_m^* > 0$ — произвольное число. Тогда с помощью уравнения Гельфанда — Левитана находим, что решение уравнения (74) дается формулами

$$q(x,\ t) = q_0(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Big[1 + (\beta_m(\tilde{q}_0) - \beta_m^*)\times$$

$$\times(1 - \mathrm{e}^{-t})\int_x^{\pi}\psi_m^2(\tilde{q}_0;\ s)\,ds\Big];$$

$$H(t) = H_0 + (\beta_m(\tilde{q}_0) - \beta_m^*)(1 - e^{-t}).$$

Пример решения уравнения (77), как показал В. Даскалов, можно получить, полагая в теореме 1.8 $N = 1$, т. е. $\lambda_m(\hat{\tilde{q}}_1) \neq \lambda_m(\tilde{q}_2)$. Тогда

$$q_2(x) = q_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln W[\varphi(q_1;\ x,\ \lambda_m(\hat{\tilde{q}}_1)),\ \psi(q_1;\ x,\ \lambda_m(\hat{q}_2))],$$

$$H_2(H_1) = H_1(\tilde{H}_1) + (\lambda_m(\hat{q}_2) - \lambda_m(\hat{\tilde{q}}_1))(\tilde{H}_1 - H_1)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь дифференциальные свойства оператора

$$g(\hat{q}) = \{\lambda_n(\hat{q}),\ l_n(\hat{q}),\ n \geqslant 0,\ \hat{q} \in \mathfrak{R}_2\},\tag{83}$$

где $l_n(\hat{q})$ определяются формулой (58). Оператор g, как указано в [22], более тонко улавливает поведение спектральных характеристик, по которым восстанавливается $\hat{q}$, в том смысле, что из равенства (50) имеем только $\alpha_n(\hat{q}^{(s)}) = \beta_n(\hat{q}^{(s)})$, тогда как $l_n(\hat{q}^{(s)}) = 0$, $n \geqslant 0$.

Теорема 2.5. Оператор g дифференцируем в любой точке $\hat{q} \in \mathfrak{R}_2$:

$$dg(\hat{q})\hat{f} = \left\{\left(\frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}},\ \hat{f}\right)_2,\ \left(\frac{\partial l_n}{\partial\hat{q}},\ \hat{f}\right)_2,\ n \geqslant 0,\ \hat{f} \in \mathfrak{R}_2\right\},\tag{84}$$

и если $\hat{q} \in \mathfrak{R}_2^{(s)}$, т. е. имеем задачу (48), (49), дифференциал

$$dg(\hat{q}^{(s)})\hat{f}^{(s)} = \left\{\left(\frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}^{(s)}},\ \hat{f}^{(s)}\right)_2,\ n \geqslant 0,\ \hat{f}^{(s)} \in \mathfrak{R}_2^{(s)}\right\},\tag{85}$$

где $\partial\lambda_n/\partial\hat{q} = \hat{P}_n$, $\partial l_n/\partial\hat{q} = \hat{Q}_n$, $\hat{P}_n$, $\hat{Q}_n$ определяются формулами (33) при $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \hat{q}$.

При этом для любой $\hat{f} \in \mathfrak{M}$ (16) обратный к оператору (84) дается формулой

$$\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{J\frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}}\left(\hat{f},\ \frac{\partial l_n}{\partial\hat{q}}\right)_2 - J\frac{\partial l_n}{\partial\hat{q}}\left(\hat{f},\ \frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}}\right)_2\right\},\tag{86}$$

где J определяется (17), а обратный к оператору (85) при $\hat{f}^{(s)} \in \overset{(0)}{\mathfrak{R}}{}_2^{(s)}$ — формулой

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(s)\prime}(x)(f,\ P_n^{(s)}),\ f \in L_2^{(s)},\tag{87}$$

где функции $P_n^{(s)}$, $Q_n^{(s)}$ определяются формулами (52) и (53) при $\hat{q}_1^{(s)} = \hat{q}_2^{(s)} = \hat{q}^{(s)}$.

Доказательство. Градиент $\partial l_n/\partial\hat{q}$ получается из равенства (80) и аналогичной формулы

$$\partial\alpha_n/\partial\hat{q} = \dot{\omega}^{-2}(\lambda_n)\{\dot{\hat{\Phi}}(\lambda_n) - \ddot{\omega}(\lambda_n)\dot{\omega}^{-1}(\lambda_n)\Phi(\lambda_n)\},$$

так как $l_n(\hat{q}) = 2^{-1}\ln(\beta_n\alpha_n^{-1})$. Равенства $(\partial l_n/\partial \hat{q}^{(s)}, \hat{f}^{(s)})_2 = 0$ вытекают из (50), как уже указывалось в доказательстве теоремы 1.5. Формулы (86), (87) являются прямым следствием теорем 1.3 и 1.5.
Замечание. Если, следуя [22], ввести в $\mathfrak{R}_2$ изоспектральное многообразие $M(\hat{q}^*) = \{\hat{q} \in \mathfrak{R}_2 \mid \lambda_n(\hat{q}) = \lambda_n(\hat{q}^*), n \geqslant 0\}$, то из (86) получаем явный вид тангенциального пространства $T_{\hat{q}}M(\hat{q}^*)$ в точке $\hat{q} \in M(\hat{q}^*)$. Условие $f \in \mathfrak{M}$ (16) выполняется в силу асимптотики (10). Свойства потоков $\hat{q}_t = J\,\partial\lambda_n/\partial\hat{q}$, указанные в [22] следуют из соотношений (35). Явный вид $\hat{q}(t)$ [22], по существу, совпадает с указанным в замечании 2 решением уравнения (74). Полагая в (73) $M_{N=\infty}(y_1^*) = M(\hat{q}^*)$ и применяя известную технику решения уравнения Гельфанда — Левитана, можно получить явное решение при $N \geqslant 1$ уравнения (74) с $\hat{q} \in M(\hat{q}^*)$, которое в удобной для предельного перехода $N \to \infty$ форме имеется в [22].

3. ОБРАТНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРАММА — КРЕЙНА И ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Обратная периодическая задача Штурма — Лиувилля. Рассмотрим две задачи Штурма — Лиувилля

$$l(r_j)\,y_j \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2} + r_j(x)\right) y_j = \lambda y_j,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \tag{88}$$

$$y_j(0) = y_j(\pi) = 0,\quad j = 1, 2, \tag{89}$$

где вещественные потенциалы $r_j(x) \in L_2(0, \pi)$. Здесь приведем аналогичную теореме 1.4 теорему для краевых задач (88), (89). На этой основе покажем, как можно доказать основную теорему единственности в обратной периодической задаче Штурма — Лиувилля, а также получим важное для дальнейших построений (см. разд. 5) представление для конечно-зонных потенциалов.

Обозначим $g_j(x, \lambda)$ и $h_j(x, \lambda)$ решения уравнения (88), для которых

$$g_j(0, \lambda) = h_j(\pi, \lambda) = 0,\ g_j'(0, \lambda) = h_j'(\pi, \lambda) = 1, \tag{90}$$

и пусть

$$\chi_j(\lambda) = g_j(\pi, \lambda) = -h_j(0, \lambda) \equiv W(g_j, h_j) \tag{91}$$

— характеристические функции задач (88), (89). Их спектры $\sigma_j = \sigma(r_j) = \{\nu_n^{(j)} = \nu_{2n+j} \mid \chi_j(\nu_{2n+j}) = 0, n \geqslant 1\}$, где собственные числа

$$\nu_n^{(j)} = n^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi r_j(x)\,dx + o(1),\quad n \to \infty. \tag{92}$$

Как и прежде, пусть $\sigma = \sigma_1 \bigcup \sigma_2$, $\sigma'' = \sigma_1 \bigcap \sigma_2$, $\sigma' = \sigma \setminus \sigma''$, где, если $\nu_{2n+1} = \nu_{2m+2}$, будем предполагать, что $n = m$. Напомним еще, что

$$g_j(x, \nu_n^{(j)}) = S_{2n+j} h_j(x, \nu_n^{(j)}), \quad S_{2n+j} = g_j'(\pi, \nu_n^{(j)}) = (h_j'(0, \nu_n^{(j)}))^{-1}; \tag{93}$$

$$\gamma_{2n+j} = \|g_{2n+j}\|_{L_2}^{-2} = \frac{1}{S_{2n+j}\dot{\chi}_j(\nu_{2n+j})}, \quad \delta_{2n+j} =$$

$$= \|h_{2n+j}\|_{L_2}^{-2} = S_{2n+j}/\dot{\chi}_j(\nu_{2n+j}), \tag{94}$$

$$\chi_j(\lambda) = \pi \prod_{n \geqslant 1} n^{-2} (\nu_n^{(j)} - \lambda) \tag{95}$$

и, следовательно, $S_n^{(j)} = (-1)^n \mid S_n^{(j)} \mid$, $n \geqslant 1$. Пусть

$$G(x, \lambda) = g_1(x, \lambda)\, g_2(x, \lambda), \quad H(x, \lambda) = h_1(x, \lambda)\, h_2(x, \lambda),$$

$$X(\lambda) = \chi_1 \chi_2. \tag{96}$$

Введем системы функций $\{P_n^{(j)}, Q_n^{(j)}\}$ следующим образом: при $\nu_{2n+j} \in \sigma'$ положим

$$P_n^{(j)}(x) = 2X^{-1}(\nu_{2n+j})\, G(x, \nu_{2n+j}), \quad Q_n^{(j)}(x) = H(x, \nu_{2n+j}) \tag{97}$$

и каждому $\nu_{2n+1} = \nu_{2n+2} = \nu_{(n)}$ отнесем функции

$$P_n(x) = 4\ddot{X}^{-1}(\nu_{(n)})\, G(x, \nu_{(n)}), \quad Q_n^{(j)}(x) = h_j(x, \nu_{(n)})\, z_{3-j}(x, \nu_{(n)}), \tag{98}$$

где $z_j(x, \nu_{(n)}) = \dot{h}_j(x, \nu_{(n)}) - S_{2n+j}^{-1} \dot{g}_j(x, \nu_{(n)})$ — решение уравнения $l_j z_j = \nu_{(n)} z_j$, $W(z_j, h_j) = \chi_j(\nu_n) \neq 0$.

Теорема 3.1. Пусть по краевым задачам (88), (89) построены указанным выше способом системы $\{P_n^{(j)}, Q_n^{(j)}\}$, $j = 1, 2$. Тогда для любой, возможно, комплекснозначной, функции $f \in L_1$ справедливы формулы разложения

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right) f(s)\, ds = \sum_{\nu_{2n+j} \in \sigma_j} \{Q_n^{(j)}(x)(f, P_n^{(j)}) - P_n^{(j)}(x)(f, Q_n^{(j)})\} \tag{99}$$

и если

$$f \in L_2^{(0)} = \left\{ f \in L_2 \middle| \int_0^\pi f(x)\, dx = 0 \right\}, \tag{100}$$

то эти формулы допускают почленное дифференцирование по x, т.е.

$$f(x) = \text{l.i.m.} \sum_{\nu_{2n+j} \in \sigma_j} \{Q_h^{(j)\prime}(x)(f, P_n^{(j)}) - P_n^{(j)\prime}(x)(f, Q_n^{(j)})\}, \tag{101}$$

где сходимость в (99) равномерна по $x \in \Delta \subset (0, \pi)$, а в (101) — по норме L_2. При этом

$$[P_n^{(j)}, Q_m^{(j)}] = \delta_{nm}, \quad [P_n^{(j)}, P_m^{(j)}) = [Q_n^{(j)}, Q_m^{(j)}] = 0, \tag{102}$$

где
$$[f, g] = (f, Dg),\ D = d/dx. \tag{103}$$

Доказательство этой теоремы, вполне аналогичное доказательству теоремы 1.4, здесь опущено.

На основе тождества (56) и тождества

$$Y(x, \lambda)(2\lambda - s(x)) + 2y_1'(x, \lambda) y_2'(x, \lambda) + W(y_2(x, \lambda), y_1(x, \lambda)) \times$$
$$\times \int_{x_0}^{x} \Delta(t)\, dt - Y(x_0, \lambda)(2\lambda - s(x_0)) - 2y_1'(x_0, \lambda) y_2'(x_0, \lambda) =$$
$$= \int_{x_0}^{x} w(t)\, Y(t, \lambda)\, dt,$$

где

$$w(x) = -s_x(x) + \Delta(x) \int_0^x \Delta(t)\, dt,\ s = r_1 + r_2,\ \Delta = r_1 - r_2,$$

выводится с учетом равенств (91), (93) и (94) следующая

Теорема 3.2. Пусть функции $\Delta(x)$, $w(x) \in L_2^{(0)}$. Тогда справедливы разложения

$$\Delta(x) = \sum_{\nu_{2n+j} \in \sigma_j'} 2(-1)^{3-j} \{\delta_{2n+j} H'(x, \nu_{2n+j}) - \gamma_{2n+j} G'(x, \nu_{2n+j})\} +$$
$$+ \sum_{\nu_{(n)} \in \sigma''} 2(S_{2n+1} - S_{2n+2})\, \dot{\chi}_j^{-1}(\nu_{(n)})\, H'(x, \nu_{(n)}), \tag{104}$$

$$w(x) = \sum_{\nu_{2n+1} \in \sigma'} \{4\delta_{2n+1} \chi_2^{-1}(\nu_{2n+1})(g_2'(\pi, \nu_{2n+1}) - S_{2n+1}^{-1}) H'(x, \nu_{2n+1}) -$$
$$- 4\gamma_{2n+1} \chi^{-\frac{1}{2}}(\nu_{2n+1})(S_{2n+1} - h_2'(0, \nu_{2n+1}))\, G'(x, \nu_{2n+1})\} +$$
$$+ \sum_{\nu_{(n)} \in \sigma''} \{4\dot{\chi}_1^{-1}(\nu_{(n)})\, \dot{\chi}_2^{-1}(\nu_{(n)})(S_{2n+1} S_{2n+2} - 1)\, Q_n^{(1)'}(x) +$$
$$+ 2(S_{2n+2}^{-1} \dot{g}_2'(\pi, \nu_{(n)}) - S_{2n+1}^{-1} \dot{h}_2'(0, \nu_{(n)}))\, P_n'(x)\}. \tag{105}$$

Из равенства (104) сразу получается

Следствие 1 (теорема единственности Борга [10]). Собственные значения $\nu_n(r)$ и нормировочные постоянные $\gamma_n(r)$ или $\delta_n(r)$ определяют однозначно краевые задачи (88), (89) с $r(x) \in L_2$.

Рассмотрим теперь наряду с краевыми задачами (88), (89) краевые задачи с периодическими и антипериодическими граничными условиями

$$y'' + (\lambda - r_j(x)) y = 0,\ y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi), \tag{106}$$
$$y'' + (\lambda - r_j(x))\, y = 0,\ y(0) = -y(\pi),\ y'(0) = -y'(\pi), \tag{107}$$

где потенциалы $r_j(x)$ предполагаем гладкими периодическими (с периодом π) функциями, т. е.

$$r \in \widetilde{C}_n = \{f(x) \in C_n(0, \pi) \mid f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi), 0 \leqslant k \leqslant n\}. \tag{108}$$

Обозначим $\Delta_j(\lambda) = g_j'(\pi, \lambda) + c_j(\pi, \lambda)$ их дискриминанты Хилла, где $c_j(x, \lambda)$ — решение уравнения (88), для которого $c_j(0, \lambda) = 1$, $c_j'(0, \lambda) = 0$. Хорошо известно (см., например, [29]), что спектр краевой задачи (106) определяется нулями уравнения $\Delta_j(\lambda) = 2$: $\mu_0^{(j)}$, $\mu_{2n+1}^{(j)}$, $\mu_{2n+2}^{(j)}$, $n = 1, 3 \ldots$, а спектр задачи (107) — нулями $\Delta_j(\lambda) = -2$: $\mu_{2n+1}^{(j)}$, $\mu_{2n+2}^{(j)}$, $n = 0, 2 \ldots$ Собственные числа $\nu_n^{(j)}$, $\mu_n^{(j)}$ расположены следующим образом:

$$\mu_0^{(j)} < \mu_1^{(j)} \leqslant \nu_1^{(j)} \leqslant \mu_2^{(j)} < \mu_3^{(j)} \leqslant \nu_2^{(j)} \leqslant \mu_4^{(j)} < \ldots .$$

Потенциал $r_j(x)$ называется N-зонным, если выполняются равенства

$$\mu_{2n-1}^{(j)} = \nu_n^{(j)} = \mu_{2n}^{(j)}, \quad n = N+1, \ N+2, \ \ldots,$$

что эквивалентно условиям

$$\dot{\Delta}_j(\nu_n^{(j)}) = 0, \quad S_n^{(j)} = (-1)^n, \quad n \geqslant N+1. \tag{109}$$

Заметим теперь, что из равенства

$$h(x, \lambda) = c(\pi, \lambda)\, g(x, \lambda) - g(\pi, \lambda)\, c(x, \lambda) \tag{110}$$

следует равенство $h'(0, \lambda) = c(\pi, \lambda)$, что дает для дискриминанта Хилла представление

$$\Delta_j(\lambda) = g_j'(\pi, \lambda) + h_j'(0, \lambda). \tag{111}$$

Теорема 3.3. Пусть потенциалы $r_j(x)$ — N-зонные и их дискриминанты Хилла

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_2(\lambda) = \Delta(\lambda). \tag{112}$$

Тогда: I. Если $\nu_{2n+1} \neq \nu_{2n+2}$ при $n = 1, 2, \ldots, N$, то

$$\Delta(x) = \sum_{n=1}^{N} 2(-1)^{3-j}\{\delta_{2n+j} H'(x, \nu_{2n+j}) - \gamma_{2n+j} G'(x, \nu_{2n+j})\}, \tag{113}$$

$$w(x) = \sum_{n=1}^{N} \{4\delta_{2n+1}\chi_2^{-1}(\nu_{2n+1})(g_2'(\pi, \nu_{2n+1}) - S_{2n+1}^{-1}) H'(x, \nu_{2n+1}) -$$
$$- 4\gamma_{2n+1}\chi_2^{-1}(\nu_{2n+1})(S_{2n+1} - h_2'(0, \nu_{2n+1})) G'(x, \nu_{2n+1})\}.$$

II. При $\nu_{2n+1} = \nu_{2n+2} = \nu_{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots, N$,

$$\Delta(x) = \sum_{n=1}^{N} \{2\dot{\chi}^{-1}(\nu_{(n)})(S_{2n+1} - S_{2n+2}) H'(x, \nu_{(n)})\}; \tag{114}$$

$$w(x) = \sum_{n=1}^{N} \{4\dot{\chi}^{-2}(\nu_{(n)})(S_{2n+1}S_{2n+2} - 1) Q_n^{(1)\prime}(x) +$$
$$+ 2(S_{2n+2}^{-1}\dot{g}_2'(\pi, \nu_{(n)}) - S_{2n+1}^{-1}\dot{h}_2'(0, \nu_{(n)})) P_n'(x)\}. \tag{115}$$

Доказательство вытекает сразу же из теоремы 3.2, если учесть, что из (109) и (111) следует, что все слагаемые в (104) и (105) при $n > N$ равны нулю.

Замечание. Обозначим $\tilde{c}(x, \lambda)$ решение уравнения (88), для которого $\tilde{c}(\pi, \lambda) = 1$, $\tilde{c}'(\pi, \lambda) = 0$. Тогда справедливо равенство $g_2(x, \lambda) = g_2'(\pi, \lambda)\, h_2(x, \lambda) + g_2(\pi, \lambda)\, \tilde{c}_2(x, \lambda)$, подставляя которое в (113) при $j = 2$ получаем формулу, выведенную Левитаном [29]. Формулу (114) можно рассматривать как полученную из (113) в пределе $\nu_{2n+1} = \nu_{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Представления (113)—(115) остаются справедливыми в случае бесконечно-зонных потенциалов, где, как видно из приведенного доказательства, в правых частях слагаемые, для которых выполняются (109) (при некотором n), равны нулю.

Приведем два важных для дальнейшего следствия из теоремы 3.3.

Следствие 1. (Теорема единственности для обратной периодической задачи Штурма — Лиувилля, см., например, [28, 31].) Если выполняется условие (112), то $r_1(x) = r_2(x)$ тогда и только тогда, когда $\nu_n^{(1)} = \nu_n^{(2)} = \nu_n$, $S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = S_n$, $n \geqslant 1$, при этом

$$S_n - S_n^{-1} = \sqrt{\Delta^2(\nu_n) - 4}, \quad S_n + S_n^{-1} = \Delta(\nu_n), \tag{116}$$

где знак перед радикалом $(+, -)$ определяется из равенства

$$\sqrt{\Delta^2(\nu_n)} - 4 = 2S_n - \Delta(\nu_n)\,(S_n = (-1)^n |S_n|). \tag{117}$$

Замечание. Следуя [26], в качестве спектральных характеристик, определяющих $r(x)$, будем рассматривать величины

$$\nu_n(r),\ f_n(r) = -2 \ln |S_n|,\ (S_n = (-1)^n |S_n|), \tag{118}$$

которые в силу теоремы единственности Борга (см. следствие 1 теоремы 3.2) и представления (95) определяют однозначно $r(x) \in L_2(0, \pi)$, а также дискриминант Хилла $\Delta(\lambda)$ (см., например, [28]). Условия периодичности и гладкости $r(x)$ накладывают определенные дополнительные ограничения на ν_n, f_n. В общем случае описание бесконечно-зонных потенциалов $r(x) \in C_n$ $(n \geqslant 0)$ было получено в известной работе [44], в терминах асимптотических разложений спектров μ_n $(n \to \infty)$, т. е. нулей $\Delta(\lambda) = \pm 2$. Для конечно-зонных потенциалов эту задачу просто решает

Следствие 2. Для того чтобы потенциал $r(x) \in \tilde{C}_1$ допускал представление

$$r_x(x) = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \dot{\chi}^{-2}(\nu_n)\,(S_n^2 - 1)\, Q_n'(x) - S_n \dot{\Delta}(\nu_n)\, P_n'(x) \right\}, \tag{119}$$

где P_n и Q_n определяются формулами (98) (при $r_1 = r_2$), необходимо и достаточно, чтобы $r(x)$ был N-зонным. При этом $r(x) \in \tilde{C}_\infty(0, \pi)$.

Доказательство. Если потенциал $r(x)$ — N-зонен, представление (119) сразу получается из формулы (115) при $r_1 = r_2$. Обратно из формулы (105) (при $r_1 = r_2$) получаем в силу (102)

$$(r_x,\ P_n) = \dot{\chi}^{-2}(\nu_n)(S_n^2 - 1),\ (r_x,\ Q_n) = S_n\dot{\Delta}(\nu_n), \tag{120}$$

и, следовательно, представление (119) справедливо тогда и только тогда, когда $S_n^2 - 1 = \dot{\Delta}(\nu_n) = 0$ при $n \geqslant N + 1$, что вследствие (109) эквивалентно N-зонности $r(x)$. Условие $r(x) \in \widetilde{C}_\infty(0, \pi)$, которое является известным [44], можно получить из $r(x) \in \widetilde{C}_1(0, \pi)$ в силу теоремы 4.8.

Замечание. Вслед за пионерской работой Новикова [45], где, в частности, был дан известный критерий конечно-зонности, в работах Итса и Матвеева [46] было получено явное выражение для N-зонных потенциалов. Иное представление для N-зонных потенциалов, которое несколько ближе к методам решения ОЗ, изложенных в разд. 2, имеется в [47]. Дальнейшие приложения представления (119) приведены в разд. 5.

2. Дифференциальные свойства преобразования Крамма — Крейна и приложения. 1. Рассмотрим наряду с задачей

$$y'' + (\lambda - q(x))\, y = 0, y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

задачу

$$y'' + (\lambda - r(x))\, y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0,$$

где потенциалы $\hat{q} = (q(x), h, H)$ и r связаны равенством

$$\mathscr{F}(\hat{q}) \overset{\text{def}}{=} r(x) = q(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\varphi_0(x),\ \varphi_0(x) = \varphi(\hat{q};\ x,\ \lambda_0), \tag{121}$$

обычно называемым преобразованием Крамма — Крейна. Тогда, как известно [48], характеристическая функция

$$\hat{\omega}(\hat{q};\ \lambda) = (\lambda_0 - \lambda)\,\chi(r, \lambda), \tag{122}$$

где ω и χ определяются равенствами (9) и (91) соответственно, при этом решения $g(x, \lambda)$ и $h(x, \lambda)$ выражаются посредством решения $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ следующим образом:

$$g(x,\ \lambda) = \frac{W(\varphi_0(x),\ \varphi(x,\ \lambda))}{(\lambda_0 - \lambda)\,\varphi_0(x)},\quad h(x,\ \lambda) = \frac{W(\varphi_0(x),\ \psi(x,\ \lambda))}{(\lambda_0 - \lambda)\,\varphi_0(x)}. \tag{123}$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_n(\hat{q}) = \nu_n(r),\ l_n(\hat{q}) = -\frac{1}{2} f_n(r),\ n \geqslant 1, \tag{124}$$

где $l_n(\hat{q})$ и $f_n(r)$ определяются формулами (58) и (118).

Основная цель этого пункта — построение на основе формул (123) преобразования для формул разложения (87), соответствующих задаче (88), (89) с $r(x) = r(\pi - x)$ и обратно. Для этой цели [49] сначала изучим дифференциальные свойства оператора (123), которые представляют и самостоятельный интерес.

Теорема 3.4. Преобразование (121) как оператор $\mathcal{F}(\hat{q})\colon \mathfrak{R}_2 \to L_2$ дифференцируемо в любой точке $\hat{q} \in \mathfrak{R}_2$, и его дифференциал

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{F}(\hat{q}+\varepsilon\hat{f})|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\hat{q}}\hat{f} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q(x)}f(x) + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial h}\alpha + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial H}\beta, \tag{125}$$

где

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q}f(x) = -f(x) - \left(\frac{d}{dx}\Phi_0^{-1}(x)\right)\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right)\Phi_0(s)f(s)\,ds +$$

$$+\frac{d}{dx}\left\{\Phi_0^{-1}(x)\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right)\Phi_0(s)\,ds\right\}\left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial q}, f\right), \quad \Phi_0 = \varphi^2(x, \lambda_0), \tag{126}$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial h}(x) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_0^{-1}(x)\int_x^\pi \Phi_0(s)\,ds\right)\frac{\partial\lambda_0}{\partial h}, \tag{127}$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial H}(x) = 2\frac{d}{dx}\left(\Phi_0^{-1}(x)\int_0^x \Phi_0(s)\,ds\right)\frac{\partial\lambda_0}{\partial H}. \tag{128}$$

Доказательство. Так как $\partial\varphi/\partial H = \partial\psi/\partial h = 0$, то из $\varphi_0(x) = C_0\psi_0(x)$ вытекают равенства

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial h} = -\frac{d^2}{dx^2}\frac{\dot{\psi}(x, \lambda_0)}{\psi(x, \lambda_0)}\frac{\partial\lambda_0}{\partial h}, \quad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial H} =$$

$$= -\frac{d^2}{dx^2}\frac{\dot{\varphi}(x, \lambda_0)}{\varphi(x, \lambda_0)}\frac{\partial\lambda_0}{\partial H}. \tag{129}$$

Из уравнения $ly = \lambda y$ следует тождество

$$\frac{d}{dx}W(\dot{y}(x, \lambda), y(x, \lambda)) = y^2(x, \lambda).$$

Полагая здесь $y = \varphi(x, \lambda_0)$, получаем

$$\frac{d}{dx}\frac{\dot{\varphi}(x, \lambda_0)}{\varphi(x, \lambda_0)} = -\Phi_0^{-1}(x)\int_0^x \Phi_0(s)\,ds, \tag{130}$$

что вместе с (129) дает искомую формулу (128). Формула (127) устанавливается аналогично. Далее, учитывая снова (130), имеем

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q}f(x) = f(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\left\{\varphi^{-1}(q;\ x, \lambda_0)\frac{\partial}{\partial q}\varphi(q;\ x, \lambda_0)f(x)\right\} +$$

$$+2\frac{d}{dx}\left\{\Phi_0^{-1}(x)\int_0^x \Phi_0(s)\,ds\right\}\left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial q}, f\right). \tag{131}$$

Для того чтобы вычислить производную $\partial\varphi(q; x, \lambda)/\partial q$, заметим сначала, что при $\lambda = \lambda_0$ решение $\varphi_0(q+f; x)$ уравнения $\varphi_0'' + (\lambda_0 - q(x))\varphi_0 = f(x)\varphi_0$, для которого $\varphi_0(q+f; 0) = 1$, $\varphi_0'(q+f; 0) = h$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi_0(q+f; x) = \varphi_0(q; x) + \int_0^x \{\chi_0(x)\varphi_0(s) - \chi_0(s)\varphi_0(x)\} f(s) \times$$
$$\times (\varphi_0(q+f; s)\, ds,$$

где $\chi_0(x) = \chi_0(x, \lambda_0) : \chi_0(0) = -h(1+h^2)^{-1}$, $\chi_0'(0) = (1+h^2)^{-1}$.

Так как $W(\varphi_0, \chi_0) = 1$, то $\chi_0(x) = \varphi_0(x)\int_0^x \varphi_0^{-2}(s)\, ds - h(1+h^2)^{-1}\varphi_0(x)$ и, следовательно, $\chi_0(x)\varphi_0(x) - \chi_0(s)\varphi_0(x) = \varphi_0(x)\varphi_0(s)\int_s^x \Phi_0^{-1}(\xi)\, d\xi$. Отсюда следует равенство

$$\varphi_0(q+f; x) = \varphi_0(q; x) + \varphi_0(q; x)\int_0^x \Phi_0^{-1}(s) \times$$
$$\times\left(\int_0^s f(\xi)\varphi_0(q; \xi)\varphi_0(q+f; \xi)\, d\xi\right) ds,$$

на основе которого получают выражение для дифференциала

$$\frac{\partial}{\partial q}\varphi_0(q; x) f(x) = \varphi_0(x)\int_0^x \Phi_0^{-1}(s)\left(\int_0^s \Phi(\xi) f(\xi)\, d\xi\right) ds.$$

Подставляя его в правую часть равенства (131), получаем формулу (126), поскольку $\mathscr{F}(\hat{q}) = q(x) - 2d^2/dx^2 \ln\psi(q; x, \lambda_0)$. Запишем теперь равенства (124) в виде $\nu_n(\mathscr{F}(\hat{q} + \varepsilon\hat{f})) = \lambda_n(\hat{q} + \varepsilon\hat{f})$, $n \geqslant 1$, $\hat{f} \in \mathfrak{R}_2$, $r = \mathscr{F}(\hat{q}) \in L_2$. Дифференцируя его по ε и полагая затем $\varepsilon = 0$, получаем в силу теоремы 3.4 следующую лемму.

Лемма 3.1. Пусть $\mu_n(r)$ собственные числа задачи (88), (89) $r = \mathscr{F}(\hat{q})$. Тогда

$$\left(\frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}}, \hat{f}\right)_2 = \left(\frac{\partial\mu_n}{\partial\mathscr{F}}, \frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\hat{q}}\hat{f}\right), \ n \geqslant 1, \ \hat{f} \in \mathfrak{R}_2, \tag{132}$$

где $\partial\lambda_n/\partial\hat{q} = \alpha_n\hat{\Phi}(\lambda_n)$, $\partial\nu_n/\partial r = \gamma_n g^2(x, \nu_n)$.

С помощью доказательства теоремы 1.5 получаем, что из теоремы 3.1 вытекает

Теорема 3.5. Пусть $\sigma(r) = \{\nu_n, n \geqslant 1\}$ — спектр краевой задачи (88), (89) с $r(x) \in L_2^{(s)}$ $(r(x) = r(\pi - x))$. Тогда для любой функции $f \in L_2^{0(s)}$ имеем разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\chi}^{-2}(\nu_n) L_n'(x)(f, G(\nu_n)), \tag{133}$$

где $L_n(x) = \dot{H}(x, \nu_n) - \dot{G}(x, \nu_n)$. Аналогом этой теоремы для задачи (48), (49) с $\hat{q}^{(s)} = (q \in L_2^{(s)}, h, H = h) \in \mathfrak{R}_2^{(s)}$ является разложение (87), т. е. имеет место

Теорема 3.6. Пусть по краевой задаче (48), (49) с $\hat{q} = \hat{q}^{(s)}$ построены функции

$$W_n(x) = \dot{\Psi}(x, \lambda_n) - \dot{\Phi}(x, \lambda_n),\ \Phi_n(x) = \Phi(x, \lambda_n),\ n \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции $h \in L_2^{(s)}$ справедливо разложение

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\omega}^{-2}(\lambda_n)\, W'_n(x) \left(h,\ \Phi_n - \frac{1}{2}\right). \tag{134}$$

Приведем более подробно вывод теоремы 3.6 из теоремы 3.5. Доказательство разобьем на несколько лемм. Отметим сначала, что из леммы 3.1 сразу вытекает следующая

Лемма 3.2. Пусть $\hat{f}^{(s)} \in \mathfrak{R}_2^{(s)} = \{\hat{f} \in \mathfrak{R}_2 \mid f(x) = f(\pi - x),\ \alpha,\ \beta = \alpha\}$. Тогда если $\hat{q}^s \in \mathfrak{R}_2^{(s)}$, то для любой $f \in \overset{0}{\mathfrak{R}}{}_2^{(s)} = \left\{\hat{f} \in \mathfrak{R}_2^{(s)} \,\middle|\, \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi f(x)\,dx + 2\alpha = 0\right\}$ имеем

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \hat{q}^{(s)}} f \equiv h(f;\ \lambda_0,\ x) = -f(x) - \left(\frac{d}{dx}\Phi_0^{-1}(x)\right) \times$$
$$\times \left(\int\limits_0^x - \int\limits_x^\pi\right) \Phi_0(s) f(s)\,ds + \alpha_0 \left(f,\ \Phi_0 - \frac{1}{2}\right) \frac{d}{dx} \times$$
$$\times \left\{\Phi_0^{-1}(x) \left(\int\limits_0^x - \int\limits_x^\pi\right) \Phi_0(s)\,ds\right\} \in L_2^{0(s)}. \tag{135}$$

Замечание. Равенство $\partial \mathcal{F}(\hat{q}^{(s)})/\partial h = \partial \mathcal{F}(\hat{q}^{(s)})/\partial H$, $H = h$, следует понимать в том смысле, что $\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}, f\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H}, f\right)$, $f \in L_2^{(s)}$.

Лемма 3.3. Пусть по функции $f \in L_2^{(s)}$ построена функция $h(f;\ x,\ \lambda_0)$, где $r = \mathcal{F}(\hat{q}^{(s)})$. Тогда при $n \geqslant 1$ имеем

$$\gamma_n(r) \int\limits_0^\pi h(f;\ x,\ \lambda_0)\, G_n(r,\ x)\,dx =$$
$$= \alpha_n(\hat{q}^{(s)}) \int\limits_0^\pi f(x) \left(\Phi_n(\hat{q}^{(s)};\ x) - \frac{1}{2}\right) dx, \tag{136}$$

где $\alpha_n = (-1)^{n+1}\dot{\omega}^{-1}(\lambda_n = \nu_n)$, $\gamma_n = (-1)^n\dot{\chi}^{-1}(\nu_n)$.

Доказательство равенств (136) является прямым следствием лемм 3.1 и 3.2. Отсюда в силу теоремы 3.5 получаем, что если $r = \mathcal{F}(\hat{q}^{(s)}, x)$, то для любой $f \in L_2^{(s)}$ справедливо разложение

$$-h(f;\ \lambda_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L'_n(r;\ x)}{\dot{\chi}(r;\ \nu_n)\,\dot{\omega}(\hat{q}^{(s)};\ \nu_n)} \left(f,\ \Phi_n(\hat{q}^{(s)}) - \frac{1}{2}\right), \tag{137}$$

где $h(f;\ \lambda_0,\ x)$ определяется формулой (135).

Построим теперь с помощью функции $\Phi_0(x)$ операторы

$$Af = f(x) + \left(\frac{d}{dx}\Phi_0^{-1}(x)\right)\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right)\Phi_0(s) f(s)\,ds,$$

$$Bf = f(x) + \Phi'_0(x)\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right)\Phi_0^{-1}(s) f(s)\,ds.$$

Лемма 3.4. В пространстве $L_2^{(s)}$ $A = B^{-1}$, т. е. для любой $h \in L_2^{(s)}$, уравнение $Af(x) = h(x)$ имеет единственное решение $f = Bh \in L_2^{(s)}$ и обратно. При этом

$$2\int_0^\pi h(x)\left(\Phi_0(x) - \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^\pi f(x)\,dx,\quad h(x) = Bf(x). \tag{138}$$

Доказательство этой леммы, которое вполне аналогично доказательству леммы 6.6 [50], здесь опускаем. Сложнее устанавливается

Лемма 3.5. Пусть функции $L_n(x)$ и $W_n(x)$ $(r = \mathcal{F}(\hat{q}^{(s)}))$ построены как в теоремах 3.5 и 3.6 соответственно. Тогда при $n \geqslant 1$

$$(\lambda_0 - \lambda_n)^{-1} W'_n(x) = BL'_n(x) \tag{139}$$

и

$$\frac{d}{dx}\left\{\Phi_0(x)\left(\int_0^x \int_x^\pi\right)\Phi_0^{-1}(s)\,ds\right\} = \alpha_0^{-1} BW'_0 x. \tag{140}$$

Доказательство. Известно (см., например, [48]), что обратные к преобразованиям (123) имеют следующий вид:

$$\varphi(x,\ \lambda) = \frac{W(z_0(x),\ g(x,\ \lambda))}{z_0(x)},\quad \psi(x,\ \lambda) = \frac{W(z_0(x),\ h(x,\ \lambda))}{z_0(x)},$$

$$z_0(x) = \varphi_0^{-1}(x).$$

Отсюда, в силу тождества (22), получаем равенства

$$(\lambda_0 - \lambda)^{-1}\frac{d}{dx}(Z_0(x)\Phi(x,\ \lambda)) = W(Z_0(x),\ G(x,\ \lambda)),$$

$$(\lambda_0 - \lambda)^{-1}\frac{d}{dx}(Z_0(x)\Psi(x,\ \lambda)) = W(Z_0(x),\ H(x,\ \lambda)),\quad Z_0 = \Phi_0^{-1},$$

где $G=g^2$, $H=h^2$, $\Phi=\varphi^2$, $\Psi=\psi^2$, из которых вытекает, что

$$(\lambda_0-\lambda)^{-2} Z_0(x)(\Psi(x, \lambda)-\Phi(x, \lambda))+$$
$$+(\lambda_0-\lambda)^{-1} Z_0(x)(\dot\Psi(x, \lambda)-\dot\Phi(x, \lambda))=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^x-\int_x^\pi\right) W(Z_0(s), \dot H(s, \lambda)-\dot G(s, \lambda))\,ds,$$

так как $\int_0^\pi W(Z_0(s), \dot H(s, \lambda)+\dot G(s, \lambda))\,ds=0$. Теперь, для того чтобы получить (139), следует положить $\lambda=\nu_n$ и учесть, что в силу (50) $\Psi(x, \nu_n)=\Phi(x, \nu_n)$, $\Psi(0, \lambda_0)=\Phi(\pi, \lambda_0)=1$. Несложной выкладкой проверяется, что

$$B\frac{d}{dx}\left(\Phi_0(x)\left(\int_0^x-\int_x^\pi\right)\Phi_0^{-1}(s)\,ds\right)=$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\Phi_0(x)\left(\int_0^x-\int_x^\pi\right)\Phi_0^{-1}(s)\,ds\right).$$

Отсюда равенство (140) следует из соотношений биортогональности (55) и приведенного ниже вывода формулы разложения (134).

Применим теперь оператор B к обеим частям равенства (137). В силу лемм 3.4, 3.5 получаем формулу разложения

$$f(x)-\alpha_0\left(f, \Phi_0-\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dx}\left(\Phi_0(x)\left(\int_0^x-\int_x^\pi\right)\Phi_0^{-1}(s)\,ds\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^\infty \dot\omega^{-2}(\lambda_n) W_n'(x)\left(f, \Phi_n-\frac{1}{2}\right).$$

Положим в этой формуле $f=W_0'(x)$. Тогда в силу соотношений (55) получаем $W_0'(x)=\frac{d}{dx}\left(\Phi_0(x)\left(\int_0^x-\int_x^\pi\right)\Phi_0^{-1}(s)ds\right)$, что и требовалось доказать.

По аналогичной схеме исходя из разложения (134) получается разложение (133). Из представлений (123) и тождества (22) устанавливаем, что для любой $f\in L_2^{0(s)}$ имеем

$$\int_0^\pi f(x)G(x, \nu_n)\,dx=(\lambda_0-\nu_n)^{-1}\int_0^\pi h(x)\times$$
$$\times\left(\Phi(x, \nu_n)-\frac{1}{2}\right)dx,\ n\geqslant 1,$$

где $h = Bf$. Отсюда, положив в разложении (134) $h = Bf$, получим

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \nu_n)\, \dot{\omega}^{-2}(\nu_n)\, W'_n(x)\,(f, G(\nu_n)), \tag{141}$$

так как вследствие (138) условие $f \in L_2^{0(s)}$ дает $\left(h, \Phi_0 - \frac{1}{2}\right) = 0$. Из леммы 3.4 следуют равенства $(\lambda_0 - \nu_n)\, L'_n(x) = AW'_n(x)$, $n \geqslant 1$. Далее, применяя оператор A к обеим частям равенства (141), получаем с учетом $A = B^{-1}$ искомое разложение (133).

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ Λ-ОПЕРАТОРОВ

В этом разделе мы получим аналогичные теоремам 1.1 и 1.3 разложения для краевых задач (88), (89), исходя из традиционной в спектральной теории схемы, суть которой состоит в ее формулировке как задачи на собственные значения для подходящего интегродифференциального оператора с последующим построением резольвентного оператора, откуда разложение единицы получается контурным интегрированием, как в разд. 1. В основе наших построений Λ-операторов лежит следующая

Теорема 4.1 [51]. Пусть $s(x) = r_1(x) + r_2(x)$, $\Delta(x) = r_1(x) - r_2(x)$, где $r_j(x) \in C_1[0, \pi]$. Тогда произведение $Y = y_1 y_2$ решений уравнений $l(r_j)\, y_j = \lambda y_j$, $j = 1, 2$, удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{\Lambda}_{x_0} Y(x, \lambda) = \lambda Y(x, \lambda) + B(x_0, x, \lambda), \quad x_0 \in [0, \pi], \tag{142}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}_{x_0} = \frac{1}{4}\left\{-D^2 + 2s(x) - \int_{x_0}^{x} s_y(y)\,dy - \int_{x_0}^{x} \Delta(y)\,dy \int_{x_0}^{y} \Delta(z)\,dz\right\};$$

$$B(x_0, x, \lambda) = -\frac{1}{4}\Big\{W(y_1(x_0, \lambda), y_2(x_0, \lambda)) \int_{x_0}^{x} \Delta(y)\,dy +$$

$$+ 2\left(y'_1(x_0, \lambda)\, y'_2(x_0, \lambda) + 2Y(x_0, \lambda)\right) - s(x_0)\, Y(x_0, \lambda)\Big\} \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right).$$

Дифференцируя по x уравнение (142), получаем

Следствие 1. Функция $Y(x, \lambda)$ является решением уравнения

$$\Lambda_{x_0} Y(x, \lambda) = \lambda D Y(x, \lambda) - \frac{1}{4}\Delta(x)\, W(y_1(x_0, \lambda), y_2(x_0, \lambda)), \tag{143}$$

где

$$\Lambda_{x_0} = D\widetilde{\Lambda}_{x_0} = \frac{1}{4}\left\{-D^3 + 2s(x) D + s_x(x) - \Delta(x) \int_{x_0}^{x} \Delta(y)\,dy\right\}.$$

При $\Delta(x) = 0$ отсюда следует известный факт, что произведение $Y(x, \lambda)$ любых двух решений уравнения $l(r)\, y = \lambda y$ является решением уравнения

$$LY = \frac{1}{4}\{-D^3 + 4r(x)D + 2r_x(x)\}Y = \lambda DY.$$

Следствие 2. Из тождества (56) и равенства $W(y_1, y_2) = Y' - 2Z$, где $Z = y_1'(x, \lambda)\, y_2(x, \lambda)$, следует, что уравнение (143) эквивалентно системе дифференциальных уравнений [36]:

$$\begin{aligned} -Y''' + s_x(x)\,Y + (2s(x) + \Delta(x))Y' - 2\Delta(x)\,Z &= 4\lambda Y', \\ -Z'' + r_{1,x}(x)\,Y + 2r_1(x)\,Y' - \Delta(x)\,Z &= 2\lambda Y'. \end{aligned} \tag{144}$$

С учетом начальных условий (90) убеждаемся, что из теоремы 4.1 вытекает

Теорема 4.2. Функции $G(x, \lambda)$ и $H(x, \lambda)$, определяемые формулами (96), удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{\Lambda}_0 G(x, \lambda) = \lambda G(x, \lambda) - \frac{1}{2}, \quad \tilde{\Lambda}_\pi H(x, \lambda) = \lambda H(x, \lambda) - \frac{1}{2},$$

где $\tilde{\Lambda}_{0(\pi)} = \tilde{\Lambda}_{x_0 = 0(\pi)}$, а также уравнениям

$$\Lambda_0 G \equiv D\tilde{\Lambda}_0 G = \lambda DG, \quad \Lambda_\pi H \equiv D\tilde{\Lambda}_\pi H = \lambda DH, \tag{145}$$

где $\Lambda_{0(\pi)} = \Lambda_{x_0 = 0(\pi)}$.

Следствие 1. Если ввести операторы

$$\tilde{\Lambda}^*_{\pi(0)} = \frac{1}{4}\left\{-D^2 + 2s(x) + s_x(x)\int\limits_{0(\pi)}^{x} dy - \Delta x \int\limits_{0(\pi)}^{x} \Delta(y)\,dy \int\limits_{0(\pi)}^{y} dz\right\},$$

то уравнения (145) можно записать в виде

$$\Lambda_0 G \equiv \tilde{\Lambda}^*_\pi DG = \lambda DG, \quad \tilde{\Lambda}^*_0 DH = \lambda DH,$$

так как $G(x, \lambda) = \int\limits_0^x G'(s, \lambda)\,ds$, $H(x, \lambda) = -\int\limits_x^\pi H'(s, \lambda)\,ds$.

Рассмотрим теперь краевые задачи

$$\Lambda_0 Y(x, \lambda) \equiv \tilde{\Lambda}^*_\pi DY(x, \lambda) = \lambda DY(x, \lambda),\ Y(0) = Y'(0) = Y(\pi) = 0, \tag{146}$$

$$\Lambda_\pi Y(x, \lambda) \equiv \tilde{\Lambda}^*_0 DY(x, \lambda) = \lambda DY(x, \lambda),\quad Y(0) = Y(\pi) = Y'(\pi) = 0. \tag{147}$$

Так как условия $Y(0) = Y'(0) = 0$, $Y''(0) = 2$ однозначно определяют функцию $G(x, \lambda)$, то собственные числа задачи (146) определяются условием $G(\pi, \lambda) = 0$, т. е. множеством $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ нулей функции $X(\lambda) = G(\pi, \lambda) = H(0, \lambda)$. Это равенство вместе с условиями $H(\pi) = H'(\pi) = 0$, $H''(\pi) = 2$ показывают, что спектры задач (146) и (147) совпадают. Очевидно, задачи (146), (147) эквивалентны задачам

$$\widetilde{\Lambda}_{\pi}^{*} Z(x, \lambda) = \lambda Z(x, \lambda), \quad \int_0^{\pi} Z(x, \lambda)\, dx = 0, \quad Z(0, \lambda) = 0, \tag{148}$$

$$\widetilde{\Lambda}_{0}^{*} Z(x, \lambda) = \lambda Z(x, \lambda), \int_0^{\pi} Z(x, \lambda)\, dx = 0, Z(\pi, \lambda) = 0, \tag{149}$$

соответственно, в том смысле, что если при некотором λ функция $Y(x, \lambda)$ является решением задачи (146), то функция $Z(x, \lambda) = Y'(x, \lambda)$ является решением задачи (148) и обратно, если $Z(x, \lambda)$ — решение задачи (148), то $Y(x, \lambda) = \int_0^x Z(s, \lambda)\, ds$ — решение задачи (146).

Операторы Λ_0, Λ_π будем рассматривать в пространстве L_2 с областями определения

$\mathscr{D}(\Lambda_{0(\pi)}) = \{f(x) \in C_3, \mid f(0) = f'(0) = f(\pi) = 0\ (f(0) = f(\pi) = f'(\pi) = 0)\}$, а операторы $\widetilde{\Lambda}_{\pi}^{*}$ и $\widetilde{\Lambda}_{0}^{*}$ — в пространстве

$$\mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_{\pi(0)}^{*}) = \left\{ f(x) \in C_2 \,\middle|\, \int_0^{\pi} f(x)\, dx = 0,\ f(0) = 0\ (f(\pi) = 0) \right\}.$$

Из $f \in \mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_{\pi}^{*})$ $(\mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_{0}^{*}))$ имеем $F(x) = \int_0^x f(s)\, ds \in \mathscr{D}(\Lambda_0)$ $\left(F(x) = -\int_x^{\pi} f(s)\, ds \in \mathscr{D}(\Lambda_\pi)\right)$ и если $f \in \mathscr{D}(\Lambda_{\pi(0)})$, то $f' \in \mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_{0(\pi)}^{*})$. При этом

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_{0(\pi)} f \equiv D\widetilde{\Lambda}_{0(\pi)} f = \widetilde{\Lambda}_{\pi(0)}^{*} Df, \quad \forall f \in C_3, \quad f(0)\,(f(\pi)) = 0, \\ &(\Lambda_0 f, g) = -(f, \Lambda_\pi g), \\ &[\widetilde{\Lambda}_0 f, g] = [f, \widetilde{\Lambda}_\pi g]\ f \in \mathscr{D}(\Lambda_0), \quad g \in \mathscr{D}(\Lambda_\pi) \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

и

$$(\widetilde{\Lambda}_{0(\pi)} f, g) = (f, \widetilde{\Lambda}_{0(\pi)}^{*} g)\ f \in \mathscr{D}(\Lambda_{0(\pi)}), \quad g \in \mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_{0(\pi)}), \tag{151}$$

где кососкалярное произведение [,] определяется формулой (103).

Введем функцию

$$R_0(x, y, \lambda) = \frac{2}{X(\lambda)} \begin{cases} G(x, \lambda) H(y, \lambda), & x < y < \pi, \\ \sum\limits_{j=1,\,2} U_j(x, \lambda) U_{3-j}(y, \lambda) - H(x, \lambda) G(y, \lambda), & 0 < y < x, \end{cases}$$

где $U_j(x, \lambda) = g_j(x, \lambda) h_{3-j}(x, \lambda)$.

Теорема 4.3. Интегральный оператор

$$R_0(f;\lambda)(x)=\int_0^{\pi} R_0(x, y, \lambda) f(y)\, dy$$

является при любом $\lambda \in \rho(\Lambda_0)=\mathbb{C}\setminus \bigcup_{j=1,2} \sigma_j$ резольвентой оператора $\Lambda_0-\lambda D$, т.е.

$$R_0(f;\lambda)(x) \in \mathscr{D}(\Lambda_0),\ (\Lambda_0-\lambda D) R_0(f;\lambda)(x)=f(x),\ f \in L_1,$$
$$R_0(\lambda, (\Lambda_0-\lambda D) f)(x)=f(x),\ f \in \mathscr{D}(\Lambda_0).$$

Доказательство сводится к непосредственной проверке с использованием тождества (56) и вытекающего из (88) уравнения

$$Y''(x, \lambda)=(s(x)-2\lambda) Y(x, \lambda)+2y_1'(x, \lambda) y_2'(x, \lambda).$$

Подробности этой выкладки изложены в [24].

Следствие 1. Резольвентный оператор $\widetilde{R}_\pi^*(\lambda)$ краевой задачи (148) определяется через $R_0(\lambda)$ формулой

$$\widetilde{R}_\pi^*(\lambda)=DR_0(\lambda)=(\widetilde{\Lambda}_\pi^*-\lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\Lambda_0).$$

Далее, учитывая равенства (150), получаем

Следствие 2. При любом $\lambda \in \rho(\Lambda_0)$ оператор

$$R_\pi(\lambda, f)(x)=\int_0^{\pi} R_\pi(x, y, \lambda) f(y)\, dy, \quad R_\pi(x, y, \lambda)=-R_0(y, x, \lambda)$$

определяет резольвенту краевой задачи (147). При этом оператор

$$\widetilde{R}_0^*(\lambda)=(\widetilde{\Lambda}_0^*-\lambda I)^{-1}=DR_\pi(\lambda)$$

является резольвентным для краевой задачи (149).

Введем теперь операторы

$$\Lambda=\frac{1}{2}(\Delta_0+\Lambda_\pi), \quad \mathscr{D}(\Lambda)=\{f(x) \in C_3 \mid f(0)=f(\pi),\ f'(0)=f'(\pi)\},$$

$$\widetilde{\Lambda}^*=\frac{1}{2}(\widetilde{\Lambda}_0^*+\Lambda_\pi^*),$$

$$\mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_*)=\left\{f(x) \in C_2 \,\middle|\, \int_0^{\pi} f(x)\, dx=0,\ f(0)=f(\pi)\right\}.$$

Отсюда вытекают равенства

$$\begin{aligned}&\Lambda f=\widetilde{\Lambda}^* D f,\ f \in C_3,\ f(0)=f(\pi)=0,\\ &(\Lambda f, g)=-(f, \Lambda g),\ f, g \in \mathscr{D}(\Lambda),\end{aligned} \qquad (152)$$

последнее из которых показывает, что Λ является кососимметрическим оператором. Отметим также соотношения

$$[\widetilde{\Lambda} f, g]=[f, \widetilde{\Lambda} g], \quad \widetilde{\Lambda}=\frac{1}{2}(\widetilde{\Lambda}_0+\widetilde{\Lambda}_\pi), \quad f, g \in \mathscr{D}(\Lambda),$$

$$(\widetilde{\Lambda}^* f, g)=(f, \widetilde{\Lambda} g), \quad f \in \mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}^*), \quad g \in \mathscr{D}(\Lambda).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\Lambda Y(x, \lambda)=\lambda D Y(x, \lambda), \; Y(0)=Y(\pi)=0, \, Y'(0)=Y'(\pi), \tag{153}$$

которая в силу (152) эквивалентна задаче

$$\widetilde{\Lambda}^* Z(x, \lambda)=\lambda Z(x, \lambda), \quad \int_0^\pi Z(x, \lambda)\, dx=0, \; Z(0)=Z(\pi).$$

Аналогом теоремы 4.3 является

Теорема 4.4. Если краевые задачи (88), (89) изоспектральны, т. е. $\sigma_1=\sigma_2$, то оператор

$$R(\lambda)=\frac{1}{2}(R_0(\lambda)+R_\pi(\lambda))=(\Lambda-\lambda D)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\Lambda)=\mathbb{C} \setminus \sigma$$

является резольвентой задачи (153), а оператор

$$\widetilde{R}^*(\lambda)=D R(\lambda)=(\widetilde{\Lambda}^*-\lambda I)^{-1}.$$

Введем системы функций $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$ следующим образом: при $\nu_n \in \sigma'$ положим

$$U_n(x)=\dot{X}^{-1}(\nu_n)\, G(x, \nu_n), \quad V_n(x)=2H(x, \nu_n),$$

при $\nu_{2n+1}=\nu_{2n+2}=\nu_{(n)} \in \sigma''$ положим

$$U_{2n+1}(x)=2\ddot{X}^{-1}(\nu_{(n)})\, G(x, \nu_{(n)}), \quad U_{2n+2}=2\ddot{X}^{-1}(\nu_{(n)})\, \dot{G}(x, \nu_{(n)}),$$

$$V_{2n+1}=2\dot{H}(x, \nu_{(n)})-2\dddot{X}(\nu_{(n)})\, \ddot{X}^{-1}(\nu_{(n)})\, H(x, \nu_{(n)}),$$

$$V_{2n+2}=2H(x, \nu_{(n)}).$$

С помощью тождества (22) проверяется следующая

Лемма 4.1. Система $\{U_n\}$ биортогональна системе $\{V_n\}$ относительно кососкалярного произведения (103):

$$[U_n, V_m]=-[V_m, U_n]=\delta_{nm}.$$

Далее из уравнений (146), с учетом граничных условий (90) и равенства (93), получаем, что справедлива

Лемма 4.2. Функция $U_n \in \mathscr{D}(\Lambda_0)$, $V_n \in \mathscr{D}(\Lambda_\pi)$, $U_n' \in \mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_\pi^*)$, $V_n' \in \mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_0^*)$. При этом если $\nu_n \in \sigma'$, то

$$\Lambda_0 U_n \equiv \widetilde{\Lambda}_\pi^* U_n'=\nu_n U_n', \quad \Lambda_\pi V_n \equiv \widetilde{\Lambda}_0^* V_n'=\nu_n V_n',$$

а если $\nu_{(n)} \in \sigma''$, то

$$\Lambda_0 U_{2n+1} \equiv \widetilde{\Lambda}^*_\pi U'_{2n+1} = \nu_{(n)} U'_{2n+1},\ \Lambda_0 U_{2n+2} = \nu_{(n)} U'_{2n+2} + U'_{2n+1},$$
$$\Lambda_\pi V_{2n+2} \doteq \nu_{(n)} V'_{2n+2},\ \Lambda V_{2n+1} = \nu_{(n)} V'_{2n+1} + V'_{2n+2}.$$

Основной вопрос о базисности и полноте систем $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$ решает

Теорема 4.5 о разложении единицы для операторов $\Lambda_{0(\pi)}$ и $\widetilde{\Lambda}^*_{\pi(0)}$. Для любой, возможно комплекснозначной, функции $f \in L_1$ имеют место формулы разложения

$$-\int_x^\pi f(s)\,ds = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=3}^{2N} V_n(x)(f, U_n), \tag{154}$$

$$\int_0^x f(s)\,ds = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=3}^{\infty} U_n(x)(f, V_n), \tag{155}$$

где сходимость в (154) равномерная по $x \in \Delta \subseteq (0, \pi]$, а в (155) — при $x \in \Delta \subseteq (0, \pi]$. При этом если $f \in L_2^{(0)}$, то по норме L_2 имеем

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{n=3}^{2N} V'_n(x)(f, U_n), \tag{156}$$

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=3}^{2N} U'_n(x)(f, V_n). \tag{157}$$

Доказательство получается в результате подсчета, как в доказательстве теорем 1.1, 1.2, контурных интегралов

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_N} R_{0(\pi)}(\lambda, f)(x)\,d\lambda, \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_N} \widetilde{R}^*_{0(\pi)}(\lambda, f)(x)\,d\lambda$$

с последующим применением критерия базисности [39].

Из леммы (4.2), равенства (150) и теоремы 4.2 вытекает, что если

$f \in \mathscr{D}(\Lambda_\pi)$ и $\nu_{2n+j} \in \sigma'$, $\nu_{2n+1} \in \sigma''$, то $(\Lambda_\pi f, U_{2n+j}) = -(f, \Lambda_0 U_{2n+j}) =$
$= -\nu_{2n+j}\,[f, U_{2n+j}]$, а при

$\nu_{2n+2} \in \sigma''$ имеем

$$(\Lambda_\pi f, U_{2n+2}) = -\nu_{2n+2}\,[f, U_{2n+2}] - [f, U_{2n+1}].$$

Далее с учетом (151) имеем, что если $f \in \mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_0^*)$, то

$$(\widetilde{\Lambda}_0^* f, U_{2n+j}) = (f, \widetilde{\Lambda}_0 U_{2n+j}) = \nu_{2n+j}(f, U_{2n+j});$$
$$(\widetilde{\Lambda}_0^* f, U_{2n+2}) = \nu_{2n+2}(f, U_{2n+2}) + (f, U_{2n+1}).$$

Отсюда после замены в (154) f на $\Lambda_\pi f$, а в (156) f на $\widetilde{\Lambda}_0^* f$ вытекает

Теорема 4.6 о спектральном разложении операторов Λ_π и $\widetilde{\Lambda}_0^*$. Для любой $f \in \mathscr{D}(\Lambda_\pi)$ справедливо разложение

$$-\int_x^\pi \Lambda_\pi f(s)\,ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1,\,2} \nu_{2n+j} V_{2n+j}(x)\,[f,\, U_{2n+j}] + \delta_n V_{2n+2}(x)\,[f,\, U_{2n+1}] \right\}, \quad (158)$$

и если $f \in \mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_0^*)$, $\widetilde{\Lambda}_0^* f \in L_2^{(0)}$, то

$$\widetilde{\Lambda}_0^* f(x) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} \left\{ \sum_{j=1,\,2} \nu_{2n+j} V'_{2n+j}(x)\,(f,\, U_{2n+j}) + \delta_n V'_{2n+2}(x)\,(f,\, U_{2n+1}) \right\}, \quad (159)$$

где $\delta_n = 0$ при $\nu_{2n+1} \in \sigma'$, $\delta_n = 1$ при $\nu_{2n+j} \in \sigma''$.

Разложения для операторов Λ_0 и $\widetilde{\Lambda}_\pi^*$, которые получаются из (155) и (157) соответственно, вполне аналогичны приведенным выше (158) и (159) и здесь не выписаны.

Следствие 1. Спектр $\sigma(\Lambda_0) = \mathbb{C} \setminus \rho(\Lambda_0)$ краевой задачи (146), (148) совпадает со спектром задачи (147), (149) и $\sigma(\Lambda_0) = \sigma(\Lambda_\pi) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\rho(\Lambda_0) = \rho(\Lambda_\pi)$ — область регулярности операторов $R_0(\lambda)$ $(\widetilde{R}_\pi^*(\lambda))$ и $R_\pi(\lambda)$ $(\widetilde{R}_0^*(\lambda))$. Числа $\nu_n \in \sigma'$ являются простыми собственными числами, для которых U_n (U'_n) и V_n (V'_n) суть соответствующие собственные функции. Числа $\nu_{(n)} \in \sigma''$ — двукратные собственные числа, для которых U_{2n+1} (U'_{2n+1}), V_{2n+2} (V'_{2n+2}) и U_{2n+2} (U'_{2n+2}), V_{2n+1} (V'_{2n+1}) — собственные и присоединенные функции краевых задач (146), (148) и (147), (149) соответственно.

Замечание 1. Из приведенных в лемме 4.2 уравнений для функций V'_n следует, что формулу (159) можно рассматривать как полученную путем почленного применения оператора $\widetilde{\Lambda}_0^*$ к разложению (159), т.е.

$$\widetilde{\Lambda}_0^* f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \widetilde{\Lambda}_0^* V'_n(x)\,(f,\, U_n), \quad f \in \mathscr{D}(\widetilde{\Lambda}_0^*), \quad \widetilde{\Lambda}_0^* f \in L_2^0.$$

Аналогичное утверждение имеем для (158), если наряду с $f \in \mathscr{D}(\Lambda_\pi)$ потребовать $\Lambda_\pi f \in L_2^0$.

Замечание 2. Подсчитав, как в доказательстве теоремы 11, контурный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \widetilde{R}_0^*(z,\, f)(x)\,(z-\lambda)^{-1}\,dz, \quad \lambda \in \rho(\widetilde{\Lambda}_0^*),$$

получим следующее спектральное представление для резольвенты:

$$\widetilde{R}_0^*(\lambda,\, f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1,\,2} \left\{ \frac{V'_{2n+j}(x)\,(f,\, U_{2n+j})}{\nu_{2n+j} - \lambda} - \frac{\delta_n V'_{2n+2}(x)}{(\nu_{(n)} - \lambda)^2}\,(f,\, U_{2n+1}) \right\},$$

справедливое для любой $f \in L_1$. Отсюда, в силу следствия 1, теоремы 4.2 и леммы 4.3, получаем формулу разложения (156) для любой $f \in \mathscr{D}(\tilde{\Lambda}_0^*)$. В этом аспекте теорема 4.5 расширяет множество допустимых f, для которых имеют место приведенные разложения.

Рассмотрим теперь спектральную задачу (153). Аналогом леммы 4.2 здесь является

Лемма 4.3. Функции

$$P_n(x) = 2\ddot{X}^{-1}(\nu_n)\, H(x, \nu_n), \quad Q_n(x) = S_{2n+1}S_{2n+2}\dot{H}(x, \nu_n) - \dot{G}(x, \nu_n) \tag{160}$$

являются собственными функциями краевой задачи (153), соответствующими собственному числу ν_n:

$$\Lambda P_n \equiv \tilde{\Lambda}^* P_n' = \nu_n P_n', \; \Lambda Q_n \equiv \tilde{\Lambda}^* Q_n' = \nu_n Q_n', \tag{161}$$

где $P_n,\ Q_n \in \mathscr{D}(\Lambda)$. При этом

$$[P_n, Q_m] = \delta_{nm}\,[P_n, P_m] = [Q_n, Q_m] = 0. \tag{162}$$

Следующие две теоремы дают разложения единицы и спектральные разложения для операторов Λ и $\tilde{\Lambda}^*$ соответственно.

Теорема 4.7. Для всякой функции $f \in L_2^0$ имеет место разложение

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{n=1}^{N} \{Q_n'(x)\,(f, P_n) - P_n'(x)\,(f, Q_n)\}, \tag{163}$$

а если $f \in L_1$, то справедлива формула

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right) f(s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \{Q_n(x)(f, P_n) - P_n(x)(f, Q_n)\}, \tag{164}$$

где в (163) ряд сходится по норме L_2, а в (164) сходимость равномерна по $x \in \Delta \subset (0, \pi)$.

Доказательство этих разложений получается с помощью вычисления контурных интегралов

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \tilde{R}^*(\lambda, f)(x)\,d\lambda, \quad \frac{1}{2\pi i}\oint R(\lambda, f)(x)\,d\lambda$$

указанным в доказательстве теоремы 4.5 методом. Отметим лишь, что если через $S_N(f; x)$ обозначить частную сумму ряда (163) и

$$\sigma_N(f; x) = \sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{2}{\pi}\cos 2nx \int_0^\pi f(y)\cos 2ny\,dy + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\sin 2nx \int_0^\pi f(y)\sin 2ny\,dy\right\}$$

— частную сумму ряда Фурье для $f \in L_2^0$, то
$\lim_{N\to\infty} \| S_N(f; x) - \sigma_N(f; x)\|_{L_2} = 0$, что эквивалентно равенству (163).

Разложения (163) и (164) можно рассматривать как полученные путем сложения разложений (156) и (157) и (154), (155) соответственно, с последующим преобразованием соответствующих слагаемых, сходным тому, что использовался при выводе теоремы 1.3 из теорем 1.1 и 1.2. По этой схеме исходя из теоремы 4.6 и леммы 4.3 получается

Теорема 4.8. Формула (163) является разложением единицы для оператора $\tilde{\Lambda}^*$, т.е. для всякой $f \in \mathscr{D}(\tilde{\Lambda}^*)$, $\tilde{\Lambda}^* f \in L_0^{(2)}$ имеем

$$\tilde{\Lambda}^* f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\nu_n Q_n'(x)(f, P_n) - \nu_n P_n'(x)(f, Q_n)\}, \tag{165}$$

а формула (164) — разложение единицы для оператора Λ, т.е. для всякой $f \in \mathscr{D}(\Lambda)$ справедливо равенство

$$-\frac{1}{2}\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right)\Lambda f(s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty}\{\nu_n P_n(x)[f, Q_n] - \nu_n Q_n(x)[f, P_n]\}.$$

Замечание 1. В отличие от функции Q_n (160), функции $Q_n^{(j)}$ (98) не являются решениями уравнений (161). Точнее, имеем равенство

$$\Lambda Q_n^{(j)}(x) = \nu_n Q_n^{(j)}(x) + (-1)^j 4^{-1}\Delta(x)\dot{\chi}(\nu_n)(S_{2n+1}^{-1} + S_{2n+2}^{-1}), \qquad j = 1,\ 2,$$

из которого уравнение (161) получается в силу представления

$$Q_n(x) = -S_{2n+1}S_{2n+2}(Q_n^{(1)}(x) + Q_n^{(2)}(x)) \quad (\sigma' = 0).$$

Замечание 2. Из представления (110) следует, что при $0 < y < x$

$$R_0(x, y, \lambda) = 2X^{-1}(\lambda)\,G(x, \lambda)\,H(y, \lambda) - \\ - 2\prod_{j=1,2}(g_j(x, \lambda)\,c_j(y, \lambda) - c_j(x, \lambda)\,g_j(y, \lambda)).$$

Отсюда, так как $W(c_j, g_j) = 1$, следует, что функция R_0 является непрерывной вместе с первой производной по x при $0 < y < \pi$. Вторая производная по x при $x \neq y$ существует, непрерывна и

$$\left.\frac{\partial^2 R(x, y, \lambda)}{\partial x^2}\right|_{y=x+0} - \left.\frac{\partial^2 R(x, y, \lambda)}{\partial x^2}\right|_{y=x-0} = 4.$$

На основе этих требований в работе [36] была получена функция Грина для системы (144) на всей оси с произвольными потенциалами $r_j(x) \in L_{\mathrm{loc}}$. Сходная [36] формула была предложена ранее в [51]. Наличие граничных условий несколько усложняет формулировку задачи о разложении по произведениям решений двух задач Штурма — Лиувилля в виде спектральной задачи для Λ-оператора, что видно, например, из построений работы [52].

5. О ГАМИЛЬТОНОВОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КдФ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В этом разделе, исходя из полученных в разд. 4 симплектических разложений и связанной с ними спектральной теорией оператора, построим для уравнения КдФ каноническую замену переменных, которая соответствует известной работе Флашки и Маклафлина [26]. Вместе с этим покажем, как исходя из этих разложений получаются уравнения, предложенные Трубовитцем в [28], для решения периодической обратной задачи Штурма — Лиувилля. Не оговаривая этого особо, всюду в дальнейшем пользуемся обозначениями разд. 3,4 в предположении, что $r_1(x) = r_2(x) = r(x)$.

Введем функции

$$\widetilde{P}_n(x) = \delta_n H(x, \nu_n) = \gamma_n G(x, \nu_n), \quad \widetilde{Q}_n(x) = \delta_n \dot{H}(x, \nu_m) - \gamma_n \dot{G}(x, \nu_n). \tag{166}$$

Так как $\widetilde{P}_n(x)\widetilde{Q}_n(y) = P_n(x)Q_n(y)$, где P_n и Q_n определяются формулами (160), то формулу разложения (163) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\widetilde{Q}'_n(x)(f, \widetilde{P}_n) - \widetilde{P}'_n(x)(f, \widetilde{Q}_n)\}, \quad f \in L_2^{(0)}, \tag{167}$$

а равенства (162) дают

$$[\widetilde{P}_n, \widetilde{Q}_m] = \delta_{nm}, \quad [\widetilde{P}_n, \widetilde{P}_m] = [\widetilde{Q}_n, \widetilde{Q}_m] = 0, \quad n, m \geqslant 1. \tag{168}$$

Лемма 5.1. В любой точке $r \in L_2$ собственные числа $\nu_n(r)$ и нормировочные числа $\gamma_n(r)$, $\delta_n(r)$ (94) и $f_n(r)$ (110) дифференцируемы, т.е. если $f \in L_2$, то существуют производные

$$\frac{d}{d\varepsilon}\nu_n(r+\varepsilon f)|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial \nu_n}{\partial r}, f\right), \quad \frac{\partial \nu_n}{\partial r} = \widetilde{P}_n(x), \tag{169}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\gamma_n(r+\varepsilon f)|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial \gamma_n}{\partial r}, f\right), \quad \frac{\partial \gamma_n}{\partial r} = \frac{1}{\dot{\chi}^2(\nu_n)}\left\{\dot{H}_n(x) - \frac{\ddot{\chi}(\nu_n)}{\dot{\chi}(\nu_n)} H_n(x)\right\}, \tag{170}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\delta_n(r+\varepsilon f)|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial \delta_n}{\partial r}, f\right), \quad \frac{\partial \delta_n}{\partial r} = \frac{1}{\dot{\chi}^2(\nu_n)}\left\{\dot{G}_n(x) - \frac{\ddot{\chi}(\nu_n)}{\dot{\chi}(\nu_n)} G_n(x)\right\}, \tag{171}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}f_n(r+\varepsilon f)|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial f_n}{\partial r}, f\right), \quad \frac{\partial f_n}{\partial r} = \widetilde{Q}_n(x). \tag{172}$$

Доказательство равенств (169) хорошо известно (см., например, [23]). Так как $S_n^2(r) = \delta_n(r)\gamma_n^{-1}(r)$, формула (172) следует непосредственно из (170) и (171), которые выводятся аналогично. Докажем

(171). Из интегрального уравнения

$$g(r+h;\,x,\lambda) \equiv g(x,\lambda) + \int\limits_0^x \{g(x,\lambda)\,c(y,\lambda) - c(x,\lambda)\,g(y,\lambda)\}\,h(y)\,g(r+h;\,y,\lambda)\,dy,$$

где g и c — решения уравнения $y'' + (\lambda - r(x))\,y = 0$, $g(r+h;\,x,\lambda)$ решение уравнения $y'' + (\lambda - r(x))\,y = h(x)\,y$, получаем, что функционалы $g'(\pi,\lambda) = g'(r;\,\pi,\lambda)$, $\dot g(\pi,\lambda) = \dot g(r;\,\pi,\lambda) : L_2 \to \mathbb{C}$ дифференцируемы в любой точке $r \in L_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\partial g'(\pi,\lambda)/\partial r(x) = g'(\pi,\lambda)\,c(x,\lambda)\,g(x,\lambda) - c'(\pi,\lambda)\,g^2(x,\lambda),$$

$$\partial \dot g(\pi,\lambda)/\partial r(x) = \dot g(\pi,\lambda)\,c(x,\lambda)\,g(x,\lambda) - \dot c(\pi,\lambda)\,g^2(x,\lambda) - 2c(\pi,\lambda)\,g(x,\lambda)\,\dot g(x,\lambda) + g(\pi,\lambda)\,[\dot c(x,\lambda)\,g(x,\lambda) + c(x,\lambda)\,\dot g(x,\lambda)]. \tag{173}$$

Отсюда следует, с учетом представления (94) и равенства (2.2), что $\delta_n(r) : L_2 \to \mathbb{R}$ есть дифференцируемый функционал, причем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,\delta_n(r+\varepsilon f)\,|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\,\frac{g'(r+\varepsilon f;\;\pi,\;\nu_m(r+\varepsilon f))}{\dot g(r+\varepsilon f;\;\pi,\;\nu_m(r+\varepsilon f))}\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \dot g^{-1}(\pi,\nu_m)\left(\frac{\partial \varphi'(\pi,\nu_m)}{\partial r},\,f\right) - g'(\pi,\nu_m)\,\dot g^{-1}(\pi,\nu_m)\left(\frac{\partial \dot g(\pi,\nu_n)}{\partial r},\,f\right) + \{\dot g'(\pi,\nu_n)\,\dot g^{-1}(\pi,\nu_n) - g'(\pi,\nu_n)\,\ddot g(\pi,\nu_n)\,\dot g^{-1}(\pi,\nu_n)\}\left(\frac{\partial \nu_n}{\partial r},\,f\right).$$

Теперь для того чтобы получить формулу (2.4), следует в правой части этого равенства подставить уже найденные выражения для $\partial\nu_n/\partial r$, $\partial g'(\pi,\nu_n)/\partial r$ и $\partial\dot g(\pi,\nu_n)/\partial r$ с $g(\pi,\nu_n) = 0$ и далее воспользоваться равенствами $g'(\pi,\nu_n) = c^{-1}(\pi,\nu_n)$, $\dot g(\pi,\nu_n)\,c(\pi,\nu_n) + g'(\pi,\nu_n)\,\dot c(\pi,\nu_n) - \dot g(\pi,\nu_n)\,c'(\pi,\nu_n) = 0$, которые следуют из $W(c,g) = 1$, $g(\pi,\nu_n) = 0$.

Замечание 1. Формулу (172) можно получить и непосредственно в силу (169) и (173). В [23, 26] было показано, что

$$\frac{\partial f_n}{\partial r}(x) = -2g(x,\nu_n)\,c(x,\nu_n) + 2\dot g^{-1}(\pi,\nu_n)\,\dot c(\pi,\nu_n)\,g^2(x,\nu_n).$$

Отсюда получаем (172), заметив, что в силу равенства (110) имеем при $\lambda = \nu_n$:

$$\dot h(x,\nu_n) - c(\pi,\nu_n)\,\dot g(x,\nu_n) = \dot c(\pi,\nu_n)\,g(x,\nu_n) - \dot g(\pi,\nu_n)\,c(x,\nu_n),$$

при этом $\int\limits_0^\pi g(x,\nu_n)\,c(x,\nu_n)\,dx = \dot g^{-1}(\pi,\nu_n)\,\dot c(\pi,\nu_n)$

и, следовательно, $\int\limits_0^\pi \partial f_n/\partial r(x)\,dx = 0.$

Замечание 2. Из формулы (167), учитывая равенства $\int_0^\pi \tilde{P}_n(x)\,dx = 1$, $\int_0^\pi \tilde{Q}_n(x)\,dx = 0$, следует сразу разложение

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(y)\,dy + \sum_{n=1}^\infty \tilde{Q}'_n(x)\left(f, \tilde{P}_n - \frac{1}{\pi}\right) - \tilde{P}'_n(x)(f, \tilde{Q}_n), \quad (174)$$

которое имеет место для любой $f \in L_2$, так как функция $f^{(0)} = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx \in L_2^{(0)}$. Как видно из асимптотики (92), функции $\tilde{P}_n - \frac{1}{\pi}$ являются градиентами функционалов $\tilde{\nu}_n(r) = \nu_n(r) - n^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi r(x)\,dx$, что отмечалось в [23]. Формула (174) была получена иным путем в [23] и играет вместе с соотношениями (168) основную роль в предложенной там же схеме решения ОЗ, которая аналогична построениям разд. 2.

Рассмотрим теперь однопараметрическое семейство краевых задач

$$y'' + (\lambda - r(x, t))y = 0, \; y(0) = y(\pi) = 0, \; t \in \mathbb{R}. \quad (175)$$

Из соотношений (169), (172) и (120) получаем, в силу формулы разложения (167), следующую важную теорему.

Теорема 5.1. Пусть в уравнении (175) $r(x, \cdot) \in \tilde{C}_1(0, \pi)$ (108) и производная $r_t(x, \cdot) \in L_2^{(0)}$. Тогда справедливы следующие разложения:

$$r_t(x, t) = \sum_{n=1}^\infty \{\lambda_{n,t}\tilde{Q}'_n(x, t) - f_{n,t}\tilde{P}'_n(x, t)\}, \quad (176)$$

$$r_x(x, t) = \sum_{n=1}^\infty \left\{\frac{S_n^{-1}(t) - S_n(t)}{\dot{\chi}(\nu_n)}\tilde{Q}'_n(x, t) - 2\frac{\dot{\Delta}(\nu_n)}{\dot{\chi}(\nu_n)}\tilde{P}'_n(x, t)\right\}, \quad (177)$$

где функции $\tilde{P}(x, t)$, $\tilde{Q}_n(x, t)$ построены по формулам (166) с $r = r(x, t)$, $\nu_n(t)$ и $f_n(t)$ — отвечающие краевой задаче (175) величины (118), $\nu_{n,t} = (r_t, \tilde{P}_n)$, $f_{n,t} = (r_t, \tilde{Q}_n)$, $\Delta(\lambda)$ — дискриминант Хилла (111).

Рассмотрим задачу Коши

$$r_t(x, t) - r_x(x, t) = 0, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi, \; t \in \mathbb{R}, \; r(x, 0) = \tilde{C}_1. \quad (178)$$

Из теоремы 5.1 получаем

Следствие 1. Потенциал $r(x, t)$ удовлетворяет уравнению (178) тогда и только тогда, когда

$$\frac{d}{dt}\nu_n(t) = \frac{S_n^{-1}(t) - S_n(t)}{\dot{\chi}(\nu_n(t))}, \quad \frac{d}{dt}f_n(t) = \frac{2\dot{\Delta}(\nu_n(t))}{\dot{\chi}(\nu_n(t))}. \quad (179)$$

Решением задачи (178), очевидно, является функция $r(x+t)$, и, следовательно, уравнения (179) дают эволюцию по t спектральных данных $\nu_n(t)$, $f_n(t)$, $n \geqslant 1$, краевой задачи

$$y'' + (\lambda - r(x+t))y = 0, \; y(0) = y(\pi) = 0. \tag{180}$$

Учтем теперь, что дискриминант Хилла $\Delta(\lambda)$ уравнения (180) не зависит от t. Отсюда вытекает, что спектры периодической и апериодической задач (106) и (107) не зависят от t; при этом выполняются неравенства $\mu_{2n-1} \leqslant \nu_n(t) \leqslant \mu_{2n}$, $n \geqslant 1$. Из (116) и представления (95) следует, что первое из уравнений в (179) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\nu_n(t) = \sqrt{\Delta^2(\nu_n)-4}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\prod_{l\geqslant 1} l^{-2}(\nu_l-\lambda)\,\big|_{\lambda=\nu_n}\right)^{-1}. \tag{181}$$

Второе уравнение можно решить в предположении, что известно решение системы (181). Решение дается формулой

$$\sqrt{\Delta^2(\nu_n(t))-4} = 2(-1)^{n+1}\exp\left(-\frac{1}{2}f_n(t)\right) - \Delta(\nu_n(t)),$$

которую можно рассматривать как определяющую знак перед радикалом.

Замечание 1. В связи с решением обратной задачи для периодических потенциалов система уравнений (181), где знак перед $\sqrt{\Delta^2(\nu_n)-4}$ определяется описанным выше образом, была получена иным способом в работе [28]. Там же было показано, что решение единственно и дается формулой

$$r(t) = \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\mu_{2n-1} + \mu_{2n} - 2\nu_n(t), \tag{182}$$

которое является известным тождеством следов.

Замечание 2. В силу представления

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\mu_0-\lambda)\prod_{n\geqslant 1} n^{-4}(\mu_{2n-1}-\lambda)(\mu_{2n}-\lambda)$$

в случае конечно-зонных потенциалов система (181) сводится к уравнениям

$$\frac{d\nu_n}{dt} = 2\sqrt{R_N(\nu_n(t))}\left(\prod_{l\neq n}(\nu_l(t)-\nu_n(t))\right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

где

$$R_N(\lambda) = (\mu_0-\lambda)\prod_{n\geqslant 1}(\mu_{2n-1}-\lambda)(\mu_{2n}-\lambda)$$

впервые получены Дубровиным [27].

Рассмотрим периодическую задачу Коши для уравнения КдФ:

$$\begin{gathered} r_t = 6rr_x - r_{xxx}, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ r(0,t) = r(\pi,t), \; r(x,0) \in \widetilde{C}_\infty \end{gathered} \tag{183}$$

и вместе с ней задачу Штурма — Лиувилля (175). Известно [1], что если ввести в $\widetilde{C}_\infty$ скобку Пуассона

$$\{F, G\} = \left[\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial r}\right] = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, D\frac{\partial G}{\partial r}\right), \tag{184}$$

где F, G — дифференцируемые функционалы от r, r_x и т. д., то (183) имеет гамильтонову структуру

$$z_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial r}, \quad H(r) = \int\limits_0^\pi \left(r^3(x) - \frac{1}{2}r_x^2(x)\right)dx. \tag{185}$$

Введем теперь, следуя [26], новые переменные $\nu_n(t)$, $f_n(t)$, которые, как отмечалось в следствии 1 теоремы 3.3, однозначно определяют $r(x, t)$ в (183). Относительно скобки Пуассона (184) ν_n и f_n являются каноническими переменными [53], что вытекает из равенств (168), (169) и (172). Уравнение (185) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\nu_n = \frac{\partial H}{\partial f_n}, \quad \frac{d}{dt}f_n = -\frac{\partial H}{\partial \nu_n}.$$

Следующая теорема дает явный вид правых частей этих уравнений.

Теорема 5.2. Для того чтобы функция $r(x, t)$ являлась решением задачи Коши (183), необходимо и достаточно, чтобы $\nu_n(t)$ и $f_n(t)$ удовлетворяли систему уравнений

$$\frac{d}{dt}\nu_n = \frac{2\sqrt{\Delta^2(\nu_n(t)) - 4}}{\dot{\chi}(\nu_n(t))}\left\{2\nu_n(t) + \mu_0 + \sum_{l=1}^\infty (\mu_{2l-1} + \mu_{2l} - 2\nu_l(t))\right\}, \tag{186}$$

$$\frac{d}{dt}f_n = \frac{4\dot{\Delta}(\nu_n(t))}{\dot{\chi}(\nu_n(t))}\left\{2\nu_n(t) + \mu_0 + \sum_{l=1}^\infty (\mu_{2l-1} + \mu_{2l} - 2\nu_l(t))\right\}, \tag{187}$$

где μ_n — нули уравнений $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$, которые определяются по $r(x, 0)$ и являются первыми интегралами уравнения КдФ.

Доказательство. Обозначим $\widetilde{L}^*$ оператор $\widetilde{\Lambda}^*$ при $r_1 = r_2 = r(x, t)$:

$$\widetilde{L}^* = \frac{1}{4}\left\{D^2 + 4r(x, t) + r_x(x, t)\left(\int\limits_0^x - \int\limits_x^\pi\right)dy\right\}. \tag{188}$$

Применяя оператор $4\widetilde{L}^*$ к обеим сторонам (177), где $r_x = r_x(x, t)$, $S_n^{-1} - S_n = \sqrt{\Delta^2(\nu_n) - 4}$, вследствие спектрального разложения (165) получаем

$$\begin{aligned} 4\widetilde{L}^* r_x &= 6r(x, t)\, r_x(x, t) - r_{xxx}(x, t) - \\ &\quad - 2r_x(x, t)\, r(0, t) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \left\{4\nu_n(t)\frac{\sqrt{\Delta^2(\nu_n(t)) - 4}}{\dot{\chi}(\nu_n(t))}\widetilde{Q}_n'(x, t) - 8\nu_n(t)\frac{\dot{\Delta}(\nu_n(t))}{\dot{\chi}(\nu_n(t))}\widetilde{P}_n'(x, t)\right\}.$$

Отсюда, учитывая равенства (176), (177), находим, что

$$r_t - 6rr_x + r_{xxx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\nu_{n,t} - \frac{\sqrt{\Delta^2(\nu_n) - 4}}{\dot{\chi}(\nu_n)} (4\nu_n - 2r(0, t)) \right] Q'_n(x) - \right.$$

$$\left. - \left[f_{n,t} - 2 \frac{\dot{\Delta}(\nu_n)}{\dot{\chi}(\nu_n)} [4\nu_n - 2r(0, t)] \right] P'_n(x) \right\}.$$

Теперь для того, чтобы получить уравнения (186), (187), следует воспользоваться тождеством следов (182) с $r = r(0, t)$, где нужно учесть известный факт, что для задачи (183) $\mu_n(t) = \mu_n(0)$.

Замечание 1. Уравнения (187), как указывалось выше, определяют знак перед радикалом в (186). В случае N-зонного потенциала $r(x, 0)$ уравнение (186) сводится к конечной системе

$$\frac{d\nu_n}{dt} = \frac{4\sqrt{R_N(\nu_n(t))}}{\prod\limits_{l \neq n} (\nu_l(t) - \nu_n(t))} \left\{ \mu_0 + \sum_{l=1,\, l \neq n}^{N} (\mu_{2l-1} + \mu_{2l} - 2\nu_l(t)) \right\}, \quad (189)$$

в которой полином $R_N(\lambda)$ определяется как в (181). Хорошо известно, что (189), вместе с системой (181) ($t \to x$), решается в явном виде посредством θ-функции Римана [46]. Решая совместно системы (189) и (181) ($t \to x$), получаем, как показано в [55, 56], N-зонное решение КдФ в виде

$$r(x, t) = \mu_0 + \sum_{l=1}^{N} (\mu_{2l-1} + \mu_{2l} - 2\nu_l(x, t)).$$

Замечание 2. Изложенная выше схема построения гамильтоновых уравнений в переменных ν_n, f_n легко обобщается на высшие уравнения КдФ. Так, например, для следующего за $H(r)$ (185) гамильтониана

$$H_2(r) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{ r_{xx}^2(x) - 5r^2(x) r_{xx}(x) + 5r^4(x) \} dx$$

имеем

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial H_2}{\partial r} = 16\tilde{L}^{*2} r_x(x) + 8r(0) \tilde{L}^* r_x(x) + 8r_x(x) (-r_{xx}(0) + 3r^2(0)).$$

Отсюда, выражая $r(0, t)$, $-r_{xx}(0, t) + 3r^2(0, t)$ при помощи известных тождеств следов (см., например, [54]), выводим, как в доказательстве теоремы 5.2, соответствующую систему уравнений, сходную с системой (186), (187), явный вид которой из-за громоздкости опускаем. Очевидно, что система (178) также является гамильтоновой системой с $H_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2(x)\, dx$. Дальнейшее содержательное изучение свойств гамильтоновых систем типа КдФ в периодическом случае требует привлечения методов алгебраической геометрии [54], изложение которых выходит за пределы этого обзора. Отметим, что представления вида (119) для конечно-зонных потенциалов представляют определенный интерес в связи с конечномерными динамическими системами [56].

6. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ Λ-ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Теория Λ-операторов, связанных с системой Дирака (Захарова — Шабата) на всей оси в классе убывающих при $|x| \to \infty$ потенциалов, сыграла весьма существенную роль в развитии МОЗ [8]. При обобщении этой теории на случай конечного интервала, имея в виду приложения к периодическим задачам для уравнений типа нелинейного Шредингера, возникают определенные сложности. Отметим, что если рассматривать только задачу о построении формул изложения по произведениям решений двух регулярных операторов Дирака, то аналогия к построениям для задач Штурма — Лиувилля почти полностью сохраняется [17, 57]. Некоторые различия выявляются при построении Λ-операторов, для которых эти разложения являются разложениями единицы [58, 59].

Рассмотрим две самосопряженные краевые задачи, определяемые системой Дирака

$$\left(B\frac{d}{dx}+Q_j(x)\right)y^{(j)}=\lambda y^{(j)},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad j=1,\,2, \tag{190}$$

и граничными условиями

$$y_1^{(j)}(0,\lambda)=y_1^{(j)}(\pi,\lambda)=0. \tag{191}$$

Здесь

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad Q_j=\begin{pmatrix}p_j(x)&q_j(x)\\q_j(x)&-p_j(x)\end{pmatrix},\quad y^{(j)}=\begin{pmatrix}y_1^{(j)}\\y_2^{(j)}\end{pmatrix},$$

где вещественные функции $p_j(x),\ q_j(x)\in C_1[0,\pi]$, если $Q_1=Q_2$, индекс j опускаем. Обозначим $\varphi^{(j)}(x,\lambda)$ и $\psi^{(j)}(x,\lambda)$ решения системы (190), для которых $\varphi^{(j)}(0)=\psi^{j}(\pi)=(0,1)^T$, T — транспонирование. Пусть

$$\omega_j(\lambda)=W(\varphi^{(j)},\psi^{(j)})=\varphi_1^{j}(\pi,\lambda)=-\psi_1^{(j)}(0,\lambda) \tag{192}$$

— характеристические функции краевых задач (190), (191), вронскиан

$$W(f,g)=f^TBg=f_1g_2-f_2g_1,\ f=(f_1,f_2),\ g=(g_1,g_2).$$

Хорошо известно (см., например [29]), что спектры этих задач состоят из простых собственных чисел

$$\sigma_j=\{\lambda_n^{(j)}=\lambda_{2n+j}\,|\,\omega_j(\lambda_{2n+j})=0\}_{n=-\infty}^{\infty},\quad \lambda_n^{(j)}\underset{n\to\pm\infty}{=}n+O(1),$$

где $\dot{\omega}_j(\lambda_{2n+j}) \neq 0$; $' = \partial/\partial\lambda$. Собственные функции

$$\varphi^{(j)}(x, \lambda_n^{(j)}) = C_{2n+j}\psi^{(j)}(x, \lambda_n^{(j)}), \quad C_{2n+j} = \varphi_2^{(j)}(\pi, \lambda_n^{(j)}) = \psi_2^{(j)-1}(0, \lambda_n^{(j)}) \tag{193}$$

и их нормы

$$\alpha_{2n+j} = \| \varphi_{2n+j} \|_{L_2}^{-2} = -C_{2n+j}^{-1}\dot{\omega}_j^{-1}(\lambda_{2n+j}),$$

$$\beta_{2n+j} = \| \psi_{2n+j} \|_{L_2}^{-2} = -C_{2n+j}\dot{\omega}_j^{-1}(\lambda_{2n+j}),$$

где $(f, g) = \int\limits_0^\infty (f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x))\, dx$ — скалярное произведение в пространстве $L_2^{(2)}$ вектор-функций $f = (f_1, f_2)$, $\| f \| = (f, f)^{1/2}$. Введем еще кососкалярное произведение

$$[f, g] = (f, Bg) = -[g, f]. \tag{194}$$

Определим, следуя [57], произведение $Y(x, \lambda)$ решений $y^{(1)}(x, \lambda)$ и $y^{(2)}(x, \lambda)$ уравнений (190) по формуле

$$Y(x, \lambda) = y^{(1)} \circ y^{(2)} = (y_1^{(1)}y_1^{(2)} - y_2^{(1)}y_2^{(2)}, y_1^{(1)}y_2^{(2)} + y_2^{(1)}y_1^{(2)})^T. \tag{195}$$

Основное место в наших построениях играют следующие операторы:

$$\Lambda_{0(\pi)} = \left(L_{0(\pi)} = \frac{1}{2} B \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} U(x) \int\limits_{0(\pi)}^{x} (BU(y))^T dy, \ -\frac{1}{2} v^{(+)}(x)\right), \tag{196}$$

где

$$U(x) = \begin{pmatrix} -q^{(-)} & p^{(+)} \\ p^{(-)} & q^{(+)} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} p^{(\pm)} = p_2 \pm p_1 \\ q^{(\pm)} = q_2 \pm q_1 \end{matrix} \quad v^{(+)} = \begin{pmatrix} p^{(+)} \\ q^{(+)} \end{pmatrix},$$

которые действуют по формулам

$$\Lambda_{0(\pi)} f^{(0(\pi))}(x) = L_{0(\pi)} f(x) - \frac{1}{2} v^{(+)}(x) f_1(0(\pi)),$$

где

$$f^{(0(\pi))} = (f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T, \ f_1(0(\pi)))^T. \tag{197}$$

Область определения

$$\mathscr{D}(\Lambda_0) = \{f \in C_1^{(2)} \mid f_1(\pi) - f_1(0) - [v^{(+)}, f] = 0, \ f_2(0) = 0\},$$

где $C_1^{(2)} = C_1^{(2)}[0, \pi]$ — пространство непрерывно дифференцируемых вектор-функций $f(x)$. Так как для любых $f, g \in C_1^{(2)}$ имеет место тождество

$$[\Lambda_0 f^{(0)}, \ g] - [f, \ \Lambda_\pi f^{(\pi)}] = \frac{1}{2}\{f_1(0)(g_1(\pi) - g_1(0) - [v^{(+)}, \ g]) +$$
$$+ g_1(\pi)(f_1(\pi) - f_1(0) - [v^{(+)}, \ f]) + f_2(\pi) g_2(\pi) - f_2(0) g_2(0)\},$$

то справедлива следующая

Лемма 6.1. Оператор Λ_π с областью определения

$$\mathscr{D}(\Lambda_\pi)=\{f\in C_1^{(2)} \mid f_1(\pi)-f_1(0)-[v^{(+)},\ f]=0,\ f_2(\pi)=0\}$$

является сопряженным оператору Λ_0 относительно кососкалярного произведения (194), т. е.

$$[\Lambda_0 f^{(0)},\ g]=[f,\ \Lambda_\pi f^{(\pi)}],\quad f\in\mathscr{D}(\Lambda_0),\ g\in\mathscr{D}(\Lambda_\pi).$$

Введем наряду с $Y(x,\lambda)$ произведение

$$\hat{Y}(x,\ \lambda)=y^{(1)}*y^{(2)}=(y_2^{(1)}y_1^{(2)}-y_1^{(1)}y_2^{(2)},\ y_1^{(1)}y_1^{(2)}+y_2^{(1)}y_2^{(2)}).$$

Связь между $Y(x,\lambda)$ и $\hat{Y}(x,\lambda)$ дается тождеством

$$\frac{d}{dx}\hat{Y}(x,\ \lambda)=(BU(x))^T\,Y(x,\ \lambda), \tag{198}$$

при этом

$$B\frac{d}{dx}Y(x,\ \lambda)+U(x)\,\hat{Y}(x,\ \lambda)=2\lambda Y(x,\ \lambda). \tag{199}$$

Отсюда следует, что $Y(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$B\frac{d}{dx}Y(x,\ \lambda)+U(x)\int\limits_{x_0}^{x}(BU(y))^T-Y(y,\ \lambda)\,dy+U(x)\,\hat{Y}(x_0,\ \lambda)=$$
$$=2\lambda Y(x,\ \lambda).$$

Полагая здесь $x_0=0,\pi$, получаем с учетом равенств $\Phi(0,\lambda)=\Psi(\pi,\lambda)=(-1,0)$, что имеет место

Теорема 6.1. Построенные по формулам (197) вектор-функции $\Phi^{(0)}(x,\lambda)$ и $\Psi^{(\pi)}(x,\lambda)$, где

$$\Phi(x,\lambda)=\varphi^{(1)}\circ\varphi^{(2)},\ \Psi(x,\lambda)=\psi^{(1)}\circ\psi^{(2)}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\Lambda_0\Phi^0(x,\ \lambda)\equiv L_0\Phi(x,\ \lambda)+\frac{1}{2}v^{(+)}(x)=\lambda\Phi(x,\ \lambda), \tag{200}$$

$$\Lambda_\pi\Psi^{(\pi)}(x,\ \lambda)\equiv L_\pi\Psi(x,\ \lambda)+\frac{1}{2}v^{(+)}(x)=\lambda\Psi(x,\ \lambda). \tag{201}$$

При этом

$$\Phi_2(0,\lambda)=0,\ \Phi_1(\pi,\lambda)+1-[v^{(+)},\ \Phi(\lambda)]=2\Omega(\lambda), \tag{202}$$

$$\Psi_2(\pi,\lambda)=0,\ 1+\Psi_1(0,\lambda)+[v^{(+)},\ \Psi(\lambda)]=2\Omega(\lambda), \tag{203}$$

где $\Omega(\lambda)=\omega_1(\lambda)\,\omega_2(\lambda)$. [Вторые равенства в (202) и (203) вытекают из (198) в силу (192).]

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\Lambda_0 Y^{(0)}(x,\lambda)=\lambda Y(x,\lambda),\ Y_2(0)=0,\ Y_1(\pi)-Y_1(0)-[v^{(+)},Y]=0. \tag{204}$$

Введем матрицу

$$G_0(x, y, \lambda) = \frac{1}{\Omega(\lambda)} \begin{cases} \Phi(x, \lambda)\widetilde{\Psi}(y, \lambda), & x < y < \pi, \\ \sum\limits_{j=1,\,2} S^{(j)}(x, \lambda)\widetilde{S}^{(3-j)}(y, \lambda) - \Psi(x, \lambda)\widetilde{\Phi}(y, \lambda), & \\ & 0 < y < x, \end{cases}$$

где $S^{(j)} = \psi^{(j)} \circ \varphi^{(3-j)}$, $\widetilde{Y} = (BY)^T$. Справедлива

Теорема 6.2. Матрица G_0 является ядром резольвенты краевой задачи (204). Точнее, при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{j=1,2} \sigma_j = \rho(\Lambda_0)$; вектор-функция

$$(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} f(x) = R_0(f; x, \lambda) = \int\limits_0^\pi G_0(x, y, \lambda) f(y)\,dy, \quad \text{где } I =$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнениям

$$(\Lambda_0 - \lambda I) R_0(f; x, \lambda) = \\ = f(x), \; R_0(f; x, \lambda) \in \mathscr{D}(\Lambda_0) \tag{205}$$

и

$$R_0((\Lambda_0 - \lambda I) f; x, \lambda) = f(x), \; f \in \mathscr{D}(\Lambda_0).$$

Доказательство. Положим $H(x) = \Omega(\lambda) R_0(f; x, \lambda)$. Тогда уравнение (205) имеет следующий вид:

$$B\frac{d}{dx}H(x) + U(x)\int\limits_0^x (BU(s))^T H(s)\,ds - v^{(+)}(x) H_1(0) - 2\lambda H(x) = \\ = 2\Omega(\lambda) f(x). \tag{206}$$

Из соотношения (199), с учетом (192), вытекает

$$B\frac{d}{dx}H(x) = 2\Omega(\lambda) f(x) + 2\lambda H(x) - U(x)\left\{\hat{\Phi}(x)\int\limits_x^\pi \widetilde{\Psi}(y) f(y)\,dy + \right. \\ \left. + \sum_{j=1,\,2} \hat{S}^{(j)}(x)\int\limits_0^x \widetilde{S}^{(3-j)}(y) f(y)\,dy - \hat{\Psi}(x)\int\limits_0^x \widetilde{\Phi}(y) f(y)\,dy\right\}. \tag{207}$$

Далее, в силу (198)

$$U(x)\int\limits_0^x (BU(y))^T H(y)\,dy = -U(x)\hat{\Phi}(0)\int\limits_0^\pi \widetilde{\Psi}(y) f(y)\,dy + \\ + \int\limits_0^x \left\{\hat{\Phi}(y)\widetilde{\Psi}(y) - \sum_{j=1,\,2} \hat{S}^{(j)}(y)\widetilde{S}^{(3-j)}(y) + \hat{\Psi}(y)\widetilde{\Phi}(y)\right\} f(y)\,dy + U(x)\{\ldots\},$$

где в скобках имеем то же самое выражение, что и в (207). Так как подынтегральная матрица во втором слагаемом в этом равенстве равна нулю, то для того, чтобы получить (206), остается заметить, что $U(x)\hat{\Phi}(0) = v^{(+)}(x)$. Аналогично проверяются и остальные утверждения теоремы.

Следствие. Матрица $G_\pi(x, y, \lambda) = -G_0(y, x, \lambda)$ определяет ядро резольвенты, сопряженной к (204) краевой задачи

$$\Lambda_\pi Y^{(\pi)}(x, \lambda) = \lambda Y(x, \lambda),\quad Y_2(\pi) = 0,$$
$$Y_1(\pi) - Y_1(0) - [v^{(+)}, Y] = 0.$$

Замечание. Утверждения леммы 6.1 и теорем 6.1—6.3 остаются справедливыми для любых, возможно, комплекснозначных $p_j(x)$, $q_j(x)$.

Покажем теперь, как, следуя схеме разд. 4, можно построить спектральные разложения для операторов Λ_0 и Λ_π. Пусть по спектрам σ_j определены множества $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma'' = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $\sigma' = \sigma\setminus\sigma''$.

Введем системы $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$, полагая при $\lambda_{2n+j} \in \sigma'$

$$U_{2n+j} = \dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+j})\,\Phi(x, \lambda_{2n+j}),\quad V_{2n+j} = \Psi(x, \lambda_{2n+j})$$

и при $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} = \lambda_n \in \sigma''$

$$U_{2n+1} = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda_{(n)})\,\Phi(x, \lambda_{(n)}),\quad U_{2n+2} = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda_{(n)})\,\dot{\Phi}(x, \lambda_{(n)}),$$
$$V_{2n+1} = \dot{\Psi}(x, \lambda_{(n)}) - \dddot{\Omega}(\lambda_{(n)})\,(3\ddot{\Omega}(\lambda_{(n)}))^{-1}\,\Psi(x, \lambda_{(n)}),\quad V_{2n+2} = \Psi(x, \lambda_{(n)})$$

С помощью вытекающего из уравнений (190) тождества

$$[Y(\lambda), Z(\mu)] = (\mu - \lambda)^{-1}\prod_{j=1,2} W(y^{(j)}(x, \lambda), z^{(j)}(x, \mu))\,\big|_{x=0}^{\pi} \qquad (208)$$

устанавливаются следующие соотношения биортогональности:

$$[V_n, U_m] = \delta_{nm},\quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Далее из уравнений (200) и (201) и равенств (202) и (203) следует

Лемма 6.2. Функции $U_n \in \mathscr{D}(\Lambda_0)$, $V_n \in \mathscr{D}(\Lambda_\pi)$. При этом если $\lambda_n \in \sigma'$, то

$$\Lambda_0 U_n^{(0)}(x) = \lambda_n U_n(x),\quad \Lambda_\pi V_n^{(\pi)}(x) = \lambda_n V_n(x),$$

а при $\lambda_{(n)} \in \sigma''$

$$\Lambda_0 U_{2n+1}^{(0)}(x) = \lambda_{(n)} U_{2n+1}(x),\quad \Lambda_0 U_{2n+2}^{(0)}(x) = \lambda_{(n)} U_{2n+2}(x) + U_{2n+1}(x),$$
$$\Lambda_\pi V_{2n+1}^{(\pi)}(x) = \lambda_{(n)} V_{2n+1}(x) + V_{2n+2}(x),\quad \Lambda_\pi V_{2n+2}^{(\pi)}(x) = \lambda_{(n)} V_{2n+2}(x).$$

Основной в этом разделе является

Теорема 6.2 (о спектральных разложениях операторов Λ_0 и Λ_π). I. Для всякой, возможно, комплекснозначной, функции $f \in L_2^{(2)}$ справедливы формулы разложения

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{n}-U_n(x)[f,V_n],\ f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}V_n(x)[f,U_n],\qquad (209)$$

где сходимость рядов имеет место в норме $L_2^{(2)}$ как предел при $N\to\infty$ частных сумм $S_\pi(N,f;x)=\sum_{n\in\Delta(N)}V_n(x)[f,U_n]$ и $S_0(N,f;x)=\sum_{n\in\Delta(N)}-U_n(x)[f,V_n]$, где $\Delta(N)=(-2N+1,-2N+2,\ldots,2N+2)$.

II. Для любой $f\in\mathscr{D}(\Lambda_0)$

$$\Lambda_0 f^{(0)}(x)=\sum_{\lambda_{2n+j}\in\sigma'}-\lambda_{2n+j}U_{2n+j}(x)[f,V_{2n+j}]-$$

$$-\sum_{\lambda_{(n)}\in\sigma''}\{\lambda_{(n)}U_{2n+1}(x)[f,V_{2n+1}]+(\lambda_{(n)}U_{2n+2}(x)+U_{2n+1}(x))[f_1V_{2n+2}]\}\qquad(210)$$

и для любой $f\in\mathscr{D}(\Lambda_\pi)$

$$\Lambda_\pi f^{(\pi)}(x)=\sum_{\lambda_{2n+j}\in\sigma'}\lambda_{2n+j}V_{2n+j}(x)[f,U_{2n+j}]+$$

$$+\sum_{\lambda_{(n)}\in\sigma''}\{\lambda_{(n)}V_{2n+2}(x)[f,U_{2n+2}]+(\lambda_{(n)}V_{2n+1}(x)+V_{2n+2}(x))[f,U_{2n+1}]\},$$

где ряды сходятся по норме $L_2^{(2)}$.

Доказательство формул разложения (209) вполне аналогично подробно изложенному в [57] и здесь наметим лишь его схему. Обозначим $c_N=\left(N+\frac{1}{2}\right)\exp(\mathrm{i}\varphi)$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, окружность в λ-плоскости и рассмотрим контурный интеграл

$$I_0(N,f;x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{c_N}\left\{\int_0^\pi G_0(x,y,\lambda)f(y)\,dy\right\}d\lambda.$$

По теореме о вычетах с учетом равенств (193) получаем, что при достаточно больших N выполнено $I_0(N,f;x)=S_0(N,f;x)$. Далее в силу известных асимптотик

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{pmatrix}+O\left(\frac{1}{\lambda}e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}\right),$$

$$\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin\lambda(x-\pi)\\ \cos\lambda(x-\pi)\end{pmatrix}+O\left(\frac{1}{\lambda}e^{|\operatorname{Im}\lambda|(\pi-x)}\right)$$

стандартным образом с помощью леммы Гордана находим, что $\lim\limits_{N\to\infty}|S_0(N,f;x)-s_0(N,f;x)|=0$ и $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}|S_0(N,f;x)-s_0(N,f;x)|<\infty$ равномерно по x в любом интервале $\Delta\subset(0,\pi)$.

Здесь $s_0(N, f; x)$ — сумма ряда, полученного путем подсчета, как и выше, интеграла $(2\pi i)^{-1} \oint \left\{ \int\limits_0^\pi \Gamma_0(x, y, \lambda) f(y)\, dy \right\} d\lambda$, где Γ_0 — матрица, которая получается из G_0 при $Q_j \equiv 0$. Явный вид этого ряда, который аналогичен рядам (44), (45), приведен в [57] и здесь опущен. Отметим лишь, что сходимость $\lim\limits_{N\to\infty} s_0(N, f; x) = f(x)$ устанавливается на основе критерия базисности [39]. Для того чтобы получить спектральное разложение (210), следует заменить в (209) функцию $f(x)$ на $\Lambda_0 f^{(0)}(x)$, $f \in \mathscr{D}(\Lambda_0)$ и учесть леммы 6.1 и 6.2.

В заключение этого раздела рассмотрим случай, когда $\Delta = \varnothing$, т.е. задачи (190), (191) изоспектральные. Введем оператор

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_0 + \Lambda_\pi) = \left(L = \frac{1}{2}(L_0 + L_\pi), \quad -\frac{1}{2} v^{(+)}(x) \right), \tag{211}$$

действующий на функциях

$$f^{(s)} = \left(f(x) = (f_1(x),\ f_2(x))^T,\ \frac{1}{2}(f_1(0) + f_1(\pi)) \right)^T$$

по формуле

$$\Lambda f^{(s)} = Lf(x) - \frac{1}{4}(f_1(0) + f_1(\pi))\, v^{(+)}(x).$$

Следуя доказательству леммы 6.1, легко устанавливается

Лемма 6.3. Оператор Λ с областью определения

$$\mathscr{D}(\Lambda) = \{ f \in C_1^{(2)} \mid f_2(0) = f_2(\pi),\ f_1(\pi) - \\ - f_1(0) - [v^{(+)}, f] = 0 \}$$

является самосопряженным относительно кососкалярного произведения (194), т. е.

$$[\Lambda f^{(s)}, g] = [f, \Lambda g^{(s)}],\quad f, g \in \mathscr{D}(\Lambda).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\Lambda Y^{(s)}(x, \lambda) = \lambda Y(x, \lambda),\ Y_2(0) = Y_2(\pi), \\ Y_1(\pi) - Y_1(0) - [v^{(+)}, Y] = 0. \tag{212}$$

Из теоремы 6.2 получается, следуя, например, доказательству теоремы 1.3, следующая

Теорема 6.3. Пусть по краевым задачам (190), (191), где $\sigma_1 = \sigma_2$, построены функции

$$P_n(x) = -\frac{C_{2n+1}}{\dot{\omega}(\lambda_n)} \Psi(x,\ \lambda_n),$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\dot{\omega}(\lambda_n)} \{ C_{2n+1}^{-1} \dot{\Phi}(x,\ \lambda_n) - C_{2n+2} \dot{\Psi}(x,\ \lambda_n) \},$$

где C_{2n+j} определяются равенствами (193). Тогда:
I. Функции P_n и Q_n являются собственными функциями краевой задачи (212), т.е.

$$\Lambda P_n^{(s)}(x) = \lambda_n P_n(x), \quad \Lambda Q_n^{(s)}(x) = \lambda_n Q_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

II. Система $\{P_n, Q_n\}$ является симплектическим базисом в пространстве L_2, т.е. для любой $f \in L_2^{(2)}$ имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n} \{Q_n(x)[f, P_n] - P_n(x)[f, Q_n]\}, \tag{213}$$

где

$$[Q_n, P_m] = \delta_{nm}, \ [P_n, P_m] = [Q_n, Q_m] = 0. \tag{214}$$

III. Для любой $f \in \mathscr{D}(\Lambda)$

$$\Lambda f^{(s)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n} \{\lambda_n Q_n(x)[f, P_n] - \lambda_n P_n(x)[f, Q_n]\},$$

т.е. разложение (213) является разложением единицы для оператора Λ.

Напомним теперь, что если в пространстве функционалов от периодической вектор-функции $v = (p, q) \in C_\infty^{(2)}(0, \pi)$ $(v(x) = v(x + \pi))$ ввести скобку Пуассона

$$\{F, G\} = \left[\frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial v}\right], \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q}\right),$$

где кососкалярное произведение [,] определяется формулой (194), то нелинейное уравнение Шредингера (в самосопряженном случае) можно записать в виде гамильтоновой системы

$$v_t = B\frac{\partial H_2}{\partial v}, \quad H_2 = \frac{1}{2}\int_0^\pi \{p_x^2 + q_x^2 + (p^2 + q^2)^2\}\,dx, \tag{215}$$

где симплектическая матрица B определяется как в (190). Изложенные выше результаты позволяют, следуя в основном конструкции разд. 5, ввести в качестве новых переменных спектральные величины $\lambda_n(v)$ и $f_n(v) = -\ln|C_n|$, однозначно определяющие потенциал $v(x)$ в операторе (190). Так как функции P_n и Q_n определяют градиенты $\partial\lambda_n/\partial v$ и $\partial f_n/\partial v$ соответственно, то из (214) следует, что эти переменные являются каноническими. Для того чтобы получить в явном виде систему (215) в новых переменных λ_n, f_n, следует учесть, что эту систему можно записать в виде
$Bv_t = 4\Lambda^2 v^{(s)}(x, t) + 4p(0, t)\Lambda v^{(s)}(x, t) + 2(q_x(0, t) + q^2(0, t) + q^2(0, t))v(x, t)$ и далее воспользоваться представлением

$$v(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{(C_n - C_n^{-1})\dot{\omega}^{-1}(\lambda_n) Q_n(x, t) + \dot{\Delta}(\lambda_n)\dot{\omega}^{-1}(\lambda_n) P_m(x, t)\}, \tag{216}$$

где $\qquad C_n - C_n^{-1} = \pm\sqrt{\Delta^2(\lambda_n)-4},\ \Delta(\lambda) = \psi_2(0,\ \lambda) + \varphi_2(\pi,\ \lambda)$

— дискриминант Хилла оператора (190), суммирование ведется по тем λ_n, которые находятся в невырожденных лакунах периодического спектра. По этой схеме можно получить и уравнения для обратной периодической задачи, исходя из гамильтониана $H_1 = \int\limits_0^\pi pq_x dx$, что приводит к задаче Коши

$$v_t = v_x \equiv B\partial H_1/\partial v,\ v(t,\ x) = v(t,\ x+\pi). \tag{217}$$

Отсюда, так как $\partial H_1/\partial v = 2\Lambda v^{(s)}(x,\ t) + 2p(0,\ t)\,v(x,\ t)$, получаем в силу (216) систему

$$\lambda_{n,\ t} = (2\lambda_n + 2p(0,\ t))\frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda_n)-4}}{2\dot{\omega}(\lambda_n)},$$

$$f_{n,\ t} = -(2\lambda_n + 2p(0,\ t))\,\dot{\Delta}(\lambda_n)/2\dot{\omega}(\lambda_n),$$

где $2p(0) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\{-2\lambda_n + \mu_n^- + \mu_n^+\},\ \Delta(\mu_n^\pm) = \pm 2.$

Сходные изложенным здесь уравнения для периодической задачи (217) были получены в [60].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gardner C., Green J., Kruskal M., Miura R.**//Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095—1098.
2. **Фаддеев Л. Д.**//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1964. Т. 74. С. 314—336.
3. **Lax P. D.**//Communs Pure and Appl. Math. 1968. Vol. 21. P. 467—490.
4. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.**//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. Вып. 1. С. 118—134.
5. **Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.**//Функц. анализ. 1971. Т. 5. Вып. 4. С. 18—27.
6. **Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newel A. C., Segur H.**//Studies in Appl. Math. 1974. Vol. 52. N. 4. P. 249—325.
7. **Калоджеро Ф., Дегасперис А.** Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
8. **Абловитц М., Сигур Х.** Солитоны и метод обратной задачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
9. **Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.** Гамильтонов подход в теорию солитонов. М.: Наука, 1986.
10. **Borg G.**//Acta math. 1946. Vol. 78, fasc. 1. P. 1—96.
11. **Гельфанд И. М., Левитан Б. М.**//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 4. С. 309—360.
12. **Марченко В. А.**//Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 5, С. 695—698.
13. **Визнер Я., Жидков Е. П., Лелек В. и др.**//ЭЧАЯ. 1978. Т. 9. Вып. 3. С. 710—768.
14. **Гаврин М. К.**//Изв. вузов. Сер. мат. 1958. № 5 (6). С. 18—31.
15. **Христов Е. Х.**//Год. СУ «Кл. Охридски». ФММ. Кн. 2. София. Механика, 1981. Т. 75. С. 197—229.
16. **Христов Е. Х.**//Дифф. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1548—1557.
17. **Кирчев К. П., Христов Е. Х.**//Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 3. С. 98.

18. **Hochstadt H.**//Communs Pure and Appl. Math. 1973. Vol. 26. P. 715—729.
19. **Левитан Б. М.**//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42. С. 200—211.
20. **Касчиев М., Христов Е. Х.** Сообщение ОИЯИ Р5-12915. Дубна, 1979.
21. **Христов Е. Х.** Нелинейные эволюционные уравнения для приближенного решения обратных задач спектрального анализа. Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Дубна, 1981.
22. **Isaakson E. L., Trubowitz E.**//Communs Pure Appl. Math. 1983. Vol. 36. P. 767—783.
23. **Pöschel J., Trubowitz E.** Inverse Spectral Theory//Communs Pure and Appl. Math. 1987. Vol. 130.
24. **Христов Е. Х.** Сообщение ОИЯИ Р5-84-503. Дубна, 1984.
25. **Христов Е. Х.** Сообщение ОИЯИ Р5-84-504. Дубна, 1984.
26. **Flashka H., McLaughlin D. W.**//Progr. Theoret. Phys. 1976. Vol. 55. N 2. P. 438—456.
27. **Дубровин Б. А.**//Функц. анализ. 1975. Т. 9. № 3. С. 41—51.
28. **Trubowitz E.**//Communs Pure and Appl. Math. 1977. Vol. 30. P. 321—337.
29. **Левитан Б. М., Саргсян И. С.** Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
30. **Титчмарш Э. Ч.** Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1.: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
31. **Левитан Б. М.** Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
32. **Марченко В. А.** Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев: Наукова думка, 1972.
33. **Кричевер И. М.**//Докл. АН СССР. 1983. Т. 260, №. 6. С. 1312—1317.
34. **Sacks R. L.**//SIAM J. Appl. Math. 1983. Vol. 14, N 4. P. 47—58.
35. **Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К.**//ТМФ. 1987. Т. 72, № 3. С. 323—339.
36. **Левитан Б М.**//Мат. сборник. 1987. Т. 132 (174). Вып. 1. С. 73—103.
37. **Кричевер И. М.**//УМН. 1989. Т. 44. Вып. 2 (266). С. 121—184.
38. **Дубровин Б. А., Новиков С. П.**//УМН. 1989. Т. 44. Вып. 6 (270). С. 29.
39. **Ильин В. А.**//Докл. АН СССР. 1976. Т. 277, № 4. С. 796—799.
40. **Марченко В. А.**//Тр. Моск. мат. о-ва. 1952. Т. 1. С. 327—420.
41. **Левитан Б. М., Гасымов М. Г.**//УМН. 1964. Т. 19. Вып. 2. С. 3—63.
42. **Kaup D. J.**//SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 31. N 1. P. 121—133.
43. **Barcilon V.**//J. Math. Phys. 1974. Vol. 15, N 4. P. 429—432.
44. **Марченко В. А., Островский И. В.**//Мат. сборник. 1975. Т. 97. Вып. 4. С. 540—606.
45. **Новиков С. П.**//Функц. анализ. 1974. Т. 8. Вып. 3. С. 54—66.
46. **Итс А. Р., Матвеев В. Б.**//Функц. анализ. 1975. Т. 9. Вып. 1. С. 69—70.
47. **Buys M., Finkel A. J.**//Diff. Equations. 1984. Vol. 55. P. 257—275.
48. **Isaakson E. L., McKean H. P., Trubowitz E.**//Communs Pure and Appl. Math. 1984. Vol. 37. P. 1—11.
49. **Жидков Е. П., Христов Е. Х.** Сообщение ОИЯИ Р5-86-634. Дубна, 1986.
50. **Calogero F.** Studies in Math. Phys. Princeton. N. Y., 1976.
51. **Христов Е. Х.**//Дифф. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 2023—2029.
52. **Христов Е. Х.** Сообщение ОИЯИ Р5-88-782. Дубна, 1988.
53. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
54. **Теория** солитонов; метод обратной задачи/Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1980.
55. **Марченко В. А.** Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
56. **Kostov N. A.**//Lett. Math. Phys. 1989. Vol. 17. P. 95—108.
57. **Кирчев К. П., Христов Е. Х.**//Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Вища школа, 1982. Вып. 37. С. 48—50.
58. **Христов Е. Х.** Сообщение ОИЯИ Р5-86-603. Дубна, 1986.
59. **Христов Е. Х.** Сообщение ОИЯИ Р5-86-604. Дубна, 1986.
60. **Ma Y., Ablowitz M.**//Studies in Appl. Math. 1981. Vol. 65. P. 113—132.