*«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1992, ТОМ 23, ВЫП.1*

УДК 530.145

КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМОСТЬ. НОВОЕ ЯВЛЕНИЕ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ (Алгебраический подход)

А.Г.Ушверидзе

Институт физики АН Грузии, Тбилиси

Предлагается новый подход к проблеме квазиточнорешаемости в квантовой механике. Показано, что квазиточнорешаемые уравнения Шредингера (допускающие точные решения лишь для ограниченных участков спектра) могут быть получены из полностью интегрируемых моделей Годена на простых алгебрах Ли в результате частичного разделения переменных.

A new approach to the problem of quasi-exact solvability in quantum mechanics is proposed. It is shown that the quasi-exactly solvable Schrödinger equations (allowing exact solutions for limited parts of the spectrum only) can be obtained from the completely integrable Gaudin models based on simple Lie algebras by means of partial separation of variables.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на стремительное изменение вкусов современной теоретической физики и представлений о фундаментальности проблем, можно с уверенностью указать звено, объединяющее большинство «горячих точек» квантовой теории. Это - точные методы и их физические приложения. Интерес к этим методам резко возрос в конце 70-х годов, когда стал очевидным достигнутый с их помощью прогресс в понимании природы непертурбативных явлений и структуры квантовых теорий в области сильной связи. Определяющую роль в развитии точных методов сыграла возможность использования явных решений квантовых задач в качестве нулевых приближений при построении теории возмущений. Не менее важным фактором явилось также наблюдение, что за явлением точной решаемости всегда оказывалась стоящей некая скрытая симметрия задачи, выступающая не просто как необходимый атрибут интегрируемости, а, скорее, как язык, на котором это явление приобретало четкий и наглядный математический смысл.

В последние годы был создан целый ряд замечательных методов построения точнорешаемых моделей. Это - квантовый метод обратной задачи [1], альтернативный групповой подход [2], различные модификации метода Бете [3] (в квантовой теории поля), а также уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко [4], преобразования Дарбу [5], суперсимметричный подход [6], метод проекций [7] и целый ряд аналитических методов [8] (в нерелятивистской квантовой механике). При всех достоинствах перечисленных выше подходов приходится с сожалением отметить, что количество и разнообразие получаемых с их помощью точнорешаемых моделей относительно невелико и далеко не отвечает потребностям современной теоретической физики. Необходимость в поиске новых подходов и новых идей не вызывает сомнения, и в этой связи мне представляется весьма перспективным направление, возникшее три года назад [9, 10] и связанное с изучением моделей, реализующих принципиально новый тип точной решаемости в квантовой теории. Эти модели, получившие название «квазиточнорешаемых», характеризуются тем, что спектральные задачи для них могут быть решены точно, но не для всего спектра, а лишь для некоторых ограниченных его участков. Их важность обусловлена прежде всего тем, что они, как оказалось, обладают всеми достоинствами обычных точнорешаемых моделей, т.е. позволяют моделировать реальные физические ситуации, наблюдать за возникновением целого ряда непертурбативных явлений, могут быть использованы как «опорные точки» при реализации различных приближенных методов и обязаны своим существованием наличию в спектральных уравнениях глубоких симметричных свойств [11, 12]. Кроме того (и это, пожалуй, самое главное), их количество существенно больше количества точнорешаемых моделей, что делает проблему изучения квазиточнорешаемых задач весьма перспективной с практической точки зрения.

Последнее обстоятельство можно пояснить следующим наглядным способом. Если точная решаемость является синонимом явной диагонализуемости бесконечномерной гамильтоновой матрицы, то квазиточнорешаемость означает ее блок-диагонализуемость, причем такую, когда один из возникающих блоков - конечен. Спектральная задача при этом распадается на две совершенно не связанные между собой задачи, одна из которых конечномерна и может быть решена чисто алгебраическим путем (т.е. точно), а вторая - бесконечномерна и о ее решениях нам попрежнему ничего не известно. Поскольку блок-диагонализовать любую бесконечномерную матрицу всегда значительно проще, чем диагонализовать ее полностью, то и квазиточнорешаемых моделей должно быть значительно больше, чем точнорешаемых.

Рассмотрим пример. В классе четных полиномиальных потенциалов одномерной квантовой механики известна лишь одна точнорешаемая модель. Это - однопараметрическое семейство гармонических осцилляторов:

$$V = b^2x^2 . \tag{1}$$

Что же касается квазиточнорешаемых моделей, то их в том же классе имеется бесконечное множество. Их потенциалы могут быть реализованы в виде полиномов степени $2 + 4n$, где $n = 1, 2...$ Простейшие из этих потенциалов образуют бесконечную серию и описываются полиномами шестого порядка [12, 13]:

$$V = a^2x^6 + 2abx^4 + [b^2 - a(4M + 3)]\, x^2 . \tag{2}$$

Здесь $M = 0, 1, 2, ...$, а a и b - вещественные числа, так что при каждом фиксированном M мы имеем двухпараметрическое семейство потенциалов. Неотрицательное целое число M определяет порядок квазиточнорешаемости, т.е. показывает, сколько состояний в модели может быть найдено точно. Если M - задано, то в (2) точно вычисляются первые $M + 1$ уровней положительной четности. Решения лежат в классе функций вида

$$\psi = P_M(x^2) \exp\left\{-\frac{ax^4}{4} - \frac{bx^2}{2}\right\} , \tag{3}$$

где $P_M(x^2)$ – неизвестные четные полиномы порядка $2M$. Линейная оболочка функций вида (3) образует $(M + 1)$-мерное подпространство гильбертова пространства модели, которое является инвариантным относительно действия гамильтониана. Поэтому секулярное уравнение является алгебраическим уравнением степени $M + 1$. Отсюда - $M + 1$ точных решений.

Модель (2) является естественным обобщением модели (1): ее можно рассматривать как возмущенный гармонический осциллятор (параметром возмущения служит параметр a). Это обстоятельство позволяет сравнивать ответы, получаемые по теории возмущений, с точными и говорить о целом ряде непертурбативных эффектов, таких, как особенности Бендера и Ву, сплетение и отталкивание уровней, случайная сходимость ряда теории возмущений, возникающая в результате пересокращения факториально растущих вкладов и имеющая место лишь при целых M и лишь для точно вычисляемых состояний, и т.д. [12].

В то же время модели (2) можно рассматривать и как приближения к точнонерешаемой модели ангармонического осциллятора с потенциалом

$$V = b^2x^2 + gx^4 . \tag{4}$$

Для этого достаточно совершить в (2) замену $2ab \to g$ и $b^2 - 4aM \to b^2$, устремив M к бесконечности [12]. Этот результат является частным случаем более общего утверждения: любая точнонерешаемая модель одномерной квантовой механики является пределом некоторой бесконечной серии квазиточнорешаемых моделей [12].

Таким образом, можно утверждать, что квазиточнорешаемые модели занимают промежуточное место между точнорешаемыми и точнонерешаемыми моделями. Это обстоятельство позволяет распространять многие получаемые для них утверждения как на точнорешаемый, так и на точнонерешаемый случай (см., например, работы [11, 12, 14]).

В настоящее время существуют две альтернативные теории, объясняющие явление квазиточнорешаемости и позволяющие строить широкие классы квазиточнорешаемых моделей. Одна из этих теорий (сформулированная Турбинером в 1987 г. [9]) основана на наблюдении, что квазиточнорешаемые модели квантовой механики обладают скрытыми группами динамической симметрии, конечномерные представления которых генерируют конечные участки их спектров. Например, для модели (2) такой группой является $SL(2)$, точнее, ее конечномерные представления со «спином» $j = M/2$. Суть идеи Турбинера состоит в том, что поскольку генераторы конечномерных представлений алгебр Ли всегда можно реализовать в виде дифференциальных операторов первого порядка, то любой квадратичный по этим генераторам оператор будет дифференциальным оператором второго порядка. С другой стороны, в силу конечномерности представления спектральная задача для этого оператора сводится к чисто алгебраической и может быть решена точно. Сам же оператор путем преобразования однородности может (хотя и не всегда) быть приведен к шредингеровскому виду. Единственной алгеброй, допускающей представления в виде одномерных дифференциальных операторов, является алгебра $sl(2)$. Она генерирует одномерные квазиточнорешаемые модели. Для генерации же многомерных моделей требуются алгебры более высокого ранга (многомерный случай в этом подходе был рассмотрен в [15]).Если говорить на более «физическом» языке, то в методе Турбинера устанавливается связь между квазиточнорешаемыми задачами квантовой механики и несимметричными квантовыми волчками (ротаторами) на конечномерных представлениях алгебр Ли. Мы не собираемся здесь вдаваться в детали упомянутого метода, поскольку на эту тему существует прекрасный обзор, написанный Шифманом [11].

В основе другой теории квазиточнорешаемости (сформулированной автором в том же 1987 г. [10]) лежит утверждение о существовании тесной связи между квазиточнорешаемыми моделями квантовой механики, вполне интегрируемыми моделями магнетиков на бесконечномерных представлениях алгебр Ли и классической многочастичной кулоновской задачей. Основные моменты этой теории были изложены в моем обзоре [12]. Однако вскоре после его написания мне стало очевидно, что выбранный в нем способ изложения - далеко не самый удачный. Дело в том, что в обзоре основное внимание уделяется аналитическим методам построения квазиточнорешаемых уравнений, что же касается их алгебраических (симметрийных) свойств, безусловно играющих определяющую роль для понимания природы квазиточнорешаемости, то они, к сожалению, остались на втором плане. Последующие попытки [16, 17] сформулировать этот подход иначе (поставив во главу угла именно симметрийные свойства, т.е. взяв в качестве отправной точки модели магнетиков на алгебрах Ли) привели в конечном итоге к совершенно иному пониманию проблемы. Собственно, это и явилось главной причиной написания настоящей работы, представляющей собой развернутое изложение статей [16-18]. Основные моменты излагаемого здесь подхода состоят в следующем: 1. Рассматриваются вполне интегрируемые модели магнетиков на алгебрах Ли, точнорешаемые в рамках алгебраического анзаца Бете. Поскольку гамильтонианы этих магнетиков квадратичны по образующим алгебр, то, используя дифференциальные реализации последних, мы приходим к многомерным спектральным дифференциальным уравнениям второго порядка, точнорешаемым в некотором классе функций 2. Рассматриваемые модели магнетиков, а стало быть, и полученные из них уравнения обладают глобальными группами внутренних симметрий, что позволяет совершить в них частичное разделение переменных. В результате этого исходное уравнение, имеющее бесконечный точновычисляемый спектр, распадается на бесконечную серию уравнений меньшей размерности с конечным числом точновычисляемых собственных функций и собственных значений. Полученная серия квазиточнорешаемых уравнений параметризуется набором целых чисел, играющих в описанной выше процедуре роль констант разделения. 3. На последнем этапе построенные квазиточнорешаемые уравнения приводятся к шредингеровскому виду. Следует отметить, что на протяжении всей работы мы ограничиваемся подробным рассмотрением лишь первых двух из перечисленных выше этапов: 1) определением и решением обобщенных моделей Годена и 2) сведением этих моделей к бесконечным сериям квазиточнорешаемых уравнений. Третий этап, т.е. процедура приведения последних к шредингеровскому виду, не обсуждается, поскольку она хорошо алгоритмизирована в работе [12]. Согласно [12] любое D-мерное квазиточнорешаемое уравнение второго порядка можно бесчисленным количеством способов привести к уравнениям шредингеровского типа на $D+1$-мерных, вообще говоря, кривых многообразиях.

Обзор организован следующим образом. В разделе 1 излагается идея подхода на примере простейшей алгебры $sl(2)$. Разделы 2 и 3 посвящены обсуждению некоторых свойств простых алгебр Ли, необходимых для формулировки подхода в общем случае. Значительное место в этих разделах уделяется алгоритмам построения дифференциальных реализаций представлений алгебр Ли и выбору специального базиса, удобного для точного решения обобщенных моделей Годена. В разделе 4 приводится решение моделей годеновских магнетиков в рамках алгебраического анзаца Бете. В разделе 5 формулируется метод сведения моделей Годена к многомерным квазиточнорешаемым дифференциальным уравнениям. В заключительном разделе 7 обсуждается возможность деалгебраизации предлагаемого подхода.

1. ИДЕЯ ПОДХОДА. СЛУЧАЙ АЛГЕБРЫ $sl(2)$

Алгебра Годена и ее представления. Пусть $I^{\pm}(\lambda)$, $I^0(\lambda)$ - образующие бесконечномерной алгебры Годена, зависящие от комплексного параметра λ и удовлетворяющие коммутационным соотношениям [3]:

$$\left.\begin{aligned} [I^-(\lambda), I^+(\mu)] &= \frac{2}{\mu-\lambda}\{I^0(\lambda) - I^0(\mu)\}\ ; \\ [I^0(\lambda), I^{\pm}(\mu)] &= \pm\frac{1}{\mu-\lambda}\{I^{\pm}(\lambda) - I^{\pm}(\mu)\}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Определим представления этой алгебры по формулам:

$$\left.\begin{aligned} I^-(\lambda)|0> &= 0; \\ I^0(\lambda)|0> &= F(\lambda)|0>\ . \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Здесь $|0>$ - младший (вакуумный) вектор, а $F(\lambda)$ - функция, играющая роль младшего веса. Пространство представления $W\{F(\lambda)\}$, в общем случае бесконечномерное, определяется как линейная оболочка всевозможных векторов вида

$$I^+(\lambda_1)\ldots I^+(\lambda_M)|0>\ , \qquad (7)$$

где $M = 0, 1, 2 \ldots$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$ - произвольные комплексные числа [18].

Спектральная задача Годена. Рассмотрим операторы:

$$K(\lambda) = I^0(\lambda)I^0(\lambda) - \frac{1}{2}I^+(\lambda)I^-(\lambda) - \frac{1}{2}I^-(\lambda)I^+(\lambda)\ . \qquad (8)$$

Пользуясь коммутационными соотношениями (5), нетрудно проверить, что они образуют коммутативное семейство

$$[K(\lambda)\ , K(\mu)] = 0 \qquad (9)$$

для любых λ и μ [3]. Спектральную задачу

$$K(\lambda)\phi = E(\lambda)\phi\ , \quad \phi \in W\{F(\lambda)\} \qquad (10)$$

будем называть обобщенной задачей Годена. Термин «обобщенная» используется здесь потому, что сам Годен и другие авторы [3, 19-20] ограничивались рассмотрением лишь случая, соответствующего невырожденной рациональной функции $F(\lambda)$. При этом предполагался также специальный вид операторов $I^a(\lambda)$, $a = \pm$, 0. Здесь же никаких ограничений на вид функции $F(\lambda)$ и операторов $I^a(\lambda)$ не накладывается. В силу коммутационных соотношений (9) собственные функции операторов $K(\lambda)$ не зависят от λ. Задача (10) является вполне интегрируемой и так же как и в частном, годеновском случае может быть решена точно в рамках алгебраического анзаца Бете [3, 21].

Бетевское решение задачи Годена. Используя коммутационные соотношения алгебры Годена (5), легко проверить (см., например, [21, 27]), что решение задачи Годена имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\phi = \phi_M(\xi) = I^+(\xi_1)\ldots I^+(\xi_M)|0> ;\\ &E(\lambda) = E_M(\lambda, \xi) = F'(\lambda) + F^2(\lambda) + 2\sum_{m=1}^{M} \frac{F(\lambda) - F(\xi_m)}{\lambda - \xi_m}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $M = 0, 1, 2 \ldots$, а числа ξ_m, $m = 1, \ldots, M$, удовлетворяют системе числовых уравнений

$$\sum_{m=1}^{M}{}' \frac{1}{\xi_n - \xi_m} + F(\xi_n) = 0\ ,\ n = 1, \ldots, M. \tag{12}$$

Ниже мы убедимся, что это - всего лишь частное решение.

Симметрия модели Годена и общее решение. Предположим для определенности, что предел

$$F = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda\, F(\lambda) \tag{13}$$

существует. В этом случае в силу (5) и (6) должны существовать и пределы:

$$I^a = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda\, I^a(\lambda)\ ,\quad a = \pm\ ,0. \tag{14}$$

Операторы (14) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $sl(2)$:

$$[I^-, I^+] = 2I^0,\quad [I^0, I^+] = \pm I^{\pm}, \tag{15}$$

и коммутируют со всеми операторами $K(\lambda)$:

$$[K(\lambda), I^a] = 0,\quad a = \pm, 0. \tag{16}$$

Это означает, что модель Годена обладает глобальной $sl(2)$-симметрией. Поэтому если $\phi_M(\xi)$ - решение уравнения (10), то и любой вектор вида $f(I^+, I^0, I^-)\,\phi_M(\xi)$, где f - произвольная функция, тоже будет решением с тем же собственным значением $E_M(\lambda, \xi)$. Кратность вырождения каждого собственного значения, очевидно, бесконечна. Таким образом, исходя из частного решения (11), (12) задачи Годена и используя ее глобальную симметрию, можно построить общее решение [21].

Свойства бетевских решений. Бетевские решения (11), (12) обладают замечательным свойством:

$$\left.\begin{aligned} &I^-\phi_M(\xi) = 0,\\ &I^0\phi_M(\xi) = (F + M)\,\phi_M(\xi), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

которое проверяется с помощью формул (5), (13) и (14). Это позволяет рассматривать бетевские решения как младшие векторы представлений алгебры симметрии с младшими весами $F + M$, $M = 0, 1, 2 \ldots$ В силу сказанного выше эти представления – бесконечномерны [21].

От обобщенных моделей Годена – к моделям магнетиков. Важный частный случай реализуется, когда $F(\lambda)$ – рациональная функция. В этом случае годеновские модели сводятся к моделям магнетиков на конечномерных алгебрах Ли. Чтобы убедиться в этом, нам достаточно рассмотреть лишь невырожденные функции $F(\lambda)$ вида

$$F(\lambda) = \sum_{A=1}^{N} \frac{f_A}{\lambda - \sigma_A}. \tag{18}$$

Все другие (вырожденные) рациональные функции $F(\lambda)$ могут быть получены из (18) в результате слияния всех или некоторых простых полюсов σ_A. Уводить полюса на бесконечность не имеет смысла, так как $F(\lambda)$ по предположению должна быть на бесконечности регулярной. Для совместимости (18) с формулами (5) и (6) операторы $I^a(\lambda)$ необходимо искать в аналогичном (18) виде

$$I^a(\lambda) = \sum_{A=1}^{N} \frac{I^a_A}{\lambda - \sigma_A}. \tag{19}$$

Подстановка (19) в (5) приводит к коммутационным соотношениям непосредственно для операторов I^a_A:

$$\left.\begin{aligned} &[I^-_A, I^+_A] = 2I^0_A, \quad [I^0_A, I^\pm_A] = \pm I^\pm_A,\\ &[I^a_A, I^b_B] = 0; \quad a, b = \pm, 0; \quad A \neq B. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Мы видим, что они образуют алгебру $sl(2)\oplus \ldots \oplus sl(2)$ (N раз). Если $F(\lambda)$ – вырожденная рациональная функция, то формула (19) и соотношения (20) усложняются. Тем не менее они по-прежнему описывают некую конечномерную алгебру Ли, возникшую в результате контракции алгебры (20) [21, 22].

Подставляя разложение (19) в формулу (8), получаем

$$K(\lambda) = \sum_{A,\,B=1}^{N} \frac{I_A^0 I_B^0 - \frac{1}{2} I_A^+ I_B^- - \frac{1}{2} I_A^- I_B^+}{(\lambda - \sigma_A)(\lambda - \sigma_B)} . \tag{21}$$

Таким образом, мы приходим к коммутативному семейству интегралов движения магнетика на конечномерной алгебре (20). Этот (невырожденный) случай подробно рассматривался в [3, 19, 20]. Магнетики же на контрактированных алгебрах (20) рассматривались в [21, 22].

Дифференциальные реализации. Известно [9, 24, 25], что образующие алгебры $sl(2)$ могут быть реализованы в виде дифференциальных операторов первого порядка. Применительно к случаю (20) мы имеем:

$$I_A^- = \frac{\partial}{\partial t_A} , \quad I_A^0 = t_A \frac{\partial}{\partial t_A} + f_A , \quad I_A^+ = t_A^2 \frac{\partial}{\partial t_A} + 2 t_A f_A . \tag{22}$$

Эти операторы реализуют представления с младшими весами f_A. В роли младшего вектора выступает единичная функция $|0\rangle \equiv 1$.

Подставляя (22) в (21), мы видим, что $K(\lambda)$ приобретают вид N-мерных дифференциальных операторов второго порядка:

$$K(\lambda) = \sum_{A,B=1}^{N} \frac{(t_A - t_B)^2 \frac{\partial^2}{\partial t_A \partial t_B} + 2(t_A - t_B)\left(f_A \frac{\partial}{\partial t_B} - f_B \frac{\partial}{\partial t_A}\right)}{(\lambda - \sigma_A)(\lambda - \sigma_B)} . \tag{23}$$

Соответственно точнорешаемое уравнение Годена (10) становится дифференциальным. Его бетевские решения принимают в рассматриваемом невырожденном случае вид

$$\phi = \phi_M(\xi) = \prod_{m=1}^{M} \left(\sum_{A=1}^{N} \frac{t_A^2 \frac{\partial}{\partial t_A} + 2 f_A t_A}{\xi_m - \sigma_A} \right) 1 , \tag{24}$$

т.е. представляют собой однородные полиномы от $t_1, \ldots, t_N$ степени M [16].

Выделение инвариантных подпространств. Обозначим через $\Phi_M\{F\}$ пространства, составленные из векторов $\phi \in W\{F(\lambda)\}$, удовлетворяющих условиям

$$I^{-}\phi = 0, \tag{25а}$$

$$I^{0}\phi = (F + M)\,\phi\,. \tag{25б}$$

Из коммутативности операторов $K(\lambda)$ и I^a следует, что если $\phi \in \Phi_M\{F\}$, то и $K(\lambda)\phi \in \Phi_M\{F\}$. Поэтому пространства $\Phi_M\{F\}$ являются инвариантными относительно действия операторов $K(\lambda)$. Соответственно спектральные задачи

$$K(\lambda)\,\phi = E(\lambda)\,\phi\,, \quad \phi \in \Phi_M\{F\}, \tag{26}$$

имеют смысл для любых $M = 0, 1, 2$ ...

Конечномерность инвариантных подпространств. Нетрудно видеть, что пространства $\Phi_M\{F\}$ - конечномерны. Для доказательства рассмотрим вспомогательные пространства $\tilde{\Phi}_M\{F\}$, составленные из векторов, удовлетворяющих только уравнению (25б). Очевидно, что базисом в $\tilde{\Phi}_M\{F\}$ могут служить векторы вида

$$I^{+}_{A_1}\cdot\ldots\cdot I^{+}_{A_M}|0>, \quad A_1, \ldots, A_M = 1, \ldots, N. \tag{27}$$

Количество таких векторов определяет размерность $\tilde{\Phi}_M\{F\}$, равную

$$\dim \tilde{\Phi}_M\{F\} = \frac{(M + N - 1)!}{(N - 1)!\,M!}\,. \tag{28}$$

Поскольку

$$\Phi_M\{F\} \subset \tilde{\Phi}_M\{F\}, \tag{29}$$

то

$$\dim \Phi_M\{F\} < \dim \tilde{\Phi}_M\{F\}. \tag{30}$$

Используя второе условие (25а), находим, что

$$\dim \Phi_M\{F\} = \dim \tilde{\Phi}_M\{F\} - \dim \tilde{\Phi}_{M-1}\{F\} = \frac{(M + N - 2)!}{(N - 2)!\,M!}\,. \tag{31}$$

Из этой формулы следует, что спектральные уравнения (26) при каждом M имеют ровно $(M + N - 2)!\ [(N - 2)!\,M!\,]^{-1}$ решений.

Согласно формулам (17) бетевские решения (11), (12) годеновского уравнения (10) принадлежат пространствам $\Phi_M\{F\}$ и потому являются одновременно решениями рассматриваемых конечномерных спектральных задач (26). Чтобы снять вопрос о полноте этих решений, достаточно подсчитать количество допустимых наборов чисел ξ_n, удовлетворяющих уравнениям анзаца Бете:

$$\sum_{m=1}^{M}{}' \frac{1}{\xi_n - \xi_m} + \sum_{A=1}^{N} \frac{f_A}{\xi_n - \sigma_A} = 0, \quad n = 1, \ldots, M. \tag{32}$$

Из анализа (32) методом кулоновской аналогии (см., например, [12]) следует, что искомое количество при данном M тоже равно $(M + N - 2)!\ [(N-2)!\ M!\,]^{-1}$. Отсюда делаем вывод, что все решения уравнений (26) при любых M полностью описываются бетевскими формулами (11), (12) [16].

Частичное разделение переменных. Из инвариантности пространств $\Phi_M\{F\}$ относительно действия операторов $K(\lambda)$ следует, что имеет смысл говорить о проекции $K(\lambda)$на $\Phi_M\{F\}$. Для построения этой проекции перепишем уравнения (25) в следующей дифференциальной форме:

$$\Big(\sum_{A=1}^{N} \frac{\partial}{\partial t_A}\Big)\phi = 0, \tag{33а}$$

$$\Big(\sum_{A=1}^{N} t_A \frac{\partial}{\partial t_A}\Big)\phi = M\phi\ . \tag{33б}$$

Здесь мы учли, что $F = \sum\limits_{A=1}^{N} f_A$. Общее решение системы можно представить в факторизованном виде:

$$\phi = \phi_M \psi\ , \tag{34}$$

где

$$\phi_M = (t_{N-1} - t_N)^M \tag{35}$$

– частное решение системы (33), а

$$\psi = \psi\left(\frac{t_1 - t_N}{t_{N-1} - t_N}, \ldots, \frac{t_{N-2} - t_N}{t_{N-1} - t_N}\right) \tag{36}$$

– общее решение однородной системы. Как мы видим, это решение зависит эффективно лишь от $N-2$ переменных:

$$x_A = \frac{t_A - t_N}{t_{N-1} - t_N}\ , \quad A = 1\ ,\ldots\ , N-2\ . \tag{37}$$

Принадлежность (34) к $\Phi_M\{F\}$ ограничивает произвол в выборе функций ψ. Эти функции должны быть полиномами степени M от переменных x_A.

Обозначим пространство таких полиномов Ψ_M. Поскольку $\Phi_M\{F\}$ инвариантно относительно действия операторов $K(\lambda)$, то результат действия $K(\lambda)$ на $\phi_M\psi$ (где $\psi \in \Psi_M$) снова должен иметь вид $\phi_M \tilde{\psi}$ (где $\tilde{\psi} \in \Psi_M$). Поэтому

$$K(\lambda)\,(\phi_M\psi) = \phi_M K_M(\lambda)\,\psi\,, \tag{38}$$

где $K_M(\lambda)$ – некий $(N-2)$-мерный дифференциальный оператор второго порядка, действующий только на переменные x_A и имеющий смысл искомой проекции $K(\lambda)$ на $\Phi_M\{F\}$. Независимо от того, какой случай рассматривается, вырожденный или невырожденный, этот оператор можно представить в виде

$$K_M(\lambda) = \sum_{A,B=1}^{N-2} P_{AB}\,(\lambda, M, x)\,\frac{\partial^2}{\partial x_A \partial x_B} + \sum_{A=1}^{N-2} Q_A(\lambda, M, x)\,\frac{\partial}{\partial x_A} + \\ + R\,(\lambda, M, x), \tag{39}$$

где P, Q и R – полиномы от $x_1, \ldots, x_{N-2}$ степеней, соответственно, 3, 2 и 1. Подставляя (38) и (34) в (26), получаем, что спектральные задачи (26) эквивалентны дифференциальным спектральным уравнениям [16]:

$$K_M(\lambda)\psi = E_M(\lambda)\psi\,, \quad \psi \in \Psi_M\,. \tag{40}$$

Переход к квазиточнорешаемым уравнениям. Обозначим Ψ пространство всех аналитических функций от переменных $x_1, \ldots, x_{N-2}$. Тогда очевидно, что уравнения

$$\left\{\sum_{A,B=1}^{N-2} P_{AB}\,(\lambda, M, x)\frac{\partial^2}{\partial x_A \partial x_B} + \sum_{A=1}^{N-2} Q_A(\lambda, M, x)\,\frac{\partial}{\partial x_A} + R(\lambda, M, x)\right\}\psi(x) = \\ = E_M(\lambda)\psi(x), \quad \psi(x) \in \Psi\,, \tag{41}$$

можно рассматривать как квазиточнорешаемые. При каждом $M = 0,1,2\ldots$ они имеют $(M+N-2)!\,[(N-2)!\,M!\,]^{-1}$ точных решений, которые лежат в классе полиномов степени M от $x_1, \ldots, x_{N-2}$ и описываются бетевскими формулами (11), (12).

Связь с подходом Турбинера - Шифмана. Переход от исходных переменных t_A $(A = 1, \ldots, N)$ к переменным $x_A = (t_A - t_N)/(t_{N-1} - t_N)$ $(A = 1, \ldots, N-2)$ можно осуществить в два приема. Вначале введем переменные ξ_A по формулам

$$\xi_A = t_A - t_N\,, \quad A = 1\,, \ldots, N-1; \quad \xi_N = t_N\,. \tag{42}$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t_A} = \frac{\partial}{\partial \xi_A}, \quad A = 1, \dots, N-1; \quad \frac{\partial}{\partial t_N} = \frac{\partial}{\partial \xi_N} - \sum_{A=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \xi_A}. \tag{43}$$

Поскольку функции (34), на которые действуют операторы $K(\lambda)$, трансляционно-инвариантны (в пространстве переменных t_A), то производные по ξ_N в выражении для оператора $K(\lambda)$ можно отбросить, написав:

$$K(\lambda) = \sum_{A,\,B=1}^{N} \frac{H_{AB}}{(\lambda - \sigma_A)(\lambda - \sigma_B)}, \tag{44}$$

где

$$H_{AB} = (\xi_A - \xi_B)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_A\, \partial \xi_B} + 2(\xi_A - \xi_B)\left(f_A \frac{\partial}{\partial \xi_B} - f_B \frac{\partial}{\partial \xi_A}\right), \quad A,B = 1,\dots,N-1; \tag{45а}$$

$$\begin{gathered} H_{AN} = H_{NA} = -\xi_A^2 \frac{\partial}{\partial \xi_A} \left(\sum_{B=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \xi_B}\right) - \\ - 2\xi_A \left(f_A \sum_{B=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \xi_B} + f_N \frac{\partial}{\partial \xi_A}\right), \quad A = 1,\dots,N-1. \end{gathered} \tag{45б}$$

Фактически это означает, что операторы (44) представимы в виде

$$K(\lambda) = \sum_{A,B,C,D=1}^{N-1} P_{ABCD}(\lambda) L_{AB} L_{CD} + \sum_{A,B=1}^{N-1} Q_{AB}(\lambda) L_{AB}, \tag{46}$$

где

$$L_{AB} = \xi_A \frac{\partial}{\partial \xi_B}, \quad A, B = 1,\dots, N-1, \tag{47}$$

генераторы алгебры $gl\,(N-1)$. Памятуя, что

$$gl\,(N-1) = gl\,(1) \oplus sl\,(N-1), \tag{48}$$

мы можем разбить множество генераторов L_{AB} на две группы: единственный генератор алгебры $gl\,(1)$:

$$J = \sum_{A=1}^{N-1} \xi_A \frac{\partial}{\partial \xi_A}, \tag{49а}$$

и $(N-1)^2 - 1$ генераторов алгебры $sl\,(N-1)$:

$$\{J_a\} = \left\{\xi_A \frac{\partial}{\partial \xi_B}, A \neq B;\ \xi_A \frac{\partial}{\partial \xi_A} - \xi_B \frac{\partial}{\partial \xi_B},\ B - A = 1\right\}. \tag{49б}$$

Тогда вместо (46) имеем

$$K(\lambda) = \sum_{a,\, b\, =\, 1}^{N(N-2)} P_{ab}(\lambda) J_a J_b + \sum_{a\, =\, 1}^{N(N-2)} \left[Q_a(\lambda) + R_a(\lambda) J \right] J_a + \\ + S(\lambda) J + T(\lambda) J^2. \tag{50}$$

Полученные операторы (50) действуют в пространствах однородных полиномов от $\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}$ системы M. Ни один из генераторов J_a не выводит за пределы этих пространств, поэтому они реализуют представления алгебры $sl\,(N-1)$ размерностей $(M+N-2)!\,[(N-2)!M!\,]^{-1}$. Это - представления с сигнатурами $(M, 0, \ldots, 0)$.

Совершим теперь окончательный переход от переменных ξ_A ($A = 1, \ldots, N-1$) к переменным $x_A = \xi_a/\xi_{N-1}$ ($A = 1, \ldots, N-2$). Этот переход представляет собой, по существу, проецирование операторов (50) на класс однородных полиномов от ξ_A степени M, т.е. на класс функций, собственных относительно оператора J (с собственным значением M). Из-за коммутативности J со всеми J_a операция проецирования имеет смысл для каждого из J_a в отдельности. В результате этой операции генератор J заменяется на свое собственное значение M, а $(N-1)$-мерные операторы J_a превращаются в $(N-2)$-мерные операторы $J_a(M)$, явно зависящие от M. Теперь они действуют в пространстве полиномов от $x_1, \ldots, x_{N-2}$ степени M, по-прежнему реализуя конечномерное представление алгебры $sl(N-1)$. Что же касается операторов $K(\lambda)$, то они заменяются

$$K_M(\lambda) = \sum_{a,b\, =\, 1}^{N(N-2)} P_{ab}(\lambda) J_a(M) J_b(M) + \\ + \sum_{a\, =\, 1}^{N(N-2)} [Q_a(\lambda) + R_a(\lambda) M]\, J_a(M) + S(\lambda) M + T(\lambda) M^2 . \tag{51}$$

Если пренебречь несущественной c-числовой добавкой, то мы имеем гамильтонианы квантовых волчков на алгебре $sl(N-1)$, точнее, на ее конечномерных представлениях с размерностями $[(M+N-1)!\,][(N-2)!M\,]^{-1}$ и сигнатурами $(M, 0,\ldots, 0)$ [22].

Заметим, что в отличие от Турбинера (см., например, [11]) мы получили сразу целое семейство коммутирующих между собой гамильтонианов квантовых волчков. Это обстоятельство является отражением полной интегрируемости исходной годеновской задачи.

Кулоновская аналогия. Спектры всех рассмотренных выше квантовых задач связаны с решениями системы числовых уравнений:

$$\sum_{m=1}^{M}{}' \frac{1}{\xi_n - \xi_m} + F(\xi_n) = 0, n = 1, ..., M. \qquad (52)$$

Поскольку функция $F(\lambda)$, вообще говоря, комплексна, то и числа ξ_m следует считать комплексными. Вводя векторные величины

$$\boldsymbol{\xi}_m = (\mathrm{Re}\, \xi_m, \mathrm{Im}\, \xi_m), m = 1, ..., M, \qquad (53)$$

и функцию

$$U(\boldsymbol{\xi}) \equiv \mathrm{Re} \int F(\xi) d\xi, \qquad (54)$$

легко видеть, что уравнения (52) могут быть получены из условия экстремума функции:

$$U(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_M) = - \sum_{n,\, m=1}^{M}{}' \ln |\boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}_m| - \sum_{n-1}^{M} U(\boldsymbol{\xi}_n), \qquad (55)$$

которая имеет смысл потенциала системы M двумерных кулоновских частиц с единичными зарядами и с координатами $\boldsymbol{\xi}_n$ ($n = 1, ..., M$), помещенными во внешнее электростатическое поле с потенциалом $U(\boldsymbol{\xi})$ [12].

Резюме. Итак, мы изложили основные моменты подхода, позволяющие каждой рациональной функции $F(\lambda)$ ставить в соответствие некий бесконечный класс квазиточнорешаемых моделей, параметризованный непрерывным параметром λ и дискретным параметром $M = 0, 1, 2$ ... Если полное число полюсов регулярной на бесконечности функции $F(\lambda)$ равно N, то модель формулируется в $(N-2)$-мерном пространстве и при любом фиксированном M имеет $(M+N-2)!\,[(N-2)!M!]^{-1}$ точных решений. Получаемые модели эквивалентны вполне интегрируемым моделям магнетиков на алгебрах $sl\,(2) \oplus ... \oplus sl\,(2)$ (N раз) (в невырожденном случае) или на их контракциях (в вырожденном случае). Причиной квазиточнорешаемости на этом языке является наличие в модели Годена глобальной группы симметрии $sl\,(2)$ и тот факт, что младшие подпространства ее представлений с весами $M + \lim_{\lambda \to \infty} \lambda F(\lambda)$ оказываются конечномерными. С другой стороны, те же самые квазиточнорешаемые модели оказываются связанными с гамильтонианами квантовых волчков на $(M+N-2)!\,[(N-2)!M!]^{-1}$-мерных представлениях алгебр $sl\,(N-1)$ с сигнатурами $(M, 0, ..., 0)$. Наконец, существует эквивалентность между рассматриваемыми квантовыми квазиточнорешаемыми моделями и двумерной классической системой M кулоновских частиц во внешнем поле, определяемом функцией $F(\lambda)$.

Пример. При изложении мы почти не уделили внимания вырожденному случаю, ограничившись лишь общими замечаниями. Поэтому имеет смысл рассмотреть в качестве примера именно вырожденный случай и довести все выкладки до конца.

Простейшая вырожденная функция $F(\lambda)$ имеет вид

$$F(\lambda) = \frac{\tilde{f}_1}{\lambda} + \frac{\tilde{f}_2}{\lambda^2} + \frac{\tilde{f}_3}{\lambda^3}. \tag{56}$$

Образующие алгебры Годена следует искать в аналогичном виде:

$$I^a(\lambda) = \frac{\tilde{I}_1^a}{\lambda} + \frac{\tilde{I}_2^a}{\lambda^2} + \frac{\tilde{I}_3^a}{\lambda^3}, \quad a = \pm, 0, \tag{57}$$

где $\tilde{I}_1^a, \tilde{I}_2^a, \tilde{I}_3^a$ – некоторые операторы, коммутационные соотношения для которых устанавливаются подстановкой (57) в (5). Они имеют вид

$$\begin{gathered} [\tilde{I}_1^a, \tilde{I}_1^b] = \Gamma_c^{ab}\tilde{I}_1^c, \ [\tilde{I}_1^a, \tilde{I}_2^b] = \Gamma_c^{ab}\tilde{I}_2^c, \\ [\tilde{I}_1^a, \tilde{I}_3^b] = \Gamma_c^{ab}\tilde{I}_3^c, \ \ [\tilde{I}_2^a, \tilde{I}_2^b] = \Gamma_c^{ab}\tilde{I}_3^c, \\ [\tilde{I}_2^a, \tilde{I}_3^b] = 0, \ \ [\tilde{I}_3^a, \tilde{I}_3^b] = 0, \end{gathered} \tag{58}$$

где Γ_c^{ab} - структурные константы алгебры $sl\,(2)$. Формулы (58) описывают одну из контракций алгебры $sl\,(2) \oplus sl\,(2) \oplus sl\,(2)$. Для получения дифференциальных реализаций операторов I_A^a будем исходить из невырожденного случая. Заметим, что функция (56) может быть получена из невырожденной функции

$$F(\lambda) = \frac{f_1}{\lambda - \sigma_1} + \frac{f_2}{\lambda - \sigma_2} + \frac{f_3}{\lambda - \sigma_3} \tag{59}$$

в результате замены

$$f_A = \frac{\tilde{f}_1\sigma_{A+1}\sigma_{A+2} - \tilde{f}_2(\sigma_{A+1} + \sigma_{A+2}) + \tilde{f}_3}{(\sigma_{A+1} - \sigma_A)(\sigma_{A+2} - \sigma_A)}, \quad A+3 \equiv A, \ A = 1,2,3, \tag{60}$$

и последующего перехода к пределу $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Аналогично,вырожденные операторные функции (57) должны получаться из невырожденных функций:

$$I^-(\lambda) = \frac{\frac{\partial}{\partial t_1}}{\lambda - \sigma_1} + \frac{\frac{\partial}{\partial t_2}}{\lambda - \sigma_2} + \frac{\frac{\partial}{\partial t_3}}{\lambda - \sigma_3}; \tag{61a}$$

$$I^0(\lambda) = \frac{t_1\frac{\partial}{\partial t_1} + f_1}{\lambda - \sigma_1} + \frac{t_2\frac{\partial}{\partial t_2} + f_2}{\lambda - \sigma_2} + \frac{t_3\frac{\partial}{\partial t_3} + f_3}{\lambda - \rho_3}\,; \tag{61б}$$

$$I^+(\lambda) = \frac{t_1^2\frac{\partial}{\partial t_1} + 2f_1t_1}{\lambda - \sigma_1} + \frac{t_2^2\frac{\partial}{\partial t_2} + 2f_2t_2}{\lambda - \sigma_2} + \frac{t_3^2\frac{\partial}{\partial t_3} + 2f_3t_3}{\lambda - \sigma_3}\,. \tag{61в}$$

Для этого достаточно постулировать вид $I^-(\lambda)$ (в вырожденном случае):

$$I^-(\lambda) = \frac{\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_1}}{\lambda} + \frac{\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_2}}{\lambda^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3}}{\lambda^3}\,, \tag{62}$$

и определить связь между старыми и новыми переменными с помощью формул, в точности аналогичных (60):

$$\frac{\partial}{\partial t_A} = \frac{\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_1}\sigma_{A+1}\sigma_{A+2} - \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_2}(\sigma_{A+1} + \sigma_{A+2}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3}}{(\sigma_{A+1} - \sigma_A)(\sigma_{A+2} - \sigma_A)}\,, \quad A + 3 \equiv A, \quad A = 1,2,3. \tag{63}$$

После этого, произведя замену (60) и (63) в формулах (61б) и (61в) и перейдя к пределу $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, мы найдем окончательные дифференциальные представления для вырожденных операторов $\tilde{I}^a_A$:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{I}_1^- = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_1}\,;\ \tilde{I}_2^- = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_2}\,;\ \tilde{I}_3^- = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3}\,;\\
&\tilde{I}_1^0 = \tilde{t}_1\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_1} + \tilde{t}_2\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{t}_3\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3} + \tilde{f}_1\,;\\
&\tilde{I}_2^0 = \tilde{t}_1\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_2} + \tilde{t}_2\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3} + \tilde{f}_2\,;\ \tilde{I}_3^0 = \tilde{t}_1\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3} + \tilde{f}_3\,;\\
&\tilde{I}_1^+ = \tilde{t}_1^2\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_1} + 2\tilde{t}_1\tilde{t}_2\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_2} + 2\tilde{t}_1\tilde{t}_3\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3} + \tilde{t}_2^2\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3} + 2\tilde{f}_1\tilde{t}_1 + 2\tilde{f}_2\tilde{t}_2 + 2\tilde{f}_3\tilde{t}_3\,;\\
&\tilde{I}_2^+ = \tilde{t}_1^2\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_2} + 2\tilde{t}_1\tilde{t}_2\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3} + 2\tilde{f}_2\tilde{t}_1 + 2\tilde{f}_3\tilde{t}_2\,;\\
&\tilde{I}_3^+ = \tilde{t}^2\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_3} + 2\tilde{f}_3\tilde{t}_1\,.
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Теперь мы готовы выписать явный вид оператора $K(\lambda)$:

$$K(\lambda) = \frac{K_2}{\lambda^2} + \frac{K_3}{\lambda^3} + \frac{K_4}{\lambda^4} + \frac{K_5}{\lambda^5} + \frac{K_6}{\lambda^6}\,. \tag{65}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= \tilde{t}_2^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}_2^2} + \tilde{t}_3^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}_3^2} + 2\tilde{t}_2\tilde{t}_3\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}_2\partial\tilde{t}_3} - \tilde{t}_2^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}_1\partial\tilde{t}_3} + 2\tilde{f}_1\tilde{t}_2\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_2} + \\ &+ 2\tilde{f}_1\tilde{t}_3\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_3} - 2\tilde{f}_2\tilde{t}_2\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_1} - 2\tilde{f}_3\tilde{t}_3\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_1} + \tilde{f}_1(\tilde{f}_1 - 1)\,; \\ K_3 &= \tilde{t}_2^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}_2\partial\tilde{t}_3} + 2\tilde{t}_2\tilde{t}_3\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}_3^2} + 2\tilde{f}_1\tilde{t}_2\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_3} + 2\tilde{f}_2\tilde{t}_3\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_3} - \\ &- 2\tilde{f}_3\tilde{t}_2\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_1} - 2\tilde{f}_3\tilde{t}_3\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_2} + 2\tilde{f}_2(\tilde{f}_1 - 1)\,; \\ K_4 &= 2\tilde{f}_1\tilde{f}_3 + \tilde{f}_2^2 - 3\tilde{f}_3\,;\quad K_5 = 2\tilde{f}_2\tilde{f}_3\,;\quad K_6 = \tilde{f}_3^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Используя формулы (56) и (57), находим:

$$F \equiv \tilde{f}_1,\quad I^a = \tilde{I}_1^a,\quad a = \pm, 0. \tag{67}$$

В силу (67) уравнения, определяющие конечномерные инвариантные подпространства $\Phi_M\{F\}$, принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial\tilde{t}_1}\phi(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3) = 0, \\ \left(\tilde{t}_1\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_1} + \tilde{t}_2\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_2} + \tilde{t}_3\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_3}\right)\phi(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3) = M\phi(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3). \end{gathered} \tag{68}$$

Общим решением этой системы является функция

$$\phi(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3) = \tilde{t}_2^M\psi\left(\frac{\tilde{t}_3}{\tilde{t}_2}\right). \tag{69}$$

Введя новую переменную

$$x = \tilde{t}_3/\tilde{t}_2 \tag{70}$$

и проецируя $K(\lambda)$ на $\Phi_M\{F\}$, находим

$$K_M(\lambda) = \frac{K_{M2}}{\lambda^2} + \frac{K_{M3}}{\lambda^3} + \frac{K_{M4}}{\lambda^4} + \frac{K_{M5}}{\lambda^5} + \frac{K_{M6}}{\lambda^6}\,, \tag{71}$$

где

$$K_{M2} = (M + \tilde{f}_1)(M + \tilde{f}_1 - 1)\ ;$$

$$K_{M3} = x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (M - 1 + 2\tilde{f}_1 + 2\tilde{f}_2 x + 2\tilde{f}_3 x^2)\frac{\partial}{\partial x} - 2\tilde{f}_3 M x + 2\tilde{f}_2(\tilde{f}_1 - 1)\ ;$$

$$K_{M4} = 2\tilde{f}_1\tilde{f}_3 + \tilde{f}_2^2 - 3\tilde{f}_3\ ;\ K_{M5} = 2\tilde{f}_2\tilde{f}_3\ ;\ K_{M6} = \tilde{f}_3^2\ . \tag{72}$$

Из формул для $E_M(\lambda)$ получаем:

$$E_M(\lambda) = \frac{E_{M2}}{\lambda^2} + \frac{E_{M3}}{\lambda^3} + \frac{E_{M4}}{\lambda^4} + \frac{E_{M5}}{\lambda^5} + \frac{E_{M6}}{\lambda^6}\ , \tag{73}$$

где

$$E_{M2} = (M + \tilde{f}_1)(M + \tilde{f}_1 - 1)\ ;$$

$$E_{M3} = \tilde{2f}_2(\tilde{f}_1 - 1) - 2\tilde{f}_3 \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\xi_m}\ ; \tag{74}$$

$$E_{M4} = 2\tilde{f}_1\tilde{f}_3 + \tilde{f}_2^2 - 3\tilde{f}_3\ ;\ E_{M5} = 2\tilde{f}_2\tilde{f}_3\ ;\ E_{M6} = \tilde{f}_3^2\ .$$

Единственная нетривиальная часть спектрального уравнения для $K_M(\lambda)$ имеет вид

$$\left\{x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (M - 1 + 2\tilde{f}_1 + 2\tilde{f}_2 x + 2\tilde{f}_3 x^2)\frac{\partial}{\partial x} - 2\tilde{f}_3 M x\right\}\psi_M(x, \xi) = \\ = E_M(\xi)\psi_M(x, \xi)\ . \tag{75}$$

Это и есть искомое квазиточнорешаемое уравнение. Точные его решения лежат в классе полиномов степени M от x, а собственные значения определяются согласно (74) формулами

$$E_M(\xi) = -2\tilde{f}_3 \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\xi_m}, \tag{76}$$

где ξ_m $(m = 1, \ldots, M)$ - решения системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{M}{}' \frac{1}{\xi_n - \xi_m} + \frac{\tilde{f}_1}{\xi_n} + \frac{\tilde{f}_2}{\xi_n^2} + \frac{\tilde{f}_3}{\xi_n^3} = 0,\ n = 1, \ldots, M. \tag{77}$$

При заданном M уравнения (77), а следовательно, и (75) имеют $M + 1$ различных решений. Таким образом, мы имеем дело с квазиточнорешаемой моделью $(M + 1)$-го порядка.

Уравнение (75) можно переписать также в форме

$$\Big\{J^0(M)J^-(M) + 2\tilde{f}_3 J^+(M) + 2\tilde{f}_2 J^0(M) + \\ + \left(\frac{3M}{2} - 1 + 2\tilde{f}_1\right) J^-(M) + 2\tilde{f}_2 M\Big\}\psi_M = E_M \psi_M, \tag{78}$$

где

$$J^-(M) = \frac{\partial}{\partial x},\ J^0(M) = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{M}{2},\ J^+(M) = x^2\frac{\partial}{\partial x} - Mx \tag{79}$$

– генераторы $(M+1)$-мерного представления алгебры $sl\,(2)$ со «спином» $j = M/2$. (При рассмотрении этого примера мы следовали работе [16].)

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

Базис Картана - Вейля. Пусть $\mathfrak{L}_r$ - простая алгебра Ли ранга r и размерности d_r, а I_a, $a \in \Omega_r$ - ее базисные элементы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям:

$$[I_a, I_b] = \sum_{c \in \Omega_r} \Gamma^c_{ab} I_c\ ;\ a, b \in \Omega_r. \tag{80}$$

Наиболее удобным с практической точки зрения является базис Картана-Вейля, основанный на разложении:

$$\mathfrak{L}_r = \mathfrak{L}^-_r \oplus \mathfrak{L}^0_r \oplus \mathfrak{L}^+_r. \tag{81}$$

Элементы $(d_r - r)/2$-мерных подалгебр $\mathfrak{L}^\pm_r$ обозначим I_α, $\alpha \in \Delta^\pm_r$, где $\Delta^\pm_r$ – множества положительных и отрицательных корней α алгебры $\mathfrak{L}_r$. Элементы r-мерной подалгебры Картана $\mathfrak{L}^0_r$ обозначим I_i, $i \in N_r$, где N_r – множество чисел 1, ..., r. Таким образом, d_r – элементное множество индексов, нумерующих базисные элементы алгебры $\mathfrak{L}_r$, можно представить в виде: $\Omega_r = \Delta^-_r \cup N_r \cup \Delta^+_r$.

Важнейшими коммутационными соотношениями в выбранном базисе являются:

$$[I_i, I_\alpha] = (\alpha, \pi_i)\, I_\alpha,\quad i \in N_r,\ \alpha \in \Delta^\pm_r. \tag{82}$$

Здесь π_i, $i \in N_r$ - простые корни.

Введем на алгебре $\mathfrak{L}_r$ билинейную форму $\langle I_a, I_b \rangle$, удовлетворяющую дополнительному условию:

$$<[I_a, I_b], I_c> = <I_a, [I_b, I_c]>. \qquad (83)$$

Такое определение неоднозначно фиксирует форму лишь с точностью до множителя. Подберем этот множитель так, чтобы удовлетворять требованиям:

$$<I_i, I_k> = \gamma_{ik}, \quad <I_\alpha, I_\beta> = \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad (84)$$

где $\gamma_{ik} \equiv (\pi_i, \pi_k)$ - матрица скалярных произведений простых корней (невырожденная, в силу линейной независимости набора π_i), а $\varepsilon_{\alpha\beta}$ - матрица, элементы которой равны 1 при $\alpha + \beta = 0$ и 0 во всех остальных случаях. Матрица

$$g_{ab} \equiv <I_a, I_b> \qquad (85)$$

будет играть в дальнейшем роль метрического тензора (очевидно, невырожденного), который будет использоваться для поднятия и опускания индексов, нумерующих элементы алгебры $\mathfrak{L}_r$. Например,

$$I_a = \sum_{b \in \Omega_r} g_{ab} I^b. \qquad (86)$$

Расписанная в компонентах формула (86) приобретает вид

$$I_i = \sum_{k \in N_r} \gamma_{ik} I^k, \quad I_{\pm\alpha} = I^{\mp\alpha}. \qquad (87)$$

Метрический тензор (85) (который отличается от тензора Киллинга - Картана лишь множителем) удобен тем, что его компоненты g_{ab} не зависят от того, рассматриваются образующие I_a и I_b как элементы алгебры $\mathfrak{L}_r$ или какой-нибудь ее подалгебры. Очевидно, что это не относится к обратному тензору и к величинам с верхними индексами. Учитывая этот факт,но не желая загромождать текст лишними обозначениями, условимся сохранять для элементов, сопряженных I_a, одно и то же обозначение I^a, независимо от того, какой именно способ сопряжения использовался - относительно алгебры или ее подалгебры. При этом, разумеется, мы будем стараться, чтобы конкретный вид сопряжения был ясен из контекста.

Формулы (82)-(84) позволяют однозначно восстановить все не выписанные коммутационные соотношения в алгебре $\mathfrak{L}_r$. Они имеют вид:

$$[I_i, I_k] = 0, \ i, k \in N_r; \tag{88а}$$

$$[I_\alpha, I_{-\alpha}] = \sum_{i \in N_r} (\alpha, \pi_i) x^i, \ \alpha \in \Delta_r^{\pm}; \tag{88б}$$

$$[I_\alpha, I_\beta] = \Gamma_{\alpha\beta} I_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \Delta_r^{\pm}, \quad \alpha + \beta \in \Delta_r^{\pm}, \tag{88в}$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}$ - вычислимые структурные константы [24].

Квадратичный оператор Казимира определим* следующим образом:

$$K_r = \sum_{a \in \Omega_r} I^a I_a, \tag{89}$$

или, с учетом коммутационных соотношений (88б):

$$K_r = \sum_{i \in N_r} I^i [I_i + \sum_{\alpha \in \Delta_r^+} (\alpha, \pi_i)] + 2 \sum_{\alpha \in \Delta_r^+} I^\alpha I_\alpha \,. \tag{90}$$

Поскольку

$$\sum_{\alpha \in \Delta_r^+} \alpha = \sum_{i \in N_r} \nu^i \pi_i \tag{91}$$

(где ν^i - некоторый набор целых неотрицательных чисел, характеризующих алгебру $\mathcal{L}_r$), мы имеем:

$$K_r = \sum_{i \in N_r} (I^i + \nu^i) I_i + 2 \sum_{\alpha \in \Delta_r^+} I^\alpha I_\alpha. \tag{92}$$

Представления алгебр $\mathcal{L}_r$ со старшим весом определяются следующим образом:

$$I_i |0\rangle = \Lambda_{0i} |0\rangle, \ \ i \in N_r; \tag{93а}$$

$$I_\alpha |0\rangle = 0, \ \ \alpha \in \Delta_r^+. \tag{93б}$$

Набор Λ_{0i} называется старшим весом, а $|0\rangle$ - старшим вектором. Пусть M^i, $i \in N_r$ - набор неотрицательных целых чисел. Обозначим $|M\rangle$ линейную оболочку векторов вида:

$$I_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot I_{\alpha_K} |0\rangle, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_K \in \Delta_r^-, \tag{94}$$

* Это определение отличается от стандартного [24] множителем.

в которых $\alpha_1 + \ldots + \alpha_K = -\sum_{i \in N_r} M^i \pi_i$. Очевидно, пространства $|M>$ являются собственными относительно элементов подалгебры Картана:

$$I_i |M> = (\Lambda_{0i} - M_i)\, |M>. \tag{95}$$

Линейная оболочка всех таких пространств,

$$W\{\Lambda_0\} = \bigoplus_{M \geq 0} |M>, \tag{96}$$

образует пространство представления алгебры $\mathcal{L}_r$ со старшим весом Λ_0.

Реализация представлений алгебр Ли в виде дифференциальных операторов. Мы уже упоминали о том, что и в нашей схеме, и в схеме Турбинера - Шифмана определяющую роль играет возможность реализации представлений алгебр Ли в виде дифференциальных операторов пер-вого порядка. Существует мнение (это утверждалось даже в работах [11,15]), что построение таких реализаций - дело довольно сложное. Это не совсем так. Общие принципы построения достаточно просты, хотя описанные в литературе алгоритмы [24,25] не всегда доводятся до явных формул, особенно для высших алгебр. Мы постараемся восполнить этот пробел, построив явные выражения для дифференциальных операторов, реализующих произвольные представления произвольных простых алгебр Ли.

Пусть G_r - группа Ли алгебры Ли $\mathcal{L}_r$ и пусть

$$g(x) \in G_r, \quad x \in R_{d_r} \tag{97}$$

- элементы группы, параметризованные векторами $x \equiv \{x^a\}$, $a \in \Omega_r$, d_r-мерного пространства R_{d_r}. Параметризацию мы выберем так, чтобы выполнялись равенства:

$$g(0) = 1, \tag{98а}$$

$$\left.\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = I, \tag{98б}$$

где $I \equiv \{I_a\}$, $a \in \Omega_r$, - образующие алгебры $\mathcal{L}_r$, введенные ранее. Один из возможных способов параметризации состоит в выборе

$$g(x) = \exp\,(x \cdot I), \tag{99}$$

однако этот способ не единственный и, как мы увидим позже, не самый удобный. Впрочем, общая схема, которая будет изложена в настоящем разделе, не зависит от конкретного способа параметризации.

Определим для элементов x, y пространства R_{d_r} бинарную операцию $x \dot{+} y$ по формуле:

$$g(x)\, g(y) = g(x \dot{+} y)\ . \tag{100}$$

Эта операция, символом которой мы выбирали знак $\dot{+}$ (не путать со знаком прямой суммы, для которой зарезервирован символ $\oplus$), обладает следующими свойствами:

а) для любых $x, y, z \in R_{d_r}$

$$x \dot{+} (y \dot{+} z) = (x \dot{+} y) \dot{+} z\ ; \tag{101а}$$

б) для всех $x \in R_{d_r}$ существует нулевой элемент $0 \in R_{d_r}$, такой, что

$$x \dot{+} 0 = 0 \dot{+} x = x\ ; \tag{101б}$$

в) для любого $x \in R_{d_r}$ существует единственный обратный элемент $(\dot{-}\, x) \in R_{d_r}$, такой, что

$$x \dot{+} (\dot{-}x) = (\dot{-}x) \dot{+} x = 0\ . \tag{101в}$$

Замечание. В дальнейшем вместо $x \dot{+} (\dot{-}\, y)$ мы будем писать просто $x \dot{-} y$. Нетрудно проверить, что

$$\dot{-}\,(x \dot{+} y) = \dot{-}\, y \dot{-} x\ . \tag{102}$$

При выполнении условий (98) точка 0 соответствует обычному нулю пространства R_{d_r}. В общем случае $-x \neq \dot{-}\, x$, хотя для некоторых параметризаций (см., например, (99)) равенство $-x = \dot{-}\, x$ может иметь место. Для коммутативных групп имеем $x \dot{+} y = x + y$, т.е. в этом случае введенную бинарную операцию можно отождествить с обычным сложением векторов в R_{d_r}.

Пусть Φ_r - пространство функции на группе G_r и пусть

$$\phi(x) \in \Phi_r\ , \quad x \in R_{d_r} \tag{103}$$

- элементы этого пространства. Определим линейные в Φ_r операторы $\hat{g}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in R_{d_r}$, по формулам:

$$\hat{g}(\varepsilon)\, \phi(x) = \phi(x \dot{+} \varepsilon)\ . \tag{104}$$

Из этого определения следует, что

$$\hat{g}(\varepsilon_2)\, \hat{g}(\varepsilon_1) = \hat{g}(\varepsilon_1 \dot{+} \varepsilon_2)\ , \tag{105}$$

т.е. операторы $\hat{g}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in R_{d_r}$, образуют представление группы G_r. В соответствии с формулами (98) имеем:

$$\hat{g}(0) = \hat{1}\,; \tag{106а}$$

$$\left.\frac{\partial \hat{g}(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \hat{I}, \tag{106б}$$

где $\hat{I} = \{\hat{I}_a\}$, $a \in \Omega_r$, - генераторы соответствующего представления алгебры $\mathfrak{L}_r$. Дифференцируя (104) по ε и полагая $\varepsilon = 0$, находим:

$$\hat{I} = \hat{T}(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,, \tag{107}$$

где

$$\hat{T}(x) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \otimes (x \dotplus \varepsilon)|_{\varepsilon=0}\,. \tag{108}$$

Для дальнейшего упрощения формул (107) и (108) заметим, что любой вектор пространства R_{d_r} может быть представлен в виде разложения

$$x = x^- \dotplus x^0 \dotplus x^+\,, \tag{109}$$

где $x^\pm \equiv \{x^\alpha\}$, $\alpha \in \Delta_r^\pm$, и $x^0 \equiv \{x^i\}$, $i \in N_r$, - векторы размерностей $(d_r - r)/2$ и r, ассоциированные с образующими $I_\pm \equiv \{I_\alpha\}$,$\alpha \in \Delta_r^\pm$, и $I_0 \equiv \{I_i\}$, $i \in N_r$, алгебры $\mathfrak{L}_r$ в базисе Картана - Вейля. Формулы (107) и (108) теперь можно переписать в виде

$$\hat{I} = \hat{T}^-(x)\frac{\partial}{\partial x^-} + \hat{T}^0(x)\frac{\partial}{\partial x^0} + \hat{T}^+(x)\frac{\partial}{\partial x^+}\,, \tag{110}$$

где

$$\hat{T}^\pm(x) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \otimes (x \dotplus \varepsilon)^\pm|_{\varepsilon=0}; \quad \hat{T}^0(x) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \otimes (x \dotplus \varepsilon)^0|_{\varepsilon=0}. \tag{111}$$

Из очевидного равенства

$$x \dotplus \varepsilon = \{x^- \dotplus (x^0 \dotplus (x^+ \dotplus \varepsilon)^-)^-\} + \{x^0 \dotplus (x^+ \dotplus \varepsilon)^0\} + \{(x^+ \dotplus \varepsilon)^+\} \tag{112}$$

следует, что

$$\left.\begin{aligned} &(x \dotplus \varepsilon)^+ = (x^+ \dotplus \varepsilon)^+; \\ &(x \dotplus \varepsilon)^0 = x^0 \dotplus (x^+ \dotplus \varepsilon)^0; \\ &(x \dotplus \varepsilon)^- = x^- \dotplus (x^0 \dotplus (x^+ \dotplus \varepsilon)^-)^-. \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Поэтому
$$\left.\begin{aligned}\hat{T}^{+}(x) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\otimes(x^{+}\dotplus\varepsilon)^{+}|_{\varepsilon=0};\\ \hat{T}^{0}(x) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\otimes(x^{+}\dotplus\varepsilon)^{0}|_{\varepsilon=0};\\ \hat{T}^{-}(x) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\otimes\{x^{-}\dotplus(x^{0}\dotplus(x^{+}\dotplus\varepsilon)^{-})^{-}\}|_{\varepsilon=0}.\end{aligned}\right\}\tag{114}$$

Мы видим, что матрицы $\hat{T}^{+}(x)$ и $\hat{T}^{0}(x)$ зависят только от переменных x^{+}. Поэтому, рассматривая действие операторов (110) на классе функций вида
$$\phi(x) = \exp(x^{0}\Lambda_{0})\psi(x^{+}),\tag{115}$$

получаем
$$\hat{I}\exp(x^{0}\Lambda_{0})\,\psi(x^{+}) = \exp(x^{0}\Lambda_{0})\,\hat{I}(\Lambda_{0})\,\psi(x^{+}).\tag{116}$$

Операторы
$$\hat{I}(\Lambda_{0}) = \hat{t}^{+}(x^{+})\,\frac{\partial}{\partial x^{+}} + \hat{t}^{0}(x^{+})\Lambda_{0},\tag{117}$$

в которых
$$\begin{aligned}\hat{t}^{+}(x^{+}) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\otimes(x^{+}\dotplus\varepsilon)^{+}|_{\varepsilon=0},\\ \hat{t}^{0}(x^{+}) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\otimes(x^{+}\dotplus\varepsilon)^{0}|_{\varepsilon=0}\end{aligned}\tag{118}$$

действуют в пространстве функций от $(d_r - r)/2$-переменных x^{+}, являются неоднородными дифференциальными операторами первого порядка и реализуют некоторое представление алгебры $\mathcal{L}_r$. Для идентификации этого представления заметим, что в силу очевидных формул
$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^{+}}\otimes(x^{+}\dotplus\varepsilon^{+})^{0}\Big|_{\varepsilon^{+}=0} = 0,\qquad \frac{\partial}{\partial\varepsilon^{0}}\otimes(x^{+}\dotplus\varepsilon^{0})^{0}\Big|_{\varepsilon^{0}=0} = 1\tag{119}$$

имеют место равенства:
$$\hat{I}_{+}(\Lambda_{0}) = \hat{t}^{+}_{+}(x^{+})\,\frac{\partial}{\partial x^{+}};\tag{120а}$$

$$\hat{I}_{0}(\Lambda_{0}) = \hat{t}^{+}_{0}(x^{+})\,\frac{\partial}{\partial x^{+}} + \Lambda_{0};\tag{120б}$$

$$\hat{I}_{-}(\Lambda_{0}) = \hat{t}^{+}_{-}(x^{+})\,\frac{\partial}{\partial x^{+}} + \hat{t}^{0}_{-}(x^{+})\Lambda_{0}.\tag{120в}$$

Поэтому операторы (120) описывают представление алгебры $\mathcal{L}_r$ со старшим весом Λ_0. Роль старшего вектора играет при этом единичная функция $|0\rangle \equiv 1$. Нетрудно видеть, что операторы (120) могут быть получены и как инфинитезимальные операторы представления $G_r(\Lambda_0)$ группы G_r, определяемого формулой

$$\hat{g}(\varepsilon, \Lambda_0)\,\psi(x^+) = \exp\,[(x \dot{+} \varepsilon)^0\Lambda_0]\,\psi((x^+ \dot{+} \varepsilon)^+). \qquad (121)$$

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с операторами

$$\hat{I}(\Lambda_0^1, ..., \Lambda_0^N) \equiv \sum_{A=1}^{N} \hat{I}(\Lambda_0^A) = \sum_{A=1}^{N} \left\{\hat{t}^+(x_A^+)\frac{\partial}{\partial x_A^+} + \hat{t}^0(x_A^+)\Lambda_0^A\right\}, \qquad (122)$$

реализующими представление алгебры $\mathfrak{L}_r$ на классе функций, зависящих от N векторных переменных. По аналогии с (121) эти операторы можно интерпретировать как инфинитезимальные операторы следующих групповых преобразований:

$$\begin{gathered}\hat{g}(\varepsilon, \Lambda_0^1, ..., \Lambda_0^N)\psi(x_1^+, ..., x_N^+) = \\ = \exp\left\{\sum_{A=1}^{N}(x_A^+ \dot{+} \varepsilon)^0\Lambda_0^A\right\}\psi((x_1^+ \dot{+} \varepsilon)^+, ..., (x_N^+ \dot{+} \varepsilon)^+).\end{gathered} \qquad (123)$$

Если выбрать в качестве старшего вектора единичную функцию $|0\rangle \equiv 1$, то старшим весом будет $\Lambda_0^1 + \ldots + \Lambda_0^N$. Однако в дальнейшем нам придется рассматривать представления алгебры операторов (122) с произвольными старшими весами, которые можно записать в виде $\Lambda_0^1 + \ldots + \Lambda_0^N - M_0$. Возникает вопрос: какой вид в этом случае может иметь старший вектор $|0\rangle$? Для ответа необходимо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\hat{I}_+(\Lambda_0^1, ..., \Lambda_0^N)\psi = 0;\\ &\hat{I}_0(\Lambda_0^1, ..., \Lambda_0^N)\psi = \left(\sum_{A=1}^{N}\Lambda_0^A - M_0\right)\psi\end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

относительно функций ψ. По сути дела, нам надо найти такие функции ψ, которые были бы инвариантными относительно преобразований подгруппы $\hat{g}(\varepsilon^+, 0, ..., 0)$ и преобразовывались бы однородно (с добавлением множителя $\exp\,(-\varepsilon^0 M_0)$) при преобразованиях подгруппы $\hat{g}(\varepsilon^0, 0, ..., 0)$:

$$\psi((x_1^+ \dot{+} \varepsilon^+)^+, ..., (x_N^+ \dot{+} \varepsilon^+)^+) = \psi(x_1^+, ..., x_N^+); \qquad (125а)$$

$$\psi((x_1^+ \dot{+} \varepsilon^0)^+, ..., (x_N^+ \dot{+} \varepsilon^0)^+) = e^{-\varepsilon^0 M_0}\,\psi(x_1^+, ..., x_N^+). \qquad (125б)$$

Для решения (125a) воспользуемся равенством:

$$(x_A^+ \dotplus \varepsilon^+)^+ = x_1^+ \dotplus \varepsilon^+, \tag{126}$$

из которого следует, что

$$(x_A^+ \dotplus \varepsilon^+) \dot{-} (x_B^+ \dotplus \varepsilon^+) = x_A^+ \dotplus \varepsilon^+ \dot{-} \varepsilon^+ \dot{-} x_B^+ = x_A^+ \dot{-} x_B^+. \tag{127}$$

Таким образом, функции $x_A^+ \dot{-} x_B^+$ инвариантны относительно преобразований $g(\varepsilon^+, 0, ..., 0)$. Функционально независимыми являются следующие их комбинации:

$$\xi_A = x_A^+ \dot{-} x_N^+, \;\; A = 1, ..., N-1. \tag{128}$$

Поэтому наиболее общее решение уравнения (125a) имеет вид

$$\psi = \psi(\xi_1, ..., \xi_{N-1}). \tag{129}$$

Посмотрим теперь, как меняются компоненты векторов $\xi_A = \{\xi_A^\alpha\}$, $\alpha \in \Delta_r^+$ при преобразовании подгруппы $g(\varepsilon^0, 0, ..., 0)$. Так, для компонент $x_A = \{x_A^\alpha\}$ имеем

$$(x_A^+ \dotplus \varepsilon^0)^\alpha = \dot{-}\, \varepsilon^0 \dotplus x_A^\alpha \dotplus \varepsilon^0 = \exp\{-\varepsilon^0(\pi_0, \alpha)\}\, x_A^\alpha, \tag{130}$$

где $\pi_0 \equiv \{\pi_i\}$, $i \in N_r$. Компоненты векторов $\xi_A = x_A \dot{-} x_N$ тоже преобразуются однородно:

$$\xi_A^\alpha \to \exp\{-\varepsilon^0(\pi_0, \alpha)\}\xi_A^\alpha. \tag{131}$$

Это означает, что все величины вида $[\xi_{A_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{A_K}^{\alpha_K}]\,[\xi_{B_1}^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{B_L}^{\beta_L}]^{-1}$, где $\alpha_1 + \ldots \alpha_K = \beta_1 + \ldots + \beta_L$, $\alpha_K, \beta_l \in \Delta_r^+$, инвариантны относительно преобразований $g(\varepsilon^0, 0, ..., 0)$. В качестве функционально независимых можно выбрать следующие $(N-2)\,(d_r - r)/2$ переменных:

$$\eta = \left\{ \frac{\xi_A^\alpha}{\prod\limits_{i \in N_r} (\xi_{N-1}^{\pi_i})^{(\alpha, \pi^i)}} \right\}, \; \alpha \in \Delta_r^+, \; A = 1, ..., N-2, \tag{132}$$

а также $(d_r - r)/2 - r$ переменных вида

$$\nu = \left\{ \frac{\xi^{\alpha}_{N-1}}{\prod\limits_{i \in N_r} (\xi^{\pi_i}_{N-1})^{(\alpha, \pi^i)}} \right\}, \ \alpha \in \Delta^+_r, \ \alpha \neq \pi_i, \ i \in N_r. \tag{133}$$

Введя обозначение

$$\xi^i \equiv \xi^{\pi_i}_{N-1}, \ i \in N_r, \tag{134}$$

найдем, что функции

$$\psi = \prod_{i \in N_r} (\xi^i)^{M^i} \psi(\eta, \nu) \tag{135}$$

реализуют самое общее решение системы (125). Любая из этих функций может играть роль старшего вектора для представления алгебры операторов (122) со старшим весом $\Lambda^1_0 + \ldots + \Lambda^N_0 - M_0$.

Получим теперь явные выражения для матриц $\hat{t}^+(x^+)$ и $\hat{t}^0(x^+)$ в предположении, что параметризация является гауссовой:

$$g(x) = \exp\Big\{ \sum_{\alpha \in \Delta^-_r} x^{\alpha} I_{\alpha} \Big\} \exp\Big\{ \sum_{i \in N_r} x^i I_i \Big\} \exp\Big\{ \sum_{\alpha \in \Delta^+_r} x^{\alpha} I_{\alpha} \Big\}. \tag{136}$$

В этом случае уравнение на матрицы $\hat{t}^+(x^+)$ и $\hat{t}^0(x^+)$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\exp\Big\{ \sum_{i \in N_r} x^i I_i \Big\} \exp\Big\{ \sum_{\alpha \in \Delta^+_r} x^{\alpha} I_{\alpha} \Big\} \exp\Big\{ \varepsilon^a I_a \Big\} = \\ &= \exp\Big\{ \sum_{i \in N_r} (x^i I_i + \varepsilon^a t^i_a(x^+) I_i) \Big\} \exp\Big\{ \sum_{\alpha \in \Delta^+_r} (x^{\alpha} I_{\alpha} + \varepsilon^a t^{\alpha}_a(x^+) I_{\alpha} \Big\}. \end{aligned} \tag{137}$$

Применив хорошо известную формулу

$$\exp(A + B) = \exp A \ [\mathrm{T} \exp \int_0^1 d\tau \ \exp(-\tau A) B \ \exp(\tau A)] \tag{138}$$

к правой части (137), разложив обе части в ряд по степеням ε^a и сохранив члены только первых степеней по ε^a, получим после тривиальных преобразований:

$$t^i_a(x^+) = \langle \exp(\mathrm{ad} \sum_{\alpha \in \Delta^+_r} x^\alpha I_\alpha) I_a, I^i \rangle, \ i \in N_r. \tag{139}$$

Что же касается матрицы $t^\alpha_a(x^+)$, то она находится из системы алгебраических уравнений:

$$t^\alpha_a(x^+) \int_0^1 d\tau \langle \exp(\mathrm{ad}\, \tau \sum_{\beta \in \Delta^+_r} x^\beta I_\beta) I_\alpha, I^\gamma \rangle = \langle \exp(\mathrm{ad} \sum_{\beta \in \Delta^+_r} x^\beta I_\beta) I_a, I^\gamma \rangle, \tag{140}$$
$$a \in \Omega_r, \ \gamma \in \Delta^+_r.$$

Заметим теперь, что матрица

$$\int_0^1 d\tau \langle \exp(\mathrm{ad}\, \tau \sum_{\beta \in \Delta^+_r} x^\beta I_\beta) I_\alpha, I^\gamma \rangle, \tag{141}$$

входящая в уравнение (140), будет иметь треугольный вид, если корни α, γ расположить в порядке неубывания их высот. При этом на главной диагонали (141) будут стоять единицы. Детерминант такой матрицы равняется единице, и поэтому обратная ей матрица состоит из миноров. Поскольку каждый минор является конечным полиномом по x^α (это относится и к правой части (140)), то матрицы $\hat{t}^+(x^+)$ и $\hat{t}^0(x^+)$ тоже будут полиномиальными по x^α.

Полученные нами дифференциальные реализации представлений алгебры $\mathcal{L}_r$ не особенно удобны с практической точки зрения, так как приведение их к явному виду требует некоторой работы. Связано это с тем, что мы воспользовались не совсем удачным для этой цели разложением Гаусса, которое в основном и обсуждается в литературе [25, 26]. В следующих разделах мы рассмотрим более удобные разложения и на их основе введем явные формулы, годящиеся для любой простой алгебры Ли.

В заключение этого раздела посмотрим, как преобразуются матрицы $\hat{t}^+(x^+)$ и $\hat{t}^0(x^+)$ при однородных преобразованиях компонент параметра x^+:

$$x^\alpha \to \exp\{-\varepsilon^0(\pi_0, \alpha)\} x^\alpha. \tag{142}$$

Поскольку каждая компонента x^α получает фактор $\exp[-\varepsilon^0(\pi_0, \alpha)]$, то в разложении (141) отличными от нуля будут лишь те члены, которые получают фактор $\exp\{-\varepsilon^0(\pi_0, (\gamma - \alpha))\}$. Это означает, что компоненты рассматриваемых матриц будут преобразовываться как

$$\left.\begin{aligned} t^\alpha_\beta(x^+) &\to \exp\{-\varepsilon^0(\pi_0, (\alpha - \beta))\} t^\alpha_\beta(x^+); \\ t^\alpha_i(x^+) &\to \exp\{-\varepsilon^0(\pi_0, \alpha)\} t^\alpha_i(x^+). \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

Аналогично можно показать, что

$$t_\alpha^i(x^+) \to \exp\{\varepsilon^0(\pi_0, \alpha)\} t_\alpha^i(x^+) \,. \tag{144}$$

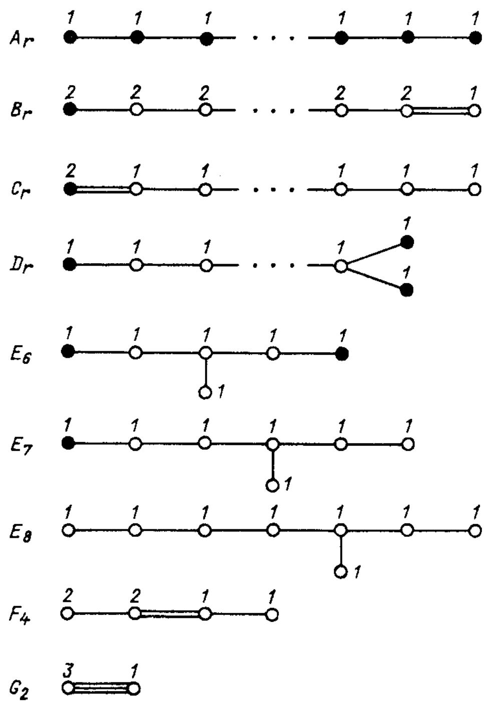
Отсюда следует, что дифференциальные операторы $\hat{I}_\alpha(\Lambda_0)$, $\alpha \in \Delta_r^\pm$, и $\hat{I}_i(\Lambda_0)$, $i \in N_r$, реализующие представления алгебры $\mathcal{L}_r$ со старшим весом Λ_0, преобразуются по законам:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{I}_\alpha(\Lambda_0) \to \exp\{\varepsilon^0(\pi_0, \alpha)\}\hat{I}_\alpha(\Lambda_0), \ \alpha \in \Delta_r^\pm \,, \\ &\hat{I}_i(\Lambda_0) \to \hat{I}_i(\Lambda_0), \ i \in N_r \,. \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

3. СПЕЦИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРОСТЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Построение базиса. Назовем простой корень алгебры $\mathcal{L}_r$ особым, если в разложение любого корня он входит с коэффициентом, по модулю не превышающим единицу.

Приведем схемы Дынкина простых алгебр Ли и пометим черными кружочками вершины, связанные с особыми простыми корнями:



(146)

Мы видим, что у алгебр A_r все простые корни - особые, а у алгебр E_8, F_4 и G_2 их нет вовсе. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь алгебр, имеющих хотя бы один особый корень. Это алгебры A_r $(r \geq 1)$, B_r $(r \geq 2)$, C_r $(r \geq 3)$, D_r $(r \geq 4)$, E_6 и E_7. Условимся называть их особыми.

Удаление из алгебры $\mathfrak{L}_r$ крайнего особого корня (вместе со всеми содержащими его непростыми корнями) превращает ее в простую подалгебру $\mathfrak{L}_{r-1}$. Например,

$$\left.\begin{array}{l} A_r \to A_{r-1},\ B_r \to B_{r-1},\ C_r \to A_{r-1}, \\ D_r \begin{array}{l} \nearrow D_{r-1} \\ \searrow A_{r-1} \end{array},\ E_7 \to E_6,\ E_6 \to D_5. \end{array}\right\} \tag{147}$$

В дальнейшем удаляемому особому корню мы будет приписывать номер r. Множества корней, содержащих в разложении корень с коэффициентами ± 1, обозначим $\sum_r^{\pm}$.

Особые корни замечательны тем, что элементы I_α, связанные с корнями $\alpha \in \sum_r^{\pm}$, образуют коммутативные подалгебры, которые мы обозначим $\mathfrak{E}_{\pm r}$. Коммутативность $\mathfrak{E}_{\pm r}$ непосредственно следует из определения простого корня. Очевидно, что

$$\dim \mathfrak{E}_{\pm r} = \frac{1}{2}(d_r - d_{r-1} - 1). \tag{148}$$

Алгебры $\mathfrak{E}_{\pm r}$ сопряжены относительно билинейной формы (85). Для элементов $E_{\pm r} = \{E_{\pm r, \alpha}\}$, $\alpha \in \sum_r^{\pm}$, этих подалгебр выполняются следующие условия нормировки:

$$<E_{\pm r} \otimes E_{\mp r}> = \hat{1}_r, \tag{149}$$

где $\hat{1}_r$ - единичная матрица размерности $\dim\ \mathfrak{E}_r$.

Поскольку размерности подалгебр Картана $\mathfrak{L}_r^0$ и $\mathfrak{L}_{r-1}^0$ отличаются на единицу, то

$$\mathfrak{L}_r^0 = \mathfrak{L}_{r-1}^0 \otimes H_r, \tag{150}$$

где H_r - элемент $\mathfrak{L}_r^0$, не принадлежащий $\mathfrak{L}_{r-1}^0$. Для однозначного определения этого элемента потребуем его самосопряженности относительно формы (85), что эквивалентно условиям:

$$<H_r, I_i> = 0,\ i \in N_{r-1}; \tag{151а}$$

$$<H_r, H_r> = 1. \tag{151б}$$

Очевидно, что элемент H_r должен коммутировать со всеми элементами подалгебры $\mathfrak{L}_{r-1}$.

Суммируя вышесказанное, можно заключить, что для всех особых алгебр Ли справедливо разложение:

$$\mathfrak{L}_r = (\mathfrak{E}_{-r} \oplus H_r \oplus \mathfrak{E}_{+r}) \oplus \mathfrak{L}_{r-1}, \tag{152}$$

где $\mathfrak{E}_{\pm r}$ - коммутативные сопряженные подалгебры размерностей $(d_r - d_{r-1} - 1)/2$; H_r - самосопряженный элемент подалгебры Картана, а $\mathfrak{L}_{r-1}$ - простая алгебра Ли.

Отличные от нуля коммутационные соотношения в (152) имеют вид:

$$[\mathfrak{L}_{r-1}, \mathfrak{L}_{r-1}] = \mathfrak{L}_{r-1}; \tag{153}$$

$$[\mathfrak{L}_{r-1}, \mathfrak{E}_{\pm r}] = \mathfrak{E}_{\pm r}; \tag{154}$$

$$[H_r, \mathfrak{E}_{\pm r}] = \mathfrak{E}_{\pm r}; \tag{155}$$

$$[\mathfrak{E}_{\pm r}, \mathfrak{E}_{\mp r}] = H_r \oplus \mathfrak{L}_{r-1}. \tag{156}$$

Распишем теперь эти соотношения подробнее. Для (153) имеем

$$[I_a, I_b] = \sum_{c \in \Omega_{r-1}} \Gamma^c_{ab} I_c, \quad a, b \in \Omega_{r-1}. \tag{157}$$

Соотношения (154) переписываются в виде

$$[I_a, E_{\pm r}] = -\hat{I}_a(\mathfrak{E}_{\pm r}) E_{\pm r}, \quad a \in \Omega_{r-1}, \tag{158}$$

где $\hat{I}_a(\mathfrak{E}_{\pm r})$ - матрицы, играющие роль структурных констант. Используя тождество Якоби

$$\Big[[I_a, E_{\pm r}], I_b\Big] + \Big[[E_{\pm r}, I_b], I_a\Big] + \Big[[I_b, I_a], E_{\pm r}\Big] = 0 \tag{159}$$

и формулы (157), (159), находим

$$[\hat{I}_a(\mathfrak{E}_{\pm r}), \hat{I}_b(\mathfrak{E}_{\pm r})] = \sum_{c \in \Omega_{r-1}} \Gamma^c_{ab} \hat{I}_c(\mathfrak{E}_{\pm r}), \quad a, b \in \Omega_{r-1}. \tag{160}$$

Таким образом, матрицы $\hat{I}_a(\mathfrak{E}_{\pm r})$, $a \in \Omega_{r-1}$, образуют представления алгебры $\mathfrak{L}_{r-1}$ размерности $\dim \mathfrak{E}_{\pm r}$, реализованные на пространствах коммутативных подалгебр $\mathfrak{E}_{\pm r}$. Из простоты алгебры $\mathfrak{L}_{r-1}$ следует, что

$$\mathrm{Sp}\,\hat{I}_a(\mathfrak{S}_{\pm r}) = 0. \tag{161}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$\hat{I}_a(\mathfrak{S}_{+r}) + \tilde{\hat{I}}_a(\mathfrak{S}_{-r}) = 0, \tag{162}$$

где знак «тильда» означает транспонирование.

В дальнейшем нам понадобятся лишь представления, реализуемые матрицами $\hat{I}_a(\mathfrak{S}_{+r})$ на подалгебрах $\mathfrak{S}_{+r}$. Для их идентификации рассмотрим формулу (158) со знаком «плюс». Пронумеровав корни $\alpha \in \Delta^+_{r-1}$ в порядке неубывания их высот, мы увидим, что в этом случае матрицы $\hat{I}_a(\mathfrak{S}_{+r})$, $\alpha \in \Delta^+_{r-1}$, имеют верхний треугольный вид, а матрицы $\hat{I}_i(\mathfrak{S}_{+r})$, $i \in N_{r-1}$, - диагональны. Поэтому роль старшего вектора будет будет играть вектор размерности $\dim\,\mathfrak{S}_r$, у которого лишь первая компонента отлична от нуля. Это означает, что соответствующий старший вес должен определяться результатом коммутации элементов I_i, $i \in N_{r-1}$, с элементом $\mathfrak{S}_r$, отвечающим положительному корню минимально возможной высоты. Это - корень π_r. Отсюда делаем вывод, что старшим весом представления (160) будет $(r-1)$-мерный вектор γ_{ir}, $i \in N_{r-1}$.

Далее, используя формулы (151), находим для коммутационных соотношений (155):

$$[H_r, E_{\pm r}] = \pm\, Q_r\, E_{\pm r}, \tag{163}$$

где

$$Q_r = \langle H_r, I_r \rangle. \tag{164}$$

Что же касается соотношений (156), то их можно записать в виде

$$[E_{\pm r} \otimes E_{\mp r}] = \pm\, Q_r\, H_r\, \hat{1}_r - \sum_{a \in \Omega_{r-1}} I^a \hat{I}_a(\mathfrak{S}_{\pm r}). \tag{165}$$

Здесь I^a понимается как элемент, сопряженный элементу I_a относительно билинейной формы подалгебры $\mathfrak{L}_{r-1}$. Применяя к (165) формулу (161), получаем

$$[E_{\pm r} \cdot E_{\mp r}] = \pm\, R_r\, H_r, \tag{166}$$

где

$$R_r = Q_r \dim \mathfrak{S}_r. \tag{167}$$

Приведем также важную формулу:

$$\begin{aligned} &Q_r^2 \hat{1}_r^{(1)} \otimes \hat{1}_r^{(2)} + \sum_{a \in \Omega_{r-1}} \hat{I}_a(\mathfrak{E}^{(1)}_{\pm r}) \otimes \hat{I}^a(\mathfrak{E}^{(2)}_{\pm r}) = \\ &= Q_r^2 \hat{1}_r^{(2)} \otimes \hat{1}_r^{(1)} + \sum_{a \in \Omega_{r-1}} \hat{I}_a(\mathfrak{E}^{(2)}_{\pm r}) \otimes \hat{I}^a(\mathfrak{E}^{(1)}_{\pm r}). \end{aligned} \tag{168}$$

Здесь индексы (1) и (2) указывают номера пространств, в которых действуют операторы $\hat{1}_r$ и $\hat{I}_a(\mathfrak{E}_{\pm r})$. Наконец, выпишем вид оператора Казимира в разложении (152):

$$K_r = H_r^2 + R_r H_r + E_{-r} \cdot E_{+r} + K_{r-1}. \tag{169}$$

Вернемся теперь к процедуре удаления особых простых корней, которая выделяет из алгебры $\mathfrak{L}_r$ простую подалгебру $\mathfrak{L}_{r-1}$ по схеме (147). Каждая возникающая подалгебра содержит свой особый корень, поэтому процедура удаления может быть продолжена. В результате мы приходим к следующим возможным цепочкам:

$$\left.\begin{array}{l} A_r \to A_{r-1} \to A_{r-2} \to \dots \to A_3 \to A_2 \to A_1; \\ B_r \to B_{r-1} \to B_{r-2} \to \dots \to B_3 \to B_2 \to A_1; \\ C_r \to A_{r-1} \to A_{r-2} \to \dots \to A_3 \to A_2 \to A_1; \\ D_r \to A_{r-1} \to A_{r-2} \to \dots \to A_3 \to A_2 \to A_1; \\ \quad \llcorner\!\!\longrightarrow D_{r-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow D_4 \longrightarrow\!\lrcorner \\ E_7 \to E_6 \to D_5 \to A_4 \to A_3 \to A_2 \to A_1; \\ \qquad\qquad \llcorner\!\!\longrightarrow D_4 \longrightarrow\!\lrcorner \\ E_6 \to D_5 \to A_4 \to A_3 \to A_2 \to A_1. \\ \qquad \llcorner\!\!\longrightarrow D_4 \longrightarrow\!\lrcorner \end{array}\right\} \tag{170}$$

Условимся нумеровать простые корни алгебры так, чтобы в каждой следующей вдоль цепочки подалгебре особый корень имел максимальный номер. В результате мы приходим к разложению:

$$\mathfrak{L}_r = \bigoplus_{s=1}^{r} (\mathfrak{E}_{-s} \oplus H_s \oplus \mathfrak{E}_{+s}). \tag{171a}$$

Введя обозначение

$$\mathfrak{E}_0 \equiv \bigoplus_{s=1}^{r} H_s, \tag{172}$$

формулу (170) можно переписать иначе:

$$\mathfrak{L}_r = \bigoplus_{s=-r}^{r} \mathfrak{G}_s. \tag{171б}$$

Коммутационные соотношения в $\mathfrak{L}_r$ можно теперь представить в виде

$$[\mathfrak{G}_q, \mathfrak{G}_p] = \mathfrak{G}_p, \quad 0 < |q| < |p|; \tag{173а}$$

$$[\mathfrak{G}_q, \mathfrak{G}_{-q}] = \bigoplus_{s=-q}^{q} \mathfrak{G}_s, \ 0 < |q|. \tag{173б}$$

Для раскрытия этих коммутационных соотношений обозначим образующие подалгебр $\mathfrak{G}_{\pm s}$ через $E_{\pm s}$. Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} [E_q, E_p] &= -\hat{E}_q(\mathfrak{G}_p)E_p \\ [H_q, E_p] &= -\hat{H}_q(\mathfrak{G}_p)E_p \end{aligned}\right\} \ 0 < |q| < |p|; \tag{174а}$$

$$[H_q\,, E_{\pm q}] = \pm Q_q\, E_{\pm q}\,; \tag{174б}$$

$$[E_{\pm p} \otimes E_{\mp p}] = \pm Q_p\, H_p\, \hat{1}_p - \sum_{q=1}^{p-1} H_q \hat{H}_q(\mathfrak{G}_{\pm p}) - \sum_{q=1}^{p-1} E_{-q}\hat{E}_{+q}(\mathfrak{G}_{\pm p}) - $$
$$ - \sum_{q=1}^{p-1} E_{+q}\hat{E}_{-q}(\mathfrak{G}_{\pm p})\,. \tag{174в}$$

Элементы $E_{\pm s}$ и H_s удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$<H_q, H_p> = \delta_{qp}\,, \tag{175а}$$

$$<E_q \otimes E_{-q}> = \hat{1}_q\,. \tag{175б}$$

Наборы матриц $\hat{H}_q(\mathfrak{G}_p)$, $\hat{E}_{\pm q}(\mathfrak{G}_p)$, $q = 1, .., p-1$, реализуют представления алгебры $\mathfrak{L}_{p\text{-}1}$ размерности $\dim \mathfrak{G}_p$ со старшими весами $\Lambda_{0s} = \gamma_{sp}$, $s \in N_{p-1}$.

Введем матрицу S^i_q, связывающую H_q с базисными элементами I_i:

$$H_q = \sum_{i=1}^{r} S^i_q I_i\,. \tag{176}$$

Нетрудно видеть, что матрица S^i_q в силу (151а) - треугольна:

$$S_q^i = 0, \quad i > q\,. \tag{177}$$

Подставляя (176) в (175), получаем полезную формулу:

$$\sum_{i,\,k \in N_r} S_p^i\, S_q^k\, \gamma_{ik} = \delta_{pq}\,, \tag{178}$$

которая вместе с условием (177) позволяет определить матрицу S_q^i однозначно (с помощью стандартной процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта). Через матрицу S_q^i выражаются многие характеристики рассматриваемого базиса. Так, например, справедливы формулы:

$$E_q(\mathcal{E}_p)|0> = 0, \quad q \in N_{p-1}\,;$$
$$\hat{H}_q(\mathcal{E}_p)|0> = S_{qp}|0>\,, \quad q \in N_{p-1}\,. \tag{179}$$

Легко также показать, что

$$Q_q = S_{qq} \tag{180}$$

и

$$\sum_{q=1}^{r} S_q^i\, R_q = \nu^i\,. \tag{181}$$

Последняя формула выводится из сравнения (92) с другим выражением для оператора Казимира

$$K_r = \sum_{q=1}^{r} H_q^2 + \sum_{q=1}^{r} R_q\, H_q + 2 \sum_{q=1}^{r} E_{-q}\, E_{+q}\,, \tag{182}$$

следующим из (169).

Перейдем теперь к построению дифференциальных реализаций представлений особых простых алгебр Ли, основанных на разложении (172). Согласно этому разложению, любой элемент группы может быть параметризован следующим образом:

$$g(x) = \prod_{q=-r}^{r} \exp\,(x_q\, E_q)\,. \tag{183}$$

Произведение в (183) будем читать слева направо. Заметим, что любое частичное произведение $\exp\,(x_s E_s) \ldots \exp\,(x_r E_r)$ образует подгруппу. По этой причине формулу (183) можно разбить на $2r+1$ формул вида

$$\Big(\prod_{q=s}^{r} \exp\,(x_q\, E_q) \Big) \exp\,(\varepsilon_s\, E_s) = \prod_{q=s}^{r} \exp\,[x_q\, E_q + \varepsilon_s\, (E_s \mid x_q)\, E_q]. \tag{184}$$

Каждая из этих формул после несложных преобразований может быть переписана в одном из следующих видов:

$$\Big(\prod_{q=p}^{r} \exp(x_q E_q)\Big) E_s \Big(\prod_{q=p}^{r} \exp(x_q E_q)\Big)^{-1} = (E_s | x_p) E_p +$$
$$+ \sum_{n=p+1}^{r} (E_s | x_n) \Big(\prod_{q=p}^{n-1} \exp(x_q E_q)\Big) E_n \Big(\prod_{q=p}^{n-1} \exp(x_q E_q)\Big)^{-1} + \tag{185}$$
$$+ \sum_{n=s}^{p-1} (E_s | x_n) \Big(\prod_{q=n}^{p-1} \exp(x_q E_q)\Big)^{-1} E_n \Big(\prod_{q=n}^{p-1} \exp(x_q E_q)\Big), \quad s=-r,\dots,+r.$$

Умножая обе части формулы (185) на E_{-p}, находим

$$(E_s \mid x_p) = \langle E_s \otimes \Big(\prod_{q=p}^{r} \exp(-\mathrm{ad}\, x_q E_q)\Big) E_{-p} \rangle . \tag{186}$$

Отсюда уже нетрудно получить дифференциальные представления для операторов

$$E_s = \sum_{p=1}^{r} \langle E_s \otimes \Big(\prod_{q=p}^{r} \exp(-\mathrm{ad}\, x_q E_q)\Big) E_{-p} \rangle \frac{\partial}{\partial x_p} . \tag{187}$$

Для упрощения полученных формул спроецируем операторы (187) на класс функций

$$\psi = \exp(x_0 h_0)\, \psi(x_1, \dots, x_r), \tag{188}$$

в результате чего они примут вид

$$E_{+s} = \frac{\partial}{\partial x_s} - \sum_{a=s+1}^{r} \langle E_s \otimes \mathrm{ad}\,(x_a E_a) E_{-a} \rangle \frac{\partial}{\partial x_a},$$
$$H_s = h_s - \sum_{a=s}^{r} \langle H_s \otimes \mathrm{ad}\,(x_a E_a) E_{-a} \rangle \frac{\partial}{\partial x_a},$$
$$E_{-s} = \sum_{a=1}^{s} \langle E_{-s} \otimes \prod_{q=a}^{s} \exp(-\mathrm{ad}\, x_q E_q) H_a \rangle h_a + \tag{189}$$
$$+ \sum_{a=1}^{s} \langle E_{-s} \otimes \prod_{q=a}^{s} \exp(-\mathrm{ad}\, x_q E_q) E_{-a} \rangle \frac{\partial}{\partial x_a} +$$
$$+ \sum_{a=s+1}^{r} \langle E_{-s} \otimes \exp(-\mathrm{ad}\, x_a E_a) E_{-a} \rangle \frac{\partial}{\partial x_a} .$$

Это и есть искомые дифференциальные реализации представлений алгебр Ли со старшими весами Λ_0. Здесь h_a - собственные значения операторов H_a, связанные со старшими весами посредством матрицы $\hat{S}$:

$$h_a = \sum_{i \in N_r} S_a^i \Lambda_{0i} . \tag{190}$$

4. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ГОДЕНА НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ И ЕЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Определение годеновской модели в общем случае. Поставим в соответствие простой алгебре Ли $\mathcal{L}_r$ бесконечномерную алгебру Годена $G(\mathcal{L}_r)$, образующие которой $I_a(\lambda)$, $a \in \Omega_r$, зависят от комплексного параметра λ и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[I_a(\lambda), I_b(\mu)] = \sum_{c \in \Omega_r} \Gamma_{ab}^c \frac{I_c(\lambda) - I_c(\mu)}{\lambda - \mu} . \tag{191}$$

Пользуясь (191), сопоставим разложению (81) Картана – Вейля в алгебре $\mathcal{L}_r$ аналогичное разложение в алгебре $G(\mathcal{L}_r)$:

$$G(\mathcal{L}_r) = G(\mathcal{L}_r^-) \oplus G(\mathcal{L}_r^0) \oplus G(\mathcal{L}_r^+) . \tag{192}$$

Элементы подалгебр $G(\mathcal{L}_r^\pm)$ и $G(\mathcal{L}_r^0)$ обозначим $I_\alpha(\lambda)$, $\alpha \in \Delta_r^\pm$, и $I_i(\lambda)$, $i \in N_r$, соответственно. Определим представление алгебры Годена по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &I_\alpha(\lambda)|0\rangle = 0, \quad \alpha \in \Delta_r^+ ; \\ &I_i(\lambda)|0\rangle = F_i(\lambda)|0\rangle , \quad i \in N_r . \end{aligned}\right\} \tag{193}$$

Здесь $|0\rangle$ - старший вектор представления, а функции $F_i(\lambda)$, $i \in N_r$, играют роль компонент старшего веса. Пусть $M = \{M^i\}$, $i \in N_r$, - наборы неотрицательных целых чисел. Поставим в соответствие каждому такому набору пространство $|M\rangle$, составленное из всевозможных линейных комбинаций векторов вида

$$I_{\alpha_1}(\lambda_1) \cdot \ldots \cdot I_{\alpha_K}(\lambda_K)|0\rangle , \tag{194}$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_K$ - произвольные комплексные числа, а $\alpha_1,\ldots,\alpha_K \in \Delta_r^-$ - различные наборы отрицательных корней алгебры $\mathcal{L}_r$, удовлетворяющие следующему ограничению:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_K = - \sum_{i \in N_r} M^i \pi_i . \tag{195}$$

С учетом этого ограничения число корней в наборе может быть произвольным. Если операторы $I_\alpha(\lambda)$, входящие в (194), удовлетворяют условиям (193), то пространство $W_r\{F(\lambda)\}$ реализуемого ими представления алгебры Годена определяется как

$$W_r\{F(\lambda)\} = \bigoplus_{M \geq 0} |M> . \tag{196}$$

Следуя [3], введем операторы

$$K_r(\lambda) = \sum_{a,\, b \in \Omega_r} g^{ab} I_a(\lambda)\, I_b(\lambda), \tag{197}$$

зависящие от λ и по структуре напоминающие операторы Казимира (89) в алгебре $\mathcal{L}_r$. В действительности, однако, (197) не являются операторами Казимира для алгебры Годена $G(\mathcal{L}_r)$, так как не коммутируют со всеми ее элементами. Они обладают другим замечательным свойством:

$$[K_r(\lambda), K_r(\mu)] = 0, \tag{198}$$

т.е. образуют коммутативное семейство. По этой причине спектральная задача

$$K_r(\lambda)\, \phi_r = E_r(\lambda)\, \phi_r, \quad \phi_r \in W_r\{F(\lambda)\}, \tag{199}$$

является вполне интегрируемой [3]. В следующем разделе мы покажем, что ее можно решить точно для всех особых простых алгебр Ли в рамках алгебраического анзаца Бете. При изложении мы будем следовать работам [18]. По поводу других методов решения годеновской задачи для простых классических алгебр Ли см., например, работу [20].

Алгебра Годена в специальном базисе. Начиная с этого раздела мы ограничимся рассмотрением лишь простых особых алгебр Ли, т.е. алгебр $A_r\,(r \geq 1)$, $B_r\,(r \geq 2)$, $C_r\,(r \geq 3)$, $D_r\,(r \geq 4)$, E_6 и E_7. В силу отмеченного в предыдущем разделе соответствия между этими алгебрами и алгебрами Годена для последних справедливы разложения, аналогичные разложениям (152):

$$G(\mathcal{L}_r) = \{G(\mathcal{E}_{-r}) \oplus G(H_r) \oplus (\mathcal{E}_{+r})\} \oplus G(\mathcal{L}_{r-1}) . \tag{200}$$

Обозначим элементы подалгебр $G(\mathcal{E}_{\pm r})$, $G(H_r)$ и $G(\mathcal{L}_{r-1})$ через $E_{\pm r}(\lambda)$, $H_r(\lambda)$ и $I_a(\lambda)$, а $a \in \Omega_{r-1}$. Тогда согласно формуле (191) и результатам предыдущих разделов для них справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$[I_a(\lambda), I_b(\xi)] = \sum_{c \in \Omega_{r-1}} \Gamma^c_{ab} \frac{I_c(\lambda) - I_c(\xi)}{\lambda - \xi}, \quad a, b \in \Omega_{r-1}; \tag{201}$$

$$[I_a(\lambda), E_{\pm r}(\xi)] = -\hat{I}_a(\mathfrak{E}_{\pm r}) \frac{E_{\pm r}(\lambda) - E_{\pm r}(\xi)}{\lambda - \xi}, \quad a \in \Omega_{r-1}; \tag{202}$$

$$[I_a(\lambda), H_r(\xi)] = 0, \quad a \in \Omega_{r-1}; \tag{203}$$

$$[H_r(\lambda), E_{\pm r}(\xi)] = \pm Q_r \frac{E_{\pm r}(\lambda) - E_{\pm r}(\xi)}{\lambda - \xi}; \tag{204}$$

$$[H_r(\lambda), H_r(\xi)] = 0; \tag{205}$$

$$[E_{\pm r}(\lambda) \otimes E_{\pm r}(\xi)] = 0, \tag{206}$$

$$[E_{\pm r}(\lambda) \otimes E_{\mp r}(\xi)] =$$

$$= \pm Q_r \frac{H_r(\lambda) - H_r(\xi)}{\lambda - \xi} \hat{1}_r - \sum_{a \in \Omega_{r-1}} \frac{I_a(\lambda) - I_a(\xi)}{\lambda - \xi} \hat{I}^a (\mathfrak{E}_{\pm r}). \tag{207}$$

Верхний индекс a в (206) понимается в смысле сопряжения относительно билинейной формы алгебры $\mathfrak{L}_{r-1}$. Имеет также место формула

$$[E_{\pm r}(\lambda) \cdot E_{\mp r}(\lambda)] = \pm R_r H_r'(\lambda), \tag{208}$$

являющаяся годеновским аналогом формулы (167). Для операторов $K_r(\lambda)$ мы имеем:

$$K_r(\lambda) = H^2_r(\lambda) + R_r H_r'(\lambda) + 2E_{-r}(\lambda) E_{+r}(\lambda) + K_{r-1}(\lambda). \tag{209}$$

Определим теперь вакуумное подпространство $W_{r-1}\{F(\lambda)\}$ пространства представления $W_r\{F(\lambda)\}$ как линейную оболочку векторов:

$$|0>, I_{\alpha_1}(\lambda_1)|0>, \; I_{a_1}(\lambda_1) I_{a_2}(\lambda_2)|0> \ldots, \tag{210}$$

в которых числа $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ - произвольны, а $a_1, a_2 \ldots \in \Omega_{r-1}$. Нетрудно проверить, что элементы ϕ_{r-1} вакуумного подпространства обладают свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &E_{+r}(\lambda)\,\phi_{r-1} = 0\,; \\ &H_r(\lambda)\,\phi_{r-1} = h_r(\lambda)\,\phi_{r-1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{211}$$

Здесь $h_r(\lambda)$ - собственные значения оператора $H_r(\lambda)$ на $|0\rangle$, равные:

$$h_r(\lambda) = \sum_{i \in N_r} S_r^i\, F_i(\lambda)\,, \tag{212}$$

а S_r^i - матрица, введенная ранее [см. формулу (176)].

Бетевское решение обобщенной задачи Годена. Приступим теперь к построению точных решений спектральной задачи (199). Пусть M^r - фиксированное натуральное число, а $\xi_{r,\,i}$, $i = 1,...,M^r$ - неизвестные пока числовые параметры. Будем искать собственный вектор оператора Казимира – Годена $K_r(\lambda)$ в виде

$$\phi_r = E_{-r}(\xi_{r,\,1}) \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\xi_{r,\,M^r})\,\phi_{r-1}\,, \tag{213}$$

где ϕ_{r-1} - тензор M^r-го ранга, свернутый с векторами образующих E_{-r} алгебры $G(\mathfrak{S}_{-r})$ по всем индексам. Компоненты этого тензора мы будем рассматривать как элементы вакуумного подпространства $W_{r-1}\{F(\lambda)\}$. Используя равенства (211), можно написать:

$$K_r(\lambda)\,\phi_{r-1} = [h_r^2(\lambda) + R_r h_r'(\lambda)]\,\phi_{r-1} + K_{r-1}(\lambda)\,\phi_{r-1}\,. \tag{214}$$

Займемся теперь вычислением результата действия оператора $K_r(\lambda)$ на вектор ϕ_r. Для этого нам понадобятся коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [K_r(\lambda), E_{-r}(\xi)] = &-\frac{Q_r}{(\lambda-\xi)}\Big\{E_{-r}(\lambda)H_r(\xi) - E_{-r}(\xi)H_r(\lambda)\Big\} - \\ &-\frac{1}{\lambda-\xi}\sum_{a \in \Omega_{r-1}} \hat{I}^a(\mathfrak{S}_{-r})\Big\{E_{-r}(\lambda)I_a(\xi) - E_{-r}(\xi)I_a(\lambda)\Big\}; \end{aligned} \tag{215}$$

$$[I_a(\lambda), E_{-r}(\xi)] = \frac{1}{\lambda-\xi}\hat{I}_a(\mathfrak{S}_{-r})\Big\{E_{-r}(\lambda) - E_{-r}(\xi)\Big\}; \tag{216}$$

$$[H_r(\lambda), E_{-r}(\xi)] = -\frac{Q_r}{\lambda-\xi}\Big\{E_{-r}(\lambda) - E_{-r}(\xi)\Big\}, \tag{217}$$

которые легко выводятся из соотношений (191) и определения (197).

Пронося в выражении

$$K_r(\lambda)\phi_r = K_r(\lambda)E_{-r}(\xi_{r,1}) \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\xi_{r,M^r})\phi_{r-1} \tag{218}$$

оператор $K_r(\lambda)$ вправо и пользуясь формулами (214) и (215), получаем:

$$\begin{aligned} K_r(\lambda)\phi_r = {} & [h_r^2(\lambda) + R_r h_r'(\lambda)]\,\phi_r + \\ & + E_{-r}(\xi_{r,1}) \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\xi_{r,M^r}) K_{r-1}(\lambda)\phi_{r-1} - \\ & - 2Q_r \sum_{m=1}^{M^r} \frac{1}{\lambda - \xi_{r,m}} E_{-r}(\xi_{r,1}) \otimes \ldots \otimes \Big\{ E_{-r}(\lambda) H_r(\xi_{r,m}) - \\ & - E_{-r}(\xi_{r,m}) H_r(\lambda) \Big\} \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\xi_{r,M^r})\phi_{r-1} + \\ & + 2 \sum_{a \in \Omega_{r-1}} \sum_{m=1}^{M^r} \frac{1}{\lambda - \xi_{r,m}} E_{-r}(\xi_{r,1}) \otimes \ldots \otimes \Big\{ E_{-r}(\lambda) I_a(\xi_{r,m}) - \\ & - E_{-r}(\xi_{r,m}) I_a(\lambda) \Big\} \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\xi_{r,M^r}) \hat{I}_a(\xi_r)\phi_{r-1}. \end{aligned} \tag{219}$$

Далее, пронося вправо с помощью коммутационных соотношений (216) и (217) операторы $H_r(\lambda)$, $H_r(\xi_{r,\,m})$, $I_a(\lambda)$, $I_a(\xi_{r,\,m})$, $a \in \Omega_{r-1}$, и используя (211), находим, что выражение $K_r(\lambda)\,\phi_r$ может быть представлено в виде суммы членов двух типов:

$$K_r(\lambda)\,\phi_r = \{K_r(\lambda)\,\phi_r\}_1 + \{K_r(\lambda)\,\phi_r\}_2\,. \tag{220}$$

Члены, помеченные индексом 1, пропорциональны вектору ϕ_r и, следовательно, определяют собственное значение $E_r(\lambda)$ оператора $K_r(\lambda)$. Остальные члены, помеченные индексом 2, не пропорциональны вектору ϕ_r и их следует занулить. Рассмотрим вначале первую группу членов. Они имеют вид

$$\begin{aligned} & \{K_r(\lambda)\,\phi_r\}_1 = \\ & = \left\{ \left[h_r(\lambda) + Q_r \sum_{m=1}^{M_r} \frac{1}{\lambda - \xi_{r,\,m}} \right]^2 + R_r \left[h_r(\lambda) + Q_r \sum_{m=1}^{M^r} \frac{1}{\lambda - \xi_{r,\,m}} \right]' \right\} \phi_r + \\ & + E_{-r}(\xi_{r,\,1}) \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\xi_{r,\,M^r})\,\tilde{K}_{r-1}(\lambda)\,\phi_{r-1}\,, \end{aligned} \tag{221}$$

где

$$\tilde{K}_{r-1}(\lambda) = \sum_{a,\,b \in \Omega_{r-1}} g^{ab}\,\tilde{I}_a(\lambda)\,\tilde{I}_b(\lambda)\,. \tag{222}$$

Легко проверить, что операторы

$$\tilde{I}_a(\lambda) = I_a(\lambda) - \sum_{m=1}^{M^r} \frac{\tilde{I}_a(\xi_r)}{\lambda - \xi_{r,\,m}}\,, \quad a \in \Omega_{r-1}\,, \tag{223}$$

удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и операторы $I_a(\lambda)$. Поэтому $\widetilde{K}_{r-1}(\lambda)$, определенный формулой (222), является оператором Годена для алгебры $G(\mathfrak{L}_{r-1})$. Множество векторов ϕ_{r-1} можно рассматривать как пространство $W_{r-1}\{\widetilde{F}(\lambda)\}$ представления алгебры Годена, характеризуемого старшим весом с компонентами

$$\widetilde{F}_i(\lambda) = F_i(\lambda) - \sum_{m-1}^{M^r} \frac{\gamma_{ri}}{\lambda - \xi_{r,m}}, \quad i \in N_{r-1}\,. \tag{224}$$

Поэтому спектральная задача

$$\widetilde{K}_{r-1}(\lambda)\,\phi_{r-1} = \widetilde{E}_{r-1}(\lambda)\,\phi_{r-1}\,, \quad \phi_{r-1} \in W_{r-1}\{F(\lambda)\}\,, \tag{225}$$

является задачей Годена для алгебры $G(\mathfrak{L}_{r-1})$. Если она имеет решения, то можно написать:

$$\begin{aligned} K_r(\lambda)\phi_r = \Bigg\{ &\left[h_r(\lambda) + Q_r \sum_{m=1}^{M^r} \frac{1}{\lambda - \xi_{r,m}}\right]^2 + \\ &+ R_r\left[h_r(\lambda) + Q_r \sum_{M=1}^{M^r} \frac{1}{\lambda - \xi_{r,m}}\right]' + \widetilde{E}_{r-1}(\lambda)\Bigg\}\phi_r\,, \end{aligned} \tag{226}$$

разумеется, при условии, что члены второго типа равны нулю. Выпишем эти члены отдельно. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \left\{K_r(\lambda)\phi_r\right\}_2 = 2 &\sum_{m>n} \frac{1}{(\lambda - \xi_{r,n})(\xi_{r,n} - \xi_{r,m})} E_{-r}(\xi_{r,1}) \otimes \ldots \\ &\ldots \otimes \underset{\substack{\uparrow\\ n}}{E_{-r}(\lambda)} \otimes \ldots \otimes \underset{\substack{\uparrow\\ m}}{E_{-r}(\xi_{r,n})} \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\xi_{r,M^r}) \times \\ &\times \Bigg\{\Bigg[Q_r^2\, \hat{1}_r^{(n)} \otimes \hat{1}_r^{(m)} + \sum_{a,b,\in\Omega_{r-1}} g^{ab}\hat{I}_a(\mathfrak{S}_r^{(n)})\hat{I}_b(\mathfrak{S}_r^{(m)})\Bigg] - \\ &- \Bigg[Q_r^2\, \hat{1}_r^{(m)} \otimes \hat{1}_r^{(n)} + \sum_{a,b\in\Omega_{r-1}} g^{ab}\hat{I}_a(\mathfrak{S}_r^{(m)})\hat{I}_b(\mathfrak{S}_r^{(n)})\Bigg]\Bigg\}\phi_{r-1} - \\ &- \sum_{n=1}^{M^r} \frac{1}{\lambda - \xi_{r,n}} E_{-r}(\xi_{r,1}) \otimes \ldots \otimes \underset{\substack{\uparrow\\ n}}{E_{-r}(\lambda)} \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\xi_{r,M^r}) \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{2Q_r h_r(\xi_{r,n}) + 2Q_r^2 \sum_{m=1}^{M^r}{}' \frac{1}{\xi_{r,n}-\xi_{r,m}} + 2 \sum_{a,b\in\Omega_{r-1}} \hat{I}^a(\mathfrak{S}_r) I_a(\xi_{r,n}) - \right.$$
$$\left. - 2 \sum_{m=1}^{M^r}{}' \frac{1}{\xi_{r,n}-\xi_{r,m}} \sum_{a,b\in\Omega_{r-1}} \hat{I}^a(\mathfrak{S}_r)\hat{I}_a(\mathfrak{S}_r)\right\}\phi_{r-1}. \tag{227}$$

Числа со стрелочками указывают на порядковый номер оператора в произведении. Используя формулы (167) и (222), находим

$$\{K_r(\lambda)\phi_r\}_2 = \sum_{n=1}^{M^r} \frac{1}{\lambda-\xi_{r,n}} E_{-r}(\xi_{r,1}) \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\lambda) \otimes \ldots \otimes E_{-r}(\xi_{r,M^r}) \times$$
$$\times \left\{2Q_r h_r(\xi_{r,n}) + 2Q_r^2 \sum_{m=1}^{m^2}{}' \frac{1}{\xi_{r,n}-\xi_{r,m}} - \mathrm{Res}_{\xi_{\mathrm{r,n}}} \tilde{K}_{r-1}(\lambda)\right\}\phi_{r-1}. \tag{228}$$

Учитывая (225), получаем окончательно, что условие исчезновения членов (228) имеет вид

$$2Q_r h_r(\xi_{r,n}) + 2Q_r^2 \sum_{m=1}^{M^r}{}' \frac{1}{\xi_{r,n}-\xi_{r,m}} = \mathrm{Res}_{\xi_{\mathrm{r,n}}} \tilde{E}_{r-1}(\lambda), \qquad n = 1, \ldots, M^r, \tag{229}$$

где $\mathrm{Res}_\xi \tilde{E}_{r-1}(\lambda)$ мы обозначили вычет функции $\tilde{E}_{r-1}(\lambda)$ в простом полюсе, расположенном в точке ξ.

Итак, мы видим, что задача Годена для алгебры $G(\mathfrak{L}_r)$ свелась к аналогичной задаче для алгебры $G(\mathfrak{L}_{r-1})$. Последняя по структуре полностью повторяет первую, поэтому она, в свою очередь, может быть сведена к задаче Годена для алгебры $G(\mathfrak{L}_{r-2})$ и т.д., пока мы не доберемся до алгебры $G(\mathfrak{L}_1) = G(A_1)$, для которой решение этой задачи известно (см. разд.1). Это позволяет выписать решение задачи Годена в явном виде:

$$\phi_r = \phi_r(M,\xi) = \left\{ \bigotimes_{i=1}^{M^r} E_{-r}(\xi_{r,i})\right\} \times$$
$$\times \left\{ \bigotimes_{i=1}^{M^{r-1}} \left[E_{-(r-1)}(\xi_{r-1,i}) - \sum_{m=1}^{M^r} \frac{\hat{E}_{-(r-1)}(\mathfrak{S}_r)}{\xi_{r-1,i}-\xi_{r,m}} \right]\right\} \cdot \ldots \cdot \tag{230}$$
$$\cdot \ldots \cdot \left\{ \bigotimes_{i=1}^{M^1} \left[E_{-1}(\xi_{1,i}) - \sum_{q=2}^{r} \sum_{m=1}^{M^q} \frac{E_{-1}(\mathfrak{S}_q)}{\xi_{1,i}-\xi_{q,m}} \right]\right\} |0\rangle,$$

$$E_r(\lambda) = E_r(M, \xi; \lambda) = \sum_{s=1}^{r} \left\{h_s^2(\lambda) + R_s h_s'(\lambda)\right\} + \\ + 2 \sum_{p=1}^{r} \sum_{m=1}^{M^p} S_{sp} \frac{h_s(\lambda) - h_s(\xi_{p,m})}{\lambda - \xi_{p,m}}, \tag{231}$$

где $\xi_{p,m}$, $m = 1, \ldots, M^p$, $p = 1, \ldots, r$ - числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\sum_{p=1}^{r} \sum_{m=1}^{m^p}{}' \frac{\gamma_{sp}}{\xi_{s,n} - \xi_{p,m}} + \sum_{q=1}^{r} S_{qs} h_q(\xi_{s,n}) = 0. \tag{232}$$

Используя свойства матрицы S_{pq} и результаты разд.3, мы можем переписать последние две формулы в терминах старших весов $F(\lambda)$ представления алгебры Годена:

$$E_r(M, \xi; \lambda) = \sum_{i \in N_r} \left[F^i(\lambda) + \nu^i \frac{\partial}{\partial\lambda}\right] F_i(\lambda) + \\ + 2 \sum_{p=1}^{r} \sum_{i=1}^{M^p} \frac{F_p(\lambda) - F_p(\xi_{p,i})}{\lambda - \xi_{p,i}}; \tag{233}$$

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{M^k}{}' \frac{(\pi_i, \pi_k)}{\xi_{i,n} - \xi_{k,m}} + F_i(\xi_{i,n}) = 0, \\ n = 1, \ldots, M^i, i = 1, \ldots, r. \tag{234}$$

5. ОТ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ГОДЕНА К КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫМ УРАВНЕНИЯМ

Симметрия модели Годена. Предположим, что функции $F_i(\lambda)$, $i \in N_r$, таковы, что пределы

$$F_i = -\lim_{\lambda \to \infty} \lambda F_i(\lambda), \ i \in N_r, \tag{235}$$

существуют. Тогда, в силу (193) и (191), должны существовать и пределы операторов

$$I_a = -\lim_{\lambda \to \infty} \lambda I_a(\lambda), \; a \in \Omega_r. \tag{236}$$

Используя формулы (191), (197) и (236), получаем, что операторы (236) образуют алгебру $\mathfrak{L}_r$:

$$[I_a, I_b] = \sum_{c \in \Omega_r} \Gamma^c_{ab} I_c, \; a, b \in \Omega_r, \tag{237}$$

и коммутируют с семейством операторов $K_r(\lambda)$:

$$[K_r(\lambda), I_a] = 0, \; a \in \Omega_r. \tag{238}$$

Это означает, что модель Годена обладает глобальной алгеброй симметрии $\mathfrak{L}_r$.

Посмотрим теперь, какие представления алгебры симметрии могут быть реализованы в пространстве $W_r\{F(\lambda)\}$. Для этого подействуем на бетевские решения (230) операторами $I_\alpha, \alpha \in \Delta_r^+$, и $I_i, i \in N_r$. Пронеся их вправо с помощью коммутационных соотношений

$$[I_a, I_b(\lambda)] = \sum_{c \in \Omega_r} \Gamma^c_{ab} I_c(\lambda), \; a, b \in \Omega_r, \tag{239}$$

и воспользовавшись ограничениями (232) на параметры $\xi_{p,m}$, получим

$$I_i \phi_r(M, \xi) = (F_i - M_i)\phi_r(M, \xi), \; i \in N_r; \tag{240а}$$

$$I_\alpha \phi_r(M, \xi) = 0, \; \alpha \in \Delta_r^+. \tag{240б}$$

Из равенств (240а), (240б) видно, что бетевские решения играют роль старших векторов для представлений алгебры симметрии $\mathfrak{L}_r$. Числа $F_i - M_i$, $i \in N_r$, являются компонентами соответствующих старших весов. Представления, описываемые формулами (240а), (240б), бесконечномерны. Действительно, действуя на $\phi_r(M, \xi)$ последовательно операторами $I_\alpha, \alpha \in \Delta_r^-$, мы будем получать все новые и новые решения модели Годена с теми же собственными значениями $E_r(M, \xi; \lambda)$. Это означает, что найденные в предыдущем разделе бетевские решения составляют лишь часть всех решений годеновской задачи.

Обозначим $\Phi_M\{F\}$ множество всех решений системы:

$$I_i \phi = (F_i - M_i)\phi, \; i \in N_r; \tag{241а}$$

$$I_a\phi = 0, \ \alpha \in \Delta_r^+; \tag{241б}$$

$$\phi \in W_r\{F(\lambda)\}. \tag{241в}$$

В силу (238) пространство $\Phi_M\{F\}$ инвариантно относительно действия операторов $K_r(\lambda)$. Поэтому спектральные задачи

$$K_r(\lambda)\phi_r = E_r(\lambda)\phi_r, \ \phi_r \in \Phi_M\{F\}, \tag{242}$$

имеют смысл для любых $M = \{M^i\}$, $i \in N_r$. Можно показать, что линейная оболочка функций (230) совпадает с пространством $\Phi_M\{F\}$, и по этой причине решения любой из задач (242) полностью описываются явными бетевскими формулами (230), (233), (234).

Важным свойством пространств $\Phi_M\{F\}$ является то, что все они конечномерны, если $F(\lambda)$ - рациональная функция. Это приводит к тому, что в рациональном случае уравнения (242) имеют лишь конечное число точных решений и поэтому могут быть использованы в качестве отправных точек при построении квазиточнорешаемых задач.

Дифференциальная форма уравнений Годена и переход к квазиточнорешаемым уравнениям. Конечномерность инвариантных пространств $\Phi_M\{F\}$ проще всего доказывается в случае, когда рациональные функции $F_i(\lambda)$ - невырожденны, т.е. описываются формулами

$$F_i(\lambda) = - \sum_{A=1}^{N} \frac{f_{Ai}}{\lambda - \sigma_A}, \ i \in N_r. \tag{243}$$

Для согласуемости с (191) и (193) образующие алгебры Годена должны иметь аналогичный вид:

$$I_a(\lambda) = - \sum_{A=1}^{N} \frac{I_{Aa}}{\lambda - \sigma_A}, \ a \in \Omega_r, \tag{244}$$

где I_{Aa} - некоторые операторы. Подставляя (244) в коммутационные соотношения (191), находим, что они удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &[I_{Aa}, I_{Ab}] = \sum_{c \in \Omega_r} \Gamma_{ab}^c I_{AC}, \ a, b \in \Omega_r; \\ &[I_{Aa}, I_{Bb}] = 0, \ a, b \in \Omega_r, \ A \neq B, \end{aligned} \tag{245}$$

т.е. образуют алгебру $\mathcal{L}_r \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_r$ (N раз). Операторы $K_r(\lambda)$ принимают в этом случае вид

$$K_r(\lambda) = \sum_{A,B=1}^{N} \frac{\sum\limits_{a,b\in\Omega_r} g^{ab} I_{Aa} I_{Bb}}{(\lambda-\sigma_A)(\lambda-\sigma_B)}, \tag{246}$$

т.е. превращаются в гамильтонианы N-узловых моделей магнетика на алгебре $\mathfrak{L}_r \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}_r$ (N раз). Очевидно, что в A-м узле действует представление алгебры $\mathfrak{L}_r$ со старшим весом $f_A = \{f_{Ai}\}$, $i \in N_r$. Для чисел F_i в этом случае имеем:

$$F_i = \sum_{A=1}^{N} f_{Ai}, \quad i \in N_r. \tag{247}$$

Выражения же для операторов симметрии становятся совсем простыми:

$$I_a = \sum_{A=1}^{N} I_{Aa}, \quad a \in \Omega_r. \tag{248}$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы воспользоваться дифференциальными реализациями представлений алгебры $\mathfrak{L}_r$, полученными в разд.2:

$$I_{Aa} = \hat{t}_a^{+}(x_A)\frac{\partial}{\partial x_A} + \hat{t}_a^{0}(x_A) f_A. \tag{249}$$

Подстановка (249) в (246) превращает $K_r(\lambda)$ в однопараметрическое семейство дифференциальных операторов второго порядка:

$$K_r(\lambda) = \sum_{A,B=1}^{N} \frac{\sum\limits_{a,b\in\Omega_r} g^{ab}\left[\hat{t}_a^{+}(x_A)\frac{\partial}{\partial x_A} + \hat{t}_a^{0}(x_A) f_A\right]\left[\hat{t}_b^{+}(x_B)\frac{\partial}{\partial x_B} + \hat{t}_B^{0}(x_B) f_B\right]}{(\lambda-\sigma_A)(\lambda-\sigma_B)}. \tag{250}$$

Инвариантное пространство $\Phi_M\{F\}$, в котором действуют операторы (250), превращается соответственно в пространство функций (полиномов) от переменных x_A, $A = 1,\ldots,N$. Для описания структуры этого функционального пространства воспользуемся дифференциальными реализациями операторов симметрии I_α, $\alpha \in \Delta_r^+$, и I_i, $i \in N_r$, явный вид которых может быть получен из (248) и (249) с учетом формул (120) разд.2:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \sum_{A=1}^{N} \hat{t}_\alpha^{+}(x_A)\frac{\partial}{\partial x_A}, \quad \alpha \in \Delta_r^+; \\ I_i &= \sum_{A=1}^{N} \hat{t}_i^{+}(x_A)\frac{\partial}{\partial x_A} + F_i, \quad i \in N_r. \end{aligned} \tag{251}$$

Тогда из определения (241) пространства $\Phi_M\{F\}$ следует, что элементами его являются функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\Big\{\sum_{A=1}^{N} \hat{t}_\alpha^{+}(x_A)\frac{\partial}{\partial x_A}\Big\}\phi = 0,\quad \alpha \in \Delta_r^+ ; \tag{252а}$$

$$\Big\{\sum_{A=1}^{N} \hat{t}_i^{+}(x_A)\frac{\partial}{\partial x_A}\Big\}\phi = -M_i\phi ,\quad i \in N_r . \tag{252б}$$

Дополнительное ограничение (241в) сводится к требованию, что решения системы (252) следует искать в классе полиномов от x_A, $A = 1,\ldots,N$.

Согласно результатам разд. 2, общее решение подсистемы (252а) имеет вид функции, зависящей от N - 1 векторных переменных:

$$\xi_A = x_A \dot{-} x_N ,\quad A = 1, \ldots N-1 . \tag{253}$$

Чтобы эта функция удовлетворяла второй подсистеме (252б) и одновременно была полиномом, она должна иметь вид линейной комбинации мономов:

$$\prod_{\alpha\in\Delta_r^+} (\xi_{1\alpha})^{K_{1\alpha}}(\xi_{2\alpha})^{K_{2\alpha}}\ldots(\xi_{N-1,\alpha})^{K_{N-1,\alpha}} , \tag{254}$$

в которых неотрицательные целые числа $K_{A\alpha}$, $A = 1 ,\ldots, N-1, \alpha\in\Delta_r^+$, удовлетворяют системе уравнений:

$$\sum_{\alpha\in\Delta_r^+}\ \sum_{A=1}^{N-1}\alpha K_{A\alpha} = \sum_{i\in N_r} M^i\pi_i . \tag{255}$$

Количество решений системы (255) относительно $K_{A\alpha}$ при заданных M^i определяет размерность пространства $\Phi_M\{F\}$. Мы видим, что во всех случаях она конечна.

Теперь, когда в нашем распоряжении имеется явный вид операторов $K_r(\lambda)$ и функциональных пространств $\Phi_M\{F\}$, мы можем построить дифференциальные аналоги спектральных уравнений (242). Для этого достаточно спроецировать $K_r(\lambda)$ на пространства $\Phi_M\{F\}$. Перейдем к новым переменным по формулам:

$$\xi_A = x_A \dot{-} x_N\,, \quad A = 1,\dots,N-1; \quad \xi_N = x_N; \tag{256}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_A} = \frac{\partial(x_A \dot{-} x_N)}{\partial x_A}\frac{\partial}{\partial \xi_A}\,, \quad A = 1,\dots,N-1;\\ \frac{\partial}{\partial x_N} = \frac{\partial}{\partial \xi_N} + \sum_{A=1}^{N-1}\frac{\partial(x_A \dot{-} x_N)}{\partial x_N}\,\frac{\partial}{\partial \xi_A}.\end{gathered} \tag{257}$$

В силу «трансляционной» инвариантности оператора $K_r(\lambda)$ и функций пространства $\Phi_M\{F\}$ они не зависят явно от ξ_N. Поэтому мы можем положить в формулах (256) и (257) $\xi_N = 0$, одновременно опустив производные по ξ_N. Это дает вместо (256) и (257):

$$x_A = \xi_A, \quad A = 1,\dots,N-1; \quad x_N = 0; \tag{258}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_A} = \frac{\partial}{\partial \xi_A}\,, \quad A = 1,\dots,N-1; \quad \frac{\partial}{\partial x_N} = -\sum_{A=1}^{N-1} t_+^+(\xi_A)\,\frac{\partial}{\partial \xi_A} \tag{259}$$

(при получении последней формулы мы воспользовались данным в разд.2 определением матрицы $\hat{t}(\xi)$). Кроме того, справедливы равенства:

$$\begin{gathered}\hat{t}_+^+(0) = \hat{1}, \quad \hat{t}_0^+(0) = 0, \quad \hat{t}_-^+(0) = 0,\\ \hat{t}_+^0(0) = 0, \quad \hat{t}_0^0(0) = \hat{1}, \quad \hat{t}_-^0(0) = 0.\end{gathered} \tag{260}$$

Используя соотношения (258) - (260), получаем для $K_r(\lambda)$:

$$\begin{gathered}K_r(\lambda) = \sum_{A,B=1}^{N-1}\frac{\sum\limits_{a,b\in\Omega_r} g^{ab} I_{Aa} I_{Bb}}{(\lambda - \sigma_A)(\lambda - \sigma_B)} + \\ + 2\sum_{A=1}^{N-1}\frac{\sum\limits_{a,b\in\Omega_r} g^{ab} I_{Aa} J_b}{(\lambda - \sigma_A)(\lambda - \sigma_N)} + \frac{\sum\limits_{a,b\in\Omega_r} g^{ab} J_a J_b}{(\lambda - \sigma_N)^2}\,.\end{gathered} \tag{261}$$

Здесь

$$I_{Aa} = \sum_{\alpha\in\Delta_r^+} t_a^\alpha(\xi_A)\,\frac{\partial}{\partial \xi_A^\alpha} + \sum_{i\in N_r} t_A^i(\xi_A)\, f_{Ai}\,, \quad a \in \Omega_r\,; \tag{262a}$$

$$J_\alpha = -\sum_{B=1}^{N-1} \sum_{\beta \in \Delta_r^+} t_\alpha^\beta(\xi_B) \frac{\partial}{\partial \xi_B^\beta}, \quad \alpha \in \Delta_r^+ ;$$

$$J_i = f_{Ni}, \quad i \in N_r ; \tag{262б}$$

$$J_\alpha = 0, \quad \alpha \in \Delta_r^- .$$

Полученные операторы (261) действуют в пространстве однородных полиномов от ξ_A, $A = 1, \dots, N-1$, с базисом (254), (255). Согласно результатам разд.2, элементы этого пространства могут быть представлены в виде

$$\phi = \prod_{i \in N_r} (\xi_{N-1}^{\pi_i})^{M_i} \psi(\eta, \nu), \tag{263}$$

где η - вектор размерности $(N-2)(d_r - r)/2$ с компонентами

$$\eta_A^\alpha = \frac{\xi_A^\alpha}{\prod_{i \in N_r} (\xi_{N-1}^{\pi_i})^{(\alpha, \pi^i)}}, \quad A = 1,\dots,N-2, \quad \alpha \in \Delta_r^+, \tag{264}$$

а ν — $(d_r - r)/2$-мерный вектор с компонентами

$$\nu^\alpha = \frac{\xi_{N-1}^\alpha}{\prod_{i \in N_r} (\xi_{N-1}^{\pi_i})^{(\alpha, \pi^i)}}, \quad \alpha \in \Delta_r^+ . \tag{265}$$

У этого вектора нетривиальными являются лишь $(d_r - 3r)/2$ компонент с $\alpha \in \Delta_r^+ - \Pi_r^+$, где Π_r^+ - множество простых корней алгебры $\mathcal{L}_r$. Остальные r компонент с $\alpha \in \Pi_r^+$ равны единице. Функции $\psi(\eta, \nu)$ в (263) являются полиномами от $[(N-2)(d_r - r) + (d_r - 3r)]/2$ переменных η и ν. Вид этих полиномов определяется из условия принадлежности (263) к пространствам $\Phi_M\{F\}$. Обозначим множество допустимых полиномов $\psi(\eta, \nu)$ через $\Psi_M\{F\}$.

Из инвариантности пространств $\Phi_M\{F\}$ следует, что результат действия (261) на функции вида (263) должен иметь тот же вид. Это позволяет написать

$$K_r(\lambda) \prod_{i \in N_r} (\xi_{N-1}^{\pi_i})^{M^i} \psi(\eta, \nu) = \prod_{i \in N_r} (\xi_{N-1}^{\pi_i})^{M^i} K_r(M, \lambda; \eta, \nu)\psi(\eta, \nu), \tag{266}$$

где $K_r(M, \lambda; \eta, \nu)$ - дифференциальный оператор, действующий в пространстве $\Psi_M\{F\}$ и зависящий от неотрицательных целых чисел M^i. Соответственно уравнения (242) переписываются в виде

$$K_r(M, \lambda; \eta, \nu)\psi(\eta, \nu) = E_r(M, \lambda)\psi(\eta, \nu), \quad \psi(\eta, \nu) \in \Psi_M\{F\}. \qquad (267)$$

Если обозначить Ψ множество всех аналитических функций от переменных η и ν, то уравнения

$$K_r(M, \lambda; \eta, \nu)\psi(\eta, \nu) = E_r(M, \lambda)\psi(\eta, \nu), \quad \psi(\eta, \nu) \in \Psi, \qquad (268)$$

будут, очевидно, иметь в Ψ лишь конечное число точных решений, определяемых бетевскими функциями (233) и (234) и лежащих в классе полиномов от переменных η и ν вида $\Psi_M\{F\}$.

Таким образом, мы приходим к бесконечной серии квазиточнорешаемых уравнений, ассоциированных с моделями Годена на представлениях алгебр $\mathfrak{L}_r$ со старшими весами $F(\lambda)$.

Теперь нам остается найти явный вид операторов $K_r(M, \lambda; \eta, \nu)$. Для этого необходимо в (261) совершить переход к новым переменным по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi^{\pi_i}_{N-1} = \xi^i, \quad i \in N_r; \\
&\xi^{\alpha}_{A} = \prod_{i \in N_r} (\xi^i)^{(\alpha, \pi^i)} \eta^{\alpha}_{A}, \quad A = 1, \ldots, N-2; \quad \alpha \in \Delta^+_r; \\
&\xi^{\alpha}_{N-1} = \prod_{i \in N_r} (\xi^i)^{(\alpha, \pi^i)} \nu^{\alpha}, \alpha \in \Delta^+_r - \Pi^+_r;
\end{aligned}\right\} \qquad (269)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi^{\pi_i}_{N-1}} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \sum_{A=1}^{N-2} \sum_{\alpha \in \Delta^+_r} \frac{(\alpha, \pi^i)}{\xi^i} \eta^{\alpha}_{A} \frac{\partial}{\partial \eta^{\alpha}_{A}} - \sum_{\alpha \in \Delta^+_r - \Pi^+_r} \frac{(\alpha, \pi^i)}{\xi^i} \nu^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \nu^{\alpha}}, \quad i \in N_r; \\
&\frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}_{A}} = \prod_{i \in N_r} (\xi^i)^{-(\alpha, \pi^i)} \frac{\partial}{\partial \eta^{\alpha}_{A}}, \quad A = 1, \ldots, N-2, \ \alpha \in \Delta^+_r; \qquad (270) \\
&\frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}_{N-1}} = \prod_{i \in N_r} (\xi^i)^{-(\alpha, \pi^i)} \frac{\partial}{\partial \nu^{\alpha}}, \quad \alpha \in \Delta^+_r - \Pi^+_r.
\end{aligned}$$

Поскольку оператор (261) «масштабно-инвариантен», то он может содержать зависимость от ξ^i и $\partial/\partial\xi^i$ только в виде комбинаций $\xi^i(\partial/\partial\xi^i)$, $i \in N_r$. Эти комбинации в результате проецирования (261) на класс функций вида (263) заменяются числами M^i. Практически это осуществляется следующим образом. Воспользуемся масштабным свойством коэффициентных матриц $t_a^{\alpha}(\xi)$ и $t_a^i(\xi)$:

$$
\begin{aligned}
t_a^{\alpha}(\xi_A) &= \prod_{i \in N_r} (\xi^i)^{(\alpha - a,\pi^i)}\, t_a^{\alpha}(\eta_A);\\
t_a^{i}(\xi_A) &= \prod_{i \in N_r} (\xi^i)^{-(a,\pi^i)} t_a^{i}(\eta_A);\\
t_a^{\alpha}(\xi_{N-1}) &= \prod_{i \in N_r} (\xi^i)^{(\alpha - a,\pi^i)}\, t_a^{\alpha}(\nu);\\
t_a^{i}(\xi_{N-1}) &= \prod_{i \in N_r} (\xi^i)^{-(a,\pi^i)}\, t_a^{i}(\nu).
\end{aligned}
\tag{271}
$$

Здесь $A = 1, \ldots, N-2, \alpha \in \Delta_r^+, i \in N_r, a \in \Omega_r$*. Подставляя формулы (269), (270) и (271) в (261) и (262) и заменяя операторы $\xi^i(\partial/\partial\xi^i)$ числами M^i, находим:

$$
\begin{aligned}
K_r(M, \lambda; \eta, \nu) &= \sum_{A,\,B=1}^{N-2} \frac{\sum\limits_{a,b \in \Omega_r} g^{ab} I_{Aa} I_{Bb}}{(\lambda - \sigma_A)(\lambda - \sigma_B)} + \\
&+ \sum_{A=1}^{N-2} \frac{\sum\limits_{a,b \in \Omega_r} g^{ab}[\widetilde{K}_b I_{Aa} + I_{Ab} K_a]}{(\lambda - \sigma_A)(\lambda - \sigma_{N-1})} + \frac{\sum\limits_{a,b \in \Omega_r} g^{ab} \widetilde{K}_a K_b}{(\lambda - \sigma_{N-1})^2} + \\
&+ 2\sum_{A=1}^{N-2} \frac{\sum\limits_{a,b \in \Omega_r} g^{ab} I_{Aa} L_b}{(\lambda - \sigma_A)(\lambda - \sigma_N)} + 2\, \frac{\sum\limits_{a,b \in \Omega_r} g^{ab} \widetilde{K}_a L_b}{(\lambda - \sigma_{N-1})(\lambda - \sigma_N)} + \frac{\sum\limits_{a,b \in \Omega_r} g^{ab} L_a L_b}{(\lambda - \sigma_N)^2},
\end{aligned}
\tag{272}
$$

где

$$
I_{Aa} = \sum_{\alpha \in \Delta_r^+} t_a^{\alpha}(\eta_A) \frac{\partial}{\partial \eta_A^{\alpha}} + \sum_{i \in N_r} t_a^i(\eta_A) f_{Ai}, \quad a \in \Omega_r, A=1,\ldots,N-2; \tag{273a}
$$

*Использованное обозначение (a, π^i) расшифровывается так: $(a, \pi^i) = (\alpha, \pi^i)$, если $a = \alpha \in \Delta_r^+$, и $(a, \pi^i) = 0$, если $a = k \in N_r$.

$$K_a = \sum_{i \in N_r} t_a^{\pi_i}(\nu)\left[M^i - \sum_{B=1}^{N-2} \sum_{\beta \in \Delta_r^+} (\beta, \pi^i)\eta_B^\beta \frac{\partial}{\partial \eta_B^\beta} - \sum_{\beta \in \Delta_r^+ - \Pi_r^+} (\beta, \pi^i)\nu^\beta \frac{\partial}{\partial \nu^\beta}\right] + \tag{273б}$$

$$+ \sum_{\alpha \in \Delta_r^+ - \Pi_r^+} t_a^\alpha(\nu)\frac{\partial}{\partial \nu^\alpha} + \sum_{i \in N_r} t_a^i(\nu) f_{N-1,i}, \quad a \in \Omega_r;$$

$$\widetilde{K}_a = K_a - \sum_{i \in N_r} t_a^{\pi_i}(\nu)\,(a, \pi^i), \;\; a \in \Omega_r; \tag{273в}$$

$$L_\alpha = - \sum_{B=1}^{N-2} \sum_{\beta \in \Delta_r^+} t_\alpha^\beta(\eta_B)\frac{\partial}{\partial \eta_B^\beta} -$$

$$- \sum_{i \in N_r} t_\alpha^{\pi_i}(\nu)\left[M^i - \sum_{B=1}^{N-2} \sum_{\beta \in \Delta_r^+} (\beta, \pi^i)\,\eta_B^\beta \frac{\partial}{\partial \eta_B^\beta} -\right.$$

$$\left. - \sum_{\beta \in \Delta_r^+ - \Pi_r^+} (\beta, \pi^i)\,\nu^\beta \frac{\partial}{\partial \nu^\beta}\right] - \sum_{\beta \in \Delta_r^+ - \Pi_r^+} t_\alpha^\beta(\nu)\frac{\partial}{\partial \nu_\beta}, \tag{273г}$$

$$\alpha \in \Delta_r^+;\; L_i = f_{N_i},\; i \in N_r;\; L_\alpha = 0;\; \alpha \in \Delta_r^-.$$

На этом мы завершаем построение многомерных квазиточнорешаемых дифференциальных уравнений второго порядка, связанных с вполне интегрируемыми моделями Годена в случае, когда функции $F_i(\lambda)$, $i \in N_r$, играющие роль старших весов представлений годеновской алгебры, рациональны и невырождены. Переход к вырожденному рациональному случаю может быть осуществлен следующим образом.

Заметим, что любые рациональные функции $F_i(\lambda)$, $i \in N_r$, допускают представление в виде

$$F_i(\lambda) = \sum_A \widetilde{f}_{Ai}\, \omega^A(\lambda), \tag{274}$$

где $\omega^A(\lambda)$ - элементарные рациональные функции вида $(\lambda - \sigma)^{-n}$, $\sigma \in C$, $n \in N$. Нумерующий их индекс A является, фактически, мультииндексом $A = (\sigma, n)$. Сумма в (279) предполагается конечной. Мы использовали в разложении (274) лишь убывающие элементарные рациональные функции потому, что компоненты старших весов $F_i(\lambda)$ должны быть, согласно предположению, регулярными на бесконечности.

Для функций $\omega^A(\lambda)$ справедливы теоремы сложения:

$$\frac{\omega^A(\lambda) - \omega^A(\mu)}{\lambda - \mu} = \sum_{B,\, C} C^A_{BC}\omega^B(\lambda)\omega^C(\mu), \tag{275}$$

$$\omega^B(\lambda)\omega^C(\lambda) = \sum_{A} D^{BC}_{A}\omega^A(\lambda), \tag{276}$$

в которых C^A_{BC} и D^{BC}_A - некие структурные константы. Суммы по A, B и C в (275) и (276) также предполагаются конечными.

В соответствии с формулами (193) и (191) образующие алгебры Годена следует искать в аналогичном виде:

$$I_a(\lambda) = \sum_{A} \tilde{I}_{Aa}\omega^A(\lambda). \tag{277}$$

Подставляя (277) в коммутационные соотношения (191) и используя (275), получаем коммутационные соотношения непосредственно для коэффициентных операторов $\tilde{I}_{Aa}$:

$$[\tilde{I}_{Aa}, \tilde{I}_{BC}] = \sum_{c\,\in\,\Omega_r} \Gamma^c_{ab} \sum_{C} C^C_{AB}\tilde{I}_{C,c}. \tag{278}$$

В силу конечности суммы по A в (277) операторы $\tilde{I}_{Aa}$ образуют конечномерную алгебру Ли. Подставляя разложение (277) в выражение (197) для операторов $K_r(\lambda)$, мы можем привести их к виду

$$K_r(\lambda) = \sum_{a,b\,\in\,\Omega_r} \sum_{A,B,C} g^{ab} D^{AB}_C \omega^C(\lambda)\tilde{I}_{Aa}\tilde{I}_{Bb}. \tag{279}$$

Это - гамильтонианы магнетиков на конечномерной алгебре Ли (278), которая может быть интерпретирована как некая контракция алгебры $\mathfrak{L}_r \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}_r$ (N раз), если функции $F_i(\lambda)$, $i \in N_r$, получены в результате вырождения функций вида (243).

Для построения дифференциальных реализаций операторов $\tilde{I}_{Aa}$ рассмотрим вначале процедуру перехода от невырожденных функций $F_i(\lambda)$ к вырожденным:

$$\sum_{A=1}^{N} \frac{f_{Ai}}{\lambda - \sigma_a} \rightarrow \sum_{A=1}^{N} \tilde{f}_{Ai}\omega^A(\lambda). \tag{280}$$

Для ее осуществления необходимо совершить подходящую линейную замену:

$$f_{Ai} = \sum_{B=1}^{N} C_A^B(\sigma_1, ..., \sigma_N)\tilde{f}_{Bi}, \quad i \in N_r, \tag{281}$$

а затем устремить параметры $\sigma_1, ..., \sigma_N$ к своим предельным значениям, сливая все или некоторые простые полюса невырожденных функций $F_i(\lambda)$. Явный вид матрицы C_A^B определяется спецификой вырождения, т.е. требованием, чтобы ответ совпадал с правой частью формулы (280).

Аналогичную процедуру нужно совершить и для операторов $I_a(\lambda)$:

$$\sum_{A=1}^{N} \frac{I_{Aa}}{\lambda - \sigma_A} \to \sum_{A=1}^{N} \tilde{I}_{Aa}\omega^A(\lambda). \tag{282}$$

При этом удобнее всего исходить из невырожденных операторов $I_{A\alpha}$, $\alpha \in \Delta_r^+$, дифференциальные реализации которых согласно формулам (189) содержат к качестве слагаемых операторы $\partial/\partial x_A^\alpha$. Потребовав, чтобы вырожденные операторы содержали в качестве слагаемых аналогичные операторы дифференцирования, но уже по новым переменным, $\partial/\partial\tilde{x}_A^\alpha$, мы придем к необходимости рассмотрения предельного перехода

$$\sum_{A=1}^{N} \frac{\partial/\partial x_A^\alpha}{\lambda - \sigma_A} \to \sum_{A=1}^{N} (\partial/\partial\tilde{x}_A^\alpha)\omega^A(\lambda), \tag{283}$$

который по структуре полностью аналогичен (280). Это позволяет выписать связь между производными $\partial/\partial x_A^\alpha$ и $\partial/\partial\tilde{x}_A^\alpha$:

$$\frac{\partial}{\partial x_A^\alpha} = \sum_{B=1}^{N} C_A^B(\sigma_1, ..., \sigma_N)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_B^\alpha}, \quad \alpha \in \Delta_r^+, \tag{284}$$

а затем выразить старые переменные x_A^α через новые, $\tilde{x}_A^\alpha$:

$$x_A^\alpha = \sum_{B=1}^{N} \tilde{C}_A^B(\sigma_1, ..., \sigma_N)\tilde{x}_B^\alpha, \quad \alpha \in \Delta_r^+. \tag{285}$$

Здесь $\tilde{C}_A^B$ - матрица, обратная C_A^B. Подставляя (281), (284) и (285) в выражения для остальных операторов I_{Aa} и совершая необходимый переход к предельным значениям $\sigma_1, ..., \sigma_2$, мы приходим к дифференциальным формам вырожденных операторов $\tilde{I}_{Aa}$, реализующих представление контрактированной алгебры $\mathfrak{L}_r \oplus ... \oplus \mathfrak{L}_r$ (N раз).

Кулоновская аналогия. Вернемся к алгебраическим уравнениям (253), из которых находятся спектры годеновских магнетиков и связанных с ними квазиточнорешаемых задач. Корни этих уравнений, т.е. числа $\xi_{i,q}$, $q = 1, ..., M^l$; $i = 1, ..., r$, вообще говоря, комплексны. Поэтому имеет смысл ввести двумерные векторы

$$\boldsymbol{\xi}_{i,q} = (\mathrm{Re}\,\xi_{i,q}, \mathrm{Im}\,\xi_{i,q}),\ q = 1, ..., M^l,\ i = 1, ..., r. \tag{286}$$

Если ввести наряду с ними обозначения

$$U_i(\boldsymbol{\xi}) \equiv \mathrm{Re} \int F_i(\xi) d\xi,\ i = 1, ..., r, \tag{287}$$

то систему (234) можно интерпретировать как условие экстремума функции

$$U(\boldsymbol{\xi}) = -\sum_{i,k=1}^{r} \sum_{q=1}^{M^i} \sum_{p=1}^{M^k} (\pi_i, \pi_k) \ln |\boldsymbol{\xi}_{i,q} - \boldsymbol{\xi}_{k,p}| - \sum_{i=1}^{r} \sum_{p=1}^{M^i} U_i(\boldsymbol{\xi}_{i,p}). \tag{288}$$

Заметим теперь, что функция (288) является не чем иным, как потенциалом двумерной логарифмической многочастичной кулоновской системы во внешнем поле. Всего имеется r сортов частиц, нумеруемых индексом $i = 1, ..., r$. Частиц i-го сорта имеется M^i штук. Числа $\xi_{i,p}$ обозначают координаты этих частиц, а простые корни алгебры Ли, π_i, играют роль их «векторных» зарядов. Частицы одинакового сорта имеют одинаковые векторные заряды и поэтому отталкиваются $((\pi_i, \pi_i) > 0)$, частицы же разных сортов притягиваются $((\pi_i, \pi_k) \leq 0,\ i \neq k)$. Кроме того, имеется r потенциалов - $U_i(\boldsymbol{\xi}_i)$, каждый из которых действует лишь на частицы определенного сорта.

Кулоновская аналогия чрезвычайно полезна. В этом мы уже имели возможность убедиться на примере работы [12]. Она дает возможность использовать для качественного анализа решений квазиточнорешаемых уравнений нашу классическую интуицию, которая, очевидно, значительно более развита, чем квантово-механическая.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.
ДЕАЛГЕБРАИЗАЦИЯ МЕТОДА И ПЕРСПЕКТИВЫ

Итак, мы завершили изложение нашего очередного подхода к проблеме квазиточнорешаемости в нерелятивистской квантовой механике. Развитый в нем метод пригоден для построения как одномерных, так и многомерных квазиточнорешаемых дифференциальных уравнений, которые, с помощью описанной в [12] процедуры, всегда могут быть приведены к уравнениям шредингеровского типа. Предлагаемый подход, в отличие от предыдущих (см., например, обзор [12]), является сугубо алгебраическим. Исходными объектами в нем являются вполне интегрируемые модели Годена на различных простых алгебрах Ли, точнорешаемые в рамках алгебраического анзаца Бете. Глобальная симметрия этих моделей позволяет совершать в них (точнее, в дифференциальных формах соответствующих интегральных уравнений) частичное разделение переменных, после чего эти уравнения становятся квазиточнорешаемыми. Используя уравнения анзаца Бете, описывающие спектры получаемых таким способом квазиточнорешаемых квантово-механических моделей, можно указать эквивалентность последних классическим моделям двумерных кулоновских систем во внешнем поле. Подобная связь между тремя совершенно различными, на первый взгляд, физическими системами: моделями магнетиков на алгебрах Ли, квазиточнорешаемыми моделями квантовой механики и классической многочастичной кулоновской задачей, отмечалась нами и ранее, однако мы ограничивались лишь обсуждением случая алгебры $sl(2)$. Теперь мы видим, что эта связь имеет место и в общем случае.

Любопытной особенностью предложенного здесь подхода является то, что он по самой своей сути содержит возможность дальнейшего обобщения. Это утверждение важно, поэтому на нем стоит остановиться подробнее.

Начнем с вопроса: какую роль в подходе играет полная интегрируемость модели годеновского магнетика? На первый взгляд, на ней все и зиждется. Однако при более внимательном рассмотрении становится очевидным, что эта роль сводится лишь к возможности представить ответ в замкнутой бетевской форме. Это обстоятельство, безусловно, полезно, так как бетевская форма записи является наиболее удобной для совершения различных предельных переходов, например, к бесконечномерному ($N \to \infty$) или к точнорешаемому ($M \to \infty$) случаям. При этом сохраняется функциональная структура ответа, позволяющая интерпретировать как допредельные, так и предельные модели с точки зрения кулоновской аналогии. Однако эти факты носят лишь второстепенный характер. На главный же вопрос, имеет ли интегрируемость принципиальное значение для квазиточнорешаемости (т.е. для алгебраизуемости спектральной задачи), можно с уверенностью ответить: нет, не имеет. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим модель магнетика на алгебре $\mathcal{L}_r \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_r$ с гамильтонианом

$$H = \sum_{A,B=1}^{N} \sum_{a,b \in \Omega_r} C^{AB} g^{ab} I_{Aa} I_{Bb}, \tag{289}$$

в которой I_{Aa} - действующие в A-узле образующие алгебры $\mathfrak{L}_r$ со старшими весами $f_A = \{f_{Ai}\}$, $i \in N_r$, а C^{AB} - произвольные числовые коэффициенты. Произвольность C^{AB} означает, что мы не требует интегрируемости модели (289). Несмотря на это, ей тоже можно поставить в соответствие некую квазиточнорешаемую модель с помощью обсуждаемого в работе метода, который для этой цели оказывается вполне подготовленным.

Действительно, пространство W, в котором действует оператор H, является прямым произведением пространств W_A представлений алгебры $\mathfrak{L}_r$. Последние, в свою очередь, можно рассматривать как прямые суммы подпространств $|M_A>$, определенных как множества векторов вида $I_{A\alpha_1} \cdot \ldots \cdot I_{A\alpha_K}|0>$, при условии, что корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$ - отрицательны и их сумма равна $-\sum_{i \in N_r} M_A^i \pi_i$. Это означает, что для W справедливо разложение:

$$W = \bigoplus_{M \geq 0} \Phi_M, \tag{290}$$

где пространства Φ_M определяются формулами:

$$\Phi_M = \bigoplus_{\{M_1,\ldots,M_N\}} \left\{|M_1> \otimes \ldots \otimes |M_N>\right\}, \tag{291}$$

при условии, что

$$\sum_{A=1}^{N} M_A^i = M^i, \quad i \in N_r. \tag{292}$$

Ключевым свойством пространств Φ_M является то, что все они конечномерны и инвариантны относительно действия оператора H.

Далее оператор H имеет глобальную группу симметрии $\mathfrak{L}_r$, реализуемую операторами

$$I_a = \sum_{A=1}^{N} I_{Aa}, \quad a \in \Omega_r. \tag{293}$$

Пространства Φ_M, как нетрудно показать, являются собственными относительно элементов картановской подалгебры алгебры симметрии $\mathfrak{L}_r$:

$$I_i \Phi_M = (F_i - M_i)\Phi_M, \tag{294}$$

где $F_i = \sum_{A=1}^{N} f_{Ai}$. Это означает, что множества векторов, удовлетворяющих условиям:

$$I_\alpha \phi = 0, \ \alpha \in \Delta_r^+; \tag{295}$$
$$I_i \phi = (F_i - M_i)\phi, \ i \in N_r;$$
$$\phi \in W,$$

заведомо принадлежат Φ_M и поэтому являются конечномерными. Эти множества, которые мы обозначим Ψ_M, также инвариантны относительно H, и поэтому мы приходим к бесконечной серии уравнений:

$$H\phi = E\phi, \ \phi \in \Psi_M, \ M \geq 0, \tag{296}$$

каждое из которых имеет лишь конечное число решений. Переход от алгебраической формы этих уравнений к дифференциальной осуществляется тем же методом, что и в интегрируемом случае. Этот переход может быть осуществлен в два этапа. На первом этапе учитывается трансляционная инвариантность оператора (289), благодаря которой он приводится к виду

$$H = \sum_{A,B=1}^{N-1} \sum_{\alpha,\beta \in \Delta_r^+} P_{AB}^{\alpha+\beta}(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi_A^\alpha \partial \xi_B^\beta} + \sum_{A=1}^{N} \sum_{\alpha \in \Delta_r^+} Q_A^\alpha(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_A^\alpha}. \tag{297}$$

Здесь $P_{AB}^{\alpha+\beta}$ и Q_A^α - однородные полиномы от переменных ξ_A^α, состоящие из мономов следующего вида:

$$P^{\alpha+\beta} = \left\{\xi_{A_1}^{\alpha_1} \ldots \xi_{A_K}^{\alpha_K}\right\}, \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_K = \alpha + \beta;$$
$$Q^\alpha = \left\{\xi_{A_1}^{\alpha_1} \ldots \xi_{A_K}^{\alpha_K}\right\}, \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_K = \alpha. \tag{298}$$

Пространства Φ_M, в которых действует оператор H, являются линейной комбинацией мономов

$$\Phi_M = \left\{\xi_{A_1}^{\alpha_1} \ldots \xi_{A_K}^{\alpha_K}\right\}, \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_K = \sum_{i \in N_r} M^i \pi_i. \tag{299}$$

На втором этапе учитывается «масштабная» инвариантность (однородность) оператора (289), позволяющая частично разделить переменные ξ в спектральном уравнении для H. При этом используется анзац (263), преобразующий спектральное уравнение для (297) в дифференциальное уравнение от меньшего числа переменных η и ν. Оно зависит явно от неотрицательных целых чисел M^i и является квазиточнорешаемым по построению.

Из приведенного выше вывода следует, что требование интегрируемости исходной модели (289) действительно лишнее. Но вместе с тем мы вынуждены признать, что лишней является и вся алгебраическая структура модели, т.е., фактически, сама модель. Действительно, мы с успехом могли бы стартовать с оператора (297), действующего в пространстве (299), взяв в качестве $P^{\alpha+\beta}$ и Q^{α} наиболее общие полиномы вида (298). После частичного разделения переменных мы снова получили бы квазиточнорешаемую модель. Здесь можно было бы возразить, что алгебраическая природа в уравнении (296) неявно присутствует, так как при определении пространств (299) и коэффициентных функций в (297) мы используем свойства корневой системы алгебры $\mathcal{L}_r$. Оказывается, однако, что и эту последнюю нить, связывающую уравнения типа (296) с алгебрами Ли, тоже легко оборвать. Действительно, пусть Δ_r^+ - конечная система векторов r-мерного пространства, включающая в себя базис из r векторов, Π_r^+, такой, что все оставшиеся векторы из Δ_r^+ (если они есть) разлагаются по Π_r^+ с неотрицательными целочисленными коэффициентами. Система Δ_r^+ не является, вообще говоря, корневой. Однако если в формулах (298) и (299) векторы α_i считать ее элементами, то все рассуждения, приводящие уравнения (298) к квазиточнорешаемому виду, сохраняют свою силу.

Итак, мы приходим к парадоксальному, на первый взгляд, выводу: при формулировке теории квазиточнорешаемости вполне можно обойтись без такого понятия, как алгебра Ли. Основные принципы этого явления можно понять, не выходя за рамки аналитического подхода. Отказ от языка симметрий не только упрощает задачу, но, как мы убедились выше, позволяет сформулировать ее в гораздо более общем виде. Здесь, однако, может возникнуть естественный вопрос, а как быть с методом Турбинера – Шифмана [11], в формулировке которого алгебры Ли, точнее, их конечномерные представления, играют определяющую роль. Для ответа на этот вопрос рассмотрим типичный гамильтониан Турбинера – Шифмана:

$$H = \sum_{a,b} P_{ab} S^a S^b + \sum_a Q_a S^a, \tag{300}$$

в котором S^a - образующие конечномерного представления некой алгебры Ли, а P_{ab} и Q_a - произвольные числовые коэффициенты. Для того, чтобы рассматриваемый нами гамильтониан (295) принял вид (300), операторы S^a должны быть представимы в форме

$$S^a = \sum_{\alpha,A} P_A^{a\alpha}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_A^{\alpha}}, \tag{301}$$

где $P_A^{a\alpha}(\xi)$ - однородные полиномы от ξ, составленные из мономов вида (298). Лишь такие операторы замыкаются в конечномерную алгебру Ли, не выводя за пределы пространства (299), т.е. реализуя в нем ее конечномерные представления. Однако легко убедиться в том, что подобное сведение гамильтонианов типа (297) к гамильтонианам ротаторов (300) возможно далеко не всегда. Препятствием может служить наличие членов вида $\xi_C^{\alpha+\beta}\partial^2/(\partial\xi_A^{\alpha}\partial\xi_B^{\beta})$, которые не факторизуемы, т.е. не представимы в виде произведения двух операторов вида (301). Это означает, что алгебраический подход Турбинера – Шифмана не является самым общим, т.е. не исчерпывает всех возможных квазиточнорешаемых моделей.

Разумеется, пока рано утверждать, что обсуждаемая здесь деалгебраизованная версия нашего подхода претендует на наибольшую общность. И хотя некоторые аргументы в пользу такого утверждения у нас имеются, этот вопрос может быть разрешен лишь на теоремном уровне строгости. Так что возможны и «сюрпризы». А это значит, что в теории квазиточнорешаемости еще рано ставить последнюю точку.

В заключение мне хотелось бы выразить искреннюю признательность В.Г. Кадышевскому за интерес и внимание к данной работе. Пользуюсь случаем поблагодарить Т.И.Маглаперидзе за интерес и плодотворное сотрудничество, а также Б.Н.Захарьева, И.Д.Манджавидзе, С.Г.Матиняна, М.В.Савельева и В.Я.Файнберга за стимулирующие дискуссии и ценные замечания.

Список литературы

1. **Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.** - УМН, 1979, т.34, с.13-63.
2. **Лезнов А.Н., Савельев М.В.** - Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с. 208-218.
3. **Годен М.** - Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
4. **Захарьев Б.Н., Зюско А.А.** - Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985.
5. **Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В.** - ТМФ, 1984, т.61, с.183-199.
6. **Генденштейн Л.Е.** - Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.299-301.
7. **Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.** - Phys. Repts. 1983, vol.92, p.313-404.
8. **Натанзон Г.А.** - Вестник ЛГУ, 1971, т.10, с.22-31; ТМФ, 1978, т.38, с.219-230.
9. **Turbiner A.V.** - Comm. Math. Phys., 1988, vol.118, p.467-474.
10. **Ушверидзе А.Г.** - Сб. КСФ (ФИАН), 1988, т.2, с. 37-43.
11. **Shifman M.A.** - Intern. J. Mod. Phys. A, 1989, vol. 4, p.504.
12. **Ушверидзе А.Г.** - ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып. 5, с.1185-1245.
13. **Turbiner A.V.,Ushveridze A.G.** - Phys. Lett., 1987, vol.126A, p.181-183.
14. **Маглаперидзе Т.И., Ушверидзе А.Г.** - Препринт ФИАН 163, М., 1989.
15. **Shifman M.A., Turbiner A.V.** - Preprint ITEP № 174, M., 1988.
16. **Maglaperidze T.I., Ushveridze A.G.** - J. Mod. Phys. Lett. A, 1990, vol. 5, N 23, p. 1883-1889.

17. **Ushveridze A.G.** - J. Mod. Phys. Lett. A, 1990, vol.5, № 23, p.1891-1899.
18. **Ушверидзе А.Г.** - Препринт ИФАН ГССР ФТТ-16. Тбилиси, 1989; Сб. КСФ (ФИАН), 1990, т. 4, с.37-39.
19. **Склянин Е.К.** - Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1987, т. 164, с. 151-170.
20. **Jurco B.** - J. Math. Phys., 1989, vol. 30, p. 1289-1293.
21. **Маглаперидзе Т.И., Ушверидзе А.Г.** - Сб. КСФ (ФИАН), 1989, т. 10, с. 46-48.
22. **Маглаперидзе Т.И., Ушверидзе А.Г.** - Препринт ФИАН 162, М., 1989.
23. **Барут А., Рончка Р.** - Теория представлений групп и ее применения: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
24. **Желобенко Д.П.** - Лекции по теории групп Ли. ОИЯИ , Дубна, 1965.
25. **Наймарк М.А.** - Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.