

# КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ЯДЕРНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ

*Массимо ди Торо*

Университет г. Катания и Национальный центр ядерных исследований, Италия

Дан обзор квазиклассической теории ядерного коллективного движения, основанной на использовании уравнения Власова. Определена коррелированная функция отклика, с помощью которой в отдельных случаях получено замечательное соответствие с квантовыми результатами. Обсуждаются предсказания для изоскалярных и изовекторных резонансов высокой мультипольности. Анализ температурных эффектов указывает на их малое влияние на положение центроидов энергии резонансов. Механизм затухания исследуется посредством решения уравнения Власова со столкновительным членом в приближении релаксационного времени. Выявлена важная взаимосвязь между самосогласованным (Ландау) затуханием и затуханием, обусловленным столкновениями. В нагретых ядрах происходит увеличение спредовых ширин, которые достигают значения коллективных энергий при критических температурах порядка 3—4 МэВ.

A quasi classical theory of nuclear collective motions based on the Vlasov equation is reviewed. A correlated response function derived which has several striking similarities with fully quantum results. Predictions for high multipolarity isoscalar and isovector giant resonances are discussed. Finite temperature effects are analysed showing little change in the main frequencies. The damping mechanism is studied solving the Vlasov equation with collision terms treated within the relaxation time approximation. A quite important interplay between self-consistent (Landau) and collisional damping is revealed. In heated nuclei the spreading widths are increasing reaching the values of collective energies at a critical temperature of 3—4 MeV.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, благодаря развитию экспериментальной физики тяжелых ионов, получен ряд новых результатов относительно свойств ядерного коллективного движения, главным образом свойств гигантских резонансов [1, 2]. В большей степени это относится к модам гигантских резонансов, возбуждаемым на состояниях, которые характеризуются температурой и угловым моментом, а также к резонансам, имеющим достаточно высокую мультипольность. С другой стороны, новые моды коллективного характера открыты и в других конечных ферми-системах, таких, как металлические кластеры [3]. Достаточно сложно исследовать систематическим образом эти сходные проблемы, используя традиционный формализм, развитый для решения квантовых многочастичных задач. Данная статья посвящена изложению микроскопического квазиклассического достаточно пло-

дотворного и надежного в предсказании подхода, который основан на применении уравнения Власова для описания ядерного коллективного движения.

Уравнение Власова применительно к ядерной физике может быть получено посредством трансформации Вигнера к представлению фазового пространства матрицы плотности, соответствующей теории среднего поля, типа метода Хартри — Фока, зависящего от времени (ЗВХФ). ЗВХФ и его линеаризованная версия, приближение хаотических фаз (ПСФ), широко используются в ядерной физике [4], но обладают одним и тем же недостатком: эти подходы достаточно сложны при количественной реализации, и, вследствие этого, результаты, полученные с их помощью, не вполне однозначны. Для этих теорий в представлении фазового пространства мы имеем:

1. Простую физическую интерпретацию: а) характерные черты кажущегося, на первый взгляд, сложного ядерного спектра могут быть поняты в терминах нескольких классических величин; б) коллективное движение описывается посредством временной эволюции классических локальных функций, таких, как плотность, ток, момент и поток энергии.

2. Очень часто, в конечном итоге, мы получаем аналитический ясный результат. Это полезно, в частности, при изучении динамических многочастичных эффектов, обусловленных каждым членом нуклон-нуклонного взаимодействия.

3. Простой способ изучения движения: а) рассматриваются различные структуры исходного состояния, на основе которых строятся коллективные моды (эффекты деформации, вращения, температуры); б) используется функция распределения коллективного движения в механизме ион-ионных столкновений.

В конце концов, классические кинетические уравнения могут указать путь выхода за рамки приближения среднего поля с целью расширения анализа в новые (более высокие) области энергии и распутывания сложной взаимосвязи между одно- и двухчастичной диссипациями. В основном мы будем исследовать ядерную коллективную динамику, имея в виду процессы столкновения тяжелых ионов. Квазиклассический подход представляется достаточно реалистичным, так как мы ожидаем небольшие квантовые поправки, особенно для высоколежащих коллективных состояний, подобных гигантским резонансам. В квантовом подходе гигантский резонанс — это когерентная суперпозиция частично-дырочных возбуждений, в основном между различными оболочками. Вследствие этого следует ожидать, что их свойства должны быть похожи как в сферических ядрах, так и в ядрах с незаполненными оболочками, а, соответственно квазиклассическое описание должно быть достаточно надежным. Покажем, что теория Власова является подходом, пригодным для количественного предсказания, который имеет преимущество при численной реализации по сравнению с полным квантовым подходом ПСФ. В частности, будут представлены интересные предсказания относи-

тельно распределения силы изоскалярных и изовекторных мод высокой мультипольности.

Эффекты двухчастичных столкновений при описании затухания гигантских резонансов исследуются в квазиклассическом подходе с помощью решения уравнения Власова с членом, соответствующим релаксационному времени столкновения. Релаксационное время оценивается микроскопическим образом из условия установления равновесия искаженного импульсного распределения в кинетическом подходе. При этом подчеркивается важность эффектов, обусловленных энергетической зависимостью сечения рассеяния и временной эволюцией блокировки Паули. При расчете спредовых ширин проявляется ясная взаимосвязь между затуханием Ландау и затуханием, обусловленным столкновениями. Эскейп-ширины, т. е. ширины, обусловленные эмиссией нейтронов в состоянии непрерывного спектра, рассчитываются аналогичным образом. При установлении равновесия этот механизм конкурирует с нуклон-нуклонными столкновениями. Учет вышеперечисленных эффектов позволяет хорошо воспроизвести значение конечных полных ширин изоскалярного гигантского квадрупольного и изовекторного гигантского дипольного резонансов (ГКР и ГДР соответственно). В нагретых ядрах до достижения энергий возбуждения, соответствующих температурам порядка 4 МэВ, когда время затухания будет того же порядка, что и время, соответствующее коллективным осцилляциям, мы ожидаем увеличения спредовых ширин.

В разд. 1, 2 опишем основные моменты квазиклассического приближения, основанного на трансформации Вигнера, и получим уравнения Власова как предел ЗФХФ. В разд. 3, 4 показано, как можно точно решить линеаризованное ядерное уравнение Власова, чтобы получить распределение силы для различных типов вибрационного коллективного движения. В разд. 5 будет дано обсуждение ВКБ-интерпретации основных результатов с целью понимания способа рассмотрения точных квантовых поправок. Обобщение функции отклика на случай нагретых ядер дано в разд. 6. Раздел 7 полностью посвящен изовекторному коллективному движению. Проблема затухания обсуждается в разд. 8—10, начиная с описания подхода релаксационного времени с целью включения эффектов столкновений. Основная часть разд. 9 связана с проблемой микроскопического определения релаксационных времен при помощи метода тестовых частиц. В разд. 10 обсуждаются предсказания относительно температурных эффектов. Основные выводы представлены в разд. 11. В конце добавлено приложение о скейлинговом приближении.

## 1. ФУНКЦИИ ВИГНЕРА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ: ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Трансформация Вигнера матрицы плотности была введена в тридцатые годы как простой, интуитивный способ получения ее квазиклассического предела, позволяющего интерпретировать матрицу

плотности как функцию распределения в фазовом пространстве. В этом разделе с помощью метода функции Вигнера мы рассмотрим проблему описания движения бесспиновой частицы [5, 6].

Итак, рассмотрим волновой пакет, описывающий движение частицы в потенциальном поле  $V(r)$ :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} C(\mathbf{p}, t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right], \quad (1)$$

для которого имеет место

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi, \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(r).$$

При этом в каждый момент времени распределение (вероятность) по координатам определяется величиной  $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ , а распределение по импульсам (вероятность) —  $\rho(\mathbf{p}, t) = |C(\mathbf{p}, t)|^2$ .

Можно описать эту же динамику, используя формализм матрицы плотности для чистого состояния:

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \equiv \langle \mathbf{r}_1 | \psi \rangle \langle \psi | \mathbf{r}_2 \rangle. \quad (2)$$

В этом случае уравнение Шредингера преобразуется к виду

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]. \quad (3)$$

Рассмотрим трансформацию (Фурье) Вигнера матрицы плотности, определенной в координатном представлении, введя относительные координаты и координаты центра масс  $\mathbf{s} \equiv (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ,  $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{s} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}\right] \rho\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{s}, \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{s}, t\right). \quad (4)$$

Учитывая структуру одночастичной матрицы, имеем

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{s} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}\right] \psi^*\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{s}, t\right) \psi\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{s}, t\right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{q} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}\right] C^*\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{q}, t\right) C\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}, t\right). \end{aligned}$$

До сих пор вектор  $\mathbf{p}$  — это только переменная фурье-преобразования. Однако ниже мы перечислим некоторые свойства функции  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , которые позволяют интерпретировать ее как функцию распределения в реальном фазовом пространстве:

1. Квантовомеханическое распределение по координатам определяется посредством соотношения

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (5)$$

2. Аналогично для квантового описания распределения по импульсам мы имеем

$$\rho(\mathbf{p}, t) \equiv |C(\mathbf{p}, t)|^2 = \int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (6)$$

3. Используя трансформацию Вигнера, среднее значение для произвольного оператора  $\hat{O}$  можно выразить посредством следующего соотношения [4]:

$$\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \text{Tr} (\hat{O} \rho) = \int \int d^3r d^3p \hat{O}_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (7)$$

4. Ток может быть записан в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\hbar}{m} \text{Im} (\psi^* \nabla \psi) = \int d^3p \frac{\mathbf{p}}{m} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (8)$$

и, как мы увидим позже, он удовлетворяет совместно с плотностью распределения уравнению непрерывности. Здесь естественно интерпретировать пространство  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  как фазовое пространство, а функцию  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  как функцию распределения Больцмана. Однако очевидно, что мы не можем достаточно далеко развивать эту аналогию, так как:

1. Классическая частица движется по заданной траектории (чистое состояние), следовательно, функция Больцмана есть

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}(t)),$$

где  $\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}$ , что противоречит принципу неопределенности.

2. Исходя из эрмитовости матрицы плотности, можно показать, что функция Вигнера должна быть вещественной, но не обязательно положительно определенной, как того требует классическое определение вероятности.

Однако этот способ квантового описания движения частицы достаточно привлекателен, так как позволяет получить непосредственно классическую картину. Рассмотрим структуру динамических уравнений. Чтобы переписать уравнение (3) в фазовом пространстве, необходимо знать трансформацию Вигнера от произведения двух квантовых операторов [7]:

$$(A \cdot B)_W = \exp \left[ i \frac{\hbar}{2} \Lambda_{12} \right] A_W^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) B_W^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (9)$$

где  $\Lambda_{12} \equiv \nabla_r^{(1)} \nabla_p^{(2)} - \nabla_p^{(1)} \nabla_r^{(2)}$  — дифференциальный оператор Пуассона. Как следствие мы немедленно восстанавливаем квазиклассический предел коммутатора как скобок Пуассона:

$$([A, B])_W = 2i \sin \left[ \frac{\hbar}{2} \Lambda_{12} \right] A_W^{(1)} B_W^{(2)} = i\hbar \{A_W, B_W\} + O(\hbar^3) + \dots \quad (10)$$

Уравнение Шредингера для функции Вигнера приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{2}{\hbar} \sin \left[ \frac{\hbar}{2} \Lambda_{12} \right] H^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \\ &= \{H, f\} - \frac{\hbar^2}{24} \Lambda_{12}^3 H^{(1)} f^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = p^2/2m + V(\mathbf{r})$ .

В квазиклассическом пределе получаем классическое уравнение Лиувилля. Заметим, что из-за наличия оператора  $\Lambda_{12}^3$  в квантовых поправках классическая динамическая эволюция функции Вигнера является точной для величины  $V(r)$  вплоть до второго порядка по координатам (например, для случая гармонического осциллятора).

Из уравнения Шредингера (11) можно также получить цепочку гидродинамических уравнений для  $p$ -моментов функции Вигнера. Нулевой момент уравнения (11) дает уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (12)$$

где  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  определены выше. Для первого момента мы получаем уравнение типа уравнения Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\nabla \tau}{m} + \mathbf{p} \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{m} = 0, \quad (13)$$

где тензор «давления» определен как

$$\tau_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{p_i p_j}{m} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}.$$

Второй момент дает уравнение типа уравнения сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \tau_{ij} + \nabla_k \frac{Q_{ijk}}{m} + [j_i \nabla_j \mathbf{v} + j_i \nabla_i \mathbf{v}] = 0, \quad (14)$$

где

$$Q_{ijk} \equiv \int \frac{p_i p_j p_k}{m} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}$$

— тензор «теплового потока» и т. д. Отметим, что в уравнениях для моментов квантовые поправки не появляются явным образом вплоть до уравнений для третьего момента. Квантовые поправки входят явно только в уравнения для начальных условий и отсутствуют в динамических уравнениях. Мы вернемся к этому вопросу в многочастичном случае.

## 2. ТЕОРИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ: УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА

При описании динамики многочастичной системы, в первую очередь, необходимо ответить на вопрос о доминирующем механизме, определяющем временную эволюцию системы. Управляется ли последняя взаимодействием независимых частиц, с общим самосогласованным средним полем, или доминирующими являются двухчастичные столкновения? Характерное время двух режимов в грубом приближении дается соотношениями:

$$\tau_{0, ч} \sim D/v_F \text{ и } \tau_{д, ч} \sim \lambda/v_F,$$

где  $D$  определяет расстояние между двумя «стенками» среднего поля;  $\lambda$  — это длина свободного пробега между столкновением типа частица — частица, а  $v_F$  — скорость Ферми. Доминирующий механизм отвечает наименьшему времени:

1. Если  $\lambda > D$ , мы имеем одночастичную динамику; при этом важны эффекты взаимодействия со стенками, и система может быть описана как бесстолкновительный газ в самосогласованном поле. Это режим, для которого имеют силу теории среднего поля (ЗВХФ).

2. Если  $\lambda \ll D$ , то доминируют члены, обусловленные двухчастичными столкновениями. Система быстро достигает локального равновесия, и становятся применимыми представления гидродинамической картины.

Очевидно, что между двумя экстремальными случаями существует область, когда два режима перекрываются. В ядерной системе величина  $D$  порядка диаметра ядра. Когда энергия в пересчете на один нуклон меньше энергии Ферми, принцип Паули препятствует нуклон-нуклонным столкновениям вблизи ферми-поверхности, и простые оценки [8, 9] показывают, что длина свободного пробега в среднем поле больше размеров ядра. Тогда следует ожидать, что для описания ядерной динамики будет иметь силу теории среднего поля. Очевидно также, что диффузность распределения моментов в ядре и динамические деформации в импульсном пространстве будут ослаблять эффект блокировки, обусловленный принципом Паули, что позволяет с большой вероятностью реализоваться механизму двухчастичных столкновений при низких энергиях [10]. С этого положения начнем изучение столкновительных эффектов в определении спредовых ширин гигантских резонансов (см. разд. 9).

Зависящий от времени метод Хартри — Фока (ЗВХФ) позволяет микроскопически обосновать динамику для среднего поля. Уравнения ЗВХФ можно получить с помощью обрезания цепочки эволюционных уравнений для  $N$ -частичной матрицы плотности, используя факторизацию на втором шаге:

$$\rho_{\alpha\beta\gamma\delta} \simeq \rho_{\alpha\delta}\rho_{\beta\gamma} - \rho_{\beta\delta}\rho_{\alpha\gamma}, \quad (15)$$

где  $\rho_{\alpha\beta}$  — одночастичная матрица плотности. В этом случае мы учитываем только двухчастичные корреляции, обусловленные принципом Паули. Уравнения движения для матрицы плотности имеют вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [h(\rho), \rho], \quad (16)$$

где  $h(\rho)$  — одночастичный самосогласованный гамильтониан

$$h(\rho) = t + \text{Tr} \tilde{V}\rho \quad (17)$$

с оператором кинетической энергии  $\hat{t}$  и антисимметризованным взаимодействием  $\tilde{V}$ . Реально подход, использующий приближение сред-

него поля, является расширением ЗВХФ за счет феноменологии, которая вводится с помощью эффективного взаимодействия, зависящего от плотности и скорости, в котором учтены другие степени свободы и многочастичные члены [11]. Вводя набор заселенных орбит  $\{\psi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, A$ , получаем из уравнения (16) уравнения среднего поля для одночастичных волновых функций

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_i(t) = h(\{\psi\}) \psi_i(t). \quad (18)$$

Эти уравнения являются очень сложными, в высшей степени нелинейными, связанными интегродифференциальными уравнениями. Конечная динамика, полученная в результате решения этих уравнений, недостаточно ясна ввиду трудоемкости вычислений. Однако самосогласованность гамильтониана  $h(\psi)$  означает мгновенную связь между одночастичным движением и вариацией среднего поля, откуда и следует возможность использования теории для описания коллективного движения. Действительно, линеаризованная версия ЗВХФ-уравнений приводит к приближению случайных фаз (ПСФ), являющемуся достаточно хорошим при изучении коллективного движения с малой амплитудой. Используя представление фазового пространства, мы рассмотрим простую квазиклассическую картину динамики ЗВХФ, сохраняя при этом микроскопическое обоснование.

С помощью той же самой процедуры, рассмотренной выше при описании одночастичной проблемы, имея в виду уравнение (16), мы можем получить временную эволюцию трансформации Вигнера  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  одночастичной матрицы плотности

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{2}{\hbar} \sin\left(\frac{\hbar}{2} \Lambda_{12}\right) h^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (19)$$

где

$$h = p^2/2m + W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$$

есть трансформация Вигнера самосогласованного гамильтониана ХФ. По сравнению с одночастичным уравнением (11) в уравнении (19) появляется нелинейность, обусловленная условием самосогласования и зависимостью от скорости нелокального потенциала.

Пренебрегая членами второго и более высокого порядка по  $\hbar$ , получаем в качестве квазиклассического предела ЗВХФ уравнение Власова

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \{h, f\}, \quad (20)$$

широко используемое в классической физике плазмы [12]. В соответствии с изложенным выше, из уравнения Власова можно получить цепочку гидродинамических уравнений для  $p$ -моментов функции Вигнера, которые интерпретируются как уравнения для локальной плотности, для тока, для тензора давления соответственно и т. д. Насколько важны квантовые поправки в уравнениях? Вследствие



структуры оператора  $\Lambda_{12}$  они не появляются явным образом в уравнениях для  $p$ -моментов включительно до третьего момента, обеспечивая галилееву инвариантность нелокальных членов в потенциале ХФ. Таким образом, суммируем:

1. Если с помощью некоторого физического предположения удастся оборвать цепочку в нужном порядке, то получается полностью классическая система гидродинамических уравнений, в которых квантовые поправки учтены на уровне начальных условий и в процедуре обрывания.

2. При временной эволюции функции Вигнера мы ожидали бы небольшой вклад от квантовых эффектов, так как уравнение Власова и полные уравнения ЗВХФ должны приводить к тождественным результатам при условии одинакового выбора начальных условий. Этот результат был получен при численном моделировании столкновения двух тождественных слоев ядерной материи [13].

Согласно Берчу [14], несмотря на то, что ядерная динамика полностью описывается с помощью классических уравнений, тем не менее в теории не нарушается принцип Паули, включенный при определении начальных условий. С классической точки зрения уравнения Власова — это уравнения Лиувилля с самосогласованным потенциалом. Уравнения Лиувилля сохраняют плотность в фазовом пространстве. Если мы стартуем с плотностью в фазовом пространстве  $f(r, p, t = 0)$ , которая согласована с принципом Паули ( $f < \hbar^{-3}$ ), это согласование будет сохраняться и в последующем.

Как будет показано в следующем разделе, принцип Паули имеет чрезвычайно важное значение при конструировании коллективной ядерной функции отклика.

### 3. ЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК ЯДЕРНОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Рассмотрим все возможные решения уравнения Власова применительно к ядерной системе в случае малых амплитуд, что позволит нам исследовать соответствующие коллективные моды. Сконструируем квазиклассический поляризационный пропагатор и соответственно силовую функцию для произвольного внешнего поля. Решение уравнений Власова для конечной системы, даже в линейаризованном случае, является достаточно трудной задачей. Однако в последнее время эта проблема была успешно решена для системы со сферической симметрией [15, 16].

Уравнение Власова для системы, находящейся под воздействием внешнего поля  $\beta(t)Q(r)$ , может быть записано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{h + \beta Q, f\}, \quad (21)$$

где  $h(r, p, t) = p^2/2m + W(r, p, t)$  и  $W(r, p, t)$  — самосогласованный потенциал.

В случае малых вариаций амплитуды функции распределения

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r}, p^2) + g(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (22)$$

можно разложить уравнение (21) до первого порядка относительно величины  $g$ . Таким образом, мы развиваем теорию, которая в квазиклассике соответствует ПСФ. Имеем

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \{h_0, g\} + \{\delta W + \beta Q, f_0\}, \quad (23)$$

где  $\delta W$  — самосогласованная вариация среднего поля, обусловленная остаточным взаимодействием  $u(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ :

$$\delta W(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta\rho(\mathbf{r}', t) \quad (24)$$

и  $\delta\rho$  — переходная плотность.

Так как величина  $\delta\rho$  определяется соотношением

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{p} g(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (25)$$

то становится очевидным, что уравнения (23) являются сложными интегродифференциальными уравнениями.

Конечно, при этом крайне важна структура решения  $f_0$ , соответствующего равновесному решению, так как это то отправное состояние, опираясь на которое, мы исследуем коллективные возбуждения. Поскольку имеет место  $\{h_0, f_0\} = 0$ , то можно выбрать

$$f_0(\mathbf{r}, p^2) = F[h_0(\mathbf{r}, p^2)], \quad (26)$$

так что для фурье-трансформации от величины  $g(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  имеем уравнение

$$-i\omega g(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \omega) = \{h_0, g\} - F'(E) \{\delta W + \beta Q\}. \quad (27)$$

В квазиклассическом представлении мы выбираем приближение Томаса — Ферми для холодных ядер (основное состояние):

$$F(h_0) = \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \theta(E_F - h_0) \quad (28)$$

и, в соответствии с уравнением (27), следует ожидать вклады только от одночастичных орбит с энергией Ферми, так как  $F'(E) \sim \delta(E_F - E)$ .

Из вышеизложенного становится понятным, как можно расширить предложенную схему для изучения нагретых ядер, т. е. рассмотрения коллективных осцилляций относительно возбужденных состояний. Мы должны в уравнении (26) рассмотреть более общее ферми-распределение ( $T \neq 0$ ), соответственно, как мы увидим позже, большее число орбит будет участвовать в коллективном движении.

Из структуры уравнения (27) видно, что если преобразовать переменные таким образом, что среди них будут включены константы

движения гамильтониана  $h_0$ , то мы уменьшим число независимых переменных. В предположении сферической симметрии исходного состояния в работе [15] была предложена трансформация:

$$(r, p) \rightarrow (E, \lambda, r, \alpha, \beta, \gamma), \quad (29)$$

где  $E$  — энергия;  $\lambda$  — угловой момент;  $r$  — радиус и  $(\alpha, \beta, \gamma)$  — углы Эйлера. Кроме  $E$  и  $\lambda$  константами движения являются также углы  $\alpha$  и  $\beta$ , так как плоскость орбит не меняется и  $\cos \beta = \lambda_0/\lambda$ . Величина  $\gamma$  представляет собой угловую переменную в плоскости орбиты, причем  $\dot{\gamma} = \lambda/(mr^2)$ .

Зависимость от  $\gamma$  можно легко учесть с помощью мультипольного разложения:

$$g(E, \lambda, r, \alpha, \beta, \gamma, \omega) = \sum_{LMN} G_{MN}^L(E, \lambda, r, \omega) (D_{MN}^L(\alpha, \beta, \gamma))^*, \quad (30)$$

где  $D_{MN}^L$  — обобщенная сферическая функция, и уравнение (27) сводится к системе радиальных уравнений для функции  $G_{MN}^L(E, \lambda, r, \omega)$ .

Обобщенная функция отклика  $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ , определяемая с помощью соотношения

$$\delta\rho(\mathbf{r}, \omega) = \beta(\omega) \int d^3\mathbf{r}' D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) Q(\mathbf{r}'), \quad (31)$$

может быть выражена для произвольной  $L$ -мультипольности через решения для величины  $G_{MN}^L$  (см. уравнение (5.20) из [15]). Следовательно, зная величины  $G_{MN}^L$ , можно конструировать силовые функции для оператора мультипольности  $L$  с радиальной зависимостью  $Q(\mathbf{r})$ :

$$\begin{aligned} S_L(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int dr r^2 \int r'^2 dr' Q^*(\mathbf{r}) D_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) Q(\mathbf{r}') = \\ &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi_L(\omega), \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\Pi_L(\omega)$  — поляризационный оператор.

В работе [15] рассматривались решения без каких-либо корреляций, т. е. без самосогласованной вариации  $\delta W$  среднего поля. Соответствующая силовая функция имеет структуру:

$$D_L^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int dE F'(E) \int d\lambda \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{N=-L}^L \frac{d_n^{LN}(r, r')}{\omega - \omega_n(N) + i\eta} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} d_n^{LN}(r, r') &= \frac{(4\pi)^2}{2L+1} \left( \frac{-2\omega_n(N)}{T} \right) \left| Y_{LN} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right|^2 \times \\ &\times \frac{\cos[s_n(N, r)]}{r^{2\nu}(r)} \frac{\cos[s_n(N, r')]}{r'^{2\nu}(r')}, \end{aligned} \quad (34)$$

а полюсы определяются выражениями

$$\omega_n(N) = n \frac{2\pi}{T} + N \frac{\Gamma}{T}, \quad (35)$$

где  $n, N$  — целые числа  $-\infty < n < \infty$  и  $-L \leq N \leq L$  ( $(-1)^N = = (-1)^L$ );

$$T = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{v(r)}$$

— радиальный период и

$$\Gamma = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{v(r)} \frac{\lambda}{mr^2}$$

— угловой «период» для каждой орбиты  $(\lambda, E)$ , соответствующей частице с данной массой, энергией Ферми в невозмущенном среднем поле.

Величина

$$v(r) = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - W_0(r) - \frac{\lambda^2}{2mr^2} \right)} \quad (36)$$

является радиальной скоростью, а  $(r_1, r_2)$  — классические точки поворота орбиты  $(\lambda, E)$ . Фаза  $s_n(N, r)$  определяется выражением

$$s_n(N, r) = \omega_n(N) \tau(r) - N\gamma(r), \quad (37)$$

где

$$\tau(r) = \int_{r_1}^r \frac{dr'}{v(r')} \quad \text{и} \quad \gamma(r) = \int_{r_1}^r \frac{\lambda}{mr'^2} \frac{dr'}{v(r')}$$

— соответственно время прохождения и угол вращения, необходимые для достижения положения  $r$  на орбите  $(\lambda, E)$ .

Радиальная зависимость квазиклассической  $D$ -функции [см. уравнение (34)] проявляет сингулярности в точках  $r, r'$ , соответствующих классическим точкам поворота. Данное поведение отличается от квантового случая [17, 18], что, как будет показано ниже, обуславливает некоторые трудности при использовании остаточных взаимодействий с нулевым радиусом действия.

Окончательно, с помощью выражений (32) и (35) для некоррелированной силовой функции, имеем

$$S_L^0(\omega) = \frac{8\pi^2}{2L+1} \sum_{nN} \int dE F'(E) \int d\lambda \lambda \omega_n(N) \times \\ \times T \left| Y_{LN} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right|^2 |Q(n, N)|^2 \delta(\omega - \omega_n(N)), \quad (38)$$

где вычеты полюсов определяются с помощью соотношения

$$Q(n, N) = \frac{2}{T} \int_{r_1}^{r_2} dr' \frac{Q_{LM}(r')}{v(r')} \cos [s_n(N, r')]. \quad (39)$$

На рис. 1—4 [15] представлены результаты расчетов некоррелированных силовых функций для изоскалярных монопольных, квадрупольных и октупольных мод в случае  $^{40}\text{Ca}$  и  $^{206}\text{Pb}$ , полученные при использовании в качестве среднего поля потенциала Вудса—Сак-

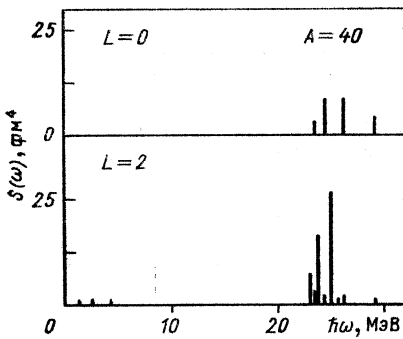


Рис. 1. Изоскалярные монополярная ( $L=0$ ) и квадрупольная ( $L=2$ ) силовые функции для системы нуклонов с  $A=40$ , рассчитанные с помощью потенциала Вудса—Саксона

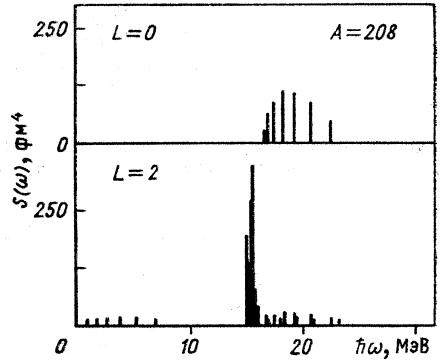


Рис. 2. [То же, что и на рис. 1, для системы с  $A=208$ .

сона со стандартными параметрами. Подобие полученных результатов квантовым частично-дырочным распределениям достаточно выразительно. Напомним, что мы решали полностью классическую динамическую проблему. Квантовые эффекты, обусловленные учетом принципа Паули, были включены только при описании статического распределения в уравнение (28).

Действительно, принцип Паули должен быть решающим фактором, обуславливающим коллективный характер многочастичного отклика ядерной системы. Собственные частоты [см. уравнение (35)] и вычеты [см. уравнение (39)], определяемые каждой из орбит ( $\lambda, E$ ), распределены практически однородно. Принцип Паули, вследствие структуры величин  $F'(E)$ , имеющих максимум при энергии Ферми  $E_F$ , отбирая вклады от орбит, расположенных только вблизи  $E_F$ , обуславливает коллективную структуру отклика. Это путь к пониманию механизма затухания коллективных мод как резуль-

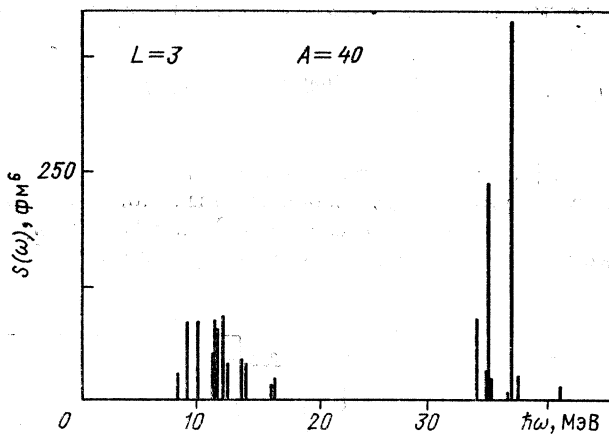


Рис. 3. Изоскалярная октупольная силовая функция для системы с  $A = 40$ , рассчитанная с помощью потенциала Вудса — Саксона

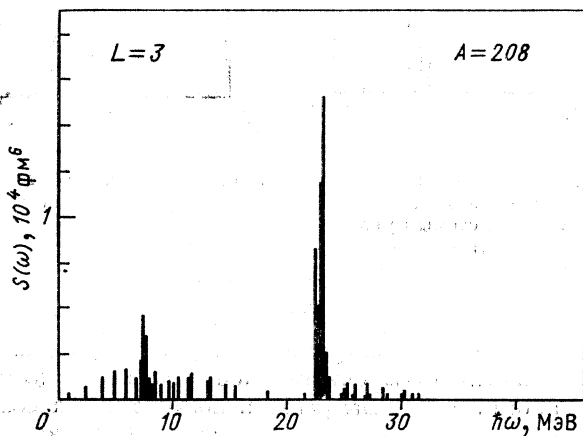


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, для системы с  $A = 208$

тата частичного ослабления принципа Паули, следствием которого является усиление двухчастичных столкновений и разрушение коллективного потока.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ С УЧЕТОМ КОРРЕЛЯЦИЙ: КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПСФ

Квазиклассическая функция отклика [см. уравнение (31)] удовлетворяет интегральному уравнению типа уравнения ПСФ (для

мультипольности  $L$  см. [15, разд. 5]):

$$D_L(r, r', \omega) = D_L^0(r, r', \omega) + \int x^2 dx \int y^2 dy D_L^0(r, x, \omega) \times \quad (40)$$

$$\times u_L(x, y) D_L(y, r', \omega).$$

Данное уравнение может быть использовано как отправное для включения эффектов самосогласования, обусловленных действием остаточных взаимодействий. Из структуры сингулярностей функции  $D_L^0$  [(см. уравнение (34))] следует, что остаточные взаимодействия с нулевым радиусом действия, например силы Скинра, приводят к слишком сильным сингулярностям в ядре [см. уравнение (40)]. Это очевидный недостаток, который, однако, представляет интерес, так как указывает на микроскопическом уровне некоторые внутренние ограничения квазиклассического описания многочастичной квантовой динамики. Кроме того, он указывает, как улучшить приближение, используя некоторую технику обхода классических точек поворота, связанных с сингулярностями.

Другая возможность учета корреляций связана с использованием сепарабельных взаимодействий, имеющих поверхностный характер и достаточно реалистичных [4, 19], для которых имеет место согласование вариации среднего поля и локальной плоскости. В самом деле, атомное ядро — это почти несжимаемая капля, потенциальное поле которой определяется локальной плотностью. Для сепарабельного взаимодействия общего вида с некоторым формфактором поляризаационный пропагатор можно построить, зная только величину  $D^0(r, r', \omega)$ .

Предположим, что имеет место

$$u_L(r, r') = k(L) F(r) F(r'), \quad (41)$$

а интеграл общего вида записывается в форме

$$\int x^2 dx \int y^2 dy A(x) D_L(x, y, \omega) B(y) = (AD_L B).$$

Используя соотношение (41), получаем

$$(Q_L D_L Q_L) = (Q_L D_L^0 Q_L) + k(L) (Q_L D_L^0 F) (F D_L Q_L). \quad (42)$$

Здесь

$$(F D_L Q_L) = (F D_L^0 Q_L) + k(L) (F D_L^0 F) (F D_L Q_L),$$

и соответственно поляризаационный пропагатор имеет вид

$$P_L(\omega) \equiv (Q_L D_L Q_L) = \frac{P_L^0(\omega) [1 - k(L) (F D_L^0 F)] + k(L) (Q D_L^0 F)^2}{1 - k(L) (F D_L^0 F)}, \quad (43)$$

где также использована сепарабельная структура уравнения (34) некоррелированной функции отклика  $D_L^0(r, r', \omega)$ . С помощью уравнения (43) получим новые полюсы  $\Omega_\nu$  из дисперсионного соотношения

ния

$$\frac{1}{k(L)} = (FD_L^0 F) = \int x^2 dx \int y^2 dy F(x) D_L^0(x, y, \omega) F(y) \quad (44)$$

с силовой функцией, определяемой с помощью вычетов величины

$$S_L(\Omega_\nu) = \frac{\hbar(Q_L D_L^0 F)^2}{\frac{d}{d\omega}(FD_L^0 F)} \Big|_{\omega=\Omega_\nu} \quad (45)$$

В частном случае формфактора  $F(r) = Q_L(r) = r^L$  мы получаем дисперсионные соотношения для мультиполь-мультипольного остаточного взаимодействия. Условия согласования в случае изоскалярных  $L \neq 0 \text{ мод}^*$ :

$$\delta\rho = \nabla(\rho \nabla \Phi), \quad \Phi = r^L Y_{LM}(\hat{r}) \quad (46)$$

и

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \delta\rho \quad (47)$$

приводят к факторизованной структуре остаточных взаимодействий

$$u_L(r, r') = k(L) r^{L-1} \frac{\partial V}{\partial r} Y_{LM}(\hat{r}) r^{L-1} \frac{\partial V}{\partial r'} Y_{LM}(\hat{r}'), \quad (48)$$

где константа  $k(L)$  определяется соотношением

$$\frac{1}{k(L)} = \int r'^{2L} \frac{\partial V}{\partial r'} \frac{\partial \rho}{\partial r'} dr'. \quad (49)$$

В частном случае гармонического осциллятора  $V = (1/2) m \omega_0^2 r^2$  мы воспроизводим остаточное мультиполь-мультипольное взаимодействие с самосогласованной по Бору — Моттельсону [19] константой взаимодействия:

$$k(L) = -\frac{m \omega_0^2}{2L+1} \frac{1}{\int_0^\infty \rho(r) r^{2L} dr}. \quad (50)$$

В наших расчетах использовался стандартный потенциал Вудса — Саксона ( $V_0 = -50$  МэВ, диффузность  $a = 0,65$  фм,  $r_0 = 1,25$  фм). Мы рассмотрели два типа остаточных взаимодействий:

1. Мультиполь-мультипольное взаимодействие с условием согласования типа (50) применительно к потенциалу Вудса — Саксона.

2. В виде

$$u_L(r, r') = k(L) \frac{dV}{dr} \frac{dV}{dr'} \quad (51)$$

\* Отметим, что формула (46) является точной только в случа етрансляционного движения.



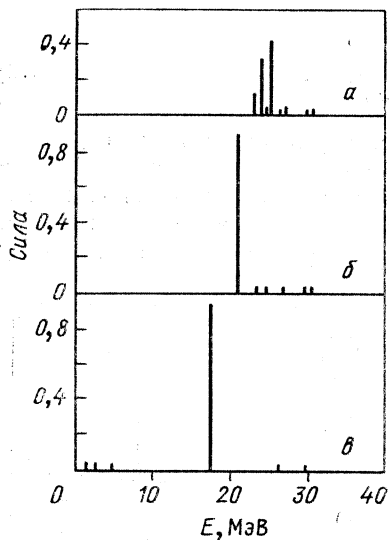


Рис. 5. Распределение силы ЭВПС для изоскалярных  $2^+$ -мод в случае ядра  $^{40}\text{Ca}$ :

$\alpha$  — в отсутствие корреляций;  $\beta$  — с учетом мультиполь-мультипольного взаимодействия;  $\nu$  — формфактором вида  $dV/dr$

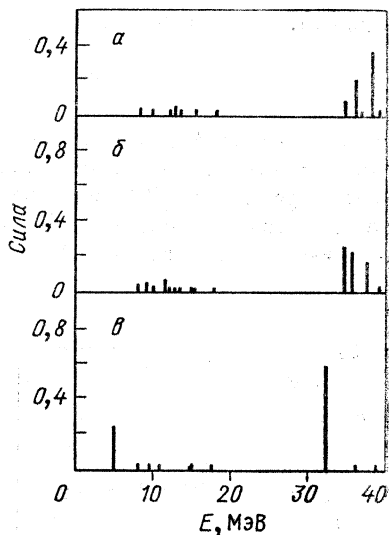


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, для октупольных  $3^-$ -мод

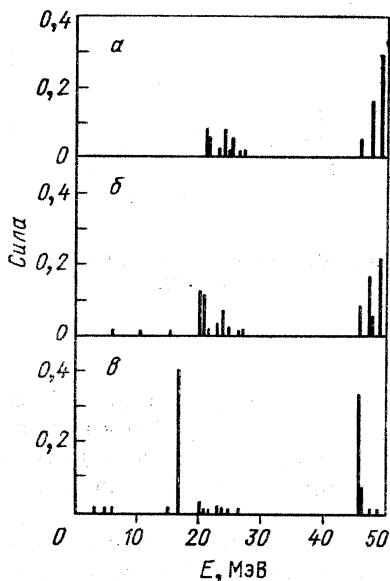


Рис. 7. То же, что и на рис. 5, для гексадеканольных  $4^+$ -мод

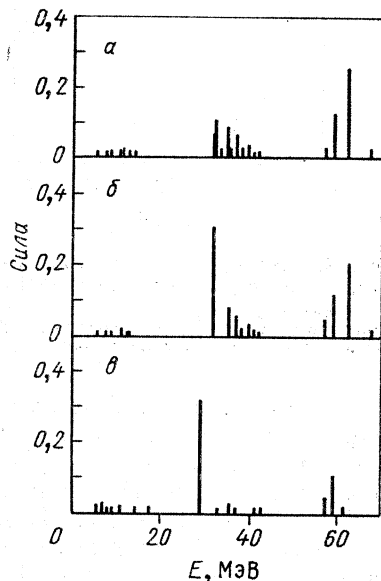


Рис. 8. То же, что и на рис. 5, для  $5^-$ -мод

с константой взаимодействия

$$k(L) = \frac{k_0}{\sqrt{1 + (\alpha L/R)^2}}, \quad (52)$$

где величина  $k_0$  фиксирована из условия нулевой энергии для духовой 1-изоскалярной моды. Это позволяет обойти условие согласования в виде уравнения (46), которое не является достаточно общим в случае переходных плотностей, получаемых из уравнений Власова. Зависимость константы взаимодействия  $k(L)$  [см. уравнение (52)]

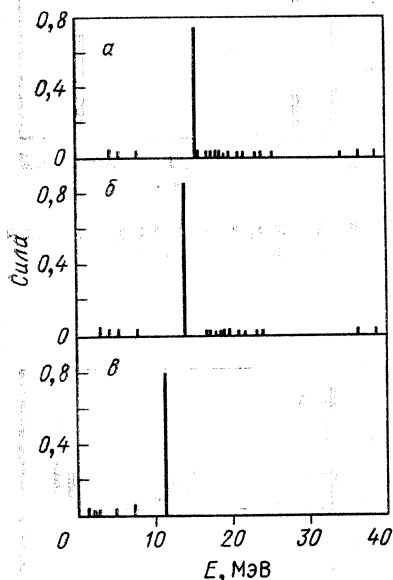


Рис. 9. Распределение силы изоскалярных 2<sup>+</sup>-мод в случае ядра <sup>208</sup>Pb: а — в отсутствие корреляций; б — с учетом мультипольно-мультипольного взаимодействия; в — с формфактором вида  $dV/dr$

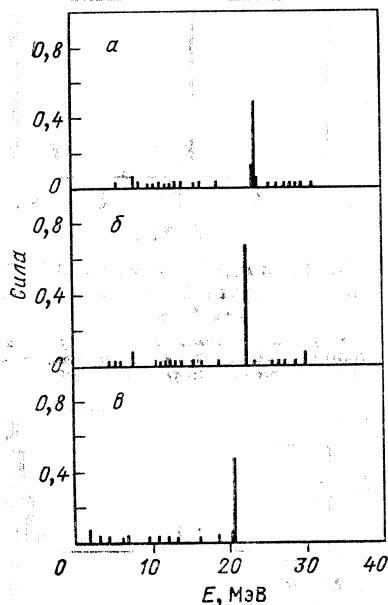


Рис. 10. То же, что и на рис. 9, для 3<sup>-</sup>-мод

от мультипольности  $L$  обусловлена конечной областью ( $\alpha \sim 1$  фм) изменения угловых переменных остаточного взаимодействия. Взаимодействие этого типа с успехом применялось при исследовании поверхностных колебаний в ядрах при анализе в ПСФ полубесконечных ферми-жидкостей [23].

На рис. 5—12 приведены результаты распределения энергетически взвешенных правил сумм (ЭВПС), соответствующих изоскалярным 2<sup>+</sup>-, 3<sup>-</sup>-, 4<sup>+</sup>-, 5<sup>-</sup>-модам в ядрах <sup>40</sup>Ca и <sup>208</sup>Pb. На каждом из рисунков представлены силовые функции без учета корреляций (а); с учетом

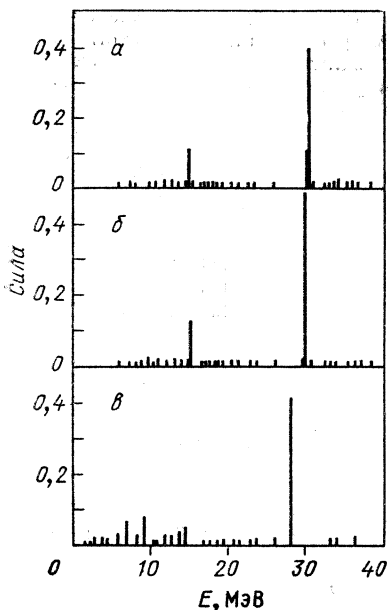


Рис. 11. То же, что и на рис. 9, для 4-мод

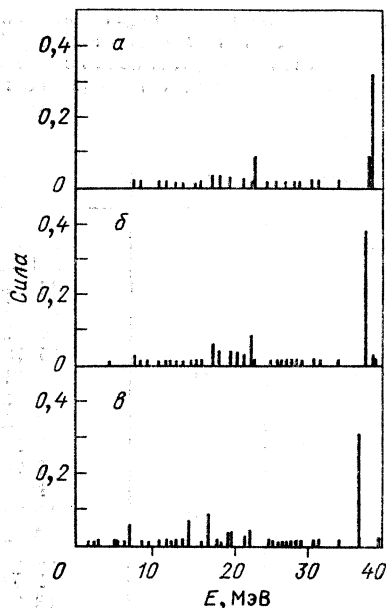


Рис. 12. То же, что и на рис. 9, для 5-мод

мультиполь-мультипольного взаимодействия с константой, согласованной по Бору — Моттельсону (б), а также с остаточным взаимодействием, определенным в соответствии с формулой (51)(е). В табл. 1 приведено распределение силы ЭВПС для наиболее коллективных компонент.

Отметим следующие моменты:

1. В случае изоскалярных одночастичных операторов ЭВПС сохраняются с хорошей точностью при переходе от некоррелированного к коррелированному случаю.

2. Остаточные взаимодействия заметно усиливают коллективность мод. Этот эффект менее важен для высших мультипольностей, начиная с  $L = 4$ ; в теории Власова фрагментация силы мультипольных операторов постепенно уменьшается с увеличением  $L$  [24].

3. В наших результатах достаточно четко наблюдаются также и низколежащие коллективные состояния, которые часто отсутствуют или сопряжены с трудностями описания в гидродинамических подходах [20—22], где вынуждены ограничивать сложность зависящей от времени функции распределения в фазовом пространстве, особенно по отношению к искажению ферми-поверхности. Доля силы, приходящаяся на низколежащие коллективные состояния, велика и заметно возрастает с мультипольностью моды, что находится в хорошем соответствии с экспериментом.

Таблица 1. Энергия и распределение силы ЭВПС для наиболее коллективных состояний в  $^{40}\text{Ca}$  и  $^{208}\text{Pb}$ , рассчитанные с учетом мультиполь-мультипольного остаточного взаимодействия. В скобках приведены соответствующие величины, полученные при использовании формфактора  $\partial V/\partial r$

Ядро	$\lambda^\pi$	$E$ , МэВ	ЭВПС, %
$^{40}\text{Ca}$	2+	21,11 (17,68)	88 (95)
		8,83 (4,82)	5,8 (25,57)
	3-	11,28	6,5
		34,27 (21,27)	28 (60,25)
		35,42	25
		37,3	17
		21,11 (16,66)	7,19 (42)
		21,43	5,98
		23,98	8,43
	4+	25,2	5,39
		47,97 (45,89)	16 (34)
		49,4	31
		11,86 (10,94)	2,35 (3)
		32,42 (29,29)	30,77 (32,52)
	5-	59,84 (59,07)	11,86 (10)
62,76		20	
13,86 (11,34)		84 (80)	
$^{208}\text{Pb}$	2+	7,51 (4,13)	8,24 (5,28)
		13,94	11
	3-	22,27 (20,28)	66 (50)
		10,13 (7,09)	2 (6,18)
		15,31 (14,57)	11 (5)
		34,4 (28,52)	48 (41)
		7,64 (6,78)	2,76 (6)
	4+	17,8 (17,11)	6 (9)
		22,87	9,38
		38,02 (36,74)	36,55 (31)

4. В случае гексадекапольных мод мы предсказываем две характерные области концентрации силы с примерно равными вкладами в ЭВПС. Аналогичный результат был получен в работах группы Михайлова [25], в которых учитывались члены более высокого порядка в цепочке гидродинамических уравнений. Сила низколежащих состояний достаточно расфрагментирована, что находится в согласии с экспериментальными данными, полученными в GANIL [26].

5. Наши результаты удивительно похожи на сложные полностью самосогласованные квантовые расчеты ПСФ с силами Скирма — Гони [27]. В частности, имеет место большая концентрация силы на высоколежащих состояниях для высших мультипольностей, что может быть связано с двумя моментами:

а) в наших расчетах отсутствуют ширины, обусловленные связью с непрерывным спектром, так как все учитываемые орбиты соответствуют связанным состояниям. Учет состояний непрерывного спектра мог бы привести к ослаблению силы высоколежащих состояний;

б) в квантовых расчетах, даже без учета континуума, всегда имеет место обрезание одночастичного базиса. Это приводит к ослаблению силы высших мультиполей в высокоэнергетичной области. В частности, в наших расчетах преувеличена сила состояний 5- для  $^{208}\text{Pb}$  [27], сконцентрированная на очень коллективных состояниях в области 40 МэВ энергии возбуждений (см. рис. 12);

в) сепарабельное взаимодействие, определяемое формфактором вида  $\partial V/\partial r$ , является, в общем случае, более сильным по сравнению с мультиполь-мультипольным взаимодействием, что обуславливает больший сдвиг в сторону высоких энергий и, соответственно, большую концентрацию в этой области. Очевидно, что силы  $\partial V/\partial r$  дают результаты, которые ближе к полностью самосогласованным расчетам. Вероятно, для получения правильного согласования в случае мультиполь-мультипольных сил требуется достаточно много предположений.

В заключение раздела выразим свое мнение по поводу надежности результатов квазиклассической теории ядерных возбуждений, основанных на уравнении Власова. Некоторые особенности ядерного спектра поняты нами с помощью только несколько классических величин, при этом выполненные расчеты не требуют больших вычислительных затрат (наша программа ПСФ состоит не более чем из 200 положений).

Можно возразить, что точные квантовые поправки к уравнению Власова, пропорциональные  $\hbar^2$ , могут изменить структуру функции отклика системы. Однако это неправильно. Кроме хорошего согласия с квантовыми расчетами, в работе [28, 29] была выполнена количественная оценка этих эффектов в соответствии с расширенной формой гидродинамических уравнений, которая позволяла решить новые уравнения в фазовом пространстве с макроскопической параметризацией взаимодействия. В случае октупольных сил наименьшей мультипольности, подверженной воздействию, поправки не превысили 1 % для значения энергии низколежащих состояний резонанса и были совершенно незначительны для высоколежащих состояний.

## 5. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ (ВКБ) СООТВЕТСТВИЕ. УЧЕТ СПИН-ОРБИТАЛЬНОЙ СВЯЗИ

Существует полное соответствие между структурой уравнений теории Власова и квантовым ПСФ. Некоторые положения обсуждаются в работе [15], однако полный анализ, основанный на ВКБ-приближении функции отклика ПСФ, дан в [30]. В этом разделе мы покажем, как использовать квазиклассическое соответствие, чтобы оценить квантовые эффекты, подобные спин-орбитальному взаимодействию.

В приближении теории Власова некоррелированные частоты без учета спин-орбитального взаимодействия определяются соотноше-

ниями (35):

$$\omega_n(N) = n\omega_0(\lambda) + N\omega_\gamma\lambda,$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T$  — частота радиального движения;  $\omega_\gamma$  — частота прецессии в орбитальной плоскости для каждой занятой орбиты ( $\lambda$ ,  $E = E_F$ ). Соответствующие силы (вычеты) даются интегралами (39):

$$Q(n, N) = \frac{2}{T} \int_{r_1}^{r_2} dr' \frac{Q_{LM}(r')}{v(r')} \cos s_n(N, r'),$$

где

$$s_n(N, r) = \omega_n(N) \tau(r) - N\gamma(r).$$

Некоррелированная квантовомеханическая функция отклика указывает на полюсы ( $p - h$ ) частично-дырочных энергий, сила которых определяется частично-дырочными матричными элементами  $\langle n_p l_p | Q(r) | n_h l_h \rangle$ .

Пределом этой величины в ВКБ-приближении является [30, 31]:

$$\langle n_p l_p | Q(r) | n_h l_h \rangle = \frac{2}{T} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{v(r)} Q(r) \cos \phi(\Delta n, \Delta l, r), \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} \phi(\Delta n, \Delta l, r) = \\ = [(n_p - n_h) \omega_0 + (l_p - l_h) \omega_\gamma] \tau(r) - (l_p - l_h) \gamma(r), \end{aligned} \quad (54)$$

ВКБ-предел ( $p - h$ )-матричного элемента приобретает вид

$$E_p - E_h = (n_p - n_h) \hbar \omega_0 + (l_p - l_h) \hbar \omega_\gamma. \quad (55)$$

Таким образом, квазиклассический предел квантовой функции отклика естественным образом ведет к функции отклика Власова при введении соответствия

$$n_p - n_h \leftrightarrow n; \quad l_p - l_h \leftrightarrow N. \quad (56)$$

Исходя из детального обсуждения в работе [30], мы можем использовать ВКБ-матричные элементы и разность энергий, чтобы оценить эффект спин-орбитального взаимодействия в теории Власова.

Если одночастичный гамильтониан содержит спин-орбитальный член

$$V_{Ls} = -\alpha(r) \hbar^2 \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}, \quad (57)$$

ВКБ-предел ( $p - h$ )-матричного элемента приобретает вид

$$\langle n_p l_p j_p | Q(r) | n_h l_h j_h \rangle = \frac{2}{T} \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{Q(r)}{v(r)} \cos \phi(\Delta n, \Delta l, \Delta j, r) \quad (58)$$

с модифицированной фазой

$$\begin{aligned} \phi(\Delta n, \Delta l, \Delta j, r) = & \left\{ (n_p - n_h) \omega_0 + (l_p - l_h) \left[ \omega_\gamma + 2l_h \frac{\Delta}{T} \right] - \right. \\ & - (j_p - j_h) l_h \frac{\Delta}{T} \left. \right\} \tau(r) - (l_p - l_h) \gamma(r) - \\ & - [(l_p - l_h) 2l_h - (j_p - j_h) l_h] \delta(r), \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\delta(r) = \int_{r_1}^r \frac{dr'}{v(r')} \alpha(r') \quad \text{и} \quad \Delta = 2\delta(r_2),$$

а величины  $\tau(r)$ ,  $\gamma(r)$ ,  $T$  и  $\Gamma$  аналогичны предыдущим. Соответственно в теории Власова мы ожидали бы новые частоты

$$\omega_n(N, M) = n\omega_0 + N \left[ \omega_\gamma + 2\lambda \frac{\Delta}{T} \right] - M\lambda \frac{\Delta}{T}, \quad (60)$$

и вычеты определялись бы соотношением

$$Q(n, N, M) = \frac{2}{T} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{v(r)} Q(r) \cos[s_n(N, M, r)], \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} s_n(N, M, r) = & \left\{ n\omega_0 + N \left[ \omega_\gamma + 2\lambda \frac{\Delta}{T} \right] - M \frac{\lambda}{T} \Delta \right\} \tau(r) - \\ & - N\gamma(r) - (2N - M) \lambda \delta(r) \end{aligned} \quad (62)$$

и

$$M = N - 1, N, N, N + 1. \quad (63)$$

Чтобы оценить эффект, мы выбирали следующие параметры:

$$V_{Ls} = -0,1\hbar\omega_0 (1 \cdot s); \quad \hbar\omega_0 = 41 \text{ A}^{-1/3} \text{ МэВ}. \quad (64)$$

Некоррелированная функция отклика распределена по многим уровням, т. е. имеется множество собственных частот [см. (60)]. Результат, полученный при учете остаточного взаимодействия квадруполь-квадрупольного типа с согласованием по Бору — Моттельсону, когда заметно уменьшается фрагментация окончательной функции отклика, не сильно отличается от случая без учета спин-орбитального взаимодействия. В некотором смысле это оправдывает сравнение, сделанное ранее с полностью микроскопическими квантовыми результатами.

## 6. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ КОЛЛЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ

Надежность описания с помощью ядерной функции отклика в теории Власова подразумевает применение этой достаточно упрощенной теории в широком контексте. В этом разделе мы проанализируем структуру коллективных мод, построенных на возбужденных состоя-

ниях, характеризуемых некоторым значением температуры. В настоящее время получена большая совокупность данных относительно таких состояний из деления и глубокоэластичных реакций с тяжелыми ионами [1, 2].

Как отмечалось в разд. 3, введение температуры в теорию Власова достаточно просто: этому соответствует замена ступенчатой функции распределения [см. уравнение (28)] исходного состояния на функцию ферми-распределения  $T \neq 0$ :

$$f_0(\mathbf{r}, p^2) = \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{T}\right)}. \quad (65)$$

Энергетическая производная, появляющаяся в силовом распределении [см. уравнение (38)], уже не  $\delta$ -функция при  $E = E_F$ , а огибающая

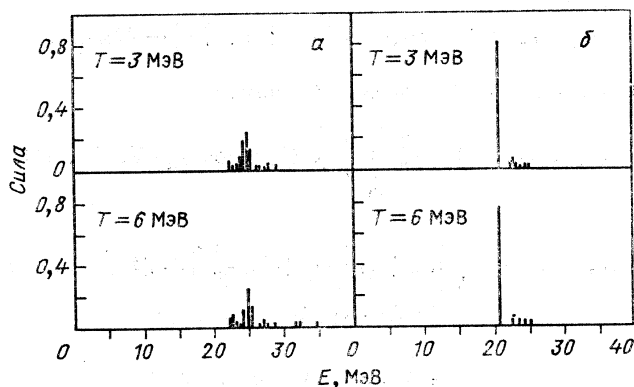


Рис. 13. Распределение силы ЭВПС для изоскалярных  $2^+$ -мод для ядра  $^{40}\text{Ca}$  при различных  $T$ :

*a* — в отсутствие корреляций; *b* — с учетом мультиполь-мультипольного остаточного взаимодействия

кривая с максимумом при  $E_F$  и шириной порядка  $T$ . Это означает, что мы будем учитывать не только некоррелированные собственные частоты, соответствующие орбитам с энергией Ферми (для данного углового момента), а также и близлежащие посредством весового фактора

$$W(E) = \frac{1}{T} \frac{\exp\left(\frac{E - E_F}{T}\right)}{\left\{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{T}\right)\right\}^2}. \quad (66)$$

Вследствие этого будет происходить подавление фрагментации некоррелированных силовых распределений.

Действительно, последнее является характерной особенностью некоррелированных функций отклика, рассчитанных для квадрупольных и октупольных мод в  $^{40}\text{Ca}$  и  $^{208}\text{Pb}$  при  $T = 3,6$  МэВ (рис. 13—



16). При этом мы предполагаем, что энергия Ферми не меняется, что достаточно разумно в пределе  $\exp(-E_F/T) \ll 1$ . Для каждого углового момента  $\lambda$  учитывались вклады от состояний с энергией от  $E_F - 4T$  до  $E_F + 4T$  в интервале  $\Delta E = T$ .

Тем не менее при включении остаточного взаимодействия, будь то мультиполь-мультипольного или  $dV/dr$ -типа, мы наблюдали силь-

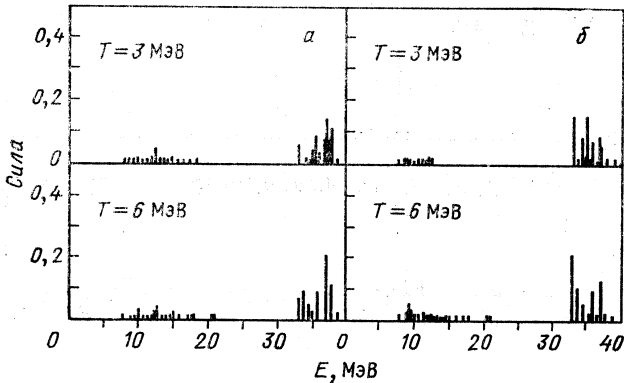


Рис. 14. То же, что и на рис. 13, для 3-мод

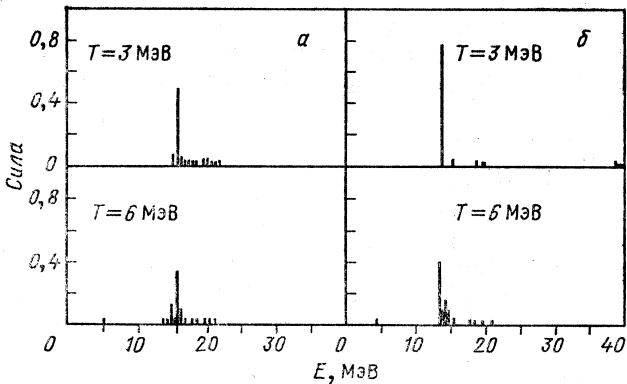


Рис. 15. Распределение силы ЭВПС для изоскалярных  $2^+$ -мод для ядра  $^{208}\text{Pb}$  при различных  $T$ :

а — в отсутствие корреляций; б — с учетом мультиполь-мультипольного остаточного взаимодействия

ные коллективные эффекты и некоторое подавление фрагментации (см. рис. 13—16, а также рис. 17). Этот результат находится в хорошем согласии с полным квантовым ПСФ-анализом, выполненным с реалистическими силами [32]. Наблюдается аналогичное увеличение силы низколежащих состояний в случае квадрупольных переходов

(см. рис. 17), как и ожидалось в случае сглаживания первоначальной функции распределения и частичного ослабления принципа Паули.

Константы мультиполь-мультипольного остаточного взаимодействия при анализе фиксировались без учета какой-либо температурной зависимости. По всей видимости, это предположение является

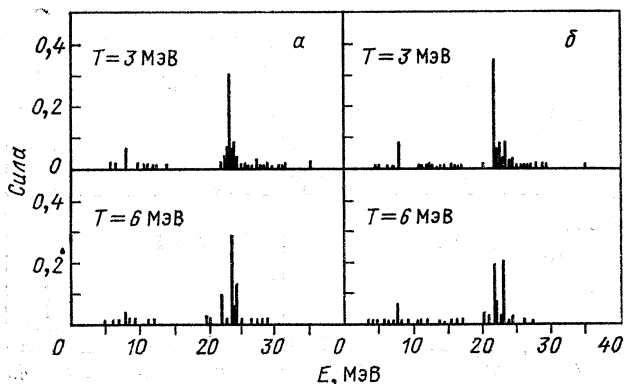


Рис. 16. То же, что и на рис. 15, для 3-мод

удовлетворительным для изоскалярных мод в случае низких температур [33]. Случай высоких температур заслуживает отдельного рассмотрения и соответствующих исследований. Тем не менее при  $T \neq 0$  наилучшая константа связи  $k_0$  [см. уравнение (52)], полученная

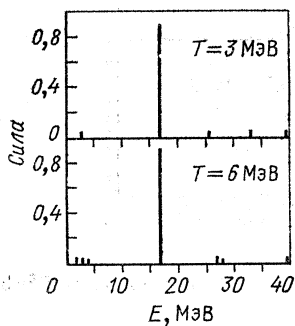


Рис. 17. Распределение силы ЭВПС для изоскалярных  $2^+$ -мод для ядра  $^{40}\text{Ca}$  при различных  $T$  с остаточным взаимодействием типа  $dV/dr$

из условия восстановления трансляционной инвариантности, имела слабую температурную зависимость, возрастая на 10 % при  $T = 6$  МэВ.

В заключение отметим, что центры силы гигантских резонансов не подвержены сильному воздействию температуры. В этом смысле устойчивость гигантских резонансов может служить четким указа-

нием пределов ядерной стабильности. Однако температурные эффекты могут быть достаточно большими при описании ширин, связанных с затуханием. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

## 7. ИЗОВЕКТОРНЫЕ МОДЫ

Обобщение линеаризованного подхода Власова для изучения изовекторных мод не представляет затруднений. Рассмотрим систему уравнений для двух жидкостей, связанных между собой самосогласованным членом взаимодействия. Для вариации функции распределения имеем

$$\frac{\partial q_q}{\partial t} + \{g_q, h_{0q}\} = \{(\delta\omega_q + \beta(t)Q), h_{0q}\}, \quad (67)$$

где  $q = n, p$ .

Следуя процедуре, рассмотренной ранее, можно получить точные решения: Необходимо отметить некоторые моменты [34]:

1. Здесь мы имеем различные средние поля и различные занятые классические орбиты для нейтронов и протонов. Необходимо фиксировать все параметры, чтобы иметь правильное число нейтронов и протонов и соответствующие энергии Ферми  $E_F^n = E_F^p$ . Напомним, что в квазиклассическом подходе число частиц определяется посредством соотношения

$$A_q = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda_{\max}^q} \lambda d\lambda \left[ 2m_q \int_{r_1(\lambda)}^{r_2(\lambda)} v_q(r) dr \right], \quad (68)$$

где поле скоростей определено как

$$v_q(r) = \left[ \frac{2}{m_q} \left( E_F^b - v_q^{\text{эф}}(r, \lambda) \right) \right]^{1/2}, \quad (69)$$

а  $r_{1,2}(\lambda)$  — классические точки поворота для орбиты  $(\lambda, E_F)$  и  $v_q^{\text{эф}}(r, \lambda)$  — радиальный потенциал, включающий кулоновский и центробежный члены. В результатах, представленных здесь и полученных с помощью одночастичного потенциала Вудса — Саксона, параметры среднего поля для нейтронов и протонов выбраны в соответствии с предписаниями полного самосогласованного расчета по Хартри — Фоку.

2. Если мы используем сепарабельные остаточные взаимодействия, аналогичные мультиполь-мультипольным силам, то сможем получить простые оценки самосогласованного члена  $\delta\omega_q$  в линеаризованных уравнениях Власова для изовекторного движения. Полная вариация среднего поля для изоскалярных мод [см. уравнение (24)] есть

$$\delta W_0 = \delta W_n + \delta W_p = k(T=0) \int u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (70)$$

а для изовекторных мод

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= \delta W_n - \delta W_p = \\ &= k (T = 1) \int u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\delta \rho_n(\mathbf{r}') - \delta \rho_p(\mathbf{r}')] d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (71)$$

Для изовекторного движения в случае ядер с  $N = Z$  имеем  $\delta \rho_n = -\delta \rho_p$  и, соответственно,

$$\delta W_n = k (T = 1) \int u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta \rho_n(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'; \quad (72)$$

$$\delta W_p = k (T = 1) \int u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta \rho_p(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (73)$$

В случае  $N \neq Z$  можно предположить пропорциональность распределения плотности нейтронов и протонов и, следовательно, положить

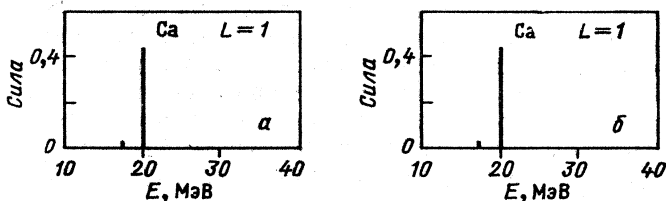


Рис. 18. Распределение силы дипольных изовекторных мод для ядра  $^{40}\text{Ca}$  в случае нейтронов (а), протонов (б)

$Z\delta \rho_n = -N\delta \rho_p$  в случае коллективного движения. Соответственно с помощью уравнений (70) и (71) получим

$$\begin{aligned} \delta W_n &= \left[ \frac{k(T=1) + k(T=0)}{2} + \right. \\ &+ \left. \frac{Z}{N} \frac{k(T=1) - k(T=0)}{2} \right] \int u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta \rho_n(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'; \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \delta W_p &= \left[ \frac{k(T=1) + k(T=0)}{2} + \right. \\ &+ \left. \frac{N}{Z} \frac{k(T=1) - k(T=0)}{2} \right] \int u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta \rho_p(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (75)$$

Результаты данного раздела получены для остаточного мультиполь-мультипольного взаимодействия, изоскалярная константа которых фиксирована, так же как и в разд. 4. Для изовекторной константы выбрана параметризация вида [19]

$$k_L(T=1) = \frac{\pi V_1}{A \langle \langle r^{2L} \rangle \rangle} > 0, \quad (76)$$

где  $V_1 = 130$  МэВ [35]. Среднее значение  $\langle \langle r^{2L} \rangle \rangle$  рассчитано с помощью распределения Ферми, согласованного со средним полем потенциала Вудса — Саксона (см. разд. 4). На рис. 18—23 показано распределе-

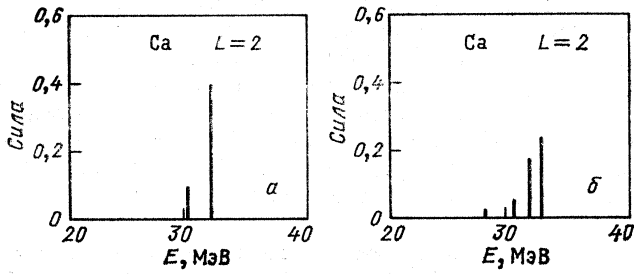


Рис. 19. То же, что и на рис. 18, для квадрупольных изовекторных мод

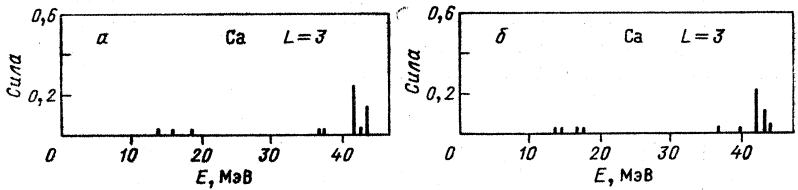


Рис. 20. То же, что и на рис. 18, для октупольных изовекторных мод

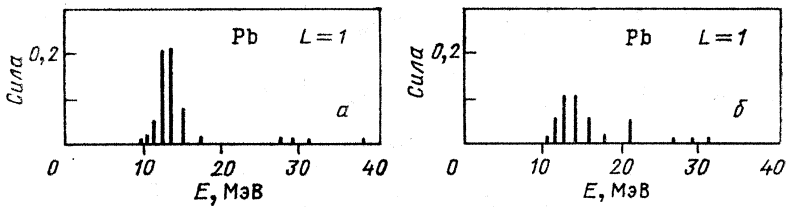
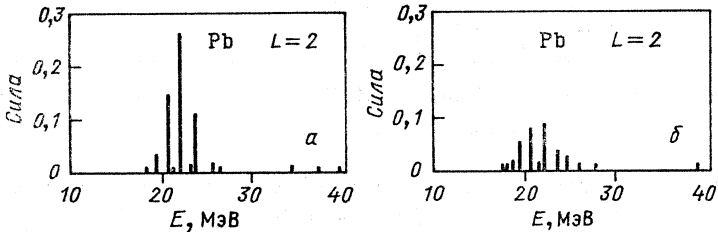
Рис. 21. Распределение силы для дипольных изовекторных мод для ядра  $^{20}\text{Pb}$  в случае нейтронов (а), протонов (б)

Рис. 22. То же, что и на рис. 21, для квадрупольных изовекторных мод

ние силы дипольных квадрупольных и октупольных мод для ядер  $^{40}\text{Ca}$  и  $^{208}\text{Pb}$  (вклады нейтронных и протонных орбит нормированы относительно полного ЭВПС). Так же как и в случае изоскалярных мод, результаты удивительно похожи на полные квантовые расчеты ПСФ [27]. В частности, наблюдается большая фрагментация силы по сравнению со случаем изоскалярных мод, что может служить указанием на большую роль в определении характера конечных спредовых ширин изовекторных резонансов механизма затухания Ландау.

Таблица 2. Основные частоты с относительным вкладом в ЭВПС от нейтронов и протонов для ГР (дипольных, квадрупольных, октупольных) для  $^{208}\text{Pb}$  и  $^{40}\text{Ca}$ . Центроиды рассчитаны с использованием весов отдельных решений в ЭВПС и с учетом исчерпывания ЭВПС в резонансной области

Компонента	Диполи		Квадруполи		Октуполи	
	Полюсы, МэВ	ЭВПС, %	Полюсы, МэВ	ЭВПС, %	Полюсы, МэВ	ЭВПС, %
$^{40}\text{Ca}$						
<i>n</i>	14,85	0,7	29,65	8,7	41,47	24,4
	17,80	3,3	31,71	39,40	42,29	2,9
	19,81	45,6			43,19	1,4
<i>p</i>	15,51	1,4	27,58	1,3	41,77	22,7
	17,09	1,9	29,71	4,6	43,10	12,2
	19,92	45,8	31,23	17,25	43,80	5,4
			32,26	24,52		
Центроиды	19,62	98,7	31,42	95,77	42,9	69,0
$^{208}\text{Pb}$						
<i>n</i>	12,32	20,8	20,43	14,4	28,20	21,0
	13,45	21,25	21,68	26,1	29,35	23,3
	14,95	7,9	23,21	10,7	31,07	7,6
<i>p</i>	11,55	5,7	19,21	5,4	26,84	5,6
	12,77	10,4	20,47	7,9	27,60	4,8
	14,15	10,8	21,87	9,2	28,96	3,5
	15,53	5,7				
Центроиды	13,33	82,55	21,37	73,7	28,82	65,8

В табл. 2 представлены для каждой моды основные полюсы для нейтронных и протонных орбит и соответствующий процентный вклад в ЭВПС. Мы рассчитали положение центроидов с помощью процентного вклада в ЭВПС, а также вклад данного состояния

в правило сумм, которое исчерпывалось в резонансной области. Отметим, что для изовекторных дипольных резонансов в  $^{208}\text{Pb}$  мы получили положение центроидов, вклад в ЭВПС и общее распределение силы в согласие с данными GANIL ( $E_{\text{ц}}^* \approx 22,6$  МэВ, доля

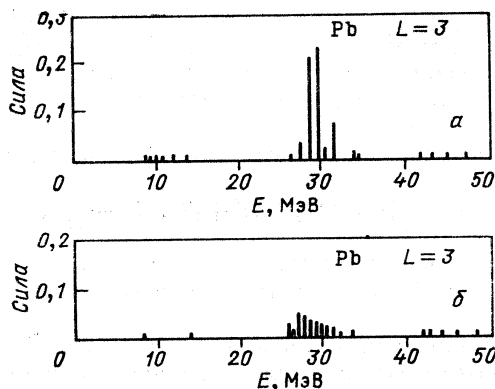


Рис. 23. То же, что и на рис. 21, для октупольных изовекторных мод

в ЭВПС  $\geq 50\%$ ,  $\Gamma = (6 \pm 2)$  МэВ) [36]. Для изовекторных октупольных мод мы получили четко выделенную область вблизи  $E_{\text{у}}^* \approx 29$  МэВ, но с достаточно большой фрагментацией.

## 8. СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЙ ЧЛЕН И ШИРИНЫ ГИГАНТСКИХ РЕЗОНАНСОВ

Из изложенного выше следует, что при учете остаточного взаимодействия фрагментация распределения силы для нижайших мультиполей  $L = 2,3$  заметно уменьшается. Это означает, что для этих изоскалярных мод один механизм затухания Ландау (однотельная диссипация) не в состоянии воспроизвести ширины коллективных состояний, что согласуется с выводами работы [37]. Подход Власова представляется вполне подходящим для исследования связи между одно- и двухтельной диссипациями, так как мы можем естественным образом расширить его, включив столкновительные члены, дополняя кинетическое уравнение Ландау столкновительным интегралом Улинга — Уленбека [38]. Простейший способ учесть столкновения частица — частица — это использовать метод релаксационного времени, когда к уравнению Власова добавляется член, описывающий изменение первоначального распределения относительно нового равновесного распределения вследствие эффектов столкновений. Этот подход оказался достаточно эффективным при описании эффектов столкновений в тяжелоионной динамике промежуточных энергий [39] и легко может быть включен при решении наших линеаризованных уравнений.

Уравнение Власова со столкновительным членом имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{h + \beta Q, f\} - \frac{f - f_0^*}{\tau}, \quad (77)$$

где  $\tau$  — релаксационное время столкновения и  $f_0^*$  — новая функция распределения. Если начать с холодной системы, то  $f_0^*$  является функцией распределения Ферми при конечной температуре. Выбор величины  $f_0^*$ , кроме прочего, обусловлен также и тем, что столкновительный член не нарушает законов сохранения масс, моментов и кинетической энергии.

Теперь линейризованное уравнение (22) имеет вид

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \{h_0, g\} + \{\delta W + \beta Q, f_0\} - \frac{g}{\tau}, \quad (78)$$

где мы пренебрегли членом  $(f_0 - f_0^*)/\tau$ , поскольку рассматриваемая энергия возбуждения соответствует относительно небольшим температурам.

Непосредственным вычислением можно показать, что наличие линейного члена в уравнении для  $g$  приводит к комплексным частотам (см. уравнения (4.6) — (4.8) в [15]) и комплексным вычетам. Новые некоррелированные полюсы имеют вид

$$\tilde{\omega}_n(N) = n \frac{2\pi}{T} + N \frac{\Gamma}{T} - \frac{i}{\tau} = \omega_n(N) - \frac{i}{\tau}, \quad (79)$$

а вычеты определяются соотношением

$$\tilde{Q}(n, N) = A + iB, \quad (80)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2}{T} \int_{r_1}^{r_2} dr' \frac{Q_{LM}(r')}{v(r')} \cos[s_n(N, r')] \operatorname{ch} \left[ \frac{\tau(r)}{\tau} \right] \\ \text{и} \\ B &= \frac{2}{T} \int_{r_1}^{r_2} dr' \frac{Q_{LM}(r')}{v(r')} \sin[s_n(N, r')] \operatorname{sh} \left[ \frac{\tau(r)}{\tau} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Легко показать, что в отсутствие столкновений  $\tau \rightarrow \infty$  мы получаем старые результаты [ $A \rightarrow Q(n, N)$ , уравнение (39),  $B \rightarrow 0$ ].

Поляризационный пропагатор свободного движения в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_L^0(\omega) &= \frac{8\pi^2}{2L+1} \sum_{n, N} \int dE F'(E) \int d\lambda \lambda \left| Y_{LM} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right|^2 \times \\ &\times T \frac{\tilde{\omega}_n(N)}{\omega - \tilde{\omega}_n(N)} |\tilde{Q}(n, N)|^2 \end{aligned} \quad (82)$$



и соответственно некоррелированная силовая функция определяется соотношением

$$S_L^0(\omega) = -\frac{1}{\pi} \beta_L^0(\omega) = \frac{8\pi^2}{2L+1} \sum_{n, N} \int dE F'(E) \times \\ \times \int d\lambda \lambda \left| Y_{LN} \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right|^2 T \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\omega}{\tau} (A^2 + B^2)}{(\omega - \omega_n(N))^2 + \frac{1}{\tau^2}}. \quad (83)$$

Мы сконструировали самосогласованную функцию отклика при учете столкновительных членов, используя остаточное мультиполь-мультипольное взаимодействие. В случае сепарабельного взаимодействия выражение для коррелированного пропагатора [см. уравнение (43)] приводится к виду

$$\Pi_L(\omega) = \frac{\Pi_L^0(\omega)}{1 - k(L) \Pi_L^0(\omega)} \quad (84)$$

и, соответственно, учитывая комплексную структуру величины  $\Pi_L^0(\omega)$ , уравнение (82), окончательно для коррелированной силовой функции получаем

$$S_L(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi_L(\omega) = \frac{S_L^0(\omega)}{(1 - k(L) \alpha_L^0(\omega))^2 + k(L)^2 \pi^2 S_L^0(\omega)}. \quad (85)$$

Таким образом, с помощью выражений (82), (83) и (85) мы легко можем сконструировать все необходимые силовые функции, зафиксировав один раз релаксационное время. Окончательно из поведения величины  $S_L(\omega)$  в области гигантского резонанса можно оценить ширину коллективной моды, обусловленной затуханием.

На рис. 24 показано два силовых распределения, с корреляциями и без них, для изоскалярной квадрупольной моды ядра  $^{40}\text{Ca}$ . Релаксационное время  $\tau$  выбрано из условия  $\Gamma = \hbar/\tau = 1$  МэВ. Отчетливо видно, что ширина в области гигантского резонанса значительно возросла примерно на 3—4 МэВ. Силовые единицы на оси ординат на левом и правом рисунках — различны. На правом — отложены абсолютные значения в единицах  $\text{фм}^4$ , что удобно для прямого извлечения значения средней ширины; на левом — приведена доля вклада в ЭВПС. Этот рисунок типичен для силовой функции, аналогичная картина имеет место и в случае октуполей.

Можно сделать следующие выводы:

1. Остаточное взаимодействие без учета столкновений приводит к сильным коллективным эффектам, когда почти нет сильной фрагментации в распределении силы (затухание Ландау отсутствует).
2. Если мы выходим за рамки ПСФ и учитываем столкновительные ширины в некоррелированных собственных частотах, по-прежнему наблюдается сдвиг и концентрация распределения силы, хотя окончательная ширина существенно больше по сравнению с той, описание

которой связано с релаксационным временем. Это означает, что мы не можем просто суммировать две ширины, обусловленные затуханием Ландау и столкновениями. Имеет место сложная взаимосвязь между двумя источниками коллективной диссипации, связанная с самосогласованностью динамики: затухание Ландау — это усиление антиколлективного эффекта двухчастичных столкновений.

Основная проблема состоит в определении времени релаксации для конечной холодной ферми-системы, в частности для гигантских

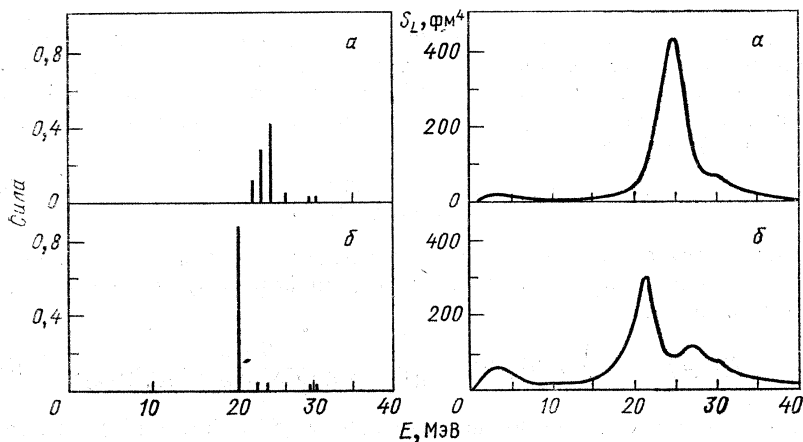


Рис. 24. Распределение силы ЭВПС для изоскалярных  $2^+$ -мод в случае ядра  $^{40}\text{Ca}$  без учета (слева) и с учетом (справа) столкновительной ширины  $\hbar/\tau = 1$  МэВ:

$\alpha$  — без учета корреляций;  $\beta$  — с учетом мультиполь-мультипольного остаточного взаимодействия

мод. В нашем случае главным образом коллективные деформации в импульсном пространстве ответственны за двухчастичные столкновения.

Рассмотрим деформации квадрупольного типа, которые позволяют наиболее хорошо воспроизвести коллективное поведение изоскалярных резонансов с  $L = 2, 3$  (скейлинговое приближение, см. [14, 20, 21] и приложение). Нуклоны могут сталкиваться в области, соответствующей вытянутой части распределения, так как первые моменты не запрещены полностью принципом Паули, как в случае сферически-симметричного распределения. Этот эффект будет зависеть от  $L$  через амплитуду осцилляции в импульсном пространстве. Температурные эффекты будут повышать вероятность столкновений. Наконец, механизм испускания частиц, который ответствен за ширины, связанные с вылетом в состоянии непрерывного спектра, будет конкурировать с двухчастичными столкновениями в ослаблении коллективного движения.

Все перечисленные пункты рассмотрены в следующем разделе, где дана согласованная квазиклассическая оценка релаксационного времени для гигантских резонансов.

### 9. ДЕФОРМАЦИЯ СФЕРЫ ФЕРМИ И РЕЛАКСАЦИОННОЕ ВРЕМЯ ДЛЯ ГИГАНТСКИХ РЕЗОНАНСОВ

При нулевой температуре только деформация импульсного распределения нуклонов позволяет получить двухчастичные столкновения в ядерной среде. Действительно, если нуклоны некоторое время находятся вне сферы Ферми, они могут сталкиваться, т. е. их результирующий момент не полностью блокируется принципом Паули. Это имеет место в случае гигантских резонансов, которые хорошо описываются в фазовом пространстве как скейлинговые осцилляции с соответствующим искажением в импульсном пространстве (см. приложение). В этом разделе мы рассмотрим изовекторные гигантские дипольные и изоскалярные квадрупольные моды.

Для гигантских квадрупольных мод имеем деформацию сферы Ферми следующего типа:

$$\begin{aligned} p_x &\rightarrow p_x (1 + 2\alpha); \\ p_y &\rightarrow p_y (1 + 2\alpha); \\ p_z &\rightarrow \frac{p_z}{(1 + 2\alpha)^2} \approx p_z (1 - 4\alpha). \end{aligned} \quad (86)$$

Соответствующее изменение распределения кинетической энергии определяет энергию коллективного движения [10]

$$E_{\text{ГКР}} = A \varepsilon_F \frac{48}{5} \alpha_{\text{max}}^2. \quad (87)$$

С помощью вириальной теоремы получим среднее значение параметра деформации

$$\alpha_{\text{ГКР}}^2 \approx (1/2) \alpha_{\text{max}}^2. \quad (88)$$

Удобной мерой деформации в импульсном пространстве является отношение

$$R = \frac{2 \langle p_y^2 \rangle}{\langle p_x^2 \rangle + \langle p_y^2 \rangle} = \frac{\langle p_z^2 \rangle}{\langle p_x^2 \rangle} = \frac{1}{(1 + 2\alpha)^6}. \quad (89)$$

Для изовекторных дипольных мод имеем внефазовые скейлинговые осцилляции нейтронов относительно протонов вдоль некоторой произвольной оси. В импульсном пространстве нейтронные и протонные сферы Ферми будут разделены величиной  $\Delta p$ , максимум которой связан с энергией гигантского дипольного резонанса следующим образом:

$$(N + Z) \frac{(\Delta p_{\text{max}}^2/2)}{2m} = E_{\text{ГДР}} \quad (90)$$

со средним значением

$$\Delta p^2 = \frac{1}{2} \Delta p_{\max}^2. \quad (91)$$

Это расстояние между двумя сферами Ферми играет роль параметра деформации. Так как энергии ГКР и ГДР имеют зависимость  $A^{-1/3}$ , мы получаем точную зависимость  $A^{-2/3}$  для соответствующих амплитуд деформаций в импульсном пространстве. Большая деформация означает большее ослабление принципа Паули, а следовательно, большее число столкновений, и тогда следует ожидать увеличения затухания, связанного со столкновениями, в зависимости от массового числа: этот эффект можно было бы наблюдать при окончательном описании экспериментальных ширин гигантских резонансов. Кроме того, в соответствии с изложенным выше мы также предсказываем мультипольную зависимость релаксационного времени при столкновении.

Фиксируя начальное искажение, проследуем по равновесной траектории, решая микроскопическое временное эволюционное уравнение функции импульсного распределения:

$$\frac{\partial g(\rho)}{\partial t} = I[g].$$

Мы используем подход тестовых частиц, а интеграл столкновений  $I[g]$  суммируем с помощью  $s$ -волнового рассеяния между псевдо-частицами [40]. На каждом шаге по времени процедура описания столкновения состоит в следующем [41]:

- 1) две тестируемые частицы ( $s, j$ ) выбираются случайным образом в занимаемом или импульсном пространстве в момент времени  $t$ ;
- 2) длина свободного пробега определяется как величина

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_{NN}\rho_T/N} = \frac{1}{\sigma_{NN}\rho}, \quad (92)$$

где  $\sigma_{NN}$  — усредненное сечение нуклон-нуклонного рассеяния и  $\rho = \rho_T/N$  — нормальная ядерная плотность. Мы используем  $\rho = 0,145 \text{ фм}^{-3}$ , согласованное с  $p_F = 260 \text{ МэВ/с}$ ;

- 3) вероятность столкновения вводится как величина

$$P_{ij} = \Delta t / \Delta t_{\text{ст}}, \quad (93)$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени, а  $\Delta t_{\text{ст}} = \lambda / v_{ij}$  ( $v_{ij}$  — относительная скорость двух тестируемых частиц) есть среднее время между двумя столкновениями. Чтобы учесть все возможные столкновения, необходимо выбрать  $\Delta t \leq \Delta t_{\text{ст}}$ . Минимальное значение  $\Delta t_{\text{ст}}$ , без учета принципа Паули, есть  $\Delta t_{\text{ст}} \sim \frac{1}{\sigma \rho 2 v_F} \sim 3 \text{ фм/с}$ ;

- 4) вводится случайное число  $x$  в интервале (0,1) и сравнивается с  $P_{ij}$ .

Если  $x < P_{ij}$ , имеет место столкновение, и выбираются случайные  $p_{ij}$  и  $p_{jf}$  с учетом сохранения энергии и моментов.

Условия 3) и 4) гарантируют, что тестируемые частицы в своем большинстве имеют в среднем длину пробега  $\lambda$ . Реальная длина пробега на самом деле больше из-за принципа Паули. Столкновение допускается, если два результирующих момента  $p_{if}$ ,  $p_{jf}$  соответствуют незанятым состояниям.

На рис. 25 показано релаксационное время столкновений для ГКР в зависимости от массового числа. Тире-линии представляют результаты, полученные при фиксированном сечении  $\sigma_{NN} = 40 \times 10^{-27} \text{ см}^2$ , соответствующем среднему сечению нуклон-нуклонного рассеяния свободно движущихся частиц с относительным импульсом

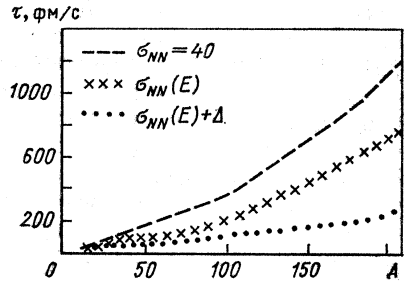


Рис. 25. Зависимость релаксационного времени столкновений в случае изоскалярного гигантского квадрупольного резонанса от массового числа. Пояснения см. в тексте.

порядка  $2r_F$ . С помощью крестиков представлены результаты расчета релаксационного времени, полученные с зависящим от энергии и изоспина сечением, параметризованным в соответствии с нуклон-нуклонными экспериментальными данными. Поскольку мы учитываем низкоэнергетическое увеличение, то получается меньшее время установления равновесия. Интересно отметить, что вариации менее важны для средних элементов, т. е. при больших амплитудах деформации. В этом случае доминирующими столкновениями, ведущими к установлению равновесия, являются столкновения между нуклонами, находящимися на краю распределения, при относительных моментах около  $2r_F$ . Точечная линия представляет результаты, полученные при учете блокировки, обусловленной принципом Паули, на каждом отрезке времени. Отметим существенное увеличение релаксационного времени для тяжелых элементов.

Мы ввели зависящую от времени блокировку Паули, используя метод «явной температуры», который модифицирует функцию распределения при стремлении к равновесию. На каждом временном интервале рассматривался фактор блокировки  $[1 - f(p)]$  с распределением типа Ферми

$$f(p) = \left\{ 1 + \exp \left[ \frac{(E(p) - \mu)}{T} \right] \right\}^{-1}, \quad (94)$$

где  $E(p)$  — эллипсоид для ГКР и две смещенные сферы для нейтронов и протонов в случае ГДР. Химический потенциал в низкотемпе-

ратурном пределе определяется с помощью соотношения

$$\mu(T) = \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{T^2}{\varepsilon_F} \right], \quad (95)$$

где  $T = \sqrt{15\varepsilon_T(t)}$ ;  $\varepsilon_T(t)$  — термическая энергия возбуждения одной частицы на каждом временном интервале. Процедура очевидна: на каждом шаге с помощью распределения тестируемых частиц рассчитываются параметры деформации и, соответственно, коллективные энергии. Вычитая их из начальной плотности энергии возбуждения, которая является полностью коллективной, мы определяли величину  $\varepsilon_T(t)$ , т. е. количество энергии, диссипировавшей в некоторую термическую моду. Таким образом, на каждом временном интервале можно построить новое искаженно-тепловое распределение [см. уравнение (94)] с целью учета его в факторе блокировки Паули. Временная зависимость «температуры» имеет физический смысл реальной температуры только при достижении системой окончательного равновесия. Следует ожидать экспоненциального характера достижения конечного значения, управляемого посредством релаксационного времени, для которого имеет место соотношение  $T(t) = T_{\text{fin}} [1 - \exp(-\hbar/\tau)]$ , хорошо воспроизводимое при численных расчетах релаксационного времени.

Ширины столкновений  $\hbar/\tau$ , рассчитанные выше, в общем случае меньше в 2—3 раза, чем наблюдаемые ширины, обусловленные затуханием. С другой стороны, если мы ограничим рассмотрение только механизмом затухания Ландау, т. е. фрагментацией силы в функции отклика ПСФ, то также получим небольшие значения соответствующих ширин гигантских квадрупольных и дипольных резонансов, практически не зависящих от используемых остаточных взаимодействий [16, 27, 37]. Таким образом, следует ожидать достаточно сложную взаимосвязь между дальнедействующими (однотельной диссипацией) и короткодействующими (двухчастичными столкновениями) корреляциями, обусловленными самосогласованной динамикой, которая, в конечном счете, была бы способна воспроизвести наблюдаемые ширины.

Об этой взаимосвязи уже упоминалось в работе [16], в которой решалось уравнение Власова для движения с малой амплитудой с учетом столкновительного члена для описания релаксационного времени, сепарабельного остаточного взаимодействия и всех самосогласованных эффектов. Мы следовали этому подходу при определении конечных полных ширин с помощью расчетов с релаксационным временем.

На рис. 26 показаны результаты для ГКР. Штрихованные линии показывают результаты расчетов значений конечной ширины, полученных при использовании метода релаксационного времени без переопределения блокировки Паули. Штрихпунктирные линии представляют результаты полных расчетов. Аналогичные результаты получены для гигантских дипольных мод с помощью метода работы [34].

Из рис. 26 следует, что мы воспроизводим экспериментальные значения ширины для сферических ядер в случае тяжелых элементов, однако переоцениваем их в области небольших масс. Объяснение достаточно просто — это эффект прямой эмиссии нуклонов, которая начинает конкурировать со столкновениями при определении релаксационного времени гигантских резонансов в средних по массе ядрах. Более подробно обсуждение этого эффекта будет дано в конце следующего раздела.

В заключение нам хотелось бы отметить важность сечения нуклон-нуклонного рассеяния при микроскопических расчетах релаксационных времен. Кроме того, при использовании корректного углового распределения [важного при ( $n - p$ )-столкновениях] мы получаем значительно большие времена столкновений и лучшее согласие с экспериментом.

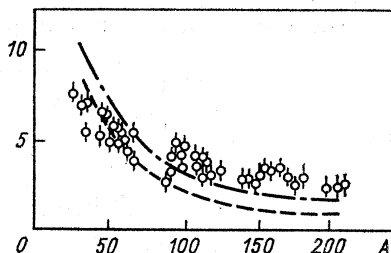


Рис. 26. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными для ширины ГР

#### 10. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ЗАТУХАНИИ ГИГАНТСКИХ РЕЗОНАНСОВ

В последнее время новые экспериментальные данные, в большей степени, сфокусированы на исследовании структуры гигантских резонансов, возбуждаемых в нагретых ядрах (см. [1, 2] и ссылки в них). Сложилось общее мнение по поводу того, что энергии резонансов несильно подвержены влиянию температуры (см. предыдущий раздел); однако вопрос о влиянии температуры на ширину пока остается открытым.

В рамках нашего метода относительно просто ввести температурные эффекты при расчете релаксационных времен гигантских резонансов: необходимо стартовать с деформированного ферми-распределения с начальной температурой  $T_{in} \neq 0$  и следовать далее в столкновительной динамике за временной эволюцией температурного параметра по направлению к конечному равновесному значению. Вновь мы получаем экспоненциальное поведение с новыми релаксационными временами, зависящими от начальной температуры. На рис. 27, 28 показаны типичные отношения  $(T_{fin} - T(t))/(T_{fin} - T_{in})$  для гигантских квадрупольных и дипольных резонансов в  $^{40}\text{Ca}$  с начальной температурой 0,4; 1; 2; 3 МэВ и соответствующие релаксационные времена. В случае легких и тяжелых элементов, имеющих совершенно различные деформации в пространстве импульсов, мы получаем совершенно различные релаксационные времена при нулевой температуре. При увеличении температуры  $\tau$ -времена (см. рис. 29 для ГР в Рb и Ca) стремятся к общему значению порядка

20 фм/с: столкновения все больше и больше обусловлены размыванием ферми-поверхности в основном за счет температуры, по сравнению с деформационными эффектами. Ключевым параметром является отношение  $\varepsilon_T/\varepsilon_D$ , где  $\varepsilon_T = \pi^2 T^2/4\varepsilon_F$  — плотность термической энергии и  $\varepsilon_D$  — плотность энергии деформации. Микроскопические

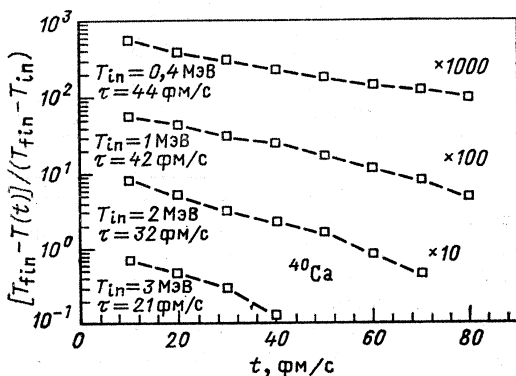


Рис. 27. Зависимость величины  $[T_{f\text{in}} - T(t)] / (T_{f\text{in}} - T_{\text{in}})$  от времени в случае ГКР. Пояснения см. в тексте

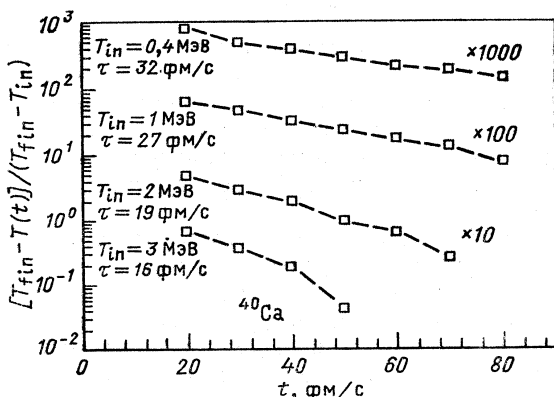


Рис. 28. То же, что и на рис. 27, для ГДР

результаты достаточно хорошо воспроизводятся (штрихованные линии на рис. 29) с помощью соотношения

$$\frac{1}{\tau(T)} = \frac{1}{\tau(0)} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_D} \right]. \quad (96)$$

Так как  $\tau(0) \sim \varepsilon_D^{-1}$ , то это означает, что при  $\varepsilon_T \gg \varepsilon_D$  плотность термической энергии возбуждения будет определять релаксационные времена.



Рис. 29. Зависимость релаксационного времени  $\tau$  от температуры для ядер  $^{40}\text{Ca}$  и  $^{208}\text{Pb}$ 

В заключение раздела проясним физический смысл полученных результатов. При увеличении температуры ширина столкновений  $\hbar/\tau$  всегда увеличивается, достигая значений порядка 10—15 МэВ при  $T = 3$  МэВ, независимо от массового числа как для ГДР, так и для ГКР. Это приводит к очень большой конечной ширине затухания при включении в рассмотрение связи с затуханием Ландау.

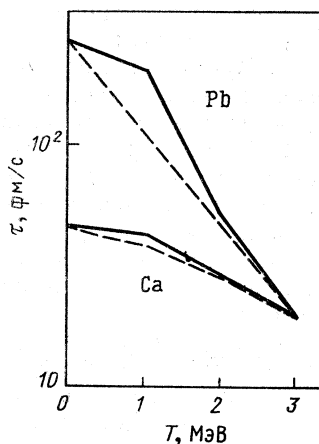
Данные результаты могут быть дополнены эскейп-ширинами, обусловленными прямой эмиссией нуклонов, которые также подвержены воздействию температурных эффектов. Данная проблема поддается рассмотрению в самосогласованном микроскопическом квазиклассическом подходе [42]. Вследствие прямого испускания нуклонов в конкуренции с процессами столкновений при установлении равновесия в системе для полного времени релаксации имеем

$$\hbar/\tau_{\text{рел}} = \hbar/\tau_{\text{ст}} + \Gamma \uparrow. \quad (97)$$

Тогда время столкновений [см. уравнения (77) — (83)] будет зависеть от времени эмиссии нуклонов. При нулевых температурах эскейп-ширины важны только для легких и средних элементов, где мы недооцениваем конечные ширины, а следовательно, будет иметь место лучшее согласие с экспериментальными данными. При увеличении температуры эскейп-ширины, обусловленные коллективным движением, становятся менее важными по сравнению со статистическими ширинами, и мы надеемся, что основные выводы относительно увеличения конечных ширин не изменятся.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, представленные в данном обзоре, очевидным образом показывают, что использование теории Власова в теории ядра представляет достаточно надежный метод количественных предсказаний при изучении ядерного коллективного движения. Это представляется важным не только вследствие простоты при количественной реализации и прозрачности при интерпретации физических результатов, но и в связи с тем, что метод позволяет достаточно просто исследовать необычные проблемы, связанные с температурой или затуханием двухчастичных столкновений.



Подытожим основные моменты проведенного нами квазиклассического анализа:

1. Кроме принципа Паули, включенного в статическую функцию распределения, удается с помощью чисто классической динамики воспроизвести детальные свойства ядерных коллективных возбуждений.

2. Можно использовать прямое соответствие с результатами полной квантовой теории, чтобы ввести квантовые поправки, начиная от спин-орбитальных членов до обменных эффектов.

3. Достаточно просто исследовать высоколежащие изовекторные и изоскалярные моды различной мультипольности. При этом мы предсказываем достаточно интересное распределение силы высоколежащих состояний.

4. Влияние температуры не столь существенно на результаты вычислений конечной функции отклика; по крайней мере, если остаточное взаимодействие не подвергалось изменению. При этом наблюдается увеличение силы низколежащих состояний.

5. Двухчастичные столкновения являются существенными для воспроизведения ширины гигантских резонансов. Однако самосогласование подразумевает достаточно сложную связь между затуханием Ландау и затуханием, обусловленным столкновениями. Проследить эту взаимосвязь при конечных температурах представляется достаточно интересной проблемой. В любом случае время столкновений должно зависеть от мультипольности рассматриваемой коллективной моды.

Был выполнен полный анализ механизма затухания в квазиклассическом подходе. Рассматривая гигантские резонансы как осцилляции распределений нуклонов в импульсном пространстве, мы оценили затухание, обусловленное двухчастичными столкновениями, используя подход тестируемых частиц. При этом была показана важность учета энергетической зависимости сечения нуклон-нуклонного рассеяния и временной эволюции блокировки, обусловленной принципом Паули. Релаксационное время столкновений, рассчитанное с учетом вышеперечисленных эффектов, использовалось в линеаризованных уравнениях Ландау — Власова для расчета конечных спредовых ширин. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными для ГКР и ГДР в зависимости от массового числа, за исключением данных для ядер из области средних массовых чисел, где теоретические результаты недооценивают значения ширин. Согласие должно улучшиться при учете эйскейповых ширин, которые могут быть согласованным образом рассчитаны в рамках данного подхода. Это обусловлено прямым вкладом процессов испускания энергичных нуклонов при установлении равновесия системы в конкуренции с нуклон-нуклонными столкновениями.

Мы предсказываем достаточно заметное влияние температурных эффектов на оценку спредовых ширин. Затухание, обусловленное столкновениями, достаточно быстро увеличивается с температурой,

и при  $T = 3$  МэВ релаксационное время является достаточно коротким и не зависит от массового числа, т. е. от начальной деформации в импульсном пространстве.

Суммируя, отметим, что рассмотренный квазиклассический подход описания коллективной динамики является достаточно общим и может быть использован для изучения коллективного движения любой конечной ферми-системы, с учетом и изменением при этом соответствующим образом характерных черт среднего поля (одночастичные орбиты) и остаточного взаимодействия. С этой точки зрения выглядят достаточно интересно и обещающе результаты, полученные при описании гигантских дипольных мод в металлических кластерах [43, 44]. Отметим, что в рассмотренном подходе достаточно важно иметь четкое фазовое распределение ядерного коллективного движения, основанного на надежном микроскопическом базисе. С этой целью мы добавили в представленный материал приложение об использовании скейлинговых представлений при описании свойств гигантских резонансов.

Многие результаты, представленные в статье, получены в совместных исследованиях. Выражаю глубокую благодарность моим коллегам, прекрасным людям, которые участвовали в совместной работе: Д. М. Бринку (Оксфорд), А. Делафиоре (Флоренция), У. Цаю (Шанхай), А. Бонассеро, Ф. Бурджино и Г. Руссо (Катания), Ф. Гульминелли (Милан) и Ж. Х. Волтеру (Мюнхен). Я благодарен за теплое гостеприимство, оказанное мне в течение нескольких моих визитов в последние годы в ОИЯИ (Дубна); особенно глубоко признателен В. Г. Соловьеву, И. Н. Михайлову и Е. Б. Бальбуцеву за их дружелюбие и плодотворные дискуссии. В заключение выражаю благодарность Р. Г. Назмидинову не только за перевод статьи, но и за многие полезные предложения.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

### ГИГАНТСКИЕ РЕЗОНАНСЫ КАК СКЕЙЛИНГОВЫЕ МОДЫ

В данной статье нами представлено множество результатов относительно свойств коллективного движения, которые можно описать с помощью точного решения линеаризованного уравнения Власова. Однако некоторые проблемы, как-то: деформация начального состояния [49], использование реалистических взаимодействий [50], эффекты, обусловленные угловым моментом, т. е. связь ротационно-вибрационного движения [51] — достаточно сложны при описании. Проблема значительно облегчается, если мы рассмотрим некоторые приближенные решения, скейлинговые моды, с помощью которых хорошо описываются гигантские резонансы, в частности, низкой мультипольности [14, 20, 21].

Основная идея исследования коллективного движения состоит в прослеживании решений уравнения Власова, связанных с искажением в импульсном пространстве низкими мультиполями исходного равновесного сферического распределения. Соответствующее разложение, которое можно использовать как для описания малых осцилляций, так и для описания коллективного движения с большой амплитудой, имеет вид

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}^2) + \{f_0, K(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\} + \frac{1}{2}\{K, \{K, f_0\}\}, \quad (\text{П.4})$$

где  $K$  — функция в фазовом пространстве, которая определяет меру «отклонения» от статического решения. Полезно разделить эту функцию на  $p$ -четную и  $p$ -нечетную части

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \chi_{\text{чет}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \xi_{\text{нечет}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (\text{II.2})$$

где  $p$ -четная часть может быть разложена в форме

$$\chi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \bar{\chi}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) p_{\alpha} p_{\beta} + \dots, \quad (\text{II.3})$$

а  $p$ -нечетный член имеет вид

$$\xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{6} \chi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) p_{\alpha} p_{\beta} p_{\gamma} + \dots \quad (\text{II.4})$$

Так как функция  $K$  находится в скобках Пуассона, легко увидеть, что  $p$ -четная часть дает  $p$ -нечетные моменты в искаженном распределении (т. е. ток), тогда как  $p$ -нечетный член дает  $p$ -четные моменты (т. е. переходную плотность, тензор давления и другие величины).

Вводя разложение (II.4) в уравнение Власова, мы получаем очень сложную систему нелинейных связанных дифференциальных уравнений для полей  $\chi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$  и др. Полезность этого разложения может быть реализована при условии обрезания зависимости от моментов функций  $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  и  $\xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  с помощью некоторого физического предположения.

Для малых осцилляций достаточно ограничиться первым членом разложения в уравнении (II.4), и тогда мы можем ввести условие максимальной коллективности (наименьшее возможное  $p$ -искажение)

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &\simeq \bar{\chi}(\mathbf{r}, t); \\ \xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &\simeq \mathbf{p}\mathbf{s}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Это немедленно позволяет построить  $p$ -моменты искаженного распределения в терминах полей  $\chi$  и  $\mathbf{s}$ . Для плотности имеем

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \delta\rho, \quad (\text{II.6})$$

где переходная плотность определяется как

$$\delta\rho = \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{s}),$$

ток, соответствующий безвихревому движению,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{\nabla \chi}{m}, \quad (\text{II.7})$$

а уравнение плотности кинетической энергии имеет вид

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^0 + \delta\tau_{ij}. \quad (\text{II.8})$$

Вариация этой плотности определяется согласно соотношению

$$\nabla \tau_{ij} = \nabla_k (s_k \tau_{ij}^0) + \tau_{kj}^0 \nabla_i s_k + \tau_{ik}^0 \nabla_j s_k. \quad (\text{II.9})$$

Используя уравнение непрерывности, мы устанавливаем связь между полями  $\chi$  и  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \alpha(t) \nabla \Phi(\mathbf{r});$$

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -m\alpha(t) \Phi(\mathbf{r}),$$

где скалярное поле  $\Phi(\mathbf{r})$  определяет форму рассматриваемой вибрации. Таким образом, необходимо только решить уравнение типа уравнения Эйлера, чтобы получить все решения для динамики уравнения Власова, соответствующие сильно-коллективизированному движению. Физическое содержание этой процедуры

состоит в описании коллективных мод посредством только скейлинга пространственных координат. В самом деле, функция распределения имеет вид

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0 + \nabla_r f_0 \nabla_p K - \nabla_p f_0 \nabla_r K, \quad (\text{П.10})$$

где  $K = \bar{\chi} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}$ , и соответствует разложению Тейлора функции  $f_0[\mathbf{r} + \mathbf{s}, \mathbf{p} + m\mathbf{s} - \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})]$ : мы получаем искаженное распределение из статического, изменяя координату на величину  $\mathbf{s}$  с соответствующей трансформацией момента. Из соотношения (П.10) следует, что постушая таким образом, мы ограничиваемся только квадрупольными искажениями в пространстве моментов.

В скейлинговом приближении линеаризованные уравнения Эйлера представляют довольно общий метод определения скейлинговых полей при соответствующих граничных условиях [21]. Однако, если сделать некоторые предположения о природе скейлинговых полей для каждой мультипольности, например предположение Тасси — Бора [45], могут быть получены линеаризованные уравнения Эйлера в гармонической форме после соответствующего проектирования в виде скалярного произведения с величиной  $\nabla\Phi$  и последующего интегрирования во всем  $r$ -пространстве:

$$M\ddot{\alpha} + C\alpha = 0, \quad (\text{П.11})$$

где

$$M = m \int d^3r \rho_0 |\nabla\Phi|^2 \quad (\text{П.12})$$

— коллективный массовый параметр для скейлинговых полей. Как и ожидалось, параметры восстанавливающих сил зависят от ядерного взаимодействия.

Рассмотрим самосогласованный гамильтониан

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{p^2}{2m} + W(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (\text{П.13})$$

в котором локальная и нелокальная части среднего поля имеют общую структуру полей Скирма [41]

$$W(\mathbf{r}, t) = \mu p(\mathbf{r}, t) + \lambda \rho^\sigma(\mathbf{r}, t); \quad (\text{П.14})$$

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{\beta}{\hbar^2} [\rho(\mathbf{r}, t) p^2 - 2m\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \mathbf{p} + m \text{Tr} \tau(\mathbf{r}, t)] + \gamma \nabla^2 \rho(\mathbf{r}, t), \quad (\text{П.15})$$

где локальная плотность и тензор давления определены в разд. 1, и

$$\mu = \frac{3}{4} t_0, \quad \lambda = \frac{2+\sigma}{16} t_3, \quad \beta = \frac{3t_1+5t_2}{16} > 0, \quad \gamma = \frac{5t_2-9t_1}{32} < 0.$$

Здесь  $t_0, t_1, t_2, t_3, \sigma$  — параметры модели Скирма. Параметр восстанавливающей силы, зависящий от среднего поля, имеет структуру

$$C = C_{\text{лок}} + C_{\text{нелок}},$$

$$C_{\text{лок}} = -\frac{1}{\alpha} \int d^3r [\nabla \delta \mathbf{r} + \delta \rho \nabla W_0 + \rho_0 \nabla \delta W] \cdot \nabla \Phi \quad (\text{П.16})$$

и

$$C_{\text{нелок}} = -\frac{1}{\alpha} \int d^3r \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} \beta [\nabla \cdot (\rho_0 \delta \tau) + \nabla \cdot (\tau_0 \delta \rho)] + \gamma [\delta \rho \nabla (\nabla^2 \rho_0) + \rho_0 \nabla (\nabla^2 \delta \rho)] + \frac{m}{\hbar^2} \beta \nabla [\rho_0 \text{Tr} \delta \tau + \delta \rho \text{Tr} \tau_0] \right\} \nabla \Phi \quad (\text{П.17})$$

могут быть выражены только в терминах локальной плотности распределения.

Почему данные гармонические вибрации могут соответствовать изоскалярным гигантским резонансам?

1. Скейлинговые моды описывают адиабатическое движение с малой амплитудой [46]. Форма ядра меняется, но не изменяется одночастичная структура (т. е. числа заполнения), что соответствует в высшей степени когерентным частично-дырочным возбуждениям.

2. Ограничение искажениями до второго порядка в пространстве моментов подразумевает жесткость многочастичной системы, что соответствует достаточно высокой энергетической части в функции отклика.

3. Забегая вперед, отметим, что мы можем контролировать наши результаты, сравнивая их с экспериментальными данными. Как мы увидим позже, согласие — прекрасное, в частности, оно хорошее для гигантских квадрупольных резонансов, где ограничение искажениями в распределении моментов до второго порядка является точным.

4. Структура фазового пространства наиболее коллективных состояний ПСФ очень близка к скейлинговым модам, в частности переходная плотность [см. уравнение (П.6)] и безвихревой ток [27].

Заметим, что при полном решении уравнения Эйлера получается дискретный спектр для частот осцилляций. С помощью нашей процедуры проектирования и гармонического обрезания мы отбираем только одну частоту, соответствующую среднему значению распределения силы высоколежащей энергии и исчерпывающей ЭВПС. Другими словами, фрагментация силы (затухания Ландау) полностью вне скейлингового приближения, которое описывает осцилляции для чисто упругой среды [45]. Из сказанного выше следует, что выход за рамки скейлингового приближения возможен. При этом возникнут дополнительные неизвестные поля, для которых нельзя делать никаких обрезаний в цепочке на уровне уравнения Эйлера [25].

В скейлинговом приближении можно получить точные компактные выражения для частот гигантских резонансов любой мультипольности, используя общую структуру типа Ферми для статического распределения плотности [47]

$$\rho_0(r) = \rho_0 \left[ 1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right) \right]^{-1}. \quad (\text{П.18})$$

В частном случае  $a \rightarrow 0$  получаем выражение для ступенчатого распределения, сравнимого с анализом работ [14, 48]. Ограничимся сферическими основными состояниями: в этом случае вибрационное поле  $\Phi(r)$  может быть выбрано в виде

$$\Phi(r, \eta) = r^l P_l(\eta) \quad (r = \cos \theta),$$

где  $P_l$  — полиномы Лежандра.

Из структуры поля  $\Phi(r)$  мы получаем выражение для массового параметра

$$M = 2\pi m \int_{-1}^1 d\eta \{ l^2 [P_l(\eta)]^2 + [P_l'(\eta)]^2 \} \int_0^\infty r^{2l} \rho_0(r) dr,$$

которое дает

$$M(x) = 4\pi m \rho_0 I_{1,2l}(x), \quad (\text{П.19a})$$

где  $x = a/R$ ;  $I_{\nu\mu}(x)$  — обобщенные интегралы Ферми. В случае ступенчатой функции распределения ( $a \rightarrow 0$ ) легко получить

$$M(0) = 4\pi m \rho_0 \frac{l}{2l+1} R^{2l+1}. \quad (\text{П.19б})$$

Рассмотрим локальную часть (П.16). Так как  $W_0(r)$  есть функция  $\rho_0$ , то мы имеем

$$\delta W = \left( \frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_0 \delta \rho, \quad \nabla W_0 = \left( \frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_0 \nabla \rho_0 \quad (\text{П.20})$$

и соответственно

$$\begin{aligned} & \int d^3r \{ \delta\rho \nabla W_0 + \rho_0 \nabla \delta W \} \nabla \Phi = \\ & = \int d^3r \delta\rho \left( \frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_0 \{ \nabla \Phi \cdot \nabla \rho_0 - \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \Phi) \} = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

где  $\Phi(r, \eta)$  является гармоническим полем.

Таким образом, окончательно

$$C_{\text{лок}} = -\frac{1}{\alpha} \int d^3r \nabla \Phi (\nabla \cdot \delta \tau). \quad (\text{П.22})$$

Полученный результат означает, что энергии гигантских резонансов связаны, главным образом, с вариацией распределения кинетической энергии, и, следовательно, более не зависят от деталей ядерного взаимодействия, лишь бы оно удовлетворяло условиям насыщения.

С помощью скейлингового выражения для вариации тензора давления и диагональной структуры стационарного тензора  $\tau_{ij}^0 = \tau(r) \delta_{ij}$ , учетом простой алгебры, мы получаем

$$\begin{aligned} C_{\text{лок}} &= 2 \int d^3r \tau(r) \sum_{ij} (\nabla_j \cdot \nabla_i \Phi)^2 = 2 \int d^3r \sum_{ij} \nabla_j \Phi \nabla_i \Phi \nabla_i \nabla_j \tau(r) = \\ &= 4\pi \left\{ l^2 \int_{-1}^1 d\eta [P_l(\eta)]^2 \int_0^\infty r^{2l} \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} dr + \int_{-1}^1 [P_l'(\eta)]^2 d\eta \int_0^\infty r^{2l-1} \frac{\partial \tau}{\partial r} dr \right\} = \\ &= 8\pi l(l-1) \int_0^\infty r^{2l-1} \frac{\partial \tau}{\partial r} dr = 8\pi l(l-1)(2l-1) \int_0^\infty r^{2l-2} \tau(r) dr, \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

т. е. в локальном приближении Томаса — Ферми

$$C_{\text{лок}} = 8\pi l(l-1)(2l-1) \tau_0 I_{5/3, 2l-2}(x), \quad (\text{П.24})$$

где

$$\tau_0 = \frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \rho_0^{5/3} = \frac{2}{5} \varepsilon_F \rho_0. \quad (\text{П.25})$$

Здесь  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми для ядерной материи, соответствующая плотности насыщения. Используя аналогичную технику, можно рассчитать вклад нелокального члена в параметр восстанавливающей силы. Этот член выражается с помощью статической плотности и распределения плотности кинетической энергии. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} C &= C_{\text{лок}} + C_{\text{нелок}} = \\ &= 8\pi l(l-1)(2l-1) \int_0^\infty r^{2l-2} \left[ \frac{m}{m^*} \tau(r) - \frac{\gamma l}{(2l-1)^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 \right] dr. \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

Отметим, что вклад каждого члена в параметр жесткости исчезает при  $l = 1$ . Это хорошая проверка данного подхода: духовые моды, связанные с трансляцией, точно обращаются в нуль.

При  $a \rightarrow 0$  нелокальный член становится бессмысленным, так как появляются расходимости. Для локальной части имеем

$$C_{\text{лок}}(0) = 8\pi \tau_0 l(l-1) R^{2l-1}. \quad (\text{П.27})$$

Частоты гигантских резонансов определяются с помощью соотношения

$$\omega^2 = C/M.$$

На рис. 30, 31 показана  $A$ -зависимость энергии гигантских квадрупольных и октупольных резонансов, полученных только с помощью локального среднего поля (ступенчатое распределение — штрихованные линии; ферми-распределение — штрихпунктирные линии), а также с учетом вклада нелокального члена в диффузионную плотность (сплошные линии).

Случайным образом с помощью ступенчатой функции распределения удалось воспроизвести экспериментальные результаты как в случае квадрупольных, так

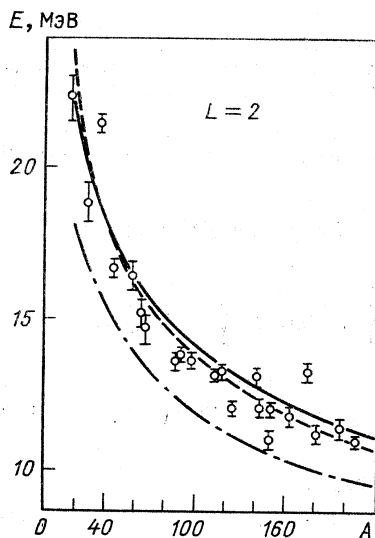


Рис. 30. Зависимость энергии ГР ( $L=2$ ) от массового числа  $A$ . Пояснения см. в тексте

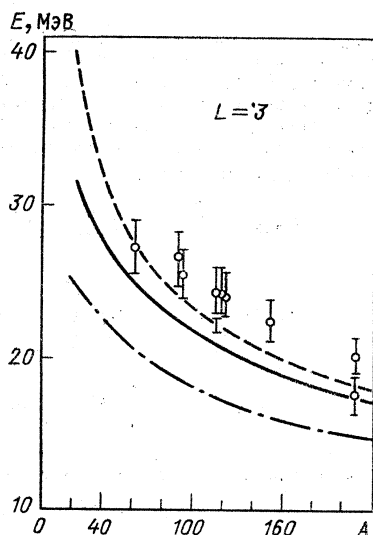


Рис. 31. То же, что и на рис. 30, для  $L=3$

и октупольных энергий. Для собственных частот мы получаем выражение

$$\hbar\omega = \frac{4\epsilon_F}{(9\pi)^{1/3}} \left[ \frac{2}{5} (2l+1)(l-1) \right]^{1/2} A^{-1/3}, \quad (\text{П.28})$$

которое точно совпадает с результатом Никса и Сирка, полученным для гигантских резонансов в гидродинамическом подходе [48]. Это неудивительно, так как процедура обрезания, использованная этими авторами, эквивалентна скейлинговому приближению. Последнее со ступенчатой функцией распределения было использовано Берчем [14]. Однако его результат

$$\hbar\omega = \frac{4\epsilon_F}{(9\pi)^{1/3}} \left[ \frac{6}{5} \frac{(2l+1)(l-1)^2}{2l-1} \right]^{1/2} A^{-1/3} \quad (\text{П.29})$$

содержит ошибку и занижает на 20 % значение энергии для гигантских мод, кроме квадрупольного случая, когда формулы (П.28) и (П.29) приводят к одному и тому же результату.



При внимательном сравнении с экспериментом полных результатов, включающих поправки и нелокальные члены (сплошные кривые на рис. 30, 31), обнаруживается лучшее согласие с экспериментом результатов для гигантских квадрупольных вибраций и систематически заниженные результаты для гигантских октупольных вибраций. Это связано со скейлинговым приближением, а не с ограниченностью квазиклассического описания, основанного на уравнении Власова:

1. Скейлинговые решения соответствуют произвольным искажениям в координатном пространстве, но только квадрупольным в пространстве моментов. Это описание является хорошим для квадрупольных мод, но недостаточно удовлетворительным при описании мод высшей мультипольности. Тем не менее и для октупольных мод результаты не так далеки от экспериментальных. Это означает, что искажение второго порядка в пространстве моментов представляет основную часть коллективного октупольного движения в этом же пространстве.

2. В скейлинговом приближении ЭВПС полностью исчерпываются одним коллективным состоянием, т. е. мы не имеем затухания Ландау с относительной фрагментацией силы. Эта картина корректна для случая квадрупольных мод, но становится все менее реалистичной для высших мультиполей [16, 37].

Нам кажется, что результаты, представленные в приложении, несколько проясняют скейлинговое приближение, а в более общем плане и структуру ядерного коллективного движения.

1. Получение компактных формул, эквивалентных выведенным ранее при гидродинамическом анализе, важно, поскольку позволяет установить микроскопический смысл приближений, используемых в гидродинамических подходах ядерного коллективного движения.

2. Результаты, полученные с помощью ступенчатой функции распределения и локальных полей, приводящие к формуле Никса — Сирка, только случайно находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными для квадрупольных и октупольных гигантских мод.

3. Тем не менее скейлинговое приближение кажется достаточно надежным при описании ГКР, главным образом, из-за аккуратного учета квадрупольного искажения в пространстве моментов. В этом смысле важно подчеркнуть тщательное описание ядерной поверхности и нелокальности среднего поля.

4. Степень аккуратности описания посредством скейлинга ухудшается для высших мультипольностей, несмотря на то, что основные свойства октупольных мод хорошо воспроизводятся. Интересно отметить важность квадрупольных деформаций в пространстве моментов и для октупольных мод.

5. Для высших мультиполей ожидается большая фрагментация силы, что нельзя воспроизвести в скейлинговом приближении. Более того, центры распределений плохо определяются посредством скейлинга из-за отсутствия искажений более высокого порядка в пространстве моментов. Результаты Дубенской группы ясно указывают на важность гексадекапольных деформаций в пространстве моментов для описания собственных частот гигантских  $4^+$ -резонансов [25].

С помощью скейлинговой картины можно решить многие задачи физики тяжелых ионов, например:

1. Во многих механизмах реакции для диссипативных столкновений мы имеем формирование двойной системы с последующими ножничными колебаниями двух фрагментов. Гигантские дипольные осцилляции такой двойной системы приводят к зарядовой версии гидродинамики, их можно систематически исследовать в скейлинговом подходе [52].

2. Гигантские резонансы играют важную динамическую роль в столкновениях тяжелых ионов при промежуточных энергиях [53, 54]. Некоторые эффекты рождения частиц, или процессов фрагментации, можно непосредственно оценить, зная ядерную функцию распределения, соответствующую гигантским модам в скейлинговой картине.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Proc. Conf. «Giant Resonance Excitation in Heavy-Ion collisions»/Eds. P. F. Bortignon, J. J. Gaardhoje, M. DiToro//Nucl. Phys. A. 1988. Vol. 482. P. 1c—551c.
2. Van der Woude A. Preprint KVI-820, 1989.
3. Knight W. D.//Intern. School E. Fermi, Varenua-Italy, Course CVII, 1988, Amsterdam; North Holland. In press.
4. Ring P., Schuck P. The Nuclear Manybody Problem. N.Y.: Springer-Verlag, 1980.
5. Carruthers P., Zachariassen F.//Rev. Mod. Phys. 1983. Vol. 55. P. 245—285.
6. Тарапекный Б. И.//УФН. 1983. Т. 139. С. 587—619.
7. Brink D. M., DiToro M.//Nucl. Phys. A. 1981. Vol. 372. P. 151—172.
8. Koonin S. E.//Progr. Part. Nucl. Phys. 1980. Vol. 4. P. 283—321.
9. Collins M., Griffin J. J.//Nucl. Phys. A. 1980. Vol. 348. P. 63—74.
10. Bertsch G. F.//Z. Phys. A. 1978. Vol. 289. P. 103—105.
11. Negele J. W.//Rev. Mod. Phys. 1982. Vol. 54. P. 913—1015.
12. Vlasov A.//J. Phys. (USSR). 1945. Vol. 9. P. 25—35.
13. Tang H. H. K. e.a.//Phys. Lett. B. 1981. Vol. 101. P. 10—14.
14. Bertsch G. F.//Nuclear Physics with Heavy Ions and Mesons, Les Houches 1977/Eds. R. Balian, H. Rho, G. Ripka. Amsterdam: North Holland, 1978. Vol. 1. P. 175—262.
15. Brink D. M., Dellafiore A., DiToro M.//Nucl. Phys. A. 1986. Vol. 456. P. 205—234.
16. Burgio G. F., DiToro M.// Nucl. Phys. A. 1988. Vol. 476. P. 189—212.
17. Saperstein Z. E., Fayans S. A., Khodel V. A. Kurchatov Institute report IAE-2580, Moskva, 1975.
18. Khodel V. A., Saperstein Z. E.//Phys. Repts. 1982. Vol. 92. P. 183—337.
19. Бор О., Мотгельсон Б. Структура атомного ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. Т. 2.
20. Eckart G., Holzwarth G., da Providencia J. P.//Nucl. Phys. A. 1981. Vol. 364. P. 1—28.
21. DiToro M.//Winter College on Fundamental Nuclear Physics/Eds. K. Dietrich, M. DiToro, H. J. Mang. Singapore: World Sci. Publ., 1985. P. 451—496.
22. Balbutzev E. B., Mikhailov I. N., Vaishvila Z.//Nucl. Phys. A. 1986. Vol. 457. P. 222—260.
23. Esbensen H., Bertsch G. F.//Ann. Phys. 1984. Vol. 157. P. 255—281; Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 2257—2259; Phys. Lett. B. 1985. Vol. 161. P. 248—250.
24. Speth J., Van der Woude A.//Rep. Progr. Phys. 1981. Vol. 44. P. 45—90.
25. Balbutzev E. B., Mikhailov I. N.//J. Phys. G.: Nucl. Phys. 1988. Vol. 14. P. 545—567.
26. Svomijärvi T. e.a. ORSAY Preprint, IPNO—DRE 89-06, 1989.
27. Dumitrescu T. S. e.a.//J. Phys. G: Nucl. Phys. 1986. Vol. 12. P. 349—369.
28. Balbutzev E. B., DiToro M. Preprint JINR P4-86-551. Dubna, 1986.
29. Balbutzev E. B., Mikhailov I. N., DiToro M.//Europ. Lett. 1988. Vol. 6. P. 317—321.
30. Dellafiore A., Matera F.//Nucl. Phys. A. 1986. Vol. 460. P. 245—264.
31. Migdal A. B. Qualitative Methods in Quantum Theory. N. Y.: W. A. Benjamin, 1962.
32. Sagawa H., Bertsch G. F.//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 146. P. 138.
33. Базнар М. И., Игнатюк А. В., Пятов Н. И.//ЯФ. 1979. Т. 30. С. 949—960.
34. Yanhuang C., DiToro M.//Phys. Rev. C. 1989. Vol. 39. P. 105—113.
35. Broglia R.//Nuclear Theory 1981/Ed. G. F. Bertsch. Singapore: World Sci. Publ., 1981. P. 93—180.
36. Bertrand F. E., Beene J. R., Horen D. J.//Nucl. Phys. A. 1988. Vol. 488. P. 163c—186c.
37. Fiolhais C.//Ann. Phys. 1986. Vol. 171. P. 186—204.
38. Landau L.//Sov. Phys. JETP. 1957. Vol. 3. P. 920—925; Ibid. 1957. Vol. 5. P. 101—106.

39. Koehler H. S.//Nucl. Phys. A. 1985. Vol. 440. P. 165—172.
40. Bertsch G. F., Das Gupta S.//Phys. Rep. 1988. Vol. 160. P. 189—233.
41. Bonasera A., Burgio G. F., DiToro M.//Phys. Lett. B. 1989. Vol. 219. P. 233—237.
42. Bonasera A.e.a.//Phys. Rev. C. 1989. Vol. 39. P. 2385—2389.
43. Ciancitto M. C. Descrizione Simiclassica di Moti Collectivi in Clusters di metalli alcalini. Catania Thesis, 1989, CT-21.
44. Dellafiore A., Matera F. Firenze Preprint. 1990. F-12.
45. DiToro M., Lombardo U., Russo G.//Nuovo Cimento A. 1985. Vol. 87. P. 174—188.
46. Nörenberg W.//Nucl. Phys. A. 1983. Vol. 409. P. 191c—212c.
47. DiToro M., Russo G.//Z. Phys. A. 1988. Vol. 331. P. 381.
48. Nix J. R., Sierk A. J.//Phys. Rev. C. 1980. Vol. 21. P. 396—404.
49. DiToro M., Pisa M., Russo G.//Phys. Rev. C. 1986. Vol. 34. P. 2334—2337.
50. DiToro M., Kolomietz V. M.//Z. Phys. A. 1987. Vol. 328. P. 285—290.
51. DiToro M., Lombardo V., Russo G.//Nucl. Phys. A. 1985. Vol. 435. P. 173—189.
52. DiToro M., Gregoire Ch.//Z. Phys. A. 1985. Vol. 320. P. 321—326.
53. DiToro M., Lanzano G., Pagano G.//Phys. Rev. C. 1988. Vol. 37. P. 1485—1489.
54. Catara F., DiToro M., Ferriolo A.//Nucl. Phys. A. 1989. Vol. 494. P. 301—310.