

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКА С ВАКУУМНОЙ КАМЕРОЙ УСКОРИТЕЛЯ. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИМПЕДАНСА СВЯЗИ

С.С.Куренной

Институт физики высоких энергий, Серпухов

Дан обзор методов вычисления импеданса связи пучка с вакуумной камерой ускорителей. Подробно обсуждаются определения и свойства импедансов, их связь с наведенными потенциалами. Основное внимание уделено методам, применимым на низких частотах и в резонансной области. Сделана попытка классификации методов расчета импеданса. В работе собраны аналитические формулы для расчетов. Кроме того, она может быть использована в качестве путеводителя по литературе на эту тему.

A review of methods for calculating the coupling impedances of the vacuum chamber of accelerators is given. The definitions of the coupling impedances, their properties and relations to the wake potentials are discussed in detail. The main attention is paid to the techniques applied at low frequencies and in the resonant region. An attempt to classify these methods is made. The paper presents a collection of formulae and can be used as a reference guide.

1. ИМПЕДАНСЫ И НАВЕДЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Пучок заряженных частиц, движущийся внутри вакуумной камеры ускорителя, возбуждает в стенках камеры токи. Создаваемые этими токами поля, в свою очередь, действуют на частицы пучка. Такое взаимодействие пучка с вакуумной камерой ведет к потерям энергии пучка, изменениям формы сгустков и сдвигам бетатронных частот, и, наконец, может вызывать неустойчивости различных типов (см. обзоры [1,2,3]). Важность проблемы устойчивости пучка, особенно в современных ускорителях с высокой интенсивностью, заставляет тщательно исследовать взаимодействие пучка с камерой ускорителя. Такое исследование удобно проводить, используя понятия импедансов связи пучка с вакуумной камерой или связанные с ними понятия наведенных потенциалов (английский термин *wake* мы будем переводить как *наведенный*, хотя

точнее было бы *оставленный*; существуют также эквиваленты *спутный*, *кильватерный*).

1.1. Определения и свойства. *Продольный импеданс*. Рассмотрим циклический ускоритель, средний радиус равновесной орбиты в котором равен R . Введем принятую в теории циклических ускорителей [4] цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , ось z которой перпендикулярна плоскости ускорителя $z = 0$, θ — азимут вдоль орбиты. Пусть в вакуумной камере ускорителя движется «жесткий» сгусток с зарядом q , распределение плотности которого имеет вид

$$\rho(r, \theta, z, t) = q \lambda(\theta - \omega_0 t) f(r, z), \quad (1.1)$$

где $\omega_0 = \beta c/R$ и βc — угловая и линейная скорости равновесной частицы, $f(r, z)$ и $\lambda(\theta')$ — поперечное и продольное распределения заряда сгустка, нормированные условиями

$$\iint r dr dz f(r, z) = 1; \int_0^{2\pi} d\theta' \lambda(\theta') = 1.$$

Предположение «жесткости» сгустка, как обычно, означает, что изменения его формы происходят столь медленно, что распределение заряда можно считать стационарным в связанной со сгустком системе координат: $\lambda(\theta', t) = \lambda(\theta')$, где $\theta' = \theta - \omega_0 t$. При этом мы пренебрегаем синхротронными колебаниями частиц сгустка. Поскольку сейчас речь идет о продольных эффектах, мы также не учитываем бетатронные колебания и полагаем, что плотность тока сгустка имеет лишь продольную составляющую j_θ (ниже индекс θ опускаем):

$$j(r, \theta, z, t) = \omega_0 r \rho(r, \theta, z, t). \quad (1.2)$$

Ток в камере

$$J(\theta, t) = \int r dr \int dz j(r, \theta, z, t) = \omega_0 q \lambda(\theta - \omega_0 t). \quad (1.3)$$

От продольного поля $E(r, \theta, z, t)$, возбуждаемого в камере пучком, естественно перейти к усредненному с весом $f(r, z)$ по поперечным координатам полю:

$$E(\theta, t) = \int r dr \int dz f(r, z) E(r, \theta, z, t). \quad (1.4)$$

Введем фурье-представление для усредненных величин следующего вида:

$$E(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} E_n(\omega), \quad (1.5)$$

и аналогично для $J(\theta, t)$. Из (1.3) легко найти гармоники тока $J_n(\omega) = \omega_0 q \lambda_n \delta(\omega - \omega_0 n)$, где $\lambda_n = \int_0^{2\pi} d\theta \exp(-in\theta) \lambda(\theta)/(2\pi)$ и $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Из линейности уравнений Максвелла следует линейная связь между гармониками тока и гармониками возбужденного в камере поля. Так, если камера ускорителя азимутально однородна (нет зависимости от θ), то связь имеет вид

$$-2\pi RE_n(\omega) = Z_n(\omega) J_n(\omega), \quad (1.6)$$

где функция $Z_n(\omega)$ называется *продольным импедансом связи пучка с вакуумной камерой*. Отметим, что понятие импеданса связи камеры с пучком впервые введено, по-видимому, в работе [5], хотя все вычисления, позволяющие определить продольный и поперечный импеданс гладкой камеры, проведены в еще более ранних работах [6, 7]. Часто вместо взвешенного среднего по поперечным координатам [8] в (1.4) берут либо поле в центре пучка — $E(r = R, \theta, z = 0, t)$, либо просто среднее по поперечному сечению пучка поле [9]. Это эквивалентно выбору в (1.4) $f(r, z) = \delta(z) \delta(r - R)/R$ или в виде произведения функций Хэвисайда, например, для пучка с круглым сечением радиуса a $f(r, z) = \Theta(a - |z|) \Theta(\sqrt{a^2 - z^2} - |r - R|)/(\pi a^2 r)$.

В более реалистичном случае, когда камера имеет различные неоднородности, вклад в n -ю гармонику поля дают, вообще говоря, все гармоники тока:

$$-2\pi RE_n(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{nm}(\omega) J_m(\omega). \quad (1.7)$$

Величину $Z_{nm}(\omega)$ естественно назвать *матрицей продольного импеданса связи* [3, 8].

Поскольку на n -ю гармонику возмущения равновесного распределения заряда пучка оказывает систематическое влияние лишь n -я гармоника возбужденного в камере поля, в уравнении (1.7) обычно ограничиваются лишь диагональными членами

$$-2\pi RE_n(\omega) \cong Z_{nn}(\omega) J_n(\omega), \quad (1.8)$$

причем $\omega = n\omega_0$, т.к. $E_n(\omega)$ и $J_n(\omega)$ пропорциональны $\delta(\omega - \omega_0 n)$. При этом *продольным импедансом* называют функцию $Z(\omega) \equiv Z_{nn}(n\omega_s)$. Однако для исследования взаимного влияния встречных пучков, дви-

жущихся в одной камере, существенны также недиагональные элементы матрицы импеданса $Z_{-n,n}(\omega)$ (см. [10]).

Отметим, что из представления (1.5) вытекает $E_{-n}(-\omega) = E_n^*(\omega)$ и $J_{-n}(-\omega) = J_n^*(\omega)$, поэтому из определения (1.7) следует $Z_{-n,-n}(-\omega) = Z_{nn}^*(\omega)$.

Вычисление импеданса камеры представляет собой чисто электродинамическую задачу, причем импеданс, как функция, характеризующая камеру ускорителя, не должен зависеть от характеристик пучка¹. Для исследования устойчивости пучка из кинетического уравнения получают вторую связь между гармониками поля и тока

$$J_m(\omega) = -2\pi R \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{mn}(\omega) E_n(\omega), \quad (1.9)$$

где $\Pi_{mn}(\omega)$, называемая матрицей проводимости пучка, включает в себя информацию о характеристиках пучка (см., например, [3]). После того как вычислены матрицы импеданса камеры и проводимости пучка, подстановка (1.7) в уравнение (1.9) приводит к задаче на собственные значения (СЗ) для спектра возбуждений пучка. Наличие СЗ с $\text{Im } \omega > 0$ указывает на неустойчивость пучка, величина $\text{Im } \omega$ определяет инкремент неустойчивости.

С целью показать эквивалентность определений (1.6)—(1.8) другим часто используемым определениям импеданса, а также имея в виду обобщение на непериодическую структуру, рассмотрим в качестве модели камеры ускорителя бесконечную периодическую структуру с периодом $D = 2\pi R$. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , направив ось z по оси камеры (рис. 1, а, б). Все сказанное выше переносится на такую структуру с изменением обозначений и нормировки распределений:

$$\iint r dr d\varphi f(r, \varphi) = 1, \quad \int_0^{2\pi R} dz' \lambda(z') = 1.$$

В приближении «жесткого» сгустка

$$\lambda(z - \beta ct) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{ik_n z} \lambda_n \delta(\omega - \beta c k_n),$$

¹Это не совсем так. Например, в выражения для импеданса гладкой камеры (2.2), (2.3) входит радиус пучка — в член пространственного заряда.

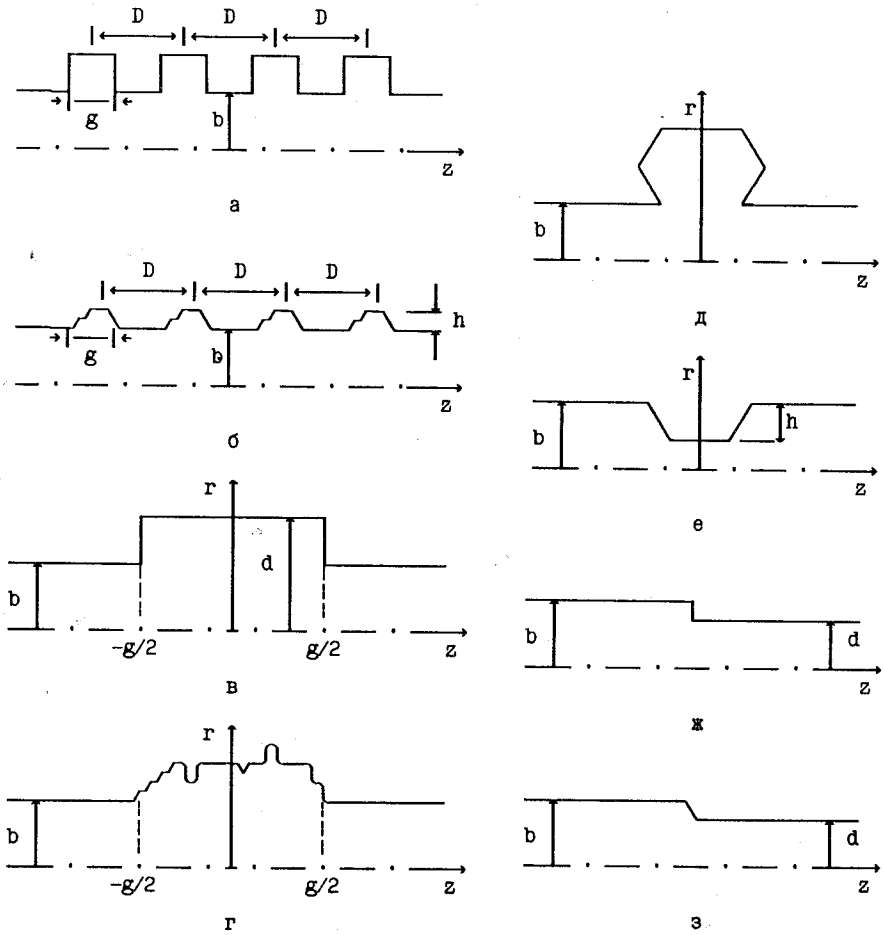


Рис. 1. Неоднородности вакуумной камеры

где $k_n = n/R$, $\lambda_n = \int_0^{2\pi R} dz \exp(-ik_n z) \lambda(z) / (2\pi R)$, и фурье-гармоника тока

$$J_n = 2\pi q \beta c \lambda_n \delta(\omega - \beta c k_n).$$

Все остальные рассуждения аналогичны.

В работе [9] в качестве возмущения плотности заряда равновесного распределения рассматривается отдельная мода

$$\rho(r, \varphi, z, t) = \rho_n \exp(ik_n z - i\omega_n t) \theta(a - r),$$

распространяющаяся в камере с фазовой скоростью $\omega_n/k_n = \beta c$, равной скорости частиц пучка. Соответственно ток возмущения в камере

$$J(z, t) = \rho_n \beta c \pi a^2 \exp(ik_n z - i\omega_n t).$$

Будем решать уравнения Максвелла в ω -представлении с током $\rho_n \beta c \exp(ik_n z) \theta(a - r)$ в правой части (временную зависимость $\exp(-i\omega_n t)$ всех величин опускаем). Обозначим полученную комплексную амплитуду продольной компоненты поля $E_z(r, z)$ и среднее по поперечному сечению пучка

$$\overline{E_z(r, z)} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi E_z(r, z).$$

Нетрудно получить выражения для фурье-гармоник:

$$\begin{aligned} J_m(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dz e^{-ik_m z} J_z(z, t) = \\ &= 2\pi \rho_n \beta c \pi a^2 \delta(\omega - \omega_n) \delta_{mn}; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$E_l(\omega) = \delta(\omega - \omega_n) \frac{1}{2\pi R} \int_0^R dz e^{-ik_l z} \overline{E_z(r, z)}.$$

Подставляя (1.10) в определение матрицы импеданса (1.7), получим матричный элемент $Z_{ln}(\omega = \omega_n)$. Выражение для продольного импеданса связи

$$Z_n(\omega) \equiv Z_{nn}(\omega = \omega_n)$$

примет вид

$$Z_n(\omega) = - \frac{1}{\rho_n \beta c \pi a^2} \int_0^{2\pi R} dz e^{-ik_l z} \overline{E_z(r, z)}, \quad (1.11)$$

что совпадает с определением, используемым в работе [9].

Перейдем к случаю непериодической структуры. Будем рассматривать модель вакуумной камеры, состоящую из (бесконечной)

гладкой трубы, на которой могут быть расположены одна или несколько неоднородностей (рис.1,в—з). Разумеется, камера любого ускорителя либо замкнута, либо имеет конечную длину. Тем не менее идеализированная бесконечная структура удобна для вычисления импеданса элементов камеры, достаточно удаленных от прочих неоднородностей. Пусть вдоль оси z камеры со скоростью βc движется «жесткий» сгусток с распределением плотности заряда

$$\rho(x, y, z, t) = qf(r, z) \lambda(z - \beta ct),$$

где продольное и поперечное распределения нормированы условиями

$$\iint dx dy f(x, y) = 1; \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda(z') = 1,$$

так что полный заряд сгустка равен q . Ток в камере $J_z(z, t) = q\beta c \lambda(z - \beta ct)$. Как и выше, введем усредненные по поперечным координатам с весом $f(x, y)$ поля

$$E(z, t) = \iint dx dy f(x, y) E(x, y, z, t),$$

но вместо фурье-представления (1.5) будем использовать двойной интеграл Фурье:

$$E_z(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikz} E_z(k, \omega). \quad (1.12)$$

Тогда $J_z(k, \omega) = 2\pi q\beta c \tilde{\lambda}(k) \delta(\omega - \beta ck)$, где $\tilde{\lambda}(k) = \int dz \exp(-ikz) \lambda(z)$. Поскольку в гармонику поля с волновым числом k в неоднородной структуре дают вклад всевозможные гармоники тока, то естественным обобщением уравнения (1.7), вводящего матрицу импеданса, на бесконечную непериодическую структуру будет

$$E_z(k, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' Z(k, k'; \omega) J_z(k', \omega). \quad (1.13)$$

Ядро интегрального оператора продольного импеданса в определении (1.13) имеет размерность импеданса (Ом) и в случае однородной по z структуры (гладкая камера) диагонально:

$$Z_0(k, k'; \omega) = \frac{2\pi}{L} \delta(k - k') Z_L(k, \omega),$$

где L — длина структуры. Величина $Z_L(k, \omega)/L$ — продольный импеданс на единицу длины гладкой камеры (см. разд.2). Так как в приближении

«жесткого» сгустка $J_z(k', \omega) \equiv \hat{J}_z(k' = \omega/\beta c) \delta(\omega - \beta c k')$, интеграл в (1.13) снимается:

$$E_z(k, \omega) = -Z(k, k' = \frac{\omega}{\beta c}; \omega) \frac{1}{2\pi \beta c} \hat{J}_z(k' = \frac{\omega}{\beta c}).$$

Из динамических соображений следует, что систематическое воздействие на сгусток оказывает лишь синхронная с ним гармоника поля, т.е. для динамики интерес представляет лишь $E_z(k = \omega/\beta c, \omega)$. Тогда, аналогично (1.8), продольный импеданс структуры

$$Z(\omega) \equiv Z(k = \frac{\omega}{\beta c}, k' = \frac{\omega}{\beta c}; \omega) = -2\pi \beta c \frac{E_z(k = \omega/\beta c, \omega)}{\hat{J}_z(k' = \omega/\beta c)}. \quad (1.14)$$

Обычно удобнее рассчитывать поля в ω -представлении, т.е. находить величины $E(z, \omega) = \int dk \exp(ikz)E(k, \omega)/(2\pi)$, а не $E(k, \omega)$. Обращая это преобразование Фурье, запишем (1.14) в виде

$$Z(\omega) = -\frac{2\pi \beta c}{\hat{J}_z(\omega/\beta c)} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-i \frac{\omega z}{\beta c}) E_z(z, \omega). \quad (1.15)$$

Если рассматривается точечный заряд q , то $f(x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$, $\lambda(z) = -\delta(z)$; $\tilde{\lambda}(k) = 1$ и $\hat{J}_z(k') = 2\pi q \beta c$. Тогда из (1.15) получим

$$Z(\omega) = -\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-i \frac{\omega z}{\beta c}) E_z(z, \omega), \quad (1.16)$$

причем $E_z(z, \omega)$ берется при x_0, y_0 — на траектории заряда. Выражение (1.16) совпадает с обычно используемым определением продольного импеданса для бесконечной трубы с неоднородностью, см. [11].

Продольный наведенный потенциал. Понятие *продольного наведенного потенциала* можно ввести следующим образом. Пусть точечный заряд q движется со скоростью $v \equiv c$ параллельно оси z вакуумной камеры с поперечным смещением $\mathbf{r}' = (x', y')$ от оси. Тогда для точечного тестового заряда Q , следующего за лидирующим зарядом q с той же скоростью на расстоянии s и с поперечным смещением \mathbf{r} , потери энергии можно записать в виде

$$\Delta U \equiv QqW^\delta(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (1.17)$$

где функцию $W^\delta(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ принято называть *продольным наведенным потенциалом* точечного заряда. Если обозначить $E(\mathbf{r}, z, t)$ возбужденное зарядом q в камере поле, то величина ΔU в (1.17) может быть вычислена интегрированием работы поля E над зарядом Q , откуда

$$\begin{aligned}
 W^\delta(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dt \beta c E_z(\mathbf{r}, z = \beta ct - s, t) = \\
 &= -\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(\mathbf{r}, z, t = \frac{z+s}{\beta c}).
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

Размерность W^δ — В/Кл, так что называть его потенциалом, строго говоря, нельзя². Тем не менее такая терминология сложилась исторически. Отметим также, что в определении (1.18) сделан ряд предположений.

- Предполагается, что заряды ультрарелятивистские, т.е. $\beta \rightarrow 1$, и в W^δ опущена зависимость от β . При $\beta < 1$ понятие наведенного потенциала становится значительно менее удобным [12].
- Пренебрегают изменением траектории тестового заряда под действием индуцированных в структуре полей, что обычно оправданно при $\beta \rightarrow 1$.
- Наконец, неявно делается предположение, что потери энергии и, следовательно, (1.18) не зависят от абсолютных координат z_q, z_Q зарядов, а лишь от их относительного расположения, т.е. от $s = z_q - z_Q$. В однородной (обладающей трансляционной инвариантностью по z) структуре это очевидно. В ином случае следует выделить систематическое воздействие, например, в периодической структуре рассматривать средние по периоду величины — см. ниже.

Одно из важнейших свойств наведенного потенциала следует из соображений причинности ($v \rightarrow c$):

$$W^\delta(s) = 0 \text{ при } s < 0.$$

Продольный импеданс связи можно определить [12,11] как фурье-образ $W^\delta(s)$ ³:

$$Z(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\beta c} \exp(i \frac{\omega s}{\beta c}) W^\delta(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \tag{1.19}$$

Подставляя $W^\delta(s)$ из (1.18), простой заменой переменных получим

²По этой причине некоторые авторы [11,1] предпочитают называть $W^\delta(s)$ точечной функцией отклика (point wake function).

³Часто при этом полагают $\mathbf{r}' = \mathbf{r} = 0$.

$$Z(\omega) = -\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-i \frac{\omega z}{\beta c}) E_z(z, \omega),$$

что совпадает с полученным выше — см. (1.16).

Связь (1.19) $Z(\omega)$ с наведенным потенциалом $W^\delta(s)$ позволяет установить ряд аналитических свойств продольного импеданса как функции частоты в ультрарелятивистском пределе ($\beta \rightarrow 1 \Leftrightarrow \gamma \rightarrow \infty$). Продолжим аналитически функцию $Z(\omega)$ в комплексную плоскость ω . Тогда, поскольку

- $\text{Im } W^\delta(s) = 0$, то $Z(-\omega) = Z^*(\omega)$, т.е. $\text{Re } Z(\omega)$ — четная, $\text{Im } Z(\omega)$ — нечетная функция;
- $W^\delta(s) = 0$ при $s < 0$, все особенности функции $Z(\omega)$ лежат в нижней полуплоскости;
- $W^\delta(s) = \int_0^{\infty} d\omega \text{Re } Z(\omega)/\pi$ — конечная величина,

асимптотическое поведение $\text{Re } Z(\omega) \sim \omega^{-\alpha}$, $\alpha > 1$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Из этих свойств следуют дисперсионные соотношения между $\text{Re } Z$ и $\text{Im } Z$:

$$\begin{aligned} \text{Im } Z(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} \text{P.v.} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\text{Re } Z(\xi)}{\xi^2 - \omega^2}, \\ \text{Re } Z(\omega) &= \frac{2}{\pi} \text{P.v.} \int_0^{\infty} d\xi \xi \frac{\text{Im } Z(\xi)}{\xi^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Используя определение (1.17) наведенного потенциала, нетрудно получить выражение для энергетических потерь на одну частицу одиночного сгустка с нормированным распределением плотности заряда $\rho(s, \mathbf{r})$, $\int ds d\mathbf{r} \rho(s, \mathbf{r}) = 1$. Коэффициент потерь (например, см. [11])

$$k \equiv \frac{\Delta U}{2} = \int ds_1 d\mathbf{r}_1 ds_2 d\mathbf{r}_2 \rho(s_1, \mathbf{r}_1) \rho(s_2, \mathbf{r}_2) W^\delta(s_1 - s_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (1.21)$$

Если пренебречь поперечными размерами сгустка, то $\rho(s, \mathbf{r}) = \lambda(s)\delta(\mathbf{r})$ и

$$k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \text{Re } Z(\omega) |\lambda(\omega)|^2, \quad (1.22)$$

где $\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \exp(-i \omega s/c) \lambda(s)$ — гармоника спектра сгустка. Для гауссовского сгустка со среднеквадратичной длиной l $\lambda(s) =$

$= \exp(-s^2/2t^2)/(\sqrt{2\pi}t)$, $\lambda(\omega) = \exp(-(\omega l/c)^2/2)$, и (1.22) приобретает вид

$$k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \operatorname{Re} Z(\omega) \exp[-(\omega l/c)^2]. \quad (1.23)$$

Наряду с наведенным потенциалом точечного заряда $W^\delta(s)$ часто вводят наведенный потенциал сгустка⁴

$$W(s) = q \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) W^\delta(s-z) = q \int_{-\infty}^s dz \lambda(z) W^\delta(s-z) \quad (1.24)$$

или

$$W(s) = q \int_0^{\infty} dz \lambda(s-z) W^\delta(z).$$

Здесь $q\lambda(z)$ — продольное распределение заряда сгустка. Коэффициент потерь (1.21) выражается через $W(s)$ как

$$k = \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} ds \lambda(s) W(s).$$

В работе [8] продольный наведенный потенциал для случая циклического ускорителя определяется как среднее по периоду обращения от $W(\omega_0\tau, t) = -2\pi RE(\omega_0(t-\tau), t)$. В азимутально-однородном ускорителе зависимость W от t исчезает, и с учетом (1.6)

$$W(\omega_0\tau) = \omega_0 q \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0\tau} \lambda_n Z_{nn}(n\omega_0). \quad (1.25)$$

В случае, когда камера имеет неоднородности, используя (1.7), получим

$$W(\omega_0\tau, t) = \omega_0 q \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0\tau} Z_{nm}(m\omega_0) \lambda_m e^{i(n-m)\omega_0 t}.$$

Усредняя это выражение по времени по периоду $T = 2\pi/\omega_0$, мы выделяем систематическое воздействие, и вновь получаем формулу (1.25), аналогичную (1.24).

⁴Определенная в (1.24) величина имеет размерность В, что оправдывает название «потенциал».

Введенный выше *продольный импеданс связи* (см. (1.6), (1.8), (1.11) и (1.15)) имеет смысл отношения гармонике наведенного в структуре напряжения к величине гармонике возмущения тока, создавшего это напряжение.

Поперечный импеданс и наведенный потенциал. Если пучок смещен в камере относительно ее оси в поперечном направлении, за счет индуцированных в стенках камеры токов возникает поперечная сила, действующая на пучок. Отношение гармоники интегральной поперечной силы, действующей на отдельную частицу сгустка, к величине гармоники создавшего эту силу дипольного момента тока пучка называют *поперечным (дипольным) импедансом связи*.

Одно из определений поперечного импеданса дано в работе [13]. Рассмотрим однородный круглый пучок радиуса a в цилиндрической камере радиуса b , ось z направим по оси камеры, период структуры — $2\pi R$. Поперечные колебания пучка с малой амплитудой d в вертикальном направлении (вдоль оси Oy , азимутальный угол $\varphi = \pi/2$) имитируются введением поверхностного возмущения плотности заряда пучка:

$$\rho = \rho_n d \sin \varphi \delta(a - r) \exp(ik_n z - i \omega_n t),$$

распространяющегося в камере с фазовой скоростью $\omega_n/k_n = \beta c$, где $\omega_n = n \omega_0$ и $k_n = n/R$. Соответствующая плотность тока $\mathbf{j} = (j \sin \varphi, j \cos \varphi, \rho \beta_p c)$, где $j = i \rho_n d k_n c (\beta_p - \beta) \theta(a - r) \exp(ik_n z - i \omega_n t)$; $\beta_p c$ — продольная скорость частиц пучка, отличная, вообще говоря, от фазовой скорости βc волны возмущения. Далее рассуждения аналогичны тем, что проводились при введении продольного импеданса — уравнения (1.10) и (1.11). Находя из уравнений Максвелла в ω -представлении амплитуды полей, получим усредненную по сечению пучка поперечную составляющую силы Лоренца⁵:

$$\frac{1}{e} \mathbf{F}_\perp(z, t) = \overline{[\mathbf{E}(r, \varphi, z) + \beta_p c \times \mathbf{B}(r, \varphi, z)]_\perp} \exp(-i \omega_n t).$$

Аналогично (1.10) перейдем к фурье-гармоникам дипольного момента

$$J_n(\omega) d = 2\pi \rho_n \beta_p c \pi a^2 d \delta(\omega - \omega_n)$$

⁵Поскольку при $\rho, j = \sin \varphi$ компоненты полей $E_z, E_r, H_\varphi \sim \sin \varphi$, а $E_\varphi, H_z, H_r \sim \cos \varphi$, нетрудно убедиться, что после усреднения $\overline{F_x} = 0$, т.е. остается лишь вертикальная составляющая силы.

и интегральной силы

$$\frac{2\pi R}{e} F_{\perp n}(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_n) \int_0^{2\pi R} dz e^{-ik_n z} \overline{[\mathbf{E}(r, \varphi, z) + Z_0 \boldsymbol{\beta}_p \times \mathbf{H}(r, \varphi, z)]_{\perp}},$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ Ом. Поперечный импеданс принято определять как

$$Z_{\perp}(\omega) \equiv Z_{\perp n}(\omega_n) = -i \frac{2\pi R F_{\perp n}(\omega)}{e \beta_p J_n(\omega) d},$$

причем множитель i вводится потому, что фазы отклоняющего поля и дипольного момента отличаются на $\pi/2$. Таким образом,

$$Z_{\perp}(\omega) = - \frac{i}{\beta_p^2 c d \rho_n \pi a^2} \int_0^{2\pi R} dz e^{-ik_n z} \overline{[\mathbf{E}(r, \varphi, z) + Z_0 \boldsymbol{\beta}_p \times \mathbf{H}(r, \varphi, z)]_{\perp}}. \quad (1.26)$$

Размерность Z_{\perp} — Ом/м. Отметим, что, кроме явной зависимости в (1.26) от β_p , Z_{\perp} зависит также через поля от $\beta = \omega/kc$. В выражении для поперечного импеданса гладкой камеры (см. (2.3)) зависимость от β выпадает; однако, если вычисляется резонансный импеданс неоднородности, результат зависит от соотношения β и β_p через комбинации $(\beta - \beta_p)$ и $(1 - \beta\beta_p)$. Учет бетатронных колебаний позволяет наложить связь $\beta = (1 \pm Q/n) \beta_p$, где Q — бетатронная частота.

Можно определить аналог матрицы (или интегрального оператора) импеданса и в поперечном случае. Рассмотрим точечный заряд q , движущийся со скоростью $\beta_p c$ вдоль оси z камеры со смещением r' от оси. Нетрудно найти гармонику дипольного момента тока:

$$J(k, \omega) r' = 2\pi q \beta_p c r' \delta(\omega - \beta_p ck).$$

Поперечную отклоняющую силу, действующую на единичный заряд в точке (r', z) в момент t , представим в виде двойного интеграла Фурье аналогично (1.12):

$$\frac{1}{e} F_{\perp}(r, z, t) = [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_{\perp}(r, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega e^{-i\omega t} \int dk e^{ikz} \frac{1}{e} F_{\perp}(r, k, \omega).$$

Поскольку вклад в гармонику отклоняющего поля с волновым числом k дают, вообще говоря, все гармоники дипольного момента, введем оператор поперечного импеданса $Z_{\perp}(k, k', \omega)$ следующим образом:

$$-\frac{i}{\beta_p} \frac{1}{e} F_{\perp}(\mathbf{r}, k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' Z_{\perp}(k, k', \omega) r' J(k', \omega) \quad (1.27)$$

(ср. с определением (1.13)). Подставляя $J(k', \omega)$ и выражая $F_{\perp}(\mathbf{r}, k, \omega)$ через $F_{\perp}(\mathbf{r}, z, \omega)$, получим

$$\begin{aligned} Z_{\perp}(k, \omega) &= Z_{\perp}(k, k' = \omega/\beta_p c, \omega) = \\ &= \frac{-i}{\beta_p q r'} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} [E(\mathbf{r}, z, \omega) + Z_0 \beta_p \times H(\mathbf{r}, z, \omega)]_{\perp}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Отметим, что аргументы k и ω в Z_{\perp} , вообще говоря, независимы. Из соображений динамики они, с учетом бетатронных колебаний, могут быть связаны: $k = (\omega \pm \omega_{\beta})/\beta_p c$.

Иной способ определения поперечного импеданса — через наведенный потенциал. Поперечный импульс, получаемый зарядом Q , движущимся вдоль оси z камеры со смещением $\mathbf{r} = (x, y)$ от оси на расстоянии s от лидирующего заряда q (смещение \mathbf{r}' , скорость $v = \beta c \sim c$), можно записать в виде

$$\mathbf{p}_{\perp} = \frac{Qq}{c} \mathbf{W}_{\perp}^{\delta}(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (1.29)$$

Если обозначить $E(\mathbf{r}, z, t)$ возбуждаемое зарядом q в камере поле, то поперечный наведенный потенциал (точнее, точечная функция) имеет вид

$$\mathbf{W}_{\perp}^{\delta}(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dz [E + v \times B]_{\perp}(\mathbf{r}, z, t = (z + s)/v), \quad (1.30)$$

т.е. отношение интегрального отклоняющего поля к величине заряда⁶. Для периодической структуры или элемента камеры ускорителя интервал интегрирования по z конечен. Допущения здесь сделаны те же, что и при введении продольного наведенного потенциала.

Поперечный импеданс можно определить как фурье-преобразование от $-i \mathbf{W}_{\perp}^{\delta}/r'$:

$$Z_{\perp}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{r'} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{\beta c} \exp\left(i \frac{\omega s}{\beta c}\right) \mathbf{W}_{\perp}^{\delta}(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (1.31)$$

⁶Для малых r' выполняется $W_{\perp}^{\delta} \sim r'$ (см. ниже), поэтому иногда в правую часть определения (1.29) вводится множитель $1/r'$ [11].

После подстановки (1.30) в (1.31) получим

$$Z_{\perp}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{qr'} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-i \frac{\omega z}{\beta c}\right) [E + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_{\perp}(\mathbf{r}, z, \omega), \quad (1.32)$$

что совпадает с (1.28) при $\beta \rightarrow 1, \beta_p \rightarrow 1, k = \omega/\beta c$ с точностью до обозначений.

Теорема Пановски — Венцеля [14] связывает поперечный импульс p_{\perp} тестового заряда Q , полученный при пролете через замкнутый резонатор, с полем, возбужденным в этом резонаторе ранее пролетевшим зарядом либо ВЧ-генератором:

$$p_{\perp} = Q \int_0^L dz \nabla_{\perp} A_z(\mathbf{r}, z, t=z/c),$$

при условии $A_{\perp} = 0$ при $z = 0, L$. Здесь интегрирование идет по траектории заряда Q внутри резонатора, A — векторный потенциал поля в нем, ∇_{\perp} — двумерный оператор градиента в плоскости $z = \text{const}$. Это соотношение позволяет связать продольный (1.18) и поперечный (1.30) наведенные потенциалы:

$$\frac{\partial W_{\perp}^{\delta}(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial s} = \nabla_{\perp} W^{\delta}(s, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (1.33)$$

Связь (1.33) работает для многих практически важных случаев [12], в частности, в цилиндрически-симметричной структуре и для резонатора произвольной формы в случае, когда применимо приближение «замкнутого» резонатора.

Фурье-преобразования (1.19) и (1.31) наведенных потенциалов в импедансы позволяют получить из (1.33) связь поперечного и продольного импедансов при $\gamma \rightarrow \infty$:

$$Z_{\perp}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{c}{\omega r'} \nabla_{\perp} Z(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (1.34)$$

Высшие мультиполи. Наряду с продольным и поперечным импедансами и потенциалами вводят также импедансы и наведенные потенциалы высших мультипольностей (например, [1,12]). Рассмотрим аксиально-симметричную структуру, в которой движется параллельно оси z со скоростью $v \cong c$ лидирующий заряд q и на расстоянии s от него тестовый заряд Q . Пусть поперечные координаты заряда q $\mathbf{r}' = (r', 0)$, тестового заряда — $\mathbf{r} = (r, \varphi)$. Создаваемое первым зарядом поле может быть разложено по азимутальным гармоникам $\cos m\varphi$, для δ -функции исполь-

зум разложение $2\pi\delta(\varphi) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\varphi$. Граничные условия в аксиально-симметричной структуре не смешивают азимутальные гармоники $E^{(m)}, H^{(m)}$ — решения уравнений Максвелла для фиксированного m — при различных m . Исходя из этого, определим, аналогично (1.18) и (1.30), m -полные наведенные потенциалы

$$\begin{aligned}
 W_{||m}^{\delta}(s, r, r') &= -\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z^{(m)} \left(r, z, t = \frac{z+s}{c} \right) \cos m\varphi; \\
 W_{\perp m}^{\delta}(s, r, r') &= \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dz \{ e_r (E_r^{(m)} - Z_0 H_{\varphi}^{(m)}) \cos m\varphi + \\
 &\quad + e_{\varphi} (E_{\varphi}^{(m)} + Z_0 H_r^{(m)}) \sin m\varphi \}.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Как и ранее, полагаем, что в случае бесконечной периодической структуры рассматриваются усредненные по периоду величины, и поля зависят от z, t только через комбинацию $(z - ct)$. В формулах (1.35) выделена зависимость от угла φ , следующая из уравнений Максвелла при $\rho, j_z \sim \cos m\varphi$. Можно показать [15,16,12], что в аксиально-симметричной структуре

$$W_{||m}^{\delta}(s, r, r') = r^m r'^m F'_m(s) \cos m\varphi;$$

$$W_{\perp m}^{\delta}(s, r, r') = m r^{m-1} r'^m F_m(s) \{ e_r \cos m\varphi - e_{\varphi} \sin m\varphi \}, \tag{1.36}$$

причем при $m = 0$ $F_0(s) \equiv 0$; $F'_0(s) \equiv W^{\delta}(s, 0, 0)$ (ср. (1.18)), и при $m \geq 1$ $F'_m(s) = \frac{d}{ds} F_m(s)$ — см., напр., [12]. Кроме того, поскольку $\beta \rightarrow 1$, причинность требует $F'_m(s) \sim \Theta(s)$. Легко проверить, что определенные в (1.36) m -полные потенциалы удовлетворяют соотношению (1.33). Из определения (1.36) видно, что $W_{\perp 0}^{\delta} \equiv 0$, а продольный наведенный потенциал $W^{\delta}(s, r, r') \equiv W_{||0}^{\delta}(s, r, r')$ не зависит от r, r' . Кроме того, дипольный поперечный потенциал $W_{\perp}^{\delta}(s, r, r') \equiv W_{\perp 1}^{\delta}(s, r, r') = r' F_1(s)$, т.е. направление поперечной отклоняющей силы совпадает с направлением отклонения лидирующего заряда и не зависит от радиального положения тестового. Отметим также, что при $r = r'$, т.е. когда оба заря-

да летят по одной траектории, $W_{\varphi m}^{\delta} = 0$, поскольку $\varphi = 0$, и вектор m -польного поперечного потенциала направлен по радиусу.

Из размерных соображений следует, что в (1.36) $F'_m(s) \sim b^{-2m}$, где b — характерный поперечный размер, например, радиус гладкой камеры. Поскольку обычно в ускорителях поперечные отклонения r, r' заметно меньше b , то m -польные ($m \geq 1$) наведенные потенциалы подавлены:

$$W_{\parallel m}^{\delta} \sim \left(\frac{r}{b}\right)^m \left(\frac{r'}{b}\right)^m,$$

$$W_{\perp m}^{\delta} \sim \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} \left(\frac{r'}{b}\right)^m.$$

Это позволяет ограничиваться при исследовании динамики пучка лишь низшими — продольным монопольным ($m = 0$) и поперечным дипольным ($m = 1$) — наведенными потенциалами и, соответственно, импедансами.

Определим теперь m -польные продольные и поперечные импедансы аналогично (1.19) и (1.31) через фурье-преобразования W_m^{δ} , отделив зависимости (1.36) от поперечных координат ⁷:

$$Z_{\parallel m}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} \exp\left(i \frac{\omega s}{c}\right) F'_m(s),$$

$$Z_{\perp m}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} \exp\left(i \frac{\omega s}{c}\right) F_m(s). \quad (1.37)$$

При таком определении мультипольных импедансов размерности: $Z_{\parallel m}$ — Ом/м^{2m}; $Z_{\perp m}$ — Ом/м^{2m-1}. Из теоремы Панофски — Венцеля (1.33) с учетом связи F_m и F'_m получаются из соотношения между импедансами одинаковой мультипольности при $m \geq 1$:

$$Z_{\parallel m}(\omega) = \frac{\omega}{c} Z_{\perp m}(\omega). \quad (1.38)$$

Наконец, упомянем одно соотношение между импедансами различной мультипольности — монопольным продольным и дипольным поперечным [17]:

⁷Определенный ранее (1.31) дипольный поперечный импеданс Z_1 связан с введенным здесь как $Z_1 = Z_{\perp 1} r'/r$.

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{2c}{\beta b^2} \frac{Z(\omega)}{\omega} = \frac{2R}{b^2} \frac{Z(\omega)}{n}, \quad (1.39)$$

где R — средний радиус ускорителя, b — радиус сечения вакуумной камеры, $n = kR = \omega R/\beta c$ — гармоника частоты обращения. Это приближенное соотношение часто используется для оценки Z_{\perp} , поскольку его вычисление, как правило, сложнее, чем продольного. Уравнение (1.39) можно получить из (1.38) при $m = 1$, в котором полагают из качественных соображений $Z_{||1} \cong Z/b^2$, причем коэффициент $2/\beta$ вводится с тем, чтобы (1.39) выполнялось точно для обусловленного конечной проводимостью стенки низкочастотного импеданса гладкой камеры — см. уравнения (2.2) и (2.3).

После того как определены исходные понятия, естественно задаться вопросом, для чего нужно знать импедансы и/или наведенные потенциалы.

1.2. Эффекты, вызываемые взаимодействием пучка с вакуумной камерой. *Потери энергии пучка.* Теряемая одиночным сгустком частиц из-за взаимодействия с определенным элементом камеры энергия $\Delta U = kq^2$, где q — заряд сгустка, k — коэффициент потерь данного элемента, определенный выше формулами (1.21) — (1.23). В случае, когда через элемент проходит периодическая последовательность сгустков и поля, возбуждаемые передними, не успевают затухнуть к моменту прихода последующих сгустков, интерференция полей может существенно увеличить потери — см., например, обзор [11] и ссылки в нем. Из выражений (1.22) и (1.23) видно, что потери определяются в основном поведением $\text{Re } Z$ в области частот, меньших характерной частоты сгустка $\omega \approx c/l$. Для характерного поперечного размера камеры b частота отсечки $\omega_c \approx c/b$. Таким образом, высокочастотное ($\omega \gg \omega_c$) поведение $\text{Re } Z$ влияет на потери лишь в ускорителях с очень короткими ($l \ll b$) сгустками, например, в электронных линейных ускорителях.

— Низкочастотная реактивная часть продольного импеданса $\text{Im } Z(\omega)$ определяет *искажение потенциальной ямы*, создаваемой ускоряющим напряжением, что приводит к искажению формы сгустка [1]. С $\text{Im } Z(\omega)$ связаны эффекты неустойчивости «отрицательной массы» и увеличения длины сгустка (см. там же).

— Реактивные части продольного и поперечного импеданса вызывают сдвиги соответственно *синхротронной и бетатронной частоты*. Так, сдвиг бетатронной частоты в циклическом ускорителе:

$$\delta Q_{x,y} = - \frac{r_0 N}{2\pi \gamma Q_{x,y}} \frac{\text{Im } Z_{\perp x,y}}{Z_0}, \quad (1.40)$$

где $r_0 = q_0^2 / m_0 c^2$ — электромагнитный радиус ускоряемых частиц, N — полная интенсивность, $\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$, $Q_{x,y}$ — бетатронная частота.

- Наконец, исследование условий устойчивости пучка в ускорителях приводит к *ограничениям на допустимые величины импедансов связи* [18,19]. В качестве примера приведем известный критерий устойчивости несгруппированного пучка в циклическом ускорителе [18]:

$$\left| \frac{Z_n}{n} \right| \leq F \frac{\beta^2 \eta I_0 E}{e I_0} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2. \quad (1.41)$$

Здесь $n = \omega / \omega_0$ — номер продольной моды возмущения, $Z_n = Z(n \omega_0)$, I_0 — средний ток, $\eta = \alpha - 1/\gamma^2$, $\alpha = 1/\gamma_c^2$ — коэффициент расширения орбит, $E = \gamma m_0 c^2$, p — равновесный импульс, Δp — импульсный разброс; фактор F зависит от формы распределения по импульсам и для реальных распределений $F \cong 1$. Величина действительной части импеданса определяет инкремент неустойчивости. Ограничения типа (1.41) существуют и для поперечного импеданса.

Таким образом, информация об импедансах или о наведенных потенциалах позволяет рассчитать эффекты, обусловленные взаимодействием пучка с вакуумной камерой ускорителя. Анализы взаимодействия камера — пучок в терминах импедансов или с использованием наведенных потенциалов, в принципе, эквивалентны. Для линейных ускорителей более обычным является второй подход, в то время как для циклических машин часто удобнее работать в частотной области, т.е. с импедансами.

Задача определения импеданса (наведенного потенциала) для заданной геометрии вакуумной камеры или ее отдельных элементов уже более двух десятилетий является объектом исследований. Разработано немало методов ее решения, как теоретических, позволяющих рассчитать импеданс, так и экспериментальных, дающих возможность найти импеданс по результатам измерений на макетах или действующем ускорителе. Цель настоящего обзора — рассмотреть существующие методы расчета импедансов связи структур или отдельных элементов ускорителя. При этом наибольшее внимание уделено тем методам, которые представляются более важными в применении к большим протонным синхротронам, в частности, к УНК.

Следует упомянуть ряд обзорных работ по этой тематике [12, 20, 11]. Обзор Уилсона [12] по наведенным потенциалам служит хорошим введением в эту тему и содержит ссылки на более ранние работы, см. также [21, 22]. Представляет интерес лекция Энга [20] по импедансам, хотя содержит, в основном, результаты ее автора. Недавно появился хороший обзор [11]. В нем подробно обсуждаются вопросы поведения импеданса на высоких частотах, существенные для проектирования новых линейных e^+e^- -коллайдеров с очень короткими сгустками. Методам измерения импедансов посвящен обзор [23].

2. ИМПЕДАНСЫ ТИПИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КАМЕРЫ УСКОРИТЕЛЯ

2.1. Эффекты кривизны. В синхротронах камера в целом, если не принимать во внимание различные неоднородности, имеет тороидальную форму. В то же время при анализе взаимодействия пучка с камерой ее кривизну обычно не учитывают, рассматривая прямолинейную бесконечную периодическую структуру. Интуитивно ясно, что такой подход оправдан при большом радиусе кривизны. Количественно исследование возможности подобной замены проведено в недавних работах [24—27], там же содержатся ссылки на более ранние работы. Согласно [26] добавка к продольному импедансу за счет кривизны ⁸:

$$\frac{Z}{n} = iZ_0 \left(\frac{h}{\pi R} \right)^2 \left[A - 3B \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^2 \right], \quad (2.1)$$

где h — высота камеры (рассматривалась камера с прямоугольным поперечным сечением), R — радиус кривизны орбиты, $\nu = \omega h/c$ — безразмерная частота, коэффициенты A, B порядка 1. Выражение (2.1) применимо при $\nu < \sqrt{R/h}$ и дает очень малую добавку к импедансу ускорителей, где $h/R \ll 1$. В области частот $\nu > \sqrt{R/h}$ имеются обусловленные кривизной камеры резонансы. Согласно [25], для ускорителя SSC они дают R_{sh}/n порядка 10^{-3} Ом на частотах ~ 5000 ГГц, для тэватрона — 10^{-2} Ом при ~ 500 ГГц. Оценки для УНК, где $R = 3306$ м, $h \cong 6$ см, приводят к $R_{sh}/n \cong 10^{-2}$ Ом при частотах ~ 700 ГГц. Ясно, что такие величины импеданса не представляют опасности. Кроме того, неоднородности в

⁸В работе [27] получен иной результат, в частности, другой знак у второго члена.

кольце реального ускорителя — в первую очередь, прямолинейные промежутки — могут сильно подавить такие «резонансы кривизны», и приведенные цифры являются оценками сверху.

2.2. Импеданс гладкой камеры. Зная эффекты, к которым приводит кривизна камеры, мы можем рассматривать вакуумную камеру циклического ускорителя как бесконечную структуру с периодом, равным длине окружности ускорителя. Рассмотрим сначала вклад в импеданс гладкой части камеры, представляющей собой волновод с неизменным поперечным сечением. Для расчета полей, возбуждаемых в гладкой вакуумной камере током, решают уравнения Максвелла с граничными условиями (ГУ) на стенке камеры и условием периодичности и используют определение продольного импеданса (1.11) (для поперечного импеданса — (1.26)). Решение подобной задачи в аксиально-симметричном случае не представляет труда. Продольный импеданс на единицу длины цилиндрической камеры (например, [9])⁹:

$$\frac{Z(\omega)}{L} = Z_0 \frac{\omega}{2\pi c} \left[\frac{i}{(\beta \gamma)^2} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right) + (1 - i) \frac{\delta}{2b} \right], \quad (2.2)$$

где $L = 2\pi R$ — длина окружности ускорителя, $\delta = \sqrt{2/(\mu_0 \sigma \omega)}$ — толщина скин-слоя на частоте ω , σ — проводимость материала стенки, a и b — радиусы пучка и поперечного сечения камеры соответственно. Отметим, что выражение (2.2) получено с использованием ГУ Леонтовича и применимо при условиях: (i) $\delta \leq \Delta$, где Δ — толщина стенки камеры, и (ii) $\omega b/c \ll \gamma$. Последнее связано с некоторым упрощением выражения, пределом которого является (2.2), и не принципиально. Первый член в квадратных скобках в (2.2) обусловлен эффектами пространственного заряда, и его быстрое убывание ($\propto \gamma^{-2}$) с ростом энергии связано с компенсацией действия на пучок электрического и магнитного полей в релятивистском пределе. Второй член обусловлен конечной проводимостью материала стенки. При низких частотах, когда $\delta \geq \Delta$, он модифицируется заменой $\delta \rightarrow \delta \cot[(1 - i)\Delta/\delta] \cong \delta^2 / [(1 - i)\Delta]$ [28]. Иногда действительную часть импеданса записывают в виде

$$\operatorname{Re} Z(\omega) = \frac{L}{2\pi b} \mathfrak{R},$$

⁹Если вместо определения (1.11) используется (1.16), т.е. вместо среднего по поперечному сечению пучка поля берется $E_z(r=0)$, дробь $1/4$ в (2.2) заменяется на $1/2$.

где \Re — поверхностный импеданс стенки камеры, равный $Z_0 \delta \omega / 2c = \sqrt{\mu_0 \omega / 2\sigma}$ при $\delta \leq \Delta$ или $1/(\Delta\sigma)$ при $\delta > \Delta$. В качестве примера приведем цифры для вакуумной камеры 2-й ступени УНК, где $\sigma \cong 2 \cdot 10^6 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ — проводимость нержавеющей стали при 4 К, $\Delta = 2,5$ мм и диапазон энергий 400+3000 ГэВ. Согласно (2.2) пространственный заряд дает $i(5,8+0,14)$ МОм, вклад резистивной стенки значительно больше: $(1-i)2,3/\sqrt{f}$ (МГц) Ом в диапазоне частот от 20 кГц до 500 ГГц, а при более низких частотах становится чисто активным и не зависит от частоты: 18,9 Ом. Такая величина $\text{Re } Z$ привела бы к большому тепловыделению в стенках камеры: $\sim 0,1+1$ Вт/м, в зависимости от режима работы УНК, что в обычном ускорителе допустимо, а в сверхпроводящем заметно увеличивает нагрузку на криогенную систему. Поэтому с целью уменьшения омических потерь в стенках предполагается покрыть внутреннюю поверхность вакуумной камеры УНК-2 тонким слоем меди. В отличие от нержавеющей стали, проводимость σ_c меди сильно увеличивается при гелиевых температурах — в 50+5000 раз по сравнению с $\sigma_c \cong 6 \cdot 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ при 300 К, в зависимости от чистоты меди. В результате омические потери снижаются на два порядка. Однако при этом возрастают потери за счет токов Фуко, возбуждаемых в стенках изменяющимся в цикле ускорения магнитным полем. Из компромиссных соображений выбирается толщина медного покрытия от 0,3 до 3 мкм, в зависимости от проводимости меди.

Поперечный импеданс (дипольная мода) гладкой аксиально-симметричной камеры [17]:

$$Z_{\perp}(\omega) = Z_0 R \left[\frac{i}{(\beta\gamma)^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + (1-i) \frac{\delta}{b^3} \right]. \quad (2.3)$$

Первое и второе слагаемые в (2.3) имеют тот же смысл, что и в (2.2) — пространственный заряд и импеданс резистивной стенки. Значения для УНК-2 соответственно: $i(0,91+0,12)$ МОм/м при $\gamma = 426+3200$ и $(1-i)0,43/\sqrt{f}$ (МГц) МОм/м.

Основные эффекты взаимодействия пучка с гладкой камерой — потери энергии пучком и, при низких энергиях, неустойчивость «отрицательной массы». Поскольку в прямолинейной гладкой камере не могут существовать электромагнитные волны с досветовой фазовой скоростью, резонансов в такой структуре нет.

2.3. Резонансы. Наличие различных неоднородностей в вакуумной камере (резонаторы, вставки, переходы между участками с различным сечением и т.п.) создает возможность существования в камере замедлен-

ных волн, которые могут резонансно взаимодействовать с пучком. В области низких частот неоднородности дают, в основном, реактивный вклад в импеданс.

На более высоких частотах начинаются резонансы. Здесь возможны два случая. Первый — узкополосные резонансы, создаваемые элементами с выраженными резонаторными свойствами на частотах ниже частоты отсечки ω_c гладкой части вакуумной камеры. В этом случае система обладает памятью и воздействует на связанные колебания сгустков. Пример — резонаторы ускоряющих станций УНК, где приходится демпфировать несколько высших мод колебаний [29], поскольку создаваемый ими продольный импеданс превышает порог устойчивости мультиполных колебаний сгустков. Второй случай — элементы, у которых либо резонаторные свойства слабо выражены, либо частоты резонансов заметно выше ω_c . Такие резонансы имеют большую ширину, что связано с излучением энергии возбужденных в объеме резонатора колебаний в патрубки. Они оказывают влияние на отдельный сгусток, что может вызвать изменение его формы и односгустковые неустойчивости. Источником этих резонансов могут быть как различные малые неоднородности: гофры, сильфоны, места подключения вакуумного оборудования и т.п., так и большие расширения камеры.

Сказанное выше относилось к отдельному элементу камеры. Методы вычислений, обзор которых дан в разд.3, или измерения импедансов позволяют обычно найти импеданс отдельного элемента или периодической структуры из одинаковых элементов. Однако, как влияют элементы друг на друга? Можно ли, зная импеданс отдельных элементов, найти импеданс, создаваемый их совокупностью? Очевидно, что для удаленных друг от друга элементов (волны, возбуждаемые в одном, не достигают другого) импедансы аддитивны при любых частотах. Для близких элементов взаимодействие может быть существенным, особенно на частотах вблизи резонансов (подробнее см. разд.3).

Поскольку резонансные частоты различных элементов камеры отличаются, зависимость импедансов камеры от частоты может быть весьма сложной. При определенных условиях для исследования влияния камеры на пучок, в частности, на отдельный сгусток, импеданс реальной камеры заменяют модельным импедансом. Например, модель широкополосного резонатора [30] с параметрами $Q = 1$, $f_r = 1,3$ ГГц, $R_{sh}/n_r = |\operatorname{Im} Z/n| = 0,9 \text{ Ом}^{10}$ используется для расчетов динамики пучка в ускорителе ЛЕР. Такая замена возможна, поскольку расстояния между сгу-

¹⁰Результаты измерений на действующем ускорителе $|\operatorname{Im} Z/n| = 0,25 \text{ Ом}$ [31].

стками в LEP очень велики (4+8 сгустков на орбите длиной 27 км в LEP1), и длина сгустков мала. В результате детальная структура импеданса (узкие пики) не влияет на динамику, в особенности на односгустковые эффекты.

3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ИМПЕДАНСА

В конечном счете вычисление импедансов или наведенных потенциалов сводится к решению электродинамической задачи — нахождению полей (напряжений, сил), возбуждаемых в камере заданным током пучка. Возможны различные пути решения. По этому признаку можно классифицировать, впрочем, весьма условно, методы расчета:

- по подходу — радиотехнические или электродинамические;
- по способу решения — аналитические, полуаналитические или прямые численные;
- по исходной постановке задачи — во временном или частотном представлении.

Ясно, что в зависимости от геометрии элемента вакуумной камеры, от того, какая область частот или, в случае наведенных потенциалов, область запаздывания представляет интерес в конкретном случае, удобным может оказаться тот или иной метод.

3.1. Радиотехнические методы. Элемент вакуумной камеры, обычно со сложной геометрией, заменяется некоторым эквивалентным радиотехническим элементом (длинной линией, RLC-контуром и т.п.). Параметры эквивалентного элемента — например, резонансная частота, добротность или длина линии — определяются из дополнительных соображений. К этому направлению можно отнести упомянутую выше модель широкополосного резонатора. Для работ, использующих радиотехнический подход, характерны:

- замена (сложной) геометрии эквивалентными радиотехническими цепями, параметры которых оцениваются из эвристических соображений;
- получение результата в форме достаточно простых выражений (в этом отношении их следует классифицировать как аналитические);
- ограничение интервала частот (обычно низкие, $\omega \ll \omega_c$), в котором работает замена.

Характерный пример подхода — работа по вычислению низкочастотного импеданса сепараторов пучков [32]. В ней система пластин сепараторов с внешними цепями моделируется контуром с сосредоточенными

параметрами: сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C , значения которых связаны с геометрическими размерами неоднородности и сопротивлением внешней цепи. В результате получено выражение продольного импеданса на низких частотах:

$$Z(\omega) = 4\sin^2\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \frac{R - i\omega L}{1 - \omega^2 LC - i\omega RC}, \quad (3.1)$$

где l — длина пластин сепаратора.

Для оценки на низких частотах импеданса датчиков положения пучка типа *strip-line* применяется формула

$$Z(\omega) = Z_c \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 \left(\sin^2\left(\frac{\omega l}{c}\right) - i \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) \cos\left(\frac{\omega l}{c}\right) \right), \quad (3.2)$$

в которой Z_c — характерный импеданс электрода, l — длина датчика, φ — угол в поперечном сечении, закрываемый электродами. Эта формула получена в работе [33], см. также [34] и подробнее [35].

В работах [36,37] оценены импедансы кикер-магнитов на бегущей волне в области низких частот с помощью замены магнита эквивалентной длиной линией с определенным характерным импедансом, нагруженной на концах.

3.2. Электродинамические методы. Другую, более многочисленную группу составляют электродинамические методы. Непосредственно решая уравнения Максвелла с заданным током, находят возбуждаемое в камере электромагнитное поле и определяют импедансы связи или наведенные потенциалы. Здесь следует выделить две подгруппы в соответствии с исходной постановкой задачи — во *временном* или *частотном представлении*. В методах, использующих *частотное представление*, находят поля, создаваемые заданной гармоникой тока $I \sim \exp(-i\omega t)$. Интегрирование поля дает непосредственно импеданс связи — см. разд.1. Во *временном представлении* вычисляют наведенные потенциалы, создаваемые при прохождении через структуру заданного распределения заряда, а затем с помощью преобразования Фурье находят импедансы. Заметим, что фурье-преобразование (1.19) связывает импеданс с наведенным потенциалом $W^{\delta}(s)$ точечного заряда, т.е. с функцией отклика. В случае же, когда наведенный потенциал рассчитывается для сгустка конечных размеров (это именно так в большинстве численных методов, использующих временное представление), преобразование Фурье дает не импеданс, а его свертку $Z(\omega) \tilde{\lambda}(\omega)$, где $\tilde{\lambda}(\omega)$ — спектр сгустка. Для высоких частот величина $\tilde{\lambda}(\omega)$ обычно мала — так, для гауссов-

ского сгустка $\tilde{\lambda}(\omega) = \exp(-\omega^2 \sigma^2 / 2c^2)$, — и неизбежные неточности вычисления свертки приводят к ошибкам на высоких частотах.

Для решения уравнений Максвелла необходимо наложить на поля граничные условия (ГУ). На стенке вакуумной камеры это может быть условие $E_t = 0$ в пределе идеально проводящих стенок или условие Леонтовича для металла. Кроме того, чтобы «замкнуть» задачу, необходимо наложить дополнительные условия:

- условия периодичности — для бесконечной периодической структуры, которая может моделировать линейный ускоритель, дифрагмированный волновод и т.д., либо циклический ускоритель в пренебрежении эффектами кривизны;
- условия излучения — для открытых непериодических структур (резонатор с бесконечными патрубками, полубесконечный волновод);
- условия «замыкания» — ГУ на некоторой воображаемой поверхности, замыкающей область, в которой рассчитывают поля. Например, воображаемые металлические заглушки в подводящих патрубках превращают резонатор с патрубками в замкнутый, что позволяет исследовать импеданс на частотах ниже частоты отсечки.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЧАСТОТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Методы вычисления импеданса в частотном представлении перечислены в таблице. Указаны работы, в которых либо предложен метод, либо есть примеры его применения, и основные типы неоднородностей, к которым он применим.

В колонке «Примечания» упомянуты ограничения метода, и отмечена применимость для периодических структур (П) или для отдельной неоднородности, удаленной от прочих элементов камеры (Н). Разумеется, не все методы укладываются в рамки этой таблицы. К примеру, изящное доказательство независимости импеданса от направления движения пучка аксиально-симметричных, но несимметричных в продольном направлении неоднородностей [38] опирается лишь на уравнения Максвелла и формальное определение импеданса (1.16). Выделение в строке «Прямые численные методы» работ [88,89] также достаточно условно: в них используются приближенные ГУ, имитирующие условия излучения в открытые патрубки для структур вида рис.1,г,д, что позволяет применить известные численные методы.

Таблица. Электродинамические методы в ω -представлении

Метод	Способ решения	Основные работы	Вид неоднородности	Примечания
Метод собственных функций	Аналит. Числен.	напр. [39], [49,50] см. [45, 47, 48] [52, 51]	Рис.1,а,в Рис.1,в—д Рис.1,а,б	$b \rightarrow 0$ Н П
Метод сшивания полей	Полуан.	[75, 76, 77, 78, 79] [9, 57, 56, 59] [81, 82, 80]	Рис.1,в Рис.1,а Рис.1,ж	Н П Н
Матричный метод	Полуан.	[66, 67]	Рис.1,б гофр	П
Метод возмущений	Аналит.	[61, 62, 65, 63, 51]	Рис.1,б	$h \ll b$ $D \gg h$
Эквивалентные ГУ	Аналит.	[72, 73, 74]	Рис.1,а гофр	$h \ll b$ П
Интегральные уравнения	Аналит. Полуан.	[83, 84, 85, 86] [87]	Рис.1,а—г Рис.1,г,е	Н и П Н
Прямые численные методы	Числен.	[88, 89]	Рис.1,в—д	Н
Дифракционный	Аналит.	[90, 50, 91, 11]	Рис.1,а,в,ж,з	П и Н $\omega \gg \omega_c$
Энергетический	Аналит.	[97, 98]	Рис.1,а,ж	Прибл. метод

Метод собственных функций. В частотном представлении в приближении «замкнутого резонатора» вычисление импеданса может быть сведено к стандартной внутренней краевой задаче на собственные значения (СЗ). Поскольку решение неоднородного уравнения представляется в виде ряда по собственным функциям (СФ), то импеданс можно выразить в виде формального ряда. Однако практически это позволяет вычислить либо только резонансные значения импеданса (для мод, СФ которых найдены), либо поведение импеданса на низких частотах для простейших моделей, когда удастся найти все СФ аналитически и просуммировать ряд.

Пусть E_s, H_s — полный набор СФ краевой задачи с идеальными ГУ на стенках замкнутого резонатора. Здесь $s = (s_1, s_2, s_3)$ — обобщенный индекс. Собственные функции удовлетворяют условиям ортогональности: $\mu_0 \int dV H_m^* H_n = \epsilon_0 \int dV E_m^* E_n = \delta_{mn} N_n$, где δ_{mn} — символ Кронекера, N_n — нормировка, а интегрирование идет по объему резонатора [39]. Решение неоднородных уравнений Максвелла с током j :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i \omega \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i \omega \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (3.3)$$

и с теми же идеальными ГУ будем искать в виде $\mathbf{E} = \sum \alpha_s \mathbf{E}_s$, $\mathbf{H} = \sum \beta_s \mathbf{H}_s$, где α_s, β_s — неопределенные коэффициенты [39]. Подстановка рядов по СФ в уравнения (3.3) позволяет легко найти

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{i\omega}{\omega_s^2 - \omega^2} \frac{1}{N_s} \int dV \mathbf{j} \mathbf{E}_s^*, \\ \beta_s &= \frac{\omega_s}{\omega} \alpha_s. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Фурье-образ тока точечного заряда q имеет вид

$$j_z(\omega) = \frac{q}{r} \delta(r - a) \delta(\varphi - \varphi_0) \exp(i\omega z/\beta c).$$

Тогда из определения (1.16) продольного импеданса следует

$$Z(\omega) = -\frac{1}{q} \int_L dz \exp\left(-\frac{i\omega z}{\beta c}\right) E_z(r = a, z) = \sum_s \frac{i\omega}{\omega_s^2 - \omega^2} \frac{|I_s(\omega)|^2}{N_s}, \quad (3.5)$$

где $I_s(\omega) = \int_L dz \exp(-i\omega z/\beta c) E_{sz}(r = a, z)$.

Из (3.5) легко получить выражение для низкочастотного предела $Z(\omega)$ при $\omega \ll \min(\omega_s)$:

$$Z(\omega) = -i\omega \sum_s \frac{|I_s(\omega)|^2}{\omega_s^2 N_s}. \quad (3.6)$$

Из формулы (3.5) видно также, что при $\omega \rightarrow \omega_s$ происходит резонансное усиление s -го члена ряда $Z(\omega)$. Введем конечное, но малое поглощение в стенках резонатора, добавив мнимую часть к СЗ:

$\omega_s \rightarrow \omega'_s - i \omega''_s = \omega'_s(1 - i/2Q_s)$ [71]. Здесь добротность s -й моды $Q_s = \omega'_s W_s / P_s \gg 1$, где $W_s = N_s / 2$ — запасенная в резонаторе энергия s -й моды колебаний, P_s — средняя мощность, рассеиваемая в стенках резонатора. Мощность потерь определяется как

$$P_s = \frac{1}{2\sigma\delta} \int_S ds |H_{sr}|^2, \quad (3.7)$$

где σ — проводимость материала стенок, δ — толщина скин-слоя на частоте ω'_s , H_{sr} — тангенциальная компонента магнитного поля вблизи стенки, и интегрирование идет по внутренней поверхности резонатора. При $\omega \cong \omega'_s$ s -й член в формуле продольного импеданса (3.5) доминирует:

$$Z(\omega \cong \omega'_s) \cong R_s = \frac{Q_s}{\omega'_s N_s} \frac{|I_s(\omega'_s)|^2}{\int_S ds |H_{sr}|^2}; \quad (3.8)$$

или, с учетом выражения для добротности,

$$R_s = \frac{\sigma\delta \left| \int_L dz \exp\left(-i \frac{\omega'_s z}{\beta c}\right) E_{sz}(r=a, z) \right|^2}{\int_S ds |H_{sr}|^2}. \quad (3.9)$$

Приведем выражения для цилиндрического резонатора в пределе малого радиуса подводящих патрубков ($b \rightarrow 0$). Пусть длина резонатора L , радиус d , индекс $s = (m, n, p)$, где m — число азимутальных вариаций ($\exp(im\varphi)$), n — число радиальных и p — продольных вариаций E -поля, μ_{mn} — n -й нуль функции Бесселя 1-го рода $J_m(x)$. Резонанс (m, n, p) имеет частоту, приблизительно равную собственной частоте резонатора $\omega_{mnp} = \sqrt{\mu_{mn}^2 + (\pi p d/L)^2} c/d$. Продольный импеданс

$$R_{0np} = \frac{Z_0}{2\pi} \frac{L^3}{\beta^2} \frac{\mu_{0n}^2}{d^2 \delta} \frac{c}{J_1^2(\mu_{0n})} \frac{1}{\omega_{0np} d} \frac{1}{1 + \delta_{p0} + 2d/L} \times \\ \times \left(\left(\frac{\omega_{0np} L}{2\beta c} \right)^2 - \left(\frac{\pi p}{2} \right)^2 \right)^{-2} \left\{ \frac{\sin^2}{\cos^2} \right\} \left(\frac{\omega_{0np} L}{2\beta c} \right). \quad (3.10)$$

Верхняя строка в {...} соответствует четным, нижняя — нечетным p .

Аналогично, выделяя дипольную ($\sim \cos \varphi$) составляющую тока $j_z(\omega)$, получим резонансное значение поперечного ($m = 1$) импеданса для E -мод:

$$R_{1np} = \frac{Z_0}{8\pi\beta} \frac{L^3}{d^3\delta} \frac{\mu_{1n}^2}{J_0^2(\mu_{1n})} \left(1 + \delta_{p0} + \frac{2d}{L} \left(1 + \frac{1}{\mu_{1n}^2} - \frac{1}{\mu_{1n}^2 J_0^2(\mu_{1n})} \right) \right)^{-1} \times \\ \times \left(\left(\frac{\omega_{1np} L}{2\beta c} \right)^2 - \left(\frac{\pi p}{2} \right)^2 \right)^{-2} \left\{ \frac{\sin^2}{\cos^2} \right\} \left(\frac{\omega_{1np} L}{2\beta c} \right). \quad (3.11)$$

Приведенное выражение для R_{1np} соответствует радиальной поперечной силе, действующей на пучок, т.е. $Z_{\perp r}$. В общем случае поперечный импеданс Z_{\perp} (см. (1.26) и (1.28)) — двумерный вектор, имеющий две независимые составляющие $Z_{\perp r}$ и $Z_{\perp \varphi}$ (или $Z_{\perp x}$ и $Z_{\perp y}$), однако в аксиально-симметричной камере $Z_{\perp \varphi} = 0$.

Разработано немало методов численного решения спектральной задачи с ГУ на идеально проводящей поверхности, позволяющих вычислить низшие СЗ и СФ. Наиболее известные пакеты программ для аксиально-симметричных структур: SUPERFISH [40] — аксиально-симметричные моды, ULTRAFISH [41] — моды с вариацией $\exp(im\varphi)$, MULTIMODE [42], PRUD [43], LANS [44] используют метод конечных элементов; в URMEL [45] применяется так называемый FIT-алгоритм. Для существенно трехмерной геометрии может быть использована программа URMEL-3D, входящая в пакет MAFIA [46]. Вводя конечную проводимость σ стенки, для рассчитанной j -й СФ поля определяют добротность данной моды Q_j и величину $\text{Re}Z(\omega_j)$ в резонансе. Таким образом, приближение «замкнутого резонатора» в методе СФ позволяет найти резонансные значения импеданса на частотах ниже частоты отсечки камеры, в том числе и для больших неоднородностей сложной формы, например, резонаторов ускоряющих станций [47] и расширений камеры в экспериментальных зонах [48].

Для простой геометрии неоднородности СФ и СЗ могут быть найдены аналитически. Например, цилиндрический резонатор с малыми выходными отверстиями рассматривался в работах [49] и [50], причем в качестве приближения СФ и СЗ выбирались СФ и частоты замкнутого резонатора. В первой влияние патрубков оценивалось подсчетом энергии, рассеиваемой в них. В [50] суммированием ряда СФ получены

приближенные аналитические выражения продольного и поперечного импеданса в пределе низких и высоких частот.

Небольшая модификация *метода СФ* позволяет рассчитать резонансы и при высоких частотах, но уже для *периодических структур* — вместо условия «замыкания» используются периодические ГУ. К примеру, пакет MULTIMODE [42] применялся для этой цели в работе [51], то же может быть сделано с помощью модифицированной программы URMEL-P [52]. Однако при этом необходимо рассчитывать дисперсионные характеристики периодической структуры, что весьма трудоемко, особенно для структур с длинным периодом.

Метод сшивания. Для расчета полей в структурах, обладающих аксиальной или плоской симметрией, с границей достаточно простой формы (рис.1,а,в), используют *метод частичных областей*, называемый также *методом сшивания*. Пространство внутри камеры разбивают на простые подобласти, в каждой из которых волновые уравнения допускают разделение переменных. Решения в каждой подобласти представляются в виде рядов с неопределенными коэффициентами. Подстановка решений в условия непрерывности на границах подобластей и ГУ на стенках камеры приводит к бесконечной системе линейных уравнений для этих коэффициентов. Строго говоря, для однозначного выделения решения бесконечной линейной системы необходимо наложить добавочные условия, к примеру, так называемые условия на ребре [53]. Однако обычно систему можно обрезать до конечных размеров, исходя из физических соображений, и для вычисления импеданса достаточно лишь нескольких коэффициентов. Из работ, использующих метод сшивания для вычисления продольного импеданса, хорошо известна работа Кайла и Цоттера [9]. Периодом структуры является цилиндрическая камера циклического ускорителя длиной $D = 2\pi R$ с расширением длины g , с радиусом камеры b , расширением — d (рис.1,а). Вдоль оси z камеры распространяется n -я гармоника возмущения: $j_z(z, r, t) = \rho_n \beta c \exp(izn/R - i\omega t) \theta(a - r)$, где $\omega = \beta cn/R$, a — радиус пучка. Сшивание полей осуществляется на границе полости и трубы при $r = b$. Полученное в результате сшивания матричное уравнение допускает аналитическое решение в пределе низких частот. Так, при условиях: $\omega \ll c/g$, $\omega \ll c/d$ короткое ($g \ll \pi b$) расширение камеры дает индуктивный вклад в продольный импеданс:

$$\frac{Z}{n} = -iZ_0 \beta \frac{g}{2\pi R} \ln \frac{d}{b}. \quad (3.12)$$

Получены также приближенные выражения резонансных значений импеданса и частот. В общем случае обрезанная система уравнений

решается численно, причем элементы ядра (матрицы) уравнения представляют собой медленно сходящиеся ряды. В более поздних работах других авторов [54,55] расширена область применимости метода, в частности, использовано преобразование, позволяющее улучшить сходимость этих рядов, что облегчает расчеты. В работе [55] приведены выражения для резонансных величин при $b \ll d$ и разработана программа численного расчета импеданса для широкого диапазона параметров.

Для такой же геометрии аналогичный подход при вычислении поперечного импеданса применен в работе [56]. Получена система уравнений для коэффициентов поля, приведены приближенные выражения для области низких частот. Например, короткое расширение камеры при указанных выше ограничениях на частоту дает добавку к поперечному импедансу:

$$Z_{\perp} = -iZ_0 \frac{g}{\pi b^2} \frac{d^2 - b^2}{d^2 + b^2}. \quad (3.13)$$

На основе методов шивания создано несколько программ расчета полей в аксиально-симметричной периодической структуре с геометрией, изображенной на рис.1,а. Программа KN7C [57] позволяет найти параметры азимутально-симметричных мод: частоты ω_n , картину поля, фактор потерь k_n . По этим величинам легко найти наведенный потенциал, поскольку $W(s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(\omega_n s/c)$ — см. [12]. Фурье-преобразование дает импеданс, действительная часть которого состоит из δ -функций в точках ω_n с весами πk_n . Обычно «размазывают» дискретные пики, рассматривая усредненную величину $\bar{Z}(\omega) = 2\pi^2/\Delta\omega \sum_n k_n$, где суммирование идет по модам, попадающим в интервал $(\omega - \Delta\omega/2, \omega + \Delta\omega/2)$ [58]. Программа TRANSVRS [59] работает аналогично KN7C для мод с азимутальной вариацией $\cos(m\varphi)$.

Непериодические структуры. Для неоднородностей, достаточно удаленных от остальных элементов вакуумной камеры, удобно рассматривать идеализированную задачу: неоднородность считается расположенной на бесконечной гладкой камере. Поставить внутреннюю краевую задачу на СЗ и использовать затем различные программы ее решения для такой геометрии нельзя, если, разумеется, не прибегать к приближению «замкнутого резонатора». Необходимо учесть условия излучения на бесконечности: только выходящая волна в выходном патрубке, падающая и отраженная — во входном.

Метод частичных областей (сшивания) применяется в такой задаче в случае простой геометрии неоднородности. При этом выражения для полей в открытой области записываются с учетом ГУ излучения на бесконечности. Для простой цилиндрической неоднородности (рис.1,в) сшивание на продольной границе полость — труба приводит либо к интегральному уравнению, либо к матричному для коэффициентов разложения поля в полости (продольный импеданс — [75], поперечный — [76]). Обрезанная линейная система решается численно (программа ICYRP). Метод обобщен также на несколько эквидистантных одинаковых неоднородностей этого типа, рассмотрено их взаимное влияние [77].

Возможен и иной вариант сшивания: на торцевых стыках патрубков — неоднородность, см., например, [78]. Сшивание полей в поперечной плоскости использовалось в работе [79] для расчета продольного импеданса произвольной аксиально-симметричной структуры. При этом неоднородность аппроксимируется последовательностью ступенчатых переходов, и в результате сшивания на общих границах соседних участков возникают матричные уравнения для коэффициентов поля. Прием сшивания в поперечной плоскости естественно использовать при расчете импеданса, создаваемого коллиматорами [80]. Кроме того, этот способ сшивания применяют, когда радиусы входного и выходного патрубков различны, и для исследования скачкообразного перехода между волноводами различных размеров [81,82].

Методы теории возмущений. Метод сшивания годится только для самой простой формы неоднородностей вакуумной камеры. В случае малой вариации (произвольной формы) поперечных размеров камеры для расчета импеданса используют *методы теории возмущений*. Пусть период возмущения стенки аксиально-симметричной камеры равен D , а форма границы в продольном сечении $\varphi = \text{const}$ задается функцией $r =$

$$= b(z) = b(1 + \varepsilon s(z)), \text{ где } s(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p \exp(i 2\pi p z / D), c_0 = 0, c_{-p} = c_p^*,$$

$\text{Var}(s(z)) = 2$. Поля, возбуждаемые в камере заданным током, представляются в виде ряда по пространственным гармоникам с известной радиальной зависимостью, с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты можно найти из ГУ на стенке камеры:

$$\left[\frac{E_z + b'(z)E_r}{\sqrt{1 + [b'(z)]^2}} + (1 - i) \frac{\delta \omega}{2c} Z_0 H_\varphi \right]_{r=b(z)} = 0, \quad (3.14)$$

где δ — толщина скин-слоя. Малым параметром здесь является величина $\varepsilon = h/2b \ll 1$, где h — высота неоднородности, b — средний радиус камеры. Подставляя поля в это ГУ и разлагая полученное уравнение по степе-

ням ε , получим рекуррентную последовательность ГУ при $r = b$. Из них найдем коэффициенты поля и импеданс в виде ряда по ε : $Z = Z^{(0)} + \varepsilon^2 Z^{(2)} + \varepsilon^3 Z^{(3)} + \dots$, где $Z^{(0)}$ — импеданс гладкой камеры, а $Z^{(1)} = 0$. Прием разложения по малому параметру в граничных условиях, именуемый далее ε -разложением, в математической литературе называется переносом ГУ на регулярную границу [60]. Впервые ε -разложение было использовано в теории ускорителей для вычисления энергетических потерь пучка в цилиндрическом волноводе с периодической вариацией радиуса [61]. В работе [62] метод был применен для вычисления продольного и поперечного импеданса камеры с малым периодическим возмущением идеально-проводящей (проводимость $\sigma \rightarrow \infty$) стенки в ультрарелятивистском пределе ($\gamma \rightarrow \infty$). Добавка к продольному импедансу гладкой камеры имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{Z}{n} &= -iZ_0 \varepsilon^2 G^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} p^2 |c_p|^2 \frac{I_1(x_p)}{x_p I_0(x_p)} + O(\varepsilon^3) = \\
 &= -iZ_0 \varepsilon^2 G^2 2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} p^2 |c_p|^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{j_{0r}^2 + x_p^2} + O(\varepsilon^3), \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

где $G = 2\pi b/D$, $x_p^2 = 2\xi pG + p^2 G^2$, $J_m(j_{mr}) = 0$, $J_m(x)$ и $I_m(x)$ — обычные и модифицированные функции Бесселя 1-го рода. Легко получить отсюда Z/n на низких частотах ($\xi = \omega b/c \rightarrow 0$, т.е. $x_p \rightarrow |p|G$). Кроме того, можно получить простые формулы для резонансных частот $f_{p,r}$ r -й радиальной моды, ширины $(2\Delta f)_{p,r}$ и величины $Z_{p,r}$ резонансов:

$$f_{p,r} = \frac{c}{4\pi b} \left(pG + \frac{j_{0r}^2}{pG} \right), \quad (3.16)$$

$$(2\Delta f)_{p,r} = f_{p,r} \frac{\delta}{2b} \left[1 + \left(\frac{j_{0r}}{pG} \right)^2 \right], \quad (3.17)$$

$$\frac{Z_{p,r}}{n} = Z_0 \varepsilon^2 |c_p|^2 \frac{8b}{\delta} \left[1 + \left(\frac{j_{0r}}{pG} \right)^2 \right]^{-2} + O(\varepsilon^3). \quad (3.18)$$

Добавка к поперечному импедансу при $\sigma \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$Z_{\perp} = -iZ_0 \varepsilon^2 G^2 \frac{2R}{b^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} p^2 |c_p|^2 \left[\frac{I_1'(x_p)}{x_p I_1(x_p)} - \frac{I_1(x_p)}{x_p^3 I_1'(x_p)} \right] + O(\varepsilon^3). \quad (3.19)$$

Отметим, что первое слагаемое в [...] дает вклад E -волны, второе — H -волны. Соответственно существуют два семейства поперечных резонансов.

В [63] методом ε -разложения получено общее выражение для продольного импеданса при произвольной энергии пучка и конечной проводимости стенок, а также статистическим образом учтены эффекты случайных отклонений от периодичности в расположении неоднородностей. Параметры резонансов сравнивались с результатами численных расчетов [51], и было показано, что для малых возмущений и достаточно длинных периодов согласие хорошее. Высшие порядки теории возмущений по ε рассмотрены в работе [65]. Следует отметить, что ε -разложение применимо только для возмущений, граница которых $b(z)$ является однозначной функцией z , причем производная $|b'(z)|$ ограничена. В работе [66], использующей более общий метод, указано дополнительное ограничение на применение ε -разложения при низких частотах: $D \gg h$, где D — период структуры (см. обсуждение в [63, 64, 67]). Таким образом, метод ε -разложения можно использовать для оценки структур с малой и плавной вариацией границы при условии, что длина периода заметно больше вариации поперечного размера, например, переходов и соединений [51, 68]. Для гофров, т.е. при $D \sim h$, ε -разложение, строго говоря, не работает.

Матричный метод. Для расчета импеданса гофрированной вакуумной камеры на низких частотах Хейфец и Цоттер предложили метод [66], который мы будем ниже называть матричным. Его модификация, предложенная в работе [67], позволяет вычислить продольный и поперечный импеданс также в резонансной области. *Матричный метод* применим для периодических структур с аксиальной или плоской симметрией, причем граница камеры $b(z)$ должна быть гладкой однозначной функцией z (рис. 1, б). К примеру, структуры типа *pill-box* (рис. 1, а) в этот класс не попадают. На вариацию границы $h = \max(b(z) - b)$ при этом не накладывается требование малости. Решение волновых уравнений с заданным током, представленное в виде ряда по пространственным гармоникам с неопределенными коэффициентами, подставляется в ГУ (3.14). Затем полученное уравнение разлагают по полной системе пространственных гармоник. В результате возникает (бесконечное) матричное уравнение на коэффициенты. После обрезания оно решается численно: программы IMPASS [69] и NM [67]. В силу этого матричный метод, как и методы шивания, следует отнести к полуаналитическим.

Отметим, что в случае $h \ll b$ матричное уравнение допускает разложение по малому параметру ε и аналитическое решение, совпадающее с обсуждавшимся выше ε -разложением. Дополнительные условия, при которых справедливо разложение матричного уравнения, являются достаточными условиями применимости ε -разложения [66,67]. Размер P обрезания матрицы ($P \times P$) при численном решении пропорционален длине периода, и для гофрированных структур оказывается достаточно даже $P = 5$ или 7 [67]. Таким образом, матричный метод удобен для структур с коротким периодом.

Метод эквивалентных граничных условий. Для расчета импеданса камеры с гофрированной стенкой используют также метод «эквивалентных» граничных условий, который, как и ε -разложение, переносит ГУ на гладкую границу. При расчете полей в гофрированном волноводе накладывается так называемое импедансное условие, линейно связывающее компоненты электрического и магнитного поля на некоторой гладкой поверхности. Например, в случае цилиндрического волновода радиуса b с прямоугольным гофром, период которого D и глубина h ($h \ll b$),

$$E_z = iZ_0 \frac{D-g}{D} \tan\left(\frac{\omega h}{c}\right) H_\varphi, \quad E_\varphi = 0, \quad (3.20)$$

при $r = b$, где g/D — коэффициент заполнения гофра [70]. Другой пример такого подхода дает работа Балбекова [72], где «эффективное» ГУ на гладкой границе возникает в результате конформного отображения ячейки гофра на прямоугольник. При этом гофрированная поверхность заменяется «эквивалентной» гладкой с $r = b_{eff}$ и диэлектрическим покрытием, проницаемость которого зависит от продольной координаты z . В длинноволновом приближении, когда $\lambda \gg D$, можно усреднить по z , в результате чего получается ГУ импедансного типа на гладкой поверхности. Этим методом в работе [72] аналитически рассчитан резонанс продольного импеданса с частотой около 6 ГГц, вызываемый замедленной волной в ускорителе У-70. Поперечный импеданс гофрированной камеры У-70 рассчитан аналогичным способом [74]. Интересно отметить, что влияние нерегулярных вставок в ускорителе (гладкие участки камеры и т.д.), нарушающих периодичность гофрированной структуры, уменьшает величину резонанса более чем на порядок. Результат хорошо согласуется с измерениями на У-70. Расчет импеданса этой гофрированной структуры с использованием приведенного выше стандартного импедансного ГУ выполнен в работе [73]. Матричный метод, примененный к этой же задаче в случае ненарушенной периодичности [67], дает для резонанса на замедленной волне те же параметры, что и работы [72,74,73], и, кроме того, указывает на наличие

серии резонансов продольного и поперечного импеданса на более высоких частотах, ~ 14 ГГц. Отметим наличие двух серий высокочастотных поперечных резонансов, соответствующих E - и H -волнам. Для резонанса на замедленной волне и для E -серии с хорошей точностью выполняется эмпирическое соотношение (1.39) величин продольного и поперечного импеданса. То же можно сказать и о низкочастотной добавке к импедансу, вносимой гофрами.

Метод интегральных уравнений. В случае достаточно общей формы неоднородности вычисление импеданса можно свести к решению интегрального уравнения. В работах [83,84] для аксиально-симметричной структуры получено интегральное уравнение, в котором неизвестным является поле при $r = b$, а ядро представляет собой ряд по СФ полости. Интеграл от его решения дает продольный импеданс. Для малых неоднородностей ядро можно упростить и получить ответ в явном виде [86]. То же возможно в пределе высоких частот для неоднородностей частного вида [84]. Результаты обобщаются на несколько одинаковых вставок и, в пределе, на периодическую структуру [85].

Для вычисления импеданса одной или нескольких эквидистантных неоднородностей достаточно общего вида (с ограничением: $b(z)$ — однозначная функция z , т.е. рис.1,з, но не рис.1,д) в работе [87] получено другое интегральное уравнение. Продольный импеданс выражается через его решение в выделенной точке. Ядро для простой формы неоднородности вычислено аналитически, но в общем случае представляет собой определенный интеграл. Простая численная процедура решения интегрального уравнения позволяет находить импеданс как на низких частотах, так и выше частоты отсечки. На низких частотах неоднородности камеры, представляющие собой расширения или сужения, вносят в продольный импеданс, в основном, индуктивную добавку: $\text{Im } Z(\omega) = -\omega \mathcal{L}$. Путем фитирования результатов численного решения интегрального уравнения для некоторых видов возмущений в [87] была исследована зависимость индуктивности \mathcal{L} от геометрических размеров. Так, для расширения цилиндрической камеры, имеющего в осевом сечении форму треугольника с основанием L и высотой h ,

$$\mathcal{L} = \frac{Z_0}{2\pi c} \frac{Lh}{\pi b} \frac{2h}{\sqrt{L^2 + 4h^2}}. \quad (3.21)$$

Заметим, что если индуктивность такой вставки рассчитать в приближении невозмущенного поля пучка как отношение магнитного потока к току [9], то получится $\mathcal{L} = Z_0 Lh / (4\pi cb)$. Результат (3.21) отличается от этого приближения, так как учтено искажение поля внутри вставки.

Для сужения камеры, имеющего ту же треугольную форму,

$$\mathcal{L} = \frac{Z_0}{2\pi c} \frac{h^2}{b}. \quad (3.22)$$

Для возмущений, имеющих в сечении форму трапеции — пара переходов длиной l от радиуса b гладкой камеры к радиусу $b + h$ (или $b - h$, рис.1,е), при $l \ll L, b$ $\text{Im } Z$ почти не зависит от расстояния L между переходами. Когда $L > b$, индуктивности, создаваемые расширением и сужением камеры, одинаковы при равных h и при $L \geq 2b$ приближенно равны

$$\mathcal{L} = \frac{Z_0}{\pi c} \frac{h^2}{b} \sqrt{\theta}, \quad (3.23)$$

где $\tan \theta = h/l$.

Тем же методом рассмотрено взаимодействие N одинаковых эквидистантных небольших возмущений в резонансной области. Получен весьма интересный результат: даже при достаточно больших расстояниях между неоднородностями, $D \gg b$, величина резонанса продольного импеданса, деленная на их число, при изменении D осциллирует в интервале $[0, N * \text{Re } Z_1]$, где $\text{Re } Z_1$ — резонансный импеданс одной неоднородности. Частоты резонансов почти не зависят от N и D . Отметим, что в пределе периодической структуры ($N \rightarrow \infty$) интегральное уравнение превращается в бесконечную линейную систему, совпадающую с полученной в матричном подходе [67].

Дифракционные методы. Для вычисления импеданса неоднородности на высоких частотах используют *методы теории дифракции*. Первой из работ в этом направлении была работа Лоусона [90], а о современном состоянии дела можно судить по работе [91], в которой исследовано поведение при высоких частотах импеданса различных простых неоднородностей. Уточним, что имеется в виду область частот $\omega b/c \gg 1$.

Длительное время существовало противоречие между двумя результатами, относящимися к поведению импеданса на высоких частотах. В ряде работ [90, 50, 92, 93] было получено асимптотическое поведение продольного импеданса $\text{Re } Z(\omega) \sim \omega^{-1/2}$, тогда как численные результаты [15] и ряд работ (например, [94]), использующих модель оптического резонатора [95], указывали на асимптотику $\omega^{-3/2}$. Противоречие удалось разрешить в работе [96], где с использованием метода сшивания показано, что для одиночной неоднородности типа *pill-box* осуществляется асимптотическое поведение $\text{Re } Z(\omega) \sim \omega^{-1/2}$, а для бесконечной периодической структуры — $\text{Re } Z(\omega) \sim \omega^{-3/2}$. В случае конечного числа

неоднородностей M переход от режима $\omega^{-3/2}$, который имеет место в диапазоне частот $L/b \ll \omega b/c \ll M^{2/3}L/b$, к режиму $\omega^{-1/2}$ происходит при $\omega b/c \gg ML/b$. Здесь L — расстояние между элементами, b — радиус гладкой части камеры. Аналогичные результаты получены в дифракционной модели [91], а в упоминавшихся выше работах [84,85] исследовано также асимптотическое поведение $\text{Im } Z$. Эти результаты важны для электронных ускорителей с очень малой длиной сгустка.

Подробное изложение результатов исследования импеданса на высоких частотах, включающее как дифракционный подход, так и методы сшивания, можно найти в обзоре [11]. Упомянем лишь один результат: продольный импеданс коллиматора, представляющего собой диафрагму радиуса d на гладкой камере радиуса b ($d < b$), при $1 \ll \omega d/c < \gamma$ выходит на постоянную величину

$$Z(\omega) = \frac{Z_0}{\pi} \ln \frac{d}{b}. \quad (3.24)$$

Такой же импеданс на высоких частотах имеет скачкообразное изменение радиуса камеры ($b > d$) — рис.1, ж.

Энергетический метод. Этот подход стоит несколько особняком среди электродинамических методов, поскольку при вычислении импеданса (наведенного потенциала) позволяет избежать строгого решения электродинамической задачи о возбуждении волновода заданным током. В этом отношении он сродни радиотехническому подходу. Отнести его к электродинамическим методам позволяет то, что, подобно методу сшивания, рассматривается картина полей в отдельных частях структуры. В частности, используется разложение полей по системе волноводных волн. Исходя из простых качественных соображений о характеристиках поля: возбуждаемое релятивистской частицей поле локализовано в полупространстве за ней и т.п., вместо условия сшивания можно использовать уравнение энергетического баланса для излученных волн и собственного поля заряда в некотором объеме — см., например, [97,98]. Применяется энергетический метод обычно для расчета замедляющих структур, либо однородных (с диэлектриком), либо периодических, типа диафрагмированного волновода. В этом подходе можно исследовать также импеданс неоднородности, возникающий на стыке двух волноводов разного размера.

Непериодические структуры. Отметим использование в частотном представлении прямых численных методов для расчета импеданса резонатора произвольной формы с бесконечными патрубками на частотах $\omega > \omega_c$. В работе [88] ГУ в задаче вычисления полей сформулированы

так, что позволяют использовать программу SUPERFISH [40]. При этом условия излучения заменяют введением заполняющей гладкую камеру среды с малой чисто мнимой диэлектрической постоянной. Однако расчет приходится проводить заново для каждого нового значения частоты, что требует много машинного времени. Другая программа, URMEL-I [89], использует приближенные граничные условия на открытых патрубках, что позволяет поставить задачу в замкнутой области и провести численный расчет продольного импеданса на частотах выше ω_c .

Неоднородность иного типа представляет собой полубесконечный волновод. Проблема вычисления продольного импеданса цилиндрического полубесконечного волновода с идеально проводящими стенками решена в работах [99,100]. Задача сводится к системе двух интегральных уравнений специального вида, допускающей решение методом факторизации, — см., например, [101].

В заключение этого раздела упомянем недавние работы [102—104], в которых вычислен импеданс, создаваемый отверстиями или щелями в стенках камеры, предназначенными для вакуумной откачки. Такие неоднородности являются типичными элементами камеры больших кольцевых коллайдеров, к тому же обычно их очень много. Предложенный метод можно классифицировать в соответствии с приведенной выше таблицей как вариант метода эквивалентных ГУ. С другой стороны, он схож с энергетическим подходом в том, что позволяет избежать строгого решения сложной трехмерной задачи расчета полей. Метод основан на развитой Бете теории дифракции волн на малых отверстиях [105]. Основная идея состоит в замене отверстия, возбужденного падающей электромагнитной волной, эффективными «магнитными» токами так, чтобы удовлетворить ГУ на стенках. В случае малых отверстий или щелей поля, создаваемые этими токами, могут быть рассчитаны как поля эффективных электрического и магнитного диполей, величины которых просто выражаются через невозмущенные поля в камере. Возбужденные отверстиями поля удобно разложить по собственным модам камеры, после интегрирования получаются простые выражения для импеданса. Задача решена для малого отверстия произвольной формы в идеально проводящей стенке в круглой камере [102,103] и в камере произвольного поперечного сечения [104]. Область применимости полученных результатов определяется условиями: $\omega h/c \ll 1$, где h — характерный размер отверстия, и $h \ll b$, где b — характерный поперечный размер камеры, при выполнении которых работает теория Бете.

Приведем результаты для круглой камеры, которые имеют простой аналитический вид.

Пусть цилиндрическая камера имеет поперечное сечение радиуса b , идеально проводящие стенки, и центр малого отверстия находится в точке $(r = b, \varphi_h, z)$ на стенке камеры. Продольный импеданс одиночного малого отверстия произвольной формы в стенке такой круглой камеры равен

$$Z(\omega) = -iZ_0 \frac{\omega}{c} \frac{(\alpha_e + \alpha_m)}{4\pi^2 b^2}, \quad (3.25)$$

где поляризуемости отверстия α_e и α_m зависят от формы отверстия. Для простой формы они могут быть вычислены аналитически (например, для эллипса [106]), в других случаях их можно измерить на макете.

В случае круглого отверстия радиуса h поляризуемости равны $\alpha_e = -2h^3/3$ и $\alpha_m = 4h^3/3$, и импеданс

$$Z(\omega) = -i \frac{Z_0}{6\pi^2} \frac{\omega h^3}{cb^2}. \quad (3.26)$$

Как показано в работе [103], учет конечной толщины стенки несколько уменьшает величину вносимого отверстием импеданса (фактор 0,56, когда толщина стенки больше диаметра отверстия).

В пределе узкой продольной щели длиной l и шириной w , $w \ll l$, поляризуемости стремятся к $\alpha_e = -\pi lw^2/24$ и $\alpha_m = \pi lw^2/24$. Из уравнения (3.25) следует, при условии $\omega l/c \ll 1$, что низкочастотный продольный импеданс равен нулю в первом приближении. Это естественно, поскольку продольная щель почти не разрушает индуцируемые в стенке токи. Учет следующих членов приводит, при условии $w \ll l < b$, к выражению

$$Z(\omega) = -i \frac{Z_0}{96\pi} \frac{\omega}{c} \frac{w^4}{b^2 l} \left(\ln \frac{4l}{w} - 1 \right). \quad (3.27)$$

Узкая поперечная щель, в отличие от продольной, сильно разрушает структуру токов, индуцируемых пучком в стенке. Естественно, вносимый такой неоднородностью импеданс будет значительно большим. Подставляя в (3.25) $\alpha_e = -\pi lw^2/24$ и $\alpha_m = \pi l^3/24 / (\ln(4l/w) - 1)$ и пренебрегая вкладом электрического диполя, который в этом случае мал по сравнению с магнитным, получим

$$Z(\omega) \cong -i \frac{Z_0}{96\pi} \frac{\omega}{c} \frac{l^3}{b^2 (\ln(4l/w) - 1)}. \quad (3.28)$$

Эта формула применима при условии $w \ll l \ll b$.

Отметим, что малые отверстия в стенках камеры вносят индуктивный вклад в импеданс.

Поперечный импеданс одиночного малого отверстия произвольной формы в стенке круглой камеры равен

$$Z_{\perp}(\omega) = -iZ_0 \frac{\alpha_m + \alpha_e}{\pi^2 b^4} a_h \cos(\varphi_h - \varphi_b), \quad (3.29)$$

где a_h обозначает единичный вектор в направлении к отверстию, φ_b — азимутальный угол отклонения пучка. Следует напомнить, что задача не обладает аксиальной симметрией, и отклоняющая сила не обязана быть направленной вдоль поперечного смещения пучка. Уравнение (3.29) показывает, что она направлена к отверстию (или от него). В камере произвольного поперечного сечения это, вообще говоря, не так, см. [104]. Величина импеданса зависит от угла между направлением на отверстие и вектором поперечного смещения пучка.

Для частных случаев формы отверстия из уравнения (3.29) получим поперечный импеданс

круглого отверстия радиуса h :

$$Z_{\perp}(\omega) = -iZ_0 \frac{2h^3}{3\pi^2 b^4} a_h \cos(\varphi_h - \varphi_b), \quad (3.30)$$

узкой продольной щели шириной w и длиной l , $w \ll l$:

$$Z_{\perp}(\omega) = -iZ_0 \frac{w^4}{24\pi b^4 l} \left(\ln \frac{4l}{w} - 1 \right) a_h \cos(\varphi_h - \varphi_b), \quad (3.31)$$

узкой поперечной щели шириной w и длиной l , при условии $w \ll l \ll b$:

$$Z_{\perp}(\omega) \cong -iZ_0 \frac{l^3}{24\pi b^4 (\ln(4l/w) - 1)} a_h \cos(\varphi_h - \varphi_b). \quad (3.32)$$

Если рассматриваются M ($M \geq 3$) отверстий, равномерно распределенных в одном поперечном сечении камеры, импеданс в результате векторного сложения отдельных выражений вида (3.29) равен

$$Z_{\perp}(\omega) = -iZ_0 \frac{\alpha_m + \alpha_e}{\pi^2 b^4} \frac{M}{2} a_b, \quad (3.33)$$

где a_b — единичный вектор в направлении поперечного смещения пучка.

Видно, что отклоняющая сила теперь направлена по смещению пучка, т.е. происходит восстановление аксиальной симметрии. Отметим, что максимальное значение Z_{\perp} только в $M/2$ раз больше, чем для случая

$M = 1$. Кроме того, при этом выполняется эмпирическое соотношение $Z_{\perp} = (2R/b^2)Z/n$, см. уравнение (1.39), которое справедливо только в аксиально-симметричных структурах.

Выражение для действительной части продольного импеданса было получено [102,104] путем вычисления энергии, излучаемой отверстием. Этот расчет, в сущности, повторяет результат работы Сэндса [107], где была вычислена полная энергия, излучаемая эффективными диполями. Действительная часть импеданса малых отверстий в рассмотренной области частот много меньше, чем мнимая.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВО ВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

«Вычисление импеданса во временном представлении» означает следующее: сначала рассчитывают наведенный потенциал, а затем, используя связь через преобразование Фурье (1.19) или (1.31), находят импеданс. Методы вычисления наведенных потенциалов подробно обсуждаются в обзоре Уилсона [12]. Мы остановимся подробнее лишь на тех, которые существенно отличаются от методов в ω -представлении и применяются для вычисления импедансов. В первую очередь, имеется в виду использование программы ТВСИ [113].

В качестве общего замечания отметим, что, как правило, вычисление полей во временном представлении сложнее, чем в частотном. Поэтому обычно даже для расчета наведенных потенциалов сначала находят фурье-компоненты полей, т.е. решают задачу о частотном представлении. Особенно это относится к случаям простой геометрии вакуумной камеры.

Аналитические методы расчета полей в t -представлении во многом сходны с обсуждавшимися выше. К примеру, прием ϵ -разложения использовался впервые [61] для вычисления энергетических потерь пучка через продольный наведенный потенциал, а не через импеданс — см. формулу (1.21). Поперечные наведенные потенциалы в камере с малой периодической вариацией границы рассчитаны с помощью ϵ -разложения в работе [108]. Наведенные потенциалы для цилиндрического резонатора с патрубками с помощью аналитического приближения СФ получены в работе [50]. Пример иного подхода дает работа [109], в которой существенно использование временного представления. В ней аналитически вычислен продольный наведенный потенциал в аксиально-симметричной камере с простой неоднородностью (диафрагма или резонатор) в ограниченном интервале запаздывания $\tau < L/c$, где L — характерный

размер структуры. Для этого приближенно проинтегрированы уравнения электродинамики в форме Кирхгофа.

Ряд *полуаналитических методов* вычисления наведенных потенциалов основан на шивании полей. Уже упоминавшиеся программы KN7C [57] и TRANSVRS [59] рассчитывают параметры собственных мод периодической структуры рис. 1, а (до нескольких сотен мод) и позволяют простым суммированием найти наведенный потенциал

$$W(s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(\omega_n s/c) \quad [15].$$

Например, при расчетах для линейного ускорителя SLAC численно были учтены 450 низших мод, а вклад высших мод суммировался аналитически в модели оптического резонатора [15,94].

Существенные отличия проявляются при сравнении *прямых численных методов* в ω - и t -представлении. Для аксиально-симметричной структуры, состоящей из резонатора с бесконечными патрубками (рис. 1, в, г), были сформулированы так называемые открытые граничные условия на патрубках, имитирующие в случае $\gamma \rightarrow \infty$ распространение с течением времени волнового фронта в структуре [110]. Эти граничные условия позволяют проводить расчет на сетке, покрывающей конечную область. Уравнения Максвелла в интегральной форме заменяются дискретной конечно-разностной схемой как по координатам, так и по времени с использованием FIT-алгоритма [111]. Численное решение дискретной задачи осуществляет программа ТВСІ [112,113], которая является наиболее распространенной и универсальной из программ, использующих t -представление. Программа ТВСІ позволяет рассчитать поля, возбуждаемые в резонаторе равномерно движущимся ультрарелятивистским сгустком с заданным линейным распределением заряда. При этом размер сгустка ограничен снизу величиной шага сетки по продольной координате, например, для гауссовского распределения $\sigma \geq 4+5\Delta z$. По сравнению с задачей на СЗ в частотном представлении здесь добавляется дополнительное измерение — время, однако это усложнение отчасти компенсируется в вычислительном отношении, поскольку не приходится обращаться матрицы больших размеров. Обзор возможностей ТВСІ можно найти в недавней работе [114].

Применения ТВСІ весьма многочисленны. В первую очередь, это расчет отклика резонаторов ускоряющих станций при прохождении через них сгустка — см., например, [112]. Пакет использовался для вычисления продольного и поперечного импеданса сильфонов и гофров [115,116,117,93], расширений камеры в экспериментальных зонах [48].

Специфической чертой ТВСІ является то, что этот пакет хорошо работает для резонатороподобных структур с одинаковыми радиусами

подводящих патрубков. В этом случае область интегрирования полей оказывается конечной только вдоль поверхности, являющейся мысленным продолжением трубы внутри резонатора ($r = b$, где b — радиус трубы), поскольку $E_t = 0$ на идеально проводящей стенке трубы вне резонатора. Для структур с неравными размерами подводящих патрубков, типа переходов, а также для неоднородностей типа коллиматоров и диафрагм этот простой подход не работает. Усовершенствованный алгоритм для общего случая, подходящий и для модифицирования ТВСІ, был недавно предложен в работе [118]. В этом подходе наведенные потенциалы выражаются через интегралы от магнитного поля по поверхности неоднородности, без вклада от гладкой части камеры.

Следует отметить и другие особенности расчета импеданса с помощью ТВСІ. Во-первых, поскольку сгусток не точечный, преобразование Фурье наведенного потенциала дает свертку $Z(\omega) \tilde{\lambda}(\omega)$ импеданса со спектром сгустка $\tilde{\lambda}(\omega)$. Так как на высоких частотах $\tilde{\lambda}(\omega) \ll 1$ (для гауссовского сгустка $\tilde{\lambda}(\omega) = \exp(-\omega^2 \sigma^2 / 2c^2)$), неточности вычисления свертки не позволяют найти импеданс на высоких частотах (при $\omega > c/\Delta z$, так как $\sigma \geq \Delta z$). Во-вторых, ТВСІ выдает наведенный потенциал в ограниченном интервале запаздывания — типично до нескольких десятков сантиметров [119] или нескольких метров [48], поскольку дальше начинаются численные неустойчивости (для поперечного случая — на еще меньших расстояниях). Это ведет к неточности в вычислениях импеданса при низких частотах, $\omega < c/L$, где L — граница интервала запаздывания.

Иногда импеданс оценивают, подбирая параметры широкополосного резонатора (ω , R_{sh} , Q) из фитирования зависимости коэффициента потерь $k(\sigma)$ от длины сгустка σ [93,121]. Отметим также оригинальный метод вычисления низкочастотного импеданса простейших неоднородностей с использованием пакета ТВСІ в работе [119]. Индуктивность находилась фитированием результатов расчета во временном представлении наведенного на элементе камеры напряжения V_{ind} по формуле $\mathcal{L} = -V_{ind}/(dI/dt)$, где $I(t)$ — ток пролетающего элемента сгустка. Получены эмпирические формулы для индуктивности простых неоднородностей типа рис. 1, в, е при $h \ll b$, аналогичные (3.21) — (3.23).

В настоящее время существует трехмерная версия ТВСІ — программа ТЗ [122], входящая в состав пакета MAFIA [46]. Применение ее для расчета импеданса элементов камеры с достаточно сложной геометрией продемонстрировано в работах [119,121]. Путем расчетов с помощью ТЗ наведенных полей в камере с малым отверстием в стенке в недавней работе [123] получены оценки низкочастотного импеданса, создаваемого

таким отверстием. Фитирование численных результатов дает формулу, схожую с аналитическим выражением (3.25).

Основным достоинством подхода ТВСІ (или ТЗ) при вычислении импедансов является универсальность, в числе недостатков — большие затраты машинного времени и то, что метод не всегда обеспечивает хорошую точность (см. обсуждение выше).

Кроме ТВСІ, существуют и другие программы расчета наведенных потенциалов и импедансов, использующие t -представление. Весьма похожа на ТВСІ программа АВСІ [124]; ТWA [125] решает неоднородное волновое уравнение для векторного потенциала на прямоугольной сетке; CLS [126], решающая уравнение для вектора Герца, позволяет рассмотреть камеру с коаксиальным проводником; программа Новохатского [127] использует сетку из произвольных четырехугольников. Недавно созданный пакет AMOS [128] моделирует конечно-разностным методом временную эволюцию полей, созданных источником с задаваемой пользователем пространственной и временной модуляцией, в аксиально-симметричных структурах.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на длинный список литературы, за рамками обзора осталось немало работ. В первую очередь, это работы, развивающие классические электродинамические методы расчета полей, в частности, использующие функции Грина. Вне списка литературы остались многие интересные работы отечественных авторов, посвященные вопросам расчета полей и излучения частиц в волноводах. Работы эти по сути близки к рассмотренным в обзоре, хотя и не используют понятия импедансов связи и наведенных потенциалов. Основное внимание в них направлено на вычисление иных электродинамических характеристик взаимодействия пучка с вакуумной камерой, например, радиационных потерь сгустка. Не пытаясь охватить всю литературу, имеющую отношение к этой тематике, отошлем читателя к монографиям [129] и [130], которые содержат достаточно обширную библиографию.

Как отмечалось во введении, основное внимание в обзоре уделено тем методам вычисления импеданса связи пучка с вакуумной камерой, которые наиболее важны для больших протонных синхротронов, где минимизация импеданса является важным средством борьбы с неустойчивостями. Для иных приложений могут оказаться удобными другие подходы. Тем не менее, автор надеется, что обзор поможет разобраться в большом количестве статей по этому вопросу, выполняя роль если не справочника, то путеводителя.

Из написанного выше ясно, что существует большое количество различных методов вычисления импеданса связи пучка с вакуумной камерой ускорителя. Но понятно также, что на сегодня нет *универсального метода*, пригодного в любом случае, для всех структур и т.д. Может быть, один из наиболее реальных претендентов на эту роль — ТВСИ, особенно программа ТЗ в пакете MAFlA. С появлением еще более мощных компьютеров этот подход приобретет еще больше достоинств. Тем не менее (полу)аналитические методы все же остаются весьма полезными. Во-первых, они позволяют развить некоторую физическую интуицию, необходимую для лучшего понимания электродинамических задач, возникающих в теории ускорителей. Во-вторых, порой они позволяют получить результат самым простым и быстрым путем. Таким образом, представляется необходимым развивать существующие методы и искать новые, лучшие, как численные, так и аналитические.

Автор выражает благодарность В.И.Балбекову за поддержку работы, полезные обсуждения и замечания. Некоторые результаты расчетов получены совместно с С.В.Пуртовым, которому автор весьма признателен. Благодарю также Ж.Гарета, С.В.Иванова, О.Наполи, Ф.Руджиеро и особенно Б.Цоттера за обсуждения некоторых вопросов, полезные советы, чтение рукописи¹¹ и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chao A. — Preprint SLAC-PUB-2446, Stanford, 1982; In: AIP Conf. Proc., vol.105, NY, AIP, 1983.
2. Laclare J.L. — In: Proc. of 11-th Int. Conf. on High Energy Accel. Geneva, 1980, p.526.
3. Балбеков В.И., Иванов С.В. — В сб.: Труды 13-й Межд. конф. по ускорителям частиц высоких энергий. Новосибирск, 1987, т.2, с.124.
4. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. — Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962.
5. Lebedev A.N., Zhilkov E.A. — Nucl. Instr. Meth., 1966, vol.45, p.238.
6. Neil V.K., Sessler A.M. — Rev. Sci. Instr., 1965, vol.36, p.429.
7. Laslett L.J., Neil V.K., Sessler A.M. — Rev. Sci. Instr., 1965, vol.36, p.436.
8. Warnock R.L. — Preprint SLAC-PUB-5375, Stanford, 1990.
9. Keil E., Zotter B. — Part. Accel., 1972, vol.3, p.11; Preprints CERN-ISR-TH/70-30,-32, Geneva, 1970.
10. Иванов С.В. — Препринт ИФВЭ 89-163, Серпухов, 1989.
11. Heifets S., Kheifets S. — Preprint SLAC-PUB-5297, Stanford, 1990; Rev. Mod. Phys., 1991, vol.63, p.631.
12. Wilson P. — Preprint SLAC-PUB-4547, Stanford, 1989; In: AIP Conf. Proceed., 184-NY, 1989, vol.1, p.525.
13. Zotter B. — In: CERN Report 77—13, Geneva, 1977, p.175.
14. Panofsky W.K.H., Wenzel W.A. — Rev. Sci. Instr., 1956, vol.27, p.967.

¹¹ Вариант обзора на английском языке опубликован в виде препринта CERN [131].

15. Bane K., Wilson P. — In: Proc. of 11-th Int. Conf. on High Energy Accel. Geneva, 1980, p.592.
16. Weiland T. — NIM, 1983, vol.216, p.31.
17. Zotter B., Sacherer F. — In: CERN Report 77-13, Geneva, 1977, p.175.
18. Keil E., Schnell W. — Preprint CERN-ISR-TH-RF/69-48, Geneva, 1969.
19. Boussard D. — Preprint CERN LabII/RF/75-2, Geneva, 1975.
20. Ng K.-Y. — In: AIP Conf. Proceed. 1984 — NY, 1989, vol.1, p.472.
21. Wilson P. — Preprint SLAC-PUB-2884, Stanford, 1982; in: AIP Conf. Proc. 87—NY, 1982, p.450.
22. Bane K., Weiland T., Wilson P. — Preprint SLAC-PUB-3528, Stanford, 1984; In: AIP Conf. Proc. 127—NY, 1985, p.875.
23. Palumbo L., Vaccaro V.G. — Preprint LNF-89/035(P), Frascati, 1989.
24. Warnock R.L., Morton P. — Part. Accel., 1990, vol.25, p.113.
25. Ng K.-Y. — Part. Accel., 1990, vol.25, p.153.
26. Ng K.-Y., Warnock R.L. — Phys. Rev. D, 1989, vol.40, p.231.
27. Hahn H., Tepikian S. — In: Proc. of 2nd Europ. Part. Accel. Conf., Nice, 1990, vol.2, p.1043.
28. Балбеков В.И., Герцев К.Ф. — АЭ, 1976, т.41, с.408.
29. Катаев В.В. и др. — Препринт ИФВЭ 86-97, Серпухов, 1986.
30. Hofmann A. — In: Proc. of 11-th Int. Conf. on High Energy Accel. Geneva, 1980, p.540.
31. Brandt D. et al. — In: Proc. of 2nd Europ. Part. Accel. Conf., Nice, 1990, vol.1, p.240-2.
32. Ng K.-Y. — Preprint FNAL FN-463, Batavia, 1987.
33. Shafer R.E. — Report UM-HE 84-1, Ann Arbor, 1984, p.155.
34. Ng K.-Y. — Report UM-HE 84-1, Ann Arbor, 1984, p.139.
35. Ng K.-Y. — Part. Accel., 1988, vol.24, p.93.
36. Nassibian G. — Preprints CERN/PS 84-4; 85-68, Geneva, 1984, 1985.
37. Nassibian G., Sacherer F. — NIM, 1979, vol.159, p.21.
38. Heifets S.A. — Preprint SLAC/AP-79, Stanford, 1990.
39. Вайнштейн Л.А. — Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
40. Halbach K., Holsinger R.F. — Part. Accel., 1976, vol.7, p.213.
41. Gluckstern R.L. et al. — In: Proc. Lin. Acc. Conf., Santa Fe, 1981, p.102.
42. Fedoseyev A.I. et al. — NIM, 1984, vol.A227, p.411.
43. Daikovsky A.G. et al. — Part. Accel., 1982, vol.12, p.59; Препринты ИФВЭ 83-3, -178, -179, Серпухов, 1983.
44. Fomel B.M. et al. — Part. Accel.(UK), 1981, vol.11, p.173.
45. Weiland T. — NIM, 1983, vol.216, p.329—348.
46. Weiland T. et al. — In: Proc. 1986 Lin. Accel. Conf., SLAC Report 303, p.282; Preprint DESY M-88-15, Hamburg, 1988.
47. Абрамов А.Г. и др. Препринт ИФВЭ 84-119, Серпухов, 1984.
48. Ng K.-Y. — In: Physics of the Superconducting Supercollider. Snowmass, 1986, p.592.
49. Колпаков О.А., Котов В.И. — ЖТФ, 1964, т.34, с.1387.
50. Dome G. — Preprint CERN SPS/85-27 (ARF), Geneva, 1985.
51. Куренной С.С., Пуртов С.В. — Препринт ИФВЭ 88-11, Серпухов, 1988.
52. Weiland T. — In: 1986 Lin. Acc. Conf. Proc., SLAC Report 303, p.292.
53. Миттра Р., Ли С. — Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
54. Warnock R.L., Bart G.P., Fenster S. — Part. Accel., 1982, vol.12, p.179.
55. Warnock R.L., Bart G.P. — Ibid., 1984, vol.15, p.1-33.
56. Ng K.-Y. — Preprint FNAL FN-389, Batavia, 1983.
57. Keil E. — NIM, 1972, vol.100, p.419.
58. Bane K. — Preprint CERN-ISR/TH-80/48, Geneva, 1980.
59. Bane K., Zotter B. — In: Proc. of 11-th Int. Conf. on High Energy Accel. Geneva, 1980, p.581.

60. Найфэ А.Х. — Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
61. Chatard-Moulin M., Papiernik A. — IEEE Trans., NS-26, 1979, p.3523.
62. Krinsky S. — In: Proc. of 11-th Int. Conf. on High Energy Accel. Geneva, 1980, p.576.
63. Куренной С.С. — Препринт ИФВЭ 88-10, Серпухов, 1988.
64. Kurennoy S.S., Purtoy S.V. — In: Europ. Part. Accel. Conf., Rome, 1988. World Scient., Singapore, 1989, vol.2, p.761—763.
65. Krinsky S., Gluckstern R. — IEEE Trans. NS-28, 1981, p.2621-3.
66. Kheifets S., Zotter B. — Preprint CERN/LEP-TH/85-27, Geneva, 1985; NIM, 1986, vol. A243, p.13-27.
67. Куренной С.С., Пуртов С.В. — Препринт ИФВЭ 89-1, Серпухов, 1989.
68. Поздеев М.Ю. — Препринт ИФВЭ 89-164, Серпухов, 1989.
69. Kheifets S., Gydi P.M. — IEEE Trans. NS-32, 1985, p.2338.
70. Каценеленбаум Б.З. — Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966.
71. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
72. Балбеков В.И. — Препринт ИФВЭ 85-128, Серпухов, 1985.
73. Пашков П.Т. — Препринт ИФВЭ 88-112, Серпухов, 1988.
74. Балбеков В.И., Поздеев М.Ю. — Препринт ИФВЭ 89-159, Серпухов, 1989.
75. Henke H. — Preprint CERN-LEP-RF/85-41, Geneva, 1985.
76. Henke H. — Preprint CERN-LEP-RF/85-21, Geneva, 1985.
77. Henke H. — Preprint CERN-LEP-RF/87-62, Geneva, 1987.
78. Guidee P., Hahn H., Mizumachi Y. — Preprint BNL-50829, Upton, 1978.
79. Vos L. — Preprint CERN SPS/86-21 (MS), Preessin, 1986.
80. Kheifets S., Bane K., Bizek H. — Preprint SLAC-PUB-4097, Stanford, 1987.
81. Hereward H.G. — Preprint CERN/ISR-D1/75-47, Geneva, 1975.
82. Heifets S., Kheifets S. — Preprint SLAC-PUB-3965, Stanford, 1986.
83. Gluckstern R.L., Zotter B. — Report CERN-LEP-613, Geneva, 1988.
84. Gkuckstern R.L. — Phys. Rev. D., 1989, vol.39, p.2773-9.
85. Gluckstern R.L. — Phys. Rev. D, 1989, vol.39, p.2780-3.
86. Gluckstern R.L., Neri F. — In: Proc. IEEE Part. Accel. Conf., Chicago, 1989, vol.2, p.1271-3.
87. Куренной С.С., Пуртов С.В. — Препринт ИФВЭ 90-31, Серпухов, 1990; In: Proc. of 2nd Europ. Part. Accel. Conf., Nice, 1990, vol.2, p.1777.
88. Gluckstern R.L., Neri F. — В сб.: Труды 13-й Межд. конф. по ускор. частиц выс. энергий. Новосибирск, 1987, т.2, с.170.
89. Van Rienen U., Weiland T. — Preprint DESY M-89-22, Hamburg, 1989.
90. Lawson J. — Report RHEL/M144, 1968.
91. Heifets S.A. — Phys. Rev. D, 1989, vol.40, p.3097-3106.
92. Heifets S., Kheifets S. — Preprint CEBAF-PR-87-030, 1987.
93. Bane K., Sands M. — Preprint SLAC-PUB-4441, Stanford, 1987.
94. Brandt D., Zotter B. — Preprint CERN-ISR/TH/82-13, Geneva, 1982.
95. Вайнштейн Л.А. — Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966.
96. Heifets S., Kheifets S. — Phys. Rev. D, 1989, vol.39, p.960-70.
97. Бурштейн Э.Л., Воскресенский Г.В. — Линейные ускорители электронов с интенсивными пучками. М.: Атомиздат, 1970.
98. Болотовский Б.М. — УФН, 1961. т.75, с.295.
99. Heifets S., Palumbo L., Vaccaro V.G. — Preprint CERN-LEP-TH/85-23, Geneva, 1985.
100. Heifets S., Palumbo L. — Preprint CERN-LEP Note 580, Geneva, 1987.
101. Вайнштейн Л.А. — Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966.
102. Kurennoy S.S. — Preprint CERN-SL/91-29(AP), Geneva, 1991.
103. Gluckstern R.L. — Preprint CERN-SL-92-05(AP), Geneva, 1992.
104. Куренной С.С. — Препринт ИФВЭ 92-84, Протвино, 1992.

105. Bethe H.A. — *Phys. Rev.*, 1944, vol.66, p.163-182.
106. Collin R.E. — *Field Theory of Guided Waves*. NY: McGraw-Hill, 1960.
107. Sands M. — Preprint PEP-253, Stanford, 1977.
108. Cooper R.K., Krinsky S., Morton P.L. — *Part. Accel.*, 1982, vol.12, p.1.
109. Novokhatski A.V. — Preprint INP 88-39, Novosibirsk, 1988.
110. Weiland T. — Preprint CERN-ISR/TH-80/46, Geneva, 1980.
111. Weiland T. — *Electronics and Communication (AEU)*, 1977, vol.31, p.116.
112. Weiland T. — In: *Proc. of 11-th Int. Conf. on High Energy Accel.* Geneva, 1980, p.570-5.
113. Weiland T. — *NIM*, 1983, vol.212, p.13-21; Preprint DESY 82-015, Hamburg, 1982.
114. Weiland T., Wanzenberg R. — Preprint DESY-M 91-06, Hamburg, 1991.
115. Ng K.-Y. — Preprint FNAL FN-449, Batavia, 1987.
116. Ng K.-Y. — Preprint FNAL FN-494, Batavia, 1988.
117. Bane K., Ruth R. — Preprint SLAC-PUB-3862, Stanford, 1985.
118. Napoly O. — Preprint CEA DPhN/STAS/91-R12, Saclay, 1991.
119. Bane K. — In: *Europ. Part. Accel. Conf.*, Rome, 1988. World Scient., Singapore, 1989, vol.2., p.637-9.
120. Zotter B. — Preprint CERN LEP-TH/87-34, Geneva, 1987.
121. Chou W., Jin Y. — In: *Proc. IEEE Part. Accel. Conf.*, Chicago, 1989, vol.2, p.909-11.
122. Klatt R., Weiland T. — In: *1986 Lin. Acc. Conf. Proc.*, SLAC Report 303, p.282.
123. Takao M. et al. — In: *Proc. IEEE 1991 Part. Acc. Conf.*, San Francisco, 1991, vol.1, p.506-8.
124. Chin Y.H. — Preprint CERN/LEP-TH/88-3, Geneva, 1988.
125. Shintake T. — In: *1984 Lin. Acc. Conf. Proc.*, GSI Report 84-11, Darmstadt, p.441-3.
126. Nishimura H. — *Reports LBL ESG Note* — 14,19,28,29, 1986.
127. Novokhatski A.V. — Preprint INP 82-157, Novosibirsk, 1982.
128. De Ford J. et al. — In: *Proc. IEEE Part. Accel. Conf.*, Chicago, 1989, vol.2, p.909-11.
129. Рубин С.Б. — *Взаимодействие электронного пучка с ускоряющей системой*. М.: Энергоатомиздат, 1985.
130. Саранцев В.П., Перельштейн Э.А. — *Коллективное ускорение ионов*. М.: Атомиздат, 1979.
131. Kurennoy S.S. — Preprint CERN-SL/91-31 (AP), Geneva, 1991.