

МЕТОДЫ ПОДОБИЯ В ТЕОРИИ ЛСЭ-УСИЛИТЕЛЯ

Е.Л.Салдин, Е.А.Шнейдмиллер

НПО автоматических систем, Самара

М.В.Юрков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Изложены вопросы, связанные с расчетом выходных характеристик ЛСЭ-усилителя* в режиме насыщения. Рассмотрены вопросы оптимизации по КПД ЛСЭ-усилителей с нерегулярным ондулятором. Изложена схема расчета параметров оптимального ондулятора и выходных характеристик ЛСЭ-усилителя с оптимальным ондулятором. Предложенные схемы расчетов основаны на использовании методов подобия и результатах численного моделирования, которые представлены в виде универсальных графиков. Используемая для численного моделирования математическая модель процессов в ЛСЭ-усилителях учитывает такие факторы, как пространственный заряд и энергетический разброс частиц в пучке. Для тестирования программ численного моделирования в качестве эталона используются строгие результаты линейной теории ЛСЭ-усилителя. Приведено большое число универсальных графиков, которые могут быть непосредственно использованы при разработке и конструировании ЛСЭ-усилителей.

The points connected with calculation of FEL amplifier output characteristics in the saturation are presented. Problems of increasing the amplifier efficiency by variation of undulator parameters are discussed. A calculation scheme of optimum undulator parameters and FEL amplifier characteristics with an optimum undulator are given. The suggested calculation schemes are based on the use of similarity techniques and numerical simulation results given as universal plots. A mathematical model of FEL amplifier processes used for a numerical simulation takes into account such factors as the space charge and the energy spread of particles in the beam. Strict results of the FEL amplifier linear theory are used as a primary standard for the testing of numerical simulation programs. A great number of universal plots which can be directly used for development and design of FEL amplifiers are given.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа посвящена систематическому изложению применений методов подобия в линейной и нелинейной теории ЛСЭ-усили-

*ЛСЭ - лазер на свободных электронах или электронный лазер.

теля. При исследовании задачи методом подобия происходит преобразование абсолютных переменных в относительные. При этом одновременно происходит объединение параметров задачи в безразмерные степенные комплексы - критерии подобия. Эти критерии подобия являются единственными параметрами задачи, приведенной к безразмерному виду. Каждому эффекту, влияющему на работу ЛСЭ-усилителя (пространственный заряд, энергетический разброс и др.), соответствует свой безразмерный критерий. Для рассматриваемого эффекта критерий подобия является мерой его относительной интенсивности. Если ситуация такова, что некоторый эффект становится малосущественным для работы ЛСЭ-усилителя, то это с необходимостью отражается на соответствующем критерии подобия, который в этом случае принимает малые значения и вообще выпадает из числа аргументов задачи.

Преимущества, создаваемые применением теории подобия, очевидны. Размерный анализ любой задачи, проведенный перед ее аналитическим исследованием, не только уменьшает число входящих независимых членов, но и позволяет систематизировать группировку размерных переменных наиболее удобным образом для дальнейшего изучения. В итоге путем решения безразмерных уравнений оказывается возможным представить результат исследования в такой форме, что содержащаяся в нем информация будет одновременно обладать и высокой степенью общности, и полной конкретностью.

В традиционной СВЧ-электронике методы теории подобия широко применялись и сослужили хорошую службу для распространения ясных представлений в этой науке. Однако в физике лазеров на свободных электронах эти методы еще не получили того распространения, какое могли бы получить благодаря многообразию и общности возможных их применений. В настоящее время ощущается потребность в пособии, которое помогло бы экспериментатору воспользоваться методами подобия в своей практической работе в области техники ЛСЭ. Эта работа является попыткой в некоторой мере удовлетворить запросы специалистов в таком пособии.

Основная цель работы - научить читателя получать приближенные ответы из размерного анализа с помощью упрощенной модели изучаемого явления. Такой быстрый способ оценки параметров ЛСЭ-усилителя может оказаться весьма полезным в инжекторной и лабораторной практике, особенно на стадии планирования эксперимента.

Работа эта небольшая и не исчерпывает всех сторон рассматриваемой проблемы. Здесь мы ради наглядности ограничились лишь рассмотрением одномерного приближения. Все усилия авторов направлены на достижение ясности изложения. Поэтому почти все результаты, данные в работе, выведены из «первых принципов», и читатель имеет возмож-

ность проследить за выводом от начала до конца. Силу методов теории подобия можно было бы продемонстрировать и на моделях ЛСЭ-усилителя, в которых учитывается эффект дифракции излучения, влияние стенок волновода и т.д. Однако при сохранении принятого в данной работе стиля изложения такое усовершенствование элементарной модели привело бы к резкому увеличению объема работы. Для ознакомления с такими обобщениями теории читатель должен обратиться к оригинальным статьям.

План работы следующий. В разд. 1 рассматривается линейная теория ЛСЭ-усилителя. При изложении линейной теории главный упор делается на нахождение аналитических решений уравнений самосогласованного поля с учетом влияния пространственного заряда и энергетического разброса частиц в пучке. Процесс взаимодействия электронного пучка с электромагнитной волной в ондуляторе в линейном режиме можно описать единственным интегродифференциальным уравнением. Решение этого уравнения при заданных начальных условиях на входе в область взаимодействия позволяет определить зависимость амплитуды поля волны от длины ондулятора и тем самым рассчитать выходные характеристики ЛСЭ-усилителя. Решение начальной задачи проведено с помощью метода преобразования Лапласа. Полученные строгие результаты, представленные в нормализованном виде, используются для получения универсальных графиков, позволяющих рассчитывать выходные характеристики ЛСЭ-усилителя в линейном режиме работы. Кроме того, полученные аналитические решения служат надежной основой для развития численных методов. К проблемам, которые могут быть решены только численно на компьютере, относится анализ нелинейных процессов. Тестирование программ численного моделирования было бы затруднено без использования в качестве эталона строгих результатов линейной теории.

Методы теории подобия играют важную роль при численном моделировании процессов в ЛСЭ-усилителях. В рамках одномерного приближения выходные характеристики усилителя определяются системой восьми размерных параметров пучка и ондулятора. Систему уравнений самосогласованного поля, описывающих явление взаимодействия пучка и волны в ондуляторе, можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. Из уравнений следует, что совокупность подобных режимов работы ЛСЭ-усилителя определяется значениями пяти безразмерных параметров. В случае большого коэффициента усиления, т.е. в случае, когда безразмерная длина ондулятора достаточно велика, выходная амплитуда поля в режиме насыщения не зависит от длины ондулятора и амплитуды входного сигнала. В этом практически важном случае максимальный КПД усилителя является функцией только трех без-

размерных параметров: параметра отстройки, параметра пространственного заряда, параметра энергетического разброса.

В разд.2 впервые изложена схема пригодного для инженерной практики метода расчета выходных характеристик ЛСЭ-усилителя в режиме насыщения. Эта схема основана на использовании методов теории подобия и результатах численного моделирования, которые представлены в виде расчетных формул и универсальных графиков. В работе нашли отражение все этапы численных экспериментов: физическая постановка задачи, построение математической модели усилителя, реализация алгоритма и сам расчет.

Перспективным методом повышения эффективности ЛСЭ-усилителя является изменение параметров ондулятора вдоль его оси. Это позволяет повысить КПД усилителя до величины порядка единицы. В разд.3 обсуждается дальнейшее распространение методов теории подобия на расчеты эффективности усилителей с изменяющимися параметрами ондулятора. Впервые излагается схема инженерного метода расчета параметров оптимального ондулятора и выходных характеристик ЛСЭ-усилителя с оптимальным ондулятором.

Во всех формулах используется гауссова система электромагнитных единиц, а зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$.

1. ЛИНЕЙНЫЙ РЕЖИМ УСИЛЕНИЯ

Предварительные замечания. Рассмотрим линейный режим работы ЛСЭ-усилителя со следующими допущениями: 1) электронный пучок в поперечном к оси ондулятора направлении имеет однородное распределение плотности; 2) электроны движутся по идентичным траекториям параллельно оси ондулятора; 3) усиливаемая волна является плоской.

Рассматриваемой в данном разделе задаче посвящено много работ различных авторов. Существенными в этом направлении являются работы [1-3]. Авторы работы [1] провели первое теоретическое исследование линейного режима работы ЛСЭ-усилителя в рамках указанных выше приближений. Они получили уравнения самосогласованного поля и вывели из них характеристическое уравнение с учетом влияния пространственного заряда и энергетического разброса частиц в пучке. В работе [2] с помощью метода преобразования Лапласа было получено решение начальной задачи для простейшего случая отсутствия влияния энергетического разброса. Наиболее полный анализ решений начальной задачи с использованием метода преобразований Лапласа выполнен в работе [3]. Авторы [3] получили лапласовское изображение уравнений самосогласованного поля с учетом влияния энергетического разброса частиц в пучке и сумели вывести из них выражение для лапласовского изображения ам-

плитуды поля. Нахождение самой искомой амплитуды может быть проведено с помощью теоремы обращения и требует вычисления некоторого комплексного интеграла. Для ряда случаев, например для лоренцева энергетического разброса, этот интеграл может быть преобразован к интегралу по замкнутому контуру на комплексной плоскости и вычислен с использованием теории вычетов. Для гауссова энергетического разброса этот математический прием неприменим, и в этом случае для решения начальной задачи авторы работы [3] использовали численные методы. Важно, однако, отметить, что на практике зачастую нет необходимости в полном решении начальной задачи, поскольку оказывается достаточным ограничиться рассмотрением случая большого коэффициента усиления. В настоящей работе впервые обращено внимание на то, что в пределе большого коэффициента усиления метод преобразования Лапласа позволяет получить аналитическое решение начальной задачи и в случае гауссова энергетического разброса. Соответствующая асимптотическая формула для коэффициента усиления выведена в данном разделе.

Эффективный гамильтониан. Рассмотрим ЛСЭ-усилитель со спиральным ондулятором, магнитное поле которого изменяется по закону

$$H_0(z) = e_x H_0 \cos(\kappa_0 z) - e_y H_0 \sin(\kappa_0 z).$$

Здесь $e_{x,y}$ - единичные векторы, направленные вдоль осей x и y декартовой системы координат (x, y, z) . Предполагается, что электроны пучка перемещаются в ондуляторе только параллельно оси z . Угол вращения θ_0 электронов в ондуляторе считается малой величиной, и продольная компонента скорости электронов v_z близка к скорости света ($v_z \cong c$).

Представим вектор электрического поля циркулярно-поляризованной электромагнитной волны, движущейся вдоль оси ондулятора z , в комплексном виде

$$E_x + iE_y = \tilde{E}(z) \exp[i\omega(z/c - t)].$$

Комплексная амплитуда поля \tilde{E} в любой точке пространства не зависит от времени t . Это отвечает обычной постановке задачи с определенными условиями на входе в ондулятор при $z = 0$. Частота ω является действительной величиной и имеет смысл частоты сигнала, поступающего на вход усилителя. Далее предполагается, что комплексная амплитуда поля усиливаемой волны \tilde{E} является медленно меняющейся функцией координаты z в том смысле, что $|\partial \tilde{E} / \partial z| \ll \kappa_0 |\tilde{E}|$.

Рассмотрим гамильтонов формализм для уравнений движения электронов пучка в суммарном электромагнитном поле ондулятора, излучения

и пространственного заряда. Гамильтониан определяется следующим образом:

$$\mathcal{H}(p_z, z, t) = [(p_z c - eA_z)^2 + e^2(A_{\perp} + A_0)^2 + m_0^2 c^4]^{1/2} + e\varphi.$$

Здесь e - заряд электрона; m_0 - масса покоя электрона; p_z - продольная компонента обобщенного импульса частицы; A_{\perp} - векторный потенциал волны; φ и A_z - соответственно скалярный потенциал и векторный потенциал поля пространственного заряда;

$$A_0(z) = -e_z \times \int H_0(z) dz$$

- векторный потенциал поля ондулятора. Поперечный обобщенный импульс частицы в рамках одномерной модели является интегралом движения и выбран нами равным нулю. Проведем преобразование гамильтониана \mathcal{H} от переменных p_z, z, t к переменным, удобным для описания процесса усиления. Выберем в качестве нового времени координату z . Фазу $\psi = \kappa_0 z + \omega(z/c - t)$ будем считать новой обобщенной координатой.

Будем рассматривать переход к этим новым переменным как каноническое преобразование. В нашем случае условие каноничности преобразования удобно представить в виде равенства вариаций действия в старых и новых координатах

$$-\mathcal{H} \delta t + p_z \delta z = -\tilde{\mathcal{H}} \delta z + \mathcal{P} \delta \psi, \quad (1)$$

где $\tilde{\mathcal{H}}$ - новый гамильтониан; \mathcal{P} - новый обобщенный импульс, который канонически сопряжен фазе ψ . Выразим вариацию времени δt через вариации новой координаты $\delta \psi$ и нового времени δz :

$$-\delta t = \delta \psi / \omega - (\kappa_0 + \omega/c) \delta z / \omega. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях, получим: $\mathcal{P} = \mathcal{H}/\omega$. Уравнения движения сохраняют каноническую форму с новым гамильтонианом

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(\xi, \psi, z) = & (\kappa_0 + \omega/c) \mathcal{H}/\omega - p_z = (\kappa_0 + \omega/c) \mathcal{H}/\omega - eA_z/c - \\ & - c^{-1} [(\mathcal{H} - e\varphi)^2 - e^2(A_{\perp} + A_0)^2 - m_0^2 c^4]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для наших целей этот гамильтониан удобно преобразовать к другому эквивалентному виду. Из уравнений Максвелла следует, что скалярный потенциал φ и продольную компоненту векторного потенциала A_z можно подвергнуть калибровочному преобразованию

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - c^{-1} \partial \chi / \partial t, \quad A_z \rightarrow A_z' = A_z + \partial \chi / \partial z,$$

где χ - произвольная функция координаты z и времени t , при этом продольная компонента электрического поля

$$E_z = -\partial\varphi/\partial z - c^{-1}\partial A_z/\partial t$$

остаётся неизменной. Отметим, что величина обобщенного импульса \mathcal{P} не является калибровочно-инвариантной, она определена с тем же произволом, что и потенциалы. Произведем калибровочное преобразование с функцией

$$\chi = c \int dt \varphi(z, t).$$

С помощью такого преобразования исключается скалярный потенциал и поле описывается только векторным потенциалом. В результате гамильтониан (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} = & (\kappa_0 + \omega/c) \mathcal{E}/\omega - c^{-1} \left[\mathcal{E}^2 - e^2(A_{\perp} + A_0)^2 - m_0^2 c^4 \right]^{1/2} - \\ & - \frac{e}{\omega} \int d\psi E_z(z, \psi). \end{aligned}$$

Теперь взаимодействие электрона с полем пространственного заряда полностью выражено через продольное электрическое поле E_z . В принятой калибровке обобщенный импульс \mathcal{P} является кинетической энергией частицы \mathcal{E} , деленной на частоту ω .

Прежде чем переходить к расчетам процессов взаимодействия электронов и волны в ондуляторе, полученный гамильтониан можно упростить в два этапа. Во-первых, $\tilde{\mathcal{H}}$ можно разложить по степеням векторного потенциала поля волны A_{\perp} с сохранением членов только первого порядка. Такое приближение справедливо, когда поперечное движение частиц определяется полем ондулятора, а не полем волны, т.е. когда выполнено условие

$$E_{\perp}(1 - v_z/c) \ll H_0.$$

Здесь $E_{\perp} = c^{-1} |\partial A_{\perp} / \partial t|$ - амплитуда электрического поля волны. В первом порядке разложения по A_{\perp} гамильтониан равен

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} = & (\mathcal{E}/\omega) (\kappa_0 + \omega/c) - c^{-1} \left[\mathcal{E}^2 - e^2 |A_0|^2 - m_0^2 c^4 \right]^{1/2} + \\ & + (e^2/c) A_{\perp} \cdot A_0 \left[\mathcal{E}^2 - e^2 |A_0|^2 - m_0^2 c^4 \right]^{-1/2} - \frac{e}{\omega} \int d\psi E_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Во-вторых, гамильтониан можно разложить по малым отклонениям энергии частицы от значения $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ с сохранением членов второго по-

рядка. Приведем окончательное выражение для эффективного гамильтониана

$$H(P, \psi, z) = CP + \frac{\omega}{2c \gamma_z^2 \xi_0} P^2 - (Ue^{i\psi} + U^*e^{-i\psi}) - \int d\psi eE_z, \quad (5)$$

где $P = \xi - \xi_0$; $C = \kappa_0 - \omega/(2c \gamma_z^2)$ - отстройка от резонанса частицы с энергией $\xi = \xi_0$; $U = -e\theta_0 \tilde{E}(z)/(2i)$ - комплексная амплитуда эффективного потенциала взаимодействия; $\theta_0 = eH_0/(\xi_0 \kappa_0)$; $\gamma_z^{-2} = \gamma^{-2} + \theta_0^2$; $\gamma = \xi_0/(m_0 c^2)$.

Уравнения самосогласованного поля. Выпишем уравнение на функцию распределения электронов $f(P, \psi, z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial f}{\partial P} = 0. \quad (6)$$

В линейном приближении будем искать решения для f и E_z в виде

$$f = f_0 + f_1 e^{i\psi} + f_1^* e^{-i\psi}, \quad E_z = \tilde{E}_z e^{i\psi} + \tilde{E}_z^* e^{-i\psi}. \quad (7)$$

Из уравнения Максвелла в силу одномерности задачи имеем следующее уравнение для E_z :

$$\partial E_z / \partial t = -4\pi j_z = -4\pi j_1 \cos(\psi + \psi_1).$$

Здесь j_1 и ψ_1 - соответственно амплитуда и фаза первой гармоники плотности пучка, которые связаны с комплексными амплитудами $\tilde{f}_1(z)$ и $f_1(P, z)$ соотношением

$$\frac{1}{2} j_1 \exp(i\psi_1) = \tilde{f}_1 = \int f_1 dP.$$

Далее, используя (7), находим следующее выражение для амплитуды \tilde{E}_z :

$$\tilde{E}_z = -i4\pi \tilde{f}_1(z)/\omega. \quad (8)$$

Эволюция амплитуды f_1 согласно (5)-(8) описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial z} f_1 + i(C + \omega P/(c \gamma_z^2 \xi_0)) f_1 + i(U - 4\pi e \tilde{f}_1(z)/\omega) \frac{\partial}{\partial P} f_0 = 0. \quad (9)$$

В (9) опущено слагаемое, пропорциональное $\partial U/\partial P$. Можно показать, что в рамках принятых ограничений на параметры пучка и ондулятора влияние этого слагаемого на эволюцию f_1 пренебрежимо мало. Более детально этот вопрос обсуждается в разд.2. Будем рассматривать для опре-

деленности случай, когда на входе в ондулятор пучок не модулирован ни по скорости, ни по плотности, т.е.

$$f_1|_{z=0} = 0, f_0|_{z=0} = j_0 F(P), \quad (10)$$

где в принятых обозначениях j_0 равна средней плотности тока пучка. Функция распределения $F(P)$ нормирована условием

$$\int F(P) dP = 1.$$

Решение (9) с учетом (10) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(z) = j_0 \int_0^z dz' \{ e\theta_0 \tilde{E}(z')/2 - 4\pi i e \tilde{f}_1(z')/\omega \} \int dP (dF(P)/dP) \times \\ \times \exp \{ i [C + \omega P / (c\gamma_z^2 \xi_0)] (z' - z) \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Еще одно соотношение, связывающее амплитуды $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{E}(z)$, должно следовать из решения электродинамической задачи. Векторный потенциал поля излучения может быть найден с помощью волнового уравнения

$$\nabla^2 A_{\perp} - c^{-2} \partial^2 A_{\perp} / \partial t^2 = -(4\pi/c) j_{\perp},$$

где плотность поперечного тока в рассматриваемом случае имеет вид

$$j_x + i j_y = j_1 \theta_0 \exp(-i\kappa_0 z) \cos(\psi + \psi_1).$$

Решение для $A_{\perp}(z, t)$ будем искать в виде

$$A_{x,y} = \tilde{A}_{x,y}(z) \exp[i\omega(z/c - t)] + \text{C.C.},$$

в котором явно выделена сильная зависимость A_{\perp} от z . Из волнового уравнения имеем

$$\begin{aligned} \exp[i\omega(z/c - t)] \left\{ 2i \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \end{pmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \end{pmatrix} \right\} + \text{C.C.} = \\ = -4\pi\theta_0 c^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\kappa_0 z) \\ -\sin(\kappa_0 z) \end{pmatrix} j_1 \cos(\psi + \psi_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Если пренебречь в (12) быстро осциллирующими членами типа

$$\exp\{\pm i[2\kappa_0 z + \omega(z/c - t)]\},$$

то уравнение (12) можно преобразовать в уравнение, содержащее только медленно меняющиеся амплитуды

$$d\tilde{E}/dz = -\pi\theta_0 c^{-1} \tilde{J}_1(z). \quad (13)$$

Здесь мы учли, что векторный потенциал и вектор электрического поля электромагнитной волны в рассматриваемом одномерном приближении связаны соотношением с $E_{x,y} = -\partial(A_{x,y})/\partial t$. Характерный масштаб изменения комплексной амплитуды \tilde{E} много больше длины волны, поэтому в (13) опущена вторая производная \tilde{E} по z . Подставляя (11) в правую часть (13), легко получить единственное интегродифференциальное уравнение для искомой амплитуды \tilde{E} . Для дальнейшего изложения удобно перейти к безразмерным величинам, которые вводятся соотношениями $\hat{z} = \Lambda_0 z$, $\hat{C} = C/\Lambda_0$, $\hat{P} = \omega P / (c\gamma_z^2 \xi_0 \Lambda_0)$, $\hat{\kappa}_p^2 = \kappa_p^2 / \Lambda_0^2$. Здесь $\Lambda_0 = [\pi j_0 \theta_0^2 c^{-1} \omega \gamma_z^{-2} \gamma^{-1} I_A^{-1}]^{1/3}$ - параметр усиления; $\kappa_p = [4\pi j_0 \gamma_z^{-2} \gamma^{-1} I_A^{-1}]^{1/2}$ - продольное плазменное волновое число; $I_A \cong 17$ кА - ток Альфвена. В результате получим следующее безразмерное рабочее уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \hat{z}} = \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\kappa}_p^2 \frac{\partial \tilde{E}(\hat{z}')}{\partial \hat{z}'} \} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp \{ i(\hat{P} + \hat{C})(\hat{z}' - \hat{z}) \}. \quad (14)$$

Здесь $\hat{F}(\hat{P})$ - функция распределения по нормализованному импульсу \hat{P} , удовлетворяющая условию нормировки $\int \hat{F}(\hat{P}) d\hat{P} = 1$.

Решение уравнений самосогласованного поля методом Лапласа. Уравнение (14) является интегродифференциальным уравнением относительно амплитуды поля $\tilde{E}(\hat{z})$ и может быть решено с помощью преобразования Лапласа. Известно, что такое преобразование определяется следующим интегралом ($\text{Re } p > 0$):

$$\bar{E}(p) = \int_0^{\infty} d\xi \exp(-p\xi) \tilde{E}(\xi).$$

В итоге лапласовское изображение уравнения (14) имеет вид

$$p\bar{E}(p) - E_{\text{ext}} = [\bar{E}(p) + i\hat{\kappa}_p^2 (p\bar{E}(p) - E_{\text{ext}})] \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{F'(\xi)}{p + i(\xi + \hat{C})}. \quad (15)$$

Здесь E_{ext} - амплитуда поля волны на входе в ондулятор при $z=0$. Если мы решим уравнение (15) для $\bar{E}(p)$, то получим формулу

$$\bar{E}(p) = \frac{E_{\text{ext}}}{p - \hat{D} / (1 - i\hat{\kappa}_p^2 \hat{D})}. \quad (16)$$

Здесь введено обозначение

$$\hat{D} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\hat{F}'(\xi)}{p + i(\xi + \hat{C})}. \quad (17)$$

Для того чтобы найти $\tilde{E}(\hat{z})$, нужно совершить обратное преобразование Лапласа над соотношением (16). Такое преобразование определяется интегралом

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\hat{z}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' - i\infty}^{\gamma' + i\infty} d\lambda \bar{E}(\lambda) \exp(\lambda \hat{z}) = \\ &= \frac{E_{\text{ext}}}{2\pi i} \int_{\gamma' - i\infty}^{\gamma' + i\infty} d\lambda \frac{\exp(\lambda \hat{z})}{\lambda - \hat{D} / (1 - i\hat{c}_p^2 \hat{D})}. \end{aligned} \quad (18)$$

Путь интегрирования в комплексной плоскости λ проходит параллельно мнимой оси. Постоянная γ' является действительным положительным числом, бóльшим, чем вещественные части всех особенностей подынтегральной функции. Линейный интеграл (18), полученный с помощью теоремы обращения, обычно вычисляется посредством замыкания контура интегрирования бесконечной полуокружностью в левой полуплоскости и применением теории вычетов. Для того чтобы можно было применить этот математический прием к вычислению интеграла (18), требуется, чтобы подынтегральная функция в (18) имела аналитическое продолжение в левую полуплоскость, а множитель при $\exp(\lambda \hat{z})$ у подынтегральной функции в (18) удовлетворял условиям леммы Жордана.

Функция \hat{D} согласно (17) представляет собой комплексный интеграл и имеет разрыв на мнимой оси λ . Такой интеграл становится аналитической функцией, если, следуя методу Ландау [4], определить функцию \hat{D} в виде

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\hat{F}'(\xi)}{\lambda + i(\xi + \hat{C})}, \quad \text{Re } \lambda > 0; \\ \hat{D} &= P \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\hat{F}'(\xi)}{\lambda + i(\xi + \hat{C})} + \pi \hat{F}'(i\lambda - \hat{C}), \quad \text{Re } \lambda = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\hat{D} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\hat{F}'(\xi)}{\lambda + i(\xi + \hat{C})} + 2\pi \hat{F}'(i\lambda - \hat{C}), \quad \text{Re } \lambda < 0.$$

Здесь $P(\dots)$ обозначено главное значение. Если функция распределения $\hat{F}(\hat{P})$ такова, что множитель

$$\frac{1}{\lambda - \hat{D}/(1 - i\hat{\kappa}_p^2 \hat{D})}$$

при $\exp(\lambda \hat{z})$ у подынтегральной функции в (18) удовлетворяет условиям леммы Жордана, то полное поле волны удается представить в виде суперпозиции парциальных волн. В итоге, используя теорию вычетов, получаем следующее выражение для $\tilde{E}(\hat{z})$:

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \sum_j \frac{\exp(\lambda_j \hat{z})}{1 - \hat{D}'_j/(1 - i\hat{\kappa}_p^2 \hat{D})^2}. \quad (20)$$

Здесь введена сокращенная запись

$$\hat{D}_j = \hat{D} \Big|_{\lambda = \lambda_j}, \quad \hat{D}'_j = \frac{d\hat{D}}{d\lambda} \Big|_{\lambda = \lambda_j}$$

где λ_j - j -й корень уравнения

$$\lambda - \hat{D}/(1 - i\hat{\kappa}_p^2 \hat{D}) = 0, \quad (21)$$

а функция \hat{D} определяется выражением (19).

Решение начальной задачи для случая холодного электронного пучка. В качестве иллюстрации применения полученных выражений рассмотрим случай малого энергетического разброса, когда функцию распределения $\hat{F}(\hat{P})$ можно заменить дельта-функцией $\hat{F}(\hat{P}) = \delta(\hat{P})$. В рассматриваемом случае функция \hat{D} на всей комплексной плоскости λ определяется выражением

$$\hat{D} = i(\lambda + i\hat{C})^{-2}.$$

Так как множитель при $\exp(\lambda \hat{z})$ в (18)

$$\frac{1}{\lambda - \hat{D}/(1 - i\hat{\kappa}_p^2 \hat{D})} = \frac{1}{\lambda - i/[(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\kappa}_p^2]}$$

порядка $O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, то условие леммы Жордана оказывается выполненным. Следовательно, применима формула (20) и разложение волны по парциальным волнам имеет вид

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \sum_j \frac{\exp(\lambda_j \hat{z})}{1 - 2i(\lambda_j + i\hat{C}) \lambda_j^2},$$

где λ_j - корни кубического уравнения

$$\lambda = i[(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\kappa}_p^2]^{-1}. \tag{22}$$

Используя соотношения между корнями кубического уравнения (22)

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = i, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = -\hat{C}^2 + \hat{\kappa}_p^2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2i\hat{C},$$

после несложных преобразований получаем известное выражение для амплитуды поля [2,3]:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \left\{ \frac{\lambda_2\lambda_3 \exp(\lambda_1\hat{z})}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1\lambda_3 \exp \lambda_2(\hat{z})}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_1\lambda_2 \exp(\lambda_3\hat{z})}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

В точном резонансе ($\hat{C} = 0$) при отсутствии влияния пространственного заряда и энергетического разброса решение для $\tilde{E}(z)$ запишется в виде

$$\tilde{E}(z) = \frac{1}{3} E_{\text{ext}} \left\{ \exp\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \hat{z}\right) + \exp\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{2} \hat{z}\right) + \exp(-i\hat{z}) \right\}. \tag{24}$$

График зависимости $|\tilde{E}|/E_{\text{ext}}$ от безразмерной длины \hat{z} на начальном участке ондулятора, рассчитанный по формуле (24), приведен на рис.1. Если длина ондулятора достаточно велика, то в соотношении (24) вклад растущей волны будет превосходить остальные слагаемые и их вкладом можно пренебречь. Тогда для $\tilde{E}(\hat{z})$ можно записать асимптотическое выражение

$$\tilde{E}(\hat{z}) = \frac{1}{3} E_{\text{ext}} \exp\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \hat{z}\right). \tag{25}$$

Важной выходной характеристикой усилителя является коэффициент усиления по мощности $G = |\tilde{E}|^2/E_{\text{ext}}^2$. Величина G в децибелах при

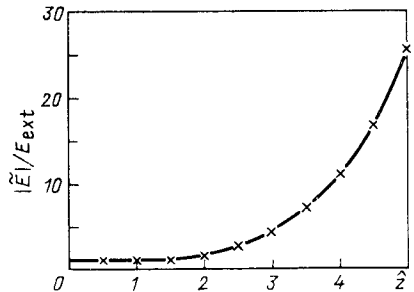


Рис.1 Линейный режим. Зависимость амплитуды поля волны, нормированной на амплитуду входного сигнала, от нормализованной длины при $\hat{C} = 0, \hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0$: сплошная кривая рассчитана по аналитической формуле (24); крестики - результаты численного моделирования с использованием уравнений (44), (45)

$\hat{C} = 0$ согласно соотношению (25) асимптотически равна

$$G = 10 \lg (|\tilde{E}|^2 / E_{\text{ext}}^2) = 7,5\hat{z} - 9,5.$$

Из уравнения (22) следует, что при $\hat{\kappa}_p^2 = 0$ постоянные распространения парциальных волн $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являются универсальными функциями только параметра отстройки \hat{C} . Исследование характеристического уравнения

$$\lambda (\lambda + i\hat{C})^2 = i \tag{26}$$

показывает, что в области отстроек $\hat{C} < 1,89$ одна из парциальных волн является растущей. Обозначим постоянную распространения растущей парциальной волны $\hat{\Lambda}$. Тогда в области отстроек $\hat{C} < 1,89$ при достаточно большой длине ондулятора коэффициент усиления по мощности можно записать асимптотически в виде

$$G = A \exp [2 \operatorname{Re} (\hat{\Lambda})\hat{z}], \tag{27}$$

где приведенный инкремент $\operatorname{Re} (\hat{\Lambda})$ и предэкспоненциальный множитель A являются универсальными функциями параметра отстройки \hat{C} . Графики этих функций приведены на рис.2. Максимум инкремента достигается в точном резонансе ($\hat{C} = 0$). При малых отклонениях от резонанса, когда $\hat{C} \ll 1$, инкремент дается выражением

$$2 \operatorname{Re} (\hat{\Lambda}) = \sqrt{3} [1 - \hat{C}^2/9].$$

В области больших отрицательных отстроек $\hat{C} \ll -1$ асимптотически имеем

$$\operatorname{Re} (\hat{\Lambda}) = |\hat{C}|^{-1/2}.$$

Процесс усиления электромагнитной волны в ондуляторе имеет резонансный характер, что приводит к резкой зависимости коэффициента усиления от параметра отстройки \hat{C} . Обычно ширина полосы усиления

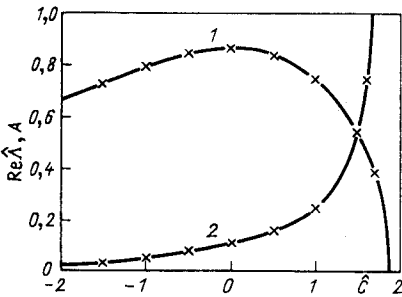


Рис.2. Линейный режим. Зависимость от нормализованной отстройки \hat{C} при $\hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0$: 1 - нормализованный инкремент из (26); 2 - предэкспоненциальный множитель из (27); крестики - результат численного моделирования с использованием уравнений (44), (45)

определяется разностью частот входного сигнала $\omega_1 - \omega_2 = \Delta \omega$, при которых выходная мощность уменьшается в 2 раза по сравнению с максимальным значением. Удобно ввести ширину полосы усиления по приведенной отстройке $\Delta \hat{C}$, которая связана с шириной полосы усиления по частоте входного сигнала соотношением $\Delta \omega / \omega_0 = (\Lambda_0 / \kappa_0) \Delta \hat{C}$, где $\omega_0 = 2c \gamma_z^2 \kappa_0$ - резонансная частота. Ширина полосы усиления может быть найдена путем решения начальной задачи. На рис.3 приведен график зависимости ширины полосы усиления $\Delta \hat{C}$ от максимального коэффициента усиления по мощности. Этот график был рассчитан с помощью соотношения (23) и корней характеристического уравнения (26). Для иллюстрации на рис.4 приведен график амплитудно-частотной характеристики при максимальном коэффициенте усиления $G_{\max} = 40$ дБ.

Рассмотрим теперь влияние поля пространственного заряда на процесс усиления волны в ондуляторе. В области параметров задачи, где параметр пространственного заряда $\hat{\kappa}_p^2$ мал, влияние пространственного заряда может быть учтено по теории возмущений. После несложных вычислений из уравнения (22) получаем, что при $\hat{\kappa}_p^2 \ll 1$ максимальный инкремент достигается при параметре отстройки $\hat{C} = \hat{C}_m = \hat{\kappa}_p^2$ и определяется выражением

$$\max (2 \operatorname{Re}(\hat{\Lambda})) = 3^{1/2} - 3^{-1/2} \hat{\kappa}_p^2.$$

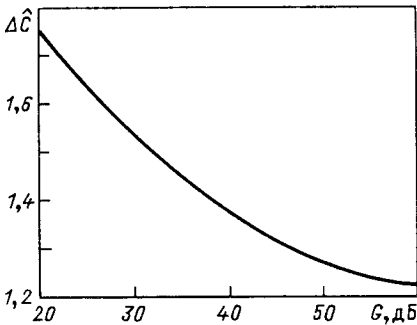


Рис.3. Линейный режим. Зависимость нормализованной ширины полосы усиления от максимального коэффициента усиления по мощности при $\hat{C} = 0$, $\hat{\kappa}_p^2 = 0$, $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$

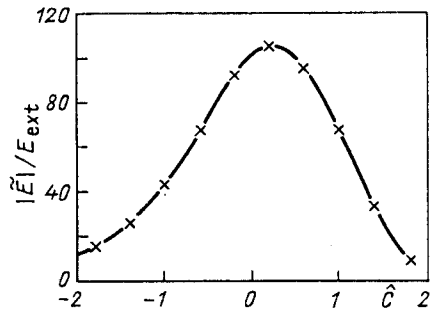


Рис.4. Линейный режим. Зависимость от нормализованной отстройки амплитуды поля на выходе усилителя, нормированной на амплитуду входного сигнала. Нормализованная длина усилителя равна $\hat{z} = 6,6$, $\hat{\kappa}_p^2 = 0$, $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$

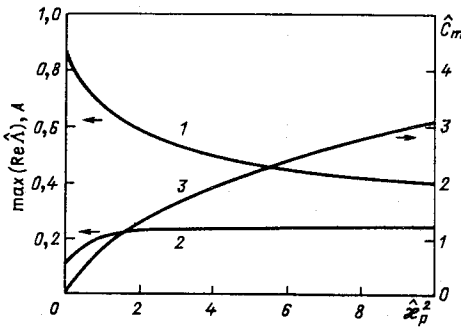


Рис.5. Линейный режим. Результаты расчетов по формулам (22), (23), (27) при настройке на максимум инкремента. Зависимость от параметра пространственного заряда $\hat{\kappa}_p^2$ при $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$: 1 – максимум нормализованного инкремента; 2 – предэкспоненциальный множитель (27); 3 – оптимальная нормализованная отстройка

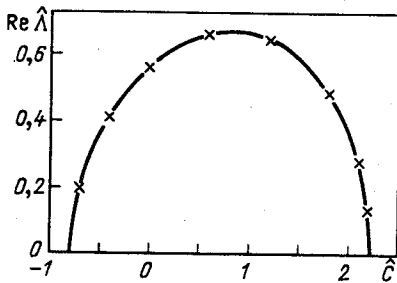


Рис.6. Линейный режим. Зависимость нормализованного инкремента от нормализованной отстройки при $\hat{\kappa}_p^2 = 1$, $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$: сплошная кривая – результат решения уравнения (22); крестики – результаты численного моделирования с использованием уравнений (45), (52)

В обратном случае при $\hat{\kappa}_p^2 \gg 1$ поле пространственного заряда существенно влияет на инкремент, который в максимуме при $\hat{C} = \hat{C}_m = \hat{\kappa}_p$ равен [1]:

$$\max(2\text{Re}(\hat{\Lambda})) = (2\hat{\kappa}_p)^{-1/2}.$$

В области, где параметр пространственного заряда сравним с единицей, инкремент может быть найден решением кубического характеристического уравнения (22). Следует отметить, что согласно уравнению (22) максимум инкремента и отстройка \hat{C}_m , при которой этот максимум достигается, являются универсальными функциями параметра пространственного заряда $\hat{\kappa}_p^2$. Предэкспоненциальный множитель A в асимптотической формуле усиления (27) при настройке на максимум инкремента (т.е. при $\hat{C} = \hat{C}_m$) также является универсальной функцией параметра $\hat{\kappa}_p^2$. Графики этих функций приведены на рис.5. Для иллюстрации на рис.6 приведена кривая зависимости инкремента от отстройки при $\hat{\kappa}_p^2 = 1$.

Вычисления, сделанные выше, предполагают, что на вход усилителя подается немодулированный электронный пучок и электромагнитная

волна от задающего генератора. Более общее рассмотрение вопроса проведено в приложении А.

Решение начальной задачи для случая лоренцева энергетического разброса. Рассмотрим случай электронного пучка, функция распределения которого по энергиям дается лоренцевым распределением

$$F(\xi) = (\alpha/\pi) [(\xi - \xi_0)^2 + \alpha^2]^{-1}.$$

Выражение для безразмерной \hat{F} будет иметь вид

$$\hat{F}(\hat{P}) = (\hat{\alpha}/\pi) [\hat{P}^2 + \hat{\alpha}^2]^{-1}. \quad (28)$$

Связь между параметрами α и $\hat{\alpha}$ определяется из формулы

$$\hat{\alpha} = \alpha \omega / (\gamma^2 c \xi_0 \Lambda_0).$$

Подставляя (28) в (19), находим, что в случае лоренцева распределения функция \hat{D} на всей комплексной плоскости λ дается выражением

$$\hat{D} = i(\lambda + \hat{\alpha} + i\hat{C})^{-2}.$$

Множитель при $\exp(\lambda \hat{z})$ у подынтегральной функции в (18) для анализируемого случая равен

$$\left\{ \lambda - \frac{\hat{D}}{1 - i\hat{\kappa}_p^2 \hat{D}} \right\}^{-1} = \left\{ \lambda - \frac{i}{[(\lambda + \hat{\alpha} + i\hat{C})^2 + \hat{\kappa}_p^2]} \right\}^{-1}$$

и, очевидно, удовлетворяет условиям леммы Жордана. Следовательно, применима формула (20):

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \sum_j \frac{\exp(\lambda_j \hat{z})}{1 - 2i(\lambda_j + \hat{\alpha} + i\hat{C})\lambda_j^2}.$$

Здесь λ_j - корни кубического уравнения

$$\lambda = i[(\lambda + \hat{\alpha} + i\hat{C})^2 + \hat{\kappa}_p^2]^{-1}.$$

Таким образом, в случае лоренцева распределения электромагнитная волна в ондуляторе может быть представлена в виде суммы трех парциальных волн.

Решение начальной задачи для случая гауссова энергетического разброса. В заключение раздела рассмотрим случай гауссова энергетического распределения

$$F(\xi - \xi_0) = [2\pi \langle (\Delta \xi)^2 \rangle]^{-1/2} \exp \left[-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2 \langle (\Delta \xi)^2 \rangle} \right].$$

Соответствующее распределение по нормализованному каноническому импульсу \hat{P} имеет вид

$$\hat{F}(\hat{P}) = (4\pi \hat{\Lambda}_T^2)^{-1/2} \exp [-\hat{P}^2 / (4\hat{\Lambda}_T^2)].$$

Параметр $\hat{\Lambda}_T^2$ связан со среднеквадратичным разбросом по энергиям $\langle (\Delta \xi)^2 \rangle$ соотношением

$$\hat{\Lambda}_T^2 = \omega^2 \langle (\Delta \xi)^2 \rangle / (2\gamma_z^4 c^2 \Lambda_0^2 \xi_0^2).$$

Вычисление функции \hat{D} начнем со случая $\text{Re } \lambda > 0$. Из формулы (19) имеем

$$\hat{D} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\hat{F}'(\xi)}{\lambda + i(\xi + \hat{C})} = i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\hat{F}(\xi)}{[\lambda + i(\xi + \hat{C})]^2}, \text{Re } \lambda > 0. \quad (29)$$

Подставляя равенство

$$\frac{1}{[\lambda + i(\xi + \hat{C})]^2} = \int_0^{\infty} \tau \exp \{ -[\lambda + i(\xi + \hat{C})] \tau \} d\tau$$

в (29) и выполняя сначала интегрирование по ξ , получаем

$$\hat{D} = i \int_0^{\infty} \tau \exp \{ -\hat{\Lambda}_T^2 \tau^2 - [\lambda + i\hat{C}] \tau \} d\tau, \text{Re } \lambda > 0. \quad (30)$$

В левой полуплоскости, используя формулу (19) и равенство

$$\frac{1}{[\lambda + i(\xi + \hat{C})]^2} = \int_0^{\infty} \tau \exp \{ [\lambda + i(\xi + \hat{C})] \tau \} d\tau, \text{Re } \lambda < 0,$$

выражение для функции \hat{D} можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \hat{D} = & i \int_0^{\infty} \tau \exp \{ -\hat{\Lambda}_T^2 \tau^2 + [\lambda + i\hat{C}] \tau \} d\tau - \\ & - \frac{i}{2} \sqrt{\pi} \hat{\Lambda}_T^{-3} [\lambda + i\hat{C}] \exp \left\{ \frac{1}{4} \hat{\Lambda}_T^{-2} [\lambda + i\hat{C}]^2 \right\}, \text{Re } \lambda < 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что выражение для функции \hat{D} в левой полуплоскости содержит слагаемое, пропорциональное $\exp(\lambda^2)$. Следовательно, бесконечность яв-

ляется для функции \hat{D} существенно особой точкой. В этом случае, как следует из теоремы Пикара, подынтегральная функция в (18) имеет бесконечное число полюсов в левой полуплоскости, которые сгущаются на бесконечности и располагаются вблизи линий $\arg(\lambda) = \pm 3\pi/4$. Согласно лемме Жордана, вычисление линейного интеграла (18) посредством замыкания контура интегрирования бесконечной полуокружностью в левой полуплоскости возможно, если функция $\bar{E}(\lambda)$ стремится к нулю при $|\lambda| \Rightarrow \infty$ равномерно по аргументу λ . Для гауссовой функции распределения это предположение не выполняется. В этом случае метод преобразования Лапласа не позволяет получить аналитическое решение начальной задачи в замкнутом виде. Важно, однако, отметить, что зачастую нет необходимости в полном решении начальной задачи, поскольку оказывается достаточным ограничиться рассмотрением случая большого коэффициента усиления. Ниже мы покажем, что для гауссовой функции распределения метод преобразования Лапласа позволяет получить в замкнутом виде асимптотическую формулу усиления ЛСЭ-усилителя.

Воспользуемся следующим математическим приемом. Сдвигая путь интегрирования в (18) в левую полуплоскость, преобразуем с помощью теоремы вычетов линейный интеграл к виду

$$\int_{\gamma' - i\infty}^{\gamma' + i\infty} d\lambda \bar{E}(\lambda) \exp(\lambda \hat{z}) = \int_{-\alpha' - i\infty}^{-\alpha' + i\infty} d\lambda \bar{E}(\lambda) \exp(\lambda \hat{z}) + \sum_{-\alpha' < \text{Re } \lambda_j} \text{Res } \bar{E}(\lambda_j) \exp(\lambda_j \hat{z}), \tag{32}$$

где суммирование ведется по корням уравнения (21), лежащим справа от прямой $(-\alpha' - i\infty, -\alpha' + i\infty)$. Здесь α' - действительное положительное число, а $\text{Res } \bar{E}(\lambda_j)$ является вычетом функции $\bar{E}(\lambda)$ в полюсе λ_j . С помощью выражений (30), (31) можно легко убедиться в том, что в правой полуплоскости уравнение (21) имеет только один корень, а при любом конечном значении α' число корней в полосе $-\alpha' < \text{Re}(\lambda) < 0$ всегда конечно. Если длина ондулятора достаточно велика, то в соотношении (32) вклад слагаемого, пропорционального $\exp(\lambda_1 \hat{z})$ с $\text{Re}(\lambda_1) > 0$, будет превосходить все остальные и их вкладом можно пренебречь. Тогда для амплитуды $\tilde{E}(\hat{z})$ можно записать асимптотическое выражение в виде

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \frac{\exp(\lambda_1 \hat{z})}{1 - \hat{D}_1' / (1 - i\hat{c}_p^2 \hat{D}_1)^2}, \tag{33}$$

где значения функций \hat{D} , \hat{D}' при $\lambda = \lambda_1$ находятся из формулы (30). Дальнейшая задача состоит в том, чтобы придать выражению (33) вид, удобный для числового расчета.

Выразим функцию $\hat{D}'(\lambda)$ через функцию $\hat{D}(\lambda)$. Из таблиц интегралов имеем соотношение при $\text{Re}(\lambda) > 0$:

$$\begin{aligned} \hat{D} &= i \int_0^{\infty} \exp[-\hat{\Lambda}_T^2 \tau^2 - (\lambda + i\hat{C})\tau] \tau d\tau = \\ &= \frac{i}{2\hat{\Lambda}_T^2} - \frac{i\sqrt{\pi}}{4\hat{\Lambda}_T^3} (\lambda + i\hat{C}) \exp\left[\frac{1}{4\hat{\Lambda}_T^2} (\lambda + i\hat{C})^2\right] \left\{1 - \text{erf}\left[\frac{1}{2\hat{\Lambda}_T} (\lambda + i\hat{C})\right]\right\}; \\ \hat{D}'(\lambda) &= -i \int_0^{\infty} \exp[-\hat{\Lambda}_T^2 \tau^2 - (\lambda + i\hat{C})\tau] \tau^2 d\tau = \frac{i}{4\hat{\Lambda}_T^4} (\lambda + i\hat{C}) - \\ &\quad - \frac{i\sqrt{\pi}}{4\hat{\Lambda}_T^5} \left[\frac{1}{2} (\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_T^2\right] \exp\left[\frac{1}{4\hat{\Lambda}_T^2} (\lambda + i\hat{C})^2\right] \times \\ &\quad \times \left\{1 - \text{erf}\left[\frac{1}{2\hat{\Lambda}_T} (\lambda + i\hat{C})\right]\right\}. \end{aligned}$$

Здесь символ $\text{erf}(\zeta)$ обозначает функцию ошибок комплексного аргумента

$$\text{erf}(\zeta) = 2\pi^{-1/2} \int_0^{\zeta} \exp(-u^2) du.$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \hat{D}'(\lambda) &= \frac{i}{4} \hat{\Lambda}_T^{-4} [\lambda + i\hat{C}] + \\ &+ \left[\frac{1}{2} (\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_T^2\right] \hat{\Lambda}_T^{-2} \left[\hat{D} - \frac{i}{2} \hat{\Lambda}_T^{-2}\right] [\lambda + i\hat{C}]^{-1}. \end{aligned} \tag{34}$$

Значение функции \hat{D} при $\lambda = \lambda_1$ с помощью уравнения (21) можно выразить через значение корня λ_1 :

$$\hat{D}(\lambda_1) = \lambda_1 [1 + i\hat{\kappa}_p^2 \lambda_1]^{-1}. \tag{35}$$

Используя выражения (33)–(35), легко получить асимптотическую формулу для коэффициента усиления в виде, удобном для числовых расчетов:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \exp(\hat{\Lambda}z) \left\{ 1 + i(i - \hat{\kappa}_p^2 \hat{\Lambda})^2 \left[\hat{\Lambda}(i - \hat{\kappa}_p^2 \hat{\Lambda})^{-1} - \frac{1}{2\hat{\Lambda}_T^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[(\hat{\Lambda} + i\hat{C})^{-1} + \frac{1}{2\hat{\Lambda}_T^2} (\hat{\Lambda} + i\hat{C}) \right] + \frac{1}{4\hat{\Lambda}_T^4} (\hat{\Lambda} + i\hat{C}) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\hat{\Lambda} = \lambda_1$ - нарастающий корень характеристического уравнения

$$\hat{\Lambda} - \frac{\hat{D}}{1 - i\hat{\kappa}_p^2 \hat{D}} = 0, \quad \hat{D} = i \int_0^\infty \exp[-\hat{\Lambda}_T^2 \tau^2 - (\hat{\Lambda} + i\hat{C}) \tau] \tau dt, \quad \text{Re}(\hat{\Lambda}) > 0.$$

Особенно простое выражение получается в случае отсутствия влияния пространственного заряда. В пределе $\hat{\kappa}_p^2 \rightarrow 0$ из (36) имеем

$$\tilde{E}(\hat{z}) = 2E_{\text{ext}} \exp(\hat{\Lambda}z) \hat{\Lambda}_T^2 [(\hat{\Lambda} + i\hat{C})] [2i\hat{C} \hat{\Lambda}_T^2 + i - \hat{\Lambda}(\hat{\Lambda} + i\hat{C})^2]^{-1}, \quad (37)$$

где $\hat{\Lambda}$ - нарастающий корень характеристического уравнения

$$\hat{\Lambda} = i \int_0^\infty \exp[-\hat{\Lambda}_T^2 \tau^2 - (\hat{\Lambda} + i\hat{C}) \tau] \tau dt, \quad \text{Re}(\hat{\Lambda}) > 0. \quad (38)$$

Практически интересной характеристикой усилителя является коэффициент усиления по мощности G , который при достаточно большой длине ондулятора можно представить в виде

$$G = |\tilde{E}|^2 / E_{\text{ext}}^2 = A \exp[2 \text{Re}(\hat{\Lambda}z)], \quad (39)$$

где в общем случае A и $\hat{\Lambda}$ являются функциями параметров \hat{C} , $\hat{\kappa}_p^2$, $\hat{\Lambda}_T^2$. На рис.7 приведена зависимость амплитуды поля на выходе усилителя от \hat{C}

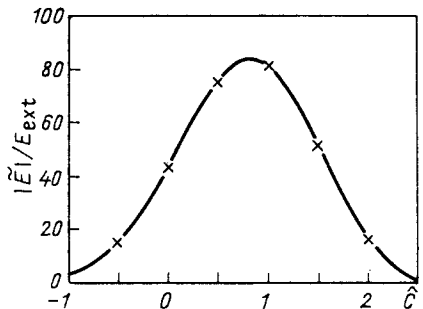


Рис.7. Линейный режим. Зависимость амплитуды поля на выходе усилителя, нормированной на амплитуду входного сигнала, от нормализованной отстройки при $\hat{\Lambda}_T^2 = 0,1$, $\hat{\kappa}_p^2 = 0,5$, $\hat{z} = 8$: сплошная кривая - расчет по формуле (36); крестики - результаты численного моделирования с использованием уравнений (45), (52)

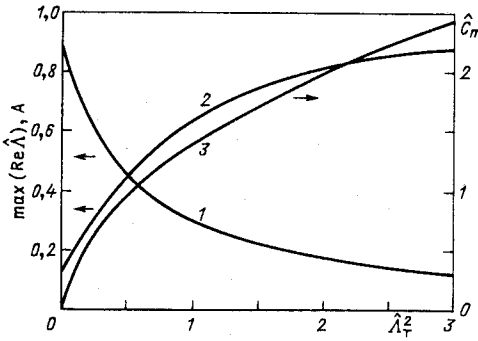


Рис.8. Линейный режим. Результаты расчетов по формулам (37)-(39) при настройке на максимум инкремента. Зависимость от параметра энергетического разброса $\hat{\Lambda}_T^2$ при $\hat{\kappa}_p^2 = 0$: 1 - максимум нормализованного инкремента; 2 - предэкспоненциальный множитель (39); 3 - оптимальная нормализованная отстройка

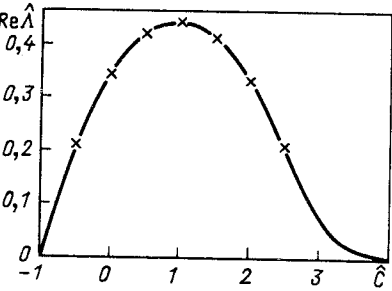


Рис.9. Линейный режим. Зависимость нормализованного инкремента от нормализованной отстройки при $\hat{\Lambda}_T^2 = 0,5$, $\hat{\kappa}_p^2 = 0$: сплошная кривая - результат решения уравнения (38); крестики - результат численного моделирования с использованием уравнений (44), (45)

при $\hat{z} = 8$. Параметры пространственного заряда и энергетического разброса для примера выбраны равными $\hat{\kappa}_p^2 = 0,5$, $\hat{\Lambda}_T^2 = 0,1$. Для построения кривой были использованы результаты расчета, проведенного по асимптотической формуле усиления (36). В области параметров задачи, где влиянием пространственного заряда можно пренебречь ($\hat{\kappa}_p^2 \rightarrow 0$), инкремент может быть найден решением трансцендентного характеристического уравнения (38). В случае малого энергетического разброса, когда $\hat{\Lambda}_T^2 \ll 1$, максимальный инкремент достигается при отстройке $\hat{C} = \hat{C}_m = 6\hat{\Lambda}_T^2$ и равен

$$\max (2 \operatorname{Re} (\hat{\Lambda})) = 3^{1/2} - 3^{1/2} 2\hat{\Lambda}_T^2.$$

В обратном случае, когда $\hat{\Lambda}_T^2 > 1$, энергетический разброс оказывает существенное влияние на инкремент, который в максимуме при $\hat{C} = 2^{1/2}\hat{\Lambda}_T$ оказывается равным [1]:

$$\max (\operatorname{Re} (\hat{\Lambda})) = 0,38\hat{\Lambda}_T^{-2}.$$

Следует отметить, что согласно уравнению (38) максимум инкремента и отстройка \hat{C}_m , при которой этот максимум достигается, являются универ-

сальными функциями параметра энергетического разброса $\hat{\Lambda}_T^2$. Предэкспоненциальный множитель A в асимптотической формуле усиления при настройке на максимум инкремента (т.е. при $\hat{C} = \hat{C}_m$) также является универсальной функцией параметра $\hat{\Lambda}_T^2$. Графики этих функций приведены на рис.8. Для иллюстрации на рис.9 приведена кривая зависимости инкремента от отстройки при значении параметра энергетического разброса $\hat{\Lambda}_T^2 = 0,5$.

2. ЭФФЕКТЫ НАСЫЩЕНИЯ

Предварительные замечания. В предыдущем разделе мы рассмотрели методы расчета линейного режима работы ЛСЭ-усилителя. В этом режиме увеличение входной мощности W_{ext} приводит к прямо пропорциональному увеличению выходной мощности W_f . При дальнейшем увеличении W_{ext} режим работы усилителя становится нелинейным. В нелинейном режиме W_f увеличивается медленнее, чем W_{ext} , и при определенном значении W_{ext} выходная мощность достигает максимума. Для определения максимальной W_f необходимо решить уравнения нелинейной теории ЛСЭ-усилителя. Для теоретического исследования нелинейного режима аналитические методы имеют ограниченные возможности, здесь необходимо численное моделирование с помощью ЭВМ. Первые численные расчеты нелинейного режима работы ЛСЭ-усилителя были проделаны в [5], позднее они были развиты в [6,7]. Авторы [14] впервые представили рабочие уравнения в безразмерной форме и ввели нормализованные переменные, близкие к используемым в настоящей работе.

Методы теории подобия играют большую роль при численном моделировании процессов в ЛСЭ-усилителях. В рамках одномерного приближения выходные характеристики усилителя определяются системой восьми параметров:

$$l, \kappa_0, \omega, \xi_0, j_0, H_0, <(\Delta\xi)^2>, E_{ext},$$

где l - длина ондулятора. Из уравнений следует, что совокупность подобных режимов работы ЛСЭ-усилителя и все безразмерные комбинации, образованные из различных физических величин, определяются значениями пяти безразмерных параметров

$$\Lambda_0 l, \hat{C}, \hat{\kappa}_p^2, \hat{\Lambda}_T^2, E_{ext}/E_0.$$

Здесь E_0 - возникающий при описании нелинейного режима новый нормализующий множитель. Комбинация E_f/E_0 , где E_f - амплитуда поля волны на выходе усилителя, является безразмерной. Поэтому в общем случае можно написать

$$E_f/E_0 = \mathfrak{D}(\Lambda_0 l, \hat{C}, \hat{\kappa}_p^2, \hat{\Lambda}_T^2, E_{ext}/E_0).$$

Универсальная функция \mathfrak{D} может быть рассчитана численным решением безразмерных уравнений самосогласованного поля.

Система рабочих уравнений. Уравнение, описывающее изменение энергии частицы \mathfrak{E} с координатой вдоль оси ондулятора z , можно получить из гамильтониана H , записанного в переменных энергии \mathfrak{E} и канонически-сопряженной ей продольной фазы $\psi = \kappa_0 z + \omega(z/c - t)$. В первом порядке разложения по векторному потенциалу волны A_\perp без учета влияния пространственного заряда гамильтониан (4) можно привести к виду

$$H(\mathfrak{E}, \psi, z) = \int [\kappa_0 - \omega(v_z^{-1}(\mathfrak{E}) - c^{-1})] d\mathfrak{E} - \varphi \sin(\psi + \psi_0), \quad (40)$$

где $v_z(\mathfrak{E})$ - продольная компонента скорости электрона в ондуляторе; $\varphi = (e\theta_0 E)$ и ψ_0 - соответственно амплитуда и фаза эффективного потенциала; $E = |\partial A_\perp / \partial(ct)|$ - амплитуда электрического поля усиливаемой электромагнитной волны. Имеется следующая связь между параметрами φ, ψ_0 и комплексной амплитудой эффективного потенциала U , введенной в разд.1: $(\varphi/2) \exp(i\psi_0) = U$. Соответствующие гамильтониану (40) уравнения движения запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} d\mathfrak{E}/dz &= -\partial H/\partial\psi = \varphi \cos(\psi + \psi_0); \\ d\psi/dz &= \partial H/\partial\mathfrak{E} = \kappa_0 - \omega(v_z^{-1} - c^{-1}) - \partial\varphi/\partial\mathfrak{E} \sin(\psi + \psi_0). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Из волнового уравнения Максвелла несложно получить, что в результате когерентного излучения электронного пучка в ондуляторе амплитуда и фаза эффективного потенциала будут изменяться следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi/dz &= -(\pi m_0 c^2 \theta_0^2 I/I_A) \rho_1 \cos(\psi_0 - \psi_1); \\ d\psi_0/dz &= (\pi m_0 c^2 \theta_0^2 I/I_A) (\rho_1/\varphi) \sin(\psi_0 - \psi_1), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где ρ_1 и ψ_1 - соответственно амплитуда и фаза первой гармоники плотности пучка ρ :

$$\rho_1 \cos \psi_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho \cos \psi \, d\psi,$$

$$\rho_1 \sin \psi_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho \sin \psi \, d\psi.$$

Нормировка функции $\rho(z, \psi)$ выбрана таким образом, что величина $I\rho$ имеет смысл продольной компоненты плотности тока пучка. Здесь I - средний ток пучка. Уравнения (41) и (42) образуют систему самосогласованных уравнений ЛСЭ-усилителя в одномерном приближении.

При малых отклонениях энергии от начальной гамильтониан (40) принимает вид

$$H = CP + \omega P^2 / (2\gamma_z^2 \xi_0 c) - \varphi \sin(\psi + \psi_0), \quad (43)$$

где $P = \xi - \xi_0$; C - отстройка от резонанса для частицы с энергией ξ_0 :

$$C = \kappa_0 + \omega/c - \omega/v_z(\xi_0) \cong \kappa_0 - \omega/(2c\gamma_z^2).$$

Переменные z, P, φ, ρ_1 удобно заменить другими, пропорциональными им, положив $\hat{z} = \Lambda_0 z$, $\hat{P} = \omega P / (c\gamma_z^2 \xi_0 \Lambda_0)$, $\hat{\varphi} = \omega \varphi / (c\gamma_z^2 \xi_0 \Lambda_0^2)$, $\hat{\rho}_1 = \rho_1 S$. Здесь S - площадь поперечного сечения пучка (имеет место соотношение $j_0 = I/S$). В результате уравнения (41) и (42) можно переписать в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} d\hat{P}/d\hat{z} &= \hat{\varphi} \cos(\psi + \psi_0); \\ d\psi/d\hat{z} &= \hat{P} + \hat{C} + \beta \hat{\varphi} \sin(\psi + \psi_0); \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} d\hat{\varphi}/d\hat{z} &= -\hat{\rho}_1 \cos(\psi_0 - \psi_1); \\ d\psi_0/d\hat{z} &= (\hat{\rho}_1/\hat{\varphi}) \sin(\psi_0 - \psi_1), \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где введено обозначение $\beta = c\gamma_z^2 \Lambda_0 / \omega$. Параметр β обратно пропорционален числу периодов ондулятора на характерной длине нарастания поля волны в линейном режиме и всегда мал. Поэтому слагаемым, пропорциональным β , во втором уравнении системы (44) можно пренебречь.

Алгоритм численного моделирования. Разобьем электронный пучок на большое число перпендикулярных оси слоев. Пусть на длине волны модуляции пучка, т.е. в интервале фаз ψ от 0 до 2π , имеется N слоев. Периодическую по фазе ψ функцию плотности пучка $\hat{\rho}$ в интервале фаз $(0, 2\pi)$ можно представить в виде

$$\hat{\rho} = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\psi - \psi_{(j)}), \quad (46)$$

где $\psi_{(j)}$ - фаза j -го слоя; $\delta(\psi - \psi_{(j)})$ - дельта-функция. Согласно определению (46) функция $\hat{\rho}$ нормирована условием

$$\int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\psi = 2\pi.$$

Связь между амплитудой первой гармоники плотности пучка $\hat{\rho}_1$ и функцией $\hat{\rho}$ дается формулами

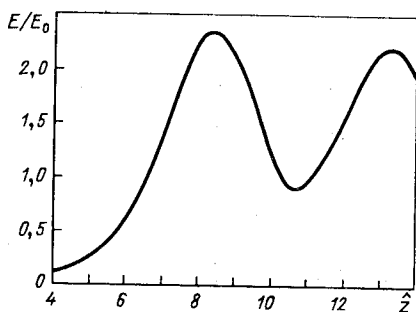
$$\begin{aligned} \rho_1 \cos \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\rho} \cos \psi d\psi = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \cos \psi_{(j)}, \\ \hat{\rho}_1 \sin \psi_1 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\rho} \sin \psi d\psi = -\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \sin \psi_{(j)}, \end{aligned}$$

где ψ_1 - фаза первой гармоники плотности.

Уравнения движения (44), примененные ко всем N слоям совместно с уравнениями на поле (45), дают систему $2N + 2$ уравнений, решение которой с помощью ЭВМ дает возможность рассчитать нелинейный режим работы ЛСЭ-усилителя. Пусть на вход ондулятора подаются немодулированный электронный пучок и электромагнитная волна с амплитудой E_{ext} . Тогда начальные условия при $z = 0$ будут следующими:

$$\hat{P}_i(0) = 0, \quad \rho_1(0) = 0, \quad \hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}_{\text{ext}} = E_{\text{ext}}/E_0,$$

где параметр E_0 , согласно определению $\hat{\varphi}$, равен $E_0 = (c \gamma_z^2 \xi_0 \Lambda_0^2) / (e \omega \theta_0)$. Зависимость нормализованной амплитуды поля



$\hat{\varphi}$ от нормализованной длины ондулятора \hat{z} при $\hat{C} = 0$ и $\hat{\varphi}_{\text{ext}} = 0,01$, найденная описанным выше способом, представлена на рис.10. Рост поля волны прекращается в режиме насы-

Рис.10. Нелинейный режим. Зависимость нормализованной амплитуды поля от нормализованной длины ондулятора при $\hat{C} = 0, \hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0, E_{\text{ext}}/E_0 = 0,01$

щения усилителя, когда пучок перемодулируется и значительная часть электронов попадает в ускоряющую фазу эффективного потенциала. Максимальное значение нормализованной амплитуды поля при $\hat{C} = 0$ равно

$$\hat{\varphi}_{\max} = E_{\max} / E_0 = 2,34$$

и в случае большого коэффициента усиления, т.е. в случае $E_{\text{ext}} / E_0 \ll 1$, не зависит от амплитуды поля на входе усилителя.

Сохранение мощности в процессе взаимодействия электронного пучка с электромагнитной волной в ондуляторе. Коэффициент преобразования энергии пучка в излучение (КПД) при большом коэффициенте усиления может быть определен как отношение плотности потока мощности излучения на выходе усилителя к плотности потока мощности электронного пучка на входе. В рассматриваемом одномерном приближении средняя мощность, переносимая волной, дается выражением

$$W = cE^2 S / (4\pi).$$

Таким образом, КПД усилителя в пределе $G \gg 1$ находится из формулы

$$\eta = eW / (\xi_0 I) = \beta \hat{\varphi}^2 / 4. \quad (47)$$

Электромагнитная мощность, излучаемая пучком электронов в ондуляторе, должна быть равна разности потоков кинетической энергии на входе и выходе усилителя, т.е. $W = -\langle P \rangle I / e$, где $\langle P \rangle$ — среднее изменение энергии частиц в пучке. Таким образом, используя закон сохранения мощности, можно определить КПД усилителя как отношение среднего изменения энергии частиц в пучке $\langle P \rangle$ к номинальной энергии ξ_0 : $\eta = -\langle P \rangle / \xi_0$. Перейдем к безразмерной величине $\langle \hat{P} \rangle$. Тогда выражение для КПД будет иметь вид $\eta = -\beta \langle \hat{P} \rangle$. В модели макрочастиц имеем

$$\langle \hat{P} / dz \rangle = \hat{\varphi} N^{-1} \sum_{j=1}^N \cos(\psi_{(j)} + \psi_0).$$

Здесь мы воспользовались первым каноническим уравнением движения частиц в поле волны (44). Сумму в последнем выражении можно выразить через амплитуду и фазу первой гармоники плотности пучка по формуле

$$N^{-1} \sum_{j=1}^N \cos(\psi_{(j)} + \psi_0) = (1/2) \hat{\rho}_1 \cos(\psi_1 - \psi_0).$$

Воспользовавшись первым уравнением системы (45), получим

$$\langle d\hat{P}/d\hat{z} \rangle = -\hat{\varphi}(1/2)d\hat{\varphi}/d\hat{z}.$$

Откуда следует, что

$$\eta = -\beta \langle \hat{P} \rangle = \beta \hat{\varphi}^2/4.$$

Сравнение с (47) показывает, что условие сохранения мощности выполнено. В частном случае точного резонанса ($\hat{C} = 0$) для приведенного максимального КПД ЛСЭ-усилителя с помощью (47) получаем простую формулу

$$\eta_{\max}/\beta = 1,37.$$

Насыщение в ЛСЭ-усилителях с большим усилением. В случае, когда усилитель имеет нормализованную длину $\hat{z} > 4$, коэффициент усиления по мощности в режиме насыщения при $\hat{C} = 0$ с погрешностью несколько процентов может быть вычислен по формуле

$$G_{\max} = (1/38) \exp(\sqrt{3}\Lambda_0 z), \quad (48)$$

или в децибелах: $G_{\max}(\text{дБ}) = 10 \lg(G_{\max}) = 7,5\Lambda_0 z - 15,8$. Амплитуда поля на входе усилителя E_{ext} , при которой достигается режим насыщения, находится из соотношения

$$E_{\text{ext}}/E_0 = 2,34/\sqrt{G_{\max}}, \quad (49)$$

где G дается выражением (48). Следует отметить, что с помощью графика, приведенного на рис.10, можно рассчитывать изменение амплитуды поля волны вдоль оси ондулятора для любого усилителя с нормализованной длиной $\hat{z} > 4$, работающего в режиме насыщения при $\hat{C} = 0$. Точка максимума поля при $\hat{z} = 8,4$ на рис.10 соответствует выходу усилителя, т.е. согласно (48), (49) точке с координатой, равной

$$\hat{z}_{\max} = \Lambda_0 z_{\max} = 3,1 + 2(3)^{-1/2} \ln(E_0/E_{\text{ext}}). \quad (50)$$

Амплитуда поля в точке, отстоящей от входа усилителя на расстояние $\hat{z} = \hat{z}_{\max} - \Delta\hat{z}$, равна значению амплитуды поля на рис.10 при $\hat{z} = 8,4 - \Delta\hat{z}$. Начиная с $\Delta\hat{z} > 4$, становится применимо линейное приближение и амплитуда E может быть найдена с помощью выражения (25), в котором E_{ext} определяется из соотношений (48), (49).

Важной выходной характеристикой усилителя является также ширина полосы усиления в режиме насыщения. Рассмотрим конкретный пример. Пусть нормализованная длина усилителя равна $\hat{z} = 7,4$. Тогда согласно соотношениям (48) и (49) в точном резонансе режим насыщения

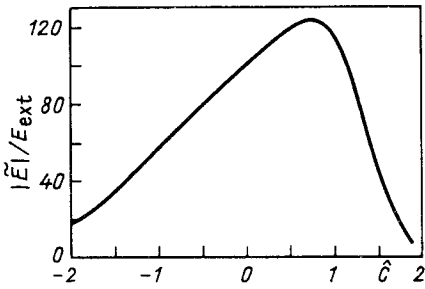


Рис.11. Нелинейный режим. Зависимость амплитуды поля на выходе усилителя, нормированной на амплитуду входного сигнала, от нормированной отстройки \hat{C} при $\hat{\kappa}_p^2 = 0$, $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$, $\hat{z} = 7,4$, $E_{ext}/E_0 = 2,34 \cdot 10^{-2}$. В точном резонансе ($\hat{C} = 0$) усилитель работает в режиме насыщения

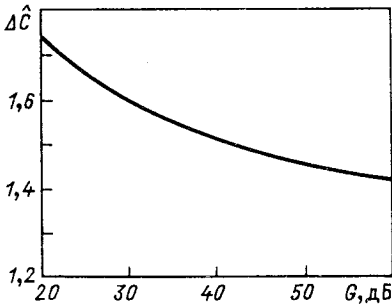


Рис.12. Нелинейный режим. Зависимость нормированной ширины полосы усиления от коэффициента усиления по мощности при $\hat{\kappa}_p^2 = 0$, $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$. В точном резонансе ($\hat{C} = 0$) усилитель работает в режиме насыщения

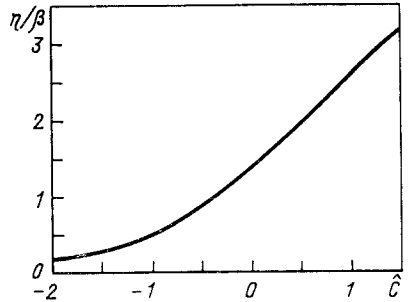


Рис.13. Нелинейный режим. Зависимость нормированного КПД усилителя в режиме насыщения от нормированной отстройки при $\hat{\kappa}_p^2 = 0$, $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$

достигается при входной амплитуде $E_{ext} = 2,34 \cdot 10^{-2} E_0$, при этом коэффициент усиления $G = 40$ дБ. Кривая зависимости амплитуды поля на выходе такого усилителя от параметра отстройки приведена на рис.11. В данном случае ширина полосы усиления $\hat{\Delta C} = 1,54$. Для усилителя, работающего в режиме насыщения при $\hat{C} = 0$ и имеющего другое значение коэффициента усиления G (т.е. другую нормированную длину), $\hat{\Delta C}$ может быть найдена с помощью графика на рис.12.

В общем случае для любого значения параметра отстройки, удовлетворяющего условию $\hat{C} < 1,89$, существует значение входной амплитуды E_{ext} , при которой выходная амплитуда достигает максимума. Максимальный КПД усилителя η_{max} является универсальной функцией параметра отстройки \hat{C} . График этой функции приведен на рис.13. Видно, что

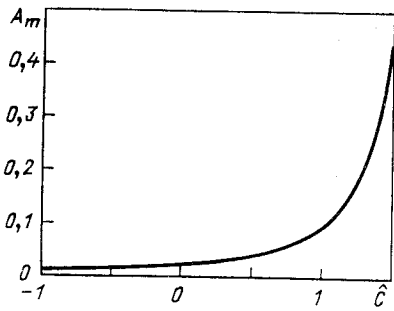


Рис.14. Нелинейный режим. Зависимость предэкспоненциального множителя в формуле (51) от нормализованной отстройки

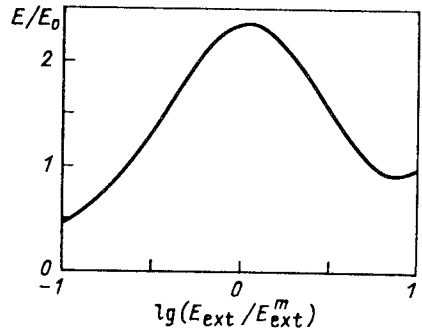


Рис.15. Нелинейный режим. Зависимость нормализованной амплитуды поля на выходе усилителя от амплитуды поля на входе, нормированной на оптимальную E_{ext}^m

При $E_{ext} = E_{ext}^m$ реализуется режим насыщения. $\hat{C} = 0, \hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0$

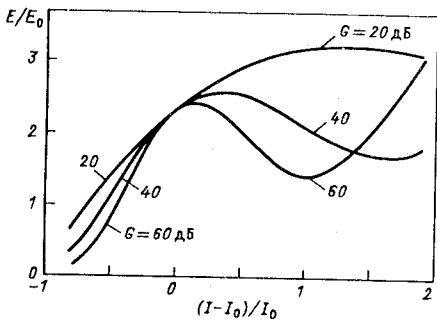


Рис.16. Нелинейный режим. Зависимость нормализованной амплитуды поля на выходе усилителя от изменения тока пучка для различных значений коэффициента усиления по мощности. При $I = I_0$ реализуется режим насыщения. $\hat{C} = 0, \hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0$. Амплитуда поля нормализована при значении тока $I = I_0$

максимальный КПД усилителя является растущей функцией параметра отстройки.

Коэффициент усиления по мощности в режиме насыщения также является универсальной функцией параметра \hat{C} :

$$G_{max} = A_m(\hat{C}) \exp [2 \operatorname{Re} (\hat{\Lambda}) \hat{z}]. \tag{51}$$

График функции $A_m(\hat{C})$ приведен на рис.14. Значения нормализованного инкремента находятся с помощью графика на рис.2. Амплитуду входного сигнала, при которой достигается режим насыщения, можно определить с помощью графиков на рис.2, 13, 14 по формуле

$$E_{ext}/E_0 = 2 [\eta_{max}/(\beta G_{max})]^{1/2}.$$

В практических ситуациях часто важно знать, как изменяется амплитуда поля на выходе усилителя при изменении амплитуды на входе.

Кривая зависимости E от E_{ext} для усилителя, работающего в режиме насыщения при $\hat{C} = 0$, приведена на рис.15. Следует отметить, что в пределе большого коэффициента усиления амплитудная характеристика усилителя не зависит от коэффициента усиления. Допустимые пульсации тока пучка могут быть определены с помощью рис.16, где приведены графики зависимости амплитуды поля на выходе усилителя от тока пучка при различных значениях коэффициента усиления G .

Обычно число слоев N при численном моделировании выбиралось равным 200–400. Результаты расчета нелинейного режима при этом с погрешностью 0,1% не зависят от конкретного значения N . Тестирование программы осуществлялось численным моделированием линейного режима. На рис.2 приведено сравнение значений инкремента, полученных при численном моделировании, и значений, полученных в результате решения характеристического уравнения (26). На рис.4 приведено сравнение амплитудно-частотной характеристики усилителя, полученной с помощью численного моделирования, с результатами аналитического решения начальной задачи по формуле (23). Наблюдается хорошее согласие численных и аналитических результатов. При числе макрочастиц $N = 200$ расхождение не превышает 0,1%.

Эффекты пространственного заряда в случае насыщения усиления. Для всестороннего численного моделирования процессов, происходящих в ЛСЭ-усилителях, уравнения движения макрочастиц (44) должны быть дополнены соответствующим слагаемым, определяющим влияние поля пространственного заряда. В анализируемой модели электронный пучок представляется в виде заряженных слоев с нулевой продольной длиной. В пределах длины волны модуляции плотности пучка λ расположено N слоев. Поверхностная плотность заряда каждого слоя равна $\sigma_q = j_0 \lambda (v_z N)$. Для нахождения продольной составляющей электрического поля пространственного заряда, которое создается системой заряженных слоев, перейдем в сопутствующую систему отсчета. В рассматриваемом приближении движение слоев в сопутствующей системе является нерелятивистским и электрическое поле пространственного заряда можно рассчитывать в квазистатическом приближении.

Итак, рассмотрим две системы отсчета: одну систему отсчета K будем считать неподвижной, другую K' – движущейся относительно первой вдоль оси z прямолинейно и равномерно со скоростью v_z , равной скорости частиц пучка на входе в ондулятор. Для расчета пространственного заряда необходимо знать положение слоев вдоль z как позади, так и впереди точки наблюдения. Характерной длиной, на которой происходит формирование поля пространственного заряда в рассматриваемой модели, является длина волны $\lambda' = \gamma_z \lambda$. В рамках принятого приближения характер-

ная длина, на которой происходит изменение модуляции плотности пучка, много больше λ' . Поэтому при нахождении поля, создаваемого системой заряженных слоев в данной точке наблюдения z' , можно считать, что эти слои расположены периодически с периодом λ' . Положение слоев в пределах длины волны является функцией координаты z' и времени t' .

Квазистатистический потенциал системы заряженных слоев, расположенных через λ' в системе K' , определяется как

$$V'_q = 2\pi\sigma_q \int_0^{\infty} r dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \rho'(\xi) [r^2 + (z' - \xi)^2]^{-1/2},$$

$$\rho'(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - n\lambda') = (1/\lambda') \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i n \xi / \lambda').$$

После несложных преобразований находим

$$V'_q = 2\sigma_q k' \sum_1^{\infty} \cos(nk'z') \int_0^{\infty} r dr \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cos(nk'\xi) [r^2 + \xi^2]^{-1/2}.$$

Здесь $k' = 2\pi/\lambda'$. Мы отбросили слагаемое с $n = 0$. Оно описывает потенциал равномерно заряженного пространства и для дальнейшего изложения интереса не представляет. Используя таблицы интегралов, получаем

$$V'_q = \frac{4\sigma_q}{k'} \sum_1^{\infty} \frac{\cos(nk'z')}{n^2}.$$

Для электрического поля соответственно имеем

$$E_z = -\frac{dV'_q}{dz'} = 4\sigma_q \sum_1^{\infty} \frac{\sin(nk'z')}{n}.$$

Воспользовавшись известной математической формулой

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin(n\xi)}{n} = \frac{\pi - \xi}{2} \quad (0 < \xi < 2\pi),$$

находим, что поле E_z будет изменяться при изменении z' от 0 до λ' как

$$E_z = 2\pi\sigma_q (1 - 2z'/\lambda').$$

Откуда находим выражение для поля пространственного заряда, действующего на i -й слой:

$$E_i = 2\sigma_q \sum_{j \neq i} [\pi \operatorname{sgn}(\psi_{(i)} - \psi_{(j)}) - (\psi_{(i)} - \psi_{(j)})] \cdot 1.$$

Здесь $\psi_{(i)}$ и $\psi_{(j)}$ - соответственно фазы i -го и j -го слоев,

$$\operatorname{sgn}(\psi_{(i)} - \psi_{(j)}) = 1 \text{ при } (\psi_{(i)} - \psi_{(j)}) > 0,$$

$$\operatorname{sgn}(\psi_{(i)} - \psi_{(j)}) = -1 \text{ при } (\psi_{(i)} - \psi_{(j)}) < 0.$$

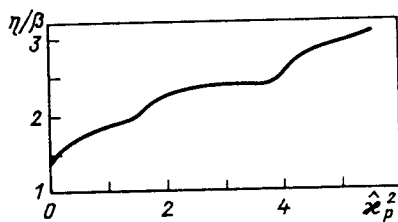
Принимая во внимание выражение для гамильтониана (5), находим, что учет влияния поля пространственного заряда сводится в анализируемом случае к добавлению в правой части первого уравнения системы (44) слагаемого $eE_z(\psi, z)$. В итоге уравнения движения i -го слоя запишутся в следующем нормализованном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dz} &= \hat{\varphi} \cos(\psi_{(i)} + \psi_0) + \\ &+ \hat{\kappa}_p^2 \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} [\pi \operatorname{sgn}(\psi_{(i)} - \psi_{(j)}) - (\psi_{(i)} - \psi_{(j)})] \right\}, \quad (52) \\ d\psi_{(i)}/dz &= \hat{P}_i + \hat{C}. \end{aligned}$$

С учетом влияния пространственного заряда максимальный КПД усилителя является универсальной функцией двух параметров, а именно параметра отстройки \hat{C} и параметра пространственного заряда $\hat{\kappa}_p^2$. В частном случае, когда отстройка \hat{C} выбирается так, что инкремент роста поля в линейном режиме достигает максимума, КПД усилителя в режиме насыщения является универсальной функцией только одного параметра $\hat{\kappa}_p^2$. Эта зависимость изображена на рис.17. Из рисунка видно, что максимальный КПД усилителя является растущей функцией параметра пространственного заряда.

Тестирование программы расчета нелинейного режима с учетом влияния пространственного заряда осуществлялось численным моделиро-

Рис.17. Нелинейный режим. Зависимость нормализованного КПД усилителя в режиме насыщения от параметра пространственного заряда $\hat{\kappa}_p^2$ при настройке на максимум инкремента. Параметр $\hat{C} = \hat{C}_m(\hat{\kappa}_p^2)$ определяется с помощью графика на рис.5, $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$



ванием линейного режима. На рис.6,7 приведено сравнение результатов численных и аналитических расчетов. При числе макрочастиц (слоев) в интервале фаз ψ от 0 до 2π , равном $N = 200$, совпадение результатов численного моделирования с аналитическими расчетами лучше 0,1%.

Эффекты энергетического разброса в случае насыщения усиления. При наличии гауссова энергетического разброса в пучке максимальный КПД усилителя является универсальной функцией трех параметров: \hat{C} , $\hat{\kappa}_p^2$, $\hat{\Lambda}_T^2$. В частном случае, когда $\hat{\kappa}_p^2 \rightarrow 0$, а отстройка равна значению \hat{C}_m , при котором инкремент достигает максимума, КПД усилителя в режиме насыщения является функцией только одного параметра $\hat{\Lambda}_T^2$. График этой функции приведен на рис.18. Из графика видно, что энергетический разброс приводит к резкому падению КПД усилителя.

Учет разброса энергий в пучке при численном моделировании нелинейного режима проводился путем разбиения всех макрочастиц в интервале фаз ψ от 0 до 2π при $z = 0$ на небольшое четное число групп. В каждой группе макрочастицы при $z = 0$ имеют одинаковые фазы ψ . Начальные значения нормализованных импульсов \hat{P}_i частиц в каждой группе распределялись по гауссову закону со среднеквадратичным отклонением $\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle = 2\hat{\Lambda}_T^2$. Фазы групп частиц при $z = 0$ распределялись в интервале от 0 до 2π таким образом, чтобы амплитуда первой гармоники плотности макрочастиц равнялась нулю.

Тестирование программы осуществлялось численным моделированием линейного режима. На рис.7, 9 приведено сравнение аналитических и численных решений уравнения самосогласованного поля в пределе большого коэффициента усиления. Сплошные кривые рассчитаны по аналитическим формулам (37), (38), крестики - результаты численных расчетов по формулам (45), (52). При численном моделировании начальное число разбиений по фазе ψ в интервале от 0 до 2π выбиралось равным 8.

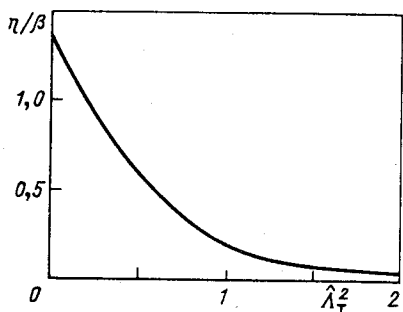


Рис.18. Нелинейный режим. Зависимость нормализованного КПД усилителя в режиме насыщения при настройке на максимум инкремента от параметра энергетического разброса $\hat{\Lambda}_T^2$, $\hat{\kappa}_p^2 = 0$, параметр $\hat{C} = \hat{C}_m(\hat{\Lambda}_T^2)$ определяется с помощью графика на рис.8

Число макрочастиц для моделирования разброса в каждой из восьми групп бралось равным 200. Из рисунков видно, что имеется хорошее согласие численных и аналитических результатов.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫХОДНОЙ МОЩНОСТИ ЛСЭ-УСИЛИТЕЛЯ ВАРИАЦИЕЙ ПАРАМЕТРОВ ОНДУЛЯТОРА

Предварительные замечания. Действие ЛСЭ-усилителя основано на длительном (резонансном) взаимодействии электронного пучка с электромагнитной волной в ондуляторе. Поэтому параметр Λ_0/κ_0 , пропорциональный обратному числу периодов ондулятора на характерной длине нарастания, всегда много меньше единицы. Уменьшение скорости электронов за счет торможения их полем волны приводит к нарушению синхронизма между частицами и волной, в результате чего КПД усилителя оказывается ограниченным значением величины порядка Λ_0/κ_0 .

Перспективным методом повышения эффективности ЛСЭ-усилителя является изменение параметров ондулятора вдоль его оси. Это позволяет сохранить необходимый для работы усилителя синхронизм и повысить КПД до величины порядка единицы. Первое предложение такого способа повышения КПД ЛСЭ-усилителей было высказано в работе [8]. Позднее, с помощью численного моделирования, были выполнены расчеты эффективности усилителей с изменяющимися параметрами ондулятора [9, 10].

ЛСЭ-усилитель с оптимальным ондулятором (приближение малого КПД). Методика расчета параметров оптимального ондулятора. Согласно системе уравнений (44) движение частиц определяется параметром отстройки

$$C = \kappa_0 - \omega/2c\gamma_z^2 = \kappa_0 - \omega(1 + Q^2)/(2c\gamma^2),$$

который является функцией периода ондулятора $\lambda_0 = 2\pi/\kappa_0$ и параметра магнитной силы $Q = eH_0/(m_0c^2\kappa_0)$. Изменение параметров ондулятора приводит к тому, что параметр отстройки становится функцией координаты z . Из возможных способов вариации параметров ондулятора рассмотрим один, а именно изменение периода λ_0 при постоянном параметре магнитной силы $Q = \text{const}$. Последнее условие означает, что поле на оси ондулятора H_0 должно изменяться обратно пропорционально периоду ($H_0 \propto \lambda_0^{-1}$).

В случае спирального ондулятора с бифилярной обмоткой поле на оси согласно [11] равно (в единицах СИ):

$$H_0 = I_s(\pi R)^{-1} [\kappa_0^2 R^2 K_0(\kappa_0 R) + (\kappa_0 R) K_1(\kappa_0 R)],$$

где I_s и R - соответственно ток и радиус спиральной обмотки; K_0 и K_1 - модифицированные функции Бесселя 2-го рода. Параметр магнитной силы Q при постоянном токе в спирали ($I_s = \text{const}$) для такого ондулятора является универсальной функцией параметра $\kappa_0 R$. Поэтому вариация периода ондулятора при постоянном Q в данном случае реализуется профилированием обмотки пропорционально периоду, т.е. $R \propto \lambda_0$.

Вначале примем допущение, что КПД усилителя при вариации параметров ондулятора хотя и увеличивается во много раз, но по-прежнему остается много меньше единицы. Такое приближение имеет не только методический, но и практический интерес, так как длина усилителя при увеличении КПД значительно возрастает, и в реальных условиях в ряде случаев потребуются, например, ограничиться увеличением КПД с $\eta = 1\%$ до $\eta = 10\%$, но не более. При численном моделировании условие малости величины η позволяет использовать ту же самую систему нормализованных уравнений (44), (45), которая использовалась ранее при расчете нелинейного режима ЛСЭ-усилителя с постоянными параметрами ондулятора. Параметр отстройки C во втором уравнении системы (44) теперь является заданной функцией z и выражается при $Q = \text{const}$ через изменение волнового числа ондулятора κ_0 согласно соотношению $C = C(0) + \Delta\kappa_0$.

Рассмотрим способ вариации параметров ондулятора, при котором отстройка равна постоянному значению на начальном участке ондулятора и, начиная с некоторой длины, монотонно и плавно увеличивается как полином второй степени

$$C(z) = C(0) + \Delta\kappa_0(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z - z_i) + \alpha_2(z - z_i)^2,$$

где z_i - координата, с которой начинается варьирование. Параметр \hat{C} в уравнениях (44) можно переписать в нормализованном виде

$$\begin{aligned} \hat{C} &= k_0 + k_1(\hat{z} - \hat{z}_i) + k_2(\hat{z} - \hat{z}_i)^2, \\ \hat{z}_i &= \Lambda_0 z_i, \quad k_0 = \alpha_0 / \Lambda_0, \quad k_1 = \alpha_1 / \Lambda_0^2, \quad k_2 = \alpha_2 / \Lambda_0^3. \end{aligned} \quad (53)$$

Выбор именно такого способа вариации отстройки может быть легко понят, если учесть, что амплитуда поля излучения полностью сгруппированного электронного пучка в ондуляторе в точном резонансе согласно уравнениям (45) должна расти пропорционально длине ондулятора. Из условия баланса мощностей (47) следует, что изменение энергии частиц при постоянной настройке на резонанс должно быть пропорционально

квадрату длины участка излучения. В приближении малого КПД из уравнений движения частиц (44) видно, что для выполнения условия синхронизма параметр отстройки \hat{C} должен компенсировать изменение энергии частиц пучка. Приведенные выше соображения эвристического характера позволяют сформулировать следующее ограничение на функцию $S(\hat{z})$.

При любом способе вариации параметров ондулятора, приводящим к захвату частиц пучка в режим когерентного торможения, асимптотика $\hat{C}(\hat{z})$ должна быть квадратичной функцией длины ондулятора. Существует много способов вариации параметров ондулятора, удовлетворяющих приведенному выше условию. Используемый нами способ вариации является простейшим и требует оптимального выбора только четырех коэффициентов k_0, k_1, k_2 и \hat{z}_i . Подбор коэффициентов проводился с помощью программы оптимизации на максимум поля при

$$(\hat{z} - \hat{z}_i) \gg 1.$$

При этом были получены следующие значения:

$$k_0 = 0, k_1 = 1,44, k_2 = 0,36. \quad (54)$$

Оптимальная длина участка ондулятора с постоянными параметрами определяется из соотношения

$$\hat{z}_i = 1,7 + 2(3)^{-1/2} \ln(E_0/E_{\text{ext}}). \quad (55)$$

Сравнивая выражения (50) и (55), приходим к выводу, что варьирование следует начинать, не доходя расстояние $\Delta z = 1,4/\Lambda_0$ до максимума поля в ондуляторе с постоянными параметрами. Коэффициент захвата частиц в режим торможения при значениях коэффициентов (54) и (55) равен 65%.

Коэффициент захвата частиц в режим когерентного торможения при вариации параметров ондулятора по закону (53) сильно зависит от значения коэффициента k_2 . При $k_2 > 0,4$ захват частиц в режим когерентного торможения отсутствует и существенного повышения КПД не происходит. При изменении k_2 в сторону значений, меньших 0,36, режим когерентного торможения частиц остается устойчивым, а коэффициент захвата даже несколько увеличивается. Однако равновесная тормозящая фаза захваченных частиц при этом расположена ближе к 90° , в результате чего увеличение амплитуды поля происходит медленнее, чем при $k_2 = 0,36$.

Методика расчета выходных характеристик оптимизированного ЛСЭ-усилителя. На рис.19 приведен график зависимости нормализованной амплитуды $E(\hat{z})/E_0$ для случая, когда $E_{ext}/E_0 = 0,01$. Вариация параметров ондулятора осуществлялась начиная с $\hat{z}_i = 7$ по закону

$$C/\Lambda_0 = 1,44 (\hat{z} - 7) + 0,36 (\hat{z} - 7)^2.$$

Для сравнения на рис.19 приведена также зависимость $E(z)/E_0$ для ондулятора с постоянными параметрами.

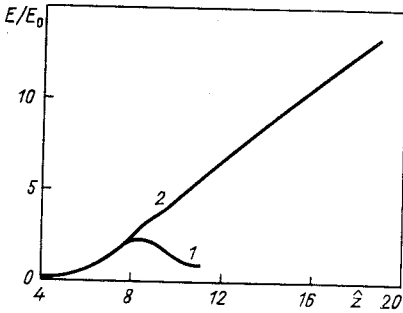


Рис.19. Вариация параметров. Зависимость нормализованной амплитуды поля от нормализованной длины ондулятора. $\hat{C} = 0, \hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0, E_{ext}/E_0 = 0,01$: 1 - без вариации параметров; 2 - вариация параметра отстройки по закону: $\hat{C} = 0$ при $\hat{z} < 7, \hat{C} = 1,44(\hat{z} - 7) + 0,36(\hat{z} - 7)^2$ при $\hat{z} > 7$

График на рис.19 позволяет рассчитать изменение амплитуды поля вдоль оси ондулятора для произвольного значения E_{ext}/E_0 . Действительно, до значения $\hat{z} = \hat{z}_i$, даваемого формулой (55), функция $E(\hat{z})/E_0$ в общем случае может быть найдена так, как было описано в разд.2. Далее точка с координатой \hat{z}_i ставится в соответствие с точкой на рис.19, имеющей координату $\hat{z} = 7$, а значение нормализованной амплитуды поля в точке с координатой $\hat{z} = \hat{z}_i + \Delta\hat{z}$ равно значению $E(7 + \Delta\hat{z})/E_0$ на рис.19.

В общем случае изменение амплитуды поля в ондуляторе с параметрами, изменяющимися по закону (53) - (55), при $(\hat{z} - \hat{z}_i) > 3$ может быть вычислено по приближенной формуле

$$E(\hat{z})/E_0 = \hat{\varphi}(\hat{z}) = \hat{z} - 2(3)^{-1/2} \ln (E_0/E_{ext}). \quad (56)$$

Напомним, что приведенные выше результаты справедливы при условии, что на выходе усилителя при $\hat{z} = \hat{z}_i$ значение КПД мало, т.е.

$$\eta = [\hat{\varphi}(\hat{z}_i)]^2 \beta / 4 \ll 1.$$

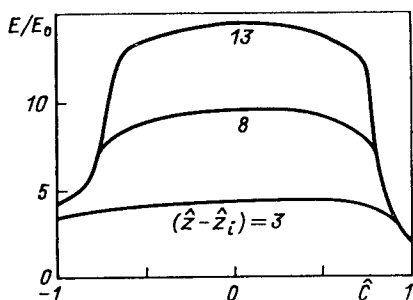
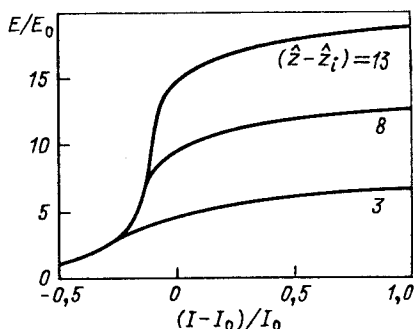


Рис.21. Вариация параметров. Зависимость нормализованной амплитуды поля на выходе усилителя в режиме малого КПД от изменения тока пучка при различных длинах участка торможения. $\hat{C} = 0, \hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0$. Нормализация параметров проведена при $I = I_0$

Рис.20. Вариация параметров. Зависимость нормализованной амплитуды поля на выходе усилителя в режиме малого КПД от нормализованной начальной отстройки при различных длинах участка торможения. $\hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0$



На рис.20 приведены графики зависимости амплитуды поля на выходе усилителя от начальной отстройки \hat{C} при различных длинах участка торможения. Коэффициент усиления G на участке ондулятора с постоянными параметрами при этом равен $G = 40$ дБ. Начальная отстройка C равна

$$C = \kappa_0(0) - \omega(1 + Q^2)m_0^2c^3/(2\xi_0^2),$$

где $\kappa_0(0)$ - начальное значение волнового числа ондулятора. Как видно из рис.20, ширина полосы усиления при повышении КПД усилителя практически остается такой же, как и в режиме насыщения, а следовательно, теми же остаются и ограничения на пульсации энергии пучка. Ограничения на пульсации тока пучка можно получить с помощью рис.21, на котором даны графики зависимости амплитуды поля на выходе усилителя от тока пучка при различных значениях длины участка торможения. Здесь отклонение тока пучка $\Delta I = I - I_0$, а нормализующие множители вычисляются при значении тока, равном I_0 . Из рисунка видно, что режим когерентного торможения частиц остается устойчивым при значительных отклонениях тока пучка в сторону больших значений. Это объясняется тем, что согласно соотношению (53) увеличение тока пучка при фиксировании остальных параметров задачи приводит к фактическому уменьшению коэффициента k_2 , что, как указывалось выше, по-прежнему удовлетворяет условию существования захвата частиц в режиме коге-

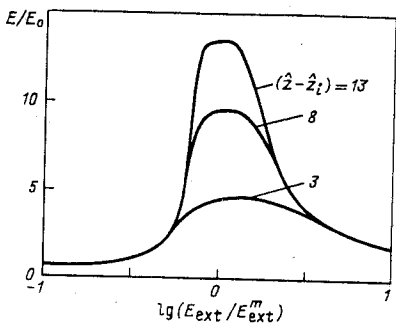
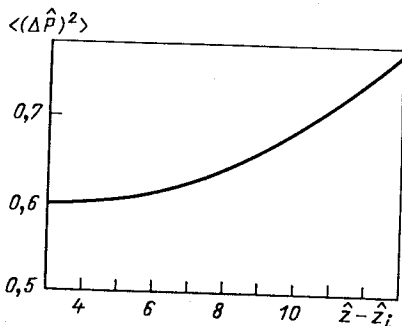


Рис.23. Вариация параметров. Зависимость нормализованного среднеквадратичного разброса энергий захваченных частиц от длины участка торможения в режиме малого КПД

Рис.22. Вариация параметров. Зависимость нормализованной амплитуды поля на выходе усилителя от амплитуды поля на входе, нормированной на E_{ext}^m

Координата начала участка варьирования \hat{z}_i рассчитана при $E_{ext} = E_{ext}^m$

$$\hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0$$



рентного торможения. Амплитудные характеристики усилителя с вариацией параметров приведены на рис.22.

Энергетическое распределение электронов на выходе ЛСЭ-усилителя. На практике часто важно знать распределение по энергии электронов в пучке на выходе усилителя. На рис.23 приведен график зависимости среднеквадратичного разброса нормализованных импульсов захваченных частиц от нормализованной длины участка торможения. Из рис.23 видно, что в процессе торможения происходит медленное увеличение разброса энергий частиц. Этот факт объясняется тем, что при фазовых колебаниях захваченных частиц имеет место сохранение адиабатического инварианта, который в предположении линейности колебаний равен $(\delta \hat{P})^2 / (2\kappa_s)$, где $\delta \hat{P}$ - амплитуда колебаний нормализованного импульса частицы;

$$\kappa_s = (\hat{\varphi} \sin(\psi_s - \psi_0))^{1/2}$$

- приведенное волновое число фазовых колебаний. Откуда можно сделать вывод, что при постоянной тормозящей фазе $(\psi_s - \psi_0)$ увеличение амплитуды эффективного потенциала $\hat{\varphi}$ приводит к увеличению разброса импульсов пропорционально $\hat{\varphi}^{1/4}$. Среднеквадратичный разброс энергий частиц вычисляется с помощью формулы

$$\langle (\Delta \mathcal{E})^2 \rangle / \mathcal{E}_0^2 = \beta^2 \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle.$$

При значительном увеличении η средняя энергия захваченных частиц равна

$$\bar{\xi} = \xi_0 - 0,38\beta \xi_0 E^2 / E_0^2.$$

Среднеквадратичный разброс энергий незахваченных частиц и их средняя энергия практически не зависят от длины участка торможения и соответственно равны

$$\langle (\Delta \xi)^2 \rangle / \xi_0^2 \cong 3\beta^2, \quad \bar{\xi} \cong \xi_0 - 0,45\beta \xi_0.$$

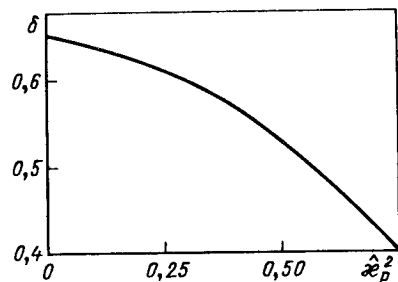
Влияние пространственного заряда и энергетического разброса на коэффициент захвата электронов в режим когерентного торможения. Исследования влияния пространственного заряда в усилителях с переменными параметрами ондулятора показали, что, как и следовало ожидать, оно оказывает дефокусирующее действие, уменьшая коэффициент захвата в режим когерентного торможения. Оптимизационные расчеты проводились с использованием системы уравнений самосогласованного поля в приближении малого КПД (45), (52). Вариация проводилась по закону

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \hat{C}_m && \text{при } \hat{z} < \hat{z}_i, \\ \hat{C} &= \hat{C}_m + k_1(\hat{z} - \hat{z}_i) + k_2(\hat{z} - \hat{z}_i)^2 && \text{при } \hat{z} > \hat{z}_i, \end{aligned} \quad (57)$$

где \hat{C}_m - значение параметра отстройки, при котором инкремент достигает максимума. В данном случае для упрощения задачи оптимизации начальное значение параметра отстройки не варьировалось, а выбиралось равным \hat{C}_m . Такой выбор основан на конкретных физических соображениях и близок к оптимальному. Подбор параметров k_1, k_2, \hat{z}_i проводился с помощью программы оптимизации на максимум поля при $\hat{z} - \hat{z}_i \gg 1$. Рисунок 24 демонстрирует изменение коэффициента захвата в зависимости от параметра пространственного заряда при оптимальной вариации параметров ондулятора.

С использованием уравнений (44), (45) было проведено исследование влияния разброса энергий в пучке на процесс захвата и когерентного

Рис.24. Вариация параметров. Зависимость коэффициента захвата от параметра пространственного заряда в режиме малого КПД при оптимальной вариации параметров ондулятора. Параметр энергетического разброса равен нулю



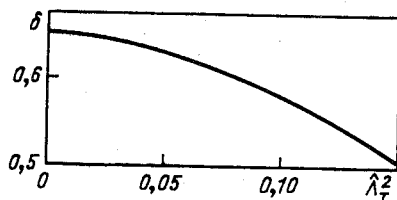


Рис.25. Вариация параметров. Зависимость коэффициента захвата от параметра энергетического разброса в режиме малого КПД при оптимальной вариации параметров ондулятора. Параметр пространственного заряда равен нулю

торможения частиц волной в ондуляторе с переменными параметрами. При проведении оптимизационных расчетов параметры ондулятора варьировались по закону (57). Коэффициент захвата как функция параметра разброса при оптимальной вариации параметров ондулятора показан на рис.25.

Пределы применимости приближения малого КПД. Ранее относительное движение частиц под действием электромагнитного поля описывалось гамильтонианом (43), полученным из гамильтониана (40) путем разложения по малому отклонению $P = \xi - \xi_0$. В случае ондулятора с вариацией параметров такое приближение уже может стать неприменимым и при описании движения слоев необходимо использовать уравнения (41), (42), полученные из исходного гамильтониана (40).

Нормализуем уравнения (41), (42) обычным способом с тем лишь уточнением, что все нормализующие множители вычисляются по начальным значениям параметров пучка и ондулятора. В результате с учетом того, что параметр магнитной силы $Q = \text{const}$, а угол вращения частиц в ондуляторе зависит от их энергии согласно соотношению

$$\theta = \theta_0 / (1 + \Delta \xi / \xi_0) = \theta_0 / (1 + \beta \hat{P}),$$

получим следующую систему рабочих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{P}}{dz} &= \frac{\hat{\varphi}}{1 + \beta \hat{P}} \cos(\psi + \psi_0); \\ \frac{d\psi}{dz} &= \frac{\hat{P}(1 + \beta \hat{P}/2)}{(1 + \beta \hat{P})^2} + \hat{C} + \beta \hat{\varphi} \frac{\sin(\psi + \psi_0)}{(1 + \beta \hat{P})^2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь, как и ранее, параметр отстройки

$$\hat{C} = \frac{\kappa_0(z)}{\Lambda_0} - \frac{m_0^2 c^3 \omega (1 + Q^2)}{2 \Lambda_0 \xi_0^2}.$$

Уравнения для $\hat{\varphi}$ и ψ_0 имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{\varphi}}{d\hat{z}} &= -\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\cos(\psi_{(j)} + \psi_0)}{1 + \beta\hat{P}_j}, \\ \frac{d\psi_0}{d\hat{z}} &= \frac{1}{\hat{\varphi}} \left\{ \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sin(\psi_{(j)} + \psi_0)}{1 + \beta\hat{P}_j} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Рассмотрим вначале ситуацию, когда параметры ондулятора изменяются так, что функция отстройки \hat{C} является по-прежнему полиномом второй степени, коэффициенты которого равны значениям (54), (55), оптимальным для режима малого КПД, т.е. при $\hat{z} > \hat{z}_i$ имеем

$$\hat{C} = 1,44(\hat{z} - \hat{z}_i) + 0,36(\hat{z} - \hat{z}_i)^2.$$

Результаты численного моделирования этого случая с использованием системы уравнений (58), (59) приведены на рис.26 в виде кривых зависимости нормализованной амплитуды поля E/E_0 от нормализованной длины ондулятора \hat{z} для различных значений параметра β . При сравнительно небольших длинах участка торможения изменение энергии захваченных частиц мало: $\Delta \xi / \xi_0 = \beta\hat{P} \ll 1$. В этом случае система уравнений (58), (59) переходит в систему уравнений (44), (45), а график функции $\hat{\varphi}(\hat{z}, \beta)$, изображенный на рис.26, совпадает на этом участке ондулятора с графиком функции $\hat{\varphi}(\hat{z})$ на рис.19. В начале участка торможения средний импульс захваченных частиц квадратично уменьшается с длиной ондулятора, компенсируя квадратичное возрастание параметра \hat{C} в уравнении на фазу ψ системы (58) $d\psi/d\hat{z} = \hat{P} + \hat{C}$. При этом среднее изменение фазы захваченных частиц равно нулю: $\langle d\psi/d\hat{z} \rangle = 0$, а их движение представляет собой фазовые колебания возле равновесной тормозящей фазы

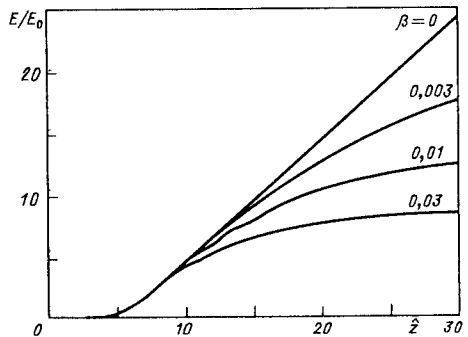


Рис.26. Вариация параметров. Зависимость нормализованной амплитуды поля от нормализованной длины ондулятора при различных значениях параметра β и $\hat{\kappa}_p^2 = 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0, E_{ext}/E_0 = 0,01$. Нормализованная отстройка меняется по закону: $\hat{C} = 0$ при $\hat{z} < 7, \hat{C} = 1,44(\hat{z} - 7) + 0,36(\hat{z} - 7)^2$ при $\hat{z} > 7$

$\psi_s - \psi_0 = \text{const}$ (согласно второму уравнению системы (59) при $E/E_0 \gg 1$ изменением фазы эффективного потенциала ψ_0 можно пренебречь). При дальнейшем увеличении длины участка торможения становится существенным различие между приближенной системой уравнений (44), (45) и исходной системой уравнений (58), (59). Так, согласно уравнению для фазы исходной системы

$$\frac{d\psi}{d\hat{z}} = \frac{\hat{P}(1 + \beta\hat{P}/2)}{(1 + \beta\hat{P})^2} + \hat{C},$$

компенсация квадратичного возрастания параметра отстройки \hat{C} будет иметь место при более медленном торможении захваченных частиц. Численное моделирование с помощью исходной системы уравнений (58), (59) показывает, что на конечном участке торможения число захваченных частиц не меняется, а их движение представляет собой фазовые колебания возле равновесной тормозящей фазы $\psi_s - \psi_0$, которая, в свою очередь, адиабатически медленно уменьшается так, что разность фаз $\psi_s - \psi_0$ приближается к значению 90° . В результате рост амплитуды поля замедляется и дальнейшее увеличение длины ондулятора становится неэффективным. С помощью кривых на рис.26 можно получить представление о границах применимости рассмотренного ранее режима когерентного торможения в приближении малого КПД. Так, из рисунка видно, что в практически интересной области значений параметра β ($0,003 < \beta < 0,03$) применение результатов, полученных с помощью приближенной системы рабочих уравнений (44), (45), оправданно, если конечный КПД усилителя меньше 10%.

Вопросы расчета ЛСЭ-усилителей с высоким КПД. Приведенные выше результаты показывают, что для эффективного глубокого торможения захваченных частиц необходимо изменять параметры ондулятора таким образом, чтобы параметр отстройки \hat{C} увеличивался с увеличением длины участка торможения быстрее, чем квадратичный полином (53). Из вида уравнения на фазу (58) можно сделать предположение, что линейный закон возрастания амплитуды поля сохраняется и в режиме глубокого торможения, если при $\hat{z} > \hat{z}_i = \hat{z}_m - 1,4$ параметр отстройки будет изменяться по закону

$$\begin{aligned} \hat{C} &= T(\hat{z}) [1 - \beta T(\hat{z})/2] [1 - \beta T(\hat{z})]^{-2}, \\ T(\hat{z}) &= 1,44(\hat{z} - \hat{z}_i) + 0,36(\hat{z} - \hat{z}_i)^2. \end{aligned} \quad (60)$$

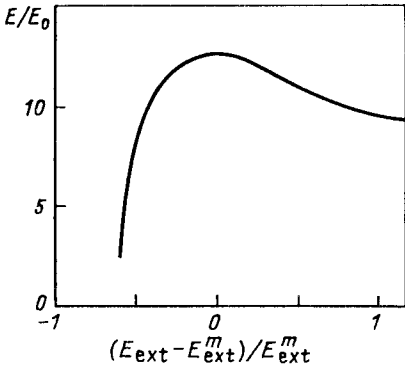


Рис.27. Вариация параметров. Зависимость нормализованной амплитуды поля на выходе усилителя в режиме высокого КПД от изменения амплитуды поля на входе. Нормализованная отстройка меняется по закону (60), координата начала участка варьирования \hat{z}_i рассчитана при $E_{ext} = E_{ext}^m$. При $E_{ext} = E_{ext}^m$ КПД усилителя $\eta = 40\%$, коэффициент усиления по мощности на участке ондулятора с постоянными параметрами равен 40 дБ

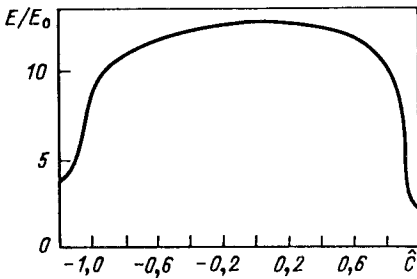


Рис.28. Вариация параметров. Зависимость нормализованной амплитуды поля на выходе усилителя в режиме высокого КПД от нормализованной начальной отстройки. При нулевой начальной отстройке КПД усилителя $\eta = 40\%$, коэффициент усиления по мощности на участке ондулятора с постоянными параметрами равен 40 дБ

Результаты численного моделирования подтверждают это предположение. Действительно, при изменении параметра \hat{C} согласно выражению (60) нормализованная амплитуда поля изменяется по линейному закону (56)

$$\hat{\varphi}(\hat{z}, \beta) = \hat{\varphi}(\hat{z}) \cong \hat{z} - \hat{z}_m + 3$$

и в области, где КПД усилителя становится сравнимым с единицей. Движение частиц в режиме глубокого торможения оказывается устроенным следующим образом. Захваченные частицы совершают фазовые колебания возле равновесной тормозящей фазы $\psi_s - \psi_0$, которая тем не менее несколько уменьшается, приближаясь к 90° . Это уменьшение $\psi_s - \psi_0$ компенсирует некоторое увеличение излучения пучка вследствие увеличения угла вращения захваченных частиц.

С помощью соотношений (47), (56) можно вычислить полную длину ондулятора z_f требуемую для достижения значения КПД, равного η :

$$z_f = \Lambda_0^{-1} \left[2(\eta/\beta)^{1/2} + 2(3)^{-1/2} \ln(E_0/E_{ext}) \right]. \quad (61)$$

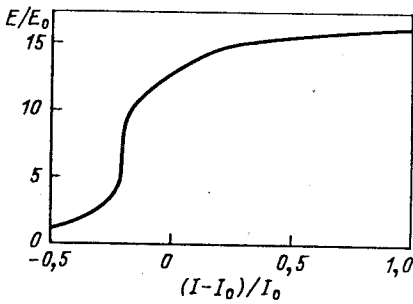


Рис.29. Вариация параметров. Зависимость нормализованной амплитуды поля на выходе усилителя в режиме высокого КПД от изменения тока пучка. При $I = I_0$ КПД усилителя $\eta = 40\%$, коэффициент усиления по мощности на участке ондулятора с постоянными параметрами равен 40 дБ

Очевидно, что КПД усилителя η должен быть меньше коэффициента захвата, равного 65%. Полное изменение волнового числа ондулятора согласно соотношению (60) составит

$$C = \Delta\kappa_0(z_f) = 2\pi \left[\lambda_0^{-1}(z_f) - \lambda_0^{-1}(z_i) \right] = \\ = \Lambda_0 T(\hat{z}_f) \left[1 - \beta T(\hat{z}_f)/2 \right] \left[1 - \beta T(\hat{z}_f) \right]^{-2},$$

где $T(\hat{z}_f)$ и $\hat{z}_f = \Lambda_0 z_f$ вычисляются из выражений (60) и (61).

На рис 27, 28 приведены выходные характеристики усилителя при η , равном 40%. Как видно из рисунков, эти характеристики при повышении КПД усилителя до значения порядка единицы практически остаются такими же, как и в режиме малого КПД. Зависимость амплитуды поля на выходе усилителя от тока пучка при $\eta = 40\%$ показана на рис.29. Видно, что даже при значительном увеличении тока выходная амплитуда поля практически не изменяется, а КПД усилителя понижается только за счет возрастания мощности пучка. Так, например, при увеличении тока пучка в 1,5 раза при фиксированных остальных параметрах задачи КПД снижается с 40 до 33%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено систематическое изложение одномерной теории ЛСЭ-усилителя. Условие применимости такой модели предполагает, что в процессе усиления излучение практически не выходит за пределы электронного пучка. Физически это означает достаточную малость длины волны излучения по сравнению с поперечными размерами электронного пучка. Одномерная модель, как правило, достаточно хорошо описывает ЛСЭ-усилители оптического и УФ-диапазонов. Кроме того, построение одномерной теории имеет также большое методическое

значение как шаг, предшествующий разработке полных трехмерных моделей. Использование методов подобия при построении теории, с одной стороны, делает теорию предельно ясной и наглядной, а с другой стороны, дает в руки чрезвычайно удобный в практической работе способ расчета выходных характеристик усилителя.

В качестве примера проведем расчет ЛСЭ-усилителя на длину волны 10,6 мкм. Параметры усилителя приведены ниже.

Параметры установки

Ускоритель:

энергия электронов, МэВ	25
ток пучка, А	1000
энергетический разброс, %	0,2
эмиттанс, см ² ·рад	$2\pi \cdot 10^{-4}$
радиус пучка в ондуляторе, см	0,13

Ондулятор:

период, см	4
напряженность поля на оси, Гс	1515

Задающий лазер:

длина волны излучения, мкм	10,6
мощность, кВт	1

Задающий лазер на данную длину волны имеет мощность 1 кВт и оптимально сфокусирован на электронный пучок. Возьмем спиральный ондулятор с периодом 4 см. Из условия синхронизма (5) $C = 0$ однозначно получаем требуемое значение напряженности магнитного поля на оси ондулятора $H_0 = 1515$ Гс. Условие согласования электронного пучка с ондулятором однозначно определяет радиус электронного пучка. Таким образом, мы имеем все необходимые характеристики и можем вычислить безразмерные параметры задачи.

Нормализованные параметры

Параметр нарастания Λ_0 , см ⁻¹	$3,1 \cdot 10^{-2}$
Параметр пространственного заряда κ_p^2	0,16
Параметр энергетического разброса Λ_T^2	0,05
Параметр β	0,01

Анализ параметров показывает, что в данном случае влияние пространственного заряда, энергетического и углового разброса мало, поэтому расчеты можно проводить по формулам для «холодного» электронного пучка и случая пренебрежения пространственным зарядом. Учитывая значение нормализованного инкремента (3)^{1/2}/2, получим инкремент усиления по мощности 23,3 дБ/м. С помощью формулы (24) и графика на рис.1 можно получить значения усиливаемой мощности на линейном

участке усиления и определить, что линейная стадия усиления заканчивается на расстоянии примерно 160 см от начала ондулятора. Для случая ондулятора с постоянными параметрами формулы (50) и (48) позволяют определить длину, на которой достигается насыщение и КПД усилителя в режиме насыщения. Для случая ондулятора с вариацией параметров формула (55) дает значение координаты начала вариации, формула (56) - закон изменения амплитуды поля усиливаемой волны от координаты, формула (53) позволяет вычислить изменение периода ондулятора:

$$\lambda_0(z) = 4,0 \text{ см при } z < 260 \text{ см, и}$$

$$\lambda_0(z) = (0,25 + 2,23 \cdot 10^{-4} (z - 260) + 1,73 \cdot 10^{-6} (z - 260)^2)^{-1} \text{ см,}$$

при $z > 260$ см. В конце участка варьирования ($z = 430$ см) период ондулятора и напряженность магнитного поля соответственно равны $\lambda_0 = 2,9$ см, $H_0 = 2,1$ кГс. КПД при этом увеличивается до 10%. Нетрудно убедиться, что в приведенном примере выполняются все требования применимости одномерной модели. Амплитудная, токовая и частотная характеристики могут быть вычислены с помощью соответствующих нормализованных графиков. Ниже приведены основные характеристики усилителя.

Выходные характеристики усилителя

Линейный режим усиления:

длина ондулятора, см	160
коэффициент усиления, дБ	27,9
ширина полосы усиления по частоте, %	3

Режим насыщения (постоянные параметры):

длина ондулятора, см	300
КПД, %	1,4
коэффициент усиления, дБ	55,2
ширина полосы усиления по частоте, %	3

Режим с вариацией параметров:

полная длина ондулятора, см	430
длина участка с вариацией параметров, см	170
КПД, %	10
коэффициент усиления, дБ	63,8
коэффициент захвата, %	65
ширина полосы усиления по частоте, %	3

Достижение КПД выше 10%, естественно, возможно, но при этом нарушаются условия применимости одномерной модели и требуется проводить учет эффектов дифракции, что выходит за рамки данной работы. Тем не менее проведенный в рамках одномерной модели наглядный рас-

чет представляет практический интерес и может быть технически реализован на современном уровне развития ускорительной техники.

В заключение необходимо отметить, что в силу ограниченности объема работы мы сознательно опустили из рассмотрения один частный, но практически интересный вопрос теории, а именно исследование систем с продольным ведущим магнитным полем. В этом случае наряду с радиационной неустойчивостью могут развиваться и другие типы неустойчивостей, особый интерес с практической точки зрения здесь может представлять кулоновская неустойчивость отрицательной массы продольного движения. Тем не менее, как показывают расчеты, проведенные с использованием трехмерной теории, для большинства практически реализуемых случаев системы с продольным полем с точки зрения корректности разумнее изучать в рамках трехмерной теории.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛСЭ-УСИЛИТЕЛЯ С ХОЛОДНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

В разд.1 решение начальной задачи было получено с помощью метода Лапласа. В этом приложении будет рассмотрен совершенно иной метод решения начальной задачи. Когда анализ касается холодного пучка, кинетическое уравнение (9) и волновое уравнение (13) могут быть сведены к единственному дифференциальному уравнению на амплитуду поля усиливаемой волны \tilde{E} :

$$\tilde{E}''' + 2i\hat{C}\tilde{E}'' + (\hat{\kappa}_p^2 - \hat{C}^2)\tilde{E}' = i\tilde{E}, \quad (62)$$

где штрих означает дифференцирование по \hat{z} . Так как уравнение (62) является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то решение естественно искать в виде

$$\tilde{E}(\hat{z}) = A \exp(\lambda\hat{z}).$$

Величина множителя λ в показателе экспоненты согласно (62) удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\lambda[(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\kappa}_p^2] = i, \quad (63)$$

которое дает три значения λ , определяющих три линейно-независимых решения для амплитуды поля:

$$\tilde{E}_1 = \exp(\lambda_1\hat{z}), \quad \tilde{E}_2 = \exp(\lambda_2\hat{z}), \quad \tilde{E}_3 = \exp(\lambda_3\hat{z}).$$

Для решения начальной задачи требуется задать три величины

$$\tilde{E}(0), \tilde{E}'(0), \tilde{E}''(0),$$

которые соответствуют значениям амплитуды поля, ее первой и второй производным по \hat{z} на входе в ондулятор при $\hat{z} = 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{E}' \\ \tilde{E}'' \end{pmatrix}_{\hat{z}} = M(\hat{z}|0) \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{E}' \\ \tilde{E}'' \end{pmatrix}_0, \quad (64)$$

где матрица перехода $M(\hat{z}|0)$ равна

$$M = \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 \\ \tilde{E}_1' & \tilde{E}_2' & \tilde{E}_3' \\ \tilde{E}_1'' & \tilde{E}_2'' & \tilde{E}_3'' \end{bmatrix}_z \times \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 \\ \tilde{E}_1' & \tilde{E}_2' & \tilde{E}_3' \\ \tilde{E}_1'' & \tilde{E}_2'' & \tilde{E}_3'' \end{bmatrix}_0^{-1}.$$

Явное выражение для M имеет вид:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \lambda_2 \lambda_3 B_1 + \lambda_1 \lambda_3 B_2 + \lambda_1 \lambda_2 B_3, \\ M_{12} &= -(\lambda_2 + \lambda_3) B_1 - (\lambda_1 + \lambda_3) B_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) B_3, \\ M_{13} &= B_1 + B_2 + B_3, \quad M_{21} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 M_{13}, \\ M_{22} &= -\lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_3) B_1 - \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_3) B_2 - \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2) B_3, \\ M_{23} &= \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3, \quad M_{31} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 M_{23}, \\ M_{32} &= -\lambda_1^2 (\lambda_2 + \lambda_3) B_1 - \lambda_2^2 (\lambda_1 + \lambda_3) B_2 - \lambda_3^2 (\lambda_1 + \lambda_2) B_3, \\ M_{33} &= \lambda_1^2 B_1 + \lambda_2^2 B_2 + \lambda_3^2 B_3, \end{aligned}$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$\begin{aligned} B_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (\lambda_1 - \lambda_3)^{-1} \exp(\lambda_1 \hat{z}), \\ B_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} (\lambda_2 - \lambda_3)^{-1} \exp(\lambda_2 \hat{z}), \\ B_3 &= (\lambda_3 - \lambda_1)^{-1} (\lambda_3 - \lambda_2)^{-1} \exp(\lambda_3 \hat{z}). \end{aligned}$$

Величины \tilde{E}' и \tilde{E}'' на входе в ондулятор выражаются через значения комплексной амплитуды первой гармоники плотности частиц в фазовом пространстве f_1 . Используя кинетическое уравнение (9) и волновое уравнение (13), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{E}'(0) &= \pi \theta_0 c^{-1} \Lambda_0^{-1} j_1(0), \quad \tilde{E}''(0) = \pi \theta_0 c^{-1} \Lambda_0^{-1} \tilde{j}_1'(0), \quad \tilde{j}_1(0) = \int f_1(0, P) dP, \\ \tilde{j}_1'(0) &= -i \Lambda_0^{-1} [C \tilde{j}_1(0) + c^{-1} \gamma_z^{-2} \xi_0^{-1} \omega \int f_1(0, P) P dP]. \end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда на вход усилителя подается немодулированный электронный пучок и электромагнитная волна с амплитудой E_{ext} . Начальные условия при $z = 0$ будут следующими:

$$\tilde{E}(0) = E_{\text{ext}}, \quad \tilde{E}'(0) = 0, \quad \tilde{E}''(0) = 0.$$

Согласно (64)

$$\tilde{E}(\hat{z}) = M_{11}(\hat{z}|0) E_{\text{ext}}.$$

Это выражение идентично формуле (23).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ПОВЫШЕНИЕ КПД УСИЛИТЕЛЯ ВАРИАЦИЕЙ ПОЛЯ ОНДУЛЯТОРА ПРИ ПОСТОЯННОМ ПЕРИОДЕ

В разд. 3 был рассмотрен способ повышения КПД усилителя путем вариации периода ондулятора при постоянном параметре магнитной силы. Другим технически достаточно просто реализуемым способом повышения эффективности ЛСЭ-усилителя является вариация поля ондулятора при постоянном периоде. Как следует из определения параметра отстройки C , для сохранения синхронизма при торможении частиц пучка поле ондулятора H_0 при постоянном периоде λ_0 должно уменьшаться. Простейшим способом вариации является задание закона уменьшения поля в виде полинома второй степени

$$\frac{H_0(z_i) - H_0(z)}{H_0(z_i)} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(z - z_i) + \varepsilon_2(z - z_i)^2. \quad (65)$$

Введем обычным способом нормализованные переменные. Нормализующие множители при этом вычисляются по начальным значениям параметров пучка и ондулятора. Нормализованная система уравнений самосогласованного поля, описывающая процесс взаимодействия электронного пучка и электромагнитной волны в ондуляторе с вариацией поля при постоянном периоде, согласно (41) и (42) имеет вид

$$\frac{d\hat{P}}{d\hat{z}} = \frac{1 - \frac{1+\alpha}{\alpha} \beta T(z)}{1 + \beta \hat{P}} \hat{\varphi} \cos(\psi + \psi_0),$$

$$\frac{d\psi}{d\hat{z}} = \frac{1}{(1 + \beta \hat{P})^2} \left\{ \hat{P} \left(1 + \frac{\beta \hat{P}}{2}\right) + T(\hat{z}) \left(1 - \frac{1+\alpha}{2\alpha} \beta T(\hat{z})\right) \right\} + \beta \hat{\varphi} \left(1 - \frac{1+\alpha}{\alpha} \beta T(\hat{z})\right) \sin(\psi + \psi_0), \quad (66)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{\varphi}}{d\hat{z}} &= - \left(1 - \frac{1+\alpha}{\alpha} \beta T(\hat{z})\right) \left[\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\cos(\psi_{(j)} + \psi_0)}{1 + \beta \hat{P}_j} \right], \\ \frac{d\psi_0}{d\hat{z}} &= \frac{1}{\hat{\varphi}} \left(1 - \frac{1+\alpha}{\alpha} \beta T(\hat{z})\right) \left[\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sin(\psi_{(j)} + \psi_0)}{1 + \beta \hat{P}_j} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Коэффициенты $\alpha = Q^2$, $\beta = c \gamma_z^2 \Lambda_0 / \omega$ вычисляются по начальным значениям параметров пучка и ондулятора, функция $T(z)$ равна

$$T(\hat{z}) = k_0 + k_1(\hat{z} - \hat{z}_i) + k_2(\hat{z} - \hat{z}_i)^2, \quad (68)$$

$$k_0 = \frac{\alpha \varepsilon_0}{\beta(1+\alpha)}, \quad k_1 = \frac{\alpha \varepsilon_1}{\beta \Lambda_0(1+\alpha)}, \quad k_2 = \frac{\alpha \varepsilon_2}{\beta \Lambda_0^2(1+\alpha)}.$$

В начале участка торможения, когда изменение энергии частиц достаточно мало, в уравнениях системы (66), (67) можно провести разложение по малому параметру $\beta \hat{P}$. В результате при малом КПД имеем приближенную систему рабочих уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{P}}{d\hat{z}} &= \hat{\varphi} \cos(\psi + \psi_0), \quad \frac{d\psi}{d\hat{z}} = \hat{P} + T(\hat{z}), \\ \frac{d\hat{\varphi}}{d\hat{z}} &= -\hat{\rho}_1 \cos(\psi_1 - \psi_0), \quad \frac{d\psi_0}{d\hat{z}} = \frac{\hat{\rho}_1}{\hat{\varphi}} \sin(\psi_1 - \psi_0), \end{aligned}$$

совпадающую с системой уравнений (44), (45), которая в приближении малого КПД описывает взаимодействие частиц и волны в ондуляторе с вариацией периода при $Q = \text{const}$. Параметр отстройки $\hat{C}(\hat{z})$ при этом равен $T(\hat{z})$. Таким образом, при $\eta \ll 1$ оба способа вариации параметров ондулятора физически эквивалентны.

Подбор коэффициентов k_0, k_1, k_2, \hat{z}_i проводился с помощью программы оптимизации на максимум поля при $(\hat{z} - \hat{z}_i) > 1$. Численное моделирование проводилось с помощью исходной системы уравнений (66), (67). При этом были получены следующие значения:

$$k_0 = 0, k_1 = 1,44, k_2 = 0,3, \hat{z}_i = 1,7 + 2(3)^{-1/2} \ln(E_0/E_{\text{ext}}).$$

Коэффициент захвата равен 0,68. Дадим теперь физическое объяснение тому факту, что приведенное здесь значение коэффициента k_2 несколько меньше значения, приведенного в разд.3. Дело в том, что на начальном участке торможения захваченные частицы испытывают фазовые колебания и при $(\hat{z} - \hat{z}_i) \cong 3$ наиболее близко подходят к границе области устойчивости. Из-за возрастания амплитуды поля волны дальнейшее торможение частиц идет уже более устойчиво. Численное моделирование с использованием исходных рабочих уравнений (58), (59) и (66), (67) показывает, что при уменьшении периода ондулятора фазовое движение частиц более устойчиво по сравнению с движением, рассчитанным по приближенным уравнениям (44), (45), а при уменьшении поля ондулятора, наоборот, менее устойчиво. В практически интересной области параметров $\alpha \cong 1, \beta \cong 10^{-2}$ это различие уже существенно и приводит к тому, что при $k_2 = 0,36$ число захваченных частиц при прохождении критической точки немного уменьшается. Поэтому более оптимальным становится более устойчивый режим при $k_2 = 0,3$.

Длина участка торможения $(z_f - z_i)$, очевидно, не может быть больше длины, на которой поле ондулятора H_0 по закону (65) уменьшается до нуля и которая может быть найдена с помощью уравнения

$$0,3\beta \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \Lambda_0^2(z_f - z_i)^2 + 1,44\beta \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \Lambda_0(z_f - z_i) - 1 = 0. \quad (69)$$

Более точно предел уменьшения поля ондулятора ограничен не нулем, а условием $H_0 \gg E/(2\gamma_z^2)$, согласно которому все производимые вычисления справедливы в приближении, когда вынужденное поперечное движение частиц определяется полем ондулятора, а не полем волны. В нормализованном виде это условие с учетом (65), (68) имеет вид

$$\frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \beta^2 \hat{\varphi}(\hat{z}) \ll \left(1 - \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \beta T(\hat{z})\right). \quad (70)$$

При численном моделировании выполнение условия (70) контролировалось программным образом и счет прекращался при отношении левой и

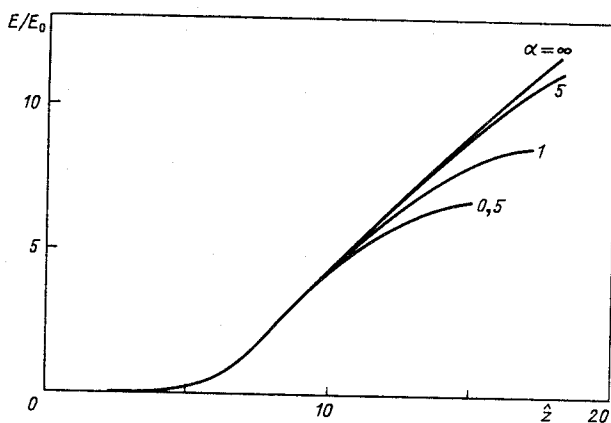


Рис.30. Вариация параметров. Зависимость нормализованной амплитуды поля на выходе усилителя от нормализованной длины ондулятора при различных значениях параметра α . Параметр $\beta = 0,01$, $\hat{\kappa}_p^2 = 0$, $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$

правой частей 1:10. Однако в практически интересной области параметров

$$0,1 < \alpha, \beta < 0,03$$

найденная таким образом длина участка торможения мало отличается от длины, вычисленной с помощью уравнения (69).

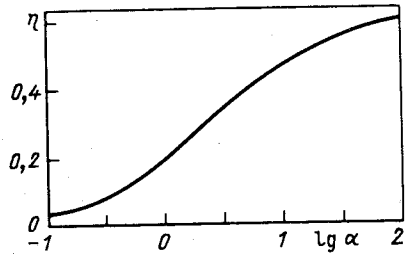
На рис. 30 приведены графики функции $\hat{\varphi}(\hat{z}, \alpha, \beta)$ для α , равного 0,5; 1 и 5, при $\beta = 0,01$ в зависимости от нормализованной длины ондулятора. Для сравнения на том же рисунке приведен график зависимости $\hat{\varphi}(\hat{z})$, рассчитанной с использованием приближенной системы рабочих уравнений (44), (45). При вычислении всех графиков на рис.30 нормализованная функция изменения поля ондулятора $T(\hat{z})$ бралась в виде

$$T(\hat{z}) = 1,44(\hat{z} - \hat{z}_i) + 0,3(\hat{z} - \hat{z}_i)^2, \quad \hat{z}_i = 1,7 + 2(3)^{-1/2} \ln(E_0/E_{ext}).$$

Как видно из рис.30, чем больше параметр α , тем меньше функция $\hat{\varphi}(\hat{z}, \alpha, \beta)$ на конечном участке торможения отклоняется от линейной. Зависимость максимального КПД усилителя от значений параметра α при $\beta = 0,01$ приведена на рис.31. Видно, что при $\alpha \gg 1$ имеет место режим глубокого торможения, и метод вариации поля ондулятора в этом случае дает практически те же результаты, что и метод вариации периода при постоянном параметре магнитной силы.

Численные результаты показывают, что максимальный КПД усилителя слабо зависит от значений параметра β , так что в практически

Рис.31. Вариация параметров. Зависимость максимального КПД усилителя от параметра α при значении параметра $\beta = 0,01$



интересной области параметров $0,003 < \beta < 0,03$ при определении значения максимального КПД можно пользоваться графиком на рис.31.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. МЕТОД РАСЧЕТА ЛСЭ-УСИЛИТЕЛЯ С ПЛОСКИМ ОНДУЛЯТОРОМ

Представленные выше в работе результаты относятся к случаю, когда ондулятор ЛСЭ-усилителя является спиральным, а входное излучение циркулярно-поляризованным. Все результаты численных расчетов и соответствующие графики переносятся на случай линейно-поляризованного излучения и плоского ондулятора, поле которого имеет вид

$$H_y = 0, H_x = H_{\perp} \cos(\kappa_0 z),$$

путем следующего переопределения параметров задачи:

$$\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0' = [\pi j_0 \theta^2 \omega A_{JJ} \gamma^{-1} (\gamma_z')^{-2} I_A^{-1} (2c)^{-1}]^{1/3},$$

$$E_0 \rightarrow E_0' = 2 \xi_0 (\gamma_z')^2 (\Lambda_0')^2 c / (e \theta \omega A_{JJ}),$$

$$C \rightarrow C' = \kappa_0 - \omega (2c)^{-1} (\gamma_z')^{-2}, \beta \rightarrow \beta' = c (\gamma_z')^2 \Lambda_0' \omega^{-1},$$

$$\kappa_p \rightarrow \kappa_p' = [4\pi j_0 \gamma^{-1} (\gamma_z')^{-2} I_A^{-1}]^{1/2},$$

$$\Lambda_T \rightarrow \Lambda_T' = 2^{-1/2} c^{-1} \omega (\gamma_z')^{-2} (\langle \Delta \xi \rangle^2)^{1/2} \xi_0^{-1}.$$

Здесь введены обозначения $\theta = e H_{\perp} / (\xi_0 \kappa_0)$, $(\gamma_z')^{-2} = \gamma^{-2} + \theta^2/2$. Коэффициент A_{JJ} определяется из формулы $A_{JJ} = [J_0(g) - J_1(g)]^2$, где $g = \theta^2 \omega / (8c \kappa_0)$; J_0 и J_1 - соответственно функции Бесселя нулевого и первого порядка. Поле усиливаемой линейно-поляризованной волны описывается выражением

$$E_x = 0, E_y = E_p(z) \cos [\omega(z/c - t) + \psi_0(z)].$$

Для усвоения способа расчета характеристик ЛСЭ-усилителей с плоским ондулятором рассмотрим в качестве примера работу усилителя в режиме насыщения. Действуя указанным выше способом, с помощью (50) найдем, что в точном резонансе ($C' = 0$) при отсутствии влияния поля пространственного заряда и разброса энергий в пучке

$$(\kappa_p' / \Lambda_0')^2 \rightarrow 0, (\Lambda_T' / \Lambda_0')^2 \rightarrow 0,$$

максимум поля волны достигается в точке, отстоящей от начала ондулятора на расстоянии

$$z_m = (\Lambda_0')^{-1} [3,1 + 2(3)^{-1/2} \ln (E_0' / E_p^{\text{ext}})],$$

и равен значению $(E_p)_{\text{max}} = 2,34E_0'$. Здесь E_p^{ext} - амплитуда линейно поляризованной волны, подаваемой на вход усилителя.

Мы не будем останавливаться на выводе уравнений, описывающих процессы в ЛСЭ-усилителе с плоским ондулятором. При необходимости основные соотношения для анализа этой проблемы можно найти в работах [12], [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kroll N.M., McMullin W.A. - Phys. Rev., 1978, vol. A17, p. 300.
2. McDermott D.B., Marshall T.C. - Phys. Quan. Elect., 1980, vol. 7, p. 509.
3. Jerby E., Gover A. - IEEE J. Quant. Elect., 1985, vol. QE-21, p. 1041.
4. Ландау Л.Д. - ЖЭТФ, 1946, т.16, с.574.
5. Sprangle P., Tang C.M., Manheimer W.M. - Phys. Rev., 1980, vol. A21, p. 302.
6. Tang C.M., Sprangle P. - J. Appl. Phys., 1981, vol. 52, p. 3148.
7. Tang C.M., Sprangle P. - Phys. Quant. Elect., 1982, vol. 9, p. 627.
8. Kroll N.M., Morton P.L., Rosenbluth M.N. - SRI Rep. JSR-79-01; IEEE J. Quant. Elect., 1981, vol. QE-17, p. 1436.
9. Prosnitz D., Szoke A., Neil V.K. - Phys. Quant. Elect., 1980, vol. 17, p. 175; Phys. Rev., 1981, vol. A24, p. 1436.
10. Sprangle P., Tang C.M., Manheimer W.M. - Phys. Rev. Lett., 1979, vol. 43, p.1932.
11. Бухгольц Г. - Расчет электрических и магнитных полей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
12. Colson W.B. - IEEE J. Quant. Elect., 1981, vol. QE-17, p. 1417.
13. Schmitt M., Elliott C.J. - IEEE J. Quant. Elect., 1987, vol. QE-23, p.1552.
14. Bonifacio R., Pellegrini C., Narducci L. - Optics Communications, 1984, 50, p.373.