

# РАСХОДИМОСТИ В ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИГМА-МОДЕЛЯХ

*В.В.Белокуров*

Научно-исследовательский институт ядерной физики, МГУ, Москва

*Д.И.Казаков*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Настоящий обзор содержит детальное описание методов вычисления ультрафиолетовых расходимостей в двумерных нелинейных теориях. Приводятся сведения о геометрии римановых многообразий, вводится понятие обобщенной перенормируемости сигма-моделей. Излагается ковариантный метод фонового поля в нелинейных теориях. Обсуждается проблема инфракрасных расходимостей и способы их устранения. Иллюстрацией служат двухпетлевые расчеты в бозонной сигма-модели с членом Весса — Зумино, а также четырех- и пятипетлевые расчеты в  $N = 1$  и  $N = 2$  суперсимметричных сигма-моделях. В заключение обсуждается роль риччи-плоских многообразий в получении конформно-инвариантных сигма-моделей.

The present review contains a detailed description of the methods used to calculate the ultra-violet divergences in two-dimensional non-linear theories. The basic notions of geometry of Riemannian manifolds are given and the concept of generalized renormalizability of sigma-models is introduced. A covariant background formalism in non-linear theories is presented. The problem of infra-red divergences is discussed and the ways to avoid them are shown. The methods are illustrated by the two-loop calculations in bosonic sigma-models with the Wess-Zumino term and by the four and five-loop calculations in  $N = 1$  and  $N = 2$  supersymmetric sigma-models. In conclusion the role of Ricci-flat manifolds in obtaining conformal invariant sigma-models is discussed.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к исследованию структуры ультрафиолетовых расходимостей нелинейных двумерных сигма-моделей вызван в значительной мере потребностями теории струн. Причина такого интереса состоит в том, что необходимым условием для построения последовательной квантовой теории струны является конформная инвариантность соответствующей двумерной теории. Напомним кратко основные аргументы. (Детальное об-

суждение затрагиваемых вопросов читатель может найти в монографии [1] и цитируемой там литературе.)

Классическое действие свободной бозонной струны

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \eta_{ij} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j \tag{1.1}$$

$$(g = |\det g_{\alpha\beta}|; \eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1); \alpha, \beta = 0, 1; i, j = 0, 1, \dots, D - 1)$$

инвариантно относительно произвольных диффеоморфизмов двумерной поверхности  $x^\alpha \rightarrow \bar{x}^\alpha(x)$ . Кроме того, оно инвариантно относительно преобразований Вейля — локальных масштабных преобразований двумерной метрики

$$g^{\alpha\beta}(x) \rightarrow e^{\Phi(x)} g^{\alpha\beta}(x) \tag{1.2}$$

(при этом  $\sqrt{g} \rightarrow e^{-\Phi(x)}\sqrt{g}$ ).

Двумерный тензор энергии-импульса, определяемый как вариационная производная от действия по двумерной метрике,

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \tag{1.3}$$

удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0 \tag{1.4}$$

и, как следствие вейлевской инвариантности, автоматически оказывается бесследовым:

$$T^\alpha_\alpha = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.5}$$

Уравнения движения для двумерной метрики — тензорного поля  $g^{\alpha\beta}(x)$

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0, \text{ т.е. } T_{\alpha\beta} = 0, \tag{1.6}$$

являются связью, которая в классической теории накладывает на решения уравнения движения поля  $\varphi^i(x)$ .

В координатах светового конуса:  $x^\pm = x^0 \pm x^1$ , бесследовость тензора энергии-импульса (1.5) приводит к равенствам

$$T_{+-} = T_{-+} = 0, \tag{1.7}$$

а уравнение связи (1.6) выглядит как

$$T_{++} = T_{--} = 0. \tag{1.8}$$

Уравнение непрерывности (1.4) принимает вид

$$\begin{aligned}\partial_- T_{++} + \partial_+ T_{--} &= 0, \\ \partial_+ T_{--} + \partial_- T_{+-} &= 0.\end{aligned}\quad (1.9)$$

С учетом (1.7) уравнения (1.9) означают сохранение связей

$$\partial_- T_{++} = 0, \quad \partial_+ T_{--} = 0, \quad (1.10)$$

что является условием их непротиворечивости. Здесь, как мы видим, проявляется фундаментальная роль вейлевской инвариантности.

При квантовании струны гильбертово пространство состояний содержит нефизические состояния с отрицательной нормой. Для исключения этих нефизических состояний, подобно тому, как это делается при квантовании электромагнитного поля в формализме Гупты — Блейлера, используются связи (1.8). Поэтому построение непротиворечивой квантовой теории струны возможно только при условии, что вейлевская инвариантность имеет место и после квантования. Однако при переходе к квантовой теории эта инвариантность, вообще говоря, нарушается и появляется так называемая конформная аномалия:

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha} \rangle \neq 0.$$

Для вычисления полной конформной аномалии, возникающей в квантовой теории, кроме вклада полей  $\varphi^i(x)$ , необходимо учесть также вклады духов Фаддеева — Попова в тензор энергии-импульса. Это удобно сделать в методе квантования с помощью функциональных интегралов.

Квантование в этом подходе предполагает интегрирование по всем возможным поверхностям и всем метрикам [2]:

$$Z = \int Dg \int D\varphi \exp iS(g, \varphi). \quad (1.11)$$

При фиксировании конкретного представителя в пространстве метрик, например в виде

$$g^{\alpha\beta}(x) = e^{\lambda(x)} \delta^{\alpha\beta}, \quad (1.12)$$

интеграл по метрикам сводится к интегралу по конформному фактору  $\lambda(x)$  и детерминанту Фаддеева — Попова, представимому в виде функционального интеграла по антикоммутирующим духовым полям  $b, c$ :

$$Z = \int D\lambda \int DbDc \int D\varphi \exp i\{S + S_{gh}(b, c)\}. \quad (1.13)$$

Среднее от следа полного тензора энергии-импульса, задаваемое выражением

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha} \rangle = \int DbDcD\varphi \exp i\{S + S_{gh}\} \frac{\delta}{\delta\lambda} (S + S_{gh}), \quad (1.14)$$

для свободной бозонной струны равно

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha} \rangle = cR^{(2)}, \quad (1.15)$$

где  $R^{(2)} = R^{(2)}(\lambda)$  — скалярная кривизна двумерной мировой поверхности и

$$c = \frac{D - 26}{24}. \quad (1.16)$$

Отсюда видно, что конформная аномалия отсутствует только в пространстве критической размерности  $D_c = 26$ . (Для суперструн из тех же соображений получается критическая размерность  $D_c = 10$ .)

При ненулевой конформной аномалии в одновременных коммутационных соотношениях для компонент тензора энергии-импульса появляется дополнительное слагаемое, пропорциональное (1.16):

$$\begin{aligned} [T_{++}(x^+), T_{++}(\tilde{x}^+)] = i[T_{++}(x^+) + T_{++}(\tilde{x}^+)] \times \\ \times \delta'(x^+ - \tilde{x}^+) + ic\delta'''(x^+ - \tilde{x}^+), \end{aligned} \quad (1.17)$$

которое, как нетрудно убедиться, приводит к противоречиям при наложении условий (1.8) на физические состояния.

Для коэффициентов разложения компонент тензора  $T$  в ряд Лорана соотношение (1.17) принимает вид коммутатора алгебры Вирасоро с центральным зарядом:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + 2c(m^3 - m)\delta_{m+n,0}. \quad (1.18)$$

Действие (1.1) описывает свободную струну, распространяющуюся в  $D$ -мерном пространстве Минковского. Распространение струны в более сложных пространствах интерпретируется как взаимодействие струны с фоновыми полями, представляющими собой вакуумные конденсаты струнных мод [3—6].

Так, в частности, взаимодействию замкнутой струны с ее безмассовыми модами отвечает действие

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x \{ \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \varphi^i \partial_{\beta} \varphi^j G_{ij}(\varphi) + \\ + \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \varphi^i \partial_{\beta} \varphi^j B_{ij}(\varphi) + \alpha' \sqrt{g} R^{(2)} \Phi(\varphi) \}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь  $G_{ij}(\varphi)$  — симметричный,  $B_{ij}(\varphi)$  — антисимметричный тензоры второго ранга на полевом многообразии, а  $\Phi(\varphi)$  — скаляр.  $R^{(2)}$  — кривизна двумерной поверхности.

Возможность построения непротиворечивой квантовой теории и в этом случае определяется отсутствием конформной аномалии.

Вакуумное среднее для следа тензора энергии-импульса в этой модели имеет вид

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha} \rangle = \langle \beta_{ij}^G(\varphi) \partial^{\alpha} \varphi^i \partial_{\alpha} \varphi^j \rangle + \langle \beta_{ij}^B(\varphi) \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \varphi^i \partial_{\beta} \varphi^j \rangle + \alpha' \langle \beta^{\Phi}(\varphi) \rangle R^{(2)}. \quad (1.20)$$

Входящие в формулу (1.20)  $\beta$ -функции  $\beta_{ij}^G$ ,  $\beta_{ij}^B$ ,  $\beta^{\Phi}$  являются локальными функционалами поля  $\varphi^i(x)$ . В теории возмущений они представляются в виде ряда по степеням параметра  $\alpha'$ , коэффициенты которого выражаются через тензоры  $G_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , скаляр  $\Phi$ , тензор кривизны полевого многообразия, а также их ковариантные производные. Как и должно быть для соответствия с моделью (1.1), нулевое приближение для  $\alpha' \beta^{\Phi}$  дается выражением (1.16).

Равенство нулю  $\beta$ -функций

$$\beta_{ij}^G = 0, \quad \beta_{ij}^B = 0, \quad \beta^{\Phi} = 0, \quad (1.21)$$

как следует из (1.20), обеспечивает вейлевскую инвариантность теории.

Условия (1.21) интерпретируются как уравнения движения соответствующих струнных мод, которые, в свою очередь, могут быть получены из некоторого действия в  $D$ -мерном пространстве  $I = \int d^D \varphi \mathcal{L}(G, B, \Phi)$ , эффективно учитывающего взаимодействие данных мод со всей струной в целом [4—10]. Так, например, при  $B_{ij} = \Phi = 0$  равенство  $\beta_{ij}^G = 0$  в первом порядке теории возмущений приводит к уравнению Эйнштейна в вакууме:

$$R_{ij} = 0.$$

Это позволяет интерпретировать тензорное поле  $G_{ij}$  как гравитационное. В следующих порядках получатся поправки к уравнению Эйнштейна, к которым приводит взаимодействие гравитационного поля  $G_{ij}$  со струной.

Среди условий (1.21) особое значение имеют первые два. При их выполнении, как было показано в работе [10],  $\beta^{\Phi} = \text{const}$ . Такая постоянная конформная аномалия не является существенной (например, может быть устранена подходящим выбором размерности пространства).

Задача нахождения  $\beta$ -функций сводится к вычислению по теории возмущений ультрафиолетово-расходящихся контрчленов к действию (1.19) (более подробно об этом будет сказано в разд.3).

Отослав читателя, интересующегося учетом поправок от струнных петель, к работам [11—15], мы ограничимся лишь топологически наиболее простыми двумерными поверхностями, соответствующими древесному приближению теории струн. В этом случае естественно ожидать, что ультрафиолетовые расходимости не зависят от глобальных свойств двумерной поверхности [16]. Поэтому, имея в виду задачу вычисления  $\beta^G$  и  $\beta^B$ , можно рассматривать нелинейную сигма-модель на плоском бесконечном двумерном пространстве (Минковского или Евклида).

Целью настоящего обзора является описание методов вычисления ультрафиолетовых контрчленов в нелинейных двумерных теориях. Иллюстрацией будут служить двухпетлевые расчеты в бозонной сигма-модели с членом Весса — Зумино, а также четырех- и пятипетлевые расчеты в суперсимметричной сигма-модели.

Следует, однако, отметить, что область применения этих методов не ограничивается рамками нелинейных сигма-моделей, к которым приводит теория струн. Они могут оказаться полезными и в других двумерных теориях, в частности, в предложенных в последнее время так называемых теориях  $W$ -гравитации [17—20], в основе которых лежат алгебры симметрии более общие, чем алгебра Вирасоро [21, 22].

По замыслу авторов данный обзор может служить своего рода пособием по методам вычислений расходимостей в двумерных теориях. Для этого изложение сделано максимально подробным и значительное место в нем уделено конкретным расчетам, которые, как правило, сопровождаются детальными промежуточными выкладками.

В вычислениях  $\beta$ -функций в двумерных нелинейных сигма-моделях обычно используются два различных подхода, отличающихся способами выделения инфракрасных расходимостей и перенормировки ультрафиолетовых расходимостей. Преимущества того или иного подхода зависят от характера задачи. Поэтому в данном обзоре мы сочли целесообразным использовать оба подхода.

В разд.2 приводятся сведения о геометрии полевых многообразий сигма-моделей. В разд.3 обсуждается свойство обобщенной перенормируемости этих теорий и определяются основные ренормгрупповые соотношения. Раздел 4 содержит описание ковариантного метода фонового поля для построения перенормированного действия нелинейной сигма-модели. В разд.5 вычисляются  $\beta$ -функции двумерной бозонной сигма-модели с членом Весса — Зумино в двух первых порядках теории возмущений. Раздел 6 посвящен проблеме инфракрасных расходимостей в двумерных

безмассовых теориях и способам их устранения. В разд.7 вводятся разные типы суперсимметричных двумерных сигма-моделей и вычисляются  $\beta$ -функции в четырех- и пятипетловом приближениях. В разд.8 обсуждаются различные возможности переопределений нелинейных сигма-моделей с риччи-плоским полевом многообразием, приводящих к нулевой  $\beta$ -функции.

## 2. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-МИШЕНИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

В этом разделе, имеющем вспомогательный характер, мы напомним определения основных геометрических структур и приведем некоторые соотношения между ними (в качестве стандартных руководств см., например, [23, 24]). Использование этих соотношений для геометрических структур полевого многообразия нелинейной сигма-модели окажется полезным при перенормировке и вычислении  $\beta$ -функций в этой теории.

Действие бозонной сигма-модели, определенной на двумерном плоском ( $R^{(2)} = 0$ ) пространстве-времени, имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \{ G_{ij}[\varphi] \eta^{\mu\nu} + \frac{2}{3} B_{ij}[\varphi] \epsilon^{\mu\nu} \} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j \quad (2.1)$$

(второе слагаемое есть так называемый член Весса — Зумино),

$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  — метрический тензор двумерного пространства Минковского;  $\mu, \nu = 0, 1$ ;  $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$  — антисимметричный двумерный тензор ( $\epsilon^{01} = 1$ ).

Поля  $\varphi^i(x)$  представляют собой координаты пространства  $M$  (пространства-мишени),  $i, j = 1, \dots, \dim M$ .

Функционал  $G_{ij}[\varphi]$ , являющийся симметричным тензором второго ранга, естественно отождествить с метрическим тензором пространства-мишени  $M$ .

Функционал  $B_{ij}[\varphi]$ , антисимметричный по индексам  $i, j$  ( $B_{ij} = -B_{ji}$ ), есть потенциал тензора кручения многообразия  $M$ . Чтобы продемонстрировать это, обратимся к уравнениям движения для полей  $\varphi^i(x)$  [25]:

$$\mathcal{D}_\mu \partial^\mu \varphi^i \equiv \left\{ \delta^{ij} \partial_\mu + \left( \Gamma_{jk}^i - S_{jk}^i \right) \partial^\nu \varphi^k \left( \eta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu} \right) \right\} \partial^\mu \varphi^j = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\Gamma^i_{jk} \equiv \frac{1}{2} G^{il} \{G_{jl,k} + G_{lk,j} - G_{jk,l}\} \quad (2.3)$$

— символы Кристоффеля,

$$G_{jk,l} \equiv \frac{\partial G_{jk}}{\partial \varphi^l}.$$

$$S^i_{jl} \equiv G^{il} B_{[jk;l]} = \frac{1}{3} G^{il} \{B_{jk,l} + B_{lj,k} + B_{kl,j}\}. \quad (2.4)$$

В уравнения движения (2.2)  $\Gamma^i_{jk}$  и антисимметричный тензор  $S^i_{jk}$  входят на равных основаниях (в виде разности). Поэтому естественно отождествлять  $S^i_{jk}$  с антисимметричной частью связности — тензором кручения.

Заметим, что простые производные в определении  $S^i_{jk}$  могут быть заменены на ковариантные, в которых роль связности играют символы Кристоффеля:

$$S^i_{jk} = G^{il} B_{[jk;l]}. \quad (2.5)$$

Как известно, кроме обычного дифференцирования, ковариантная производная содержит для каждого тензорного индекса еще слагаемые, линейные по связности  $\Gamma^i_{jk}$ :

$$\begin{aligned} T^{...i...}_{...j} &\equiv D_j T^{...i...} \equiv \nabla_\varphi T^{...i...} = \partial_j T^{...i...} + \dots + \Gamma^i_{jk} T^{...k...} + \dots, \\ T^{...i...}_{...j} &\equiv D_j T^{...i...} \equiv \nabla_\varphi T^{...i...} = \partial_j T^{...i...} - \dots - \Gamma^k_{ji} T^{...k...} - \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

которые, благодаря симметрии символов Кристоффеля, сокращаются в определении  $S^i_{jk}$ .

Коммутатор двух ковариантных производных приводит для каждого тензорного индекса к слагаемому, пропорциональному тензору Римана,

$$[D_i, D_j] T^{...k...} = \sum_{\dots} R^l_{kij} T^{...l...}. \quad (2.7)$$

$$R_{ijkl} = G_{in} \{ \Gamma^n_{jl,k} - \Gamma^n_{jk,l} + \Gamma^m_{jl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^n_{lm} \}. \quad (2.8)$$

Полная связность

$$\mathfrak{J}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - S^i_{jk} \quad (2.9)$$

определяет полную ковариантную производную

$$\mathfrak{D}_j T^{...i...} = D_j T^{...i...} - S^i_{jk} T^{...k...} - \dots \quad (2.10)$$



и полный тензор кривизны

$$\mathfrak{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + S_{ijl;k} - S_{ijk;l} + S_{nil} S_{jk}^n - S_{nik} S_{jl}^n. \quad (2.11)$$

$$[\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j]T \dots k \dots = \sum_{\dots} \left( \mathfrak{R}_k^l{}_{ij} T \dots l \dots + 2S_{ij}^l \mathfrak{D}_l T \dots k \dots \right). \quad (2.12)$$

Линейная связность (2.9) с полностью антисимметричным тензором  $S_{ijk}$  представляет собой также связность, согласованную с метрикой  $G_{il}$ , т.е., помимо

$$D_k G_{ij} = 0 \quad (2.13)$$

имеет место также и

$$\mathfrak{D}_k G_{ij} = 0. \quad (2.14)$$

Как нетрудно убедиться, введенные выше тензоры кривизны и кручения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}, \quad (2.15)$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}, \quad (2.16)$$

$$R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk} = 0, \quad (2.17)$$

$$R^i{}_{jkl;n} + R^i{}_{jnk;l} + R^i{}_{jln;k} = 0, \quad (2.18)$$

$$\mathfrak{R}_{ijkl} = -\mathfrak{R}_{jikl} = -\mathfrak{R}_{ijlk}, \quad (2.15a)$$

$$S_{n[ij} S_{kl]}^n = 0. \quad (2.19)$$

С учетом (2.19) полный тензор кривизны может быть записан в виде

$$\mathfrak{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + S_{ijl;k} - S_{ijk;l} - S_{nij} S_{kl}^n. \quad (2.11a)$$

Другим следствием (2.19), как легко заметить, является равенство

$$\mathfrak{D}_i S_{jkl} = D_i S_{jkl} \quad (2.20)$$

В разд.5 мы будем рассматривать в качестве пространства-мишени  $M$  многообразия специального вида, для которых результаты вычислений заметно упрощаются и становятся более наглядными. А именно, мы ограничимся многообразиями с  $D$ -ковариантно-постоянными тензорами кривизны и кручения:

$$D_n R_{ijkl} = D_n S_{ijk} = 0, \quad (2.21)$$

а также групповыми многообразиями.

Для многообразий (2.21) формула (2.7) приводит к дополнительным соотношениям для тензора Римана:

$$[D_n, D_i] R_{jklm} = R^q_{jin} R_{qklm} + R^q_{kin} R_{jqlm} + R^q_{lin} R_{jkqm} + R^q_{min} R_{jklq} = 0 \quad (2.22)$$

и тензора кручения:

$$[D_n, D_i] S_{mkl} = R^j_{min} S_{jkl} + R^j_{kin} S_{mj l} + R^j_{lin} S_{mkj} = 0. \quad (2.23)$$

Действие (2.1) инвариантно относительно диффеоморфизмов пространства-мишени  $M$ . При этом происходит изменение не только координат многообразия  $\varphi^i$ , но и тензорных структур  $G$  и  $B$ . Так, инфинитезимальные преобразования координат

$$\varphi^i \rightarrow \varphi^i + V^i(\varphi) \quad (2.24)$$

сопровождаются сдвигом тензоров на соответствующие производные Ли:

$$\begin{aligned} G_{ij}[\varphi] &\rightarrow G_{ij}[\varphi] + (\mathcal{L}_V G[\varphi])_{ij}, \\ B_{ij}[\varphi] &\rightarrow B_{ij}[\varphi] + (\mathcal{L}_V B[\varphi])_{ij}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

В дальнейшем нам понадобится лишь выражение для производной Ли метрического тензора

$$(\mathcal{L}_V G)_{ij} = V^k \partial_k G_{ij} + \partial_i V^k G_{kj} + \partial_j V^k G_{ik}, \quad (2.26)$$

которое с помощью (2.13) можно переписать в виде

$$(\mathcal{L}_V G)_{ij} = V_{i;j} + V_{j;i}. \quad (2.27)$$

Условие инвариантности действия относительно преобразований (2.24), (2.25) выглядит как

$$\int (\mathcal{L}_V G) \frac{\delta S}{\delta G} + \int (\mathcal{L}_V B) \frac{\delta S}{\delta B} - \int V^i \frac{\delta S}{\delta \varphi^i} = 0. \quad (2.28)$$

В отличие от обычных симметрий в квантовой теории поля, при которых действие инвариантно относительно преобразований полей, инвариантность относительно диффеоморфизмов полевого многообразия (2.24), (2.25) представляет собой пример обобщенной симметрии, при которой преобразуются не только поля, но и параметры теории. Важное следствие (2.28) состоит в том, что квантово-полевые модели (2.1), имеющие диффеоморфные тензорные структуры, эквивалентны, поскольку они могут быть получены одна из другой соответствующей заменой полевых переменных (2.24).

### 3. ОБОБЩЕННАЯ ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТЬ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИГМА-МОДЕЛЕЙ

Теория, задаваемая действием (2.1), будучи нелинейной, в обычном смысле перенормируема, так как существует бесконечно много расходящихся контрчленов различной структуры. Однако из размерных соображений следует, что все они записываются в виде

$$\left( T_{(ij)} \eta^{\mu\nu} + T_{|ij|} \varepsilon^{\mu\nu} \right) \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j. \quad (3.1)$$

Поэтому можно рассматривать данную модель как перенормируемую в обобщенном смысле [26], считая, что происходит перенормировка геометрии полевого многообразия:

$$G_{ij} \rightarrow G_{ij} + T_{(ij)}, \quad B_{ij} \rightarrow B_{ij} + T_{|ij|}. \quad (3.2)$$

Если ввести некоторую регуляризацию (например, размерную,  $d = 2 - 2\varepsilon$ ), то входящие в исходное действие (2.1) тензоры  $G_{ij}$ ,  $B_{ij}$  (назовем их  $G_{ij}^0$ ,  $B_{ij}^0$ ) выражаются через ренормированные тензоры  $G_{ij}$ ,  $B_{ij}$ :

$$\begin{aligned} G_{ij}^0 &= \mu^{-2\varepsilon} \left\{ G_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{-n} T_{(ij)}^{(n)}(G, B) \right\}, \\ B_{ij}^0 &= \mu^{-2\varepsilon} \left\{ B_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{-n} T_{|ij|}^{(n)}(G, B) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$T_{ij}^{(n)}$  вычисляются по теории возмущений, порядок в которой определяется числом петель диаграмм  $L$  (разложение по степеням  $\hbar$ ):

$$T_{ij}^{(n)} = \sum_{L=n}^{\infty} T_{(L)ij}^{(n)}, \quad (3.4)$$

и представляют собой алгебраические функции от тензоров кривизны и кручения. Так, в частности, однопетлевой контрчлен, как будет видно в дальнейшем, выражается через тензор Риччи и билинейную комбинацию тензоров кручения, двухпетлевой — через свертки произведения двух тензоров Римана и соответствующие комбинации тензоров кручения и т.д.

Оказывается [27, 28],  $L$ -петлевой контрчлен  $T_{(L)ij}$  есть тензор веса  $\Lambda^{L-1}$ :

$$T_{(L)}(\Lambda^{-1}G, \Lambda^{-1}B) = \Lambda^{L-1} T_{(L)}(G, B), \quad (3.5)$$

при масштабных преобразованиях метрики и потенциала кручения

$$G_{ij} \rightarrow \Lambda^{-1} G_{ij}, \quad B_{ij} \rightarrow \Lambda^{-1} B_{ij} \tag{3.6}$$

При этом тензор Римана, тензор кручения и тензор, обратный к метрическому, преобразуются следующим образом:

$$R_{ijkl} \rightarrow \Lambda^{-1} R_{ijkl}, \quad S_{ijk} \rightarrow \Lambda^{-1} S_{ijk}, \quad G^{ij} \rightarrow \Lambda G^{ij}. \tag{3.7}$$

В результате, например, тензор Риччи

$$R_{ij} \equiv G^{kn} R_{kinj} \sim \Lambda^0,$$

и т.д.

Независимость затравочных тензоров  $G_{ij}^0$  и  $B_{ij}^0$  от размерного параметра  $\mu$  позволяет записать уравнения ренормгруппы, подобные тем, какие существуют в обычной ренормируемой теории поля, в данном случае двухзарядовые уравнения

$$\begin{aligned} & -\epsilon \left[ G_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{-n} T^{(n)}_{ij}(G, B) \right] + \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} G_{ij} + \\ & + \int dz \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} G_{kn}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{-n} \frac{\delta T^{(n)}_{ij}}{\delta G_{kn}(z)} + \\ & + \int dz \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} B_{kn}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{-n} \frac{\delta T^{(n)}_{ij}}{\delta B_{kn}(z)} = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

и аналогичное уравнение для  $B_{ij}$ .

Для задач, рассматриваемых в настоящем обзоре, достаточно, как мы увидим, ограничиться соотношениями однозарядной ренормгруппы. Из (3.8) получим

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} G_{ij} = \epsilon G_{ij} - \beta^G_{ij}(G, B), \tag{3.9}$$

$$\beta^G_{ij} = - \left( 1 + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right) T^{(1)}_{(ij)} \left( \Lambda^{-1} G, \Lambda^{-1} B \right) \Big|_{\Lambda=1}. \tag{3.10}$$

При выводе (3.10) мы заменили оператор функционального дифференцирования

$$\int dz G_{kn}(z) \frac{\delta}{\delta G_{kn}(z)}$$

на оператор  $-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=1}$ , действие которого на  $L$ -петлевой контрчлен в силу (3.5) выглядит как

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} T_{(L)}(\Lambda^{-1}G, \Lambda^{-1}B) \Big|_{\Lambda=1} = (L-1)T_{(L)}(G, B). \quad (3.11)$$

Таким образом, вклад  $L$ -петлевого контрчлена в  $\beta$ -функцию имеет вид

$$\beta_{(L)ij}^G = -LT_{(L)}^{(1)}(ij). \quad (3.12)$$

Кроме формул (3.9), (3.10), из уравнения (3.8) следует так называемые полюсные соотношения [28], связывающие коэффициенты при старших полюсах с коэффициентами при младших полюсах:

$$\left(1 + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda}\right) T_{ij}^{(n)} = \int \beta_{kn}^G \frac{\delta T_{(n-1)ij}^{(n-1)}}{\delta G_{kn}} = \frac{d}{d\alpha} T_{ij}^{(n-1)}(G - \alpha\beta^G) \Big|_{\alpha=0}. \quad (3.13)$$

В частности, для  $n$ -петлевого коэффициента при  $\varepsilon^{-n}$  справедливо соотношение

$$nT_{(n)ij}^{(n)} = -\int \beta_{(1)kn}^G \frac{\delta T_{(n-1)ij}^{(n-1)}}{\delta G_{kn}} = \frac{d}{d\alpha} T_{(n-1)ij}^{(n-1)}(G - \alpha\beta^G) \Big|_{\alpha=0}. \quad (3.14)$$

Заметим, что в определении тензоров  $T_{ij}$ , а следовательно, и  $\beta$ -функций, присутствует неоднозначность, связанная с возможностью произвольной замены координат полевого многообразия. А именно, диффеоморфизм  $\varphi^i \rightarrow \varphi^i + V^i(\varphi)$ , где  $V^i(\varphi)$  — локальный вектор (т.е., зависящий от точки полевого многообразия), приведет к переопределению контрчленов на соответствующие производные Ли. В частности,  $\beta_{ij}^G$  определена с точностью до  $2D_{(i}V_{j)}$ . Это свойство окажется полезным при анализе произвола  $\beta$ -функций в старших порядках.

Для некоторых специальных классов полевых многообразий можно сделать вывод о конечности теории, даже не прибегая к конкретным вычислениям. Так, условие тождественного равенства нулю тензора Римана пространства-мишени сигма-модели без члена Весса — Зумино ( $B_{ij} = 0$ ) приводит к конечной теории, т.к. возможные контрчлены в любом порядке выражаются только через свертки произведений тензоров Римана. Более того, для таких многообразий, как известно, можно выбрать евклидовы координаты, в которых  $G_{ij} = \delta_{ij}$ , и действие сигма-модели превращается в действие системы свободных скалярных полей.

Для сигма-модели с членом Весса — Зумино к конечной теории приводит условие так называемой параллелизуемости пространства-мишени:

$$\mathcal{R}_{iklj} \equiv 0. \quad (3.15)$$

Доказательство конечности [29] основано на анализе возможных контрчленов в каждом порядке теории возмущений.

Единственными параллелизуемыми пространствами сигма-модели являются групповые многообразия. В этом случае сигма-модель также эквивалентна некоторой свободной теории. Как показано в работе [30], двумерные теории свободных спинорных полей эквивалентны сигма-моделям с членом Весса — Зумино на групповых параллелизуемых многообразиях.

#### 4. ПЕРЕНОРМИРОВКА ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИГМА-МОДЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФОНОВОГО ПОЛЯ

Метод фонового поля представляет собой эффективный способ определения квантовых поправок в квантовой теории поля, применимый в том числе и в нелинейных квантово-полевых моделях [31—34].

Прежде чем перейти к описанию процедуры вычисления контрчленов в нелинейной двумерной сигма-модели методом фонового поля, напомним кратко основную идею этого метода.

Стандартный путь построения контрчленов, как известно, состоит в вычислении в каждом порядке теории возмущений всех одночастично-неприводимых (сильносвязных) диаграмм и, тем самым, построения в рамках теории возмущений эффективного действия  $\Gamma[\varphi]$ , являющегося производящим функционалом для одночастично неприводимых функций Грина.

Эффективное действие связано с производящим функционалом связанных графов  $W[J]$ :

$$\exp iW[J] = \int D\varphi \exp i\{S[\varphi] + \int J\varphi\} \quad (4.1)$$

преобразованием Лежандра

$$\Gamma[\bar{\varphi}] = W[J] - \int J\bar{\varphi}, \quad (4.2)$$

где  $\bar{\varphi}$  есть решение уравнения

$$\bar{\varphi} = \frac{\delta W[J]}{\delta J} \quad (4.3)$$

— среднее значение поля  $\varphi$  в присутствии источника  $J$ . (В интеграле по пространству-времени мы для компактности записи не выписываем меру интегрирования.)

Совершим теперь в действии  $S[\varphi]$  сдвиг квантового поля на некоторое фоновое (классическое) поле  $\Phi$ :  $\varphi = \Phi + \pi$  (или, другими словами,

«расщепим» поле  $\varphi$  на классическую ( $\Phi$ ) и квантовую ( $\pi$ ) части) и введем новые функционалы, определяющие соответствующие функции Грина в присутствии фонового поля:

$$\exp i\tilde{W}[\Phi, J] = \int D\pi \exp i\{S[\Phi + \pi] + \int J\pi\}, \quad (4.4)$$

$$\tilde{\Gamma}[\Phi, \pi] = \tilde{W}[\Phi, J] - \int J\tilde{\pi}, \quad (4.5)$$

где

$$\tilde{\pi} = \frac{\delta\tilde{W}[\Phi, J]}{\delta J}. \quad (4.6)$$

Нетрудно видеть, что величины со знаком «тильда» связаны с исходными следующими соотношениями:

$$\tilde{W}[\Phi, J] = W[J] - \int J\Phi, \quad (4.7)$$

$$\tilde{\pi} = \bar{\varphi} - \Phi, \quad (4.8)$$

$$\tilde{\Gamma}[\Phi, \tilde{\pi}] = W[J] - \int J\Phi - \int J\bar{\varphi} + \int J\Phi = \Gamma[\bar{\varphi}]. \quad (4.9)$$

Подставляя выражение  $\bar{\varphi}$  через  $\tilde{\pi}$ , имеем

$$\tilde{\Gamma}[\Phi, \tilde{\pi}] = \Gamma[\Phi + \tilde{\pi}]. \quad (4.10)$$

Если положить  $\tilde{\pi} = 0$ , то получим

$$\Gamma[\Phi] = \tilde{\Gamma}[\Phi, 0]. \quad (4.11)$$

Таким образом, как следует из (4.11), для нахождения эффективного действия  $\Gamma$  достаточно вычислить в присутствии фонового поля лишь вакуумные (т.е. не содержащие внешних линий, соответствующих квантовым полям) одночастично-неприводимые диаграммы.

Из формулы (4.10) следует дифференциальное тождество

$$\frac{\delta\tilde{\Gamma}[\Phi, \tilde{\pi}]}{\delta\tilde{\pi}} = \frac{\delta\tilde{\Gamma}[\Phi, \tilde{\pi}]}{\delta\Phi}, \quad (4.12)$$

которое выражает факт инвариантности функционала  $\tilde{\Gamma}$  относительно одновременного преобразования полей:

$$\delta\Phi(x) = \eta(x), \quad \delta\tilde{\pi}(x) = -\eta(x). \quad (4.13)$$

Пользуясь выражением для тока

$$J = -\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\tilde{\pi}}, \quad (4.14)$$

нетрудно записать уравнение, определяющее  $\Gamma[\Phi]$ :

$$\exp i\Gamma[\Phi] = \int D\pi \exp i \left\{ S[\Phi + \pi] - \int \pi \frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi} \right\}. \quad (4.15)$$

Формула (4.15) позволяет находить функционал эффективного действия по теории возмущений. Для этого действие  $S[\Phi + \pi]$  разлагается по степеням квантового поля  $\pi(x)$  ( $\hbar^{1/2}\pi(x)$ ) и вычисляются вакуумные диаграммы с внутренними линиями, соответствующими пропагатору поля  $\pi$ , и вершинами, определяемыми коэффициентами этого разложения, которые зависят от фонового поля  $\Phi$ . Параметром теории возмущений, как известно, служит число петель (степень  $\hbar$ ).

Сделаем замечание относительно процедуры устранения расходимостей. Как известно, стандартная  $R$ -операция [35] задает правила вычитания расходимостей для каждой диаграммы. При этом для выделения расходимостей исследуемого порядка в диаграммах проводится вычитание расходимостей низших порядков, соответствующих их подграфам.

В методе фонового поля расходимости интересующего порядка теории возмущений можно выделить несколько иным, эквивалентным  $R$ -операции, способом [32]. Для этого дополнительно к вычислению расходимостей диаграмм данного порядка необходимо в контрчленах низших порядков сделать замену

$$\Phi \rightarrow \varphi = \Phi + \pi.$$

Затем разложить эти контрчлены по степеням квантового поля  $\pi$  и учесть вклад новых диаграмм (с меньшим числом петель), вершины которых определяются членами этого разложения. Такой подход, удобный, когда вычисляются расходимости достаточно большого числа диаграмм не очень высокого порядка, применяется в следующем разделе для вычисления двухпетлевых  $\beta$ -функций в двумерной нелинейной сигма-модели с членом Весса — Зумино. При исследовании расходимостей в более высоких порядках, особенно когда число типичных диаграмм небольшое, проще использовать обычную  $R$ -операцию. Именно это имеет место в суперсимметричных моделях (см. разд.7).

В двумерной нелинейной сигма-модели выбор квантового поля и разложения действия по его степеням имеет свои особенности. Дело в том, что простейшее разбиение поля на классическую и квантовую части

$$\varphi^i(x) = \Phi^i(x) + \pi^i(x) \quad (4.16)$$

приводит к тому, что коэффициенты разложения действия (2.1)  $S[\Phi + \pi]$  по степеням поля  $\pi^i(x)$  нековариантны. Это связано с тем, что поле  $\pi^i(x)$ , представляющее собой разность между координатами двух



разных точек полевого многообразия, не является вектором на этом многообразии.

Чтобы избежать этой трудности, в качестве квантового поля, по степеням которого проводится разложение, необходимо для каждого  $x$  выбрать некоторый контравариантный вектор  $\xi^i(x)$ , с которым поле  $\pi^i(x)$  из (4.16) в каждой точке  $x$  связано нелинейной зависимостью  $\pi^i[\xi(x)]$ .

Наиболее удобен следующий способ выбора квантового поля  $\xi^i(x)$  [28]. Для каждого  $x$  положим  $\xi^i(x)$  равным вектору, касательному в точке полевого многообразия  $\Phi^i(x)$  к геодезической, связывающей точки  $\Phi^i(x)$  и  $\Phi^i(x) + \pi^i(x)$ , длина которого равна длине этой геодезической.

Для двух достаточно близких точек полевого многообразия существует единственная проходящая через эти точки геодезическая  $f^i(s)$ , которая параметризуется параметром  $s \in [0, 1]$  и имеет граничные условия

$$f^i(0) = \Phi^i(x), \quad f^i(1) = \Phi^i(x) + \pi^i(x). \quad (4.17)$$

В силу того, что указанное построение проводится для каждого  $x$  независимо, вектор, касательный к геодезической в точке  $\Phi^i(x)$ ,

$$\xi^i = \frac{df^i}{ds} \Big|_{s=0} \quad (4.18)$$

является функцией  $x$ :  $\xi^i = \xi^i(x)$ .

Уравнение геодезической (кривой, касательные к которой в каждой точке связаны друг с другом параллельным переносом вдоль этой кривой) выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2}{ds^2} f^i(s) + \Gamma_{jk}^i(f(s)) \frac{df^j}{ds} \frac{df^k}{ds} = 0. \quad (4.19)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , нетрудно получить с учетом (4.17) и (4.18) решение этого уравнения в виде бесконечного степенного ряда

$$f^i(s) = \Phi^i + \xi^i s - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \Gamma_{j_1 \dots j_n}^i \xi^{j_1} \dots \xi^{j_n}. \quad (4.20)$$

Здесь  $\Gamma_{j_1 j_2}^i$  — символ Кристоффеля в точке  $\Phi^i$ :

$$\Gamma_{j_1 j_2 \dots j_n}^i \equiv \tilde{D}_{j_1} \dots \tilde{D}_{j_{n-2}} \Gamma_{j_{n-1} j_n}^i. \quad (4.21)$$

Знак «тильда» в (4.21) означает, что ковариантные производные берутся только по нижним индексам, т.е.

$$\Gamma^i_{j_1 j_2 j_3} = \partial_{j_1} \Gamma^i_{j_2 j_3} - \Gamma^k_{j_1 j_2} \Gamma^i_{k j_3} - \Gamma^k_{j_1 j_3} \Gamma^i_{j_2 k}, \text{ и т.д.}$$

Таким образом, из второго условия (4.17) для каждого  $x$  получается связь квантового поля  $\pi^i(x)$  с полем  $\xi^i(x)$ :

$$\pi^i(x) = \xi^i(x) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma^i_{j_1 \dots j_n} \xi^{j_1} \xi^{j_n}. \tag{4.22}$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, не является вектором и подходящим выбором системы координат может быть обращено в нуль. Такой системой является так называемая система римановых нормальных координат, в которой символы Кристоффеля и все величины (4.21) в точке  $\Phi^i(x)$  равны нулю.

Итак, в нормальных координатах

$$\pi^i(x) = \xi^i(x). \tag{4.23}$$

В этой системе координат действие  $S[\Phi + \pi[\xi]]$  раскладывается по степеням поля  $\xi^i(x)$  наиболее простым образом.

Чтобы получить теперь разложение действия в виде, справедливом в любой системе координат, необходимо записать результат, полученный в нормальных координатах, только через тензорные величины. Для этого удобно использовать следующий алгоритм [36]. Перепишем  $n$ -й член разложения действия в нормальных координатах

$$S^{(n)} = \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \left( \partial_{i_1}^{x_1} \dots \partial_{i_n}^{x_n} S \right) \xi^{i_1}(x_1) \dots \xi^{i_n}(x_n), \tag{4.24}$$

где

$$\partial_i^x \equiv \frac{\delta S[\Phi]}{\delta \Phi^i(x)}, \tag{4.25}$$

в виде

$$S^{(n)} = \frac{1}{n!} \int dx_1 \xi^{i_1}(x_1) \partial_{i_1}^{x_1} \dots \int dx_n \xi^{i_n}(x_n) \partial_{i_n}^{x_n} S. \tag{4.26}$$

Такая запись эквивалентна предыдущей, поскольку по построению  $\xi^i(x)$  является вектором, касательным к геодезической в точке  $\Phi^i(x)$ , и, следовательно, не меняется в направлении, касательном к геодезической, которая в нормальных координатах является прямой:

$$f^i(s) = \Phi^i(x) + \xi^i(x)s,$$

т.е.

$$\int dx \xi^i(x) \partial_i^x \xi^j(y) = 0. \quad (4.27)$$

В произвольных координатах векторы  $\xi^i$  параллельны друг другу вдоль геодезической, и, следовательно,

$$\int dx \xi^i(x) D_i^x \xi^j(y) = 0, \quad (4.28)$$

где функциональная ковариантная производная  $D_i^x$  действует на произвольный вектор  $V^j(\Phi(y))$  следующим образом:

$$D_i^x V^j(\Phi(y)) = \left\{ \partial_i^x V^j(\Phi(x)) + \Gamma_{ik}^j(\Phi(x)) V^k(\Phi(x)) \right\} \delta(x - y). \quad (4.29)$$

Ковариантное разложение действия выглядит, как (4.26), где обычная функциональная производная заменена на ковариантную:

$$S^{(n)} = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \left( \int dx_k \xi^{i_k}(x_k) D_{i_k}^{x_k} \right) S. \quad (4.30)$$

При вычислении конкретных членов разложения удобно использовать следующие правила действия оператора  $\int dx \xi^i(x) D_i^x$ :

$$\int dx \xi^i(x) D_i^x T_{i_1 \dots i_n} |\Phi(y)| = T_{i_1 \dots i_n} |\Phi(y)| \xi^i(y), \quad (4.31)$$

$$\int dx \xi^i(x) D_i^x \left( \partial_\mu^y \Phi^j(y) \right) = D_\mu^y \xi^j(y), \quad (4.32)$$

где

$$D_\mu^y \xi^i(y) \equiv \partial_\mu^y \xi^i(y) + \Gamma_{jk}^i(\Phi(y)) \partial_\mu^y \Phi^k(y) \xi^j(y), \quad (4.33)$$

$$\int dx \xi^i(x) D_i^x (D_\mu^y \xi^j(y)) = R_{ikl}^j(\Phi(y)) \partial_\mu^y \Phi^l(y) \xi^i(y) \xi^k(y). \quad (4.34)$$

В следующем разделе мы применим этот метод для разложения действия (2.1) до членов, содержащих поле  $\xi^i$  в четвертой степени, что достаточно для вычисления одно- и двухпетлевых контрчленов.

Сделаем еще одно важное замечание относительно особенностей процедуры вычисления эффективного действия в нелинейной сигма-модели. Из-за нелинейного характера разбиения поля  $\varphi^i(x)$  на классическую и квантовую части появляется ряд усложнений по сравнению с тем простым вариантом метода фонового поля, который описан в начале этого раздела. Действительно, из соотношений (4.16), (4.22) следует, что пол-

ное поле  $\varphi^i(x)$  инвариантно относительно преобразований фонового и квантового полей:

$$\left. \begin{aligned} \delta\Phi^i(x) &= \eta^i(x) \\ \delta\xi^i(x) &= -\gamma^i_j(\Phi, \xi) \eta^j(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta\varphi^i = 0. \quad (4.35)$$

Здесь  $\gamma^i_j$  есть бесконечный ряд по степеням квантового поля:

$$\gamma^i_j = \delta^i_j + \Gamma^i_{jk} \xi^k - \frac{1}{3} R^i_{klj} \xi^k \xi^l + \dots \quad (4.36)$$

При этом нетрудно убедиться, что преобразования (4.35) абелевы:  $[\delta_1, \delta_2] = 0$  и функционал  $\gamma^i_j$  удовлетворяет тождеству

$$\frac{\delta}{\delta\Phi^n} \gamma^i_j - \gamma^k_n \frac{\delta}{\delta\xi^k} \gamma^i_j - (n \leftrightarrow j) = 0. \quad (4.37)$$

Классическое действие  $S[\varphi]$  инвариантно относительно преобразований (4.35). Естественно потребовать, чтобы эта инвариантность сохранялась и для эффективного действия. Как было показано в работах [37, 38], для этого необходимо, чтобы функционал

$$\tilde{\Gamma}[\Phi, \xi] = \tilde{W}[\Phi, J] - \int J_i \xi^i \quad (4.38)$$

удовлетворял следующему тождеству Уорда:

$$\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\Phi^i(x)} - (\gamma\tilde{\Gamma})^j_i \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\xi^j(x)} = 0, \quad (4.39)$$

где  $(\gamma\tilde{\Gamma})$  обозначает набор всех одночастично-неприводимых диаграмм с одной вставкой составного оператора  $\gamma^j_i(\Phi, \xi)$ .

Если определить теперь, как обычно, эффективное действие

$$\Gamma[\Phi] = \tilde{\Gamma}[\Phi, 0],$$

то из (4.39) получим

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi^i(x)} = c^j_i(x) \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\xi^j(x)} \Big|_{\xi=0}, \quad (4.40)$$

где

$$c^j_i \equiv (\gamma\tilde{\Gamma})^j_i \Big|_{\xi=0}. \quad (4.41)$$

Пользуясь теперь соотношением (4.40), запишем уравнение для инвариантного функционала эффективного действия, обобщающее уравнение (4.15) на случай нелинейной сигма-модели:

$$\exp i\Gamma[\Phi] = \int D\xi \exp i \left\{ S[\Phi + \pi(\xi)] - \int \xi^i (c^{-1})^j_i \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi^j} \right\}. \quad (4.42)$$

При линейном способе разбиения поля на классическое и квантовое имело место тождество (4.12), из которого, в частности, следовало, что константы перенормировки классического и квантового полей равны. Для нелинейной сигма-модели вместо этого справедливо тождество (4.39), и классическое и квантовое поля перенормируются различным образом. Это обстоятельство приводит к необходимости учитывать эффект нелинейной перенормировки квантового поля при устранении расходимостей в эффективном действии в старших порядках [37, 38]. Соответствующие дополнительные расходящиеся слагаемые в контрчлене пропорциональны, однако, уравнению движения фонового поля и содержат лишь старшие полюса по  $\epsilon$  [38], и поэтому не дают вклада в  $\beta$ -функции. В настоящем обзоре мы будем в основном рассматривать вычисления  $\beta$ -функций в различных вариантах двумерных нелинейных сигма-моделей и не будем обсуждать эти дополнительные вклады. Для простоты мы сразу не будем следить за расходящимися структурами, пропорциональными уравнению движения фонового поля, а ограничимся только контрчленами к действию  $S[\Phi]$  (так называемыми контрчленами на массовой поверхности).

## 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНО- И ДВУХПЕТЛЕВЫХ КОНТРЧЛЕНОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ С ЧЛЕНОМ ВЕССА — ЗУМИНО

Двухпетлевые контрчлены в двумерной нелинейной сигма-модели с членом Весса — Зумино были вычислены в [39—44]. В этом разделе мы приведем, следуя работе [44], вычисления в специальном случае полевых многообразий, задаваемых условиями (2.21):

$$R_{ijkl;n} = S_{ijk;n} = 0.$$

Применим описанный выше алгоритм разложения действия, ограничившись членами до четвертого порядка по полю  $\xi^i$ , необходимыми для вычисления двухпетлевых контрчленов.

Итак, начав с

$$S^{(0)} = \frac{1}{2} \int G_{ij} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j + \frac{1}{3} \int B_{ij} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^i \partial_\nu \Phi^j, \quad (5.1)$$

получим

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \int G_{ij} \partial_\mu \Phi^i D^\mu \xi^j + \int S_{ijk} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^i \partial_\nu \Phi^j \xi^k, \\ S^{(2)} &= \frac{1}{2} \int G_{ij} D_\mu \xi^i D^\mu \xi^j + \frac{1}{2} \int R_{iklj} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j \xi^k \xi^l + \int S_{ijk} \partial_\mu \Phi^i \varepsilon^{\mu\nu} D_\nu \xi^j \cdot \xi^k, \\ S^{(3)} &= \frac{2}{3} \int R_{iklj} \partial_\mu \Phi^i D^\mu \xi^j \cdot \xi^k \xi^l + \frac{1}{3} \int S_{ijk} D_\mu \xi^i \varepsilon^{\mu\nu} D_\nu \xi^j \cdot \xi^k + \\ &+ \frac{1}{3} \int S_{ki}^n R_{nlmj} \partial_\mu \Phi^i \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi^j \cdot \xi^k \xi^l \xi^m, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= \frac{1}{6} \int R_{iklj} D_\mu \xi^i D^\mu \xi^j \cdot \xi^k \xi^l + \frac{1}{6} \int R^p{}_{kli} R_{pmnj} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j \cdot \xi^k \xi^l \xi^m \xi^n + \\ &+ \frac{1}{4} \int \left( S_{nj k} R^n{}_{lmi} - \frac{1}{3} S_{nik} R^n{}_{lmj} \right) \partial_\mu \Phi^i \varepsilon^{\mu\nu} D_\nu \xi^j \cdot \xi^k \xi^l \xi^m. \end{aligned}$$

Чтобы разделить ультрафиолетовые и инфракрасные расходимости, добавим к действию массовый член

$$S_m = \frac{m^2}{2} \int d^2x G_{ij} \varphi^i \varphi^j, \quad (5.3)$$

разложение которого до членов  $O(\xi^2)$  равно

$$S_m^{(2)} = \frac{m^2}{2} \int G_{ij} \xi^i \xi^j + \frac{m^2}{6} \int R_{iklj} \Phi^k \Phi^l \xi^i \xi^j. \quad (5.4)$$

Необходимость введения дополнительного слагаемого (5.3) в действие вызвана особым поведением двумерных безмассовых теорий (обсуждение этого вопроса см. в разд.6). Указанная добавка к действию имеет вспомогательный характер и служит для регуляризации инфракрасных расходимостей, возникающих при наивном обращении с двумерными теориями. После вычисления ультрафиолетовых контрчленов, разумеется,  $m$  следует положить равным нулю.

Добавление к действию массового члена поля  $\varphi^i(x)$  (5.3) — это не единственный способ борьбы с инфракрасными трудностями безмассовых двумерных теорий. Откладывая подробности до следующего раздела, ограничимся здесь следующим замечанием. Выражение (5.3), вообще говоря, не совсем удовлетворительно с точки зрения трансформационных

свойств. Оно не является скаляром, т.к.  $\varphi^i(x)$ , в отличие от  $\partial_\mu \varphi^i$ , не есть вектор на полевом многообразии. В результате при вычислении контрчленов появляются также нековариантные расходящиеся структуры, которые обычно отбрасывают, предполагая, что если инфракрасную регуляризацию провести с помощью инвариантных добавок, то такие структуры не возникнут.

Инвариантной инфракрасной регуляризацией является добавление массового члена вида

$$\frac{m^2}{2} \int d^2x G_{ij} \xi^i \xi^j \quad (5.5)$$

( $\xi^i$ , в отличие от  $\varphi^i$ , — вектор). В этом случае, однако, возникает необходимость проводить также перенормировку квантовых полей  $\xi^i(x)$  (ср. [37,38]).

В этом разделе мы будем пользоваться регуляризацией (5.3), которая технически более удобна, чем (5.5). Другие способы инфракрасной регуляризации будут рассмотрены в следующем разделе.

В членах разложения действия по степеням квантового поля (5.2) тензоры  $G(\Phi)$ ,  $R(\Phi)$ ,  $S(\Phi)$  заданы в точке многообразия с координатами  $\Phi^i(x)$ . Расходящиеся контрчлены, как уже говорилось, имеют структуру  $T_{ij}[G(\Phi), R(\Phi), S(\Phi)] \partial \Phi^i \partial \Phi^j$ , причем размерность  $[T] = 0$ . Поэтому при их вычислении после выделения множителя  $\partial_\mu \Phi^i \partial_\nu \Phi^j$  оставшая зависимость от  $x$  несущественна, и аргументы тензорных функций можно считать эффективно не зависящими от  $x$ , т.е., положить  $\Phi^i = \text{const}$ .

Кинетический член поля  $\xi^i(x)$  выглядит нестандартно, будучи пропорциональным тензору  $G_{ij}$ . Обычный способ преодоления этой трудности состоит в переходе в систему координат касательного пространства, т.е., во введении  $n$ -базисных векторов ( $n$ -байн, где  $n$  есть размерность полевого многообразия)  $e_i^a(\Phi)$ , диагонализующих метрику  $G_{ij} = e_i^a e_j^b \delta_{ab}$ , и использовании новых полей  $\xi^a(x) = e_i^a \xi^i(x)$ , для которых кинетический член приобретает вид

$$(D_\mu \xi)^a (D^\mu \xi)^a.$$

Ковариантная производная  $D_\mu$  содержит так называемые коэффициенты спиновой связности

$$\begin{aligned} \omega^a_{ib} &\equiv e_j^a \Gamma^j_{ik} e^k_b - \partial_i e_j^a \cdot e^j_b, \\ (D_\mu \xi)^a &= \partial_\mu \xi^a + \omega^a_{ib} \partial_\mu \Phi^i \xi^b \equiv \partial_\mu \xi^a + A_\mu^{ab} \xi^b. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При вычислении ультрафиолетовых контрчленов достаточно учесть лишь частотную производную  $\partial_\mu \xi^a$ , поскольку второе слагаемое в (5.6) не дает вклада из-за следующих размерных соображений.  $A_\mu^{ab}$  играет роль потенциала поля Янга — Милса, связанного с локальными  $SO(n)$  преобразованиями системы координат в касательном пространстве. Простейший инвариант, содержащий поле  $A_\mu^{ab}$ , — это, как известно, билинейная комбинация тензоров напряженности  $F_{\mu\nu}^{ab} F_{\mu\nu}^{ab}$ , которая содержит не менее четырех производных  $\partial_\mu \Phi^i$ , и, следовательно, в двумерном пространстве-времени не имеет отношения к искомым контрчленам. Убедиться в сокращении членов с  $A_\mu^{ab}$ , как уже говорилось, можно и непосредственными вычислениями в каждом конкретном порядке теории возмущений при использовании инвариантной инфракрасной регуляризации (например, в виде (5.5)).

При проведении вычислений удобно перейти к евклидову двумерному пространству-времени. При этом в показателе экспоненты вычисляемого функционала  $iS$  заменится на  $-S$  и пропагатор поля  $\xi^a$  примет вид

$$\langle \xi^a(x) \xi^b(y) \rangle = \delta^{ab} \int \frac{dp}{p^2 + m^2} e^{ip(x-y)}.$$

Ультрафиолетовые расходимости регуляризуем переходом к размерности  $D = 2 - 2\epsilon$ . Будем также использовать следующее выражение для свертки евклидовых антисимметричных тензоров:

$$\varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_\lambda^\nu = -\delta_{\mu\lambda} (1 + a\epsilon + O(\epsilon^2)), \quad (5.7)$$

где  $a$  — некоторая произвольная константа, зависимость результата от которой будет обсуждаться ниже.

Для простоты записи при вычислении интегралов мы не будем выписывать множители типа  $(2\pi)^{-d}$  и  $\pi^{d/2}$ , соответствующие каждому петлевому интегралу, а также будем использовать определение углового интеграла в  $d = 2 - 2\epsilon$  измерениях, предписывающее умножать каждый интеграл на фактор  $\Gamma(1 - \epsilon)$ , что позволяет избежать появления на промежуточных этапах членов, пропорциональных  $\ln \pi$ ,  $\gamma_E$  и  $\zeta(2)$ , несущественных, как известно, для окончательных ответов.



Пользуясь теперь разложением действия по степеням квантового поля  $\xi^a$ , построим однопетлевые (рис.1) и двухпетлевые (рис.2) диаграммы, дающие вклад в искомые контрчлены. На этих рисунках темные кружки обозначают коэффициенты разложения действия (которые представляют собой указанные рядом комбинации из тензоров кручения и кривизны), волнистые линии изображают  $\partial_\mu \Phi^i$ , а прямые — пропагаторы поля  $\xi^a$ .

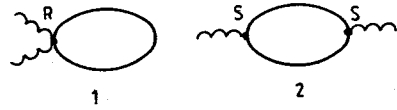


Рис.1. Однопетлевые диаграммы в двумерной нелинейной  $\sigma$ -модели с членом Весса — Зумино

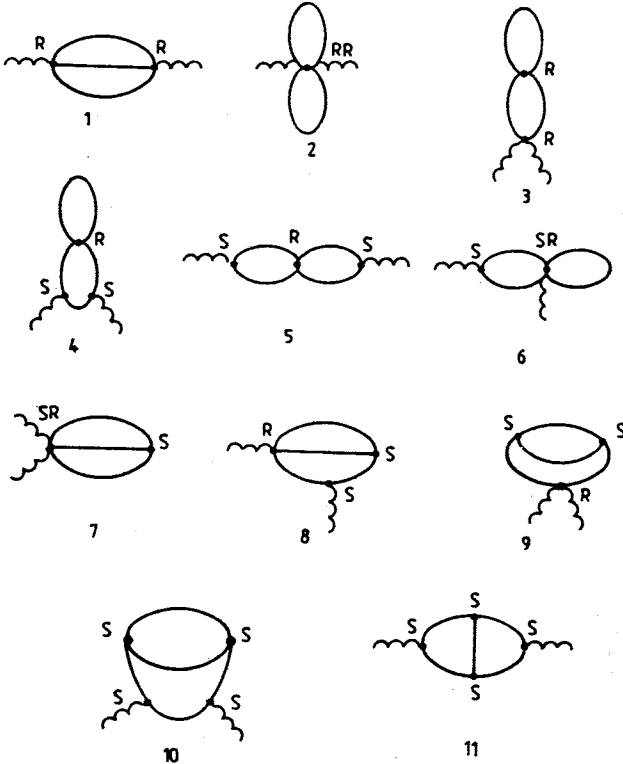


Рис.2. Двухпетлевые диаграммы в двумерной нелинейной  $\sigma$ -модели с членом Весса — Зумино

лу размерных соображений, т.е. из-за того, что после выделения двух производных  $\partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$  расходящуюся часть можно считать эффективно не зависящей от  $x$ .

Итак, диаграмме  $I$  (рис.1) соответствует выражение

$$-\frac{1}{2} R_{iabj} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j \overline{\xi^a(x) \xi^b(x)}, \tag{5.8}$$

где спаривание полей в одной точке приводит к

$$\delta^{ab} \int \frac{d^{2-2\epsilon} k}{k^2 + m^2} = \delta^{ab} \frac{1}{(m^2)^\epsilon} \Gamma(\epsilon) \Gamma(1 - \epsilon). \tag{5.9}$$

Ультрафиолетово-расходящаяся часть диаграммы  $I$  (рис.1) равна

$$-\frac{1}{2\epsilon} R_i^a{}_{aj} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j = \frac{1}{2\epsilon} R_{ij} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j, \tag{5.10}$$

$$R_{ij} \equiv R^a{}_{iaj}.$$

В связи с вычислением этой диаграммы сделаем следующее замечание. Как известно, в размерной регуляризации безмассовая диаграмма типа «головастик» равна нулю. В двумерном пространстве-времени соответствующий интеграл расходится на верхнем и нижнем пределах, и при этом ультрафиолетовая и инфракрасная расходимости равны по величине и обратны по знаку. При введении вспомогательной массы интеграл становится отличным от нуля, и оказывается возможным вычислить ультрафиолетовую расходимость этой инфракрасно-регуляризованной диаграммы. (См. также обсуждение этого вопроса в следующем разделе.) Аналогично диаграмма 2 (рис.1) дает

$$\frac{1}{2} S_{abi} S_{cdj} \epsilon^{\mu\lambda} \epsilon^{\nu\sigma} \partial_\lambda \Phi^i \partial_\sigma \Phi^j \cdot 2 \overline{\xi^a \partial_\mu \xi^b \cdot \xi^c \partial_\nu \xi^d}, \tag{5.11}$$

где спаривания полей приводят к

$$\int \frac{dk k_\mu k_\nu}{(k^2 + m^2)^2} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{1}{(m^2)^\epsilon} \Gamma(\epsilon) \Gamma(1 - \epsilon). \tag{5.12}$$

С учетом (5.7) расходящаяся часть этой диаграммы равна

$$-\frac{1}{2\epsilon} (S^2)_{ij} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j, \tag{5.13}$$

$$(S^2)_{ij} \equiv S_{iab} S_j{}^{ab}.$$

Таким образом, однопетлевой расходящийся контрчлен имеет вид

$$\frac{1}{2\epsilon} \mathcal{R}_{ij}, \tag{5.14}$$

где  $\mathcal{R}_{ij} \equiv R_{ij} - (S^2)_{ij}$  — обобщенный тензор Риччи, включающий кручение.

Рассмотрим теперь вычисление ультрафиолетовых расходимостей двухпетлевых диаграмм. Удобно сразу изменить нормировку импульсов и не выписывать общий множитель  $(m^2)^{-2\epsilon}$ , т.е. пропагатор поля записывать в виде  $1/(k^2 + 1)$ .

Диаграмме 1 (рис.2) соответствуют две возможности спаривания квантовых полей:

$$\frac{4}{9} R_{i(ab)c} R_{jabc} \partial_\mu \Phi^i \partial_\nu \Phi^j \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\text{---}}}}{\xi\xi\xi\xi} \cdot \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\text{---}}}}{\partial^v \xi\xi\xi\xi}, \tag{5.15}$$

$$\frac{8}{9} R_{i(ab)c} R_{j(cb)a} \partial_\mu \Phi^i \partial_\nu \Phi^j \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\text{---}}}}{\xi\xi\xi\xi} \cdot \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\text{---}}}}{\partial^v \xi\xi\xi\xi}. \tag{5.16}$$

Первая возможность задает интеграл

$$\begin{aligned} & \int \frac{dk k^\mu k^\nu}{k^2 + 1} \int \frac{dq}{(q^2 + 1)[(k - q)^2 + 1]} = \\ & = \frac{\delta^{\mu\nu}}{2 - 2\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon) \Gamma(1 - \epsilon) \int_0^1 d\alpha \int \frac{dk k^2}{(k^2 + 1)[1 + k^2 \alpha(1 - \alpha)]^{1+\epsilon}} = \\ & = \frac{\delta^{\mu\nu}}{2 - 2\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon) \Gamma(1 - \epsilon) \int_0^1 d\alpha \int \frac{dk}{[1 + k^2 \alpha(1 - \alpha)]^{1+\epsilon}} + \dots \tag{5.17} \end{aligned}$$

Многоточием в (5.17) обозначены члены, не сингулярные по  $\epsilon$ . Выполняя теперь интегрирование по угловым переменным и делая замену переменных  $k^2 = x$ , приведем (5.17) к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{\mu\nu}}{2 - 2\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon) \Gamma(1 - \epsilon) \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty \frac{dx x^{-\epsilon}}{[1 + x\alpha(1 - \alpha)]^{1+\epsilon}} = \\ & = \frac{\delta^{\mu\nu}}{2 - 2\epsilon} \frac{\Gamma(1 + \epsilon) \Gamma^2(1 - \epsilon) \Gamma(2\epsilon)}{\Gamma(1 + \epsilon)} \int_0^1 d\alpha \alpha^{\epsilon-1} (1 - \alpha)^{\epsilon-1} = \\ & = \frac{\delta^{\mu\nu}}{2 - 2\epsilon} \Gamma^2(\epsilon) \Gamma^2(1 - \epsilon). \tag{5.18} \end{aligned}$$

Сингулярная часть выражения (5.18) равна

$$\frac{\delta^{\mu\nu}}{2} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right]. \tag{5.19}$$

Спаривания в (5.16) приводят к интегралу

$$- \int \frac{dk k^\mu}{k^2 + 1} \int \frac{dq q^\nu}{(q^2 + 1)[(k - q)^2 + 1]}, \tag{5.20}$$

который вычисляется аналогично (5.17), (5.18) и имеет сингулярность, равную

$$- \frac{\delta^{\mu\nu}}{4} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right]. \tag{5.21}$$

Теперь, после небольших преобразований свертки тензоров кривизны в (5.15) и (5.16), нетрудно получить ультрафиолетово-расходящуюся часть диаграммы 1 (рис.2):

$$\frac{1}{6} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left\{ R_{iabc} R_j^{abc} + R_{ibac} R_j^{abc} \right\} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j. \tag{5.22}$$

Вычисления диаграмм 2—7 (рис.2) проводятся без труда, и мы не будем здесь останавливаться на них (окончательный результат см. в табл.1).

Рассмотрим более подробно вычисление диаграмм 8—11. Диаграмме 8 отвечает следующая комбинация спариваний квантовых полей:

$$- \frac{16}{3} R_{i(ab)c} S_{jad} S_{cdb} \partial_\mu \Phi^i \partial_\nu \Phi^j \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon^{\lambda\rho} \partial_\mu \overbrace{\xi \xi \xi \xi}^{\overbrace{\xi \xi \xi \xi}^{\overbrace{\xi \xi \xi \xi}^{\overbrace{\xi \xi \xi \xi}^{\overbrace{\xi \xi \xi \xi}^{\overbrace{\xi \xi \xi \xi}^{\overbrace{\xi \xi \xi \xi}^{\overbrace{\xi \xi \xi \xi}^{\xi \xi \xi \xi}}}}}}}, \tag{5.23}$$

которая приводит к интегралу

$$\begin{aligned} & - \int \frac{dk k_\sigma k_\rho}{(k^2 + 1)^2} \int \frac{dq q_\mu q_\lambda}{(q^2 + 1)[(k - q)^2 + 1]} = \\ & = - \frac{\delta^{\mu\lambda}}{2} \Gamma(\varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon) \int_0^1 d\alpha \int \frac{dk k_\sigma k_\rho}{(k^2 + 1)^2 [k^2 \alpha(1 - \alpha) + 1]^\varepsilon} = \\ & = - \frac{\delta^{\mu\lambda} \delta^{\sigma\rho}}{2(2 - 2\varepsilon)} \Gamma(\varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon) \int_0^1 d\alpha \int \frac{dk k^2}{(k^2 + 1)^2 [k^2 \alpha(1 - \alpha) + 1]^\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

После выполнения угловых интегрирований и замены переменных получим

$$\begin{aligned}
& -\frac{\delta^{\mu\lambda}\delta^{\sigma\rho}}{2(2-2\varepsilon)}\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\int_0^1\frac{d\alpha}{[\alpha(1-\alpha)]^\varepsilon}\times \\
& \times\int_0^\infty dx x^{1-\varepsilon}(x+1)^{-2}\left[x+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right]^{-\varepsilon}.
\end{aligned} \quad (5.25)$$

В (5.25) присутствует табличный интеграл, который выражается через гипергеометрическую функцию с помощью формулы ([46], с.302):

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty dx x^{\alpha-1}(x+1)^{-\rho}(x+A)^{-\lambda}= \\
& = A^{-\lambda}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\rho+\lambda-\alpha)}{\Gamma(\rho+\lambda)}F\left(\alpha,\lambda;\rho+\lambda;1-\frac{1}{A}\right),
\end{aligned} \quad (5.26)$$

где

$$F(\alpha,\beta;\gamma;u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{u^k}{k!}, \quad (\alpha)_k\equiv\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1), \quad (\alpha)_0=1.$$

Таким образом, формула (5.25) переходит в

$$-\delta^{\mu\lambda}\delta^{\sigma\rho}\frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{2(2-2\varepsilon)}\frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(2+\varepsilon)}\int_0^1 d\alpha F(2-\varepsilon,\varepsilon;2+\varepsilon;1-\alpha(1-\alpha)). \quad (5.27)$$

Для вычисления сингулярной части диаграммы в гипергеометрической функции в (5.27) требуется удержать лишь члены, не зависящие от  $\varepsilon$  и линейные по  $\varepsilon$ . С учетом этого замечания имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha F=1+\varepsilon\int_0^1 d\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[1-\alpha(1-\alpha)\right]^k+O(\varepsilon^2)= \\
& =1-\varepsilon\int_0^1 d\alpha\ln[\alpha(1-\alpha)]+O(\varepsilon^2)=1+2\varepsilon+O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \quad (5.28)$$

Свертки двумерных индексов дают фактор

$$\delta^{\mu\lambda}\delta^{\sigma\rho}\varepsilon^{\nu\sigma}\varepsilon^{\lambda\rho}=-\delta^{\mu\nu}(1+a\varepsilon). \quad (5.29)$$

В результате ультрафиолетовая сингулярность диаграммы 8 (рис.2) равна

$$\frac{2}{3}R_{i(ab)c}S_{jad}S_{cbd}\partial_\mu\Phi^i\partial^\mu\Phi^j\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{a+1}{\varepsilon}\right]. \quad (5.30)$$

При вычислении диаграмм 9, 10 (рис.2) встречаются те же интегралы, что и в только что рассмотренном случае. Диаграмма 11 вычисляется несколько иначе. Соответствующее ей выражение имеет вид

$$4S_{iab} S_{jcd} S_{ace} S_{bde} \partial_\mu \Phi^i \partial_\nu \Phi^j \varepsilon^{\mu\alpha} \varepsilon^{\nu\beta} \varepsilon^{\lambda\gamma} \varepsilon^{\sigma\delta} \times$$

$$\times \partial_{\alpha\xi\xi} \partial_{\lambda\xi} \partial_{\gamma\xi} \partial_{\sigma\xi} \partial_{\delta\xi} \partial_{\beta\xi\xi} \partial_{\rho\xi\xi} \quad (5.31)$$

Спаривания задают интеграл

$$\int \frac{dk k_\alpha k_\lambda k_\sigma}{(k^2 + 1)^2} \int \frac{dq q_\gamma q_\beta q_\delta}{(q^2 + 1)^2 [(k - q)^2 + 1]} \quad (5.32)$$

Удобнее проводить вычисления, умножив этот интеграл сразу на антисимметричные тензоры из (5.31):

$$\frac{\delta^{\gamma\delta}}{2} \varepsilon^{\mu\alpha} \varepsilon^{\nu\beta} \varepsilon^{\lambda\gamma} \varepsilon^{\sigma\delta} \int \frac{dk k_\alpha k_\lambda k_\sigma k^\beta}{(k^2 + 1)^2} \int_0^1 \frac{d\alpha \alpha(1 - \alpha) \Gamma(1 + \varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon)}{[k^2 \alpha(1 - \alpha) + 1]^{1 + \varepsilon}} =$$

$$= -\frac{\varepsilon^{\mu\alpha} \varepsilon^{\nu\beta}}{2} (1 + a\varepsilon) \int_0^1 \frac{d\alpha}{[\alpha(1 - \alpha)]^\varepsilon} \int \frac{dk k_\alpha k_\beta k^2 \Gamma(1 + \varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon)}{(k^2 + 1)^2 \left[ k^2 + \frac{1}{\alpha(1 - \alpha)} \right]^{1 + \varepsilon}} =$$

$$= \frac{\delta^{\mu\nu}}{4} (1 + a\varepsilon)^2 \int_0^1 \frac{d\alpha}{[\alpha(1 - \alpha)]^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{dx x^{2 - \varepsilon} \Gamma(1 + \varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon)}{(x + 1)^2 \left[ x + \frac{1}{\alpha(1 - \alpha)} \right]^{1 + \varepsilon}} =$$

$$= \frac{\delta^{\mu\nu}}{4} (1 + a\varepsilon)^2 \frac{\Gamma(1 + \varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon) \Gamma(3 - \varepsilon) \Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(3 + \varepsilon)} \times$$

$$\times \int_0^1 d\alpha \alpha(1 - \alpha) F(3 - \varepsilon, 1 + \varepsilon; 3 + \varepsilon; 1 - \alpha(1 - \alpha)). \quad (5.33)$$

Поскольку в этом выражении имеется только полюс первой степени, то при вычислении интеграла по  $\alpha$  можно в аргументах гипергеометрической функции положить  $\varepsilon = 0$ . Таким образом, (5.33) перейдет в

$$\frac{1}{4} \frac{1}{2\varepsilon} \delta^{\mu\nu} \int_0^1 d\alpha \alpha(1 - \alpha) \sum_{k=0}^\infty [1 - \alpha(1 - \alpha)]^k =$$

$$= \frac{1}{8\varepsilon} \delta^{\mu\nu} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha(1 - \alpha)}{1 - [1 - \alpha(1 - \alpha)]} = \frac{1}{8\varepsilon} \delta^{\mu\nu} \quad (5.34)$$

В результате для диаграммы 11 имеем

$$\frac{1}{2\varepsilon} S_{iab} S_{jcd} S_{ace} S_{bde} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j. \quad (5.35)$$

Результаты вычислений ультрафиолетовых сингулярностей диаграмм рис.2 сведены в табл.1. При этом использованы обозначения  $S^2_{ad} \equiv S_{abc} S_d^{bc}$ ,  $S^4_{ij} \equiv S_{iab} S_{jcd} S_{ace} S_{bde}$ .

Для того чтобы найти все ультрафиолетовые расходимости в двухпетлевом приближении, необходимо еще учесть вклад от диаграмм, к кото-

Таблица 1

Номер диаграммы	Ультрафиолетовые сингулярности диаграмм
1	$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) R_{abci} R^{abc}{}_j \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
2	$-\frac{1}{12} \frac{1}{\varepsilon^2} \{ 2R_{ai} R^a{}_j + 3R_{abci} R^{abc}{}_j \} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
3	$-\frac{1}{6} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon} \right) R_i{}^{ab}{}_j R_{ab} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
4	$-\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{a-1}{\varepsilon} \right) R_{ab} S_i{}^{ac} S_j{}^b{}_c \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
5	$-\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{a}{\varepsilon} \right) R_{abcd} S^{ab}{}_i S^{cd}{}_j \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
6	$\frac{1}{24} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{a}{\varepsilon} \right) \{ 6R_{ia} S^2{}_j{}^a + 2R_{ab} S_i{}^{ac} S_j{}^b{}_c + 9R_{abci} S^{abd} S^c{}_{jd} + 3R_{abcd} S^{ab}{}_i S^{cd}{}_j \} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
7	0
8	$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{a+1}{\varepsilon} \right) R_{abci} S^{abd} S^c{}_{jd} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
9	$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{a}{\varepsilon} \right) R_i{}^{ab}{}_j S^2{}_{ab} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
10	$\left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2a}{\varepsilon} \right) S^4{}_{ij} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
11	$\frac{1}{2\varepsilon} S^4{}_{ij} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$

рым приводят вершины, возникающие от разложения однопетлевого контрчлена.

Помимо контрчлена (5.14) в однопетлевом приближении присутствует расходящаяся поправка к массовому члену (5.3)

$$\Delta S_m = \frac{1}{\epsilon} \frac{m^2}{6} \int R_{ij} \Phi^i \Phi^j, \tag{5.36}$$

возникающая при спаривании квантовых полей во втором слагаемом формулы (5.4). Для однопетлевого ультрафиолетового контрчлена эта поправка несущественна, поскольку она обращается в нуль при снятии инфракрасной регуляризации ( $m \rightarrow 0$ ). Однако разложение (5.36) по степеням квантового поля приводит к диаграммам, конечная часть которых пропорциональна  $1/m^2$ . Так как в выражении (5.36) содержится полюс по  $\epsilon$ , то вклад этих диаграмм следует учитывать при вычислении контрчленов к действию (5.1) в старших порядках теории возмущений.

Поскольку (5.14) и (5.36) получены в однопетлевом приближении (т.е. пропорциональны первой степени  $\hbar$ ), то для получения их вклада в двухпетлевой контрчлен требуется разложить их до членов второго порядка по  $\xi$ :

$$\Delta S^{(2)} + \Delta S_m^{(2)} = \frac{1}{2\epsilon} \int \left\{ \mathcal{R}_i^j R_{jklm} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^m \xi^k \xi^l + \mathcal{R}_i^j D_\mu \xi^i D^\mu \xi^j + \frac{m^2}{4} R_{ij} \xi^i \xi^j \right\}. \tag{5.37}$$

Генерируемые с помощью вершин (5.37) диаграммы изображены на рис.3, а их вклады в двухпетлевой контрчлен выписаны в табл.2.

Обратим внимание на то, что получающиеся расходящиеся поправки образуют контрчлен только к симметричной части действия (5.1), а расходящихся структур, которые служили бы поправкой к тензору  $B_{ij}$ , нет. Этот факт является следствием выбора специального класса полевых

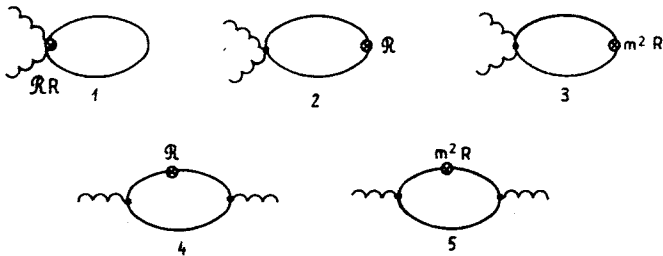


Рис.3. Диаграммы, полученные при разложении однопетлевого контрчлена, которые дают вклад в двухпетлевой контрчлен



Номер диаграммы	Ультрафиолетовые сингулярности
1	$\frac{1}{2\varepsilon^2} \{R_{ia} R_j^a - R_{ia} S_j^{2a}\} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
2	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \{R_i^{ab} R_{ab} - R_i^{ab} S_j^{2ab}\} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
3	$\frac{1}{6\varepsilon} R_i^{ab} R_{ab} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
4	$\left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{a}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} \right) \{R_{ab} S_i^{ac} S_j^b{}_c - 2S^4{}_{ij}\} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$
5	$\frac{1}{6\varepsilon} R_{ab} S_i^{ac} S_j^b{}_c \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^j$

многообразий (2.21), для которого, как показано в работе [36], антисимметричная часть действия (5.1) не перенормируется.

Суммируя результаты, приведенные в табл. 1 и 2, получим

$$T_{(2)ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \mathfrak{R}_{abci} \mathfrak{R}^{abc}{}_j + \mathfrak{R}_i{}^{ab}{}_j S^2{}_{ab} + \frac{a}{4} \left\{ -R_{abci} S^{abd} S^c{}_{jd} - R_{abcd} S^{ab}{}_i S^{cd}{}_j + \right. \\ \left. + 2R_{ia} S_j^{2a} + 6R_{ab} S_i^{ac} S_j^b{}_c + 2R_i{}^{ab}{}_j S^2{}_{ab} \right\}, \quad (5.38)$$

$$T_{(2)ij}^{(2)} = \frac{1}{3} \left( R_{ia} R_j^a + R_i{}^{ab}{}_j R_{ab} \right) - \frac{1}{4} \left( R_i{}^{ab}{}_j S^2{}_{ab} + R_{ia} S_j^{2a} \right) + \\ + \frac{3}{4} R_{ab} S_i^{ac} S_j^b{}_c - \frac{1}{8} R_{abci} S^{abd} S^c{}_{jd} - \frac{1}{8} R_{abcd} S^{ab}{}_i S^{cd}{}_j - S^2{}_{ij}. \quad (5.39)$$

Ограничения (2.21), накладываемые на полевое многообразие, позволяют получить ряд соотношений между геометрическими структурами и упростить выражения для контрчленов (38), (39). Для этого умножим формулу (2.22) на  $G^{ij} G^{ns} G^{km} G^{lt}$ . В результате получим связь

$$R_{si} R_t^i + R_s{}^{ik}{}_t R_{ik} = 0. \quad (5.40)$$

Умножим также соотношение (2.23) на  $S^{pqs}$ . Сворачивая затем индексы  $m = n, q = k, s = l$ , придем к связи

$$R_{in} S^2{}^n{}_p = R_{jkli} S^{jkn} S^l{}_{pn}. \quad (5.41)$$

Другие способы сворачивания индексов:  $p = n, q = k, s = l$  и  $m = n, q = k, p = i$  дают, соответственно,

$$R_m^{in} S_{jn}^2 = -R_{jlm} S^{jkn} S^l_{in}, \quad (5.42)$$

$$2R_{ik} S_l^{in} S_s^k = R_{ikml} S^{ikn} S^m_{sn} + R_{ikjm} S^{ik} S^j_{ms}. \quad (5.43)$$

С учетом формул (5.40) — (5.43) двухпетлевой контрчлен приобретает вид

$$T_{(2)ij}^{(1)} = \frac{1}{2} R_{abci} R^{abc}{}_j S^2_{ab} + 3S^4_{ij} + aR_{ab} S_i^{ac} S_j^b{}_c, \quad (5.44)$$

$$T_{(2)ij}^{(2)} = R_{ab} S_i^{ac} S_j^b{}_c - 2S^4_{ij}. \quad (5.45)$$

Вспоминая выражение (5.14) для однопетлевого контрчлена, а также тот факт, что  $T_{[ij]}^{(1)} = 0$ , нетрудно убедиться, что (5.45) удовлетворяет плюскому уравнению (3.14) для коэффициента при двойном полюсе в двухпетлевом контрчлене.

Обсудим теперь зависимость  $T_{(2)ij}^{(1)}$  от произвольного коэффициента  $a$ , входящего в определение свертки двух  $(2 - 2\epsilon)$ -мерных антисимметричных тензоров (5.29). Как было замечено в работе [39], вклад в  $\beta$ -функцию этого слагаемого совпадает со схемно-зависимым произволом двухпетлевой  $\beta$ -функции, которая в полной аналогии с двухпетлевыми  $\beta$ -функциями обычных многозарядных ренормируемых теорий поля зависит от схемы устранения расходимостей.

Указанная неоднозначность  $\beta_{(2)}^G$  в рассматриваемом случае связана с конечным произволом в определении однопетлевого контрчлена

$$\Delta T_{(1)ij} = b_1 R_{ij} + b_2 S^2_{ij}, \quad (5.46)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  - произвольные постоянные, соотношением

$$\Delta \beta_{(2)ij}^G = \int d^D \varphi \sqrt{G} \left\{ \left( \Delta T_{(1)kn} \frac{\delta}{\delta G^{kn}} \right) \beta_{(1)ij}^G - \left( \beta_{(1)kn}^G \frac{\delta}{\delta G^{kn}} \right) \Delta T_{(1)ij} \right\}. \quad (5.47)$$

Здесь производная по метрике понимается как производная вдоль направления в пространстве метрик, задаваемого однопетлевой поправкой к метрике вида (5.46). Легко заметить, что для рассматриваемого класса полевых многообразий

$$\frac{\delta}{\delta G^{kn}} R_{ij} = 0, \quad (5.48)$$

т.к. приращение тензора Риччи выражается через приращения символов Кристоффеля

$$\delta \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} G^{ad} \{ (\delta G_{bd})_{;c} + (\delta G_{dc})_{;b} - (\delta G_{bc})_{;d} \}, \quad (5.49)$$

которые в направлении (5.46) равны нулю в силу (2.21). В результате из (5.47) следует, что

$$\Delta \beta_{(2)ij}^G = 2(b_1 + b_2) R_{ab} S_i^{ac} S_j^b{}^c. \quad (5.50)$$

Таким образом, произвол в выборе параметра  $a$  может быть полностью скомпенсирован в рассматриваемом приближении неоднозначностью  $\beta$ -функции.

Следует, однако, отметить, что с практической точки зрения значение параметра  $a = 0$  является во многих отношениях предпочтительным [41, 45]. При  $a = 0$  имеет место явное сохранение суперсимметрии в вычислениях  $\beta$ -функций в суперсимметричных моделях [40, 47]. Известные доказательства конечности теории на параллелизуемых многообразиях [29] также используют это значение параметра  $a$ .

Выпишем теперь окончательный ответ для  $\beta$ -функций рассматриваемой модели в двухпетлевом приближении:

$$\beta_{ij}^G = -\frac{1}{4\pi} \mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \mathcal{R}_{abci} \mathcal{R}^{abc}{}_j + 2\mathcal{R}_i{}^{ab}{}_j S^2{}_{ab} \right), \quad (5.51)$$

$$\beta_{ij}^B = 0.$$

Напомним, что этот ответ получен для специального класса моделей, пространства-мишени которых удовлетворяют условию (2.21). Для теорий с произвольными римановыми полевыми многообразиями сохраняется та же структура ответа:

$$\beta_{ij}^G = -\frac{1}{4\pi} \mathcal{R}_{(ij)} - \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \mathcal{R}_{abc(i} \mathcal{R}^{abc}{}_{j)} + 2\mathcal{R}_{(i}{}^{ab}{}_{j)} S^2{}_{ab} \right), \quad (5.52)$$

$$\beta_{ij}^B = -\frac{1}{4\pi} \mathcal{R}_{[ij]} - \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \mathcal{R}_{abc[i} \mathcal{R}^{abc}{}_{j]} + 2\mathcal{R}_{[i}{}^{ab}{}_{j]} S^2{}_{ab} \right).$$

При этом вклад в  $\beta_{ij}^B$  дают антисимметричные выражения, пропорциональные ковариантным производным от тензора кручения.

Видно, что  $\beta$ -функции обращаются в нуль лишь для параллелизуемых многообразий (многообразий, для которых выполняется условие (3.15)).

Как уже говорилось, параллелизуемые пространства-мишени сигма-моделей являются групповыми многообразиями [25]. Заметим, что они удовлетворяют условиям (2.21).

Соответствующие геометрические объекты полупростых групп Ли выражаются через структурные константы  $f_{abc}$ :

$$\begin{aligned} S_{abc} &= \eta f_{abc}, \quad R_{abcd} = f_{ab}{}^e f_{cde}, \\ \mathcal{R}_{abcd} &= (1 - \eta^2) f_{ab}{}^e f_{cde}, \\ \mathcal{R}_{abcd} &= 0 \text{ при } \eta^2 = 1, \quad f_{acd} f_b{}^{cd} = c_A \delta_{ab}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

В результате (5.51) примет вид

$$\beta_{ab}^G = -\frac{1}{4\pi} (1 - \eta^2) c_A \delta_{ab} - \frac{1}{(4\pi)^2} (1 - \eta^2) (1 - 3\eta^2) c_A^2 \delta_{ab}. \quad (5.54)$$

Для групповых многообразий  $\beta$ -функция вычислена также и в следующем порядке [48]:

$$\beta_{(3)ab}^G = -\frac{1}{(4\pi)^3} (1 - \eta^2) \left[ 4 - \frac{11}{3} (1 - \eta^2) - \frac{5}{6} (1 - \eta^4) \right] c_A^3 \delta_{ab}. \quad (5.55)$$

До четырехпетлевого приближения известна  $\beta$ -функция бозонной сигма-модели без члена Весса — Зумино [49]. Эти выражения, однако, не имеют такого принципиального значения, как соответствующие результаты в суперсимметричной модели (см. разд. 7).

## 6. ИНФРАКРАСНЫЕ РАСХОДИМОСТИ И ИНФРАКРАСНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА

Несмотря на то, что обобщенные нелинейные  $\sigma$ -модели, соответствующие струнным теориям, формулируются на компактном мировом листе [1] и, в силу этого, должны быть инфракрасно-конечны, проблема инфракрасных расходимостей оказывается весьма нетривиальной. Поскольку УФ-свойства теории не зависят от глобальных свойств мировой поверхности [16], то вычисление обобщенных  $\beta$ -функций обычно проводится в рамках  $\sigma$ -моделей на бесконечной плоскости [6]. В этом случае приходится иметь дело с безмассовыми теориями, чье инфракрасное поведение следует рассматривать с большой осторожностью [50].

При вычислении  $\beta$ -функций в высших порядках теории возмущений в плоском бесконечном двумерном пространстве-времени мы сталкиваемся с проблемой инфракрасных расходимостей фейнмановских интегралов. Они являются характерной особенностью двумерного пространства. Действительно, уже свободный пропагатор безмассовой частицы, который в импульсном представлении, как обычно, имеет вид  $i/p^2$ , расходит-

ся в координатном представлении. Это следует из выражения для фурье-образа в  $d$ -мерном пространстве

$$D_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ipx} \frac{1}{p^2} d^d p = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{\pi^{d/2} \Gamma(d/2 - 1) 4^{d/2-1}}{[x^2]^{d/2-1}}. \quad (6.1)$$

Как видно из уравнения (6.1),  $D_0(x)$  инфракрасно расходится при  $d = 2$ . Более строгий анализ проблемы [50] позволяет выявить причину этой трудности, которая состоит в неоднозначности определения безмассового пропагатора и некорректности выбора его в виде  $1/p^2$  при  $d = 2$ . Действительно, безмассовый пропагатор удовлетворяет уравнению  $p^2 D(p^2) = 1$ , чье общее решение есть

$$D(p^2) = \frac{1}{p^2} + c \delta^{(d)}(p).$$

При  $d > 2$  константа интегрирования фиксируется ( $c = 0$ ) из условия убывания пропагатора на больших расстояниях. Однако она может быть также выбрана так, чтобы обеспечить существование предела  $d \rightarrow 2$ . Как мы покажем в дальнейшем, это свойство может быть эффективно использовано для получения инфракрасно-конечных результатов.

При анализе ультрафиолетовых расходимостей фейнмановских диаграмм инфракрасные расходимости типа (6.1) приводят к двум следствиям. Во-первых, диаграммы, которые УФ-конечны (или становятся таковыми после применения  $R$ -операции), могут инфракрасно расходиться. Это приведет к путанице, если те и другие расходимости проявляются одинаково (например, в виде полюсов по  $\epsilon$  в размерной регуляризации). Во-вторых, УФ-расходящиеся диаграммы могут оказаться конечными в результате взаимного сокращения ультрафиолетовых и инфракрасных расходимостей. Все это требует регуляризации и выделения инфракрасных расходимостей.

Простейшим способом ИК-регуляризации является регуляризация путем введения массы в свободный пропагатор, т.е. замены

$$\frac{1}{p^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (6.2)$$

с последующим устремлением  $m$  к нулю. Замена такого рода производится во всех инфракрасно-расходящихся интегралах и является формальной процедурой, направленной на выделение ИК-сингулярностей. И хотя при этом в каждом интеграле возникает логарифмическая зависимость от массы, в силу сокращения инфракрасных расходимостей в окончатель-

ных ответах эта зависимость является несущественной, и предел  $m \rightarrow 0$  существует.

При замене (6.2) функция  $D_m(x)$  (6.1) уже не является сингулярной при  $d = 2$ . Снимается также проблема взаимной интерференции ИК- и УФ-расходимостей. Однако такая подстановка является формальной и не учитывает возможного появления новых структур, пропорциональных  $m^2$ . Более последовательный подход основан, как отмечалось выше, на введении массового слагаемого непосредственно в лагранжиан (5.5), и сопровождается перенормировкой метрики  $G$  и квантовых полей  $\xi$ . Недостатком такой процедуры является то, что замена типа (6.2) существенно усложняет многопетлевые расчеты. При наличии массы диаграммы Фейнмана не являются более однородными функциями внешнего импульса, а содержат сложную зависимость типа гипергеометрической функции (5.26). В высших порядках теории возмущений это приводит к непреодолимым трудностям при вычислении интегралов.

Другой, гораздо более элегантный способ борьбы с ИК-расходимостями основан на процедуре ИК-перенормировок, т.н.  $\tilde{R}$ -операции [51], которая дополняет стандартную УФ  $R$ -операцию соответствующим вычитанием ИК-расходимостей. Эта процедура строится по аналогии с УФ-перенормировками и позволяет получить ИК-конечные результаты путем введения ИК-контрчленов. При этом практические вычисления проводятся в теории с безмассовыми пропагаторами, что позволяет применять современные методы многопетлевых вычислений, существенно облегчая процедуру вычисления интегралов. Мы рассмотрим ниже  $\tilde{R}$ -операцию в формализме размерной регуляризации.

Аналогично тому, как УФ-расходимости связаны с сингулярностью на малых расстояниях и могут быть устранены локальными контрчленами в  $x$ -пространстве, ИК-расходимости связаны с сингулярностями на больших расстояниях, или малых импульсах, и могут быть устранены локальными контрчленами в  $p$ -пространстве. ИК-перенормировка состоит в добавлении таких локальных контрчленов. Так, например, в случае свободного пропагатора добавление ИК-контрчлена сводится к замене

$$\frac{1}{p^2} \rightarrow \frac{1}{p^2} + \frac{c}{\epsilon} \delta^{(2)}(p), \quad (6.3)$$

где  $\epsilon = \frac{d-2}{2}$ . Константа определяется из условия конечности интегрирования модифицированного пропагатора с любой гладкой функцией. Так, подставляя выражение (6.3) в фурье-интеграл (6.1), имеем

$$\int d^{2-2\epsilon} p e^{ipx} \left[ \frac{1}{p^2} + \frac{c}{\epsilon} \delta(p) \right] = i\pi \left[ \frac{\Gamma(-\epsilon)}{(x^2)^{-\epsilon}} + \frac{c}{\epsilon} \right].$$

Откуда следует  $c = 1$ . Как было сказано выше, такого рода замена соответствует произволу в решении волнового уравнения для безмассовой частицы при  $d = 2$ .

В многопетлевых вычислениях часто встречаются пропагаторы типа  $1/(p^2)^{1+l\epsilon}$ , где  $l = 1, 2, \dots$ . В этом случае ИК-контрчлен имеет вид

$$\frac{1}{p^2} \rightarrow \frac{1}{p^2} + \frac{1}{l+1} \frac{1}{\epsilon} \delta(p), \quad (6.4)$$

что также приводит к ИК-конечным результатам. После применения ИК  $\tilde{R}$ -операции уже можно пользоваться стандартными формулами размерной регуляризации для вычисления УФ-расходимостей. Например, для безмассового интеграла типа «головастик» имеем

$$I = \int \frac{d^{2-2\epsilon}}{p^2} \rightarrow \int d^{2-2\epsilon} p \left[ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{\epsilon} \delta(p) \right] = \frac{1}{\epsilon},$$

так что весь вклад идет от ИК-контрчлена.

Приведенный пример является частным случаем  $\tilde{R}$ -операции, которая позволяет, поддиаграммно выделяя ИК-расходящиеся подграфы, получать ИК-конечные выражения. При этом ИК  $\tilde{R}$ -операция действует факторизованно с УФ  $R$ -операцией, что означает, что выделение ИК-расходимостей необходимо проводить и во всех диаграммах, возникающих при вычитании УФ-расходящихся подграфов [51].

Здесь уместно еще раз подчеркнуть, что при вычислении  $\beta$ -функций или УФ-контрчленов в высших порядках теории возмущений можно действовать двумя эквивалентными способами.

Первый и более прямой способ, рассмотренный нами выше, состоит в том, что при вычислении, например, двухпетлевого контрчлена, нужно произвести разложение по фоновому полю как исходного лагранжиана, так и однопетлевого контрчлена [32, 34]. После этого вычисляются все получившиеся диаграммы, и сингулярная часть с обратным знаком дает нам искомый двухпетлевой контрчлен. При этом дополнительные диаграммы, возникающие из разложения однопетлевого контрчлена, осуществляют вычитание расходимостей в подграфах, так что двухпетлевые сингулярности имеют локальный вид. Такой способ вычисления  $\beta$ -функции использовался нами в предыдущем разделе.

Второй способ основан на формализме  $R$ -операции. В этом случае разложение по фоновому полю производится только для самого лагран-

жиана, а при вычислении диаграмм необходимо «вручную» осуществлять вычитание всех расходящихся подграфов согласно правилам  $R$ -операции. При этом вклад в контрчлен идет от сингулярной части каждой диаграммы с вычтенными подрасходимостями, которую также нужно взять с обратным знаком, т.е. для каждой сильносвязной диаграммы  $\Gamma$  контрчлен  $K$  имеет вид [52]:

$$K = - K R' \Gamma,$$

где  $K$  означает сингулярную часть,  $R'$  — неполную  $R$ -операцию без последнего вычитания. Несмотря на кажущуюся сложность второго способа действий, он иногда является более предпочтительным, поскольку в этом случае не возникают дополнительные диаграммы, число которых в высших петлях очень велико и быстро растет с порядком теории возмущений.

Комбинирование УФ и ИК  $R$ -операций позволяет получить конечный ответ для каждой диаграммы. Рассмотрим для иллюстрации пример применения полной  $R^*$ -операции к вычислению следующей диаграммы (см. рис.4), где черта на линии означает производную (импульс).

Рис.4. Пример диаграммы, содержащей как ультрафиолетовые, так и инфракрасные расходимости. Черта на линии означает производную (импульс)

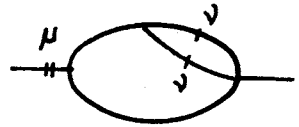


Диаграмма содержит один УФ-расходящийся подграф. Результат применения обычной УФ  $R$ -операции имеет вид



где мы подразумеваем в дальнейшем минимальную схему вычитаний. Что касается ИК-расходимостей, то ИК-расходящимися являются два подграфа: нижний пропагатор без производных и верхний пропагатор вместе с УФ-расходящимся блоком. Поэтому результат применения  $R^*$ -операции будет иметь вид



где тильда на линии означает ИК-вычтенный пропагатор.





вами многообразия  $M$ . Так, например,  $N = 4$  суперсимметричные  $\sigma$ -модели, формулируемые на гиперкэлеровых многообразиях, в силу их геометрической природы оказываются конечными во всех порядках теории возмущений [54,55,56].

Пусть  $M$  есть  $n$ -мерное риманово многообразие с метрикой  $G_{ij}$ . Тогда двумерная  $N = 1$  суперсимметричная  $\sigma$ -модель без кручения со скалярными полями, принимающими значения в  $M$ , дается лагранжианом [57]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} G_{ij}(\varphi) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j + \frac{i}{2} G_{ij}(\varphi) \bar{\psi}^i \gamma^\mu D_\mu \psi^j + \frac{1}{12} R_{ijkl} \bar{\psi}^i \psi^k \bar{\psi}^j \psi^l, \quad (7.1)$$

$$D_\mu \psi^i = \partial_\mu \psi^i + \Gamma_{jk}^i \partial_\mu \varphi^j \psi^k, \quad \gamma^0 = \sigma_2, \quad \gamma^1 = \sigma_1,$$

где  $\Gamma_{jk}^i$  есть кристоффелева связность,  $R_{ijkl}$  — тензор Римана. Поля  $\psi^i$  являются двухкомпонентными майорановскими спинорами. Преобразования суперсимметрии имеют вид

$$\delta \varphi^i = \bar{\varepsilon} \psi^i, \quad \delta \psi^i = -i \hat{\partial} \varphi^i \varepsilon - \Gamma_{jk}^i (\bar{\varepsilon} \psi^j) \psi^k. \quad (7.2)$$

Лагранжиан (7.1) может быть также записан в терминах двумерного действительного суперполя  $\Phi^i = \varphi^i + \bar{\theta} \psi^i + 1/2 \bar{\theta} \theta F$ , где  $\theta$  есть действительный двухкомпонентный грассманов параметр. Лагранжиан (7.1) является прямым обобщением чисто бозонного действия (2.1) без кручения:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \int d^2\theta G_{ij}(\Phi) \bar{D}^\alpha \Phi^i D_\alpha \Phi^j, \quad D_\alpha \Phi^i = \left( \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i(\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \Phi^i, \quad (7.3)$$

где преобразование суперсимметрии имеет вид

$$\delta \Phi^i = \bar{\varepsilon}_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i(\hat{\partial} \theta)^\alpha \right) \Phi^i. \quad (7.4)$$

Лагранжиан (7.3) допускает естественное обобщение и на случай наличия кручения [25]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \int d^2\theta [G_{ij}(\Phi) \bar{D}^\alpha \Phi^i D_\alpha \Phi^j + H_{ij}(\Phi) \bar{D}^\alpha \Phi^i \gamma_{\alpha\beta}^3 D_\beta \Phi^j], \quad (7.5)$$

что соответствует лагранжиану в компонентах вида (7.1).

Отметим, что двумерная суперсимметрия, реализованная на действительном (а не киральном) суперпространстве, не накладывает каких-либо ограничений на риманово многообразие  $M$ . Более того, суперсимметричные преобразования (7.2), (7.4) коммутируют с преобразованиями репараметризации  $M$ . В этом состоит отличие от четырехмерной теории, где условие киральности  $N = 1$  суперсимметрии естественным

образом приводит к необходимости кэлеровой структуры для  $M$ . Такая четырехмерная теория при размерной редукции переходит в  $N = 2$  суперсимметричную модель в двух измерениях. Для того чтобы лагранжиан (7.1), (7.3) обладал расширенной  $N = 2$  суперсимметрией, необходимо [58], чтобы многообразие  $M$  являлось кэлеровым, т.е., чтобы существовал тензор (комплексная структура), удовлетворяющий условию

$$\begin{aligned} f^i_k f^k_j &= -\delta^i_j, \\ G_{ij} f^i_k f^j_l &= G_{kl}, \\ \nabla_i f^j_k &= 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Уравнения (7.6) означают, что многообразие  $M$  является комплексным и может быть описано в терминах комплексных координат  $(z^\alpha, \bar{z}^{\bar{\beta}})$ . В этих координатах комплексная структура  $f^i_j$  является просто  $f^\alpha_\beta = i\delta^\alpha_\beta$ ,  $f^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} = -i\delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}$ ,  $f^\alpha_{\bar{\beta}} = f^{\bar{\alpha}}_\beta = 0$ , а метрический тензор записывается как  $G_{\alpha\bar{\beta}}$ , так что

$$d^2s = G_{ij} dx^i \times dx^j = 2G_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \times d\bar{z}^{\bar{\beta}}.$$

При этом  $\nabla_i(G_{kj} f^k_i) = 0$  и кэлерова форма  $J$ , определяемая равенством

$$J = \frac{1}{2} G_{kj} f^k_i dx^i \wedge dx^j = iG_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}},$$

является точной:  $dJ = 0$ . Это эквивалентно следующим условиям на метрический тензор:

$$\partial_\gamma G_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha G_{\gamma\bar{\beta}}, \quad \partial_{\bar{\gamma}} G_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_{\bar{\beta}} G_{\alpha\bar{\gamma}},$$

что означает, что  $G_{\alpha\bar{\beta}}$  может быть записан как

$$G_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^{\bar{\beta}}} K(z, \bar{z}),$$

где  $K$  есть т.н. кэлеров потенциал.

На кэлеровых многообразиях стандартные формулы римановой геометрии заметно упрощаются. Так, единственными ненулевыми компонентами связности  $\Gamma^i_{jk}$  являются  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = G^{\alpha\bar{\rho}} \partial_\beta G_{\gamma\bar{\rho}}$  и их сопряженные, а тензоры Римана и Риччи имеют вид

$$R^\mu_{\nu\bar{\rho}\rho} = \partial_{\bar{\rho}} \Gamma^\mu_{\nu\rho}, \quad R_{\mu\bar{\mu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\mu}} \ln \det G_{\nu\bar{\nu}} = R^\lambda_{\mu\bar{\mu}\lambda}.$$

В терминах кэлерова потенциала тензор Римана записывается как

$$R_{\mu\bar{\mu}\nu\bar{\nu}} = K_{\mu\bar{\mu}\nu\bar{\nu}} - K^{\rho\bar{\rho}} K_{\mu\nu\bar{\rho}} K_{\rho\bar{\rho}\nu\bar{\nu}},$$

где использованы следующие обозначения:

$$K_{\mu\nu\dots\bar{\mu}\bar{\nu}\dots} \equiv \partial_{\mu} \partial_{\nu} \dots \partial_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} \dots K(z, \bar{z}).$$

Дальнейшее расширение суперсимметрии до  $N = 3$  требует введения двух независимых кэлеровых структур  $f_j^{(1)i}$  и  $f_j^{(2)i}$ , удовлетворяющих условию [59]:

$$f_k^{(a)i} f_j^{(b)k} + f_k^{(b)i} f_j^{(a)k} = -2\delta_j^i \delta^{ab}, \quad a = 1, 2.$$

Следует отметить, что  $N = 3$  суперсимметрия автоматически ведет и к  $N = 4$ , поскольку наличие двух тензорных структур  $f^{(1)}$  и  $f^{(2)}$  означает, что их произведение  $f_j^{(3)i} = f_k^{(1)i} f_j^{(2)k}$  также является независимой тензорной структурой. Однако  $N = 4$  является максимальной расширенной суперсимметрией в двух измерениях. Причина состоит в том, что для неприводимых многообразий любой ковариантно-постоянный тензор, каким является тензорная структура  $f_j^i$ , инвариантен относительно группы голономий  $H$  [60]. А для действительных неприводимых представлений группы голономий существуют лишь две нетривиальные возможности: комплексные числа (в этом случае единственная комплексная структура играет роль мнимой единицы) или кватернионы (при этом три структуры  $f^{(a)}$ ,  $a = 1, 2, 3$  представляют собой три мнимые единицы). Первый случай соответствует  $N = 2$  суперсимметрии и группа голономии многообразия с  $2n$  действительными измерениями равна  $H = U(n)$ , причем многообразие является кэлеровым. Вторым случаем отвечает  $N = 4$  суперсимметрии, и группа голономии многообразия  $4n$  действительных измерений является подгруппой  $U(2n)$  и равна  $H = Sp(n)$ . Многообразие в этом случае называется гиперкэлеровым.

Ситуация с ультрафиолетовыми расходимостями в суперсимметричных  $\sigma$ -моделях во многом схожа с рассмотренной выше бозонной  $\sigma$ -моделью.

$N = 1$  суперсимметрия. Поскольку в  $N = 1$  суперсимметричной теории (7.3) суперполе  $\Phi$  ничем не ограничено, то можно непосредственно использовать обычный метод фонового поля в нормальных координатах, что приводит к весьма эффективной технике вычисления контрчленов как вне, так и на массовой поверхности (т.е. при учете уравнений движения для фоновых полей). Результат имеет явно репараметризационно-инвариантный вид.

При использовании правил Фейнмана в суперпространстве алгебра ковариантных производных вместе с интегрированием по грассмановым параметрам  $\theta_\alpha$  приводит к обычным импульсным интегралам. В реальных вычислениях обычно используется суперсимметричная размерная регуляризация (размерная редукция) и минимальная схема вычитаний. При этом суперсимметричная алгебра ковариантных производных осуществляется в пространстве двух измерений, а получающиеся фейнмановские интегралы вычисляются в формализме размерной регуляризации в  $2 - 2\epsilon$  измерениях. Такая процедура, хотя и содержит в себе известную несогласованность, однако не приводит к противоречиям в низших порядках теории возмущений и позволяет сохранить суперсимметрию на всех этапах вычислений. Подсчет степеней расходимости диаграмм в суперпространстве ( $[\int d^2x d^2\theta] = -1$ ,  $[\Phi] = 0$ ,  $[D_\alpha] = 1/2$ ) приводит к выводу, что в любом порядке теории возмущений имеются только логарифмические расходимости. Более того, контрчлены соответствуют локальным структурам размерности 1 и имеют вид поправки к метрике  $G_{ij}(\Phi)$ , воспроизводя структуру исходного лагранжиана по производным:

$$\frac{1}{4} T_{ij}(\Phi) D_\alpha \Phi^i D^\alpha \Phi^j. \quad (7.7)$$

Соответствующая (7.7) перенормировка метрики имеет стандартный вид (3.3).

Разложение по нормальным координатам в методе фонового поля здесь полностью аналогично бозонному случаю (5.2). Поскольку нас интересует  $\beta$ -функция на массовой поверхности, мы опускаем ниже члены, пропорциональные уравнениям движения. Тогда имеет место следующее разложение по квантовым полям [28] ( $d^4z = d^2x d^2\theta$ ):

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{4} \int d^4z G_{ij} \nabla_\alpha \xi^i \nabla^\alpha \xi^j + \frac{1}{4} \int d^4z R_{ikmj} D_\alpha \Phi^i D^\alpha \Phi^j \xi^k \xi^m, \\ S^{(3)} &= \frac{1}{12} \int d^4z R_{ikmj;n} D_\alpha \Phi^i D^\alpha \Phi^j \xi^k \xi^m \xi^n + \frac{1}{3} \int d^4z R_{ikmj} D_\alpha \Phi^i \nabla_\alpha \xi^j \xi^k \xi^m, \\ S^{(4)} &= \frac{1}{48} \int d^4z (R_{ikhj;mn} + 4R^p{}_{khi} R_{pmnj}) D_\alpha \Phi^i D^\alpha \Phi^j \xi^k \xi^h \xi^m \xi^n + \\ &+ \frac{1}{8} \int d^4z R_{ikhj;m} D_\alpha \Phi^i \nabla_\alpha \xi^j \xi^k \xi^h \xi^m + \frac{1}{12} \int d^4z R_{ikhj} \nabla_\alpha \xi^i \nabla_\alpha \xi^j \xi^k \xi^h + \dots, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где  $\Phi$  и  $\xi$  суть фоновое и квантовое суперполя соответственно. Ковариантная производная определяется как

$$\nabla_{\alpha} \xi^i \equiv D_{\alpha} \xi^i + \Gamma_{jk}^i D_{\alpha} \Phi^k \xi^j. \quad (7.9)$$

Для вычисления диаграмм необходимо теперь найти соответствующие уравнению (7.8) суперполевые правила Фейнмана. Из квадратичной части действия мы получаем стандартные квантовые пропагаторы, если, как и в бозонном случае, перейти к касательному пространству:

$$\xi^a = e_j^a(\Phi) \xi^j,$$

так что

$$\nabla_{\alpha} \xi^a \equiv (D_{\alpha} - i\Gamma_{\alpha}) \xi^a = D_{\alpha} \xi^a + \omega_j^{ab} D_{\alpha} \Phi^j \xi^b. \quad (7.10)$$

Тогда получаем

$$\frac{1}{4} \int d^4z G_{ij} \nabla_{\alpha} \xi^i \nabla^{\alpha} \xi^j = \frac{1}{4} \int d^4z \nabla_{\alpha} \xi^a \nabla^{\alpha} \xi^a.$$

Как следует из (7.8), (7.10), кристоффелева связность  $\Gamma_{jk}^i$  явным образом входит только в ковариантную спинорную производную. Поэтому, аналогично тому, как это происходит в бозонном случае, она не дает вклад в контрчлены, и в вычислениях мы можем использовать обычную алгебру ковариантных производных ( $D$ -алгебру) в плоском пространстве, а потом ковариантизировать результат. В этом случае пропагатор квантовых полей берется в обычном виде [61]:

$$\langle \xi^a(z) \xi^b(z') \rangle = -\delta^{ab} {}^{-1}D^2 \delta^2(x-x') \delta^2(\theta-\theta'),$$

где грассманова  $\delta$ -функция равна  $\delta(\theta-\theta') = (\theta-\theta')^2$ , а в вершинах разложения (7.8) ковариантная производная  $\nabla_{\alpha} \xi^a$  заменяется на  $D_{\alpha} \xi^a$ .

$D$ -алгебра в суперграфах осуществляется, как обычно, интегрированием спинорных производных по частям, для того чтобы свести их число в каждой петле до двух. В противном случае диаграмма оказывается равной нулю. Задача состоит в том, чтобы убрать все ковариантные производные, исходящие как от пропагатора, так и от вершин, с одной из линий, последовательно уменьшая их число. В этом случае на линии остается только лишь грассманова  $\delta$ -функция, и интеграл тривиально вычисляется согласно правилам грассманова интегрирования:

$$\int d\theta_{\alpha} = 0, \quad \int \theta_{\alpha} d\theta_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

При этом используются следующие тождества [61]:

$$\begin{aligned}
 \{D_\alpha, D_\beta\} &= 2i\delta_{\alpha\beta}, & [D_\alpha, \partial_{\beta\gamma}] &= [\partial_{\alpha\beta}, \partial_{\gamma\delta}] = 0, \\
 \partial^{\alpha\beta} \partial_{\beta\gamma} &= \delta_\gamma^\alpha, & D_\alpha D_\beta &= i\delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta} D^2, \\
 D^\alpha D_\beta D_\alpha &= 0, & D^2 D_\alpha &= -D_\alpha D^2 = i\delta_{\alpha\beta} D^\beta, \\
 (D^2)^2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

С их помощью  $D$ -алгебра в двух измерениях становится очень простой. В результате интегрирования по грассмановым переменным остаются обычные логарифмические расходящиеся фейнмановские интегралы в  $p$ -пространстве.

Рассмотрим для примера суперполевые диаграммы, изображенные на рис.5.

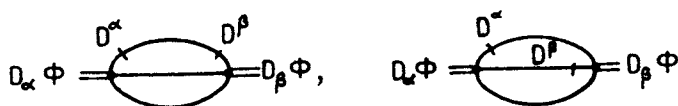


Рис.5. Суперполевые диаграммы в  $N = 1$  суперсимметричной  $\sigma$ -модели. Черта на линии означает спинорную производную

Штрихи на линиях обозначают ковариантные производные  $D_\alpha$ . Соответствующие им выражения генерируются вторым членом в разложении для  $S^{(3)}$  в (7.8) и имеют вид

$$I_1 \propto \int d^2\theta D^\alpha D^2 D_\beta \delta(\theta) D^2 \delta(\theta) D^2 \delta(\theta) \times \text{импульсный интеграл}$$

и

$$I_2 \propto \int d^2\theta D^\alpha D^2 \delta(\theta) D^\beta D^2 \delta(\theta) D^2 \delta(\theta) \times \text{импульсный интеграл.}$$

Наша задача состоит в том, чтобы, используя правила грассманова интегрирования и интегрирование по частям, перебросить все производные с одной из линий диаграммы и выделить  $\delta$ -функцию в чистом виде. Тогда интеграл по  $\theta$  легко вычисляется. С этой целью заметим, что, так как размерность внешних концов равна единице, то все спинорные производные  $D_\alpha$  должны оставаться внутри петель. В противном случае результат будет иметь размерность, не совпадающую с размерностью контрчлена, что означает, что диаграмма будет сходящейся. Производя поэтому интегрирование по частям в одной из вершин второй диаграммы на рис.5 и используя (7.11), сразу находим, что  $I_2 = 1/2 I_1$ .

Для вычисления первого интеграла воспользуемся уравнением (7.11):

$$D^\alpha D^2 D^\beta = -D^\alpha D^\beta D^2 = -i\partial^{\alpha\beta} D^2 + C^{\alpha\beta} (D^2)^2 = -i\partial^{\alpha\beta} + C^{\alpha\beta} \square. \quad (7.12)$$

Первый член в (7.12) путем дальнейшего перебрасывания производных и уменьшения их числа согласно формулам (7.11) приводится к выражению, содержащему слишком мало производных и потому равному нулю. Второй же содержит оператор Лапласа, т.е. квадрат импульса в  $p$ -представлении, который сокращает соответствующий знаменатель в фейнмановском интеграле, что отвечает стягиванию линии в точку. Интеграл по  $\theta$  при этом легко вычисляется, поскольку одна из линий содержит  $\delta$ -функцию без производных. В результате получаем

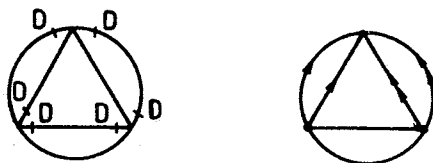
$$I_1 = R \dots R \dots D_\alpha \Phi D^\alpha \Phi \quad \text{[diagram of a figure-eight loop]} \quad = R \dots R \dots D_\alpha \Phi F^\alpha \Phi I^2,$$

где  $I$  есть интеграл типа «головастик», который расходится как ультрафиолетово, так и инфракрасно и требует выделения инфракрасной расходимости, как было показано выше.

Вычисления  $\beta$ -функции  $N = 1$  суперсимметричной  $\sigma$ -модели (7.1), (7.3) проведены в настоящий момент с точностью до четырех петель [62]. В отличие от бозонной  $\sigma$ -модели в суперсимметричном случае двух- и трехпетлевые диаграммы не содержат новых независимых расходимостей. Все интегралы после грасманова интегрирования сводятся к «головастикам» и содержат только старшие полюса по  $\epsilon$ , тем самым не давая вклада в  $\beta$ -функцию. Последняя определяется исключительно однопетлевым вкладом и пропорциональна тензору Риччи.

Первый нетривиальный вклад возникает только в четырехпетлевом приближении [62]. На рис.6 приведен пример суперполевого диаграммы и соответствующей ей после  $\theta$ -интегрирования импульсной диаграммы, дающей вклад в четырехпетлевую  $\beta$ -функцию. Во второй диаграмме стрелки на линиях соответствуют обычным производным или импульсам. После соответствующей  $\theta$ -алгебры и перебрасывания производных

Рис.6. Суперполевая и соответствующая ей импульсная диаграммы, дающие вклад в четырехпетлевую  $\beta$ -функцию в  $N = 1$  суперсимметричной  $\sigma$ -модели. Стрелки на линиях обозначают компоненты импульсов, свернутые друг с другом





возникающий импульсный интеграл имеет вид

$$I_4 = \int d^d k d^d r d^d p d^d q \frac{k(p-k)r(p-r)}{k^2(p-k)^2 r^2(p-r)^2 (p-q)^2 (Q-q)^2}$$

и содержит как УФ- так и ИК-расходимости.

Для извлечения необходимого УФ-контрчлена удобно воспользоваться  $R^*$ -операцией. Заметим для этого, что интересующая нас диаграмма содержит два однопетлевых УФ-расходящихся подграфа (петли, содержащие импульсы на линиях), один двухпетлевой неперекрывающийся подграф и два трехпетлевых перекрывающихся подграфа. Что же касается ИК-расходящихся пропагаторов (линии без импульсов), то воспользуемся для их регуляризации ИК  $\bar{R}$ -операцией [53].

Начнем с однопетлевых расходящихся подграфов. Они легко вычисляются по стандартным формулам размерной регуляризации и равны

$$\begin{aligned} \int d^{2-2\epsilon} k \frac{k(p-k)}{k^2(p-k)^2} &= -\frac{2}{(p^2)^\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma^3(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} = \\ &= -\frac{2}{\epsilon(p^2)^\epsilon} \left[ \exp(-2\zeta(3)\epsilon^3 - 3\zeta(4)\epsilon^4) + O(\epsilon^5) \right] \approx -\frac{2}{\epsilon(p^2)^\epsilon} e^{-2}, \quad (7.13) \end{aligned}$$

где мы вставили дополнительную гамма-функцию  $\Gamma(1-\epsilon)$  и приняли соглашение, что будем указывать в экспоненте только коэффициент перед комбинацией  $\zeta$ -функций:  $\zeta(3)\epsilon^3 + 3/2\zeta(4)\epsilon^4$ , возникающей во всех последующих выражениях.

Вычитая теперь одно- и двухпетлевые расходимости, мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \int d^{2-2\epsilon} p d^{2-2\epsilon} q \left[ -\frac{2}{\epsilon} \frac{e^{-2}}{(p^2)^\epsilon} + \frac{2}{\epsilon} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1}{(p-q)^2} + \frac{1}{\epsilon} \delta(p-q) \right] \left[ \frac{1}{(q-Q)^2} + \frac{1}{\epsilon} \delta(q-Q) \right], \quad (7.14) \end{aligned}$$

где мы добавили также и ИК-контрчлены. Интегрируя по  $p$ , получаем

$$\begin{aligned} 4 \int d^{2-2\epsilon} q \left[ \frac{1}{\epsilon^3} \left( -\frac{2}{3} \frac{e^{-22}}{(q^2)^{3\epsilon}} + \frac{e^{-10} + e^{-4}}{(q^2)^{2\epsilon}} - 2 \frac{e^{-2}}{(q^2)^\epsilon} + 1 \right) - \frac{2}{3\epsilon^3} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1}{(q-Q)^2} + \frac{1}{\epsilon} \delta(q-Q) \right]. \end{aligned}$$

Последний член в квадратных скобках отвечает вычитанию двух трехпетлевых подрасходимостей. Вычисляя теперь последний интеграл, находим

$$\frac{4}{\epsilon^4} \left[ \frac{1}{2} e^{-54} - \frac{2}{3} e^{-28} - \frac{4}{3} e^{-22} + 2e^{-10} + e^{-4} - 2e^{-2} + \frac{1}{3} \right],$$

чья сингулярность есть

$$KR' I_4 = 4 \left( \frac{\zeta(3)}{\epsilon} - \frac{1}{6\epsilon^4} \right)$$

и дает вклад в  $\beta$ -функцию.

Полная  $\beta$ -функция в  $N = 1$  суперсимметричной  $\sigma$ -модели без кручения, вычисленная в схеме минимальных вычитаний (MS-схема) с точностью до четырехпетлевого приближения, имеет вид [62]:

$$\beta_{ij}(\Phi) = -\frac{1}{4\pi} R_{ij} - \frac{\zeta(3)}{6(4\pi)^4} [T_{(ij)} + \nabla_{(i} V_{j)}], \quad (7.15)$$

где

$$\begin{aligned} T_{ij} = & 2R_{nijm;hk} \left( R^{msrk} R^n{}_{(sr)}{}^h + R^{msrn} R^k{}_{sr}{}^h \right) + 4R_{jkmn;[ih]} R^{m(rk)s} R^n{}_{sr}{}^h + \\ & + 3 \left( R_{ikht;r} R^{tsrq} R_j{}^h{}_{q;s} + R_{irkt;h} R^t{}_{sr} R_j{}^h{}_{q;k} + 2R_{ikht;r} R^t{}_{sr} R_j{}^h{}_{q;k} \right) + \\ & + \left( 2R_{rqst;i} - R_{rsqt;i} \right) R^t{}_{rh} R^h{}_{kj} - 12R_{mhki} R_{jrt}{}^m \left( R^k{}_{qs} R^t{}_{qsh} + R^k{}_{qs} R^t{}_{hrs} \right), \end{aligned} \quad (7.16)$$

а  $V_j$  есть произвольный вектор на многообразии. Различный вид  $V_j$  соответствует различным параметризациям координат пространства-мишени и зависит от схемы перенормировки, а потому не имеет физического смысла. Заметим, что полученный четырехпетлевой вклад в  $\beta$ -функцию не пропорционален тензору Риччи и не обращается в нуль на риччи-плоских многообразиях. Он не может быть также скомпенсирован никаким локальным выбором вектора  $V_j$ .

Интересно также рассмотреть локально-симметрические пространства (2.21). С учетом условия  $\nabla_i R_{jkhm} = 0$  существенный член в (7.16) принимает вид

$$R_{mhki} R_{jrt}{}^m \left( R^k{}_{qs} R^t{}_{qsh} + R^k{}_{qs} R^t{}_{hrs} \right). \quad (7.17)$$

Легко проверить, что даже для специального случая  $O(n)$  модели ( $R_{jkhm} = R(\delta_{jh}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kh})$ ) четырехпетлевые расходимости не исчезают на таких пространствах. Отметим однако, что выражение (7.17) равно

нулю на кэлеровых локально-симметрических многообразиях, ибо такая риманова структура отсутствует в кэлеровой геометрии.

При наличии кручения ситуация полностью аналогична. В однопетлевом приближении метрическая и антисимметричная  $\beta$ -функция, как и в чисто бозонном случае, равняются соответствующим компонентам обобщенного тензора Риччи (5.52) [25], а в двух- и трехпетлевом приближении поправки отсутствуют (см., например, [43,47]). В случае групповых многообразий, удовлетворяющих условию (5.53), вычислена также и четырехпетлевая  $\beta$ -функция [48], симметричная часть которой отлична от нуля:

$$\beta_{ab}^G = -\frac{1}{4\pi} (1 - \eta^2) C_A \delta_{ab} - \frac{\zeta(3)}{(4\pi)^4 2^8} (1 - \eta^2) [18 + 94/3\eta^2 + 319\eta^4 - 289\eta^6] C_A^4 \delta_{ab}, \quad (7.18)$$

$$\beta_{ab}^B = 0.$$

$N = 2$  суперсимметрия. Кэлорова геометрия риманова многообразия соответствует расширенным  $N = 2$  суперсимметричным  $\sigma$ -моделям. Действие для  $N = 2$   $\sigma$ -модели может быть записано в терминах киральных и антикиральных суперполей  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$  [58, 63]:

$$S = \int d^2x d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \bar{\Phi}). \quad (7.19)$$

Оно инвариантно относительно голоморфных репараметризаций  $\Phi \rightarrow f(\Phi)$ . В компонентной формулировке действие (7.19) принимает вид

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha K(\Phi, \bar{\Phi})|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \frac{1}{2} \int d^2x K_{\mu\bar{\nu}}(\varphi, \bar{\varphi}) \partial^\alpha \varphi^\mu \partial_\alpha \bar{\varphi}^{\bar{\nu}} + \text{фермионные члены}, \quad (7.20)$$

где использованы определения компонент  $\varphi^\mu = \Phi^\mu|_{\theta=\bar{\theta}=0}$ ,  $\psi_\alpha^\mu = D_\alpha \Phi^\mu|_{\theta=\bar{\theta}=0}$  и условие киральности  $\bar{D}_\alpha \Phi^\mu = 0$ ,  $D_\alpha \bar{\Phi}^{\bar{\mu}} = 0$ .

В суперполевым подходе контрчлены даются поправками к кэлеровому потенциалу

$$K \rightarrow K + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^L} K_{(L)},$$

где  $L$  — порядок по петлям. Если использовать размерную регуляризацию, то  $K_{(L)}$  имеет вид полюсного разложения:

$$K_{(L)} = \sum_{n=1}^L \frac{K_{(L)}^{(n)}}{\varepsilon^n},$$

причем  $\beta$ -функция, как и в обычном случае, определяется коэффициентом при младшем полюсе.

Для того чтобы вычислить контрчлены  $K_{(L)}$ , воспользуемся, как и ранее, методом фонового поля. Однако в данном случае использование нормальных координат затрудняется тем, что суперполя  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$  являются киральными и удовлетворяют дополнительному условию. Эту трудность можно преодолеть, вводя неограниченные препотенциалы  $\Phi = \bar{D}^2 \bar{\chi}$  [38], однако такая процедура требует фиксации калибровки, сопровождаемой появлением гостовских полей, и является технически сложной. Поэтому в случае  $N = 2$  суперсимметрии удобно использовать линейный метод фонового поля, т.е. производить сдвиг суперполей

$$\Phi \rightarrow \Phi + \Phi_0, \quad \bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi} + \bar{\Phi}_0$$

и разлагать действие вокруг классических фоновых суперполей  $\Phi_0$  и  $\bar{\Phi}_0$ . Кэлеров потенциал при этом имеет следующее разложение по квантовым полям:

$$\begin{aligned} &K(\Phi + \Phi_0, \bar{\Phi} + \bar{\Phi}_0) - K(\Phi_0, \bar{\Phi}_0) - K_{\mu}(\Phi_0, \bar{\Phi}_0)\Phi^{\mu} - K_{\bar{\mu}}(\Phi_0, \bar{\Phi}_0)\bar{\Phi}^{\bar{\mu}} = \\ &= K_{\mu\bar{\nu}}(\Phi_0, \bar{\Phi}_0)\Phi^{\mu}\bar{\Phi}^{\bar{\nu}} + \frac{1}{2}K_{\mu\nu}(\Phi_0, \bar{\Phi}_0)\Phi^{\mu}\Phi^{\nu} + \frac{1}{2}K_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\Phi_0, \bar{\Phi}_0)\bar{\Phi}^{\bar{\mu}}\bar{\Phi}^{\bar{\nu}} + \\ &+ \frac{1}{2}K_{\mu\bar{\nu}\bar{\rho}}(\Phi_0, \bar{\Phi}_0)\Phi^{\mu}\bar{\Phi}^{\bar{\nu}}\bar{\Phi}^{\bar{\rho}} + \dots, \end{aligned} \quad (7.21)$$

которое хотя и не является явно ковариантным, однако приводит к инвариантным окончательным выражениям.

Правила Фейнмана могут быть легко получены из лагранжиана (7.21). Пропагатор киральных суперполей определяется свободной частью действия и имеет стандартный вид [61]:

$$\langle \Phi^{\mu}(z), \bar{\Phi}^{\bar{\nu}}(z') \rangle = -\delta^{\mu\bar{\nu}} \square^{-1} \delta^2(x - x') \delta^4(\theta - \theta'),$$

а вершины следуют непосредственно из разложения (7.21) с факторами  $D^2(\bar{D}^2)$  для каждого квантового поля  $\Phi$  ( $\bar{\Phi}$ ). Подсчет степеней расходимости диаграмм приводит к выводу, что в любом порядке теории возмущений содержатся лишь логарифмические расходимости. Более того, так как интеграл по суперпространству  $\int d^2x d^2\theta d^2\bar{\theta}$  имеет размерность, равную нулю, то возможные расходящиеся локальные структуры также

должны быть безразмерны. А поскольку сами суперполя  $\Phi_0$  и  $\bar{\Phi}_0$  безразмерны, то контрчлены не могут содержать никаких производных ( $[D_\alpha] = [D_{\bar{\beta}}] = 1/2$ ,  $[\partial_{\alpha\beta}] = 1$ ), действующих на фоновые поля. Следовательно,  $D$ -алгебра осуществляется перебрасыванием спинорных производных только на внутренние линии диаграмм. При этом ненулевые вклады получаются лишь в том случае, когда в конце остаются ровно две производные  $D_\alpha$  и две  $\bar{D}_{\bar{\beta}}$  для каждой петли.

Последнее наблюдение позволяет сформулировать более простые правила для вычисления ультрафиолетовых расходимостей. Можно исключить из действия все члены, содержащие только квантовые поля  $\Phi$  или только  $\bar{\Phi}$  (киральные вершины). Фейнмановские диаграммы, содержащие такие вершины, дадут вклад, пропорциональный, как минимум, одному фактору  $\bar{D}^2$  или  $D^2$ , действующему на внешнюю линию.

Оказывается, возможно также вычислить существенный, с точки зрения ультрафиолетовых расходимостей, вклад в древесную двухточечную функцию  $\langle \Phi^\mu \bar{\Phi}^{\bar{\nu}} \rangle$  во всех порядках по фоновому полю. Результат имеет вид

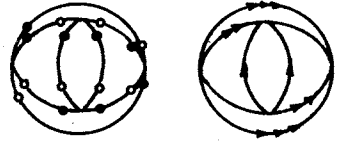
$$\langle \Phi^\mu(z) \bar{\Phi}^{\bar{\nu}}(z') \rangle = -K^{\mu\bar{\nu}}(z) \square^{-1} \delta^6(z - z'), \quad (7.22)$$

где  $K^{\mu\bar{\nu}}$  есть обратная метрика.

Таким образом, можно сформулировать упрощенные правила Фейнмана для вычисления расходящихся частей диаграмм [61]. В каждом порядке теории возмущений рисуются диаграммы с пропагаторами вида (7.22) и вершинами, содержащими по крайней мере одну  $\Phi$  и одну  $\bar{\Phi}$  квантовую линию. Каждая квантовая линия в вершине содержит фактор  $D^2$  или  $\bar{D}^2$ . Зависимость от фоновых полей содержится в обратной метрике, присутствующей в каждом пропагаторе, и в производных кэлерава потенциала в каждой вершине. Стандартная  $D$ -алгебра осуществляется интегрированием по частям всех ковариантных производных внутри петли.

Вычисления контрчленов в  $N = 2$  суперсимметричной  $\sigma$ -модели были проведены с рекордной точностью до пяти петель [63, 53]. При этом ввиду сложности возникающих интегралов пришлось использовать весь арсенал современных методов многопетлевых расчетов, включая полную  $R^*$ -операцию. Мы остановимся ниже на вычислении одной из сложных пятипетлевых диаграмм, чтобы продемонстрировать на практике применение этих методов [53].

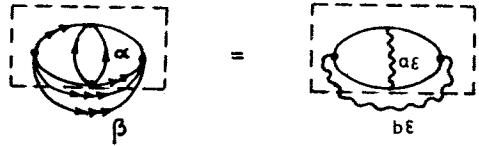
Рис.7. Суперполевая и соответствующая ей импульсная диаграммы, дающие вклад в пятипетлевую  $\beta$ -функцию в  $N = 2$  суперсимметричной  $\sigma$ -модели. Кружки и точки на линиях суперполевой диаграммы означают факторы  $D^2$  и  $\bar{D}^2$  соответственно



Рассмотрим суперполевую диаграмму и соответствующую ей после выполнения  $D$ -алгебры обычную импульсную диаграмму, изображенные на рис.7. Кружки и точки на суперполевой диаграмме обозначают факторы  $D^2$  и  $\bar{D}^2$  соответственно, стрелками же, как обычно, отмечены свернутые степени импульса.

Соответствующий фейнмановский интеграл УФ и ИК расходится и содержит внутри себя расходящиеся подграфы. Наибольшую техническую трудность представляет вычисление трехпетлевого подграфа (рис.8), который расходится как  $1/\epsilon^2$  и который необходимо знать с точностью до  $O(\epsilon)$ .

Рис.8. Видоизмененная диаграмма рис.7, у которой два пропагатора возведены в степень  $\alpha$  и  $\beta$ . Штриховой линией выделен трехпетлевой расходящийся подграф



Для его вычисления воспользуемся следующей процедурой. Запишем результат в общем виде с неизвестными  $\epsilon$ -зависимыми коэффициентами и определим их из симметричных свойств диаграммы, которые следуют из утверждения, что для любой логарифмически расходящейся диаграммы  $\Gamma$  ее сингулярная часть (точнее,  $K R' \Gamma$ ) не зависит от расположения внешних линий. Для этой цели рассмотрим слегка видоизмененную диаграмму, у которой два пропагатора возведены в степень  $\alpha = 1 + (a - 1)\epsilon$  и  $\beta = 1 + (b - 1)\epsilon$  соответственно, как показано на рис.8. В конце нужно положить  $a = b = 1$ . Для однопетлевого подграфа тогда получаем вместо (7.13)

$$A_1(a) = -\frac{2}{a\epsilon} \frac{e^{-2a^2}}{(r^2)^{a\epsilon}}, \tag{7.23}$$

где мы придерживаемся принятого нами соглашения выписывать в экспоненте лишь коэффициент перед комбинацией  $\zeta$ -функций. Производя вычитание УФ- и ИК-расходящихся подграфов, можно теперь представить трехпетлевую поддиаграмму на рис.8 в следующем виде:

$$-4 \frac{e^{-2a^2}}{a\epsilon^3} \left[ \frac{e^{-U(a,\epsilon)}}{(k^2)^{1+(a+2)\epsilon}} - \frac{2e^{-2(a+1)^2}}{(k^2)^{1+(a+1)\epsilon}} + \frac{1}{(k^2)^{1+a\epsilon}} \right] +$$

$$+ \frac{4}{a\epsilon^3} \left[ \frac{e^{-4}}{(k^2)^{1+2\epsilon}} - 2 \frac{e^{-2}}{(k^2)^{1+\epsilon}} + \frac{1}{k^2} \right].$$

Первый член в квадратных скобках содержит *неизвестную* функцию  $U(a, \epsilon)$ , возникшую из вычисления самой диаграммы. Остальные два члена есть результат ИК-вычитаний и могут быть вычислены точно. Вторая скобка соответствует вычитанию однопетлевых УФ-расходимостей, что также легко вычисляется до конца. Отметим, что все полученные выражения приводят к ИК-расходимостям в оставшемся интеграле по  $k$  и, следовательно, требуют введения правильных ИК-контрчленов.

Умножим теперь получившееся выражение на множитель  $A_1(b)$ , соответствующий нижнему однопетлевому подграфу на рис.8:

$$- \frac{2}{b\epsilon} \frac{e^{-2b^2}}{(k-Q)^{2b\epsilon}},$$

и проинтегрируем по  $k$ , производя ИК-вычитания. Воспользуемся формулой

$$\int d^{2-2\epsilon} k \frac{1}{(k-Q)^{2b\epsilon}} \left[ \frac{1}{(k^2)^{1+\lambda\epsilon}} + \frac{1}{(1+\lambda)\epsilon} \delta(k) \right] =$$

$$= - \frac{b}{\epsilon(\lambda+1)(b+\lambda+1)} \frac{\exp(-2(b+1)(\lambda+1)(b+\lambda+1))}{(Q^2)^{(b+\lambda+1)\epsilon}} +$$

$$+ \frac{1}{\epsilon(\lambda+1)(Q^2)^{b\epsilon}}.$$

Тогда выражение для диаграммы с учетом однопетлевых вычитаний примет вид

$$\frac{8}{\epsilon^2 ab} [X(a, b) - X(a, 0) - X(0, b) + X(0, 0)], \quad (7.24)$$

где

$$\begin{aligned}
 X(a, b) = & e^{-2(a^2+b^2)} \left( -\frac{be^{-U(a,\epsilon)}}{(a+3)(a+b+3)} \times \right. \\
 & \times \exp(-2(a+3)(b+1)(a+b+3)) + \\
 & + \frac{1}{a+3} e^{-U(a,\epsilon)} + \frac{2b}{(a+2)(a+b+2)} \times \\
 & \times \exp(-2[(a+1)^2 + (a+2)(b+1)(a+b+2)]) - \\
 & - \frac{2e^{-2(a+1)^2}}{a+2} - \frac{b}{(a+1)(a+b+1)} \times \\
 & \left. \times \exp(-2(b+1)(a+1)(a+b+1)) + \frac{1}{a+1} \right)
 \end{aligned}$$

и

$$U(0, \epsilon) = 4 [\zeta(3)\epsilon^3 + 3/2\zeta(4)\epsilon^4]. \tag{7.25}$$

Наконец, необходимо произвести вычитание трех- и четырехпетлевых расходящихся подграфов, изображенных на рис.9. Они легко вычисляются и оказываются симметричными по  $a$  и  $b$ .

Рис.9. Трех- и четырехпетлевой расходящиеся подграфы диаграммы рис.7.



Отметим теперь, что выражение (7.24) не обладает явной симметрией по  $a$  и  $b$ , в то время как исходная диаграмма очевидно симметрична. Разлагая экспоненты и требуя, чтобы коэффициенты при полюсах обладали указанной симметрией, а также принимая во внимание (7.25), мы находим, что неизвестная функция  $U(a, \epsilon)$  представляется в виде

$$U(a, \epsilon) = 4 [1 + ya(a+3)] [\zeta(3)\epsilon^3 + 3/2\zeta(4)\epsilon^4]. \tag{7.26}$$

Единственный неизвестный параметр  $y$  находится путем вычисления интеграла при  $a = -2$ , что может быть сделано с помощью метода уникальностей [64]. Получаем  $y = 1$ .

С учетом всех необходимых вычитаний окончательный результат имеет вид

$$KR'\Gamma = \frac{8}{\epsilon^5 ab} \left[ \frac{1}{a+b+3} - \frac{1}{a+3} - \frac{1}{b+3} + \frac{1}{3} \right] +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{8\zeta(3)}{\varepsilon^2 ab} \left[ 4ab \left( \frac{2}{a+b+3} - \frac{1}{a+b+1} \right) - \right. \\
& - 22 \left( \frac{1}{a+b+3} - \frac{1}{a+3} - \frac{1}{b+3} + \frac{1}{3} \right) + 2 \left( \frac{1}{a+b+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} + 1 \right) \Big] + \\
& + \frac{8\zeta(4)}{\varepsilon ab} \left[ 6ab \left( \frac{2}{a+b+3} - \frac{3}{a+b+2} + \frac{1}{a+b+1} \right) - \right. \\
& - 33 \left( \frac{1}{a+b+3} - \frac{1}{a+3} - \frac{1}{b+3} + \frac{1}{3} \right) + 30 \left( \frac{1}{a+b+2} - \frac{1}{a+2} - \frac{1}{b+2} + \frac{1}{2} \right) - \\
& \left. - 3 \left( \frac{1}{a+b+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} + 1 \right) \right]. \quad (7.27)
\end{aligned}$$

Для  $a = b = 1$  отсюда получаем

$$KR'\Gamma = \frac{12\zeta(4)}{5\varepsilon} + \frac{8\zeta(3)}{5\varepsilon^2} + \frac{4}{15\varepsilon^5}. \quad (7.28)$$

Рассмотренный пример демонстрирует эффективность и большие возможности обсуждаемых методов вычисления сложных многопетлевых диаграмм. Необходимость рассмотрения высших порядков теории возмущений здесь обусловлена отсутствием поправок к риччи-плоской метрике в двух и трех петлях, так же, как это имело место для  $N = 1$  суперсимметрии.

В минимальной схеме вычитаний контрчлены с точностью до пяти петель имеют вид [63, 53]:

$$\begin{aligned}
K_{(1)} &= -\frac{1}{\varepsilon} \text{tr} \log G_{\mu\bar{\nu}}, \\
K_{(2)} &= \frac{1}{2\varepsilon^2} R, \\
K_{(3)} &= -\frac{1}{6\varepsilon^3} (\nabla^\mu \nabla_\mu R - R^{\mu\bar{\nu}} R_{\mu\bar{\nu}}), \\
K_{(4)} &= \frac{1}{24\varepsilon^4} \left[ \nabla^\lambda \nabla_\lambda \nabla^\rho \nabla_\rho R + 2R^{\rho\bar{\rho}} R_{\sigma\rho} R_{\sigma\bar{\rho}} - (R^{\rho\bar{\rho}} R_{\rho\bar{\rho}}) - 3R^{\rho\bar{\rho}} \nabla_\rho \nabla_{\bar{\rho}} R \right] - \\
& - \frac{\zeta(3)}{6\varepsilon} \Delta K, \quad (7.29) \\
K_{(5)} &= \frac{1}{5!\varepsilon^5} \left[ -\nabla^\lambda \nabla_\lambda \nabla^\sigma \nabla_\sigma \nabla^\tau \nabla_\tau R + 6R^{\rho\bar{\rho}} R^{\sigma\bar{\sigma}} R_{\rho\sigma} R_{\rho\bar{\sigma}} - 2\nabla^\lambda \nabla_\lambda (R^{\lambda\bar{\rho}} R_\lambda^\rho R_{\rho\bar{\rho}}) - \right. \\
& \left. - 4R^{\rho\bar{\rho}} \nabla_\rho \nabla_{\bar{\rho}} (R^{\tau\bar{\tau}} R_{\tau\bar{\tau}}) + \nabla^\lambda \nabla_\lambda \nabla^\sigma \nabla_\sigma (R^{\tau\bar{\tau}} R_{\tau\bar{\tau}}) + 3\nabla^\rho \nabla_\rho \bar{R} \nabla_{\bar{\rho}} \nabla_{\bar{\rho}} R + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4R^{\rho\bar{\rho}}\nabla_{\rho}\nabla_{\bar{\rho}}\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}R + 3\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}(\nabla^{\rho}\nabla^{\bar{\rho}}RR_{\rho\bar{\rho}}) - 12\nabla^{\rho}\nabla^{\bar{\rho}}RR_{\rho}{}^{\sigma}R_{\sigma\bar{\rho}} \Big] + \\
 & + \frac{\zeta(3)}{\varepsilon^2} \left[ \frac{2}{15} \nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma} \Delta K + \right. \\
 & + \frac{1}{10} (\nabla_{\rho}\nabla^{\sigma}R_{\nu}{}^{\mu} - R^{\pi}{}_{\rho}R_{\pi\nu}{}^{\sigma\mu})(R_{\sigma\mu}{}^{\alpha\tau}R_{\alpha\tau}{}^{\rho\nu} + R_{\mu\alpha}{}^{\nu\tau}R_{\tau\sigma}{}^{\alpha\rho}) \Big] - \\
 & - \frac{3\zeta(4)}{20\varepsilon} \left[ \frac{1}{3} \nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma} \Delta K - \right. \\
 & \left. - (\nabla_{\rho}\nabla^{\sigma}R_{\nu}{}^{\mu} - R^{\pi}{}_{\rho}R_{\pi\nu}{}^{\sigma\mu})(R_{\sigma\mu}{}^{\alpha\tau}R_{\alpha\tau}{}^{\rho\nu} + R_{\mu\alpha}{}^{\nu\tau}R_{\tau\sigma}{}^{\alpha\rho}) \right], \tag{7.30}
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta K = R_{\nu}{}^{\mu\tau}{}_{\lambda}(R^{\rho\sigma}{}_{\mu\tau}R^{\nu\lambda}{}_{\rho\sigma} + R^{\lambda\rho}{}_{\tau\sigma}R^{\sigma\nu}{}_{\rho\mu}). \tag{7.31}$$

Отметим, что все коэффициенты при старших полюсах в (7.29), (7.30) не являются независимыми, но могут быть получены с использованием обобщенных полюсных уравнений (3.14).

$\beta$ -функция имеет вид

$$\beta_{\mu\bar{\nu}} = -\frac{R_{\mu\bar{\nu}}}{4\pi} - \frac{2\zeta(3)}{3(4\pi)^4} \partial_{\mu}\partial_{\bar{\nu}}\Delta K - \frac{\zeta(4)}{4(4\pi)^5} \nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}\partial_{\mu}\partial_{\bar{\nu}}\Delta K. \tag{7.32}$$

Аналогично предыдущему случаю  $N = 1$  суперсимметрии,  $\beta$ -функция обращается в нуль на риччи-плоских многообразиях только в однопетлевом приближении и приобретает добавки, начиная с четырех петель.

Заметим, что возникающие в пятой петле расходящиеся структуры не являются новыми по сравнению с предыдущей петлей. Все они могут быть индуцированы вставкой однопетлевых поправок в  $K_{(4)}$  или четырехпетлевых конечных поправок в  $K_{(1)}$  и могут быть записаны как

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\eta} \left[ K_{(1)}^{(1)}(G_{\mu\bar{\nu}} + \eta c_4 \partial_{\mu}\partial_{\bar{\nu}}K_{(4)}^{(1)}) + K_{(4)}^{(1)}(G_{\mu\bar{\nu}} + \eta c_1 \partial_{\mu}\partial_{\bar{\nu}}K_{(1)}^{(1)}) \right] \Big|_{\eta=0} = \\
 & = \frac{\zeta(3)}{6\varepsilon} \left[ c_4 \nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma} \Delta K + 3c_1 (\nabla_{\rho}\nabla^{\sigma}R_{\nu}{}^{\mu} - R^{\pi}{}_{\rho}R_{\pi\nu}{}^{\sigma\mu})(R_{\sigma\mu}{}^{\omega\tau}R_{\omega\tau}{}^{\rho\nu} + R_{\mu\omega}{}^{\nu\tau}R_{\tau\sigma}{}^{\omega\rho}) \right]. \tag{7.33}
 \end{aligned}$$

Следовательно, подходящим выбором коэффициентов  $c_1$  и  $c_4$  мы можем добиться полного сокращения младшего полюса в пятипетлевом члене (7.30). Напротив,  $1/\varepsilon^2$ -расходимость в пятипетлевом члене (7.30), которая является отражением существования подлинной  $1/\varepsilon$ -расходимости в четвертой петле, не может быть устранена изменением процедуры вычитаний.

Полученные здесь результаты могут быть переписаны в терминах действительных координат и совпадают с соответствующими выражениями для  $N = 1$  суперсимметричной  $\sigma$ -модели, ограниченными на кэлеровы многообразия, после подходящего выбора вектора  $V_j$  в виде

$$V_j = -\frac{\zeta(3)}{9} \nabla_j \Delta K.$$

Интересно отметить, что с точностью до членов, исчезающих на риччи-плоских многообразиях, выражение (7.31) пропорционально эйлеровой плотности в шести измерениях и, следовательно, исчезает на двух- и четырехмерных риччи-плоских многообразиях.

$N = 4$  суперсимметрия. Хотя расходимости и не равны нулю для произвольных многомерных риччи-плоских многообразий, и даже кэлеровых комплексных, они обращаются в нуль для гиперкэлеровых (которые с необходимостью риччи-плоские). В этом случае тензор Римана может быть представлен в  $Sp(1) \times Sp(n)$  ковариантном виде [55]:  $R_{abcd} \equiv \equiv R_{\alpha A \beta B \gamma C \delta D} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Omega_{ABCD}$ , где  $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$ ;  $A, B, \dots = 1, 2, \dots, 2n$ , а  $\Omega$  полностью симметричен. Именно на гиперкэлеровых многообразиях, как указывалось выше, реализуется расширенная  $N = 4$  суперсимметрия.  $N = 4$  суперсимметричная  $\sigma$ -модель является конечной во всех порядках теории возмущений.

Этот вывод следует из свойств гиперкэлеровых многообразий. Сохранение  $N = 4$  суперсимметрии в теории возмущений приводит к тому, что исходная метрика вместе с индуцированным контрчленом  $T_{ij}$  по-прежнему отвечают условию риччи-плоскостности. Таким образом, для гиперкэлеровых многообразий тензор Риччи, построенный по метрике  $G + T$  (3.2), обращается в нуль, т.е. гарантируется выполнение условия

$$R_{ij}(G + T) = 0.$$

Однако, как было установлено Калаби и Яо [65], риччи-плоская метрика на гиперкэлеровом многообразии является единственной. Следовательно, так как метрика  $G_{ij}$  уже риччи-плоская, то  $T_{ij} = 0$  во всех порядках теории возмущений [54].

Независимый вывод этого утверждения был получен в работе [56]. На основе  $N = 4$  инвариантного формализма, построенного в рамках подхода гармонического суперпространства [66], было показано, что для суперсимметричной  $\sigma$ -модели справедливы теоремы о неперенормировке, аналогичные тем, которые имеют место в суперсимметричных теориях

Янга — Миллса. Квантовые поправки к эффективному действию всегда имеют вид интеграла по полной грасмановой мере, откуда из простых размерных соображений следует, что они всегда конечны, т.е.  $T_{ij} = 0$ .

## 8. РИЧЧИ-ПЛОСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И КОНЕЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИГМА-МОДЕЛИ

Как было продемонстрировано выше, двумерные нелинейные  $\sigma$ -модели, сформулированные на риччи-плоских многообразиях, конечны (конформно-инвариантны) в однопетлевом приближении. Более того, суперсимметричные теории обладают этим свойством вплоть до четырех петель. В свою очередь, конформная инвариантность является неизменным требованием, обусловленным самосогласованностью струнных теорий на пространстве-мишени. Этим объясняется выделенность риччи-плоских многообразий в теории струн. В одном из популярных вариантов струнной теории [67] 10-мерная гетеротическая струна компактифицируется на многообразии вида  $M_4 \times K$ , где  $M_4$  есть пространство Минковского, а  $K$  — компактное 6-мерное риччи-плоское многообразие с  $SU(3)$  голономией, так называемое пространство Калаби — Яо. При такой компактификации теория с необходимостью суперсимметрична и обладает рядом феноменологически привлекательных свойств.

Однако, как мы видели, в высших порядках теории возмущений конформность теории нарушается даже в случае  $N = 1$  и  $N = 2$  суперсимметрии. Появляются расходящиеся выражения, не исчезающие на риччи-плоских многообразиях. С этой точки зрения пространство Калаби— Яо следует рассматривать как исходную точку в пертурбативном определении приемлемого многообразия, с поправками, определяемыми из петлевого разложения [68]. Такой подход согласуется и с интерпретацией уравнений  $\beta_{ij} = 0$  как классических уравнений движения гравитона, которые призваны определить как вакуумное состояние в теории струн, так и древесные амплитуды гравитонного рассеяния. Последние могут быть также найдены из  $\alpha'$ -разложения струнных амплитуд. Как было установлено, такое разложение для эффективного действия, которое описывает четырехгравитонное рассеяние, приводит к уравнениям движения, согласованным на риччи-плоских кэлеровых многообразиях с полученными выше поправками к однопетлевым  $\beta$ -функциям (7.15), (7.32) [69, 70].

Существуют, однако, и другие интерпретации полученных результатов. Первая из них связана с введением в рассмотрение *нелокального* перенормирования полей или нелокальной перенормировки. Оказывается,

что, несмотря на то, что при данной схеме вычитаний  $\beta$ -функция не исчезает на риччи-плоских многообразиях, всегда можно выбрать метрику на многообразии Калаби — Яо так, чтобы полная  $\beta$ -функция равнялась нулю. Новая метрика будет связана с исходной риччи-плоской метрикой нелокальным преобразованием полей. Это не противоречит нашему предыдущему утверждению, что никаким локальным преобразованием полей или изменением схемы вычитаний нельзя скомпенсировать ненулевую четырехпетлевую поправку к  $\beta$ -функции.

Рассмотрим кэлеров случай, соответствующий, как было сказано выше,  $N = 2$  суперсимметрии. Пусть однопетлевая  $\beta$ -функция равна  $c \text{Tr} \ln G$ , а последующие поправки имеют вид  $\Delta\beta_K$ . Тогда справедливо следующее утверждение [71].

**Утверждение 1.** Для любого многообразия Калаби — Яо с риччи-плоской метрикой  $\tilde{G}_{\mu\bar{\nu}}$  и соответствующим кэлеровым потенциалом  $\tilde{K}$  существует метрика  $G_{\mu\bar{\nu}}$  и кэлеров потенциал  $K$  такой, что

$$K(\Phi, \bar{\Phi}) = \tilde{K}(\Phi, \bar{\Phi}) - \delta K(\Phi, \bar{\Phi}), \quad (8.1)$$

и

$$\beta_K = c \text{Tr} \ln G + \Delta\beta_K = c \text{Tr} \ln \tilde{G}. \quad (8.2)$$

Следовательно,  $\beta_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \beta_K = 0$  во всех порядках теории возмущений.

Уравнение (8.2) может быть переписано

$$\Delta\beta_K = -c \text{Tr} \ln (1 - \tilde{G}^{-1} \delta G),$$

откуда находим

$$\tilde{G}^{\mu\bar{\nu}} \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \delta K = c^{-1} \Delta\beta_K - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} (\tilde{G}^{-1} \delta G)^n. \quad (8.3)$$

Это уравнение относительно  $\delta K$  может быть решено итерациями. В низшем порядке в правой части нужно подставить  $K = \tilde{K}$ . Источником нелокальности при такой процедуре служит необходимость обращения дифференциальных операторов в левой части (8.3). При этом можно показать, что метрика, получаемая в результате решения (8.2), является глобально определенной, т.е., будучи вычисленной в различных системах координат, подчиняется стандартному закону преобразования при переходе от одной системы к другой.

Таким образом, на пространстве Калаби — Яо всегда можно построить конформно-инвариантную  $\sigma$ -модель. Метрика этой модели не будет

риччи-плоской, но будет связана с ней нелокальным переопределением полей, являясь глобально определенным тензором на многообразии [71].

Другая возможная интерпретация отклонения от риччи-плоскостности основана на механизме построения конечных теорий с помощью исчезающих (при снятии регуляризации) контрчленов. Эта интерпретация также исходит из того факта, что  $\beta$ -функция является схемно-зависимой величиной, и существует формулировка теории, не требующая введения расходящихся контрчленов. При таком подходе оказывается удобным не пользоваться никакой схемой вычитания расходимостей, а работать непосредственно в терминах «голых» или «затравочных» величин. Последние в силу своего определения не зависят от схемы перенормировок, но зато содержат зависимость от принятой регуляризации. Мы изложим ниже процедуру построения конформно-инвариантной  $\sigma$ -модели на риччи-плоских многообразиях в формализме размерной регуляризации.

Рассмотрим нелинейную  $\sigma$ -модель, описываемую стандартным действием типа (7.1), (7.3), (7.19) с метрикой  $G$ . Тогда справедливо следующее утверждение [72].

**Утверждение 2.** *Если теория конечна в однопетлевом приближении при  $G = G^{(0)}$ , то можно добиться конечности во всех порядках теории возмущений, выбирая затравочную метрику в виде*

$$G^{\text{Bare}} = \sum_{k \geq 0} G^{(k)} \epsilon^k, \tag{8.4}$$

где  $G^{(0)}$  удовлетворяет уравнению  $R_{ij}(G^{(0)}) = 0$ .

Доказательство этого утверждения основано на том факте, что сингулярности диаграмм, так же, как и контрчлены, не являются независимыми, а полностью определяются коэффициентом при младшем полюсе (см. (3.14)). Поэтому, если удастся добиться, что коэффициент при  $1/\epsilon$  равен нулю, то и все старшие расходимости также сокращаются. В этом случае подстановка разложения (8.4) в выражение для сингулярностей приводит к их почленному сокращению во всех порядках теории возмущений. Поправки к метрике  $G^{(k)}$  при этом удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям в частных производных. Так, например, в случае кэлеровой  $N = 2$  суперсимметричной  $\sigma$ -модели с точностью до пяти петель поправки к метрике имеют вид [72]:

$$G_{\mu\nu}^{\text{Bare}} = G_{\mu\nu}^{(0)} + [4\zeta(3)\epsilon^3 + 6\epsilon^4] G_{\mu\nu}^{(1)}, \tag{8.5}$$

где метрика  $G_{\mu\nu}^{(0)}$  — риччи-плоская, а  $G_{\mu\nu}^{(1)}$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \delta R(G_{\mu\nu}^{(1)}) + \Delta K(G_{\mu\nu}^{(0)}) = 0. \tag{8.6}$$

Здесь

$$\delta R(G) = \nabla^2 G^\mu{}_\mu - \nabla^\mu \nabla^\nu G_{\mu\nu},$$

а ковариантная производная  $\nabla_\mu$  определена по отношению к метрике  $G^{(0)}$ .  $\Delta K$  дается (7.31).

Следует подчеркнуть, что (8.4) содержит только положительные степени  $\epsilon$ , и, следовательно, поправки к классической метрике исчезают при снятии регуляризации. Они, однако, играют существенную роль в сокращении расходимостей и дают вклад в конечные амплитуды.

Таким образом, мы опять приходим к выводу, что, несмотря на наличие ненулевой  $\beta$ -функции, можно построить конформно-инвариантную  $\sigma$ -модель, имеющую риччи-плоскую классическую метрику [72].

В силу дифференциальной структуры уравнений для поправок к метрике типа (8.6) и необходимости обращения дифференциального оператора изменения затравочной метрики могут быть интерпретированы в этом случае как нелокальные исчезающие преобразования. Это эквивалентно (хотя является более прямым) рассмотренному выше нелокальному преобразованию ренормированной метрики (8.3), приводящему к нелокальному переопределению полей [71].

Авторы признательны М.Т.Грисару за плодотворные обсуждения затронутых в настоящем обзоре вопросов и Е.А.Иванову за внимательное прочтение рукописи и ряд полезных замечаний и советов. В.В.Б. благодарен П. ван Нивенхойзену, предложение которого прочитать лекции в Институте теоретической физики Университета Стони Брук и ценные замечания по их содержанию стимулировали написание настоящего обзора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Green M.B., Schwarz J.H., Witten E. — *Superstring Theory*. Cambridge. Univ. Press, 1987. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
2. Polyakov A.M. — *Phys. Lett.*, 1981, vol.103B, p.207.
3. Lovelace C. — *Phys. Lett.*, 1984, vol.135B, p.75.
4. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. — *Phys. Lett.*, 1985, vol.160B, p.69; *Nucl. Phys.*, 1985, vol.B261, p.1.
5. Sen A. — *Phys. Rev.*, 1985, vol.D32, p.2102.
6. Callan C.G., Friedan D.H., Martinec E.J., Perry M.J. — *Nucl. Phys.*, 1985, vol.B262, p.593.
7. Callan C.G., Klebanov I.R., Perry M.J. — *Nucl. Phys.*, 1986, vol.B278, p.78.
8. Tseytlin A.A. — *Phys. Lett.*, 1986, vol.178B, p.34; *Nucl. Phys.*, 1987, vol.B294, p.383.
9. Osborn H. — *Nucl. Phys.*, 1988, vol.B308, p.629; *Ann. of Phys.*, 1990, vol.200, p.1.
10. Curci G., Paffuti G. — *Nucl. Phys.*, 1987, vol.B286, p.399.
11. Callan C.G., Lovelace C., Nappi C.R., Yost S.A. — *Nucl. Phys.*, 1987, vol.B288, p.525.
12. Inami T., Nishino H. — *Phys. Lett.*, 1987, vol.196B, p.151.
13. Metsaev R.R., Tseytlin A.A. — *Nucl. Phys.*, 1988, vol.B298, p.109.

14. Fischler W., Klebanov I.R., Susskind L. — Nucl. Phys., 1988, vol.B306, p.271.
15. Tseytlin A.A. — Phys. Lett., 1988, vol.208B, p.228.
16. Keller G., Silvotti R. — Ann. of Phys., 1988, vol.183, p.269.
17. Hull C.M. — Phys. Lett., 1990, vol.240B, p.110.
18. Schoutens K., Sevrin A., van Nieuwenhuizen P. — Phys. Lett., 1990, vol.243B, p.245.
19. Bergshoeff E., Pope C.N., Romans L.J. et al. — Phys. Lett., 1990, vol.243B, p.350.
20. Bergshoeff E., Pope C.N., Stelle K.S. — Phys. Lett., 1990, vol.249B, p.208.
21. Замолодчиков А.Б. — ТМФ, 1985, т.65, с.347.
22. Fateev V.A., Lukanov S. — Int. J. Mod. Phys., 1988, vol.A3, p.507.
23. Кобаяси Т., Номидзу К. — Основы дифференциальной геометрии: Пер. с англ. М.: Наука, 1981.
24. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. — Современная геометрия. М.: Наука, 1971.
25. Braaten E., Curtright T.L., Zachos C.K. — Nucl. Phys., 1985, vol.B260, p.630.
26. Friedan D.H. — Phys. Rev. Lett., 1980, vol.45, p.1057; Ann. of Phys., 1985, vol.63, p.318.
27. Alvarez-Gaume L., Freedman D.Z. — Phys. Rev., 1980, vol.D22, p.846.
28. Alvarez-Gaume L., Freedman D.Z., Mukhi S. — Ann. of Phys., 1981, vol.134, p.85.
29. Mukhi S. — Phys. Lett., 1985, vol. 162B, p.345.
30. Witten E. — Comm. Math. Phys., 1984, vol.92, p.455.
31. Де Витт Б.С. — Динамическая теория групп и полей: Пер. с англ. М.: Наука, 1987.
32. 't Hooft G. — Proc. XII Winter School of Theor. Phys., Acta Univ. Wratisl., 1975, vol.38.
33. Honerkamp J. — Nucl. Phys., 1972, vol.B36, p.130.
34. Abbot L.F. — Nucl. Phys., 1981, vol.B185, p.189.
35. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 4 изд., 1984.
36. Mukhi S. — Nucl. Phys., 1986, vol.B264, p.640.
37. Воронов Б.Л., Тюгин И.В. — ЯФ, 1981, т.33, с.1137.
38. Howe P.S., Papadopoulos G., Stelle K.S. — Nucl. Phys., 1988, vol.B296, p.26; Howe P.S., Stelle K.S. — Int. J. Mod. Phys., 1989, vol.A4, p.1871.
39. Metsaev R.R., Tseytlin A.A. — Phys. Lett., 1987, vol.191B, p.354.
40. Jones D.R.T. — Phys. Lett., 1987, vol.192B, p.391.
41. Hull C.M., Townsend P.K. — Phys. Lett., 1987, vol.191B, p.115.
42. Zanon D. — Phys. Lett., 1987, 191B, p.363.
43. Ketov S.V. — Nucl. Phys., 1987, vol. B294, p.813; Phys. Lett., 1988, vol. 207B, p.140.
44. Белокуров В.В., Иофа М.З. — Препринт НИИЯФ МГУ 88-006/27, 1988.
45. Bos M. — Phys. Lett., 1987, vol. 189B, p.435; Ann. of Phys., 1988, vol. 181, p.177.
46. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. — Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
47. Allen R.W., Jones D.R.T. — Nucl. Phys., 1988, vol. B303, p.271.
48. Кетов С.В. — ТМФ, 1989, т.80, с.56; Дериглазов А.А., Кетов С.В., Пугай Я.П. — Письма в ЖЭТФ, 1989, 50, с.309.
49. Jack I., Jones D.R.T., Mohammedi N. — Nucl. Phys., 1989, vol.B322, p.431.
50. Miramontes J.L., Sanchez de Santos J.M. — Phys. Lett., 1990, 246B, p.399.
51. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. — Phys. Lett., 1982, vol. 114B, p.133; Смирнов В.А., Четыркин К.Г. — ТМФ, 1985, т. 63, с.462; Смирнов В.А. — Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд. М.: МГУ, 1990.
52. Владимиров А.А. — ТМФ, 1978, т. 36, с.271.
53. Grisar M.T., Kazakov D.I., Zanon D. — Nucl. Phys., 1987, vol.B287, p.189.
54. Hull C.M. — Nucl. Phys., 1985, vol.B260, p.182.
55. Alvarez-Gaume L., Ginsparg P. — Comm. Math. Phys., 1985, vol.102, p.311.
56. Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E. — Class. Quant. Grav., 1985, vol.2, p.617.



57. Freedman D.Z., Townsend P.K. — Nucl. Phys., 1981, vol.B177, p.282.
58. Zumino B. — Phys. Lett., 1979, vol. 87B, p.203.
59. Alvarez-Gaume L., Freedman D.Z. — Comm. Math. Phys., 1981, vol.80, p.443.
60. Lichnerowicz A. — General Theory of Connections and the Holonomy Group, Amsterdam: Noordhoff, 1976.
61. Gates S.J., Grisaru M.T., Rocek M., Siegel W. — Superspace, Benjamin and Cummings, Reading MA, 1983.
62. Grisaru M.T., van de Ven A., Zanon D. — Nucl. Phys., 1986, vol.B277, p.409.
63. Grisaru M., van de Ven A., Zanon D. — Nucl. Phys., 1986, vol.B277, p.388.
64. Kazakov D.I. — Phys. Lett., 1983, vol.133B, p.406; ТМФ, 1985, т.62, с.127.
65. Calabi E. — In.: Algebraic Geometry and Topology. Princeton Univ. Press., 1957, p.78; S.-T. Yau — Proc. Nat. Acad. Sci., 1977, vol.74, p.1798.
66. Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E. — Class. Quant. Grav., 1984, vol.1, p.469; *ibid* 1985, vol.2, p.155.
67. Candelas P., Horowitz G., Strominger A., Witten E. — Nucl. Phys., 1985, vol.B258, p.46.
68. Witten E. — Nucl. Phys., 1986, vol.B268, p.79.
69. Gross D.J., Witten E. — Nucl. Phys., 1986, vol.B277, p.1.
70. Freedman M.D., Pope C.N. — Phys. Lett., 1985, vol.174B, p.48.
71. Nemeshtansky D., Sen A. — Phys. Lett., 1986, vol.178B, p.365.
72. Kazakov D.I. — JINR Preprint E2-87-16, Dubna, 1987.