«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1992, ТОМ 23, ВЫП.1

УДК 539.1

ПЕРТУРБАТИВНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ СТРУН

А.Ю.Морозов

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Описано место теории свободных безмассовых полей на римановых поверхностях в общем контексте пертурбативной теории струн в формализме первичного квантования и ее приложения к анализу различных конформных моделей. Приведены некоторые результаты о теории свободных полей, в том числе формулы для меры Мамфорда для низких родов $p \le 4$, для детерминантов операторов $\bar\partial$ на гиперэллиптических поверхностях и для корреляторов β-, γ-полей. На примере моделей Грина - Шварца и Весса - Зумино - Новикова - Виттена демонстрируется метод перехода к квадратичным действиям в соответствующих функциональных интегралах. Затронуты также GKO редукции и свойства моделей с W-алгебрами. В частности, указаны два источника нарушения структуры алгебры Ли для W_N-алгебр и показано, что эта структура восстанавливается при $N \to \infty$. Излагаются в основном результаты, полученные при непосредственном участии автора.

The status of the theory of free massless fields on Riemann surfaces and its application to the analysis of various conformal models are described in the generic context of the perturbative string theory in the first quantization formalism. Some results of the free-field theory are presented including formulae for Mumford measures for the lower genera $p \le 4$, for the determinants of the operators $\bar\partial$ on the hyperelliptic surfaces and for correlators of β-, γ-fields. Using the Green-Schwarz and Wess-Zumino-Novikov-Witten models as examples, we demonstrate the method of transition to the quadratic actions in the corresponding functional integrals. The GKO reduction and features of the models with W-algebras are briefly considered. In particular two sources of the Lie structure breakdown for W_N-algebras are indicated and it is shown that this structure is restored when $N \to \infty$.

ВВЕДЕНИЕ

Теория струн является специальным вариантом нелокальной квантовой теории поля, в будущем возможны ее приложения к теории сильной связи, теории фазовых переходов, теории спиновых стекол, к построению непротиворечивой квантовой гравитации и вообще жизнеспособной модели объединения всех фундаментальных взаимодействий. Имеются также глубокие и плодотворные связи с различными разделами математики, начиная с теории чисел и алгебраической геометрии и кончая теорией дифференциальных уравнений и теорией катастроф. Можно надеяться, что теория струн даст объединяющую их физическую конструкцию с достаточно разнообразными свойствами. Концептуальной основой теории струн является представление о динамическом выборе выделенных моделей из всего многообразия локальных квантовых теорий поля. Именно это представляет собой основную задачу с точки зрения теории объединения взаимодействий: необходимо объяснить, почему наш мир (по крайней мере при энергиях меньше 100 ГэВ) описывается именно стандартной моделью $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, а не какой-либо иной калибровочной теорией с другой группой симметрии и/или другим составом частиц. По этой причине главным содержанием теории струн является изучение динамики в пространстве всевозможных моделей квантовой теории поля. Основным техническим методом, позволяющим хотя бы в принципе обсуждать эту проблему, является формализм первичного квантования, сводящий анализ определенного класса многомерных нелокальных полевых теорий к изучению обыкновенных локальных теорий поля в двух измерениях. Двумерная теория при этом интерпретируется как «теория на мировой поверхности», описывающая динамику пробных «струн» (одномерных протяженных объектов) во внешних полях, а сам формализм первичного квантования является своего рода преобразованием Радона в функциональном пространстве полевых теорий. Переход к одномерным пробным объектам от нуль-мерных ("частиц") оказался весьма плодотворным, так как позволил интерпретировать взаимодействия в исходной нелокальной теории в терминах геометрических свойств двумерной теории. В определенном смысле теория взаимодействующих струн оказывается прямым аналогом теории свободных частиц, что и обусловливает ее уникальность и особую математическую красоту. Основной динамический принцип теории струн отождествляет классические струнные уравнения движения (задающие динамику в"пространстве теорий") с условием конформной инвариантности теории на мировой поверхности. Тем самым достигается описание уравнений движения в терминах принципа симметрии. (Для сравнения, в случае теорий Янга - Миллса помимо калибровочной инвариантности приходится привлекать еще принцип минимальности. Этот принцип хорош для эффективных низкоэнергетических теорий, но никак не для фундаментальной теории материи.) Общепринятого способа описания квантовых уравнений движения и ухода с массовой поверхности в теории струн пока нет.

Простейшая задача теории струн в описанном контексте - изучение классических решений струнных уравнений движения, т.е. двумерных конформных моделей, и их окрестностей. При этом, вообще говоря, следует изучать как «соседние» точки в конфигурационном пространстве -

неконформные модели, так и квантовые поправки, связанные с флуктуациями струнных полей, отвечающих самой конформной теории. В принципе оба сорта флуктуаций важны для описания струнной динамики, однако на первом этапе исследования их целесообразно разделить. Обзор посвящен только вопросу о квантовых поправках ("струнных петлях") в пределах отдельных конформных моделей. Простейшей моделью такого рода является теория свободного безмассового скалярного поля на двумерной замкнутой ориентируемой поверхности произвольного рода. К этой задаче легко сводится исследование свободных полей с ненулевыми спинами и на неориентируемых поверхностях или поверхностях с краем. Непосредственно решение этой задачи исчерпывает вопрос о пертурбативных вычислениях в модели 26-мерной бозонной струны и ее простейших компактификациях - на торы и орбифолды. Более сложен вопрос о пертурбативных вычислениях в следующих по сложности и важности моделях «суперструн» Невье - Шварца - Рамона (*NSR*) и Грина - Шварца (*GS*). Несмотря на важность этих моделей для приложения теории струн к программе объединения взаимодействий, задача о многопетлевых вычислениях здесь до сих пор полностью не решена. Наконец, наиболее важен вопрос об универсальных подходах к пертурбативному описанию всех струнных моделей (т.е. построенных на основе всех конформных теорий). В принципе путь к такому описанию открывает представление свободных полей для конформных теорий, рассматриваемых как различные редукции модели Весса - Зумино - Новикова - Виттена (WZNW), симметрией которой является алгебра Каца - Муди (KM). Такое описание совершенно необходимо для будущих попыток анализа струн вне массовой поверхности.

В разработке пертурбативной теории струн участвовало большое число научных школ и отдельных исследователей. На последнем этапе, связанном с осознанием роли комплексно-аналитических аспектов теории, следует особо выделить роль В.Книжника. В настоящем обзоре в основном отражены результаты, полученные при непосредственном участии автора совместно с А.Белавиным, А.Герасимовым, Р.Каллош, В.Книжником, Д.Лебедевым, А.Маршаковым, Г.Муром, М.Ольшанецким, А.Переломовым, А.Рослым, А.Турбинером, С.Шаташвили и М.Шифманом. Это развитие привело в конце концов к более или менее ясному пониманию соответствующих математических структур и позволило в последнее время приступить к исследованию наиболее интересных и содержательных непертурбативных аспектов струнной динамики. Прежде чем перейти к более подробному описанию конкретных утверждений, изложим их в общем контексте пертурбативной теории струн.

Первые работы по пертурбативной теории струн относятся к 60–70-м годам. К наиболее важным для темы обзора следует отнести: открытие действия на мировом листе [1,2]; первые вычисления древесных [3], однопетлевых [4,5] и многопетлевых [6] амплитуд; формулировку принципов суперсимметрии и моделей суперструн [7,8]. Принципиальное значение имело открытие низкоэнергетического предела и, как следствие, предложение использовать струнные модели для целей объединения взаимодействий (см., например, [9,10]). Последовательный подход к изучению струн стал возможен после ясной формулировки А.Поляковым [11] идеи о замене функционального интеграла с сильно нелинейным действием Намбу - Гото [1,2] на интеграл с дополнительным усреднением по двумерным метрикам и с широкой калибровочной инвариантностью. Основным с точки зрения физических приложений (и a priori неочевидным) следствием такой формулировки - известным как теорема Фрадкина - Цейтлина [12] - явилась возможность переформулировать (определенным образом подправленные) уравнения Эйнштейна и Янга - Миллса (и вообще многие дифференциальные уравнения, задающие динамику в пространстве-времени) в терминах нетривиального принципа симметрии: двумерной конформной инвариантности теории на мировом листе. Всплеск интереса к теории струн произошел в 1984 г., когда после долгой предварительной работы (см. [13]) М.Грин и Дж.Шварц показали [14], что существует новая уникальная теория струн без аномалий и с большой пространственно-временной калибровочной симметрией $SO(32)$ или $E_8 \mathrm{x} E_8$. (Точнее, последняя, более важная, версия была непротиворечиво сформулирована как «гетеротическая» струна несколько позднее, в [15].) В настоящее время на этом направлении надеются построить единую теорию всех фундаментальных взаимодействий, и число статей по теории струн крайне велико. Результаты наиболее общего характера собраны в [16]. О более широком взгляде на место теории струн в физике см. [17].

Пертурбативные вычисления в пределах одной отдельно взятой струнной модели заключаются в суммировании по всем метрикам и полям данной модели на двумерной поверхности любой заданной топологии. Первые после [11] результаты в этом направлении принадлежат О.Алварецу [18]. В знаменитых работах Белавина и Книжника [19] на простейшем примере модели 26-мерных бозонных струн было показано, что единственной существенной характеристикой поверхности (если она замкнутая и ориентируемая) является ее комплексная структура. (На совпадение критической размерности 26 с числом, фигурировавшим в теореме Мамфорда, было немного ранее указано Ю.Маниным, ему же принадлежит одно из первых приложений теоремы Белавина - Книжника [20], развитое впоследствии в работах с А.Бейлинсоном [21]. Ограничение замкнутыми и ориентируемыми поверхностями легко снимается с помощью техники дублей, см., например, [22].) Этот факт имеет чрезвычайно важное значение по разным причинам. Во-первых, он устанавливает связь теории струн с комплексной и, в общем виде, алгебраической геометрией. Во-вторых, он указывает на наиболее существенное обобщаемое свойство модели 26-мерной струны - голоморфную факторизацию корреляторов. Это же свойство фактически являлось центральным в аксиоматическом определении конформных моделей в [23]; отсюда прямой путь к общепринятому ныне взгляду на теорию струн как на интерполяцию между всевозможными конформными моделями. В-третьих, теорема Белавина - Книжника открыла путь для решения задачи о многопетлевых вычислениях в различных конкретных струнных моделях. Со многих точек зрения исчерпывающее решение этой задачи для случая 26-мерной струны было дано в работах [24-37]. При этом в [20,21,24-28] использовались глубокие результаты [38-43] о свойствах римановых поверхностей, их пространств модулей и расслоений над ними, а в [29-37] развита более наглядная теория свободных полей на римановых поверхностях. Основные результаты этой теории (вместе с простейшими необходимыми сведениями из дифференциальной геометрии римановых поверхностей) приведены, например, в разд.7 статьи [44] и воспроизведены затем в обзоре [45]. Результаты работ [19,26-28,46] о явных формулах для 2-, 3-, 4-петлевых амплитуд, опирающиеся на более детальную информацию о свойствах меры Мамфорда, отражены ниже в п.1.1. Получение совершенно явных формул для многопетлевых амплитуд затруднено из-за появления в ответах сложных спецфункций - тета-функций на поверхностях высокого рода. Они получаются ограничением тета-функций с якобианов на образы поверхностей. Пространства модулей якобианов и поверхностей совпадают для $p = 1, 2, 3$ (p - род поверхности или число петель), поэтому в этих случаях существуют очень наглядные формулы (сами же якобианы и поверхности совпадают только при $p = 1$). Для $p > 3$ ситуация более сложная. Наиболее правильным со многих точек зрения явилось бы описание пертурбативной теории струн, при котором римановы поверхности задавались бы алгебраическими уравнениями. К сожалению, в общем случае необходимы переопределенные системы уравнений, и задача в общем виде не решена. Простой и важный пример, однако, имеется: гиперэллиптические поверхности. Исчисление свободных полей на гиперэллиптических поверхностях первоначально исследовалось в [47-55]. В п.1.2 мы следуем изложению работы [48].

В п.1.3 приведено краткое изложение теории компактификации на торы и орбифолды на материале работ [56,57] (число статей, в которых независимо анализировалась эта задача, весьма велико; орбифолды рассматриваются в [57] только в однопетлевом приближении, о многих петлях см. [58,59]). Затем в п.1.4 разбирается еще один важный раздел теории свободных полей на римановых поверхностях - теория β-, γ-систем.

В частном случае они были введены в [60] для описания супердухов в модели суперструн NSR, общая теория β-, γ-полей (бозонов с лагранжианом первого порядка) развивалась в связи с этой задачей в [33, 35-37, 61-65]; в последнее время выяснилось, что β-, γ-поля играют важную роль и в других конформных моделях, в том числе в модели WZNW [66-70] (см. [44] и ниже). Дальнейшее развитие самой теории свободных полей связано с интерпретацией результатов в алгебраических терминах, прежде всего связанных с алгеброй Вирасоро и ее различными реализациями, ассоциированными с алгебрами векторных полей на римановых поверхностях [71-73]. Соответствующие результаты тесно связаны с так называемым операторным формализмом для свободных полей [32,34,35,74-78]. Этот подход, в свою очередь, важен для последовательного суммирования рядов теории возмущений и формулировки ответов в терминах универсального пространства модулей [79-86].

Особое место в струнной теории занимают модели 10-мерных суперсимметричных и гетеротических струн. В отличие от 26-мерной бозонной струны эти модели описывают пертурбативно устойчивые решения струнных уравнений движения - в них нет тахионных возбуждений. По этой причине указанные модели должны быть свободны от всяких расходимостей во всех порядках теории возмущений (расходимости могут появиться только как непертурбативные неустойчивости, отвечающие туннелированию к другим струнным моделям). Наконец, в таких моделях имеются дополнительные симметрии как в пространстве-времени, так и на мировом листе. Эти обстоятельства превращают модели суперсимметричных и гетеротических струн в интересный и важный объект исследования, обладающий новыми свойствами, по сравнению с моделями, разбираемыми в разд.1. Обсуждению этих моделей посвящены разд.2 и 3. Полная пертурбативная теория суперсимметричных и гетеротических струн до сих пор не создана. Два подхода к ее разработке основаны на двух принципиально различных классических приближениях: Невье - Шварца - Рамона (NSR) [7,8] и Грина - Шварца (GS) [87]. В подходе NSR исходный пункт - модель 10-мерной фермионной струны, обладающая суперсимметрией на мировом листе. Математическим аппаратом является теория суперримановых поверхностей и их пространств модулей (супермодулей). Основные сложности связаны с выделением самосогласованной модели суперструн из фермионной струны (гильбертово пространство одной модели вложено в гильбертово пространство другой - это исторически первый пример ситуации, оказавшейся вполне универсальной для всей науки о конформных и струнных моделях). Принципиальная идея в данном случае состоит в использовании дискретной Z_2-симметрии - так называемой G-четности, имеющейся в модели фермионной струны. Она подразумевает, что все возбуждения делятся на «плюс-частицы» и «минус-частицы», причем элементарный акт трехчастичного взаимодействия не может превратить минус-частицу в пару плюс-частиц. Легко понять, что это свойство гарантирует, что любая древесная диаграмма, у которой все внешние линии отвечают плюс-частицам, не будет содержать ни одной минус-частицы и во внутренних линиях. Это наблюдение позволило авторам замечательной работы [10] сформулировать модель суперструн NSR как проекцию фермионной струны на плюс-состояния. Указанная операция называется GSO-проекцией, а приведенное только что рассуждение гарантирует древесную унитарность полученной теории. После этого понятно, что должна существовать и полноценная унитарная теория, однако ее связь с фермионной струной на многопетлевом уровне менее очевидна: петлевые диаграммы в модели фермионной струны содержат промежуточные минус-частицы, даже если все внешние линии отвечают плюс-состояниям. Оказалось, что GSO-проекция на многопетлевом уровне предполагает суммирование по всевозможным граничным условиям для фермионных полей (корень квадратный из касательного расслоения содержит конечнократную неопределенность). Основной проблемой в теории суперструн NSR является выбор весов в этой сумме по тета-характеристикам: веса равны ± 1 для рода $p = 1$, но значительно менее тривиальны для старших родов. Существенный вклад в изучение проблемы многопетлевых вычислений для суперструн NSR внесен работами [20,33,35-37,60-65,76,88-100]. В пп.2.1 и 2.2 мы следуем изложению статей [37,96-100]. По поводу дальнейшего развития см. [101-111]. Еще раз отметим, что до окончательного решения задачи, сравнимого с имеющимся для случая 26-мерных струн, пока далеко.

Альтернативный формализм для модели суперструн был предложен Грином и Шварцем [13,16,87]. В отличие от подхода NSR формализм GS обладает явной пространственно-временной суперсимметрией и не требует введения никаких проекций гильбертовых пространств. Из-за этого в подходе GS наглядно объясняются ключевые свойства суперструн, в том числе отсутствие тахионов и теоремы о неперенормировке. С точки зрения многопетлевых вычислений большое значение имеет то, что в формализме GS отсутствуют поля с полуцелыми спинами на мировом листе. Взамен, однако, двумерно-ковариантное действие GS [87] оказывается неквадратичным и обладает сложной калибровочной симметрией (так называемая k-инвариантность; по поводу свойств k-симметрии см. [112] и ссылки в этой статье). Для развития теории GS на произвольных римановых поверхностях требуется сделать замену переменных в функциональном интеграле, делающую действие квадратичным. Такая локальная и безаномальная замена переменных обязана существовать в силу конформной инвариантности теории. Для случая $p = 0$ она описана в п.3.1, основанном на материале статьи [113]. В п.3.2, следуя [114], приводим обобщение на случай произвольного p и доказательство простейших теорем о неперенормировке 0-, 1-, 2-, 3-точечных функций для безмассовых частиц, являющихся непосредственным следствием пространственно-временной суперсимметрии (доказательство для 2-, 3-точечных функций использует некоторые предположения о структуре вершинных операторов и в этом смысле не является вполне исчерпывающим). По поводу дальнейшего развития этих идей см.[120-123]. Гамильтоново обоснование процедур, предложенных в [113], видимо, еще не вполне удовлетворительно (см. по этому поводу [115] - наивный подход и [116] - анализ, основанный на процедуре Баталина - Фрадкина - Вилковисского [117-119]). Центральным для всей теории суперсимметричных и гетеротических струн является вопрос о тождественности формализмов NSR и GS. Доказательство такой тождественности, справедливое во всех порядках теории возмущений, пока отсутствует (хотя далеко идущие параллели отчетливо прослеживаются). До сих пор нет сколько-нибудь надежного выражения для простейшей нетривиальной величины: 2-петлевой суперструнной 4-точечной функции; о некоторых результатах в этом направлении см.[100, 106-108].

Как уже говорилось, основным содержанием будущей теории струн должно стать объединение различных теорий, в первую очередь различных двумерных конформных моделей. Мы не будем здесь затрагивать идеи о путях такого объединения (по поводу некоторых возможностей см.[81, 124-130]). В любом случае ясно, что в основе объединения должно лежать единое описание всех конформных моделей, выделяющее свойства, общие для всех конформных теорий, и не акцентирующее их отличия друг от друга. Общепризнано, что таким общим свойством, выделяющим двумерные конформные модели, является голоморфная факторизация [23]: сведение любых корреляционных функций на поверхностях любого рода к билинейным комбинациям аналитических сечений комплексных расслоений над пространствами модулей. На более простом языке это означает, что любая конформная модель может быть записана в терминах свободных безмассовых полей на римановой поверхности, точнее, она является некоторой локальной проекцией (редукцией) теории свободных полей. По-другому можно сказать, что гильбертово пространство теории вкладывается в некоторый набор модулей Верма операторной алгебры (и отличается от этого набора возможным отбрасыванием 0-векторов). Такого рода представления о структуре конформных моделей отражены во многих работах, к числу принципиально важных следует, на наш взгляд, отнести [23,131-141]. В разд.4 обсуждаются представления свободных безмассовых полей для различных популярных классов конформных моделей. Основное внимание уделено модели WZNW, которая в определенном смысле является универсальной конформной теорией: симметрии любой другой конформной модели можно интерпретировать как редукцию симметрии модели WZNW, в которую она вложена. Операторной алгеброй модели WZNW является алгебра КМ, и любые другие операторные алгебры могут рассматриваться как фрагменты универсальной обертывающей алгебры КМ (наиболее известные примеры - конструкция Сугавары для алгебры Вирасоро и аналогичные построения для W-алгебр Замолодчикова). Обсуждению модели WZNW посвящены пп.4.1 и 4.2, в которых мы следуем изложению работ [44,142]. (Аналогичные результаты получены в [143-147] и развиты в многочисленных статьях, в частности в [148-154].) Локальная безаномальная замена переменных в функциональном интеграле, делающая нелинейное действие WZNW квадратичным, является непосредственным обобщением аналогичной замены в модели GS, разобранной в разд.3. В пп. 4.3 - 4.5 на материале статей [155-159] обсуждается формализм свободных полей и его вывод из формул для различных редукций «универсальной» модели WZNW: минимальных моделей (в формализме Доценко - Фатеева [132]), теорий с W-симметриями и GKO-моделей [160]. Наконец, в п.4.6 описана предложенная в [161] конструкция, обобщающая сугаваровское вложение алгебры Вирасоро в универсальную обертывающую алгебру КМ. О ее дальнейшем развитии см.[162-167]. Представление свободных безмассовых полей важно не только для понимания общей структуры конформных моделей и для построения полной теории струн, но и для решения задачи о многопетлевых вычислениях в соответствующих струнных моделях. Принципиально решение этой задачи дается представлением свободных полей в сочетании с теорией таких полей на произвольных римановых поверхностях, частично затронутой в разд.1. Однако для достижения полной ясности и получения бесспорных явных формул для корреляторов в рациональных конформных теориях необходимо явное описание проекции из гильбертова пространства свободных полей в меньшее гильбертово пространство конкретной рациональной модели (по поводу таких проекций см., например, [139,141]). Эта часть задачи в полной мере пока не решена.

Принципиальное значение выводов о роли модели WZNW обусловлено также возможностью существенно иной интерпретации этой модели. Как показано А.Алексеевым и С.Шаташвили [138], лагранжиан WZNW возникает при геометрическом квантовании алгебры КМ как d^{-1} от формы Кириллова - Костанта (см.[168]). Этот результат является обобщением предложенного в свое время Л.Фаддеевым описания конструкции Кириллова - Костанта в терминах функционального интегрирования. Результаты для произвольной классической алгебры Ли получены А.Алексеевым, Л.Фаддеевым и С.Шаташвили [169] и распространены на случай алгебр Каца - Муди и Вирасоро в [138]. Актуальным в настоящее время является дальнейшее обобщение конструкции на случай алгебр 2-петель, в том числе $S\hat{l}(\infty)$, $\hat{W}_{\infty}$ и алгебры Мойела - Бейкера - Фэрли [170-172]. О возможной связи этой задачи с теорией интегрируемых систем [173,174] и с полной теорией струн см. [129,130].

Таким образом, в обзоре отражены основные результаты о пертурбативной теории струн, понимаемой как теория конформных моделей на римановых поверхностях произвольной топологии. Вопрос о полноценной теории возмущений, учитывающей флуктуации в неконформных направлениях, и тем более о непертурбативных явлениях, в настоящий момент значительно менее ясен и в обзоре не затрагивается.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗ ТЕОРИИ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ И ПРИЛОЖЕНИЯ К МОДЕЛИ 26-МЕРНЫХ БОЗОННЫХ СТРУН

Наиболее разумной и экономной основой всех пертурбативных вычислений в теории струн является теория свободного скалярного поля на римановой поверхности произвольного рода, построенная независимо многими авторами, в том числе В.Книжником [29,49,175]; Алварецом-Гоме, Бостом, Муром, Нельсоном и Вафой [30]; Э.Верлинде и Г.Верлинде [31,62]. Принципиальной основой приложения этой теории к струнным моделям являются формулировка теории струн Поляковым [11] и теорема Белавина - Книжника [19,175]. В данном разделе излагается ряд промежуточных результатов, связанных со становлением такой точки зрения. В п.1.1 описано обобщение формул Кобы - Нильсена [3] и Шапиро - Вирасоро [5] для древесных и однопетлевых амплитуд в модели 26-мерных струн в терминах матриц периодов и голоморфных 1-дифференциалов на 2-, 3- и, с определенными ограничениями, 4-петлевой случай. Пункт 1.2 посвящен вычислению детерминантов на гиперэллиптических поверхностях, что до сих пор является наиболее ярким приложением общих результатов, выраженных обычно в слишком трансцендентной форме (в терминах тета-функций на многомерных якобианах). В качестве очень простого примера вычислений для моделей, отличных от стандартной 26-мерной струны, в п.1.3 приведены однопетлевые формулы для компактификации на абелевы орбифолды. Пункт 1.4 содержит предварительные результаты работ [37,176] о корреляторах β-, γ-полей, существенных для анализа струн NSR и других моделей. Более общие выражения открыты Э.Верлинде и Г.Верлинде [62]. Близкое к исчерпывающему решение задачи о корреляторах для β-, γ-системы непосредственно в терминах функционального интеграла дано недавно А.Герасимовым [36].

1.1. Струнная мера для $p = 2, 3, 4$. В критической размерности пространства-времени $d = 26$ p-петлевая амплитуда рассеяния N тахионов с импульсами k_α - простейшая величина в теории струн - записывается в виде конечнократного интеграла по пространству модулей $\mathfrak{M}_p$ римановых поверхностей рода p [11,19]:

$$\int Dg_{ab}Dx^\mu\left\{\exp\left[-\frac{M^2}{2}\int d^2\xi\sqrt{g}\,g^{ab}\partial_a x^\mu\partial_b x^\mu\right]\right\}\prod_{\alpha=1}^{N}\int d^2\xi_\alpha\sqrt{g(\xi_\alpha)}\,\times$$
$$\times\exp\left[ik^\mu_\alpha x^\mu(\xi_\alpha)\right]\sim\int_{\mathfrak{M}_p}dv_p\left[\frac{\det N_0}{\det'\Delta_0}\right]^{13}\det{}'\Delta_{-1}\prod_{\alpha=1}^{N}\int d^2\xi_\alpha\,\times \tag{1}$$
$$\times\prod_{\alpha,\beta}^{N}\exp\left[-\frac{1}{2M^2}k_\alpha k_\beta G(\xi_\alpha,\xi_\beta)\right].$$

Основным для нахождения меры Полякова,

$$dv_p\left[\frac{\det N_0}{\det'\Delta_0}\right]^{13}\det{}'\Delta_{-1}, \tag{2}$$

является свойство голоморфной факторизации детерминантов операторов Лапласа

$$\mathrm{Det}'\Delta_j=\exp\left[\frac{c_j}{24\pi}S_{\wp}\right]\det N_j\det N_{1-j}\,|\mathrm{Det}\,\bar\partial_j|^2. \tag{3}$$

Киральный детерминант $\mathrm{Det}\,\bar\partial$ зависит от комплексных модулей y, $\bar y$ голоморфно, $\partial/\partial y\,\mathrm{Det}\,\bar\partial = 0$. Лиувиллиевский множитель в (3) учитывает все аномалии регуляризованного детерминанта, $c_j = 2(6j^2 - 6j + 1)$, и эти множители сокращаются в безаномальных произведениях детерминантов, в том числе и в мере Полякова (2). Детерминанты $\det N_j$ конечных матриц скалярных произведений нулевых мод операторов $\bar\partial_j$ возникают в (3) по причине, которую мы проиллюстрируем простым примером. Пусть $\Delta_j = \partial_j^+\bar\partial_j$ не имеет нулевых мод вообще (например, $j < 0$ при $p > 1$). Пренебрежем также всеми подробностями, связанными с расходимостями, регуляризацией и аномалиями. Тогда

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Det}\Delta_j &= \int Dc D\bar{c}\, \exp \int |\bar{\partial} c|^2 = \\
&= \int db D\bar{b} Dc D\bar{c}\, \exp\left(\int b\bar{\partial}c\right) \exp\left(\int \bar{b}\partial\bar{c}\right) \exp\left(\int \bar{b}b\right) = \\
&= \int Db D\bar{b} D\bar{c} D\bar{c}\, \exp\left(\int b\bar{\partial}c\right) \exp\left(\int \bar{b}\partial\bar{c}\right) \sum_n \frac{1}{n!}\left(\int \bar{b}b\right)^n = \\
&= \prod_{a=1}^{N_{1-j}} \int d^2\xi_\alpha \left| \int Db Dc\, b(\xi_1)\ldots.b(\xi_{N_{1-j}}) \exp\left(\int b\bar{\partial}c\right) \right|^2 = \\
&= \prod_{a=1}^{N_{1-j}} \int d^2\xi_a \left| \det{}_{(ab)} b_a^{(0)}(\xi_b) \right|^2 \times \\
&\times \left| \frac{\int Db Dc\, b(\xi_1)\ldots b(\xi_{N_{1-j}}) \exp\left(\int b\bar{\partial}c\right)}{\det{}_{(ab)} b_a^{(0)}(\xi_b)} \right|^2 = \det N_{1-j} \left|\operatorname{Det}\bar{\partial}_j\right|^2.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь c и b - поля j- и $(1-j)$-дифференциалов соответственно; $b_a^{(0)}$, $a = 1, \ldots, N_{1-j}$, обозначены линейно-независимые голоморфные $(1-j)$-дифференциалы - нулевые моды $\bar{\partial}_{1-j}$. Отметим еще, что

$$
\operatorname{Det}\bar{\partial}_j \equiv \frac{\int Db Dc\, b(\xi_1)\ldots b(\xi_{N_{1-j}}) \exp\left(\int b\bar{\partial}c\right)}{\det{}_{(ab)} b_a^{(0)}(\xi_b)} = \operatorname{Det}\bar{\partial}_{1-j}. \tag{5}
$$

Последнее, что нужно для перехода к построению меры Полякова, - это выражение для элементарной меры dv_p на $\mathfrak{M}_p$. С точки зрения свойств голоморфности важно использовать комплексные координаты $y, \bar{y}$ на $\mathfrak{M}_p$. В терминах этих координат [19]

$$
dv_p = \left| \prod_{\alpha=1}^{N_2} dy_\alpha \right|^2 / \det N_2. \tag{6}
$$

Из (3) и (6) получаем для меры Полякова (2)

$$
\left| \frac{\operatorname{Det}\bar{\partial}_2}{[\operatorname{Det}\bar{\partial}_0]^{13}} \prod_{\alpha=1}^{N_2} dy_\alpha \right|^2 / (\det N_1)^{13} \equiv \left| d\mu_p \right|^2 / (\det N_1)^{13}. \tag{7}
$$

Голоморфная мера $d\mu_p$ известна как мера Мамфорда. Эта мера, связанная с отношением детерминантов операторов Лапласа на 0- и −1-дифференциалах, число нулевых мод которых не зависит от модулей, не может иметь нулей или полюсов внутри $\mathfrak{M}_p$ и, согласно [19], должна иметь полюса второго порядка на бесконечности (т. е. на бесконечных дивизорах $\bar{\mathfrak{M}}_p$).

Явные формулы для функций Грина $G(\xi, \xi')$ и детерминантов, входящих в (1) и (7), приведены в [29,43,175]. Оказывается, однако, что мера Мамфорда в случае низких родов $p \leq 4$ может быть записана в гораздо более простом виде [26-28] - через модулярные формы на верхнем полупространстве Зигеля. Исторически такие формулы для $p = 2, 3$ были первыми примерами явных многопетлевых выражений в теории струн. Выделенность родов $p = 1, 2, 3$ связана с тем, что в этих случаях пространства модулей могут быть параметризованы матрицами периодов $T_{ij} = \int_{B_i} \omega_j$ (канонические 1-дифференциалы нормированы условиями $\int_{A_i} \omega_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, ..., p$). Пространство таких симметричных матриц с положительно определенной мнимой частью $\mathrm{Im}T$, известное как «верхнее полупространство Зигеля» Sieg_p, имеет комплексную размерность $p(p + 1)/2$, которая для $p = 2, 3$ совпадает с комплексной размерностью $3p - 3$ пространства модулей $\mathfrak{M}_p$, а для p = 4 превышает ее на единицу (совпадение имеет место также и в случае $p = 1$, который мы не рассматриваем как хорошо и давно изученный [4,5]). Согласно теореме Торелли [38], пространство $\mathfrak{M}_p$ аналитически вкладывается в Sieg_p, и совпадение размерностей позволяет использовать T_{ij} как локальные координаты на $\mathfrak{M}_p$. В случае же рода $p = 4$ $\mathfrak{M}_4$ является комплексным подпространством коразмерности один в Sieg_4 и может рассматриваться как дивизор. Сопоставление матрицы периодов T_{ij} римановой поверхности неоднозначно из-за произвола в выборе канонического базиса циклов $\{A_i, B_j\}$. Произвол отражается в модулярных преобразованиях $T \to (aT + b)/(cT + d)$, где $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}\,(p, \mathbb{Z})$, и для $p = 2, 3$ $\mathfrak{M}_p$ можно отождествить с $\mathrm{Sieg}\,(p, \mathbb{Z})$. Мера Полякова на $\mathfrak{M}_p$ в этих случаях может быть записана в терминах T_{ij}, но обязана быть модулярно-, т.е. $\mathrm{Sp}\,(p, \mathbb{Z})$-, инвариантной.

В обсуждаемой ситуации $\Pi dy = \prod_{i<j} dT_{ij}$ не является модулярным инвариантом, инвариантно отношение $\left|\prod_{i\le j}^{p} dT_{ij}\right|^2/(\det \operatorname{Im} T)^{p+1}$. Если в качестве нулевых мод оператора $\bar\partial_1$ выбрать канонические 1-дифференциалы, то $\det N_1 = \det_{(ij)} \int \omega_i \overline{\omega}_j \sim \det \operatorname{Im} T$, и требование модулярной инвариантности меры Полякова (7) означает, что голоморфное по модулям выражение $\chi_{12-p}(T)$ $(\partial\chi_{12-p}/\partial\overline{T} = 0)$ в формуле

$$d\mu_p = \prod_{i\le j}^{p} dT_{ij}/\chi_{12-p}(T) \tag{8}$$

для меры Мамфорда должно быть модулярной формой веса $12 - p$, т.е.

$$\left|\chi_{12-p}\left(\frac{aT+b}{cT+d}\right)\right|^2 = \left|\det(cT+d)^{12-p}\chi_{12-p}(T)\right|^2,$$

чтобы $|\chi_{12-p}(T)|$ $(\det \operatorname{Im} T)^{12-p}$ было модулярно-инвариантно. Тем самым для случаев $p = 2$, 3 задача нахождения меры Полякова сводится к построению модулярных форм нужного веса. Они могут быть выражены через соответствующие тета-константы с полуцелыми четными характеристиками:

$$\text{род } p = 2\,[26-28]:\quad \chi_{10}(T) = \prod_{\text{even } e}^{10} \theta_e^2(0|T); \tag{9}$$

$$\text{род } p = 3\ [26]:\quad \chi_9^2(T) = \prod_{\text{even } e}^{36} \theta_e(0|T). \tag{10}$$

Количество четных полуцелых характеристик равно $2^{p-1}(2^p + 1)$. При модулярных преобразованиях тета-константы преобразуются друг через друга. Помимо изменения характеристики и появления фазового множителя, при модулярном преобразовании каждая тета-константа домножается на $[\det(cT+d)]^{1/2}$. Легко проверить, что произведения в правых частях (9) и (10) образуют модулярные формы веса 10 и 18 для $p=2$ и $p=3$ соответственно. В случае рода $p=2$ все входящие в произведение (9) тета-константы отличны от нуля при T, отвечающих внутренним точкам пространства модулей. Убедиться в этом можно следующим образом. Прежде всего, справедливо соотношение [19,29]:

$$\det{}_e\,\bar\partial_{1/2}(\det\bar\partial_0)^{1/2} = \theta_e(0|T). \tag{11}$$

Согласно этому соотношению тета-константа обращается в нуль тогда и только тогда, когда у $\bar{\partial}_{1/2}$ имеются нулевые моды с подходящими граничными условиями, т.е. когда на римановой поверхности имеются голоморфные $(1/2)$-дифференциалы с θ-характеристикой e. В соответствии с теоремой Римана о нулях число таких дифференциалов имеет ту же четность, что и тета-характеристика e (четностью полуцелой тета-характеристики $e = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_p \\ \varepsilon_1 \cdots & \varepsilon_p \end{bmatrix}$ называется число $\sum_i^p \delta_i \varepsilon_i \pmod 2$). Поэтому для обращения в нуль θ-константы с четной характеристикой необходимо, чтобы на римановой поверхности было бы не менее двух голоморфных $(1/2)$-дифференциалов. Каждый из них имеет при этом $2j(p-1)|_{j=1/2} = p-1$ нулей на поверхности, а отношение двух дифференциалов является мероморфной функцией с $p-1$ полюсами. Римановы поверхности, на которых существуют функции с одним простым полюсом, эквивалентны сфере, т.е. имеют род нуль; если имеется функция с двумя полюсами, то она описывает поверхность как двойное накрытие римановой сферы, т.е. поверхность является гиперэллиптической, и т.д. (Мероморфная функция общего положения на поверхности рода $p \neq 2$ имеет не менее $p+1$ нулей.) Это рассуждение доказывает, что правая часть (9) не имеет нулей внутри пространства модулей. К случаю $p = 3$ мы вернемся ниже. На границах пространства модулей $\mathfrak{M}_2$ происходит следующее. Если $T_{12} \to 0$, то в точности одна четная тета-константа обращается в нуль, причем этот нуль - первого порядка:

$$\theta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}(0|T) = T_{12}\,\theta'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(0|T_{11})\,\theta'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(0|T_{22}) + O(T_{12}^3),$$

а χ_{10} имеет двойной нуль, как и требуется. При $T_{11} \to i\infty$ правильной переменной на пространстве модулей является $q_{11} = \exp(2\pi i T_{11})$, и легко проверить, что χ_{10} имеет нуль первого порядка при $q_{11} = 0$. Кроме того, $dT_{11}dT_{12}dT_{22} \sim dq_{11}/q_{11}$; $\det \operatorname{Im} T \sim lg\,|q_{11}|$. Эти асимптотические формулы обеспечивают согласие с теоремой Белавина - Книжника [19]. Анализ формулы для $p = 3$ аналогичен. Единственная разница состоит в том, что χ_9 имеет нули не только на границах, но и внутри пространства модулей $\mathfrak{M}_3$. Согласно рассуждению, приведенному после формулы (11), эти нули находятся на гиперэллиптическом дивизоре в $\mathfrak{M}_3$. Пространство модулей гиперэллиптических поверхностей имеет комплексную размерность $2p-1$, т.е. коразмерность 1 в $\mathfrak{M}_3$. В соответствии с (10) χ_9^2 имеет двойной нуль на этом дивизоре (из-за двух нулевых фермионных мод), а χ_9 имеет простой нуль. Этот нуль, однако, компенсируется нулем меры $\prod_{i \leq j}^{3} dT_{ij}$, записанной в правильных координатах на пространстве $\mathfrak{M}_3$. Соотношение между T_{ij} и координатами y_α на $\mathfrak{M}_p$, связанными с $(1, -1)$-дифференциалами Бельтрами η_α, задается формулой

$$\partial T_{ij}/\partial y_\alpha = \int \eta_\alpha \omega_i \omega_j . \tag{12}$$

Утверждение об отсутствии у меры Мамфорда нулей внутри $\mathfrak{M}_p$ справедливо в координатах y_α, связанных с дифференциалами Бельтрами $\eta_\alpha = \{N_2^{-1} \cdot \bar{f}\}_\alpha / \rho + \bar{\partial}\varepsilon_\alpha$ (ρ - метрика в конформной калибровке, f_α - базис голоморфных квадратичных дифференциалов, ε_α - векторные поля). На гиперэллиптической поверхности, заданной уравнением

$$y^2 = \prod_{j}^{2p-1} (x - a_j), \tag{13}$$

голоморфные квадратичные дифференциалы имеют вид (подробности про гиперэллиптические поверхности см. в п.1.2):

$$f_{1\mu} = x^{\mu - 1}(dx)^2/y^2(x), \quad \mu = 1,\ldots,2p-1; \tag{14}$$

$$f_{2\mu} = x^{\mu - 1}(dx)^2/y(x), \quad \mu = 1,\ldots,p-2. \tag{15}$$

В то же время канонические линейные голоморфные дифференциалы ω_i являются линейными комбинациями 1-дифференциалов вида

$$v_i = x^{i-1}dx/y(x), \quad i = 1,\ldots,p. \tag{16}$$

Из этих формул следует, что v_i нечетны относительно Z_2-преобразований симметрии гиперэллиптической поверхности $y \to -y$; $f_{1\mu}$ - четны, а $f_{2\mu}$ - нечетны. По этой причине интегралы в правой части (12), отвечающие $f_{2\mu}$, обращаются в нуль (подынтегральные выражения Z_2 - нечетны). Таким образом, для $p = 3$ якобиан перехода от T_{ij} к y_α имеет нуль первого порядка на гиперэллиптическом дивизоре пространства модулей, компенсирующий такой же нуль χ_9 в формуле для меры Мамфорда. Асимптотики на границе пространства модулей исследуются так же, как и в случае $p = 2$.

Начиная с $p = 4$, пространство Sieg_p матриц периодов (по модулю $\mathrm{Sp}(p, \mathbb{Z})$-преобразований) не совпадает с пространством модулей $\mathfrak{M}_p$. Для

$p = 4$ их комплексные размерности отличаются только на единицу, и $\mathfrak{M}_4$ можно рассматривать как дивизор (дивизор Шоттки) в пространстве Sieg_4. Этот дивизор задается уравнением Шоттки

$$\chi_8(T) = 0, \tag{17}$$

где

$$\chi_8(T) \equiv 2^{-p} \sum_e \theta_e^{16}(0|T) - 2^{-2p}\Big[\sum_e \theta_e^8(0|T)\Big]^2 \tag{18}$$

- модулярная форма веса 8. (По-видимому, форма (18) тождественно равна нулю на всех пространствах модулей $\mathfrak{M}_p$ (но не Sieg_p!), это обстоятельство существенно, в частности, для идентичности моделей $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ и Γ_{16}-струн.) Для меры Полякова при $p = 4$ в [19,46] было предложено выражение

$$\left| \mathrm{res} \, \frac{\prod\limits_{i<j}^{4} dT_{ij}}{\chi_8} \right|^2 (\det \mathrm{Im}\, T)^{-13}. \tag{19}$$

Исчерпывающий анализ этой формулы в литературе пока отсутствует.

1.2. Вычисления в гиперэллиптическом случае. Вывод явных формул для меры Мамфорда в случае $p > 4$ затруднен отсутствием во всех отношениях удачной параметризации пространства модулей $\mathfrak{M}_p$. Проблема хорошо видна на примере детерминантных формул Книжника [29]. Их недостаток в том, что в формулы входят как тета-функции, так и классы Римана $\Delta = \Sigma \mathbf{R}_i$. Эти два класса объектов не независимы - они связаны теоремой Римана о нулях, - и в этом смысле формулы получаются не вполне явными - это скорее формулы с соотношениями. В п.1.1 мы показали, как в простых случаях $p \leq 4$ можно преодолеть эту трудность, параметризуя пространство модулей не точками R_i, а матрицами периодов и вообще не используя прямо детерминантных формул из [29,45,175]. В случае произвольного p такой путь закрыт. Если же использовать параметризацию $\mathfrak{M}_p$ с помощью R_i, то надо избавиться от явного присутствия тета-функций в формулах для меры Мамфорда. Точки R_i естественно возникают при описании римановой поверхности как разветвленного накрытия над сферой Римана. Возможен независимый вывод детерминантных формул на основе такого описания [49,175]. Можно и непосредственно проследить за «исчезновением» тета-функций из формул [29]. К сожалению, в полной общности задача до сих пор не решена. Исчерпывающие ответы получены в случае так называемых абелевых N-

листных накрытий римановой сферы, обладающих Z_N-симметрией. Простейшим примером такого типа являются гиперэллиптические поверхности, $N = 2$. Здесь мы следует работам [37, 48]. Техника гиперэллиптических вычислений разрабатывалась также в [49, 50] и многочисленных последующих публикациях.

Детерминантные формулы для $\Lambda_j \equiv (\det'\partial_0)^{1/2}\det'\partial_j$, следующие из выражений [54] для корреляторов b-, c-полей, имеют вид [29]:

$$\Lambda_0 = \theta^*_{,i}\,\hat{\omega}_i''(R_1)/\det[\hat{\omega}_i''(R_1)\,\hat{\omega}_i(R_1)\ldots\hat{\omega}_i(R_{p-1})]; \tag{20а}$$

$$\begin{gathered}\Lambda_2 = \theta^*_{,i}\hat{\omega}_i''(R_1)/\det\,[\hat{f}_\alpha(R_1)\hat{f}_\alpha''(R_1)\hat{f}_\alpha'''(R_1)\hat{f}_\alpha(R_2)\hat{f}_\alpha'(R_2)\hat{f}_\alpha''(R_2)\ldots\\ \ldots\hat{f}_\alpha(R_{p-1})\hat{f}_\alpha'(R_{p-1})\hat{f}_\alpha''(R_{p-1})];\end{gathered} \tag{20б}$$

$$\Lambda_{1/2}[e] = \theta[e]; \tag{20в}$$

$$\Lambda_{3/2}[e] = \theta[e]/\det_{(\mu j)}[\hat{\zeta}_\mu(R_j)\,\hat{\zeta}_\mu'(R_j)]. \tag{20г}$$

Из-за аномалий формулы для отдельных детерминантов с необходимостью содержат дополнительную зависимость от метрики (а не только комплексной структуры) и выбора координат на поверхности. При удачном выборе метрики эта информация может быть сведена к минимуму: если метрика является квадратом модуля голоморфного 1-дифференциала, то в ответ входят только его нули (сингулярности метрики, их число равно $2p-2$). В (20) метрика $\rho = |\theta^*_{,i}\,\omega_i|^2$ построена по голоморфному 1-дифференциалу $\nu_*^2 \equiv \sum_{i=1}^{p}\theta^*_{,i}\,\omega_i$ с двойными нулями в точках $R_1,\ldots,R_{p-1}$; $\theta^*_{,i}\,\omega_i(R_k) = \theta^*_{,i}\,\omega_i'(R_k) = 0$. Величина θ^* - это тета-функция на поверхности с какой-то несингулярной нечетной характеристикой e_*, $\theta^*_{,i}$ - ее производная по i-му аргументу в нуле:

$$\theta^*_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial z_i}\theta[e_*](z_1\ldots z_p|T)\Big|_{z_1=\ldots=z_p=0}.$$

Зависимость от e_* (и от метрики ρ вообще) должна сокращаться в безаномальных комбинациях типа $\Lambda_2\Lambda_0^{-9}$ или $\Lambda_2\Lambda_0^{-5}\Lambda_{-1/2}^5\Lambda_{3/2}^{-1}$, входящих в выражения для меры Мамфорда и ее суперaналога. Наконец, в соответствии с общим смыслом детерминанта несамосопряженного оператора [42] он зависит от выбора базиса в пространстве нулевых мод самого оператора и его сопряженного. В случае операторов $\bar{\partial}_j$ эти нулевые моды - голоморфные j- и $(1-j)$-дифференциалы. Поэтому в формулы (20) входят голоморфные 1-дифференциалы $\omega_1 \ldots \omega_p$; голоморфные 2-дифференциалы $f_1 \ldots f_{3p-3}$; голоморфные (3/2)-дифференциалы $\zeta_1 \ldots \zeta_{2p-2}$. Мы предполагаем для простоты, что граничные условия на полуцелые дифференциалы таковы, что голоморфные (1/2)-дифференциалы отсутствуют (тета-характеристика e несингулярна). Отметим, что только число голоморфных (1/2)-дифференциалов не определяется однозначно теоремой об индексе (Римана - Роха) в сочетании с теоремой об отсутствии голоморфных j-дифференциалов с $j < 0$ на римановых поверхностях рода $p > 1$. Вычеты дифференциалов обозначены шляпками, а их производные - штрихами. Если ξ - локальная координата в окрестности точки ξ_0, то $\omega(\xi) = [\widehat{\omega}(\xi_0) + (\xi - \xi_0)\, \widehat{\omega}'(\xi_0) + \ldots]d\xi$ и т.п. Последний комментарий к обозначениям: буквой ω всегда будут обозначаться канонические 1-дифференциалы, нормированные условиями $\oint_{A_i} \omega_j = \delta_{ij}$.

Как уже говорилось, применение формул (20) затруднено тем, что в них явно входят многочисленные голоморфные дифференциалы и точки R_k, информация о которых в случае римановых поверхностей общего рода недостаточна. Все эти объекты, однако, легко построить, если риманова поверхность задана явно. Важным классом таких поверхностей являются гиперэллиптические поверхности, определенные уравнением

$$y^2(x) = \prod_{n=1}^{2p+2} (x - a_n). \tag{21}$$

Цель этого пункта – анализ формул (20) в случае гиперэллиптических поверхностей. В наши цели не входит установление числового множителя перед корреляторами, зависящего только от рода (от топологии), поэтому на протяжении всего параграфа равенства подразумеваются выполненными только с точностью до подобных множителей. Гиперэллиптические поверхности образуют $(2p-1)_{\mathbb{C}}$ -мерное подпространство $\mathfrak{D}_p^H$ в $\mathfrak{M}_p$, которое совпадает со всем пространством модулей только для $p = 1{,}2$ (т.е. все римановы поверхности гиперэллиптичны только для родов $p = 1{,}2$). Однако и при $p \geq 3$ ограничения струнных мер на $\mathfrak{D}_p^H$ могут представлять интерес. По поводу обобщений на абелевы Z_N-накрытия см. [49,50], о попытках исследования поверхностей общего вида в аналогичных терминах см. [175].

Голоморфные 1-дифференциалы. Будем считать, что поверхность задана уравнением (21). Римановой поверхностью этого уравнения является совокупность двух римановых сфер, склеенных по $(p+1)$-разрезам, проведенным между точками ветвления: например, от a_1 к a_2, от

a_3 к a_4,..., от a_{2p+1} к a_{2p+2}. Очевидно, что гиперэллиптическая поверхность, полученная в результате такого склеивания, имеет p ручек, т.е. является поверхностью рода p. Параметр x является координатой в окрестности любой конечной точки, не совпадающей ни с одной из точек ветвления a_n. Вблизи a_n локальным параметром оказывается $\xi = \sqrt{x - a_n}$. Наконец, вблизи бесконечно удаленных точек локальная координата равна $\xi = 1/x$, если все $a_n \neq \infty$, и $\xi = 1/\sqrt{x}$, если какая-то $a_n = \infty$. Ниже будем считать, что все $a_n \neq \infty$. Тогда 1-дифференциал dx имеет простые нули во всех точках a_n и двойные полюса в двух бесконечно удаленных точках (на двух листах римановой поверхности). Функция $y(x)$ также имеет простые нули во всех a_n и полюса порядка $p + 1$ на бесконечности. Поэтому $v_j(x) \equiv x^{j-1}dx/y(x)$ при $1 < j < p$ являются голоморфными дифференциалами – не имеют полюсов на всей гиперэллиптической поверхности. Однако p голоморфных 1-дифференциалов $v_1,...,v_p$ не совпадают с каноническими $\omega_1,...,\omega_p$; вместо этого имеется линейное соотношение: $v_i = \sigma_{ij}\,\omega_j$ и $\sigma_{ij} = \oint_{A_j} v_i$. Интеграл по римановой поверхности

$$\int \omega_i \overline{\omega}_j = \sum_{k=1}^{p} \left(\oint_{A_k} \omega_i \oint_{B_k} \overline{\omega}_j - \oint_{B_k} \omega_i \oint_{A_k} \overline{\omega}_j \right) = -2i\, \mathrm{Im} T_{ij},$$

поэтому $\det \mathrm{Im} T \sim \det_{(ij)} \int \omega_i \overline{\omega}_j$. Точно так же

$$G \equiv |\det \sigma|^2 \det \mathrm{Im} T \sim \det_{(ij)} \int v_i \bar{v}_j = \frac{1}{p!} \int \ldots \int \Big| \prod_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{p} (x_i - x_j) \prod_{i=1}^{p} \frac{dx_i}{y(x_i)} \Big|^2. \tag{22}$$

θ-характеристики и спинорные структуры [39,40]. Каждой римановой поверхности могут быть сопоставлены 2^{2p} полуцелые θ-характеристики. Каждая θ-характеристика e – это пара p-векторов $\delta =$ $= (\delta_1 \ldots \delta_p)$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p)$, составленных из чисел 0 и 1. θ-характеристике (не обязательно полуцелой) соответствует θ-функция

$$\theta[e](z|T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \exp\Big\{ i\pi \sum_{i,j=1}^{p} (n + \delta/2)_i T_{ij} (n + \delta/2)_j + \\ + 2\pi i \sum_{i=1}^{p} (n + \delta/2)_i (z + \varepsilon/2)_i \Big\}. \tag{23}$$

Полуцелые θ-характеристики разделяются на четные и нечетные, в зависимости от четности функции $\theta[e](z)$ или, что то же самое, от четности суммы $\sum_{i=1}^{p} \delta_i \varepsilon_i$. Имеется $2^{p-1}(2^p+1)$ четных и $2^{p-1}(2^p-1)$ нечетных θ-характеристик. При модулярных преобразованиях $T \to (aT+b)/(cT+d)$ θ-функции с характеристиками одинаковой четности преобразуются друг через друга. Для теории струн θ-характеристики интересны прежде всего тем, что они находятся во взаимно однозначном соответствии с граничными условиями на фермионные поля - полуцелые дифференциалы. В случае гиперэллиптических поверхностей имеется дополнительная связь полуцелых θ-характеристик с точками ветвления (для N-листных накрытий аналогичная связь появляется у $1/N$-характеристик). Каждое разбиение $2p+2$ точек ветвления на два множества по $p+1$ точке сопоставляется одной из $\frac{1}{2} C_{2p+2}^{p+1} = (2p+2)!/2[(p+1)!]^2$ четных θ-характеристик, которые называются несингулярными (индекса 0). Разбиение на два множества из $p-1$ и $p+3$ точек определяет одну из C_{2p+2}^{p-1} «несингулярных» нечетных θ-характеристик (индекса 1). Все остальные θ-характеристики называются сингулярными и сопоставляются разбиениям точек ветвления на множества из $p+1-2m$ и $p+1+2m$ элементов, причем для четных «индексов» m θ-характеристики четные, а для нечетных m - нечетные. Полное число нечетных характеристик равно

$$\sum_{\substack{\text{нечетное } m \\ 1 \le m \le (p+1)/2}} C_{2p+2}^{p+1-2m} = 2^{p-1}\,(2^p-1), \tag{24}$$

а четных -

$$\frac{1}{2} C_{p+2}^{p+1} + \sum_{\substack{\text{четное } m \\ 1 \le m \le (p+1)/2}} C_{2p+2}^{p+1-2m} = 2^{p-1}\,(2^p+1). \tag{25}$$

Связь θ-характеристик с разбиением точек ветвления устанавливается через θ-константы: значения θ-функций и их производных по z в нуле, z = 0. (Мы будем обозначать их просто $\theta[e]$; $\theta_{,i}[e]$; $\theta_{,ij}[e]\ldots$) В случае четных характеристик все нечетные производные в нуле обращаются в нуль для любых матриц периодов (так как $\theta(z)$ - четная функция), в случае нечетных характеристик обращаются в нуль все нечетные производные в нуле. На подпространстве $\mathfrak{D}_p^H$ гиперэллиптических поверхностей в пространстве модулей $\mathfrak{M}_p$ отличны от нуля не все четные θ-константы $\theta[e]$, а только те, которые отвечают несингулярным характеристикам. Вообще для θ-характеристики индекса m впервые отлична от нуля только

m-я производная $\left|\theta_{,i_1,\ldots,i_m}[e]\right|_{\mathfrak{D}_p^H}$. Сингулярные θ-характеристики появляются при $p \geq 3$, когда $\mathfrak{D}_p^H$ перестает совпадать со всем пространством модулей $\mathfrak{M}_p$.

Пусть несингулярная четная θ-характеристика e отвечает разбиению точек ветвления на два множества из $p+1$ элементов $\{a_q\}$ и $\{a_{\tilde{q}}\}$. Тогда справедлива формула Тома:

$$\left|\theta[e]^4\right|_{\mathfrak{D}_p^H} = \det\sigma^2 \prod_{q<r}(a_q - a_r)\prod_{\tilde{q}<\tilde{r}}(a_{\tilde{q}} - a_{\tilde{r}}). \tag{26}$$

Аналогичные представления существуют во всех остальных случаях: для всех $\left|\theta_{,i_1,\ldots,i_m}[e]\right|_{\mathfrak{D}_p^H}$ индекса m. Нам потребуется еще выражение в случае несингулярной нечетной характеристики e_*. Ей соответствует набор $p-1$ точек из $2p+2$ точек ветвления. Эти точки - в точности двойные нули $R_1^*,\ldots,R_{p-1}^*$ 1-дифференциала:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta^*_{,i}\omega_i(z) = c\prod_{k=1}^{p-1}(z - R_k^*)\frac{dz}{y(z)};\\
&c^4 = \det\sigma^4\prod_{m<n}^{2p+2}(a_m - a_n)\prod_{k<1}^{p-1}(R_k^* - R_l^*)\prod_{k}^{p-1}\hat{y}(R_k^*)^{-2};\\
&\hat{y}(R_k^*)^2 = \prod_{n\neq k}^{2p+2}(R_k^* - a_n).
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Интегрированием вдоль цикла A_i отсюда легко найти [177], что

$$\theta^*_{,i} = c\sum_{k=0}^{p-1}(-)^k S_k\{R\}\sigma_{p-k,i}. \tag{28}$$

Здесь $\sigma_{p-k,\,i} = \int\limits_{A_i} \nu_{p-k}$, а $S_k\{R\}$ - симметрический полином k-й степени, составленный из точек R: $S_0 = 1$, $S_1 = \sum\limits_k R_k$, $S_2 = \sum\limits_{k<l} R_k R_l \ldots$

Перейдем теперь к вычислению выражения (20а). Числитель в этой формуле уже известен из (27). Детерминант в знаменателе равен:

$$(\det\sigma)^{-1}\det[\nu_i(z)\hat{\nu}_i(R_1)\ldots\hat{\nu}_i(R_{p-1}] =$$
$$= (\det\sigma)^{-1}\frac{dz}{y(z)}\left[\det[z^{i-1}, R_1^{i-1},\ldots,R_{p-1}^{i-1}]/\prod_k^{p-1}\hat{y}(R_k)\right]. \tag{29}$$

Оставшийся в числителе определитель Ван-дер-Монда равен $\prod_{k<l}(R_k - R_l)\prod_k(z - R_k)$. Поэтому

$$\Lambda_0 = c(\det\sigma)\left[\prod_k\hat{y}(R_k)/\prod_{k<l}(R_k - R_l)\right] =$$
$$= (\det\sigma)^{3/2}\Pi(a)^{1/4}\Pi(R)^{-1/2}Y(R)^{1/2}. \tag{30}$$

Здесь введены удобные сокращенные обозначения:

$$\Pi(a) = \prod_{m<n}^{2p+2}(a_m - a_n);\ \ \Pi(R) = \prod_{k<l}^{p-1}(R_k - R_l);\ \ Y(R) = \prod_k^{p-1}\hat{y}(R_k);$$

$$c = (\det\sigma)^{1/2}\,\Pi(a)^{1/4}\,\Pi(R)^{1/2}Y(R)^{-1/2}.$$

Для вычисления Λ_2 необходимо еще знать базис голоморфных квадратичных дифференциалов, ассоциированный с точками ветвления как координатами на пространстве модулей. Точнее, в качестве координат $y_1,\ldots,y_{2p-1}$ выберем $a_1,\ldots,a_{2p-1}$ (вариации остальных модулей $y_{2p},\ldots,y_{3p-3}$ выводят из подпространства гиперэллиптических кривых в пространстве модулей), три точки $a_{2p} = a'$, $a_{2p+1} = a''$, $a_{2p+2} = a'''$ считаем фиксированными (за их изменение отвечают дробно-линейные преобразования координат). Правильные линейные комбинации квадратичных дифференциалов $\tilde{f}_\alpha = z^{\alpha-1}dz^2/y^2(z)$, $\alpha = 1,\ldots,2p-1$, отвечающих изменениям модулей с сохранением гиперэллиптичности (нарушают ее сдвиги, связанные с $F_\gamma = z^{\gamma-1}dz^2/y(z)$, $\gamma = 1,\ldots,p-2$), имеют вид

$$f_\alpha = \frac{dz^2(a_\alpha - a')(a_\alpha - a'')(a_\alpha - a''')}{(z - a_\alpha)(z - a')(z - a'')(z - a''')}. \tag{31}$$

Один из способов убедиться в справедливости этой формулы опирается на общее соотношение [19,48]

$$\partial T_{ij}/\partial y_\alpha = \int\eta_\alpha\,\omega_i\,\omega_j \tag{32}$$

и элементарную формулу

$$\partial T_{ij} / \partial a_\alpha = \hat{\omega}_i (a_\alpha) \hat{\omega}_j (a_\alpha) \tag{33}$$

В результате для Λ_2, определенной формулой (20б), имеем

$$\Lambda_2 = (\det \sigma)^{1/2} \Pi(a)^{-3/4} \Pi(R)^{-1/2} Y(R)^{1/2} \times \\ \times (a' - a'')(a'' - a''')(a''' - a'), \tag{34}$$

а для меры Мамфорда

$$d\mu^{(p)}_{\mathrm{boz}} \big| \mathfrak{D}^H_p = \Lambda_0^{-9} \Lambda_2 \prod_\alpha^{3p-3} dy_\alpha = (\det\sigma)^{-13} \Pi(a)^{-3} \Big(\prod_{n=1}^{2p+2} da_n / d\Omega \Big) dV_\perp . \tag{35}$$

Здесь

$$d\Omega = \frac{da' da'' da'''}{(a' - a'')(a'' - a''')(a''' - a')},$$

а $dV_\perp = \prod\limits_{\alpha=2p}^{3p-3} dy_\alpha$ - мера на ортогональном к $\mathfrak{D}^H_p$ подпространстве в пространстве модулей. Подробный вывод (32) - (35), а также выражений для $\Lambda_{1/2}$ и $\Lambda_{3/2}$ на $\mathfrak{D}^H_p$ см. в [48]. О формулировке тождеств Римана в гиперэллиптическом случае и их полезных обобщений как полиномиальных тождеств для точек ветвления a_α см. [37,178].

1.3. Компактификация на тор и на орбифолд (случай $p = 1$). Лагранжиан $\partial X \bar{\partial} X$ для скалярного поля X допускает еще наложение различных дополнительных условий на глобальное поведение этого поля. До сих пор мы рассматривали случай, когда такие условия отсутствуют и поле X принимает значения в некомпактной прямой $\mathbb{R}$. Представляют интерес, однако, и другие случае, когда вместо прямой берется окружность, луч или отрезок. В общем случае многокомпонентного скалярного поля X^μ это может быть интерпретировано как модель струны, компактифицированной на тор или орбифолд.

Наиболее известен анализ компактификации на тор, проведенный в [30] при изучении «бозонизации» b-, c-систем. Это тривиальное вычисление было независимо проделано многими другими авторами. Ниже следуем работе [56]. Функциональный интеграл для случая торической компактификации содержит дополнительную $2p$-кратную сумму по решетке $\Gamma^{(D)}$, задающей торическую структуру в размерности $D \leq d = 26$. В соответствии с этим необходимо учесть вклады различных секторов, отличающихся результатами обхода по $2p$ нестягиваемым циклам на мировом листе. Поле X^α, $\alpha = 1, \ldots, D$, в данном секторе имеет вид

$$X^\alpha(z,\bar z) = \tilde X^\alpha(z,\bar z) + \tag{36}$$
$$+ (2i)^{-1}[\,(\Lambda^\alpha_{1j} - \Lambda^\alpha_{2i}\bar T_{ij})(1/\mathrm{Im}T)_{jk}\int^z \omega_k - (\Lambda^\alpha_{1j} - \Lambda^\alpha_{2i}T_{ij})(1/\mathrm{Im}T)_{jk}\int^{\bar z}\bar\omega_k]\,.$$

Здесь $\tilde X$ - периодическое (квантовое) поле, а классическое ("инстантонное") решение определяется заданием $2p$ векторов Λ_{1i}, Λ_{2i}, $i = 1,\ldots,p$, принимающих значения в $\Gamma^{(D)}$. В результате двумерное действие приобретает вид

$$\int \partial X^\alpha \bar\partial X^\alpha = \int \partial \tilde X^\alpha \bar\partial \tilde X^\alpha + \frac{1}{4}(\Lambda^\alpha_{1j} - \Lambda^\alpha_{2i}\bar T_{ij})(1/\mathrm{Im}T)_{ik}\,(\Lambda^\alpha_{1k} - \Lambda^\alpha_{2l}T_{lk})$$

(перекрестные члены отсутствуют из-за периодичности $\tilde X$), и мера на пространстве модулей, отвечающая торической компактификации, содержит дополнительный ("инстантонный") фактор

$$\mathfrak{F}^{(p)}_\Gamma = \sum_{\Lambda_{1i},\Lambda_{2i}\in\Gamma} \exp\left\{-\pi(\Lambda_1 - \Lambda_2\bar T)(1/\mathrm{Im}T)(\Lambda_1 - \Lambda_2 T)\right\}. \tag{37}$$

После фурье-преобразования по переменным $\Lambda_1 \to M$ (известного еще как преобразование Пуассона) из (37) получаем:

$$\mathfrak{F}^{(p)}_\Gamma = (\det \mathrm{Im}T)^{D/2} \sum_{\substack{\Lambda_i\in\Gamma\\ M_i\in\Gamma^*}} \exp\left\{\frac{i\pi}{2}(M+\Lambda)T(M+\Lambda)\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{i\pi}{2}(M-\Lambda)\bar T(M-\Lambda)\right\}. \tag{38}$$

Зависимость от модулей в инстантонном факторе сводится к зависимости от матриц периодов, поэтому (38) может быть переписано в виде билинейной комбинации решеточных θ_Γ-функций. В случае четных самодуальных решеток эта комбинация содержит конечное число слагаемых. Множитель перед знаком суммы в (38) частично сокращает $(\det \mathrm{Im}T)^{-d/2}$ в мере Полякова, в согласии с требованием факторизации - степень логарифмической (дилатонной) сингулярности на границе пространства модулей определяется числом $d - D$ некомпактифицированных измерений [19]. (Дальнейшие подробности см. в [56].)

Следуя [57], опишем кратко новые элементы, возникающие при компактификации на орбифолд (ограничиваясь случаем абелева орбифолда и рода $p=1$). На этот раз пространство значений поля X получается факторизацией $\mathbb{R}^D$ по действию аффинной группы преобразований S:

$$S\circ X = (g,\lambda)\circ X = gX + \lambda\,,\ \ \lambda \in \Gamma^D,\ \ g \in G \subset O(D). \tag{39}$$

Умножение в группе S задается очевидным образом:

$$s_1 \circ s_2 = (g_1, \lambda_1)\circ(g_2, \lambda_2) = (g_1 g_2, g_1\lambda_1 + \lambda_2),$$

т.е. S есть полупрямое произведение стационарной подгруппы G и подгруппы трансляций. Если группа G конечна, то ее элементы имеют конечный порядок. Предположим, что исходное пространство полей X четно-мерно и эквивалентно $\mathbb{C}^{D/2}$, а $G \subset SU(D/2)$. Рассмотрим преобразования, порожденные фиксированным элементом g порядка h: $g, g^2,\dots,g^h = 1$. В некотором базисе в $\mathbb{C}^{D/2}$ они одновременно диагонализуются:

$$g^k = \varepsilon^k = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_1^k,\dots,\varepsilon_{D/2}^k),\ \ k = 1,\dots,h. \tag{40}$$

Здесь

$$\varepsilon_\mu = \exp\left(\frac{2\pi i}{h}\,m_\mu\right),\quad \sum_{\mu=1}^{D/2} m_\mu = 0\ (\mathrm{mod}\ h). \tag{41}$$

Последнее равенство - следствие принадлежности g группе $SU(D/2)$.

Рассмотрим однопетлевые конфигурации замкнутой бозонной струны, лежащей на орбифолде. Тогда

$$X(z+1) = g_1X(z) + \lambda_1,\ \ X(z+\tau) = g_2X(z) + \lambda_2\,. \tag{42}$$

Для совместности этих граничных условий требуется, чтобы

$$[g_1, g_2] = 0,\ \ g_2\lambda_2 - \lambda_1 = g_1\lambda_2 - \lambda_2\,. \tag{43}$$

Первое из условий (43) впервые обсуждалось в [179]. Оно определяет общий вид преобразований $g_1\ g_2$: $g_1 = \varepsilon^k$, $g_2 = \varepsilon^s$, k, $s \in \mathbb{Z}(\mathrm{mod}h)$, где ε имеет вид (40). Конфигурации с $s = k = 0$ - это нетвистованный сектор, фактически разобранный в первой половине этого пункта. Остальные конфигурации образуют твистованный сектор, требующий отдельного анализа. Выделенность однопетлевого случая обусловлена уже условиями совместности (43): они имеют такой простой вид и их решения легко классифицируются только при $p = 1$. Существенно, что в твистованном секторе детерминанты операторов Лапласа отличаются от своих периодических аналогов и, в частности, зависят от s и k. В случае $p = 1$ не представляет труда явно предъявить все собственные функции и вычислить детерминанты путем перемножения собственных значений [57]. Вклад сектора с фиксированными k, s, не равными одновременно нулю, в меру на пространстве модулей отличается от случая некомпактифицированной струны множителем

$$(\operatorname{Im}\tau)^{D/2}\prod_{\mu=1}^{D/2}\frac{\eta^3(q)\exp\left[-i\pi(km_\mu/h)^2\tau\right]}{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_\mu(k,s;\tau)|\tau)}, \tag{44}$$

где $u_\mu(k, s; \tau \equiv (k\tau - s)m_\mu/h$. В многопетлевом случае для анализа простейшего Z_2-орбифолда необходимо использовать технику многообразий Прима (см. [58]) и ее дальнейшее обобщение для Z_n-орбифолдов [59]. Техника многопетлевых вычислений для неабелевых орбифолдов до сих пор не развита. Эта проблема тесно связана с разработкой теории свободных полей на римановых поверхностях, заданных как разветвленные накрытия над CP^1 (гиперэллиптический случай описан в п.1.2, случай других абелевых Z_n-накрытий - в [49,50]). По поводу значения такого представления для развития теории струн см. например, гл.12 обзора В.Книжника [175].

1.4. β-, γ-поля на римановых поверхностях. На римановых поверхностях могут быть определены три существенно различных теории безмассовых свободных полей. Две из них очевидны: свободное скалярное поле с лагранжианом $\partial\phi\bar{\partial}\phi$, один раз безо всяких дополнительных ограничений, другой - принимающее значения в окружности радиуса r, т.е. связанное условием эквивалентности $\phi \sim \phi + 2\pi r$. Вторая из этих теорий, в частности, достаточна для описания b-, c-систем - грассмановых полей j- и $(1 - j)$-дифференциалов с лагранжианом первого порядка $b\bar{\partial}c$. (Можно выделить еще случай, когда ϕ принимает значения в луче или отрезке. Фактически - это компактификация на орбифолд, упоминавшаяся в п.1.3.) Третья теория свободных полей более сложная. Она описывает бозонные поля j- и $(1-j)$-дифференциалов с лагранжианом первого порядка $\beta\bar{\partial}\gamma$. Эти поля были впервые введены Д.Фриданом, Э.Мартинеком и С.Шенкером [60] для описания супердухов в модели суперструн NSR, позднее в [44] было выяснено, что они важны также для описания модели WZNW и других конформных моделей. Теория β-, γ-полей была разработана в [33,37,62], см. также [35,63,110]. Полный обзор всей теории свободных полей содержится в [45]. Недавно А.Герасимов [36] предложил непосредственный вывод корреляторов β-, γ-полей из функционального интеграла (т.е. определены все необходимые редукции пространства интегрирования). В этом параграфе отражен ранний этап развития теории β-, γ-полей: следуя [37], описано предложение для наиболее важного в модели NSR коррелятора, ныне строго доказанное. Рассматривается также непосредственный вывод методами [62,63] важной формулы Лехтенфельда [110], опубликованный в [111].

Согласно [60], β-, γ-поля могут рассматриваться как подсектор в теории свободного скалярного поля ϕ и b-, c-системы 0 (по традиции обозначаемой ξ, η). При этом

$$\beta = \nu_*^{2j-1}\, e^{-\phi}\partial\xi, \;\; \gamma = \nu_*^{1-2j}\, e^{\phi}\eta \tag{45}$$

(такая бозонизация предполагает фиксацию на поверхности сингулярной метрики $|\nu_*(z)|^4$ или хотя бы $|\Omega(z)|^2$ в случае полуцелого j). Для супердухов в модели NSR $j = 3/2$. (Современное понимание β-, γ-систем [36] основано на аккуратном выделении указанного подсектора.) Наиболее важный коррелятор в теории NSR (см. ниже п.2.1) имеет вид

$$G_e(x|z) = \langle\xi(x_0)\xi(x_1)\ldots\xi(x_{n_j})\gamma(x_1)\ldots\gamma(x_{n_j})\rangle_e \tag{46}$$

(при полуцелых j он зависит от спинорной структуры e), $n_j = (2j-1)(p-1)$. Как обычно происходит в двумерной теории свободных полей, основную роль при анализе этого коррелятора играют нулевые моды. Грассманово скалярное поле ξ имеет в точности одну - постоянную - нулевую моду, и она должна поглощаться одним из ξ-полей в корреляторе (46). Что касается бозонного $(1-2j)$-дифференциала (при $j > 1/2$, $p \geq 2$), то его нулевые моды приводили бы к расходимостям функционального интеграла по β-, γ-полям. Поскольку $1-2j < 0$, γ может иметь нулевые моды только из-за простых полюсов в точках $x_0,\ldots,x_{n_j}$, диктуемых операторным разложением $\xi(z)\gamma(z') \sim (z-z')^{-1}$, следующим из (45). На самом деле, одну из этих точек надо исключить, так как одно из полей ξ требуется для поглощения нулевой моды $\xi = \mathrm{const}$. В результате коррелятор (46) разбивается в сумму:

$$G_e(x|z) = \sum_{\alpha=0}^{n_j} g_e(x_0,\ldots,x_\alpha,\ldots,x_{n_j}), \tag{47}$$

и в α-м слагаемом поле γ имеет простые полюса во всех точках x, кроме x_α. Нулевая мода $\gamma_0(z)$ должна быть соответствующим мероморфным дифференциалом. Если бы точка x_α не была исключена из числа полюсов, то $\gamma_0(z) = \langle c(z)\prod_{\beta=0}^{n_j} b(x_\beta)\rangle$, где b, c - компоненты грассмановой b, c-системы с тем же спином j. В случае же (47) полюс при $z = x_\alpha$ должен отсутствовать, т.е. вычет $\langle\prod_{\beta\neq\alpha}^{n_j} b(x_\beta)\rangle = 0$. Другими словами, один из нулей

$\gamma_0(z)$ (положение которых определяется уравнением $\theta_e(\sum_{\beta=0}^{n_j} x_\beta - z - (2j-1)\Delta_* = 0)$) должен совпасть с x_α (т.е. $\theta_e(\sum_{\beta\neq\alpha}^{n_j} x_\beta - (2j-1)\Delta_*) = 0$). Таким образом, поле γ имеет нулевую моду, а коррелятор (46) сингулярен только при весьма специальном выборе точек x. Предложенный в [37] на основе изложенных аргументов ответ для $G_e(x|z)$ имеет вид

$$G_e(x|z) = \frac{\prod_{i=1}^{n_j} <c(z_i) \prod_{\beta=0}^{n_j} b(x_\beta)>_e}{\prod_{\alpha=0}^{n_j} < \prod_{\beta\neq\alpha}^{n_j} b(x_\beta)>_e}. \tag{48}$$

Корреляторы b-, c-полей известны из [29] и выражаются через θ-функции.

Основной недостаток этой формулы, являющейся центральной для многопетлевых вычислений в модели NSR, состоит в том, что она не дает компактных выражений для компонент g_e в (47). Частично этот недостаток исправляется формулой, открытой Лехтенфельдом [110] для корреляторов более общего вида:

$$\Gamma_e(x;y;z) = <\prod_{i=1}^{n} \beta(x_i) \prod_{j=1}^{n} \gamma(y_j) \prod_{k=1}^{n_j} \delta(\beta(z_k))>_e. \tag{49}$$

Вывод самого Лехтенфельда основан на анализе θ-функциональных формул для корреляторов типа (48) и не вполне убедителен. В [111] дан прямой вывод, основанный на технике [62], развитой независимо и более детально А.Лосевым [63]. Идея [63] состоит в том, что функции Грина $G_e(\ldots)$ для β-, γ- и b-, c-полей совершенно идентичны. Поэтому корреляторы операторов $e^{p\beta}$, $e^{q\gamma}$, сводящиеся к $\exp(pq \cdot G)$, легко выражаются через характеристики b-, c-системы. Исходный же коррелятор (49) получается после этого интегрированием или дифференцированием по p и q. Таким образом, легко получить

$$\Gamma_e(x;y;z) = [\det G_e(z,Q)]^{-n-1} \prod_{i,j=1}^{n} \det \begin{bmatrix} G_e(x_i, y_j) & G_e(z, y_j) \\ G_e(x_i, Q) & G_e(z, Q) \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Здесь $Q = \{Q_1, \ldots, Q_{n_j}\}$ - нули голоморфного $(2j-1)$-дифференциала $\Omega(z)$, задающего бозонизацию полей по правилу $\beta^{(j)} = \Omega_{2j-1}^{1/2}\, \beta^{(1/2)}$,

$\gamma^{(j)} = \Omega_{2j-1}^{-1/2}\gamma^{(1/2)}$. Второй детерминант в (50) - определитель $(n_j+1)\times(n_j+1)$-матрицы, $G_e(z, z') \equiv \dfrac{\theta_e(z - z')}{\theta_e(0)E(z, z')}$, $E(z, z')$-прим-форма [40]. Достоинством формулы (50) по сравнению с (48) является то, что она не содержит специальной трансцендентной зависимости от x и y в знаменателе (точнее, в знаменателе x и y входят только в прим-формы, но не в более сложные θ-функции, как в (48)). Достоинства формулы (50), однако, пока не использованы в полной мере при анализе модели NSR.

2. ДВУХ- И МНОГОПЕТЛЕВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ СУПЕРСТРУН NSR

Модель 10-мерных суперструн, фактически предложенная в [7,8] и окончательно сформулированная как очень перспективный объект изучения Глиоцци, Оливом и Шерком [10], занимает особое место в истории теории струн. Дело в том, что, являясь существенно нелокальной теорией поля, пертурбативная теория струн более или менее естественным образом свободна от обычных ультрафиолетовых (УФ) расходимостей, однако взамен во многих струнных моделях имеются серьезные инфракрасные проблемы, связанные с наличием в спектре струнных возбуждений тахионов и безмассовых частиц. В частности, в простейшей модели - 26-мерных бозонных струн - имеется тахион, что делает окончательные выражения для амплитуд рассеяния лишенными физического смысла, так как они описывают теорию возмущений относительно классически неустойчивого вакуума. С формальной точки зрения это отвечает расходимости интеграла по пространству модулей от меры Мамфорда. (Более того, из-за модулярной инвариантности подобные расходимости могут интерпретироваться и как «ультрафиолетовые», связанные с быстрым ростом числа виртуальных состояний - промежуточных частиц. «Инфракрасная» интерпретация, однако, более наглядна и полезна с точки зрения поиска струнных моделей, свободных от такого рода расходимостей, обусловленных неустойчивостью вакуумных состояний.) Таким образом, модель 26-мерных струн, сыгравшая важную роль в выяснении значения метода первичного квантования при переходе от частиц к струнам и в выявлении основных математических конструкций (комплексной геометрии), определяющих структуру теории возмущений в струнных моделях, оказывается совершенно неинтересной с точки зрения физических приложений к задачам типа объединения взаимодействий. Модель суперструн явилась исторически первым примером струнной модели, свободной от тахионов и представляющей непосредственный физический интерес. Здесь нас будет интересовать математический формализм, связанный с многопетлевыми вычислениями в этой модели. По поводу приложений модели суперструн к построению теории Великого объединения см. [180] и ссылки в этом обзоре. В настоящее время в физических приложениях модель суперструн вытесняется более богатой совокупностью так называемых моделей 4-мерных струн, см. по этому поводу [181]. По-видимому, перспективной является идея о создании теории объединения на базе «полной» теории струн, динамическим образом объединяющей все струнные модели, включая 26-мерную бозонную струну, 10-мерную суперструну,4-мерные струны и многое другое (по поводу возможных путей к этой цели см., например, [81,129,130]).

Как уже отмечалось во введении, основной идеей исключения тахиона является возможность введения в модели фермионных струн (в простейшем варианте она обладает двумерной $N=1$ суперсимметрией на мировом листе, а ее критическая размерность равна 10) нового сохраняющегося квантового числа - так называемой G-четности, и исключение G-нечетных состояний, в числе которых находится и тахион. После этого теория должна приобрести 10-мерную $N=1$ суперсимметрию в пространстве-времени. Техническая реализация этой идеи известна как GSO-проекция. Она включает в себя суммирование (с какими-то весами) по всем граничным условиям, наложенным на фермионные поля на неодносвязной римановой поверхности (по θ-характеристикам). A priori не очевидно, что эта процедура (первоначально сформулированная на 0- и 1-петлевом уровне) допускает какое-либо обобщение на случай многих петель таким образом, чтобы по-прежнему исключать а) тахионы и б) расходимости. (Эти два условия, вообще говоря, не совпадают из-за наличия безмассовых возбуждений, также способных порождать инфракрасные расходимости.) В этом разделе приведены некоторые результаты о теории суперструн NSR, полученные частично в соавторстве с Г.Муром и А.Переломовым. К числу этих результатов относятся:

идея о сокращении расходимостей как следствии тождеств Римана для θ-функций (первоначально высказана в работе [95]);

явная реализация этой идеи при доказательстве обращения в нуль 2-петлевой поправки к статистической сумме [37,97], развитие для этой цели техники вычисления на гиперэллиптических поверхностях (аналогичные вычисления были проделаны В.Книжником [61]);

указание на проблему выбора нечетных модулей как на основной источник неоднозначностей при анализе многопетлевых вычислений для струн NSR [96] (эта проблема была также указана Э.Верлинде и Г.Верлинде [62], Дж.Атиком, Дж.Рабином и А.Сеном [64]; впоследствии на эту тему были написаны статьи [65,94], которые, однако, не дают исчерпывающего решения задачи);

проект прескрипции для многопетлевых вычислений (удачная (?) фиксация всех произволов [96]) и примеры ее приложений к доказательству теорем об отсутствии перенормировок на 2-петлевом уровне [98,99].

В последнее время эти идеи (иногда с иной расстановкой акцентов) использовались для анализа 3- и многопетлевых амплитуд [101-110] и для получения явных ответов для 4-точечных функций в 2-петлевом приближении [106-108]. До окончательного решения задачи о пертурбативной теории струн NSR, однако, еще далеко.

2.1. Пример 2-петлевого вычисления: вклад в космологическую постоянную. Одной из основных проблем в пертурбативной теории суперструн NSR и гетеротических струн является выяснение смысла GSO-проекции - правила суммирования по спинорным структурам или θ-характеристикам. Как уже говорилось, эта операция должна обеспечить исключение тахионных и дилатонных сингулярностей, имеющихся в случае фермионной струны, и в конечном счете привести к построению конечной теории. Одно из необходимых условий - обращение в нуль статистических сумм (вакуумных диаграмм), а также диаграмм с не более чем тремя внешними безмассовыми возбуждениями [60, 182]. Из всех проявлений пространственно-временной суперсимметрии именно эти свойства проще всего формулировать и изучать методами первичного квантования. На однопетлевом уровне вопрос представляется достаточно ясным: задача о статсуммах решена еще в [13], бозонные и фермионные амплитуды с $N \leq 3$ внешними безмассовыми частицами рассмотрены в [33] и [183]. Обращение в нуль этих однопетлевых выражений обеспечивается тождествами Римана для θ-функций.

Ситуация с многопетлевыми формулами более сложная. Начнем с обсуждения статистических сумм. Сложность в многопетлевом случае связана с тем, что ответ выражается не только через очевидную комбинацию детерминантов

$$d\mu_e^{ss} = (\det \bar\partial_0)^{-5} (\det{}_e\bar\partial_{1/2})^{+5} \det \bar\partial_2 (\det{}_e\bar\partial_{3/2})^{-1} \tag{51}$$

(индекс e обозначает θ-характеристику или спинорную структуру). Для получения p-петлевой статистической суммы по соответствующему пространству модулей интегрируется произведение $d\mu_e^{ss}$ и коррелятора $2p-2$ супертоков. Происхождение этого коррелятора проще всего понять, исходя из суперполевого подхода к построению фермионных струн (см. [93, 176]). Континуальный интеграл $\int \mathfrak{D}X\,\mathfrak{D}g\, e^{-\mathfrak{A}(X,g)}$, определяющий модель бозонных струн, заменяется в этом подходе интегралом по суперполям $\hat X = X + \vartheta\psi$, $\hat g$. Если в критической размерности от интеграла по метрикам в бозонном случае нетривиальным остается только 3p – 3-кратный (при $p \geq 2$) интеграл по модулям римановых поверхностей, $\mathfrak{D}g \to \prod_{\nu=1}^{3p-3} dy_\nu$, то после суперсимметризации остается еще интеграл по нечетным модулям - $2p-2$ грассмановым переменным α_i, $i = 1, ..., 2p-2$: $\mathfrak{D}\hat{g} \to \prod_{\nu=1}^{3p-3} dy_\nu \prod_{i=1}^{2p-2} d\alpha_i$. Интеграл по α_i отличен от нуля из-за зависимости действия $\hat{\mathfrak{A}}(\hat{X}, \hat{g})$ от нечетных модулей. Поскольку по своему смыслу α_i являются компонентами суперпартнера метрики (гравитино), то производные от действия $\partial\hat{\mathfrak{A}}/\partial\alpha_i$ связаны с суперпартнером тензора энергии-импульса $\partial\hat{\mathfrak{A}}/\partial g$ - супертоком. Точнее, $\partial\hat{\mathfrak{A}}/\partial\alpha_i = \int \chi_i S$, где S - суперток, а χ_i - $(-1/2, +1)$-дифференциалы Бельтрами. В результате после взятия интеграла по нечетным модулям α_i получаем среднее от произведения типа $<\prod_i \int \chi_i S>_e \equiv K_e$ (оно зависит от спинорной структуры e). Поэтому в суперсимметричном случае нас интересует выражение вида

$$\sum_e c_e d\mu_e^{ss} \cdot K_e, \tag{52}$$

где коэффициенты c_e в сумме по спинорным структурам определяют точный смысл GSO-проекции. Наивно, подобно 1-петлевому случаю, их следовало бы выбирать равными ± 1. Выражение (52) является мерой на пространстве модулей. Для обращения в нуль статистической суммы оно должно быть дивергенцией некоторого локального выражения на пространстве модулей.

На самом деле $d\mu_e^{ss} \cdot K_e$ сильно зависит от способа введения нечетных модулей, и при некотором (естественном?) их выборе сумма по e с коэффициентами ± 1 может оказаться не просто дивергенцией, а тождественным (как функция обычных модулей) нулем. Существование такого выбора должно быть тесно связано с существованием «явно унитарной» первично- квантованной формулировки теории суперструн NSR (поэтому в современной литературе соответствующий выбор все чаще называется «унитарным»). В такой формулировке вся зависимость $d\mu_e^{ss} \cdot K_e$ от спинорной структуры должна сводиться к зависимости от e детерминантов для поперечных («физических») степеней свободы, т.е. $d\mu_e^{ss} \cdot K_e \sim$ $\sim (\det_e \bar{\partial}_{1/2})^4 \sim \theta_e^4$, и обращение в нуль статистической суммы в этом случае следует из тождества Римана $\sum_e (\pm)_e \theta_e^4 = 0$ (такой сценарий зануления статсуммы был предложен в [95]). В настоящее время более или менее ясен вопрос о выборе координат на обычном пространстве модулей, ведущем к явно унитарной формулировке модели бозонных струн [184]. Ситуация в случае суперструн NSR до сих пор остается более сложной. (Одна из очевидных проблем на этом пути - отсутствие модулярно-инвариантных тождеств Римана в случае $p \geq 2$. Понятно, однако, что модулярная инвариантность частично нарушается выбором нечетных модулей, и окончательное утверждение может оказаться более или менее приемлемым: унитарный выбор противоречит модулярно-инвариантному.)

Ниже кратко излагается один из первых результатов в этом направлении: явное и детальное вычисление 2-петлевой статистической суммы, проделанное в работе [37] (оно близко к анализу В.Книжника [61]). В этом случае возможно совершенно явное вычисление в гиперэллиптических координатах.

Удобнее всего стартовать с записи величины $\Phi_e \equiv d\mu_e^{ss} \cdot K_e$ в форме, предложенной Мартинеком в [88]:

$$\Phi_e = \langle\langle \xi(x_0) Q\, \xi(x_1) \ldots Q\, \xi(x_{2p-2}) \rangle\rangle . \tag{53}$$

Двойные угловые скобки означают взятие континуального интеграла по всем полям (исключая поле Лиувилля, поскольку речь идет о струнах в критической размерности и это поле уже включено в состав полей X^μ [185]). Сюда входит усреднение по бозонным полям X, фермионным ψ, духовым фермионам b, c и бозонным супердухам β, γ. Корреляторы X-, ψ-, c-полей известны из теории свободных полей (см. обзор [45]). Наименее тривиальные корреляторы в β-, γ-системе (в том числе определение и корреляторы полей $\xi = \mathcal{H}(\beta)$, $\mathcal{H}$ - функция Хевисайда) кратко рассматривались выше в п.1.4. BRST- оператор Q действует следующим образом:

$$Q\, \xi(x) = c\partial\, \xi(x) + \Big[\oint_{z \text{ вокруг } x} (\gamma\, \psi\, \partial\, X + \frac{1}{4} \gamma^2 b)\, (z) \Big] \xi(x). \tag{54}$$

Точки x_i в (53) определяют специальный выбор нечетных модулей, ассоциированный с дифференциалами Бельтрами $\chi_i(z) \sim \delta\,(z - x_i)$. В соответствии с правилом отбора для корреляторов полей b и c в (53) дают вклад только корреляторы с одинаковым числом операторов $c\,\partial\,\xi$ и $\xi \oint \gamma^2 b$. Легко убедиться, что в результате выражение (53) превращается в сумму слагаемых, каждое из которых содержит одинаковое число $-2p-2$-полей и единственный коррелятор β-, γ-полей, который необходимо знать для вычисления статистической суммы, - это

$$G_e(x|z) = <\xi(x_0) \dots \xi(x_{2p-2})\, \gamma(z_1) \dots \gamma(z_{2p-2})>, \tag{55}$$

найденный в п.1.4. Раскрывая двойные угловые скобки в (53), получаем:

$$\begin{aligned}\Phi_e = \prod_{\nu=1}^{3p-3} dy_\nu \int \eta_\nu \Big\{ \prod_{i=1}^{2p-2} \oint\limits_{z_1\,\text{вокруг}\,x_i} &<b(w_1) \dots\ b(w_{3p-3})>G_e(x|z)<\psi(z_1) \dots \\ &\dots \psi(z_{2p-2})>_e <\partial X(z_1) \dots \partial X(z_{2p-2})> + \\ + \oint\limits_{(z_1=z_2)\,\text{вокруг}\,x_2} \prod_{i=3}^{2p-2} \oint\limits_{z_1\,\text{вокруг}\,x_1} &<b\,(w_1) \dots b\,(w_{3p-3}) b\,(z_2) c\,(x_1)> \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_1} G_e(x|z)<\psi(z_3) \dots \psi(z_{2p-2})>_e &<\partial X(z_3) \dots \partial X(z_{2p-2})> + \dots\Big\}.\end{aligned} \tag{56}$$

(Всего в этой сумме p членов.) Все корреляторы в этой формуле известны из теории свободных полей.

Чтобы пояснить источник дальнейших трудностей, проанализируем кратко первое слагаемое в (56). С помощью теоремы Вика для полей ψ (известной в математической литературе также как тождество Фэя [40]) зависимость этого слагаемого от e может быть сведена к

$$\theta_e^4(0)\, \frac{\theta_e\Big(\sum\limits_{i=1}^{2p-2} \mathrm{u}_i - \sum\limits_{i=1}^{2p-2} \mathrm{v}_i\Big)}{\theta_e\Big(\sum\limits_{i=1}^{2p-2} \mathrm{u}_i - \sum\limits_{i=1}^{2p-2} \mathrm{v}_i - 2\Delta_*}, \tag{57}$$

где точки u_i и v_i совпадают с какими-то точками из набора $\{x_i \dots x_{2p-2}\}$. В случае корреляторов с не более чем тремя внешними безмассовыми линиями четвертая степень тета-константы здесь заменяется на $\theta_e(0) \times \times\, \theta_e(\zeta_1 - \zeta_2)\, \theta_e(\zeta_2 - \zeta_3)\theta_e(\zeta_3 - \zeta_1)$. Если бы можно было выбрать точки u_i, v_i таким образом, чтобы $\sum\limits_i \mathrm{u}_i = \sum\limits_i \mathrm{v}_i = \Delta_*$, то обращение в нуль статистических сумм обеспечивалось бы тождествами Римана

$$\sum_e <e_*, e>\, \theta_e^4(0) = 0. \tag{58}$$

(Здесь $<e_1, e_2>$ - модулярно-инвариантное скалярное произведение θ-характеристик.) К сожалению, ситуация не столь проста, поскольку при $\sum\limits_i \mathrm{u}_i = \sum\limits_i \mathrm{v}_i = \Delta_*$ не зависящие от e коэффициенты перед (57) имеют полюса, поэтому необходимы более сильные тождества, нежели (58), для обращения в нуль коэффициентов перед всеми сингулярностями. В случае $p = 2$ в [97] было показано, что можно перейти к пределу $u = v = R_*$ (в данном случае $\Delta_* = \mathbf{R}_*$), и достаточный запас обеспечивается тождеством Римана

$$\sum_e <e_*, e> \theta_e^4(\mathrm{z}) = 2^{1-p}\, \theta_*^4(\mathrm{z}/2).$$

В гиперэллиптическом случае (в том числе всегда при $p = 2$) имеется, однако, и другая возможность: можно устремить u_i и v_i к различным $2p-2$ точкам ветвления. При этом произведение (57) снова обращается в $\theta_e^4(0)$, только, быть может, с другим знаком. Тем не менее новые знаки таковы, что сумма по e снова обращается в нуль. Этот предел значительно менее сингулярен, чем предыдущий, и именно он был исходно проанализирован в [37,61]. Наибольшие вычислительные трудности связаны с определением старших слагаемых в (56), содержащих духовые вклады в супертоки. Подробности для случая $p = 2$, где все расчеты доведены до конца, содержатся в [37]. Существенной чертой гиперэллиптического случая является то, что многие вклады в (56) сокращаются по отдельности.

2.2. Уроки 2-петлевого вычисления. Приведенный пример оценки 2-петлевого вклада в космологическую постоянную показывает, что выбор нечетных модулей, ассоциированный с

$$\chi_i(z) \sim \delta(z - x_i), \tag{59}$$

и коэффициентов $c_e = \pm 1$ в сумме по спинорным структурам не противоречит теоремам о неперенормировке, но требует, чтобы выбор c_e был явно модулярно-неинвариантным:

$$c_e = <e_*, e>, \tag{60}$$

зависел от выбора нечетной θ-характеристики e_*. Это вызывает серьезные опасения, что в случаях, когда окончательный ответ отличен от нуля (например, при вычислении 4-точечных функций), при использовании подобного рецепта он окажется модулярно-неинвариантным и потому неправильным. Эта проблема была сформулирована в [96] (см. также [62,63]), там же была указана привлекательная модификация вышеприведенного рецепта, впоследствии развитая в [98]. Истинную причину трудностей можно сформулировать следующим образом.

В принципе надлежит вычислить интеграл по пространству супермодулей от хорошо определенной величины типа супермеры Мамфорда. Это интегрирование разбивается на два этапа: вначале интегрируем по нечетным модулям, а затем - по обычным - четным. Понятно, что результат промежуточного интегрирования зависит от выбора разбиения на четные и нечетные модули. Зависимость эта, однако, сводится к полным производным по четным модулям и должна исчезнуть после второго интегрирования. К сожалению, у этого рассуждения имеется существенный изъян. Оно было бы безупречным, если бы исходный интеграл по всему пространству супермодулей был бы определен. К сожалению, из-за тахионных и дилатонных сингулярностей в модели фермионной струны интеграл от супермеры Мамфорда расходится вблизи границ пространства модулей. Свободная же от этих (по крайней мере, от тахионных) расходимостей модель суперструн NSR пока что не имеет формулировки непосредственно в терминах пространства супермодулей: ее отличие от фермионной струны обусловлено GSO-проекцией, формулируемой как сумма по спинорным структурам. Пространства супермодулей с разными спинорными структурами - это просто различные пространства, и суммировать меры на различных пространствах не представляется возможным. Суммировать можно только меры на одном пространстве - пространстве четных модулей, т.е. величины, полученные интегрированием по нечетным. После этого, однако, вопрос о независимости ответа от способа промежуточного интегрирования становится значительно менее очевидным. Рассуждение про сведение произвола к полным производным остается верным (и это явно проверено, например, в [62]), но никаких причин думать, что интегралы от этих производных всегда обращаются в нуль, нет. Поэтому определение модели суперструн NSR на многопетлевом уровне - это совершенно отдельная и нетривиальная задача. Это определение (до сих пор отсутствующее) должно удовлетворять по крайней мере нескольким критериям:

давать однозначно определенные (в частности, модулярно-инвариантные) ответы для амплитуд;

не нарушать «теоремы» [60,182] о неперенормировке для 0-, 1-, 2-, 3-точечных корреляторов безмассовых возбуждений;

давать ответы, согласованные с пространственно-временной суперсимметрией;

соблюдать свойство факторизации (эквивалентное пространственно-временной унитарности теории).

Строго говоря, мы должны требовать, чтобы теория удовлетворяла только первому и последнему из этих критериев - два других после этого являются теоремами. К сожалению, как уже говорилось, модель суперструн NSR до конца не построена, и главным препятствием является как раз доказательство совместности свойства факторизации и того или иного рецепта многопетлевых вычислений. До настоящего времени основным подходом к проблеме был поиск рецепта, удовлетворяющего первым двум требованиям, и затем попытка доказать два последних. На этом пути достигнуты определенные, но пока еще далеко не окончательные успехи (см. [37, 61, 62, 64, 65, 92-111]). Ниже приводим рецепт построения многопетлевых амплитуд, предложенный в свое время в [96] и [97], призванный совместить обращение в нуль поправок к космологической постоянной с требованием модулярной инвариантности.

На поверхности рода p следует задать какую-нибудь нечетную спинорную структуру (θ-характеристику) e_* и проделать все вычисления, пользуясь метрикой $|\nu_*|^4$ с двойными нулями в точках $R_1^*, ..., R_{p-1}^*$, супердифференциалами Бельтрами $\chi_\alpha \propto \delta(z - R_\alpha^*), \tilde{\chi}_\alpha \propto \delta'(z - R_\alpha^*), \alpha = 1, ..., p = 1$; а в сумме по спинорным структурам e в качестве весов взять $<e, e_*>$. На самом деле для регуляризации возможных расходимостей целесообразно начать с 1-дифференциала Ω, имеющего попарно различные нули, метрики $|\Omega|^2$, и дифференциалов Бельтрами, локализованных в нулях Ω , и лишь затем, непосредственно перед суммированием по характеристикам, перейти к пределу $\Omega = \nu_*^2$. Такая процедура, вообще говоря, приводит к ответу Φ_*, зависящему от e_*. Окончательным ответом предлагается считать $\Phi = \sum\limits_* \Phi_*$.

Как уже говорилось, данный рецепт был сформулирован на основе анализа 2-петлевого вычисления космологической постоянной (0-точечной функции). Такая процедура с очевидностью приводит к модулярно-инвариантному ответу. Неизвестно, однако, согласуется ли этот рецепт в общем случае с требованием факторизации. В [99] было показано, что он обеспечивает отсутствие 2-петлевых поправок также и к 1-, 2-, 3-точечным функциям (там же приведено сравнение с более наивными рецептами). Техника, развитая в [98], использовалась затем в [104, 110] и других статьях (с переменным успехом) для анализа 3- и многопетлевого случая. Слегка иное развитие идеи работы [96] (и независимой от нее [64]) получили в двух больших статьях [65]. Другие точки зрения отражены в [89 и 94]. В [100] была сделана первая попытка угадать ответ для простейшей нетривиальной величины в модели NSR: 2-петлевого вклада в 4-точечную функцию, и указано на ряд проблем. В частности, было отмечено (в определенной параллели с аргументами [186], исходящими из совершенно иных соображений), что тезис о конечности многопетлевых амплитуд должен восприниматься не совсем буквально, а, скорее всего, лишь в смысле аналитического продолжения. Точнее, наивные интегралы по пространству модулей конечны лишь в определенной области изменения импульсов, а в остальных областях получаются аналитическим продолжением. Здесь ситуация в корне отличается от 1-петлевого случая.

Указанные потенциальные расходимости связаны с дилатонными сингулярностями, и с технической точки зрения их нет на уровне одной петли только из-за того, что $\mathrm{Im}\tau$ входит в подынтегральные выражения в степени $-(d/2+1)=-6$, вместо $-d/2=-5$ при $p\geq 2$. Непосредственное вычисление 2-петлевого 4-точечника (в рамках определенного рецепта, основанного на гиперэллиптической технике [49] и [48]) было выполнено пока что только одной группой [106-108]. Анализ полученного в этих статьях сложного ответа (необходимый для проверки его модулярной инвариантности, конечности и т.п.) весьма затруднителен и пока не проведен.

Таким образом, пертурбативная теория струны NSR пока далека от завершения, хотя уже выяснены ее многие важные свойства и закономерности. В этой связи представляют интерес альтернативные (разумеется, ничуть не более простые) подходы к модели суперструн. Из них наибольший интерес представляет модель суперструн Грина - Шварца.

3. МНОГОПЕТЛЕВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ СТРУН ГРИНА - ШВАРЦА

Подход к терии суперструн, разрабатывавшийся Грином и Шварцем (см. [13]), кардинально отличается от подхода NSR, поскольку основное внимание уделяется пространственно-временной суперсимметрии. Основная трудность такого подхода состоит в неочевидности двумерно-ковариантной формулировки подобной теории, которая необходима для последовательного применения метода первичного квантования. Такая формулировка - действие Грина - Шварца - была найдена только в 1984 г., в работе [87]. При этом действие, в отличие от обычной ситуации в струнных моделях, оказалось неквадратичным по полям материи. Кроме того, модель GS не содержит явных следов двумерной суперсимметрии, фермионные поля в ней являются двумерными скалярами (эта ситуация скорее напоминает недавно введенное понятие «твистованной суперсимметрии»). По этим причинам совпадение моделей суперструн GS и NSR является совершенно нетривиальным фактом (идея в том, что они совпадают на древесном уровне, а поэтому унитаризованные теории могут также быть сделаны тождественными), и в разных формулировках просто проявляются совершенного разные свойства суперструн. Естественно, что для проявления свойств, связанных с пространственно-временной суперсимметрией, более удобна формулировка GS (и мы увидим ниже в п.3.2, что, например, теоремы о неперенормировке доказываются в этом формализме очень просто). Формулировка NSR, однако, значительно проще и понятнее с двумерной точки зрения (что касается модели

GS, ее главная двумерная симметрия, так называемая k-инвариантность, оказывается довольно трудной для изучения и интерпретации). Очевидное, на первый взгляд, преимущество модели NSR - квадратичность двумерного действия. Однако в [115] и [113] (см. п.3.1) было показано, что на самом деле действие GS динамически эквивалентно квадратичному. Использованный в [113] метод был впоследствии применен в [44] для аналогичной операции перехода к свободным полям (переменным Дарбу) в модели Весса - Зумино - Новикова - Виттена, а затем и в других интересных струнных моделях. В определенном смысле любая конформная теория допускает запись в терминах свободных безмассовых полей (представление Фейгина - Фукса [131] или Доценко - Фатеева [132]), и модель GS не является исключением.

В п.3.1 приведены основные принципы многопетлевых вычислений в модели GS. Центральным пунктом является выбор лоренцевой калибровки $\theta^+ = 0$ и нелинейная замена переменных, приводящая действие к квадратичному виду,

$$\int d^2z \, [\, \partial x^\mu \, \bar\partial x^\mu \, \eta \, \frac{k}{z} \, \partial\theta_k + \text{духи} + \text{«правые» поля}] \, .$$

Показано, как учитывать якобиан, происходящий от замены переменных.

В п.3.2 обсуждаются причины, которые могут препятствовать выбору лоренцевой калибровки в теории GS, и их влияние на структуру многопетлевых поправок. Показано, что здесь возникает неоднозначность, весьма сходная с неоднозначностью в случае NSR, а в окончательных формулах появляются структуры, аналогичные по смыслу и значению вставкам, содержащим супертоки (операторы «изменения образа»). Объяснено, что из-за пространственно-временной симметрии исходного действия появление подобных вставок не может уничтожить по крайней мере четыре из восьми нулевых мод поля θ, что достаточно для доказательства обращения в нуль поправок к 0-, 1- и, скорее всего, 2-, 3-точечным корреляторам безмассовых частиц (в случае 2-, 3-точечных функций важна еще структура вершинных операторов).

3.1. Исследование действия Грина-Шварца. Для понимания роли формализма GS и ограниченности подхода NSR полезно обратиться к формуле для 1-петлевого вклада в 4-точечную функцию

$$\int \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^6} \int d^2z_1 \ldots \int d^2z_4 < e^{ip_1X(z_1)} \ldots e^{ip_4X(z_4)} > \qquad (61)$$

(кинематический множитель опущен). Стандартный вывод этого результата в формализме NSR довольно долог, поскольку исходит из формул для спинорных корреляторов и включает сумму по спинорным структурам. Только после использования тождеств Римана громоздкое исходное выражение приобретает простую форму (61), не содержащую никаких воспоминаний о спинорах на мировом листе. В этом смысле существование формализма CS, вообще не использующего двумерных спиноров, представляется очень естественным.

Действие Грина - Шварца [87] (в простейшем - гетеротическом - случае) имеет вид

$$S_{GS} = \int d^2z\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\Pi^{\mu}_{\alpha}\Pi^{\mu}_{\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta}\partial_{\alpha} X^{\mu}\,\bar{\theta}\gamma^{\mu}\partial_{\beta}\theta + \mathfrak{L}\right\}. \qquad (62)$$

Здесь $\mathfrak{L}$ описывает калибровочные степени свободы гетеротической струны, а

$$\Pi^{\mu}_{\alpha} \equiv \partial_{\alpha} X^{\mu} - \mathrm{i}\,\bar{\theta}\gamma^{\mu}\,\partial_{\alpha}\theta, \qquad (63)$$

θ - антикоммутирующий 10-мерный 16-компонентный спинор Майорана - Вейля, являющийся 2-мерным скаляром. Лагранжево квантование этой теории в общем случае наталкивается на проблемы бесконечной последовательности «духов для духов» и незамыкания алгебры симметрии вне массовой поверхности. Однако анализ, проведенный в [113], указывает возможный выход из положения (сводящийся по существу к доопределению правил обращения с бесконечной духовой цепочкой). Именно, зафиксируем калибровку, например:

$$\gamma^{+}\theta = 0, \quad g_{\alpha\beta} = \rho g^{(y)}_{\alpha\beta}, \qquad (64)$$

где $g^{(y)}_{\alpha\beta}$ - какая-то фиксированная метрика, зависящая от модулей $y_1 \ldots$ После фиксации калибровки функциональный интеграл приобретает вид

$$\begin{gathered}\int Dy \int \mathfrak{D} X^{\mu}\,\mathfrak{D}\theta\;\mathfrak{D}b\,\mathfrak{D}c\,(\mathrm{Det}u_{\bar z})^{-4} \times \\ \times \exp\left\{-\int d^2z\,(\partial X^{\mu}\bar\partial X^{\mu} + \bar\theta\bar\gamma\,\bar\partial X^{+}\partial\theta + \mathfrak{L} + b\bar\partial c + \bar b\partial\bar c)\right\}.\end{gathered} \qquad (65)$$

Здесь b, c, $\bar b$, $\bar c$ - обычные репараметризационные духи, связанные с фиксацией конформной калибровки для метрики. Введено также обозначение $u_{\bar z} = \bar\partial X^{+}$. Возникновение $(\mathrm{Det}\, u_{\bar z})^{-4}$ в локальной мере связано с выбором лоренцевой калибровки для θ. Выбор степени детерминанта оправдывается главным образом инвариантностью ответа по отношению к способу фиксации симметрии, но может также быть связан с наивным определением произведения бесконечного числа духовых детерминантов. Отметим, что, в отличие от калибровки светового конуса, в (65) X^{+} не отождествляется с координатой на мировом листе так, чтобы $u_{\bar z} = 1$ (это возможно только на цилиндрической поверхности). Вместо такой (невозможной) фиксации двумерной репараметризационной инвариантности можно достичь практически того же результата по-другому: заменой переменных.

Заметим, что $SO(8)$-спинор θ, $\gamma^+\theta = 0$, можно разбить на два $SU(4)$-спинора, $\eta^k \equiv \theta^k$ и θ_k, $k = 1, \ldots, 4$. Тогда кубический член в (65) может быть переписан как $\bar\theta\,\bar\gamma u_{\bar z}\partial\theta \Rightarrow 2\theta^k u_{\bar z}\partial\theta_k - \theta^k\theta_k\partial u_{\bar z}$, а второе из появившихся слагаемых $\theta^k\theta_k\partial\bar\partial X^+$ легко устраняется сдвигом X^- на $\theta^k\theta_k$ (т.е. переходом к «киральному» полю X^- в стандартной суперсимметричной формулировке). Теперь остается сделать замену переменных $\eta^k_{\bar z} = \eta^k u_{\bar z}$, чтобы превратить (65) в

$$\int Dy \int \mathfrak{D}X^\mu \mathfrak{D}\eta^k_{\bar z}\mathfrak{D}\theta_k \mathfrak{D}b\,\mathfrak{D}c\,(\mathrm{Det}u_{\bar z})^{-4} \times \\ \times \exp\left\{-\int d^2z\,(\partial X^\mu\bar\partial X^\mu + \eta^k_{\bar z}\partial\theta_k + \mathfrak{L} + b\bar\partial c + \bar b\partial\bar c)\right\}. \tag{66}$$

При исследовании аномалий в получившейся теории необходимо учитывать, что 1-дифференциал $\eta_{\bar z}$ имеет нестандартную норму

$$||\eta_{\bar z}||^2 = ||\theta||^2 = \int d^2z\sqrt{g}\,|\theta|^2 = \int d^2z\,\frac{\sqrt{g}}{|u_{\bar z}|^2}\,\eta_{\bar z}\eta_z$$

(вместо наивного $\int d^2z\,\eta_{\bar z}\eta_z$). При наличии нетривиальной нормы действие Лиувилля несколько изменяется. Именно, аномалия в детерминанте оператора Лапласа $\Delta_{f,h} = f(z,\bar z)\,\partial h\,(z,\bar z)\bar\partial$ (т.е. в функциональном интеграле по полю ϕ с действием $\int d^2zh\,(z,\bar z)|\bar\partial\phi|^2$ и нормой $||\phi||^2 = \int d^2z f\,(z,\bar z)|\phi|^2$ задается выражением [113]

$$\exp\left\{-\frac{1}{48\pi}\int\left[\frac{|\partial f|^2}{f^2} - \frac{4\partial f\,\bar\partial h}{fh} + \frac{|\partial h|^2}{h^2}\right]\right\}. \tag{67}$$

В частности, для обычного оператора $\bar\partial_j$ имеем $f = \rho^{j-1}$, $h = \rho^{-j}$, и из (67) получаем стандартный ответ [11] $\exp -\left\{\frac{c_j}{48\pi}\int|\partial(\lg\rho)|^2\right\}$ с $c_j = (-j)^2 - 4(-j)(1-j) + (1-j)^2 = 6j^2 - 6j + 1$. В случае поля имеем вместо этого:

$$\exp\left\{-\frac{1}{48\pi}\int[-2|\partial(\lg\rho)|^2 - (2\lg\rho + \lg|u_{\bar z}|^2)\,\partial\bar\partial\,(\lg|u_{\bar z}|^2)]\right\}. \tag{68}$$

Коэффициент перед первым членом равен -2 вместо $c_0 = c_1 = +1$ для обычных 1-дифференциалов. Это в точности то, что требуется для сокращения аномалий между вкладами X-, θ-, b-, c-полей: $-(d/2)\,(+1) + 4(-2) + 13 = 0$ $(d = 10)$. Это правило сокращения аномалий впервые было сформулировано С.Карлипом [115] на основе менее ясных рассуждений. Оставшиеся члены в (68) не имеют аналогов в простейших известных струнных моделях. Из-за того, что вклады пропорциональны $\partial(\lg|u_{\bar z}|^2) \sim \partial\bar\partial X^+$, они могут быть устранены сдвигом поля X^- (по крайней мере, в тех случаях, когда вычисляются корреляторы, не содержащие X^--полей).

Указанный способ приведения действия GS к квадратичному виду открывает путь к исследованию модели GS стандартными методами. В п.3.2 приведено простейшее приложение к доказательству теорем об отсутствии перенормировки, предложенное в [112]. Литература, посвященная дальнейшему исследованию модели GS, довольно обширна (см., например, [112,120-123]). Значительная часть работ развивает предложенный Каллош и Рахмановым [112] анализ модели GS в калибровке, не нарушающей 10-мерную суперсимметрию. Как и положено в таких случаях [187,188], при этом модель содержит бесконечное число нефизических полей, и ее анализ, особенно с точки зрения многопетлевых вычислений, значительно усложняется.

3.2. Доказательство теорем об отсутствии перенормировок. В разд.2 уже шла речь о том, что 0-, 1-, 2-, 3-точечные функции для безмассовых возбуждений в модели суперструн не должны перенормироваться, по крайней мере в рамках теории возмущений [60,182]. В формализме NSR, рассматривавшемся в разд.2, это является сложной теоремой, которую трудно доказать даже в простейшем нетривиальном случае $p = 2$. В формализме GS это, однако, почти очевидно. Теоремы о неперенормировке при этом связаны с тем [13], что поля θ_k, $k = 1,\ldots,4$ (но не $\eta^k_{\bar z}$), - двумерные скаляры, и поэтому в модели с действием (66) всегда имеется не менее 4 нулевых мод. Чтобы «поглотить» эти нулевые моды, необходимо не менее четырех вершинных операторов, содержащих по одному полю θ. В этом пункте, следуя [114], приводим более аккуратные аргументы. Они подразумевают также близкую аналогию с моделью NSR, которая, однако, до сих пор детально не прослежена.

Критическим усложнением, способным в принципе нарушить справедливость приведенного выше рассуждения, оказывается препятствие к выбору калибровки $\theta^+ \equiv \gamma^+\theta = 0$ на поверхностях высокого рода. Дело в том, что калибровочные преобразования действуют на θ^+ по правилу: $\delta\theta^+ = \Pi^+\gamma^- k$, $(\gamma^+ k = 0)$ а 1-дифференциал Π^+ обязан иметь не менее

$2p - 2$ нулей (на самом деле даже больше). В результате вместо $\theta^+ = 0$ можно наложить более слабое условие:

$$\theta^+(z, \bar{z}) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \delta^{(2)}(z - Q_m), \tag{69}$$

где Q_m - нули Π^+. В результате полное действие отличается от (66) добавлением лишних членов вида

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{M} \alpha_m \int \delta^{(2)}(z - Q_m)\mathcal{O}_{(1)} + \\ &+ \sum_{m,n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n \iint \delta^{(2)}(z - Q_m)\delta^{(2)}(z' - Q_n)\mathcal{O}_{(2)}\,, \end{aligned} \tag{70}$$

где $\mathcal{O}_{(1,2)}$ - легко определяемые комбинации θ-, η- и X-полей. После интегрирования по грассмановым переменным α_m (прямым аналогам супермодулей в подходе NSR) получим определенную вставку операторов $\mathcal{O}_{(1,2)}$ (аналогичную супертоковой вставке). Опасность этого явления для теорем о неперенормировке состоит в том, что вставка (а она имеется даже при вычислении статсуммы) могла бы поглощать нулевые моды скалярных полей θ_k. Этого, однако, не происходит. Нулевые моды оказываются непосредственно связанными с пространственно-временной суперсимметрией, и теоремы об отсутствии перенормировки должны быть справедливыми до тех пор, пока теория возмущений не нарушает эту важную симметрию модели GS (отметим еще раз, что в полном объеме такая теория возмущений пока не построена).

Чтобы установить связь нулевых мод с суперсимметрией, заметим, что до фиксации калибровок имелась инвариантность по отношению к замене полей

$$\delta\theta^- = \varepsilon^- = \text{const},\ \delta X^\mu = i\bar{\varepsilon}^-\gamma^\mu\theta,$$
$$\text{т.е. } \delta X^+ = 0,\ \delta X^- = i\bar{\varepsilon}^-\gamma^-\eta^-,\ \delta X^i = i\bar{\varepsilon}^-\gamma^i\eta^+$$

(а $\delta\theta^+ = \delta\eta^+ = \delta\eta^- = 0$). Под знаком континуального интеграла всегда можно сделать сдвиг:

$$X^\mu \to \widetilde{X}^\mu\!:\ \widetilde{X}^+ \equiv X^+,\ \widetilde{X}^- \equiv X^- - i\theta^-\gamma^-\eta^-,\ \widetilde{X}^\mu \equiv -\, i\theta^-\gamma^1\eta^+.$$

Якобиан этого преобразования равен единице. Теперь действие инвариантно по отношению к сдвигу $\delta\theta^- = \varepsilon^- = \text{const}$, причем $\delta\widetilde{X}^\mu = \delta\theta^+ =$

$= \delta\eta^+ = \delta\eta^- = 0$. Поэтому в пространстве полей имеются хорошо определенные постоянные гармоники

$$\theta_0^- = \text{const},\ \widetilde{X}_0^\mu = 0,\ \theta_0^+ = 0,\ \eta_0^+ = 0,\ \eta_0^- = 0$$

(духовые поля равны нулю), которые с очевидностью ортогональны ко всем остальным гармоникам и при этом не дают вклада в действие. Поэтому они являются настоящими нулевыми модами, и число их в точности равно четырем, поскольку θ_k^- 4-компонентно: $k = 1, \ldots, 4$. (Отметим, что действие инвариантно также по отношению к преобразованиям

$$\delta\eta^- = \zeta^- = \text{const},\ \delta X^\mu = \mathrm{i}\zeta^-\gamma^\mu\theta,\ \delta\theta^+ = \delta\eta^+ = \delta\theta^- = 0,$$

но они действуют нетривиально на X и потому не обязаны приводить к существованию нулевых мод: мода $\eta^- = \text{const}$, $\widetilde{X}^\mu = \text{const}\,\gamma^\mu\theta$ не обязательно ортогональна другим гармоникам оператора Лапласа.)

Результаты этой главы указывают на познаваемость модели GS доступными методами. По-видимому, дальнейший реальный прогресс в понимании модели суперструн должен быть связан с синтезом результатов, полученных в формулировках NSR и GS, и с доказательством эквивалентности этих формулировок (нахождением и исследованием явной замены переменных).

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ КОНФОРМНЫХ ТЕОРИЙ ОБЩЕГО ВИДА

Описанный в разд.3 анализ модели суперструн GS содержит идею, важную для всей пертурбативной теории струн. Как говорилось во введении, предметом изучения этой науки являются двумерные конформные модели на римановых поверхностях. Чаще всего такие модели, если и задаются в лагранжевой форме, имеют неквадратичные действия (или, что практически то же самое, наложенные связи). Формализм же свободных полей - единственная доступная в настоящее время техника - применим только к теориям с квадратичными действиями. Пример модели GS иллюстрирует важнейшее общее правило всех конформных моделей: все они могут быть записаны в терминах свободных безмассовых полей - всегда существует соответствующая замена переменных, делающая действие квадратичным. В полной общности это утверждение еще ждет своего доказательства (главным образом, не ясна допустимая степень нелокальности в замене переменных; открытым, правда, остается и вопрос о том, что должно быть исходным пунктом такого доказательства; не исключено, что представление свободных полей может само служить удачным определением конформных моделей, альтернативным определению, данному в [23]). В этом разделе рассматривается переход к свободным полям в одной из фундаментальных конформных моделей: модели WZNW. Роль этой теории обусловлена ее прямой связью с алгебрами КМ - фундаментальными симметриями двумерных конформных теорий. Для оценки полученных результатов необходимо иметь в виду следующее. До сих пор наиболее популярными примерами конформных моделей являются представители так называемых рациональных теорий. Эти модели выделены тем, что в них имеется конечное число конформных блоков и для них особенно хорошо работает подход [23]. (Об общей теории рациональных конформных моделей см. [137].) В противоположность этому представление свободных полей особенно просто устроено для нерациональных теорий (теория одного свободного поля, равно как и конформные модели, возникающие при анализе 26-мерных бозонных струн или 10-мерных суперструн, не являются рациональными). Описание рациональных моделей в формализме свободных полей требует дополнительной редукции - наложения дополнительных условий на свободные поля, совместных с уравнениями движения и голоморфной структурой корреляционных функций. Простейшие редукции переводят нерациональные теории в другие нерациональные (например, при построении так называемых косет-моделей из моделей WZNW в п.4.3). При редукциях, ведущих к рациональным моделям, центральную роль играют экранирующие операторы, фактически введенные Фейгиным и Фуксом [131] при анализе представлений алгебры Вирасоро и Фатеевым и Доценко [132] при изучении представления свободных полей для минимальных моделей. В настоящее время имеется неплохое понимание этих редукций, связанное с BRST-когомологиями Фейгина - Фукса - Фельдера [131, 139]. Представление свободных полей, дополненное этими новыми результатами, уже сейчас позволяет строить явные выражения для многопетлевых амплитуд в рациональных конформных моделях [140,141].

В этом разделе отражен предыдущий этап развития: обоснование общности и значимости представления свободных полей для широкого класса конформных моделей. Помимо разобранного в разд.3 примера модели GS, в пп.4.1, 4.2 анализируется модель WZNW (без фельдеровской редукции, существующей при целых и, скорее всего, рациональных значениях центрального заряда k). В частности, получено представление свободных полей для любой алгебры КМ с любым (не обязательно целым) центральным зарядом. В пп. 4.3, 4.4 рассматриваются простейшие (нефельдеровские) редукции, ведущие к нерациональным косет-моделям, в частности нерациональным парафермионам. Пункт 4.5 посвящен рассмотрению W-алгебр с точки зрения представления свободных полей. Эта точка зрения удобна, в частности, для понимания структуры W_∞-алгебры, которой еще предстоит сыграть важную роль в дальнейшем развитии теории струн. Наконец, п.4.6 содержит краткие сведения об обобщенной конструкции Сугавары.

4.1. Модель WZNW: случай $SL(2)_k$. Лагранжиан модели WZNW представляет собой нелокальный неквадратичный функционал и имеет вид

$$4\pi\mathfrak{L} = -k\,\mathrm{tr}\left[|g^{-1}\,\partial g|^2 + \frac{i}{3}\,d^{-1}(g^{-1}dg)^3\right]. \tag{71}$$

Рассмотрим сначала простейшую неабелеву теорию WZNW, отвечающую алгебре токов $sl(2)_k$. Представление свободных полей для этой алгебры было впервые построено М.Вакимото [143], И.Колоколовым [189] и А.Замолодчиковым [144]. (Еще ранее Э.Виттеном [68] был рассмотрен специальный случай $k=1$, когда возможно представление в терминах одного свободного поля. Обычно их должно быть три. Другой специальный случай, $k=4$, когда достаточно двух полей, обсуждается в [163].) Ниже приводится последовательный лагранжев вывод, предложенный в [44]. Для диагонализации действия (71) параметризуем элемент алгебры $SL(2)$ с помощью разложения Гаусса

$$g = g_U(\psi)g_D(\varphi)g_L(\chi) = \begin{bmatrix}1 & \psi\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\varphi} & 0\\ 0 & e^{-\varphi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \chi & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi\chi e^{-\varphi} + e^{\varphi} & \psi e^{-\varphi}\\ \chi e^{-\varphi} & e^{-\varphi}\end{bmatrix}. \tag{72}$$

Идея о роли представления Гаусса в исследовании модели WZNW, по-видимому, восходит к А.Полякову. Незадолго до [44] оно использовано в очень близком контексте в [138]. Инвариантная норма поля g в этой параметризации имеет вид

$$||\,\delta g\,||^2 = \frac{1}{2}\int G\,\mathrm{tr}\,(g^{-1}\,\partial g)^2 = \int G[(\delta\varphi)^2 + \mathrm{e}^{-2\varphi}\delta\psi\delta\chi\,], \tag{73}$$

где G - двумерная метрика в конформной калибровке. Матрица токов может быть определена следующим образом:

$$kJ = kg^{-1}dg = \begin{bmatrix}\widetilde{w}\chi + d\varphi & \widetilde{w}\\ -\widetilde{w}\chi^2 - 2\chi d\varphi + d\chi & -\widetilde{w}\chi - d\varphi\end{bmatrix} = \widetilde{J}^{+}\sigma_{+} + \widetilde{J}^{-}\sigma_{-} + \widetilde{H}\sigma_3 \tag{74}$$

при

$$w = k\widetilde{w} = k\,\mathrm{e}^{-2\varphi}d\psi. \tag{75}$$

Легко проверить, что

$$\frac{k}{2}\,\mathrm{tr}(g^{-1}\,\partial_\mu g)^2 = k(\partial_\mu\varphi)^2 + w_\mu\,\partial_\mu\chi\,, \tag{76}$$

$$k\,\mathrm{tr}\,(g^{-1}dg)^3 = kd(\mathrm{e}^{-2\varphi})d\chi d\psi = d(wd\chi), \tag{77}$$

и весс-зуминовский член имеет вид

$$\frac{k}{3}\,d^{-1}(g^{-1}dg)^3 = \varepsilon_{\mu\nu}\,w_\mu\,\partial\chi_\nu\,. \tag{78}$$

Теперь из (71) получим

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{cl}} = -\frac{1}{4\pi}\,[k|\partial\varphi|^2 + w\bar{\partial}\chi\,], \tag{79}$$

где 1-дифференциал w определен равенством: $w = k\,\mathrm{e}^{-2\varphi}\partial\psi$.

Из выражений (73) и (75) следует, что наивная мера в континуальном интеграле совпадает со свободной мерой для полей w, χ и φ. Нетривиальный фактор $\mathrm{e}^{-2\varphi}$ в мере, определяемой выражением (73), сокращается после замены переменных (75). Однако для того чтобы провести замену переменных (75) правильно, необходимо учесть функциональный детерминант $\mathrm{Det}(\mathrm{e}^{-2\varphi}\partial)$, который, конечно, является аномальным. Соответствующий оператор Лапласа имеет вид

$$G^{-1}\,\mathrm{e}^{2\varphi}\,\bar{\partial}\,\mathrm{e}^{-2\varphi}\,\partial \tag{80}$$

(на этот раз G - двумерная метрика на римановой поверхности). Аномалия детерминанта вычисляется теперь по общему правилу [113], приведенному в п.3.1. Она «сдвигает» лагранжиан (79) на $\frac{1}{48\pi}\,[24|\partial\varphi|^2 + 12\varphi\bar{\partial}\partial\,\lg G\,]$, и, следовательно, квантовый лагранжиан имеет вид

$$4\pi\,\mathfrak{L}_q = -\,[w\,\bar{\partial}\,\chi + (k+2)|\,\partial\,\varphi|^2 + R\varphi\,] \tag{81}$$

($R = \bar{\partial}\,\partial\,\lg\,G$ - 2-форма кривизны в двумерии). В терминах свободных полей w, χ и φ наличие симметрии Каца - Муди не является очевидным. Простейший способ обнаружить эту симметрию - явно построить операторы токов, образующие алгебру КМ. В принципе нужные операторы даются формулами (74). Однако в этих формулах надо еще аккуратно сделать нормальное упорядочение. Полезно перейти от поля φ в (74) к «перенормированному» скалярному полю $\phi = \mathrm{i}\sqrt{2}q\,\varphi$ с операторным разложением $\phi(z)\phi(0) = -\lg z + \ldots$, с тем, чтобы получить правильно нормированный кинетический член в лагранжиане. В терминах ϕ лагранжиан (81) переписывается в виде

$$4\pi\,\mathfrak{L}_q = -w\,\bar{\partial}\,\chi + \frac{1}{2}\,|\,\partial\,\phi|^2 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}\mathrm{q}}\,R\phi \tag{82}$$

($q^2 = k+2$). Нетеровский тензор энергии-импульса квадратичен по полям:

$$T = w\,\partial\,\chi - \frac{1}{2}(\partial\,\phi)^2 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}\mathrm{q}}\,\partial^2\phi. \tag{83}$$

Алгебра токов $sl(2)_k$, записанная через правильно нормированные квантовые поля, имеет следующий вид [143,189]:

$$J^+ = w\,;\, H = w\chi - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\, q\, \partial\, \phi;\, J^- = w\chi^2 - \mathrm{i}\sqrt{2}\,\chi\, \partial\, \phi - k\, \partial\, \chi, \qquad (84)$$

где операторное разложение для полей ϕ приведено выше, а поля w и χ являются бозонной β-, γ-системой со спином единица (см. п.1.4), и

$$w(z)\, \chi\, (0) = \frac{1}{z} + \ldots \qquad (85)$$

При этом тензор энергии-импульса (83) совпадает с сугаваровским ($T \sim$:tr J^2 :) для алгебры (84).

Однако это еще не полное описание теории. Замена переменных (75)

$$d\,\psi = \widetilde{w}\, \mathrm{e}^{2\varphi} = \frac{1}{k}\, w\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{2}\phi/q} \qquad (86)$$

подразумевает также дополнительные ограничения на функциональное интегрирование. Эти ограничения являются отражением того, что первоначальные переменные ψ, χ и e^{φ} следует рассматривать как однозначные функции на римановой поверхности. Поэтому для любого цикла на поверхности

$$\oint w\, \mathrm{e}^{2\varphi} = \oint w\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{2}\phi/q} = k \oint d\,\psi = 0. \qquad (87)$$

(Из-за голоморфных свойств корреляторов (87) доставляет лишь конечный набор ограничений - по числу негомологичных нестягиваемых контуров на поверхности.) Это означает, что модель WZNW$sl(2)_k$ определена как функциональный интеграл по свободным полям w, χ и ϕ (последнее принимает значения в окружности радиуса, определяемого однозначностью экспоненты e^{φ}, т.е. $\varphi \sim \varphi + 2\pi\,\mathrm{i}$, $\phi \sim \phi - 2\pi\sqrt{2}q$) с δ-функциональными вставками $\prod\limits_C \delta\ [\oint\limits_C w\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{2}\phi/q}]$ для набора негомологичных циклов C. Каждая δ-функция может быть представлена в виде $\int d\lambda\, \exp\, [\mathrm{i}\lambda \oint w\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{2}\phi/q}]$. Разлагая экспоненту в ряд, мы увидим, что конформные блоки в модели WZNW являются линейными комбинациями корреляторов свободных полей с дополнительными вставками операторов $Q = \oint w\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{2}\phi/q}$ - так называемых экранирующих операторов [132].

4.2. Модель WZNW: общий случай. Общий алгоритм построения представления свободных полей для произвольной алгебры КМ $\widehat{G}$ сформулирован в [44] следующим образом:

1. Зафиксируем систему положительных корней Δ_+ и введем два поля ψ_α, χ_α для каждого $\alpha \in \Delta_+$.

2. Воспользуемся разложением Гаусса, $g = g_U(\psi) g_D(\varphi) g_L(\chi)$, для того, чтобы представить матрицу токов $g^{-1}\partial g$ в виде

$$\widetilde{J} = g^{-1}\partial g = g_L^{-1}(\chi)\widetilde{J}_{(0)}(\psi;\varphi) g_L(\chi) + g_L^{-1}(\chi)\partial g_L(\chi). \tag{88}$$

На диагонали верхней треугольной матрицы $\widetilde{J}_{(0)}$ автоматически окажется $g_D^{-1}(\varphi)\partial g_D(\varphi)$, а остальные элементы, определенные функциями ψ и φ, обозначим $\widetilde{w}_\alpha$.

3. Введем новые поля $w_\alpha = w_\alpha(\psi, \chi; \varphi)$, линейно зависящие от $\{\widetilde{w}_\alpha\}$, по правилу

$$k \operatorname{tr} g_L^{-1}\bar{\partial} g_L \widetilde{J}_{(0)} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} w_\alpha \bar{\partial}\chi_\alpha. \tag{89}$$

4. 1-форму $d^{-1}\Omega = k \operatorname{tr} g_L^{-1}\,\bar{\partial} g_L \widetilde{J}_{(0)}$ следует рассматривать как симплектическую структуру ($\Omega \sim dpdq$, $d^{-1}\Omega \sim pdq$), которая определяет операторные разложения для полей w и χ. В частности, (89) подразумевает, что w и χ являются переменными Дарбу, точнее, β-, γ-системой со спином 1, и $w_\alpha(z)\,\chi_\beta(0) = \delta_{\alpha\beta}/z + \mathrm{reg}$.

5. Теперь надо выразить $\widetilde{J}$ (изначально определенное через ψ, χ, φ) в терминах переменных w, аккуратно учитывая правила нормального упорядочивания. Тогда $k\widetilde{J}(\widetilde{w}, \chi, \varphi) = J(w, \chi, \varphi) + F(\chi)$, где $F(\chi)$ - некоторая матричная функция от χ.

6. Поля φ_i также являются свободными (индекс i фактически нумерует линейно-независимые веса фундаментального представления μ_i, лежащие в картановской подалгебре). Операторные разложения φ_i имеют вид $\varphi_i(z)\varphi_j(0) = \mu_i\mu_j \dfrac{q^2}{k^2}\lg z + \mathrm{reg}$, где $q^2 = k + g_V$, а g_V - дуальное число Кокстера (квадратичный казимир в присоединенном представлении). Свободные скалярные поля $\vec{\phi}$ с обычным операторным разложением, $\vec{\alpha}\,\vec{\phi}(z)\,\vec{\beta}\,\vec{\phi}(0) = -(\vec{\alpha}\,\vec{\beta})\lg z + \mathrm{reg}$, связаны с φ преобразованием $\vec{\mu}_i\vec{\phi} = = i\dfrac{k}{q}\varphi_i$.

Тогда токи $J(w, \chi, \phi)$ образуют алгебру КМ с центральным зарядом k, а сугаваровский тензор энергии-импульса квадратичен по полям:

$$T = \frac{1}{2q^2} : \mathrm{tr}\, J^2 : = \frac{1}{2q^2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} : (J_{-\alpha} J_\alpha + J_\alpha J_{-\alpha} - \frac{1}{C_V} H_\alpha H_\alpha) : = \\ = \sum_{\alpha \in \Delta_+} w_\alpha \partial \chi_\alpha - (\partial \vec{\phi})^2 - \frac{\mathrm{i}}{q} \vec{\rho} \partial^2 \vec{\phi}. \qquad (90)$$

Здесь $\vec{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \vec{\alpha}$. Эта операция соответствует диагонализации лагранжиана Новикова - Виттена (71) в терминах свободных полей. В конформной калибровке с учетом аномалии лагранжиан имеет вид

$$4\pi \mathfrak{L}_q = - \sum_{\alpha \in \Delta_+} w_\alpha \bar{\partial} \chi_\alpha + \frac{1}{2} |\partial \vec{\phi}|^2 + \frac{\mathrm{i}}{q} R \vec{\rho} \vec{\phi}. \qquad (91)$$

К сожалению, вывод квантовой меры (аномалии) в общем случае менее изящен, чем для $Sl(2)$ (см. подробности в [44]). По-видимому, в общей ситуации мера с самого начала отлична от меры Хаара. Явные примеры применения алгоритма для алгебр A_2, A_3, B_2 приведены в [44]. Представление свободных полей для алгебры токов $Sl(3)$ было впервые предложено в [142], и позднее в [148]. Фрагмент ответа в общем случае (полученный развитием общих идей Фейгина - Фукса) был опубликован Фейгиным и Френкелем в 1988 г. [145], а полный анализ - недавно в [146]. Близкие результаты содержатся также в [147]. Важную роль в анализе соответствующей теории представлений играют неабелевы аналоги оператора Фейгина - Фукса, а также изучаемые в [146]. На языке конформных моделей они известны как экранирующие операторы и рассматриваются в [44]. Число последующих работ на эту тему весьма велико (см., например, [148-150, 152-154]).

4.3. Парафермионы и связанные с ними косет-конструкции. Имея описание моделей WZNW в терминах полей с квадратичным действием, можно надеяться сформулировать в аналогичных терминах произвольную двумерную конформную теорию. Это связано с выделенностью теорий, обладающих симметрией относительно алгебры токов, среди всех двумерных конформных теорий, и распространенным убеждением, что практически любая конформная теория поля может быть получена некоторой редукцией модели WZNW. В этом пункте демонстрируется возможность провести редукцию таким образом, что на каждом этапе мы будем иметь дело с теорией свободных полей.

Начнем с описания так называемой косет-конструкции [160], которая позволяет по моделям WZNW с алгеброй G и ее подалгеброй H строить так называемую косет-модель G/H с центральным зарядом $c_G - c_H$. Для того чтобы получить такую косет-модель на языке свободных полей, нужно «бозонизовать» исходную G-теорию с помощью полей ϕ_i $(i = 1, ..., \mathrm{rank}\, G)$, u_α и v_α $(\alpha = 1, ..., |\Delta_+| = \frac{1}{2}(\dim G - \mathrm{rank}\, H))$; эти поля связаны с w_α, χ_α-парой для каждого положительного корня $\alpha \in \Delta_+$ формулами (89) и дополнительной бозонизацией ξ-, η-системы в терминах скалярного поля v. Затем следует разделить свободные переменные, описывающие группу G, линейными преобразованиями на две взаимно ортогональные (в смысле операторного разложения) подсистемы, одна из которых описывала бы WZNW-модель, построенную по подалгебре H, а другая - косет-теорию G/H.

Вследствие линейности преобразований и ортогональности этих двух подсистем тензор энергии-импульса разбивается на две части:

$$T_G = T_H + T_{G/H}, \tag{92}$$

которые будут квадратичными по полям. Эта процедура имеет один и тот же вид для теорий, построенных по произвольным полупростым алгебрам G и подалгебрам H.

Следуя [155], обсудим в качестве примера теорию $\mathbb{Z}_k$-парафермионов [134, 190], которую можно рассматривать как косет $Sl(2)_k/U(1)_k$. Перепишем формулы бозонизации (84) через поля ϕ, u и v:

$$\begin{aligned} J^+ &= \partial v\, \mathrm{e}^{-u+\mathrm{i}v};\ J^0 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\, q\partial\phi + \partial u\,; \\ J^- &= [\sqrt{2}q\partial\phi - \mathrm{i}q^2\partial u + (1-q^2)\partial v]\, \mathrm{e}^{u-iv}. \end{aligned} \tag{93}$$

Профакторизуем эту алгебру по картановскому току J^0. При этом следует заметить, что ток J^0 можно записать в стандартном для бозонизации $U(1)_k$ виде, вводя новую линейную комбинацию исходных полей: $h = \frac{1}{\sqrt{k}}(q\phi - i\sqrt{2}u)$ и $J^0 = \mathrm{i}\frac{\sqrt{k}}{2}\partial h$. Теперь, следуя общей идеологии, нам следует перейти к новым взаимно ортогональным переменным, одной из которых является поле h. Такими переменными будут являться h, v и новое поле $\mathfrak{U}$, определенное как другая линейная комбинация u и ϕ: $\mathfrak{U} = \frac{1}{\sqrt{k}}(qu + \mathrm{i}\sqrt{2}\phi)$. В новых переменных тензор энергии-импульса будет иметь вид

$$T = T_u + T_\nu + T_\phi = T_{u(1)}(h) + T_{\mathrm{pf}}(\mathfrak{U}, \nu) =$$
$$= -\frac{1}{2}(\partial h)^2 + [-\frac{1}{2}(\partial \mathfrak{U})^2 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{k}}{q}\partial^2\mathfrak{U} - \frac{1}{2}(\partial\nu)^2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial^2\nu]. \qquad (94)$$

В выражении (94) легко выделяется часть, отвечающая $U(1)$-подгруппе, и остаются два поля $\mathfrak{U}$ и ν, описывающие парафермионы. Центральный заряд для системы парафермионов равен $c_{\mathrm{pf}} = c_{G/H} = \frac{3k}{k+2} - 1 = 2\,\frac{k-1}{k+2}$. Два других $SL(2)$-тока могут быть переписаны в новых переменных как

$$J^+ = \psi_1(\mathfrak{U}, \nu)\exp\left[\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{k}}\,h\right], \; J^- = \psi_1^+(\mathfrak{U}, \nu)\exp\left[-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{k}}\,h\right], \qquad (95)$$

где ψ_1 и ψ_1^+ - парафермионные токи [134]. Экранирующий оператор

$$Q = \oint \partial\nu\, \mathrm{e}^{-u+\mathrm{i}\nu-\mathrm{i}\sqrt{2}\phi/q} = \oint \partial\nu\, \mathrm{e}^{-\sqrt{k}\mathfrak{U}/q+\mathrm{i}\nu}. \qquad (96)$$

Аналогичный анализ более общих парафермионных и косет-моделей см. в [44, 151].

4.4. Гамильтонова редукция в случае $SL(2)$ (минимальные модели). Перейдем теперь к описанию предложенной в [156, 159] реализации гамильтоновой редукции Дринфельда - Соколова [191], которая в $SL(2)$-случае осуществляется наложением связей

$$J^+ = 1, \; J^0 = 0. \qquad (97)$$

При этом третий ток J^- становится генератором W-алгебры [134-136, 192], $W_2 = -J^-/q^2$, в данном случае совпадающей с алгеброй Вирасоро, порожденной тензором энергии-импульса редуцированной теории. Последнее утверждение легко понять непосредственно, заметив, что $T_{sl(2)} \sim :\mathrm{tr}\, J^2:$ превращается в J^-, если $J^+ = 1$ и $J^0 = 0$. Связи $J^+ = 1$ и $J^0 = 0$ могут быть разрешены явно относительно полей w и χ:

$$w = 1, \; \chi = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\, q\partial\,\phi, \qquad (98)$$

и, таким образом, редуцированная теория описывается одним скалярным полем ϕ. Подставляя выражения (98) в формулу для J^-, получаем

$$W_{2,\mathrm{cl}(\phi)} = -\frac{1}{q^2}J^-_{\mathrm{cl}} = -\frac{1}{2}(\partial\,\phi)^2 + \frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{2}q}\,\partial^2\phi. \qquad (99)$$

Естественно, эти формулы описывают лишь классическое приближение к точному квантовому ответу - решая нелинейные операторные уравнения типа $\chi w = \mathrm{i}\partial\phi/\sqrt{2}$, необходимо учитывать эффекты нормального упорядочивания. Поэтому формула (99) отличается от точного квантового выражения на поправки порядка $O(1/k)$; действительно, правильное квантовое выражение содержит $(k+1)/q$ вместо k/q во втором члене правой части (99). Однако это вычисление является наиболее простым способом воспроизвести классические выражения для W-генераторов $W_2, \ldots,$ W_{r+1} в случае ADE-групп старшего ранга. Для того чтобы найти точные квантовые формулы для W, необходимо работать в u-, v-, ϕ-представлении, в котором связи (97) сводятся к линейным условиям на поля u, v и ϕ так, что не возникает проблем с нормальным упорядочиванием.

Воспользуемся некоторой модификацией представления для w и χ, использованного выше в п.4.3: $w = \exp(-u - \mathrm{i}v), \chi = \mathrm{i}\partial v \exp(u + \mathrm{i}v)$. Теперь $Sl(2)$-токи, выраженные через поля u, v и ϕ, имеют вид

$$\begin{aligned} J^+ &= \mathrm{e}^{-u-iv}; \\ J^0 &= -\partial\left(u + \frac{\mathrm{i}q}{\sqrt{2}}\phi\right); \\ J^- &= [\,(q^2-1)\,(\partial v)^2 - \mathrm{i}q^2\partial u\partial v + \sqrt{2}q\partial v\,\partial\phi - \mathrm{i}(q^2-1)\partial^2 v]\,\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}, \end{aligned} \tag{100}$$

а тензор энергии-импульса дается выражением

$$T = T_{u,v} - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{\mathrm{i}}{q\sqrt{2}}\partial^2\phi. \tag{101}$$

Связи $J^+ = 1$, $J^0 = 0$ превращаются в следующие линейные уравнения:

$$u + \mathrm{i}v = 0, \;\; u + \mathrm{i}q\phi/\sqrt{2} = 0, \tag{102}$$

позволяющие легко выразить u и v через ϕ: $u = -\mathrm{i}v = -\mathrm{i}q\phi/\sqrt{2}$. Подставляя эти u и v в формулу для $J^-(u, v, \phi)$, получаем квантовый тензор энергии-импульса в редуцированной теории:

$$W_2 = -\frac{1}{q^2}J^- = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(q - \frac{1}{q})\partial^2\phi. \tag{103}$$

С точки зрения общей идеологии, описанной в начале этого пункта, приведенные выкладки означают, что надо сделать ортогональное преобразование в пространстве полей u, v и ϕ и ввести новые взаимно коммутирующие переменные

$$U = \frac{1}{\sqrt{2k}}(q^2 u + \mathrm{i}kv + \mathrm{i}q\sqrt{2}\,\phi),$$

$$H = -\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{k}}\,(u + \frac{\mathrm{i}q}{2}\,\phi),\ \Phi = \phi - \frac{\mathrm{i}q}{\sqrt{2}}\,(u + \mathrm{i}v).$$

Последнее поле Φ выбрано ортогональным к обеим связям, в то время как U и H являются их линейными комбинациями. В этих терминах гамильтонова редукция подразумевает, что необходимо просто ограничиться вершинными операторами, зависящими только от поля Φ, т.е. положить

$$U = 0,\ H = 0. \tag{104}$$

Естественно, линейное преобразование одинаково как в квантовом, так и в классическом случаях. Выражение для тензора энергии-импульса в терминах полей U, H и Φ имеет вид

$$\begin{aligned} T_{sl(2)} &= -\,\frac{1}{2}\,[\,(\partial U)^2 + (\partial H)^2 + (\partial\Phi)^2] \,-\, \frac{\sqrt{k}}{2}\,\partial^2 U + \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(q - \frac{1}{q})\partial^2\Phi = T_{\mathrm{red}}(\Phi) + T(U, H), \end{aligned} \tag{105}$$

и первый член в правой части является квантовым тензором энергии-импульса в редуцированной теории:

$$T_{\mathrm{red}}(\Phi) = -\,\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\frac{k+1}{q}\,\partial^2\Phi. \tag{106}$$

Соответственно центральный заряд равен

$$c_{\mathrm{red}} = 1 - 12\left[\frac{k+1}{\sqrt{2}q}\right]^2 = \frac{3k}{k+2} - 6k - 2.$$

Уравнение (106) также может быть переписано в виде

$$T_{\mathrm{red}}(\Phi) - \frac{1}{2}(\partial U)^2 - \frac{1}{2}(\partial H)^2 = T_{sl(2)} - \partial J^0 - \frac{k}{2}\,\partial^2(u + \mathrm{i}v) \tag{107}$$

(отметим, что $\partial J^0 = -\mathrm{i}\sqrt{(k/2)}\ \partial^2 H$). Это объясняет возникновение «деформации» сугаваровского тензора, введенной в [135] и обсуждавшейся в [148, 193, 194]. Отметим, что член $\partial^2(u + \mathrm{i}v)$ был пропущен, например в [148],по простой причине: условие $(u + \mathrm{i}v) = 0$ (или $J^+ = 1$) является связью первого рода, в отличие от связи второго рода $J^0 = 0$, ведущей к уравнению $H = 0$. Поэтому можно положить $(u + \mathrm{i}v) = 0$ с самого начала, в то время как член ∂J^0 требует более внимательного рассмотрения.

Два экранирующих оператора $SL(2)_k$-модели WZNW имеют вид

$$Q_{\pm} = \int \tilde{J}_{\pm}\,,\ \ \tilde{J}_{+} = w\exp\,(-\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{q}\,\phi),\ \ \tilde{J}_{-} = w^{-(k+2)}\exp\,(\mathrm{i}\sqrt{2}\,q\phi). \tag{108}$$

(Только первый из них допускает интерпретацию как результат замены переменных, см. п.4.1. Вопрос об интерпретации второго оператора, фактически возникающего как несингулярный оператор при $k \geq -2$ только после редукции, пока до конца не выяснен.) Если переписать операторы $Q_\pm$ в терминах полей, U, H, Φ, то они будут зависеть только от поля Φ:

$$Q_+ = \oint \exp\left(-\frac{i\sqrt{2}}{q}\Phi\right), \quad Q_- = \oint \exp\left(i\sqrt{2}q\,\Phi\right).$$

Подстановкой $q^2 = m/n$ редуцированная теория $sl(2)_k$ превращается в обычную минимальную модель $M_{m,n}$ [23] с центральным зарядом $c = 1 - 6(q - 1/q)^2 = 1 - 6((m-n)^2/mn)$. Поле Φ является скалярным полем Доценко - Фатеева [132], а операторы $Q_\pm$ - экранирующие операторы в этом представлении.

Дальнейшие подробности о редукции Дринфельда - Соколова и лагранжевой интерпретации классических W-алгебр см. в [157-159, 195, 196]. В частности, в [157] рассматривается конформная модель, в которой W-генераторы являются нетеровскими токами. $Sl(2)$-версия этой модели возникает при геометрическом квантовании алгебры Вирасоро и после замены переменных превращается в теорию Лиувилля [138]. Эти результаты показывают, что и нелинейные симметрии в двумерной квантовой конформной теории поля могут рассматриваться как симметрии некоторого действия и описываться в терминах свободных полей. Тем самым открывается возможность лагранжевой формулировки моделей струн с расширенной нелинейной конформной симметрией, получивших в последнее время известность как W-струны и W-гравитация.

4.5. О понятии W_∞-алгебры. Обсудим здесь кратко структуру W_N-алгебр с точки зрения представления свободных полей (не затрагивая подразумеваемых более фундаментальным геометрическим описанием в [138, 157] дополнительных глобальных ограничений на эти поля). Подобное описание W-алгебр в терминах свободных полей по существу было сформулировано еще в [134, 135, 192] и во всех подробностях разработано в [136]. Согласно [156], это описание особенно удобно для понимания причин нарушения структуры алгебры для W-алгебр. Оно также привело в [156] к одному из первых указаний на восстановление этой структуры в пределе $N = \infty$. Это указание основано на выявлении двух источников нелинейности классических W_N-алгебр.

(Классическая) W-алгебра [192], ассоциированная с алгеброй Каца - Муди $\hat{G}$, может рассматриваться как фрагмент ее универсальной обертывающей алгебры. Ограничимся для конкретности алгеброй эрмитовых матриц $Sl(N)$. В [151] было отмечено, что операторы W_n имеют непосредственное отношение к операторам $\mathrm{Tr}J^n$, но лишь после определенной редукции. Проще всего с самого начала ограничиться лишь картановской подалгеброй в G и свободными полями $\phi = \{\phi_i\}$, $i = 1,\ldots,N$, с операторным разложением $\phi_i(z)\phi_j(0) = z^{-2}\delta_{ij} + \mathrm{reg}$. Тогда матрица токов J диагональна и ее компоненты равны $\mathrm{i}\vec{\mu}_i\,\partial\vec{\phi}$, где $\vec{\mu}_i$ - фундаментальные веса $Sl(N)$, обладающие двумя важными для дальнейшего свойствами:

$$\vec{\mu}_a\vec{\mu}_b = \delta_{ab} - 1/N, \quad \sum_{a=1}^{N}\vec{\mu}_a = 0. \tag{109}$$

Рассмотрим операторы

$$W_n \equiv \mathrm{Tr}\,J^n|_{\mathrm{Cart}} = \sum_{a=1}^{N}(\mathrm{i}\vec{\mu}_a\,\partial\vec{\phi})^n. \tag{110}$$

Совместно с

$$W_{(n_1\ldots n_k)} \equiv \sum_{a=1}^{N}(\mathrm{i}\vec{\mu}_a\,\partial\vec{\phi})^{n_1}\ldots(\mathrm{i}\vec{\mu}_a\,\partial^k\vec{\phi})^{n_k} \tag{111}$$

они образуют замкнутую операторную алгебру, например:

$$\begin{aligned} W_n(z)W_m(0) &= \sum_{a,b=1}^{N}(\mathrm{i}\vec{\mu}_a\,\partial\vec{\phi})^n(z)(\mathrm{i}\vec{\mu}_a\,\partial\vec{\phi})^m(0) = \\ &= \sum_{a,b=1}^{N}\sum_{k=1}^{\min(n,m)} k!G_k^nG_k^m\frac{(\vec{\mu}_a\vec{\mu}_b)^k}{z^{2k}} : (\mathrm{i}\vec{\mu}_a\,\partial\vec{\phi})^{n-k}(z)(\mathrm{i}\vec{\mu}_b\,\partial\vec{\phi})^{m-k}(0):. \end{aligned} \tag{112}$$

В (112) появились коэффициенты бинома $G_k^n = n!/k!(n-k)!$. Далее,

$$(\mu_a\mu_b)^k = (A\delta_{ab} + B)^k = (\delta_{ab} - 1/N)^k = a_k^{(N)}\delta_{ab} + b_k^{(N)}, \tag{113}$$

причем $a_k^{(N)} = (A+B)^k - B^k = (1-1/N)^k - (-1/N)^k$, а $b_k^{(N)} = B^k = (-1/n)^k$. Поэтому

$$\begin{aligned} &W_n(z)W_m(0) = \\ &= \sum_{k=0}^{\min(n,m)}\frac{k!C_k^n\cdot C_k^m}{z^{2k}}[a_k^{(N)}W_{n-k,\,m-k}(z,0) + b_k^{(N)} : W_{n-k}(z)W_{m-k}(0):]. \end{aligned} \tag{114}$$

Здесь введено новое обозначение для билокального W-оператора:

$$W_{n,m}(z, 0) \equiv \sum_{a,b=1}^{N} :(\mathrm{i}\vec{\mu}_a\,\partial\vec{\phi})^n(z)(\mathrm{i}\vec{\mu}_a\,\partial\vec{\phi})^m(0): =$$
$$= W_{n+m}(0) + z\cdot n\cdot W_{(n+m-1,1)}(0) +$$
$$+ z^2[n(n-1)\cdot W_{(n+m-2,2)}(0) + \frac{n}{2}\,W_{(n+m-1,0,1)}(0)] + \ldots$$

Существенно, что $W_{n,m}(z, 0)$ является линейной комбинацией исходных локальных W-операторов (111). В классическом пределе алгебра операторов (110) замкнута сама по себе. Аналогичным образом можно найти и операторные разложения любых других операторов (111). При этом уравнение (113) всегда гарантирует, что в этом операторном разложении возникнут две структуры: линейная по W с коэффициентом, пропорциональным $a_k^{(N)}$, и билинейная по W с коэффициентом $b_k^{(N)}$. В пределе $N \to \infty$, $b_k^{(N)} \to 0$, и квадратичные члены исчезают. Этим по существу и объясняется восстановление структуры алгебры Ли для W_∞. На самом деле, помимо разобранного источника нелинейности (связанного с рассмотрением алгебры $G = Sl(N)$ вместо $Gl(N)$), имеется еще один, даже более простой, по крайней мере для обсуждения на классическом уровне [158].

Дело в том, что имея в распоряжении только N переменных $F_a = \mathrm{i}\vec{\mu}_a\,\partial\vec{\phi}$ (на самом деле к тому же $\sum_a F_a = 0$), рассматриваемых как c-числа, можно выразить любое $W_n = \sum_{a=1}^{N} F_a$ с $n > N$ через $W_1, \ldots, W_N$:

$$W_{n>N} = \mathcal{F}_n^{(N)}[W_1, \ldots, W_N]. \tag{115}$$

Функции $\mathcal{F}_n^{(N)}$ могут быть определены рекуррентным образом:

$$\mathcal{F}_n^{(0)} \equiv 0;\quad \mathcal{F}_{n>N}^{(N)} = \mathcal{F}_n^{(N-1)} + \frac{1}{N}(W_N - \mathcal{F}_N^{(N-1)})W_{n-N} \tag{116}$$

и сильно нелинейны. В результате коммутатор операторов W_n и W_m, содержащий W_l с $l > N$, может быть переписан как нелинейная комбинация $W_1, \ldots, W_N$. Понятно, что этот источник нелинейности также исчезает в пределе $N \to \infty$. Можно перейти к новому базису $\{\widetilde{W}_n\}$, нелинейно связанному с $\{W_n\}$, такому, что условия (115) приобретут вид

$$\widetilde{W}_{N+1}, \widetilde{W}_{N+2} \ldots = 0. \tag{117}$$

Переменные $\widetilde{W}$ - стандартные операторы Замолодчикова. В [136, 192] непосредственным вычислением было показано, что алгебра операторов $\widetilde{W}_1, \ldots, \widetilde{W}_N$ остается замкнутой и на квантовом уровне (что, как мы видели, не происходит в случае $W_1, \ldots, W_N$ - в операторных разложениях возникают также другие операторы (111), и полное число таких операторов бесконечно). Ясного понимания причин замыкания квантовой $\widetilde{W}_N$-алгебры пока нет.

Явное соотношение между наборами переменных $\{W_n\}$ и $\{\widetilde{W}_n\}$ проще всего записать в терминах производящих функций, $\widetilde{W}(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{W}_n t^n$ и $W(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} W_n t^n$:

$$W(t) = \frac{t d\widetilde{W}(t)/dt}{1 - W(t)}, \quad \widetilde{W}(t) = 1 - \exp\left[-\int^t \frac{W(t)dt}{t}\right]. \tag{118}$$

Тождества (115), (117) в этих терминах означают, что $\widetilde{W}(t)$ - полином степени N по t: $(d/dt)^{N+1}\widetilde{W}(t) = 0$.

4.6. Обобщенная конструкция Сугавары. Стандартная конструкция Сугавары [197, 198] позволяет строить генераторы алгебры Вирасоро (тензор энергии-импульса) по генераторам алгебры КМ $\widehat{G}$ (токам): $T(z) = [2(k + g_G)]^{-1}$:Tr $J^2(z)$: (k - центральный заряд алгебры $\widehat{G}$, g_G - дуальное число Кокстера). Естественно возникает вопрос о наиболее общем соотношении такого рода. Поскольку (с точностью до аномалий) $J(z)$ - 1-дифференциалы, а $T(z)$ - квадратичный дифференциал, такому соотношению естественно быть квадратичным (возможны также простые поправки типа ∂J): $T(z) = G_{ab} J^a J^b(z)$. Условия на коэффициенты C_{ab}, $a, b = 1, \ldots, \dim G$, были найдены независимо в [161, 162]:

$$\begin{aligned} C^{ab}C^{cd}(f^{ace}f^{bme}\delta^{dn} - f^{ace}f^{dme}\delta^{bn} - f^{acm}f^{bdn} + \\ + k\delta^{ac}\delta^{bm}\delta^{dn} + (m \leftrightarrow n)) = C^{mn}. \end{aligned} \tag{119}$$

Центральный заряд алгебры Вирасоро равен при этом

$$c = 2kC^{aa}. \tag{120}$$

Простейшими решениями системы уравнений (119) являются:

$$\text{сугаваровское, } C^{ab} = \delta^{ab}/2(k + g_G), \text{ и}$$

$$\text{GKO, } C^{ab} = \delta^{ab}_{\perp}/2(k + g_G) + \delta^{ab}_{||}\,[1/2(k + g_G) - 1/2(k + g_H)]$$

(здесь $\perp$ и $||$ обозначают подпространства соответственно ортогональное и параллельное подалгебре $H \subset G$ по отношению к форме Киллинга). Нетривиальное однопараметрическое семейство решений (119) было найдено в [161] для алгебры КМ $Sl(2)_{k=4}$. Оно отвечает значению $c = 1$, и в [163] было продемонстрировано его соотношение со стандартным семейством конформных моделей с центральным зарядом 1 (обычно описываемым в терминах свободного бозонного поля со значениями в окружности или отрезке (Z_2-орбифолде) произвольной длины). Явная форма решения приведена в [161]. Впоследствии [164 -167] и других работах было обнаружено множество других решений уравнений (119). Полная их классификация пока неизвестна. Одним из достоинств такого подхода к построению конформных моделей является возможность получать заведомо унитарные теории, стартуя с унитарных представлений алгебры КМ. О связи этой «обобщенной конструкции Сугавары» с «квазиточнорешаемыми» моделями квантовой механики [191 - 201] и с рациональными конформными теориями см. [161].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре излагались результаты о пертурбативных вычислениях в теории струн. Как уже говорилось во введении, это весьма ограниченная часть струнной теории (но пока что единственная хорошо разработанная). Сам смысл учета флуктуаций полей только одной конкретной струнной модели (т.е. многопетлевые вычисления для одной конкретной конформной модели) в рамках полной теории струн не вполне ясен: такой подход был бы разумен только при наличии малого параметра, подавляющего квантовые переходы между различными струнными моделями. Поэтому основное предназначение изложенного формализма с точки зрения теории струн состоит в нахождении адекватного языка, делающего более или менее естественными дальнейшие обобщения. В настоящее время имеются три содержательных направления развития формализма первичного квантования, нацеленных на создание полной теории струн. Первое направление связано с исследованием бесконечномерного универсального пространства модулей [81 - 86]; второе - с изучением интегрируемых моделей [173, 174] и алгебр двойных петель (см. по этому поводу [129,130]; третье, тесно связанное с обоими предыдущими, опирается на так называемый формализм случайных триангуляций или матричных моделей [125-128] (см. также [202]). Все подходы имеют много общего [203,204], что позволяет надеяться на их согласованность и адекватность. Обсуждение этих перспектив, однако, выходит за рамки настоящего обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nambu Y.** - Lectures at Copenhagen. Symposium, 1970.
2. **Goto T.** - Progr. Theoret. Phys., 1971, vol.46, p.1560.
3. **Koba Z., Nielsen H.** - Nucl. Phys. B, 1969, vol.10, p.633; vol.12, p.517-536.
4. **Lovelace C.** - Phys. Lett. B, 1970, vol.34, p.703.
5. **Shapiro J.** - Phys.Lett. B, 1986, vol.176, p.36.
6. **Alessandrini V.** - Nuovo Cimento A, 1971, vol.12, p.321; **Alessandrini V., Amati D.** - Nuovo Cimento A, 1971, vol.4, p.793.
7. **Neveu A., Shwarz J.** - Nucl. Phys. B, 1971, vol.31, p.86-106.
8. **Ramond P.** - Phys. Rev. D, 1971, vol.3, p.2415.
9. **Scherk J., Schwarz J.** - Nucl. Phys. B, 1974, vol.81, p.118-144; Phys. Lett. B, 1975, vol.57, p.463-466.
10. **Gliozzi F., Olive D., Scherk J.** - Phys. Lett. B, 1976, vol.65, p.282-285; Nucl. Phys. B, 1977, vol.122, p.253-290.
11. **Polyakov A.** - Phys. Lett. B, 1981, vol.103, p.207-210; p.211-214.
12. **Fradkin E.S., Tseytlin A.A.** - Phys. Lett. B, 1985, vol.158, p.316; vol.160, p.69-76; Nucl. Phys. B, 1985, vol.261, p.1-27.
13. **Schwarz J.** - Phys. Repts., 1982, vol.84, p.223; **Green M.** - Surv. in High En. Phys., 1982, vol.3, p.127.
14. **Green M., Schwarz J.** - Phys. Lett. B, 1984, vol.149, p.117; 1985, vol.151, p.21-25.
15. **Gross D., Harvey J., Martinec E., Rohm R.** - Phys. Rev. Lett., 1985, vol.54, p.502; Nucl. Phys. B, 1985, vol.256, p.253-284; 1986, vol.267, p.75-124.
16. **Green M., Schwarz J., Witten E.** - Superstring Theory. Cambridge Univ. Press, 1987, vol.1,2.
17. **Polyakov A.M.** - Gauge Fields and Strings. Harwood Acad. Publ., 1987.
18. **Alvarez O.** - Nucl. Phys. B, 1983, vol.216, p.125-184.
19. **Belavin A., Knizhnik V.** - Phys. Lett. B, 1986, vol.168, p.201. **Белавин А.А., Книжник В.Г.** - ЖЭТФ, 1986, т.91, с.364.
20. **Манин Ю.И.** - Письма в ЖЭТФ, 1986, т.43, с.184.
21. **Beilinson A.A., Manin Yu.I.** - Comm. Math. Phys., 1986, vol.107, p.359.
22. **Морозов А.Ю., Рослый А.А.** - Письма в ЖЭТФ, 1987, т.45, вып.4, с.168-171; ЯФ, 1989, т.49, вып.1, с.256-261; ЖЭТФ, 1989, т.95, вып.2, с.428-441.
23. **Belavin A., Polyakov A., Zamolodchikov A.** - Nucl. Phys. B, 1984, vol.241, p.333-380.
24. **Баранов М.А., Шварц А.С.** - Письма в ЖЭТФ, 1985, т.42, с.340.
25. **Зограф П.Г., Тахтаджян Л.А.** - УМН, 1987, т.42, вып.6, с.133-150; Мат. сб., 1987, т.132, вып.2, с.147-166.
26. **Белавин А.А., Книжник В.Г., Морозов А.Ю., Переломов А.М.** - Письма в ЖЭТФ, 1986, т.43, вып.7, с.319-321.
27. **Moore G.** - Phys.Lett.B, 1986, vol.176, p.69.
28. **Kato A., Matsuo Y., Odake S.** - Phys. Lett. B, 1986, vol.179, p.241.
29. **Knizhnik V.** - Phys. Lett. B, 1986, vol.180, p.247.
30. **Alvarez-Gaume L., Bost J., Moore G., Nelson P., Vafa C.** - Phys. Lett. B, 1986, vol.178, p.41; Comm. Math. Phys., 1987, vol.112, p.503.
31. **Verlinde E., Verlinde H.** - Nucl. Phys.B, 1987, vol.288, p.357-396.
32. **Atick J., Sen A.** - Phys. Lett. B, 1987, vol.186, p.339; Nucl. Phys. B, 1987, vol.286, p.189-210.
33. **Atick J., Sen A.** - Nucl. Phys. B, 1987, vol.293, p.317-347; 1988, vol.296, p.157-186.
34. **Semikhatov A.** - Phys. Lett. B, 1988, vol.212, p.357; 1989, vol.220, p.406; vol.221, p.432; Nucl. Phys. B, 1989, vol.315, p.222-248; Mod. Phys. Lett. A, 1988, vol.3, p.1689.
35. **Semikhatov A.** - Nucl. Phys. B, 1990, vol.331, p.375-390.
36. **Gerasimov A.** - Preprint ITEP-14-91.

37. Морозов А.Ю. - ЯФ, 1988, вып.3(9), с.869-885.
38. Гриффитс Ф., Харрис Дж. - Принципы алгебраической геометрии: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
39. Мамфорд Д. - Лекции о тета-функциях: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
40. Fay J.D. - Lect. Notes in Math, 1973, vol.352.
41. Аракелов С. - Изв. АН СССР, Сер. мат., 1974, т.38, с.1179.
42. Квиллен Д. - Функц. анализ и его прилож., 1985, т.19, с.37.
43. Faltings G. - Ann. Math., 1984, vol.119, p.387.
44. Gerasimov A., Marshakov A., Morozov A. et al. - Intern. J. Mod. Phys. A, 1990, vol.5, No.13, p.2495-2589.
45. Морозов А.Ю., Переломов А. - Комплексная геометрия и теория струн. - Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1990, т.54, с.197-279.
46. Морозов А.Ю. - ЯФ, 1987, т.45, вып.1, с.287-292.
47. Zamolodchikov Al. - Nucl. Phys. B., 1987, vol.285, p.481-503.
48. Лебедев Д.Р., Морозов А.Ю. - ЯФ, 1988, т.47, вып.3, с.853-871.
49. Knizhnik V. - Comm. Math. Phys., 1987, vol.112, p.567.
50. Bershadsky M., Radul A. - Intern. J. Mod. Phys. A, 1987, vol.2, p.165.
51. Gava E., Iengo R. - Phys. Lett. B, 1987, vol.187, p.22.
52. Gliozzi F. - Phys. Lett. B, 1987, vol.194, p.30.
53. Montano D. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.297, p.125-140.
54. Gross D., Mende P. - Phys. Lett. B, 1987, vol.197, p.129.
55. Crncović Č., Sotkov G. - Nucl. Phys. B, 1989, vol.327, p.368-398.
56. Морозов А.Ю. - ЯФ, 1987, т.45, вып.2, с.581-588.
57. Морозов А.Ю., Ольшанецкий М.А. - ЯФ, 1987, т.46, вып.3(9), с.986-998.
58. Dijrkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H. - Comm. Math. Phys., 1988, vol. 115, p.649.
59. Miki K. - Phys. Lett. B, 1987, vol.191, p.127; Nucl. Phys. B, 1987, vol.291, p.349-368.
60. Friedan D., Martinec E., Shenker S. - Nucl. Phys. B, 1986, vol.271, p.93-165.
61. Knizhnik V. - Phys. Lett. B, 1987, vol.196, p.173.
62. Verlinde E., Verlinde H. - Phys. Lett. B, 1987, vol.192, p.95.
63. Losev A. - Phys. Lett. B, 1989, vol.226, p.62.
64. Atick J., Rabin J.M., Sen A. - Nucl. Phys B, 1988, vol.299, p.279-294.
65. Atick J., Moore G., Sen A. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.307, p.221-273; vol.308, p.1-101.
66. Новиков С.П. - ДАН СССР, 1981, т.260, с.222; Функц. анализ и его прилож., 1981, т.15, вып.4, с.37; УМН, 1982, т.37, вып.5, с.2; Новиков С.П., Шмельцер И. - Функц. анализ и его прилож., 1981, т.15, вып.3, с.54.
67. Witten E. - Nucl. Phys. B, 1983, vol.223, p.422-432; 433-444.
68. Witten E. - Comm. Math. Phys., 1984, vol.92, p.483.
69. Knizhnik V., Zamolodchikov A. - Nucl. Phys. B, 1986, vol.247, p.83-103.
70. Gepner D., Witten E. - Nucl. Phys. B, 1986, vol.278, p.493-549.
71. Кричевер И.М., Новиков С.П. - Функц. анализ и его прилож., 1987, т.21, вып.2, с.46; вып.4, с.47.
72. Beilinson A.A., Manin Yu.I., Shekhtman V.V. - Lect. Notes in Math., 1987, vol.1289, p.52-66.
73. Beilinson A., Shekhtman V. - Comm. Math. Phys., 1988, vol.118, p.651-701.
74. Vafa C. - Phys. Lett. B, 1987, vol.190, p.47.
75. Alvarez-Gaume L., Gomez C., Moore G., Vafa C. - Nucl.Phys. B, 1988, vol.303, p.455-521.
76. Alvarez-Gaume L., Gomez C., Nelson P., Sierra G., Vafa C. - Nucl. Phys. B, 1989, vol.311, p.333-400.
77. Le Clair A. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.303, p.189-225.
78. Losev A., Morozov A., Rosly A., Shatashvili S. - Phys. Lett. B, 1989, vol.216, p.94.
79. Segal G., Wilson G. - Publ. Math de l'I.H.E.S., 1985, vol.61, p.1.
80. Прессли Э., Сигал Г. - Группы петель: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

81. Friedan D., Shenker S. - Phys. Lett. B, 1986, vol.175, p.267; Nucl. Phys. B, 1987, vol.281, p.509-538.
82. Ishibashi N., Matsuo Y., Ooguri H. - Mod. Phys. Lett. A, 1987, vol.2, p.119.
83. Alvarez-Gaume L., Gomez C., Reina C. - Phys. Lett. B, 1987, vol.190, p.55.
84. Witten E. - Preprint PUTP-1057, 1987.
85. Matsuo Y. - PhD Thesis., 1987.
86. Морозов А. - Письма в ЖЭТФ, 1987, т.45, вып.10, с.457-460.
87. Green M., Schwarz J. - Phys. Lett. B, 1984, vol.136, p.367; Nucl. Phys. B, 1984, vol.243, p.285-306.
88. Martinec E. - Nucl. Phys. B, 1987, vol.281, p.157-210.
89. D'Hoker E., Phong D.H. - Rev. Mod. Phys., 1988, vol.60, p.917.
90. Baranov M., Frolov I., Manin Yu., Schwarz A.S. - Comm. Math. Phys., 1987, vol.111, p.373.
91. Harris J., Moore G., Nelson P., Singer I. - Phys. Lett. B, 1986, vol.178, p.167.
92. Воронов А. - Функц. анализ и его прилож., 1988, т.22, с.67-68; Voronov A. - Comm. Math. Phys., 1990, vol.131, p.179-218.
93. Rosly A., Schwarz A., Voronov A. - Comm. Math. Phys., 1988, vol.113, p.129-152; 1989, vol.120, p.437-450.
94. Verlinde H. - PhD Thesis, 1989.
95. Морозов А., Переломов А. - Письма в ЖЭТФ, 1986, т.44, вып.46 с.157-160.
96. Moore G., Morozov A. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.306, p.387-404.
97. Морозов А., Переломов А. - Письма в ЖЭТФ, 1987, т.46, вып.4, с.125-129.
98. Морозов А., Переломов А. - ЖЭТФ, 1989, т.95, вып.4, с.1153-1161.
99. Морозов А. - Теорет. мат. физ., 1989, т.81, вып.1, с.24-35.
100. Морозов А. - Письма в ЖЭТФ, 1988, т.47, вып.4, с.181-184.
101. Gava E., Iengo R., Sotkov G. - Phys. Lett. B, 1988, vol.207, p.283.
102. Koh I.-G., Lust D., Theisen S. - Phys. Lett. B, 1988, vol.208, p.433-439.
103. Lechtenfeld O., Parkes A. - Phys. Lett. B, 1988, vol.202, p.75.
104. Lechtenfeld O. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.309, p.361-378.
105. Aldazabal G., Bonini M., Iengo R., Nunez C. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.307, p.291-318.
106. Iengo R., Zhu C.-J. - Phys. Lett. B, 1988, vol.212, p.313.
107. Gava E., Iengo R., Zhu C.-J. - Preprint SISSA-23EP, 1989.
108. Zhu C.-J. - PhD Theisis. ISAS, 1990.
109. Yasida O. - Phys. Rev. Lett., 1988, vol.160, p.1688; Phys. Lett. B, 1988, vol.215, p.299; vol.218, p.455.
110. Lechtenfeld O. - Preprint CCNY-HEP-89/09.
111. Морозов А. - ЯФ, 1990, т.51, вып.1, с.301-303.
112. Kallosh R., Rahmanov M. - Phys. Lett. B, 1988, vol.209, p.233.
113. Каллош Р., Морозов А. - ЖЭТФ, 1988, т.94, вып.8, с.42-56.
114. Каллош Р., Морозов А. - Письма в ЖЭТФ, 1988., т.47, вып.11, с.545-547.
115. Carlip S. - Nucl. Phys. B, 1987, vol.284, p.365-385.
116. Kallosh R. - Phys. Lett. B, 1987, vol.195, p.369-376; 1989, vol.225, p.49-56.
117. Batalin I.A., Fradkin E.S. - Phys. Lett. B, 1983, vol.122, p.157; Nucl. Phys. B, 1987, vol.279, p.514-528.
118. Batalin I.A., Vilkovisky G.A. - Phys. Lett. B, 1981, vol.102, p.27; Phys. Rev. D, 1983, vol.28, p.2567.
119. Batalin I.A., Fradkin E.S., Fradkina T.E. - Nucl. Phys. B, 1989, vol.314, p.158-174.
120. Gilbert G., Johnston D. - Phys. Lett. B, 1988, vol.205, p.273.
121. Nissimov E., Pacheva S., Solomon S. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.279, p.349-373; 1989, vol.317, p.344-394.
122. Kraemmer U., Rebhan A. - Preprint ITP-Wien-89-0803.
123. Chu M. - PhD Theisis, 1990; Preprint UFIFT-HEP-90-9.

124. Замолодчиков А. - Письма в ЖЭТФ, 1986, т.43, с.730; ЯФ, 1987, т.46, с.1090.
125. Kazakov V. - Mod. Phys. Lett. A, 1989, vol.4, p.2125.
126. Douglas M., Shenker S. - Nucl Phys. B, 1990, vol.335, p.635-654.
127. Brezin E., Kazakov V. - Phys.Lett. B, 1990, vol.236, p.144.
128. Gross D., Migdal A. - Phys. Rev. Lett., 1990, vol.64, p.127; Nucl.Phys. B, 1990, vol.340, p.333-366.
129. Gerasimov A., Lebedev D., Morozov A. - Intern. J. Mod. Phys. A, 1991, vol.6, No.6, p.977-988.
130. Morozov A. - Mod. Phys. Lett. A, 1991, vol.6, No.16, p.1525-1532.
131. Фейгин Б., Фукс Д. - Функц. анализ и его прилож., 1982, т.16, с.47; 1983, т.17, с.241.
132. Dotsenko V., Fateev V. - Nucl. Phys. B, 1984, vol.240, p.312-348.
133. Gervais J.-L., Neveu A. - Nucl. Phys. B, 1986, vol.264, p.557-572; Bilal A., Gervais J.-L. - Nucl. Phys. B, 1989, vol.318, p.579-630.
134. Замолодчиков А., Фатеев В. - ЖЭТФ, 1985, т.62, с.215.
135. Belavin A. - Lecture at Taniguchi Foundation Symposium. Kyoto, 1987.
136. Fateev V., Lukyanov S. - Intern. J. Mod. Phys. A, 1988, vol.3, p.507.
137. Moore G., Seiberg N. - Comm. Math. Phys., 1989, vol.123, p.77.
138. Alekseev A., Shatashvili S. - Nucl. Phys. B, 1989, vol.323, p.719-733.
139. Felder G. - Nucl. Phys. B, 1989, vol.317, p.215-236; vol.324, p.548.
140. Герасимов А., Морозов А. - Письма в ЖЭТФ, 1988, т.48, вып.8, с.409-412.
141. Gerasimov A. - Preprint ITEP-13-91.
142. Морозов А. - Письма в ЖЭТФ, 1989, т.49, вып.6, с.305-308.
143. Wakimoto M. - Comm. Math. Phys., 1986, vol.104, p.605.
144. Zamolodchikov A. - Lectures at the Montreal Symposium, 1988.
145. Фейгин Б., Френкель Э. - УМН, 1988, т.43, с.227.
146. Feigin B., Frenkel E. - Comm. Math. Phys., 1990, vol.128, p.161-189; Lett. in Math. Phys., 1990, vol.19, p.307-317.
147. Доценко В. - Лекции на Киевской школе физики, 1989.
148. Bershadsky M., Ooguri H. - Comm. Math. Phys., 1989, vol.126, p.49.
149. Gawedzki K., Kupiainen A. - Nucl. Phys B, 1989, vol.320, p.625-669.
150. Balog J., Feher L., Forgacs P. et al. - Phys. Lett. B, 1989, vol.227, p.214.
151. Bais A., Bouwknegt P., Surrige M., Schoutens K. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.304, p.348-370; Ibid. p.371-391.
152. Bernard D., Felder G. - Comm. Math. Phys., 1990, vol.127, p.145.
153. Di.Vecchia P., Frau M., Hornfeck K. et al. - Nucl. Phys., 1989, vol.322, p.317-372.
154. Bouwknegt P., McCarthy J., Pilch K. - Phys. Lett. B, 1990, vol.234, p.297.
155. Gerasimov A., Marshakov A., Morozov A. - Nucl. Phys. B, 1989, vol.328, p.664-676.
156. Герасимов А., Маршаков А., Морозов А. - ЯФ, 1990, т.51, вып.2, с.583-586.
157. Marshakov A., Morozov A. - Nucl. Phys. B, 1990, vol.339, p.79-94.
158. Морозов А. - ЯФ, 1990, т.52, с.1190.
159. Marshakov A., Morozov A. - Phys. Lett. B, 1990, vol.235, No.1,2, p.97-105.
160. Goddard P., Kent A., Olive D. - Phys. Lett. B, 1985, vol.152, p.88; Comm. Math. Phys, 1986, vol.103, p.105.
161. Morozov A., Perelomov A., Rosly A. et al. - Intern. J. Mod. Phys. A, 1990, vol.5, No.4, p.803-832.
162. Halpern M.B., Kiritsis E. - Mod. Phys. Lett. A,1989, vol.4, p.1973, 1797.
163. Morozov A., Shifman M., Turbiner A. - Intern. J. Mod. Phys. A, 1990, vol.5, No.15, p.2953-2991.
164. Halpern M.B., Kiritsis E., Obers N.A. et al. - Intern. J. Phys. A, 1990, vol.5, p.2275.
165. Schrans S., Troost W. - Preprint KUL-TF-90/4.
166. Mohammedi N. - Preprint ISAS-1990.
167. Halpern M.B., Obers N.A. - Preprint LBL-29356, 1990.
168. Кириллов А.А. - Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.

169. Alekseev A., Faddeev L.D., Shatashvili S. - J. Geom., 1989, vol.11, p.123.
170. Moyal J. - Proc. Camb. Phil. Soc., 1949, vol.45, p.99.
171. Baker G. - Phys. Rev., 1958, vol.109, p.2198.
172. Fairlie D.B. - Proc. Camb. Phil. Soc., 1964, vol.60, p.581.
173. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. - Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
174. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. - Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
175. Книжник В. - УФН, 1989, т.159, вып.3, с.401-453.
176. Morozov A. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.303, p.343-372.
177. Белоколос Е.Д., Энольский В.З. - Функц. анализ и его прилож., 1986, т.21, вып.1, с.81.
178. Морозов А. - ЯФ, 1987, т.46, вып.5(11), с.1597-1599.
179. Dixon L., Harvey J., Vafa C., Witten E. - Nucl. Phys. B, 1985, vol.261, p.678-686.
180. Морозов А. - Материалы XXII зимней школы ЛИЯФ, 1987, с.95.
181. Kawai H., Lewellen D., Tye S.-H. - Nucl. Phys. B, 1987, vol.288, p.1-76; Antoniadis I., Bakas I., Kounnas C., Windey P. - Phys. Lett. B, 1986, vol.171, p.51.
182. Martinec E. - Phys. Lett. B, 1986, vol.171, p.189.
183. Namazie M.A., Narain K.S., Sarmadi M.H. - Phys. Lett. B, 1986, vol.177, p.329.
184. Giddings S., Martinec E., Witten E. - Phys. Lett. B, 1986, vol.176, p.362; Giddings S., Wolpert S. - Comm. Math. Phys., 1987, vol. 107, p.177; D'Hoker E., Giddings S. - Nucl. Phys. B, 1987, vol.291, p.90-112.
185. David F. - Mod. Phys. Lett. A, 1988, vol.3, p.1651; Distler J., Kawai H. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.321, p.509-527; Gervais J.-L. - Nucl. Phys. B. Proc Sup., 1988, vol.5, p.119.
186. Green M., Seiberg N. - Nucl. Phys. B, 1988, vol.299, p.559-586.
187. Рослый А. - Теоретико-групповые методы в физике. Труды междунар. семинара, ноябрь 1982. М.: Наука, 1983, т.1, с.263-268.
188. Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E. - Class. and Quant. Grav., 1985, vol.2, p.601-616, 617.
189. Kolokolov I. - Phys. Lett. A, 1986, vol.114, p.99.
190. Gepner D., Qiu Z. - Nucl. Phys. B, 1987, vol.285, p.423.
191. Дринфельд В., Соколов В. - Совр. проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1984, с.24-81.
192. Замолодчиков А. - Теор. и мат. физика, 1986, т.65, с.1205.
193. Knizhnik V., Polyakov A., Zamolodchikov A. - Mod. Phys. Lett. A, 1988, v.3, p.819.
194. Alekseev A., Shatashvili S. - Comm. Math. Phys., 1990, vol.128, p.197.
195. Радул А. - Письма в ЖЭТФ, 1989, т.59, с.341; Bakas I. - Phys. Lett. B, 1989, vol.228, p.57; Pope C., Romans L., Shen X. - Phys.Lett. B, 1990, vol.236, p.173; Bergshoeff E., Pope C., Romans L. et al. - Preprint CERN-TH, 5703/90.
196. Lebedev D., Pakulyak S. - Preprint GEF-Th-9/1990.
197. Sugawara H. - Phys. Rev., 1968, vol.170, p.1659-1662.
198. Bardakci K., Halpern M.B. - Phys. Rev. D, 1971, vol.3, p.2493; Halpern M.B. - Phys.Rev.D, 1971, vol.3, p.2398.
199. Turbiner A. - Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
200. Ушверидзе А. - Краткие сообщ. по физике, 1988, т.2, с.37-43.
201. Shifman M. - Intern. J. Mod. Phys. A, 1989, vol.4, p.2897.
202. Gerasimov A., Marshakov A., Mironov A. et al. - Nucl. Phys. B, 1991, vol.357, p.565.
203. Gerasimov A., Makeenko Yu., Marshakov A. et al. - Mod. Phys. Lett. A, 1991, vol.6, No.33, p.3079-3090.
204. Kharchev S., Marshakov A., Mironov A. et al. - Preprint ITEP-M-8/91, to appear in Phys. Lett. B, 1992.