«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1993, ТОМ 24, ВЫП.4

УДК 530.19+535.361

МНОГОМЕРНЫЕ И ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

А.А.Сузько

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Институт радиационных физико-химических проблем
АН Республики Беларусь, Минск

В адиабатическом представлении обсуждается последовательная формулировка многомерной и трехчастичной обратных задач рассеяния на основе согласованного решения двух взаимосвязанных задач: параметрической для гамильтониана быстрого движения и задачи для многоканальных систем связанных калибровочных уравнений, описывающей медленную динамику. Изложен метод построения широкого класса точно решаемых многомерных моделей посредством обобщения техники баргмановских потенциалов на параметрическое семейство обратных задач и для систем уравнений с ковариантной производной. Исследуется вопрос введения дополнительной матрицы скалярных потенциалов при сохранении суперсимметрии и, соответственно, условий для топологических эффектов. Предложено естественное обобщение виттеновской конструкции одномерной суперсимметричной квантовой механики на системы калибровочных уравнений в двумерном пространстве.

In the adiabatic representation, the multidimensional and three-body inverse scattering problems are discussed on the basis of consistent formulation of both the multichannel inverse problem for gauge systems of equations describing «slow» dynamics of the system and the parametric one for «fast» dynamics. The method of constructing a wide class of exactly solvable multidimensional models is investigated by generalizing the Bargmann potentials to the parametric family of inverse problems and systems of equations with covariant derivative. A problem introducing an extra matrix of scalar potentials so as to conserve supersymmetry and thus conditions for topological effects is studied. A direct generalization is given of the Witten supersymmetric quantum mechanics for gauge equations with additional scalar potentials.

1. ВВЕДЕНИЕ

На наш взгляд, для решения сложных многомерных, много- и малочастичных задач квантовой механики наиболее перспективен метод адиабатического представления [1—3], позволяющий учитывать взаимное влияние медленно изменяющегося внешнего и быстро изменяющегося внутреннего полей. В адиабатическом подходе выделяют медленную s- и быструю f-подсистемы, связанные между собой. Соответственно полный гамильтониан разбивается на составляющие части: $H = h^s + h^f$. Быстрые подсистемы можно считать погруженными в медленные, которые, в свою очередь, оказывают влияние на свойства быстрых. Решение полной задачи рассеяния в этом случае сводится к многоканальной задаче, описывающей медленную динамику квантовых систем, и к одноканальной для гамильтониана быстрого движения, параметрически зависящего от медленных координатных переменных. Полная волновая функция системы представляется в виде разложения

$$\Psi(\mathbf{X}) = \sum \int \Phi_n(\mathbf{X};.)\,\chi_n(\mathbf{X})$$

по собственным состояниям $\Phi_n(\mathbf{X};.)$ гамильтониана $h^f(\mathbf{X};.)$ быстрого движения при каждом фиксированном значении медленных переменных $\mathbf{X}$. Точкой мы обозначаем быстрые переменные. Подстановка такого разложения Ψ в исходное многомерное уравнение Шредингера и усреднение по быстрым переменным внутреннего движения приводит к многоканальной задаче рассеяния для медленных подсистем с удлиненной производной $D(\mathbf{X}) = I \otimes \nabla - i\mathbf{A}(\mathbf{X})$. В отличие от обычной многоканальной теории рассеяния, где связь между каналами определяется матричными элементами потенциальной энергии, в многоканальных уравнениях адиабатического подхода связь между состояниями гамильтониана быстрого движения осуществляется матричными элементами индуцированного оператора связности $\mathbf{A}(\mathbf{X}) = i\langle\Phi(\mathbf{X};.)|\nabla|\Phi(\mathbf{X};.)\rangle$.

В работах [4—9] и [10—14] сформулированы прямая и обратная задачи для систем уравнений калибровочного типа, а также параметрическая обратная задача для гамильтониана быстрого движения. Согласованное решение обеих задач дает полное решение проблемы. Многоканальная обратная задача в адиабатическом представлении сводится к определению S-матрицы по известным многомерным амплитудам $f(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{X}})$ и последующему восстановлению эффективных векторной $\mathbf{A}$ и потенциальной U матриц, а также матричных решений χ. Принципиально она решена благодаря использованию унитарного преобразования калибровочного типа $\mathfrak{U}$, осуществляющего переход к фиксированному базису и приводящего систему с удлиненной производной к системе обыкновенных уравнений с зацеплением за счет эффективной потенциальной матрицы. Тем самым были созданы предпосылки для генерирования широкого класса точно решаемых моделей для многомерных и многочастичных объектов. Однако задача решена не полностью, пока не определен исходный многомерный потенциал $V^f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, описывающий быструю динамику. Его нельзя определить, как в обычной многоканальной теории рассеяния, даже после того, как по заданной S-матрице найдены потенциальные матричные элементы $U^f = \langle \Phi | V^f | \Phi \rangle$. Трудность состоит в том, что базисные функции $|\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\rangle$ определяются тем же потенциалом $V^f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ при решении «быстрого» параметрического уравнения, который, вообще говоря, заранее неизвестен. Восстановить потенциал $V^f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и найти функции движущегося репера $|\Phi(\mathbf{X}; \mathbf{Y})\rangle$ можно с помощью формализма обратной задачи для быстрого уравнения при параметрической зависимости данных рассеяния от медленных переменных $s(\mathbf{X}; \mathbf{k})$, $\mathcal{E}_n(\mathbf{X}), \gamma_n(\mathbf{X})$, определяемой, в свою очередь, при решении «медленной» системы уравнений.

Это второй важный момент адиабатического представления, интересный в связи с новой постановкой обратной задачи с параметрической зависимостью от медленных координатных переменных. Ситуация до известной степени аналогична теории нелинейных эволюционных уравнений. Следует, однако, отметить, что вместо простого эволюционного уравнения в теории солитонов здесь приходится иметь дело со значительно более сложной системой уравнений (6) для определения параметрической зависимости спектральных данных от медленных переменных. Правда, в этой теории существует аналог эволюционного уравнения — билокальный унитарный оператор параллельного переноса репера из одной точки базы в другую (13).

На основе многоканальной и одноканальной техники баргмановских потенциалов для медленной системы уравнений и параметрически зависящего базисного быстрого уравнения в работе [4] предложен способ аналитического моделирования эффективных взаимодействий в многомерных полях и нахождения соответствующих решений.

Один из интересных аспектов адиабатического представления связан с возникновением калибровочных полей в нерелятивистских мало- и многочастичных квантовых системах, особенно в связи с открытием Берри [15] геометрической адиабатической фазы. Дальнейшие этапы развития теории определены работами Вильчека и Зи [16], Ааронова и Анандана [17]. Вильчек и Зи показали, что неабелевы эффективные калибровочные поля возникают в адиабатической трактовке молекулярных систем с вырожденными электронными состояниями. Ааронов и Анандан обобщили подход введением неадиабатических неабелевых геометрических фаз. Одно из следствий подхода — возникновение в молекулярных системах эффектов, эквивалентных эффектам Ааронова — Бома [18,19] и Холла [20,21], сверхпроводимости, нелинейных явлений. В частности, при наличии суперсимметрии для систем калибровочных уравнений основное состояние — состояние вакуума — вырождено, и возможны условия для возникновения эффектов, подобных квантовому эффекту Холла и нестандартной статистики. Суперсимметричная квантовая механика позволяет к тому же находить точные решения для широкого класса задач, включая многие из моделей, получаемых методами обратной задачи рассеяния и преобразований Дарбу [22,23,24].

В работах [5], [25], [26—28] обсуждается обобщение суперсимметричной квантовой механики [29—33] на системы калибровочных уравнений, получаемых в адиабатическом представлении. При этом изучается вопрос введения дополнительного скалярного потенциала при сохранении суперсимметрии. В одномерном случае суперсимметрия полностью определяется матрицей скалярных потенциалов, т.е. здесь можно сказать, что суперсимметрия и калибровочная симметрия не перемешиваются. В то же время в многомерном случае наличие суперсимметрии может приводить к возникновению геометрических фаз (которые, по сути дела, были написаны Аароновым и Кашером в статье [34], посвященной изучению вырождения основного состояния гамильтониана Паули), фаз Вильчека и Зи [16], различных топологических эффектов. Возможно также возникновение неадиабатических геометрических фаз вследствие сингулярностей вектор-потенциала в точках пересечения термов [35,27,28].

Недиагональные элементы индуцированного оператора связности A реализуют переходы между состояниями параметрического, так называемого мгновенного гамильтониана h^f и генерируют неадиабатические фазы Ааронова — Анандана [17]. В реалистической постановке трехчастичной задачи недиагональные матричные элементы A должны быть приняты во внимание, так как без них невозможно правильное решение задачи. Более того, возле пересечения уровней адиабатическое приближение несправедливо. При пересечении двух или даже трех уровней возникают сингулярности A_{nm} и, как результат, вызываемые ими фазы. Это делает необходимым введение геометрических неадиабатических матриц в присутствии сингулярностей A дополнительно к фазам Ааронова — Анандана [17,36]. Фазы Берри [15] получаются в адиабатическом пределе, когда переходами между различными состояниями пренебрегают.

К настоящему времени достигнут определенный успех в формулировке трехчастичных и многочастичных задач рассеяния. Корректная формулировка и решение задач рассеяния для системы трех заряженных частиц, естественно, осуществляется в рамках модифицированных дифференциальных уравнений Фаддеева [37]. Экзотическое трехчастичное взаимодействие — гиперсферически-симметричное без двухчастичных потенциалов — сводится, по сути дела, к обычным радиальным постановкам прямой и обратной задач рассеяния [39]. Исследованию модельных трехчастичных задач рассеяния без перераспределения и реалистических трехчастичных задач с учетом процессов рассеяния с перераспределением и развалом системы на три фрагмента посвящено достаточно много работ (в частности: [37—47], [6—10], [48—59]).

В работах [4], [6—12] предложено конструктивное решение прямой и обратной задач рассеяния в системе трех частиц, основанное *на глобальном адиабатическом представлении трехчастичной волновой функции* Ψ, *состоящей из суммы фаддеевских компонент* $\Psi(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha(\mathbf{X})$. В результате использования инвариантной адиабатической переменной — гиперрадиуса $X = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}$ — в задачах рассеяния трех частиц и представления гамильтониана в виде: $H = H^s(X) + H^f(X, \hat{\mathbf{X}})$ конструируется расслоенное пространство $\mathcal{H}$ с универсальной базой $B = \mathbf{R}^1_+ \ni X$ для всех фаддеевских компонент и типовым слоем $\mathcal{F}_X = L_2(\mathbf{S}^5_X(\hat{\mathbf{X}}))$, образованным из элементов базиса. Правильные граничные условия, соответствующие всем возможным процессам рассеяния с перераспределением и развалом, следуют из интегральных уравнений Фаддеева. Использование этих граничных условий, гиперсферического адиабатического представления и обобщенного калибровочного преобразования позволило корректно свести 3-частичные прямую и обратную задачи рассеяния к соответствующим им многоканальным и параметрическим и сформулировать их. Адиабатический подход применяется для конструирования модельных 3-частичных потенциалов баргмановского типа и соответствующих им точных решений в замкнутом аналитическом виде [4,11].

Класс точно решаемых задач квантовой механики существенно расширяется при использовании методов обратных задач рассеяния [60—65] и преобразований Дарбу — Крама — Крейна [66—68]. В работах [69—76] предложены обобщенные преобразования Баргмана и Дарбу — Крама — Крейна, позволяющие конструировать в замкнутом аналитическом виде новые серии потенциалов и соответствующие им решения уравнения Шредингера при переменных значениях углового момента l и энергии E вдоль произвольных прямых линий в (λ^2, E)-плоскости ($\lambda = l + 1/2$). В частном случае $l = \mathrm{const}$ они переходят в обычные выражения для решений и потенциалов баргмановского типа [77—81] в подходах Гельфанда — Левитана или Марченко с вырожденным ядром оператора обобщенного сдвига и в преобразования такого же типа при

$E = \mathrm{const}$ (см. [82,83], [39], [84,85] и ссылки в них). В этом смысле подход дает обобщение точно решаемых моделей обратной задачи с тем преимуществом, что не использует интегральных уравнений обратной задачи и, соответственно, не использует в явном виде полноту набора собственных функций, необходимую для ее вывода, и в то же время является замкнутой алгебраической процедурой. Полученные обобщенные преобразования Баргмана связаны с обобщенными преобразованиями Дарбу подобно тому, как соответствующие им обычные преобразования связаны друг с другом. Проведенные исследования для уравнений Шредингера с переменными значениями энергии и орбитального момента позволили предложить технику алгебраических преобразований Баргмана и Дарбу для уравнений более общего вида с функциональной зависимостью в правой части уравнения

$$- d^2\phi\,(\gamma, r)/dr^2 + V(R)\,\phi(\gamma,r) = \gamma^2 h(r)\,\phi(\gamma,r) \tag{1}$$

[83,27], находящих применение в атомной физике, теории распространения электромагнитных волн, акустике, геофизике и т.д. При определенном выборе $h(r)$ преобразования Баргмана и Дарбу как для фиксированных значений E и l, так и для переменных получаются как частные случаи этих обобщенных преобразований.

2. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Как известно, непосредственное решение многомерной обратной задачи встречается со многими трудностями, главным образом, в связи с ее переопределенностью. Дело в том, что методы Гельфанда — Левитана и Марченко основаны на существовании интегрального ядра обобщенного сдвига со свойством треугольности. Березанский в конечно-разностном случае [87], а Фаддеев — в непрерывном [88] существенно продвинулись в поиске нужного свойства треугольности в многомерных задачах. Затем Фаддеевым [88] (1971), [89] и вслед за ним независимо Ньютоном [90,93,94] была исследована трехмерная обратная задача. Необходимо отметить, что первая попытка еще за десять лет до этих работ была предпринята Кейем и Мозесом [95,96]. Однако их метод рассчитан на восстановление нелокальных потенциалов и не гарантирует воспроизведения локальных. Конечно-разностная формулировка двумерной обратной задачи была осуществлена в [39,97] на основе подхода Березанского в полиномиальных задачах восстановления бесконечной якобиевой матрицы [87].

Недавно в работах Биллса и Койфмана [98], Новикова и Хенкина [99—101] был исследован другой подход для двумерного и трехмерного операторов на фиксированном уровне и поверхности энергии. Ему предшествовала обратная задача при фиксированной энергии и переменных значениях орбитального момента для сферически-симметричного убывающего потенциала, сформулированная в работах Редже [102], Ньютона [103], Сабатье [104], Леффеля [105], Левитана [85,106], Липперхайде и Фиделдея [107,108].

Представляет интерес поиск и разработка конструктивных способов решения обратной задачи посредством сведения их к задачам меньшей размерности. В данном разделе рассматривается многомерная обратная задача в адиабатическом подходе, которая представлена в виде двух обратных задач: одна — для уравнения Шредингера, описывающего быструю динамику при параметрической зависимости от медленных переменных, другая — для системы уравнений, описывающей медленное движение. Дан способ конструирования точно решаемых моделей для обоих случаев, а тем самым и для полной многомерной задачи [4].

Как уже отмечалось, решение сложных многомерных задач часто основано на процедуре размерной редукции пространства $M = B \times \hat{M}$ посредством использования разложения волновой функции исходного гамильтониана по полному набору известных базисных функций. В общем случае это соответствует введению расслоенных гильбертовых пространств $\mathcal{H} = \int_B \otimes \mathfrak{F}_X \, d\mu(X)$, где B есть база, $\mu(X)$ — положительная мера на ней и слои $\mathfrak{F}_X$ образуют семейства гильбертовых пространств, параметризованных точками $X \in B$. В традиционном подходе метода сильной связи каналов такое представление соответствует фиксированному слою $\mathfrak{F}_X$, образованному из известных базисных функций, а неизвестные коэффициенты, к нахождению которых сводится задача, заданы на пространстве B меньшей размерности, чем исходное M. В отличие от этого адиабатическое представление, где для гамильтониана H вводят разбиение

$$H = h^s \otimes I + h^f, \tag{2}$$

формулируется на гильбертовом расслоенном пространстве $\mathcal{H}$ с нефиксированными слоями $\mathfrak{F}_X$, образованными из собственных функций $\Phi_n(X,.)$ самосопряженных операторов $h^f(X)$. Поскольку операторы $h^f(X)$ действуют в гильбертовых слоях $\mathfrak{F}_X$, их уместно называть слоями оператора H: $H = \int_B \otimes h^f(X)\, dX$ [43]. Оператор $h^s \otimes I$ действует как h^s по медленным s переменным X и как единичный оператор по быстрым f переменным $\mathbf{Y}$. Полная волновая функция системы в таком подходе представляется в виде разложения

$$\Psi(\mathrm{X}) = \sum_n \int \Phi_n(X;.)\, \chi_n(X) \tag{3}$$

по собственным состояниям $\Phi_n(X;.)$ самосопряженного гамильтониана быстрого движения $h^f(X)$ при каждых фиксированных значениях медленных переменных X:

$$h^f(X)\, \Phi_n(X;.) = \mathcal{E}_n(X)\, \Phi_n(X;.),$$
$$h^f(X,.) = -\Delta_{\mathrm{Y}} + V^f(X, \mathrm{Y}). \tag{4}$$

Символ $\sum \int$ в (3) обозначает суммирование по состояниям дискретного спектра $\mathcal{E}_n(X) \in \sigma_d(h^f(X))$ и интегрирование по состояниям непрерывного спектра $\mathcal{E}_k(X) \in \sigma_c(h^f(X))$. Если функции заданы на компактном множестве значений $\mathrm{Y} \in \widehat{M}$, то они все квадратично-интегрируемы и спектр чисто дискретный, как это имеет место в случае гиперсферической параметризации пространства, когда $\mathrm{Y} \in S^M$— набор углов. В общем случае, поскольку состояния рассеяния $\Phi_k(X;.) \equiv \Phi(k,X;.)$ вместе с состояниями дискретного спектра образуют полный набор, их необходимо учитывать в разложении (3), хотя они и не из L_2. Итак, пусть $B \ni X$ — гладкое многообразие размерности N, точкой обозначены быстрые переменные $\mathrm{Y} \in \widehat{M}$, которые принадлежат пространству $\widehat{M}$ размерности M. В зависимости от конкретной постановки задачи используется как компактное базовое многообразие, так и некомпактное.

Подстановка разложения (3) в исходное уравнение Шредингера

$$H\,\Psi(\mathrm{X}) = E\,\Psi(\mathrm{X}) \tag{5}$$

и усреднение по быстрым переменным $\mathbf{Y}$ движущегося репера $\Phi_n(X, \mathrm{Y})$ приводит к многоканальной задаче рассеяния для коэффициентов χ:

$$[-(\nabla \otimes I - iA(X))^2 + U(X) \otimes I - P^2]\,\chi(X) = 0 \quad (P = \mathrm{diag}\,(p_n)). \tag{6}$$

$A(X)$ — эффективный векторный потенциал, генерируемый функциями базиса

$$A_{nm}(X) = i\langle\Phi_n|\nabla_X|\Phi_m\rangle. \tag{7}$$

Эффективный скалярный потенциал

$$U(X) = U^f(X) + U^s(X)$$

состоит из диагональной потенциальной матрицы $U^f(X) = \mathrm{diag}\,\{\mathcal{E}_m(X)\}$

$$\sum_n U^f_{nm}(X) = \sum_n \langle\Phi_n(X;.)|h^f(X)|\Phi_m(X;.)\rangle = \mathcal{E}_m(X), \tag{8}$$

элементы которой совпадают с энергетическими уровнями $\mathcal{E}_m(X)$ мгновенного гамильтониана $h^f(X)$ (4) и некоторой дополнительной потенциальной матрицы $U^s(X)$, содержащейся только в системе уравнений (6), зависящей от медленных переменных,

$$U^s_{nm}(X) = \langle\Phi_n(X;.)|V^s(X,.)|\Phi_m(X;.)\rangle. \tag{9}$$

Вообще говоря, система уравнений (6) — интегродифференциальная, поскольку помимо суммирования по состояниям дискретного спектра оператора $h^f(X)$ необходимо проводить интегрирование по состояниям непрерывного спектра (спектра рассеяния) оператора $h^f(X)$. Таким образом, если n и m нумеруют дискретный спектр оператора $h^f(X)$, то соответствующая часть $||A_{nm}(X)||$ есть матрица, если n и m нумеруют непрерывный спектр оператора $h^f(X)$, то соответствующая часть $||A_{nm}(X)||$ является интегральным оператором с ядром $A_{nm}(X)$, т.е., вообще говоря, обобщенной функцией, так как функции $\{\Phi_n(X,.)\}$ непрерывного спектра не из L_2. Проблема решения интегродифференциальных уравнений — общая для метода сильной связи каналов. В реальных задачах очень часто ограничиваются разложением лишь по конечному дискретному набору состояний спектра, и тем более это оправданно, чем быстрее сходимость разложения по тому или иному набору базисных функций. Вклад опущенных членов в (28) эффективным образом можно учесть, используя проективную технику фешбаховского типа, (см., например, работу [43], в которой в рамках адиабатического представления учитываются вклады закрытых по энергии каналов в данные рассеяния).

Разложение (3) справедливо, если в каждом слое $\mathfrak{F}_X$ функции базиса образуют полный ортонормированный набор $\{\Phi_n(X,.)\}$ собственных функций $h^f(X)$, что следует из требования самосопряженности операторов $h^f(X)$ при каждом $X \in B$:

$$\langle n | m \rangle = \int \Phi_n^\dagger(X, Y)\, \Phi_m(X, Y)\, dY = \delta_{nm};\quad \langle q | q' \rangle = \delta(q - q')$$

$$\sum_n \Phi_n(X, Y)\, \Phi_n^\dagger(X, Y') = \delta(Y - Y'). \tag{10}$$

Отметим, что представление (3) полной волновой функции Ψ должно быть инвариантно при следующем унитарном преобразовании:

$$\Phi_m(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \sum_n \Phi_n'(\mathbf{X}; \mathbf{Y})\, \mathfrak{U}_{nm}(\mathbf{X});$$

$$\chi_m(\mathbf{X}) = \sum_n \mathfrak{U}^*_{nm}(\mathbf{X})\, \chi_n'(\mathbf{X}).$$

Используя соотношение связи функций базиса $\{\Phi\}$ и $\{\Phi'\}$, можно показать [115], что наведенный оператор связности A действительно является калибровочным полем или аффинной связностью, т.е. при изменении базиса в гильбертовом пространстве $\mathfrak{F}$ он преобразуется по формуле

$$A_\mu' = \mathfrak{U} A\, \mathfrak{U}^{-1} - i\, \mathfrak{U}^{-1} \partial_\mu\, \mathfrak{U}.$$

В соответствии с этим входящую в эффективное уравнение (6) удлиненную производную

$$D_\mu = \partial_\mu \otimes I - iA_\mu(X)$$

называют ковариантной производной. Используя сказанное выше, определим в некоторой фиксированной точке $X = X_0$ репер

$$| e(Y) \rangle \equiv | \Phi\, (X_0;\, Y) \rangle. \tag{11}$$

Движущийся репер $|\Phi(X;.)\rangle$ связан с фиксированным $|e(.)\rangle$ с помощью унитарного билокального оператора $\mathfrak{U}(X) \equiv \mathfrak{U}\,(X, X_0)$, $\mathfrak{U}^+(X) = \mathfrak{U}^{-1}(X)$:

$$|\Phi(X;.)\rangle = |e\rangle\, \mathfrak{U}\,(X, X_0), \qquad \mathfrak{U}(X; X_0) = \langle e | \Phi(X;.)\rangle, \tag{12}$$

осуществляющего параллельный перенос репера из X_0 в X. Из определения (7) оператора A с учетом (11) и (10) получаем

$$A_\nu = i\,\mathfrak{U}^{-1}\partial_\nu\,\mathfrak{U}.$$

Тогда ковариантная производная может быть записана через $\mathfrak{U}$:

$$D_\nu = \partial_\nu \otimes I + \mathfrak{U}^{-1}\partial_\nu\,\mathfrak{U}$$

и

$$\mathfrak{U}(X, X_0) = P\exp i\int_X^{X_0} A(X')\,dX'. \qquad (13)$$

Поскольку в результате калибровочного преобразования эффективные скалярные и векторные потенциальные матрицы в (6) принимают вид

$$U'(X) = \mathfrak{U}(X)U(X)\,\mathfrak{U}^{-1}(X), \qquad (14)$$

$$A'(X) = \mathfrak{U}A\,\mathfrak{U}^{-1} - i\,\mathfrak{U}^{-1}\partial_X\mathfrak{U}, \qquad (15)$$

легко показать, что при преобразовании (13) матрица векторного потенциала исчезает в отсутствие сингулярностей $A(X)$, матрица скалярного потенциала записывается в представлении фиксированного базиса $|e\rangle$. При этом система уравнений (6) сводится к обычной многоканальной системе уравнений с потенциальным зацеплением

$$\left\{-\frac{d^2}{dX^2} + U'(X) - P^2\right\}\chi'(X, P) = 0 \qquad (16)$$

для новых коэффициентов χ', связанных со старыми χ соотношением

$$\chi'(X, P) = \mathfrak{U}(X)\chi(X, P). \qquad (17)$$

Как хорошо известно из векторного анализа, осуществляя калибровочное преобразование над векторным потенциалом, можно добиться его уничтожения в случаях, когда $\operatorname{rot} A = 0$. Для неабелевых калибровочных полей, с которыми мы имеем дело в адиабатическом представлении, этому условию соответствует обращение в нуль матричного тензора

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu - i\,[A^\nu, A^\mu]$$

(на геометрическом языке $R_{\mu\nu}$ — кривизна). Нетривиальные топологические эффекты (например, эффект Холла) имеют место именно тогда, когда $R_{\mu\nu} \neq 0$. Если векторный потенциал сингулярен в некоторых точках координатного пространства $X \in B$, например точках пересечения термов, то исчезновения $R_{\mu\nu}$ уже недостаточно для исключения векторного потенциала при всех X. Здесь мы будем полагать выполнимость условия $R_{\mu\nu} = 0$ и отсутствие сингулярностей A.

Теперь можно применить стандартные методы многоканальной обратной задачи для системы уравнений (16), если известна соответствующая ей матрица рассеяния $S'(P)$ и информация по состояниям дискретного спектра: их положениям $\{E_\lambda\}$ и нормировкам $\{M_\lambda'\}$. Вследствие унитарного произвола в калибровке радиальных функций оказывается, что

$$M_\lambda' = M_\lambda, \quad \widehat{S}'(P) = \widehat{S}(P). \tag{18}$$

Действительно [4], подставим в определение нормировочных матриц M_λ' соотношение связи (17) и воспользуемся свойством унитарности матриц $\mathfrak{U}(X)$. Тогда

$$M_\lambda' = \left[\int_0^\infty \widetilde{F}'(i\kappa_\lambda, X)\, F'(i\kappa_\lambda, X)\, dX\right]^{-1} =$$

$$= \left[\int_0^\infty \widetilde{F}(i\kappa_\lambda, X)\, \mathfrak{U}^{-1}(X)\, \mathfrak{U}(X) F'(i\kappa_\lambda, X)\, dX\right]^{-1} = M_\lambda, \ ((i\kappa_\lambda)^2 = E_\lambda < 0). \tag{19}$$

Аналогичен вывод второго из соотношений (18), предложенный в [10]. Как известно, унитарная по открытым каналам симметричная $\widehat{S}'$-матрица, соответствующая системе (16), определяется следующим образом:

$$\widehat{S}'(P) = P^{-1/2}\mathfrak{F}'_{-}(P)\,(\mathfrak{F}'_{+}(P))\, P^{1/2}. \tag{20}$$

Используя соотношение (17) в стандартном определении матричных функций Йоста $\mathfrak{F}_{\pm}(P)$, получаем

$$\mathfrak{F}'_{\pm}(P) = W\left\{F'_{\pm}(X, P), \Phi'(X, P)\right\} = W\left\{F_{\pm}(X, P), \Phi(X, P)\right\} +$$

$$+ 2\widetilde{F}^{*}_{\pm}(X, P)\, A(X)\, \Phi(X, P) = W_d\left\{F_{\pm}(X, P), \Phi(X, P)\right\} \equiv \mathfrak{F}_{\pm}(P). \tag{21}$$

Здесь Φ' и Φ — матрицы регулярных решений систем уравнений (16) и (6) соответственно. Знак тильда используется для обозначения транспонирования. Но такими матричными функциями Йоста определяется $\hat{S}$-матрица, соответствующая системе (6):

$$\hat{S}(P) = P^{-1/2}\mathcal{F}_-(P)\,(\mathcal{F}_+(P))^{-1}\,P^{1/2}. \tag{22}$$

В итоге, учитывая (21), получаем (18). Пока предполагается, что нет квазипересечения уровней $\mathcal{E}_n(X)$, ответственных за нарушение унитарности $\mathfrak{U}$ в этих точках, возникновение вследствие этого сингулярных членов в (16) и нетривиальной геометрической фазы в данных рассеяния [26,27]. Берри [15] продемонстрировал существование монопольных полей в простых динамических системах, которые естественно возникают в рамках калибровочной теории [16]. Если мы хотим оценить линейный интеграл (13) по замкнутому контуру C, совместив после обхода X с X_0, то лучше по теореме Стокса его заменить поверхностным интегралом

$$\gamma = \oint_C A(X)dX = \int\int_S BdS,$$

где $B = \nabla \times A$ (в нашем случае $B = R_{\mu\nu}$). Поскольку $\mathrm{rot\,grad} = 0$, то результат не зависит от калибровочного преобразования $A \to A - \nabla\chi$. Следуя той же логике, поверхностный интеграл по теореме Гаусса можно заменить объемным, рассчитывая на нулевой результат, поскольку $\mathrm{div\,rot} = 0$. Однако при пересечении потенциальных кривых в некоторой точке R-пространства векторный потенциал $A(X)$ сингулярен и результат интегрирования по замкнутому контуру не равен нулю. Возникает геометрическая фаза, с которой давно сталкивались в атомной физике [19]. Однако свое объяснение она получила в знаменитой работе [15] (см. также [35] и [114]). Эта проблема будет обсуждаться в дальнейшем (разд.9). Здесь же рассмотрим простой пример возникновения фазы при свободном движении в N-мерном пространстве.

2.1. Геометрическая фаза свободных решений в N-мерном пространстве. Свободное движение в $\mathbf{R}^N$ в сферических координатах описывается уравнением

$$-\frac{N-1}{X}\,\partial_X\Psi - \partial_X^2\Psi - X^{-2}\nabla_{\hat{X}}\Psi = E\Psi$$

$$(X \in \mathbf{R}^1,\ \hat{\mathbf{X}} \in \mathbf{S}^{N-1}). \tag{23}$$

Перепишем это уравнение через удлиненную производную $D(X) = \partial_X - iA(X)$:

$$[-(\partial_X + \nu X^{-1})^2 + \nu(\nu-1)X^{-2} - X^{-2}\nabla_{\hat{\mathbf{X}}}]\Psi = E\Psi. \qquad (24)$$

Здесь $\nu = (N-1)/2$. Поскольку

$$AdX = i\nu X^{-1}dX = i\,\mathfrak{U}^{-1}d\mathfrak{U},$$

получим $\mathfrak{U} = X^{\nu}$. В соответствии с (17) введем новые функции Ψ':

$$\Psi = \mathfrak{U}^{-1}\Psi' = X^{-\nu}\Psi'.$$

После подстановки такого Ψ в (24) получим уравнение для Ψ' без первой производной:

$$-\partial_X^2\Psi' + \nu(\nu-1)X^{-2}\Psi' - X^{-2}\nabla_{\hat{\mathbf{X}}}\Psi' = E\Psi'. \qquad (25)$$

Неисчезающий центробежный барьер $\nu(\nu-1)X^{-2}$ связан с дефектом вложения сферы $\mathbf{S}^{N-1}$ в $\mathbf{R}^N$. Лишь для одномерного $\nu = 0$ и трехмерного $\nu = 1$ пространств дефект вложения отсутствует. Наличие барьера $\nu(\nu-1)X^{-2}$ приводит к возникновению топологической фазы δ, которая легко определяется при вычислении интеграла с помощью формул контурного интегрирования:

$$\delta = \operatorname{Im}\int_C A(X)dX = \operatorname{Im}\int_C \frac{\nu dX}{X} = \pi\nu. \qquad (26)$$

Рассмотрим теперь N-мерную задачу рассеяния с возмущающим сферически-несимметричным взаимодействием $V(\mathbf{X})$. Пусть радиус $X \in \mathbf{R}^1$ «сферы» $\mathbf{S}^{N-1}$ — медленная переменная, углы $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbf{S}^{N-1}$ — быстрые переменные. Тогда параметрическое быстрое уравнение (4) перепишется в виде

$$h^f(X, \hat{\mathbf{X}})\,\Phi_n(X; \hat{\mathbf{X}}) =$$

$$= [-X^{-2}\nabla_{\hat{\mathbf{X}}} + V^f(X, \hat{\mathbf{X}})]\,\Phi_n(X; \hat{\mathbf{X}}) = \mathcal{E}_n(X)\,\Phi_n(X; \hat{\mathbf{X}}), \qquad (27)$$

а система медленных уравнений (6) будет выглядеть следующим образом:

$$[-(\partial_X - iA)^2 + \nu(\nu-1)X^{-2} + U(X) - P^2]\chi(X,P) = 0, \qquad (28)$$

$$U(X) = U^s(X) + \langle\Phi|h^f(X, \hat{\mathbf{X}})|\Phi\rangle. \qquad (29)$$

Матричные элементы эффективных векторного и скалярного потенциалов получаются при усреднении по углам подвижного репера $|\Phi(X; \hat{X})\rangle$, удовлетворяющего (27).

3. МНОГОКАНАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

В обобщенном подходе Марченко [109—111], когда опорный потенциал $\mathring{V}(X) \neq 0$, основные матричные уравнения обратной задачи, соответствующие системе уравнений (16), следующие:

$$K(X, X') + Q(X, X') + \int_X^\infty K(X, t)\, Q(t, X')dt = 0, \tag{30}$$

$$U'(X) = \mathring{U}'(X) - 2\frac{d}{dX} K(X, X), \tag{31}$$

$$F'(X, P) = \mathring{F}'(X, P) + \int_X^\infty K(X, X')\, \mathring{F}'(X', P)\, dX'. \tag{32}$$

Матрицы решений Йоста $F'(X, P)$, $\mathring{F}'(X, P)$ связаны с решениями Йоста $F(X, P)$, $\mathring{F}(X, P)$ системы уравнений (6) или (28) в соответствии с (17). Система уравнений Марченко (30) решается относительно матричного ядра обобщенного сдвига $K(X, t)$ при известном ядре $Q(X, t)$, определяемом данными рассеяния $\hat{S}'(P)$, $\{M_\lambda'\}$, $\{E_\lambda\}$ и $\hat{\mathring{S}}'(P)$, $\{\mathring{M}_\lambda'\}$, $\{\mathring{E}_\lambda\}$, соответствующими системе уравнений (16) с потенциальными матрицами $U'(X)$ и $\mathring{U}'(X)$:

$$Q(X, X') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathring{F}'(X, P)\, [\hat{\mathring{S}}'(P) - \hat{S}'(P)]\, \tilde{\mathring{F}}'(X', P)\, dP +$$

$$+ \sum_\lambda^N \mathring{F}'(X, i\kappa_\lambda)\, M_\lambda'\, \tilde{\mathring{F}}'(X', i\kappa_\lambda) - \sum_\lambda^{\mathring{N}} \mathring{F}'(X, i\mathring{\kappa}_\lambda)\, \mathring{M}_\lambda'\, \tilde{\mathring{F}}'(X', i\mathring{\kappa}_\lambda). \tag{33}$$

Решения Йоста $\mathring{F}'(X, i\kappa_\lambda)$ и $\mathring{F}'(X, i\mathring{\kappa}_\lambda)$ системы (16) с матрицей $\mathring{U}'(X)$ должны быть взяты при энергиях связанных состояний E_λ и $\mathring{E}_\lambda$ обеих задач с $U'(X)$ и $\mathring{U}'(X)$ соответственно.

3.1. Восстановление потенциала взаимодействия $\mathbf{V}^s(\mathbf{X})$, характеризующего медленную динамику. Исследуем вначале наиболее простую ситуацию, когда заранее известен потенциал $V^f(\mathbf{X})$. В трехчастичной задаче это может быть эффективный потенциал $V^f(\mathbf{X}) = \sum\limits_\alpha V_\alpha(\mathbf{X})$, равный сумме двухчастичных. Необходимо определить дополнительный потенциал $V^s(\mathbf{X})$. (В рассматриваемом примере $V^s(\mathbf{X}) = V_{123}(\mathbf{X})$ — потенциал трехчастичного взаимодействия.) Будем считать, что амплитуды $f^f(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{X}}) \equiv \mathring{f}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{X}})$ и $f(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{X}})$ известны. При каждом фиксированном значении медленной переменной X из решения прямой задачи на собственные значения для уравнения (4) определяем реперные функции $\Phi_n(X, \hat{\mathbf{X}})$ и термы $\mathfrak{E}_n(X)$, параметрически зависящие от X. Помимо параметрической задачи Штурма — Лиувилля можно рассматривать для уравнения (4) задачи рассеяния или задачи с периодическими граничными условиями. По известным базисным функциям $\Phi(X;.)$ находим матричные элементы оператора связности $A(X)$ (7), а впоследствии по формулам (13) или (11) — билокальный транспортный оператор $\mathfrak{U}(X)$. Унитарный оператор $\mathfrak{U}(X)$ позволяет перейти от системы уравнений (28) к системе (16) с неизвестным пока потенциалом $V(X;.) \equiv V^s(X;.)$ в обкладках фиксированного репера $|e\rangle$.

Физические асимптотики решений системы уравнений (28)

$$\chi(X, P) \underset{XP \to \infty}{\to} -(2i)^{-1} \{\exp(-i(XP - \pi\gamma/2)) \otimes 1 -$$

$$- \exp(i(XP - \pi\gamma/2)) P^{-1/2} \hat{S}(P) R^{1/2}\} \tag{34}$$

определяются известным асимптотическим поведением полной волновой функции

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \underset{XP \to \infty}{\to} (2\pi)^{-3/2-\gamma} \times$$

$$\times \left[\exp i(\mathbf{X}\cdot\mathbf{P}) - X^{-\gamma-1} \exp i(XP - \pi\gamma/2)\, f(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})\right]. \tag{35}$$

Мы ввели $\gamma = \nu - 1$, используя традиционную форму записи, в которой выделяется часть фазы без дефекта вложения сферы $\mathbf{S}^2$ в $\mathbf{R}^3$; $\hat{S}(P)$ — симметричная S-матрица,

$$\hat{S}(P) = P^{1/2}\overline{S}(P)\, P^{-1/2}, \quad \hat{S} = \tilde{\hat{S}}\ , \tag{36}$$

унитарная на открытых каналах.

Поскольку мы считаем амплитуды $f(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ и $\mathring{f}(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \equiv f^f(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ заданными, находим соответствующие им матрицы $\hat{S}'(P)$ и $\hat{\mathring{S}}'(P)$, используя соотношения (18) и связь полной многомерной амплитуды с парциальными [4,7]:

$$f(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) = \frac{4\pi}{2i} \sum_{nm} \Phi_n(\hat{\mathbf{X}}, \infty)\, \hat{f}_{nm}(P)\, \Phi_m^\dagger(-\hat{\mathbf{P}}, \infty),$$

$$\hat{f}_{nm}(P) = (\hat{S}(P) - \hat{I}\cdot 1)_{nm} P_m^{-1-\gamma}, \tag{37}$$

где $\hat{I}$ — оператор полной инверсии в $\mathbf{R}^N\backslash 0$;

$$\hat{S}(P) = \hat{I}S(P), \tag{38}$$

S — обычный оператор рассеяния [112,113].

Здесь подразумевалось, что система уравнений (28) конечна. Если полный набор состояний включен в разложение (3), то она точная. Обычно разложение (3), в общем случае содержащее состояния $\Phi(X,.)$ дискретного и непрерывного спектра гамильтониана h^f, ограничивается конечным (не полным) набором N состояний.

Вклад опущенных членов в (6) можно учесть, используя проективную технику фешбаховского типа [43]. Это приводит к появлению дополнительных потенциальных членов в системе, состоящей из конечного набора «медленных» уравнений. Система из ограниченного числа уравнений была исследована в [115]. Вкладом остаточных членов пренебрегалось в предположении их малости.

Теперь основные обобщенные уравнения многоканальной обратной задачи Гельфанда — Левитана — Марченко (30)—(32) дают возможность определить потенциальную матрицу $\langle e|\, V^s(X, \hat{\mathbf{X}})\,|e\rangle$ и отвечающие ей матричные решения.

Возвращаясь к представлению в базисе $\Phi\,(X,.)$, получаем следующие соотношения в подходе Марченко:

$$U^s(X) = U(X) - U^f(X) = -2\,\mathfrak{U}^{-1}(X)\,\frac{d}{dX}K(X,X)\,\mathfrak{U}(X), \tag{39}$$

$$F_\pm(X,P) = \mathfrak{U}^{-1}(X)\,F'_\pm(X,P) =$$
$$= \mathfrak{U}^{-1}(X)\left[\mathring{F}'_\pm(X,P) + \int\limits_X^\infty K(X,X')\,\mathring{F}'_\pm(X',P)\,dX'\right]. \tag{40}$$

Здесь $\mathfrak{U}(X) \equiv \mathfrak{U}(X,\mathring{X})$ (удобно выбрать $\mathring{X} \to \infty$), $\mathring{F}'_\pm(X,P)$ — матричные решения Йоста системы уравнений (16) с потенциальной матрицей $\mathring{U}'(X) = U^{f'}(X)$.

Физические решения системы (6) или (28) получаются как линейная комбинация решений Йоста:

$$\chi^{ph}(X,P) = -(2i)^{-1}\,\{F^-(X,P) - F^+(X,P)\,P^{-1/2}\,\hat{S}(P)\,P^{1/2}\}. \tag{41}$$

Матричные уравнения Гельфанда — Левитана отличаются от основных уравнений Марченко лишь знаком в (31), (39) и пределами интегрирования в (40), (30), (32):

$$U^s(X) = U(X) - U^f(X) = 2\,\mathfrak{U}^{-1}(X)\,\frac{d}{dX}K^{\text{ГЛ}}(X,X)\,\mathfrak{U}(X), \tag{42}$$

$$\Phi\,(X,P) = \mathfrak{U}^{-1}(X)\,\Phi'(X,P) =$$
$$= \mathfrak{U}^{-1}(X)\left[\mathring{\Phi}'(X,P) + \int\limits_0^X K^{\text{ГЛ}}(X,X')\,\mathring{\Phi}'(X',P)\,dX'\right], \tag{43}$$

где $K^{\text{ГЛ}}(X,X')$ — матричное интегральное ядро уравнения Гельфанда — Левитана:

$$K^{\text{ГЛ}}(X,X') + Q^{\text{ГЛ}}(X,X') + \int\limits_0^X K^{\text{ГЛ}}(X,Y)\,Q^{\text{ГЛ}}(Y,X')\,dY = 0, \tag{44}$$

определяемое по заданным $Q^{\text{ГЛ}}(X,X')$:

$$Q^{\text{ГЛ}}(X,X') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathring{\Phi}'(X,P)\,d(\rho'(P) - \mathring{\rho}'(P))\,\tilde{\mathring{\Phi}}'(X',P). \tag{45}$$

Здесь $\rho'(P)$ и $\mathring{\rho}'(P)$ — спектральные матрицы, отвечающие системе (16):

$$\frac{d\rho'(P)}{dE}=\frac{\rho}{\pi}\,|\mathcal{J}'(P)|^{-2},\quad E\geq 0,$$

$$\frac{d\rho'(P)}{dE}=\sum_{\lambda}\delta\,(E-E_{\lambda})\,O'_{\lambda},\quad E<0. \tag{46}$$

Нормировочная матрица O'_{λ} определяется соотношением

$$O'_{\lambda}=[\int_{0}^{\infty}|\Phi'(X,P)|^{2}dX\,]^{-1}, \tag{47}$$

а матричные регулярные решения $\Phi(X, P)$ системы уравнений (28) — граничными условиями

$$\lim_{X\to 0}\Phi(X,P)\,X^{-(\mathcal{K}+\nu)}=1, \tag{48}$$

где $\mathcal{K}$ — гипермомент.

В силу того, что $\mathcal{J}'(P)=\mathcal{J}(P)$ (21), аналогично (18) получаем $\rho'(P)=\rho(P)$ и $O'_{\lambda}=O_{\lambda}$.

4. МНОГОКАНАЛЬНЫЕ ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

Для потенциалов баргмановского типа ядро $Q(X, X')$ представимо в виде суммы факторизованных членов, благодаря чему системы интегральных уравнений (30)—(32) сводятся к алгебраическим.

Отметим, что при конструировании точно решаемых моделей методами обратной задачи необходимо удовлетворять требованиям на данные рассеяния, при которых они отвечают соответствующей краевой задаче для уравнения или системы уравнений Шредингера, в данном случае (28), (34), с локальной и ограниченной потенциальной матрицей [64]:

$$\int_{0}^{\infty}X|U(X)|\,dX<\infty,\quad \int_{0}^{\infty}|U(X)|\,dX<\infty. \tag{49}$$

Основываясь на результатах работы [117], легко написать алгебраическую схему решения многоканальной обратной задачи в адиабатическом представлении.

Рассмотрим достаточно простую ситуацию, когда искомый потенциал $U^{s}(X)$ добавляет несколько связанных состояний, оставляя данные рассеяния или спектральные характеристики задачи (28) с потенциальной матрицей $U^f(X) \equiv \mathring{U}(X)$ без изменений. Этому может отвечать вариант обратной задачи на всей оси в подходах Марченко с $\hat{S}(P) = \hat{\mathring{S}}(P)$:

$$Q^M(X, X') = \sum_{\lambda}^{N} \mathring{F}'(X, i\kappa_\lambda)\, M_\lambda' \tilde{\mathring{F}}'(X', i\kappa_\lambda) = \mathring{F}'^T(X) M \mathring{F}'(X') \tag{50}$$

или радиальная задача в подходе Гельфанда — Левитана с равными спектральными матрицами $\rho(P) = \mathring{\rho}(P)$ при $E > 0$:

$$Q^{\text{ГЛ}}(X, X') = \sum_{\lambda}^{N} \mathring{\Phi}'(X, i\kappa_\lambda)\, O_\lambda' \tilde{\mathring{\Phi}}'(X', i\kappa_\lambda) = \mathring{\Phi}'^T(X) O \mathring{\Phi}'(X'). \tag{51}$$

В такой сокращенной записи ядро $Q(X, X')$ является «суперматрицей» как по индексам связанных состояний λ, так и по индексам каналов α. Впервые такую запись мы использовали в работе [118], посвященной аналитическому решению в R-матричной постановке обратной задачи.

В соотношении (50) $\mathring{F}(X)$ — вектор-столбец, $\mathring{F}^T(X)$ — строка, составленные из N элементов $\mathring{F}(X, i\kappa_\lambda)$, каждый из которых есть матрица $m \times m$ по числу каналов α; M — диагональная матрица $N \times N$ нормировочных коэффициентов, элементы которой также матрицы $m \times m$. Аналогично записано соотношение (51) для $Q^{\text{ГЛ}}(X, X')$. Здесь $\mathring{\Phi}(X)$ — вектор-столбец, $\mathring{\Phi}^T(X)$ — строка по индексам связанных состояний λ, отдельные элементы которых — матрицы $m \times m$ регулярных решений по канальным состояниям. Транспонированные матрицы по канальным числам α обозначены $\tilde{\mathring{\Phi}}$ и $\tilde{\mathring{F}}$, в отличие от $\mathring{\Phi}^T(X)$ и $\mathring{F}^T(X)$ по индексам λ.

4.1. Факторизация нормировочных матриц. Изучим вопрос, касающийся свойств нормировочных матриц связанных состояний. Поскольку система (16) — обыкновенная, с эрмитово-сопряженной потенциальной матрицей, то ее матричные физические решения удовлетворяют соотношению полноты

$$(2/\pi) \int_0^\infty \chi'(X, P) \chi'^{\dagger}(X, P)\, dP + \sum_\lambda \chi'(i\kappa_\lambda, X) \tilde{\chi}'(i\kappa_\lambda, X') =$$

$$= 1 \otimes \delta(X - X'). \tag{52}$$

Благодаря сведению системы (6) к (16) и стала возможной формулировка обратной задачи.

Векторы решений, отвечающие связанным состояниям, могут быть ортонормированы:

$$\int_0^\infty \tilde{\chi}'(i\kappa_\lambda, X)\,\chi'(i\kappa_{\lambda'}, X)\,dX = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{53}$$

В развернутой записи последнее соотношение выглядит следующим образом:

$$\sum_j^m \int_0^\infty \chi_j'(i\kappa_\lambda, X)\,\chi_j'(i\kappa_{\lambda'}, X)\,dX = \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Каждый элемент по индексам каналов вектора $|\chi_j'(i\kappa_\lambda, X)\rangle$ получается как линейная комбинация элементов матрицы решений Йоста

$$|\chi'(i\kappa_\lambda, X)\rangle = F'(i\kappa_\lambda, X)\,|\Gamma_\lambda\rangle \tag{54}$$

или

$$|\chi_i'(i\kappa_\lambda, X)\rangle = \sum_j F_{ij}'(i\kappa_\lambda, X)\,\gamma_j^{(\lambda)}.$$

Тогда

$$\langle\chi'(i\kappa_\lambda, X)\,|\chi'(i\kappa_\lambda, X)\rangle = \langle\Gamma_\lambda|\int_0^\infty \tilde{F}'(i\kappa_\lambda, X)\,F'(i\kappa_\lambda, X)\,dX|\Gamma_\lambda\rangle = 1.$$

Отсюда

$$\left[\int_0^\infty \tilde{F}'(i\kappa_\lambda, X)\,F'(i\kappa_\lambda, X)\,dX\right]^{-1} = |\Gamma_\lambda\rangle\langle\Gamma_\lambda| = M_\lambda', \tag{55}$$

т.е. нормировочные матрицы состояний дискретного спектра представляются в факторизованном по индексам каналов виде.

Аналогична факторизация нормировочных матриц регулярных решений

$$O_\lambda' = |C_\lambda\rangle\langle C_\lambda|. \tag{56}$$

Использование (55) и (56) в (50) и (51) позволяет записать матричное ядро $Q(X, Y)$ в виде суммы N слагаемых, факторизованных как по координатам, так и по индексам каналов, и, благодаря этому дать простые аналитические выражения для потенциальных матриц баргмановского типа и соответствующих им решений [117, 119].

4.2. Алгебраические соотношения обратной задачи. Учитывая факторизацию нормировочных матриц в подходе Марченко, ядро $Q(X, X')$ может быть записано в виде:

$$Q^M(X, X') = \sum_{\lambda}^{N} \overset{\circ}{F}'(X, i\kappa_\lambda)|\Gamma_\lambda\rangle\langle\Gamma_\lambda|\, \tilde{\overset{\circ}{F}}'(X', i\kappa_\lambda) =$$

$$= \sum_{\lambda}^{N} |\overset{\circ}{\chi}'(X, i\kappa_\lambda)\rangle\langle\overset{\circ}{\chi}'(X', i\kappa_\lambda)| = \overset{\circ}{\chi}'^T(X)\,\overset{\circ}{\chi}'(X'). \tag{57}$$

Здесь используется обозначение

$$|\overset{\circ}{\chi}'(X, i\kappa_\lambda)\rangle = \overset{\circ}{F}'(X, i\kappa_\lambda)|\Gamma_\lambda\rangle \tag{58}$$

или, в покомпонентной записи,

$$\overset{\circ}{\chi}'_i(X, i\kappa_\lambda) = \sum_{i}^{m} \overset{\circ}{F}'_{ij}(X, i\kappa_\lambda)\,\gamma_j^\lambda .$$

В таком же факторизованном виде, как (57), можно записать ядро уравнений Гельфанда — Левитана $Q^{\text{ГЛ}}$, где вектор $|\overset{\circ}{\chi}'\rangle$ (58) заменяется на $|\overset{\circ}{\chi}'^{\,\text{ГЛ}}\rangle$, который комбинируется из матричных элементов регулярных решений $\overset{\circ}{\Phi}'$:

$$|\overset{\circ}{\chi}'^{\,\text{ГЛ}}(X, i\kappa_\lambda)\rangle = \overset{\circ}{\Phi}'(X, i\kappa_\lambda)|\,C_\lambda\rangle. \tag{59}$$

Приведем алгебраические соотношения для матричного ядра обобщенного сдвига $K(X, X')$ потенциальных матриц и решений [117], получающиеся теперь из основных уравнений обратной задачи (30)—(32) не сложнее, чем в одноканальном случае. Матрица ортогонализации $K(X, X')$, так же, как и $Q(X, X')$, представима в виде суммы факторизованных членов:

$$K^M(X, X') = -\sum_{\lambda}^{N} |\chi'(X, i\kappa_\lambda)\rangle\langle\overset{\circ}{\chi}'(X', i\kappa_\lambda)| = -\chi'^T(X)\,\overset{\circ}{\chi}'(X'), \tag{60}$$

где каждый элемент вектора решений (54) определяется после подстановки (57) и (60) в (30):

$$|\chi'(X, i\kappa_\lambda)\rangle = \sum_{\nu}^{N} |\mathring{\chi}'(X, i\kappa_\nu)\rangle\, P^{-1}_{\nu\lambda}(X). \tag{61}$$

При этом матричные элементы $P_{\nu\lambda}(X)$ не зависят от индексов каналов:

$$P_{\nu\lambda}(X) = \delta_{\nu\lambda} + \sum_{j}^{m} \int_{X}^{\infty} \mathring{\chi}'_j(X', i\kappa_\nu)\, \mathring{\chi}'_j(X', i\kappa_\lambda)\, dX'. \tag{62}$$

Тогда

$$K(X, X') = -\mathring{\chi}'^{T}(X)\, P^{-1}(X)\, \mathring{\chi}'(X'), \tag{63}$$

или, в матричной записи,

$$K_{ij}(X, X') = -\sum_{\nu\lambda} \mathring{\chi}'_i(X, i\kappa_\nu)\, P^{-1}_{\nu\lambda}(X)\, \mathring{\chi}'_j(X', i\kappa_\lambda).$$

Как следует из соотношений (31), (32), баргмановская потенциальная матрица и решения Йоста при любых импульсах P записываются в виде

$$U'(X) = \mathring{U}'(X) + 2\frac{d}{dX}\mathring{\chi}'^{T}(X)\, P^{-1}(X)\, \mathring{\chi}'(X), \quad (\mathring{U}'(X) \equiv U^{f\prime}(X)) \tag{64}$$

$$F'_{\pm}(X, P) = \mathring{F}'_{\pm}(X, P) - \mathring{\chi}'^{T}(X) P^{-1}(X) \int_{X}^{\infty} \mathring{\chi}'(X')\, \mathring{F}'_{\pm}(X', P)\, dX'. \tag{65}$$

Отметим, что если не учитывать сепарабелизацию нормировочных матриц M и C по канальным индексам (55), (56), а следовательно, ядер Q^M и $Q^{\text{ГЛ}}$ (57) не только по координатам, но и по каналам, то при вычислении каждого из матричных элементов K, U, $F_{\pm}$ приходится иметь дело с обращением матриц $Nm \times Nm$, как это показано в [119,117]. Так, в работе Кокса [120] хотя и появилась запись нормировочной матрицы в факторизованном виде, но она не была использована для упрощения формул многоканальной обратной задачи.

Аналогичен вывод соотношений (64), (65) при сдвиге уровней, осуществляемом в задачах с разными потенциальными матрицами $U(X)$ и $\mathring{U}(X)$. Соотношения для Q^M и $Q^{\text{ГЛ}}$ (57) в этом случае записываются с вычитанием еще одной суммы факторизованных слагаемых, определяемых спектральными характеристиками $\{\mathring{\gamma}_\lambda, \mathring{\kappa}_\lambda\}$ исходной потенциальной матрицы $\mathring{U}'(X)$:

$$Q^M(X, X') = \sum_{\lambda}^{N} \mathring{F}'(X, i\kappa_\lambda)\,|\Gamma_\lambda\rangle\langle\Gamma_\lambda|\,\tilde{\mathring{F}}'(X', i\kappa_\lambda) -$$

$$- \sum_{\lambda'}^{\mathring{N}} \mathring{F}'(X, i\mathring{\kappa}_{\lambda'})\,|\mathring{\Gamma}_{\lambda'}\rangle\langle\mathring{\Gamma}_{\lambda'}|\,\tilde{\mathring{F}}'(X', i\mathring{\kappa}_{\lambda'})\,. \tag{66}$$

Соответственно в ядре $K^M(X, X')$ (60) также возникает дополнительная сумма факторизованных слагаемых:

$$K^M(X, X') = -\sum_{\lambda}^{N} |\chi'(X, i\kappa_\lambda)\rangle\langle\mathring{\chi}'(X', i\kappa_\lambda)| +$$

$$+ \sum_{\lambda'}^{\mathring{N}} |\chi'(X, i\mathring{\kappa}_{\lambda'})\rangle\langle\mathring{\chi}'(X', i\mathring{\kappa}_{\lambda'})|\,. \tag{67}$$

С учетом этих изменений в ядрах Q и K вывод соотношений (64), (65) повторяется тривиально. К алгебраической процедуре сводятся также случаи с дробно-рациональной матрицей Йоста. Подобным же образом получаются потенциальные матрицы и решения в подходе Гельфанда — Левитана и R-матричной обратной задаче рассеяния [119].

После определения потенциальной матрицы $U'(X)$, используя соотношение связи, аналогичное (17), для матричных функций

$$\mathring{\chi}'(X, P) = \mathfrak{U}(X)\,\mathring{\chi}(X, P) \tag{68}$$

по формулам (39), (42), (40), (43) находим потенциальную матрицу $U(X)$ системы уравнений (28) с удлиненной производной и соответствующую ей матрицу решений

$$U^s(X) = U(X) - \mathring{U}(X) = 2\,\mathfrak{U}^{-1}(X)\left(\frac{d}{dX}\mathring{\chi}'^T(X)\,P^{-1}(X)\,\mathring{\chi}'(X)\right)\mathfrak{U}(X) \tag{69}$$

или, в матричной записи,

$$U^s_{ij}(X) = 2\sum_{i'j'} \mathfrak{U}^{-1}_{ii'}\left(\frac{d}{dX}\sum_{\nu\lambda} \mathring{\chi}'_i(X, i\kappa_\nu)\,P^{-1}_{\nu\lambda}(X)\,\mathring{\chi}'_j(X', i\kappa_\lambda)\right)\mathfrak{U}_{j'j}(X),$$

$$F_\pm(X, P) = \mathring{F}_\pm(X, P) - \mathring{\chi}^T(X)\,P^{-1}(X)\int_X^\infty \mathring{\chi}(X')\,\mathring{F}_\pm(X', P)\,dX', \tag{70}$$

$$P = \mathrm{diag}(P_j), \quad \kappa_\lambda = \mathrm{diag}(\kappa_\lambda)_j, \quad (i\kappa_\lambda)_j = \sqrt{E_\lambda - \mathcal{E}_j}\,.$$

Отметим, что матрицы переноса $\mathfrak{U}(X, \mathring{X})$ в (68) и (17) одни и те же, поскольку заданы на одних и тех же базисных функциях $|\Phi\rangle$ и $|e\rangle$.

Так как функции параметрического базиса известны и образуют полный набор (10), можно определить и многомерный потенциал

$$V(X, \hat{\mathbf{X}}) = \int \delta(\hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}')\, V(X, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{X}}')\, d\hat{\mathbf{X}}',$$

используя формулу

$$V^s(X, \hat{\mathbf{X}}) = V(X, \hat{\mathbf{X}}) - V^f(X, \hat{\mathbf{X}}) = 2\sum_{ij}^{m} \Phi_i(X, \hat{\mathbf{X}}) \sum_{i'j'} \mathfrak{U}^{-1}_{ii'}(X) \times$$

$$\times \frac{d}{dX}\left(\sum_{\nu\lambda} \mathring{\chi}'_i(X, i\kappa_\nu)\, P^{-1}_{\nu\lambda}(X)\, \mathring{\chi}'_j(X', i\kappa_\lambda)\, \mathfrak{U}_{j'j}(X)\right) \Phi^*_j(X, \hat{\mathbf{X}}). \qquad (71)$$

В общем случае потенциал V^s нелокален по углам $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{\mathbf{X}}'$:

$$V^s(X, \hat{\mathbf{X}}, \mathbf{X}') = \sum_{ij} \Phi_i(X, \hat{\mathbf{X}})\, U_{ij}(X)\, \Phi^*_j(X, \hat{\mathbf{X}}').$$

Рассмотрим теперь более сложную задачу восстановления как $V^s(X, \hat{\mathbf{X}})$, так и $V^f(X, \hat{\mathbf{X}})$ по известным данным рассеяния или спектральным характеристикам исходной многомерной задачи.

4.3. Восстановление матрицы взаимодействия $\mathbf{V}^f$, характеризующего быструю динамику. По набору данных рассеяния $\{\hat{S}(P), \kappa_\lambda, M_\lambda\}$ восстанавливаем потенциальную матрицу $U^{f'}(X) = \mathfrak{U}(X) h^f(X)\, \mathfrak{U}^{-1}(X)$ и находим решения χ' системы (16) по обычным или обобщенным многоканальным формулам Гельфанда — Левитана — Марченко (30)—(32). Теперь найдем билокальный оператор переноса $\mathfrak{U}(X)$ и термы $\mathfrak{E}(X)$ в результате решения алгебраической задачи на собственные значения [11]:

$$U^{f'}(X)\, \mathfrak{U}(X) = \mathfrak{U}(X)\, U^f(X) = \mathfrak{U}(X)\, \mathfrak{E}(X). \qquad (72)$$

Таким образом, получен способ нахождения термов из решения многоканальной обратной задачи, а не прямой для реперного уравнения (27), как в предыдущем случае. Знание $\mathfrak{U}(X)$ позволяет восстановить и матрицу эффективного вектор-потенциала (7):

$$A(X) = i\,\mathfrak{U}^{-1}(X) \frac{d}{dX} \mathfrak{U}(X), \qquad (73)$$

ответственного за появление потенциала, зависящего от скорости.

Пользуясь изложенной выше техникой вырожденных ядер, дадим пример точно решаемой модели для системы уравнений по медленным переменным (16). В целях максимального упрощения в качестве опорного потенциала при восстановлении $V^f(\mathrm{X})$ возьмем $\mathring{V}(\mathrm{X}) = 0$. Для безотражательных потенциалов по медленной переменной в $Q^M(X, X')$ остается лишь сумма по связанным состояниям. Ограничимся рассмотрением примера «прозрачных» потенциальных матриц в подходе Марченко с одним связанным состоянием $\lambda = 1$; $E_1 = -\kappa_j^2 + \varepsilon_j$ для системы (16). Тогда

$$\mathring{F}'_{ij}(i\kappa, X) = \exp(-\kappa_i X)\,\delta_{ij}, \quad \mathring{\chi}'_j(X, i\kappa) = \exp(-\kappa_j X)\,\gamma_j. \tag{74}$$

Используя соотношения (61)—(63), получаем

$$\chi'_j(i\kappa, X) = \frac{\exp(-\kappa_j X)\,\gamma_j}{1 + \sum_i^m (\gamma_i^2/2\kappa_i)\exp(-2\kappa_i X)}, \tag{75}$$

$$K_{jj'}(X, X') = -\frac{\exp(-\kappa_j X)\,\gamma_j\gamma_{j'}\exp(-\kappa_{j'}X)}{1 + \sum_i^m (\gamma_i^2/2\kappa_i)\exp(-2\kappa_i X)}. \tag{76}$$

Для элементов потенциальной матрицы и решений из выражений (64), (65) получим в явном виде соотношения, являющиеся многоканальным обобщением соотношений для потенциалов типа Эккарта:

$$U^{f'}_{jj'}(X) = 2\gamma_j\gamma_{j'}\frac{d}{dX}\left[\frac{\exp(-(\kappa_j + \kappa_{j'})X)}{1 + \sum_i^m (\gamma_i^2/2\kappa_i)\exp(-2\kappa_i X)}\right], \tag{77}$$

$$F'^{\pm}_{jj'}(k, X) = \\ = \exp(\pm ik_j X)\,\delta_{jj'} - \frac{\gamma_j\gamma_{j'}\exp(-\kappa_j X)\int_X^\infty \exp(-(\kappa_{j'} \pm ik_{j'})X')\,dX'}{1 + \sum_i^m (\gamma_i^2/2\kappa_i)\exp(-2\kappa_i X)}. \tag{78}$$

Суммирование здесь проводится по числу m термов $\mathcal{E}_i(X)$, которые можно найти, осуществляя процедуру диагонализации (72) потенциальной матрицы (77).

Рассмотрим, например, двухканальную точно решаемую модель. Пусть U' восстанавливается в явном виде (77); причем канальные индексы принимают только два значения $i, j = 1, 2$. Из процедуры диагонализации потенциальной матрицы U' (72) $\mathfrak{U}^{-1}(X)\, U'\, \mathfrak{U}(X) = \mathcal{E}(X)$ мы получаем $\mathfrak{U}(X)$, $\mathcal{E}(X)$ и $\delta(X)$:

$$\mathfrak{U}(X) = \begin{pmatrix} \cos\delta(X) & \sin\delta(X) \\ -\sin\delta(X) & \cos\delta(X) \end{pmatrix},$$

где

$$\delta(X) = \int\limits_X A_{12}(X')\, dX'.$$

Из этих соотношений следует

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \cos^2\delta + \mathcal{E}_2 \sin^2\delta & (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\cos\delta\sin\delta \\ (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\cos\delta\sin\delta & \mathcal{E}_1 \sin^2\delta + \mathcal{E}_2\cos^2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_{11} & U'_{12} \\ U'_{21} & U'_{22} \end{pmatrix}.$$

В результате имеем

$$\operatorname{tg} 2\delta(X) = \frac{U'_{21}(X)}{U'_{11}(X) - U'_{22}(X)},$$

$$\mathcal{E}_1(X) = \frac{U'_{11}(X) + U'_{22}(X)}{2} + \frac{U'_{12}(X)}{\sin 2\delta(X)},$$

$$\mathcal{E}_2(X) = \frac{U'_{11}(X) + U'_{22}(X)}{2} - \frac{U'_{12}(X)}{\sin 2\delta(X)}.$$

Это прекрасная модель для исследования проблемы пересечения термов с использованием аналитических выражений вида (77).

Для восстановления многомерного потенциала $V^f(\mathbf{X})$ необходимо на втором этапе по спектральным данным $\{s(X, k), \mathcal{E}_i(X), \gamma_i^2(X)\}$, являющимся функциями медленной переменной X, сформулировать параметрическую обратную задачу по восстановлению $V^f(X,.)$ и $\Phi_i(X,.)$ для быстрого динамического уравнения (4) или (27) при каждом фиксированном значении X. При этом для параметрического семейства обратных задач, так же, как и для обычных, можно разработать технику баргмановских потенциалов, которая позволяет в явном аналитическом виде конструировать решения $\Phi_i(X,.)$ и потенциал $V^f(X,.)$.

5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БЫСТРОГО ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим параметрическую постановку обратной задачи на примере восстановления двумерного потенциала $V^f(X, y)$. В декартовых координатах уравнение (4) по быстрой переменной y при каждом фиксированном значении медленной переменной $X \equiv x$ запишем в виде

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} + \mathring{V}^f(y) + V^f(x; y)\right] \psi(x; y) = \mathcal{E}(x)\, \psi(x; y). \tag{79}$$

Поскольку существенным при формулировке обратной задачи является свойство полноты набора собственных функций (10), используем его для физических нормированных собственных функций уравнения (79), параметрически зависящих от x:

$$\psi\,(x; k, y) = f_-(x; k, y) - s(x; k)\, f_+(x; k, y), \tag{80}$$

$$\psi\,(i\kappa_n(x), y) = \gamma_n(x)\, f_+(i\kappa_n(x), y), \tag{81}$$

и регулярных решений

$$\phi\,(x; k, y) = \frac{1}{2ik}\, [f_-(x; k)\, f_+(x; k, y) - f_+(x; k)\, f_-(x; k, y)\,]. \tag{82}$$

Матрица рассеяния

$$s(x; k) = f_-(x; k)/f_+(x; k) \tag{83}$$

определяется функциями Йоста $f_\pm(x; k)$, зависящими от x как от параметра:

$$f_\pm(x; k) = \lim_{y \to 0} f_\pm(x; k, y). \tag{84}$$

Нормировку $\gamma_n^2(x)$ термов $\mathcal{E}_n(x)$, как обычно, определяем через решения Йоста при $k = i\kappa_n(x)$. С учетом (11) получим

$$\gamma_n^{-2}(x) = \int\limits_0^\infty |f(i\kappa_n(x), y)|^2 dy = \sum_j^m \mathfrak{U}_{nj}(x) \int\limits_0^\infty |e_j^M(y)|^2 dy\, \mathfrak{U}_{jn}(x), \tag{85}$$

или

$$\gamma_n^{-2}(x) = \sum_j^m \mathfrak{U}_{nj}(x)\, M_j^{-2}\, \mathfrak{U}_{jn}(x).$$

Осуществляя вывод обобщенных уравнений обратной задачи [82,39,110,111,109] при $\mathring{V}^f(y)$, получим следующие параметрические формулы:

$$K(x;\, y, y') + Q(x;\, y, y') + \int_{y(0)}^{\infty(y)} K(x;\, y, y'')\, Q(x;\, y'', y')\, dy'' = 0, \tag{86}$$

$$V^f(x;\, y) = \mathring{V}^f(y) \mp 2\frac{d}{dy} K(x;\, y, y), \tag{87}$$

$$\psi\,(x;\, k, y) = \mathring{\psi}\,(k, y) + \int_{y(0)}^{\infty(y)} K(x;\, y, y')\, \mathring{\psi}\,(k, y')\, dy'. \tag{88}$$

Пределы интегрирования в (86), (88) и знаки в (87) зависят от конкретного подхода обратной задачи. Пределы от y до ∞ (от y до a) в (86), (88) и знак минус в (87) отвечают формулировке Марченко (R-матричной ОЗ [39]). Пределы $[0, y]$ в (86), (88) и знак плюс в (87) отвечают подходу Гельфанда — Левитана.

В рамках обобщенного подхода Марченко [109,110] интегральные ядра $Q^M(x;\, y, y')$, зависящие параметрически от x:

$$\begin{aligned} Q^M(x;\, y, y') = {} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathring{s}(k) - s(x;\, k)]\, \mathring{f}(k, y)\, \mathring{f}(k, y')\, dk + \\ & + \sum_n^m \gamma_n^2(x)\, \mathring{f}(i\kappa_n(x), y)\, \mathring{f}(i\kappa_n(x), y') - \\ & - \sum_n^{\mathring{m}} \mathring{\gamma}_n^2\, \mathring{f}(i\mathring{\kappa}_n, y)\, \mathring{f}(i\mathring{\kappa}_n, y'), \end{aligned} \tag{89}$$

строим по двум наборам данных рассеяния: $\{s(x, k),\ \mathcal{E}_n(x),\ \gamma_n^2(x)\}$, соответствующим уравнению (79) при каждом значении параметра x, и обычным данным рассеяния $\{\mathring{s}(k),\ \mathring{\mathcal{E}}_n, \mathring{\gamma}_n^2\}$, отвечающим (79) с $V^f(x;\, y) = 0$:

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} + \mathring{V}^f(y)\right] \mathring{\psi}\,(k, y) = \mathcal{E}\,(x)\, \mathring{\psi}\,(k, y). \tag{90}$$

Функции $\mathring{f}(k, y)$ — обычные решения Йоста уравнения (90) с известным потенциалом $\mathring{V}^f(y)$. По интегральным ядрам $K^M(x; y, y')$, относительно которых при каждом фиксированном значении x решается линейное интегральное уравнение (86), определяются потенциалы (87) и решения Йоста (88).

Аналогично строится параметрическое семейство ядер $Q^{ГЛ}(x; y, y')$ интегрального уравнения, обобщающего уравнение Гельфанда — Левитана:

$$Q^{ГЛ}(x; y, y') = \int_0^\infty \mathring{\phi}(k, y)\, \mathring{\phi}(k, y')\, d\,[\rho(x; k) - \mathring{\rho}(k)] +$$

$$+ \sum_n^m c_n^2(x)\, \mathring{\phi}(i\kappa_n(x), y)\, \mathring{\phi}(i\kappa_n(x), y') -$$

$$- \sum_n^{\mathring{m}} \mathring{c}_n^2\, \mathring{\phi}(i\mathring{\kappa}_n, y)\, \mathring{\phi}(i\mathring{\kappa}_n, y'). \tag{91}$$

Спектральная функция $\rho(x; k)$ определяется функциями Йоста $f_{\pm}(x; k)$:

$$\rho(x; k) = \frac{2k}{\pi\, f_-(x; k)\, f_+(x; k)}, \tag{92}$$

а нормировка $c_n^2(x)$ — регулярными решениями $\phi\ (x; k, y)$ при $k = i\kappa_n(x)$:

$$c_n^2(x) = \left[\int_0^\infty |\phi(i\kappa_n(x), y)|^2 dy \right]^{-1}. \tag{93}$$

Связь с обычными нормировочными коэффициентами легко устанавливается после подстановки соотношения связи подвижного репера с фиксированным (11) в (93):

$$c_n^2(x) = \sum_j^m \mathfrak{U}_{nj}(x)\, N_j^{-2}\, \mathfrak{U}_{jn}(x), \quad N_j^{-2} = \int_0^\infty |e_j^{ГЛ}(y)|^2 dy. \tag{94}$$

Спектральные характеристики $\{\mathring{\rho}(k)\, \mathring{c}_n^2,\ \mathring{\mathcal{E}}_n\}$ и регулярные решения $\mathring{\phi}\ (k, y)$ отвечают уравнению (90). После того, как решено уравнение (86) относительно $K^{ГЛ}(x, y, y')$, по формулам (87) (нижний знак) и (88) (пределы $[0, y]$) находим потенциал и регулярные решения уравнения (79).

Аналогично выводятся соотношения параметрического семейства обратных задач в R-матричной теории рассеяния [121,122]. Из приведенных формул следует, что при одномерном быстром движении можно восстановить двумерный потенциал с параметрической зависимостью от медленной переменной и как функцию быстрой переменной. При этом используются данные рассеяния с параметрической зависимостью от координатной переменной. При полной постановке обратной задачи, когда в качестве исходных данных выступает многомерная амплитуда, зависимость спектральных параметров от медленных переменных определяется из (72) после восстановления потенциальной матрицы $U^{f'}(x)$ при решении обратной задачи для системы (16), описывающей медленную динамику. Можно рассмотреть также модельные задачи, задавая функциональную зависимость спектральных параметров, с целью изучения геометрических аспектов многомерной и многочастичной квантовой теории рассеяния. Таким образом, использование техники адиабатического представления позволяет увеличить размерность пространства, для которого возможна формулировка обратной задачи. В следующем разделе применим технику баргмановских потенциалов [38,39,82,123] к параметрическому семейству обратных задач для уравнений (79).

6. ПОТЕНЦИАЛЫ БАРГМАНА С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ МЕДЛЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Потенциалам Баргмана для обычного одномерного уравнения Шредингера соответствуют дробно-рациональные функции Йоста

$$f(k) = \mathring{f} \prod \frac{k - i\alpha}{k + i\beta}. \tag{95}$$

Тогда ядра интегральных уравнений обратных задач сепарабелизуются:

$$Q(y, y') = \sum_{i}^{N} Q_i(y)\, Q_i(y'), \tag{96}$$

а сами уравнения сводятся к системам алгебраических и решаются в явном виде, если опорные потенциалы $\mathring{V}(y)$ допускают аналитические решения.

Построим теперь широкий класс потенциалов, для которых можно найти в замкнутом аналитическом виде решения параметрического уравнения Шредингера (79). По аналогии с (95) выберем функцию Йоста в дробно-рациональном виде, однако теперь она параметрически зависит от динамической медленной переменной x через зависимость от нее спектральных параметров:

$$f(x; k) = \mathring{f}(k) \prod \frac{k - i\,\alpha(x)}{k + i\,\beta(x)}. \tag{97}$$

Параметрическая функция Йоста (97) имеет N простых полюсов в точках $k = i\,\beta_j(x)$ и N простых нулей при $k = i\,\alpha_j(x)$. Причем в $\alpha(x)$ содержатся не только нули на мнимой полуоси, отвечающие связанным состояниям $\operatorname{Re}\kappa_j(x) = 0$, $\operatorname{Im}\kappa_j(x) > 0$, но и нули в нижней полуплоскости с $\operatorname{Im}\nu_j(x) < 0$ (число простых полюсов β_j равно числу значений κ_j и ν_j вместе взятых). Тогда матрица рассеяния и спектральная функция приобретают вид

$$s(x; k) = \mathring{s}(k) \prod \frac{(k + i\alpha(x))\,(k + i\beta(x))}{(k - i\beta(x))\,(k - i\alpha(x))}, \tag{98}$$

$$\rho(x; k) = \mathring{\rho}(k) \prod \frac{(k - i\beta(x))\,(k + i\beta(x))}{(k + i\alpha(x))\,(k - i\alpha(x))}. \tag{99}$$

Функции $\mathring{s}(k)$ и $\mathring{\rho}(k)$ известны, поскольку известен потенциал $\mathring{V}^f(y)$; в частном случае $\mathring{V}^f(y) = 0$. Для таких $s(x, k), \rho(x, k)$, как (98), (99), ядра $Q(x; y, y')$ интегральных уравнений обратных задач вырождаются и представляются в виде суммы нескольких членов с факторизованной координатной зависимостью по быстрой переменной:

$$Q(x; y, y') = \sum_i^N B_i(x; y)\, B_i(x; y'). \tag{100}$$

После подстановки такого ядра Q в основное параметрическое уравнение обратной задачи (86) очевидно, что ядра обобщенного сдвига $K(x; y, y')$ также становятся вырожденными:

$$K(x; y, y') = \sum_i^N K_i(x; y)\, B_i(x; y'). \tag{101}$$

Как следствие этого, интегральные уравнения становятся алгебраическими, сферически-несимметричный потенциал и соответствующие ему решения выражаются в замкнутом виде через известные решения непараметрической задачи (90) с потенциалом $\mathring{V}^f(y)$ и через спектральные характеристики двух задач (90) и (79): непараметрической с потенциалом $\mathring{V}^f(y)$ и параметрической с потенциалом $\mathring{V}^f(y) + V^f(x, y)$. Рассмотрим несколько примеров использования техники баргмановских потенциалов.

6.1. Получение аналитических решений в подходе Гельфанда — Левитана. Пусть при $E > 0$ $\rho(x;\, k) = \mathring{\rho}(k)$, и имеется лишь одно связанное состояние $\mathcal{E}\,(X) = -\,\kappa^2(x)$. Для максимального упрощения задачи выберем опорный потенциал $\mathring{V}^f(y) \equiv 0$. Этому случаю отвечает функция Йоста

$$f(x;\, k) = \frac{k - i\kappa(x)}{k + i\kappa(x)}\,. \tag{102}$$

Отсюда, как следует из (74), $\rho(x,\, k) = 2k/\pi = \mathring{\rho}(k)$. Тогда из соотношения (87) получаем

$$Q^{\text{ГЛ}}(x;\, y,\, y') = c^2(x)\,\frac{\sinh\,[\kappa(x)y]\sinh\,[\kappa(x)y'\,]}{\kappa^2(x)}\,, \tag{103}$$

$$K^{\text{ГЛ}}(x;\, y,\, y') = -\,c^2(x)\,\phi(i\kappa(x),\, y)\,\frac{\sinh\,[\kappa(x)y'\,]}{\kappa(x)}\,, \tag{104}$$

$$\phi(i\kappa(x),\, y) = \frac{\kappa(x)\,\sinh\,(\kappa(x)y)}{\kappa^2(x) + (c^2/2)\,(\sinh\,(2\kappa(x)y)/2\kappa(x) - y)}\,. \tag{105}$$

Наконец, учитывая (105) в (104) и подставляя результат в соотношения (88), (87) при $\mathring{V}(y) = 0$, получаем в явном виде выражения для решений при произвольном k и для двумерного потенциала $V(x;\, y)$ с параметрической зависимостью от x:

$$\phi(x;\, k,\, y) = \frac{\sin ky}{k} - c^2(x)\,\phi(i\kappa(x),\, y)\int\limits_0^y \frac{\sinh\,[\kappa(x)y'\,]\sin ky'dy'}{\kappa(x)k} =$$
$$= \frac{\sin ky}{k} - \frac{c^2(x)\,\sinh\,(\kappa(x)y)\,\,[\kappa(x)\cosh\,(\kappa(x)y)\,\sin ky - k\,\sinh\,(\kappa(x)y)\,\cos ky\,]}{k\,[\kappa^2(x) + k^2\,]\,\,[\kappa^2(x) + (c^2(x)/2)\,(\sinh\,(2\kappa(x)y)/2\kappa(x) - y)\,]}\,, \tag{106}$$

$$V(x;\, y) = \frac{2\kappa(x)\,\,[y/2 - c^{-2}(x)\,\kappa^2(x)\,] - 2\,\sinh^2(\kappa(x)y)}{[c^{-2}(x)\,\kappa^2(x) + 1/2\,(\sinh\,(2\kappa(x)y)/2\kappa(x) - y)\,]^2}\,. \tag{107}$$

Можно проверить метод построения следующим образом. Переходя в (106) к асимптотике при $y \to \infty$ и выделяя слагаемые с $\exp\,(\pm\, iky)$, находим коэффициенты при них. Это и есть функции Йоста $f_{\pm}(x; k)$, которые совпадают с (102). По ним, используя определение (83), строим параметрическую s-матрицу:

$$s(x; k) = \frac{f_-(x; k)}{f_+(x; k)} = \frac{(k + i\kappa(x))^2}{(k - i\kappa(x))^2}. \tag{108}$$

Примеру с m-связанными состояниями и с потенциалом $\overset{\circ}{V}(y) \neq 0$ соответствует

$$f_+(x; k) = \overset{\circ}{f}(k) \prod_n^m \frac{k - i\kappa_n(x)}{k + i\kappa_n(x)}, \tag{109}$$

где термы $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$ определяются при решении многоканальной системы уравнений по медленным переменным и последующей диагонализации (72). Легко написать m-членное обобщение формул (103)—(107). Ядра основного уравнения Гельфанда — Левитана (86) запишутся следующим образом:

$$Q^{\text{ГЛ}}(x; y, y') = \sum_n^m c_n^2(x)\, \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y]\, \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y'], \tag{110}$$

$$K^{\text{ГЛ}}(x; y, y') = -\sum_n^m c_n^2(x)\, \phi(i\kappa_n(x), y)\, \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y']. \tag{111}$$

После чего, используя одно из соотношений обратной задачи (86) или (88), получим решения $\phi[i\kappa_n(x), y]$ для связанных состояний $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$, параметрически зависящих от динамической переменной x:

$$\phi[i\kappa_n(x), y] = \sum_j^m \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_j(x), y]\, P_{jn}^{-1}(x; y), \tag{112}$$

где

$$P_{nj}(x; y) = \delta_{nj} + c_n^2 \int_0^y \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y']\, \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_j(x), y']\, dy'.$$

Затем, подставляя полученное выражение для $\phi[i\kappa_n(x), y]$ в соотношение (112) для ядра $K^{\text{ГЛ}}(x; y, y')$ и используя соотношения параметрической обратной задачи (86)—(88), получим в замкнутом аналитическом виде выражения для потенциала и решений

$$V(x; y) = -2 \frac{d^2}{dy^2} \ln \det \| P_{nj}(x; y) \|,$$

$$\phi(x; k, y) = \overset{\circ}{\phi}(k, y) - \sum_n^m \sum_j^m \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_j(x), y] P_{jn}^{-1}(x; y) \int_0^y \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y']\, \overset{\circ}{\phi}(k, y')\, dy'. \tag{113}$$

Исследования легко провести в сферических координатах, выбирая в качестве быстрой переменной угол, медленной — координату, и наоборот.

6.2. Получение аналитических решений в подходе Марченко. Безотражательным (прозрачным) потенциалам по быстрой переменной соответствует одномерная обратная задача на всей оси $-\infty < y < \infty$ с равным нулю коэффициентом отражения $s^{\mathrm{ref}} = 0$. Коэффициент прохождения s^{tr}, равный по модулю 1, имеет вид рациональной дроби

$$s^{tr}(x; k) = \prod_n^m \frac{k + i\kappa_n(x)}{k - i\kappa_n(x)}. \tag{114}$$

Отметим, возможны разные варианты: прозрачные потенциалы как по медленной, так и по быстрой переменным, прозрачные вдоль одной из них, запирающие вдоль одной из координат, либо вдоль обеих, и тому подобные рассмотрения с дробно-рациональными функциями Йоста.

Обратная задача на всей оси похожа на двухканальную с двумя расцепленными основными интегральными уравнениями. Однако, поскольку $V(x, y)$ выражается как через ядро $K_1(x; y, y')$ одного интегрального уравнения, так и через ядро $K_2(x; y, y')$ другого уравнения, достаточно найти одно из $K_i(x; y, y')$ по формуле, совпадающей с (86). Тогда в $Q^M(x; y, y')$, определяемом здесь при $\mathring{V}(y) \equiv 0$ по формуле

$$Q^M(x; y, y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(x; k) \exp(ik(y + y') \, dk + \\ + \sum_n^m \gamma_n^2(x) \exp(-\kappa_n(x)(y + y')), \tag{115}$$

остается лишь вклад от состояний дискретного спектра

$$Q^M(x; y, y') = \sum_n^m \gamma_n^2(x) \exp(-\kappa_n(x)(y + y')). \tag{116}$$

Аналогично для $K^M(x; y, y')$ имеем

$$K^M(x; y, y') = -\sum_n^m \gamma_n^2(x) f(i\kappa_n(x), y) \exp(-\kappa_n(x) y'). \tag{117}$$

Для решений Йоста при $k = i\kappa_n(x)$ получаем из (86) систему алгебраических уравнений

$$f(i\kappa_n(x), y) = \sum_j^m \exp(-\kappa_j(x) y) \, P_{jn}^{-1}(x; y) \tag{118}$$

с матрицей коэффициентов $P_{jn}(x; y)$, параметрически (через спектральные параметры) зависящих от x:

$$P_{jn}(x; y) = \delta_{jn} + \frac{\gamma_n^2(x) \exp[-(\kappa_n(x) + \kappa_j(x))\, y]}{\kappa_n(x) + \kappa_j(x)}. \qquad (119)$$

Подставляя $f(i\kappa_n(x), y)$ в $K^M(x; y, y')$ (117) и используя (87), (88), получаем

$$V(x; y) = -2 \frac{d^2}{dy^2} \ln \det ||P_{nj}(x; y)||, \qquad (120)$$

$$f_\pm(x; k, y) = \exp(\pm iky) +$$

$$+ \sum_{nj} \gamma_n^2(x) \exp(-\kappa_n(x)\, y)\, P_{nj}^{-1}(x; y) \frac{\exp((-\kappa_j(x) \pm ik)y)}{\kappa_j(x) \mp ik}. \qquad (121)$$

В случае одного связанного состояния получаем выражение для обобщенного потенциал Эккарта

$$V(x; y) = -2 \frac{2\kappa(x)\gamma^2(x) \exp(-2\kappa(x)y)}{1 + (\gamma^2(x)/2\kappa(x)) \exp(-2\kappa(x)y)}, \qquad (122)$$

который преобразуется к более простому виду, при использовании подстановки $\exp(2\kappa(x)y_0) = \gamma^2(x)/2\kappa(x)$ и преобразования

$$\{1 + \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]\}^2 =$$

$$= 4\cosh^2[\kappa(x)(y - y_0(x))] \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))],$$

$$V(x; y) = -\frac{\kappa^2(x)}{\cosh^2[\kappa(x)(y - y_0(x))]}. \qquad (123)$$

Решения Йоста, ему отвечающие, на траектории изменяющегося связанного состояния $-\kappa^2(x)$, а также при произвольных значениях k запишутся в явном виде:

$$f(i\kappa(x), y) = \frac{\exp(-\kappa(x)y)}{\exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]}, \qquad (124)$$

$$f_\pm(x; k, y) = \exp(\pm iky) \left\{1 - \frac{\exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]}{1 + \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))](\kappa(x) \mp ik)}\right\}. \qquad (125)$$

6.3. Параметрическое семейство фазово-эквивалентных потенциалов. Процедура построения фазово-эквивалентных потенциалов может быть осуществлена для параметрической обратной задачи, в которой спектральные характеристики зависят от внешней координатной переменной как от параметра $\{M_n^2(x), \kappa_n(x), b_n(x), S(x, k); C_n^2(x), \rho(x; k)\}$. Зависимость от медленной координаты x определяется оператором параллельного переноса $\mathfrak{U}(x, \mathring{x})$ репера. При этом в матрице рассеяния, отвечающей калибровочному уравнению (6), возможно возникновение полюсов, проявляющихся в виде геометрических фаз, связанных с особенностями поведения связности A, индуцированной функциями базисного параметрического уравнения.

Для параметрической обратной задачи, радиальной или на полуоси, с функцией Йоста (97), обобщающей (95),

$$f(x; k) = \prod_n^N \frac{k - i\kappa_n(x)}{k + ib_n(x)}, \tag{126}$$

S-матрица рассеяния запишется в виде

$$S(x; k) = \prod_n^N \frac{k + i\kappa_n(x)}{k - ib_n(x)} \frac{k + ib_n(x)}{k - i\kappa_n(x)}. \tag{127}$$

Ядро основного интегрального уравнения в подходе Марченко (86)

$$Q(x; y, y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - S(x; k)] \exp [ik(y + y')] +$$
$$+ \sum_n^N M_n^2(x) \exp [-\kappa_n(x)(y + y')] \tag{128}$$

с учетом (127) перепишется следующим образом:

$$Q(x; t = y + y') = -i \sum_n^N \operatorname{Res} S(k = ib_n(x)) \exp [-b_n(x)t] -$$
$$-i \sum_n^N \operatorname{Res} S(k = i\kappa_n(x)) \exp[-\kappa_n(x)t] + \sum_n^N M_n^2(x) \exp(-\kappa_n(x)t). \tag{129}$$

Полагая на первом этапе

$$\mathring{M}_n^2(x) = i \operatorname{Res} S(k)|_{k=i\kappa_n(x)}, \tag{130}$$

получим

$$\mathring{Q}(x;t) = -i \sum_n^N \operatorname{Res} S(k)|_{k=ib_n(x)} \exp[-b_n(x)t] \equiv A_n(x) \exp[-b_n(x)t], \tag{131}$$

где

$$A_n(x) = \frac{2b_n(x)\,(b_n(x) + \kappa_n(x))}{(b_n(x) - \kappa_n(x))} \prod_{n' \neq n}^{N} \frac{(b_n(x) + \kappa_n'(x))\,(b_n(x) + b_n'(x))}{(b_n(x) - b_n'(x))\,(b_n(x) - \kappa_n'(x))}. \quad (132)$$

Соответствующие формулы баргмановского подхода получаются, если положить $\kappa_n(x) \equiv \kappa_n$ и $b_n(x) \equiv b_n$ [123,39]. Подставляя ядро $\mathring{Q}(x; y, y')$ (131) в параметрические уравнения обратной задачи (86)—(88), получим

$$\mathring{V}(x; y) = -2\frac{d^2}{dy^2}\ln \det\|P(x; y)\|; \quad (133)$$

$$\mathring{f}^{\pm}(x; k, y) = \exp(\pm iky) + \\ + \sum_{nn'}^{N} A_n(x)\, P^{-1}_{nn'}(x; y) \frac{\exp[-(b_n(x) + b_{n'}(x) \mp ik)y]}{(b_n(x) \mp ik)}. \quad (134)$$

Здесь $P_{nn'}(x; y)$ определяется следующим образом:

$$P_{nn'}(x; y) = \delta_{nn'} + A_n(x)\,\frac{\exp[-(b_n(x) + b_{n'}(x))y]}{(b_n(x) + b_{n'}(x)}. \quad (135)$$

На втором этапе найдем семейство потенциалов и решений для нормировочных констант $i\,\mathrm{Res}\, S(k = i\kappa_n(x)) < M_n^2 < \infty$, не подчиняющихся условию (130). Получим теперь аналог фазово-эквивалентного семейства потенциалов для параметрической обратной задачи. В этом случае ядро интегрального уравнения (86) запишется в виде

$$Q(x; y, y') = \sum_{n}^{N} (M_n^2(x) - \mathring{M}_n^2(x))\; \mathring{f}(i\kappa_n(x), y)\,\mathring{f}(i\kappa_n(x), y'). \quad (136)$$

Аналогично для ядра обобщенного сдвига $K^M(x; y, y')$ имеем

$$K^M(x; y, y') = -\sum_{n}^{N} (M_n^2(x) - \mathring{M}_n^2(x))\; f(i\kappa_n(x), y)\,\mathring{f}(i\kappa_n(x), y'). \quad (137)$$

Подставляя $K^M(x; y, y')$ и $Q(x; y, y')$ в основные параметрические уравнения Марченко (86)—(88), получим для потенциала и решений Йоста следующие соотношения:

$$V(x; y) = \mathring{V}(x; y) + 2\frac{d^2}{dy^2}\ln \det P(x; y), \quad (138)$$

$$f^{\pm}(x; k, y) = \mathring{f}^{\pm}(x; k, y) -$$
$$- \sum_{nm}^{N} (M_n^2 - \mathring{M}_n^2)\, \mathring{f}(i\kappa_n(x), y)\, P_{nm}^{-1}(x; y) \int_y^{\infty} \mathring{f}(i\kappa_m(x), y')\, \mathring{f}^{\pm}(x, k, y')dy', \quad (139)$$

в которых *явная зависимость от быстрых переменных задается решениями Йоста (134), определяемыми на потенциальных кривых — термах* $\kappa_n^2(x)$, *параметрически зависящих от медленной динамической переменной* x. Здесь использовано обозначение

$$P_{nm}(x; y) = \delta_{nm} + (M_n^2(x) - \mathring{M}_n^2(x)) \int_y^{\infty} \mathring{f}(i\kappa_n(x)y')\, \mathring{f}(i\kappa_m(x), y')\, dy'. \quad (140)$$

В данном разделе продемонстрированы некоторые примеры точно решаемых параметрических моделей, для того чтобы показать, как переносится техника баргмановских потенциалов на параметрическое семейство обратных задач. Задавая *функциональную зависимость спектральных характеристик от внешней координатной переменной, получаем большой класс точно решаемых многомерных моделей на основе параметрической обратной задачи для уравнений меньшей размерности.* Такая постановка может найти свое применение при поиске аналитических решений нелинейных эволюционных уравнений. Таким образом, параметрическая обратная задача представляет самостоятельный интерес, а не только как составная часть решения исходной многомерной задачи в адиабатическом подходе.

7. ТРЕХЧАСТИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

В соответствии с общим определением трехчастичная обратная задача рассеяния заключается в восстановлении эффективного потенциала взаимодействия по известной амплитуде рассеяния. Как известно, дифференциальная формулировка модифицированных уравнений Фаддеева является основным инструментом корректного численного исследования процессов рассеяния в системе трех нерелятивистских частиц [37]. В конфигурационном пространстве относительного движения трех частиц $\mathrm{X} = \mathrm{x}_\alpha + \mathrm{y}_\alpha \in \mathrm{M}$, где $\alpha = 1, 2, 3$ — номер пары частиц, связанных координатой x_α, уравнения для компонент $F_\alpha(\mathrm{X})$ имеют вид:

$$\{- \Delta_{\mathrm{X}} + \hat{V}_\alpha(x_\alpha) + \sum_{\beta} V_\beta^{(0)} - E\}\, F_\alpha = - \hat{V}_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} F_\beta, \quad (141)$$

где функции $\hat{V}_\alpha$ и $\mathring{V}_\alpha$ — короткодействующие и дальнодействующие части центральных парных потенциалов $V_\alpha = \hat{V}_\alpha + \mathring{V}_\alpha$, $E = k_\alpha^2 + p_\alpha^2$ — энергия в системе центра масс, $\mathbf{P} = \{\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha\}$ соответствует $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha\}$. Асимптотические граничные условия, отвечающие всем возможным процессам рассеяния в системе трех частиц, следуют из компактных интегральных уравнений. Соответствующее решение исходной шредингеровской задачи

$$H\Psi = E\Psi, \quad H = -\Delta_{\mathbf{X}} + V_\alpha(x_\alpha) \tag{142}$$

задается суммой фаддеевских компонент

$$\Psi(\mathbf{X}) = \sum_\alpha F_\alpha(\mathbf{X}_\alpha(\mathbf{X})). \tag{143}$$

i) Выберем некоторое представление в $\mathbf{M}:\mathbf{X} \in \mathbf{R}_+^1 \otimes \hat{\mathbf{M}}$, в котором значения X базы B заданы через первый линейный инвариант тензора инерции $X^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2$, определяющего гиперрадиус $X = \sqrt{X^2}$ «сферы» $\hat{\mathbf{M}}:\mathbf{S}_X^5(\hat{\mathbf{X}}_\alpha)$.

ii) Используя инвариантную адиабатическую переменную $X \in B$, не зависящую от выбора якобиевской пары координат α, введем для фаддеевских компонент $F_\alpha(\mathbf{X})$ следующие локальные адиабатические разложения [7,10]:

$$F_\alpha(\mathbf{X}) = \sum_j F_{\alpha j}(X; \hat{\mathbf{X}}_\alpha)\, X^{-1}\chi_j(X). \tag{144}$$

Коэффициенты разложения χ универсальны для всех фаддеевских компонент. Базисные компоненты $F_{\alpha j}(X; \hat{\mathbf{X}}_\alpha)$ определены как решения спектральной задачи для системы уравнений (141) на сфере $\hat{\mathbf{M}}$ при фиксированном значении $X \in B$:

$$\left\{-X^{-2}\Delta_{\hat{\mathbf{X}}_\alpha} + \hat{V}_\alpha(x_\alpha) + \sum_\beta V_\beta^{(0)} - \mathcal{E}_j(X)\right\} F_{\alpha j}(X, \hat{\mathbf{X}}_\alpha) =$$

$$= -\hat{V}_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} F_{\beta j}(X, \hat{\mathbf{X}}_\beta). \tag{145}$$

Здесь $\Delta_{\hat{\mathbf{X}}_\alpha}$ — угловая часть оператора Лапласа — Бельтрами $\Delta_{\mathbf{X}}$ на $\hat{\mathbf{M}}$, $\mathcal{E}_j(X)$ — собственные значения; j — набор квантовых чисел, нумерующих спектр $\sigma(H^f)$ трехчастичного гамильтониана

$$H^f(X) = -X^{-2}\Delta_{\hat{\mathbf{X}}_\alpha} + \sum_\alpha V_\alpha(X, \hat{\mathbf{X}}_\alpha), \tag{146}$$

который действует в слое $\mathcal{F}_X$ и зависит от точки X базы B как от параметра. Решения шредингеровской задачи (142) на $\hat{\mathbf{M}}$

$$\{H^f(X) - E_j(X)\}\,\Phi_j(X, \hat{\mathbf{X}}) = 0 \tag{147}$$

с подходящими асимптотическими условиями по параметру X совпадают с точностью до нормировки с функцией, составленной, подобно (143), из суммы базисных компонент $\{F_{\alpha j}\}$:

$$\Phi_j(X, \hat{\mathbf{X}}) = \sum_\alpha^3 F_{\alpha j}(X, \hat{\mathbf{X}}_\alpha(\hat{\mathbf{X}})), \tag{148}$$

наследуя, таким образом, правильное асимптотическое поведение базисных фаддеевских компонент $\{F_{\alpha j}\}$ при $X \to \infty$. В то же время они образуют в $\mathcal{F}_X = L^2(\hat{\mathbf{M}}, d\hat{\mathbf{M}}_X)$ полную систему ортонормированных функций

$$\langle i | j \rangle = \int \left\{\Phi_i^*(X; \hat{\mathbf{X}})\,\Phi_j(X; \hat{\mathbf{X}})\,d\hat{\mathbf{M}}_X\right\} = \delta_{ij}, \tag{149}$$

$$X^{2\gamma} \sum_j \Phi_j(X; \hat{\mathbf{X}})\,\Phi_j^*(X; \hat{\mathbf{X}}') = \delta(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{X}}')/\Omega\,. \tag{150}$$

Скалярное произведение $\langle \cdot | \cdot \rangle$ в $\mathcal{F}_X$ определяется с $O(5)$ — инвариантной мерой $d\hat{M}_X = X^{2\gamma} d\Omega\,(\hat{\mathbf{X}})$ (причем постоянная $\gamma = 3/2$). На основе разложений (143), (144), а также, учитывая (148), получим адиабатическое разложение трехчастичной волновой функции $\Psi(\mathbf{X})$ исходного уравнения Шредингера (142) в виде

$$\Psi_i(\mathbf{X}, P) = \sum_{\beta j} F_{\beta j}(X; \hat{\mathbf{X}}_\beta(\hat{\mathbf{X}}))X^{-1}\chi_{ji}(X, P) =$$

$$= \sum_j \Phi_j(X; \hat{\mathbf{X}})X^{-1}\chi_{ji}(X, P), \tag{151}$$

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (2/\pi)^{1/2} \sum_i \Psi_i(\mathbf{X}, P)\, \Phi_i^*(P; -\widehat{\mathbf{P}})\, P^{-1}. \tag{152}$$

Подобная процедура соответствует размерной редукции пространства, реализуемой посредством парциальных разложений исходной волновой функции и сведения к задачам меньшей размерности.

iii) Использование вышеописанных определений позволяет ввести гильбертово расслоенное пространство $\mathcal{H}(B, \mathcal{F}_X, \pi)$ с базой $B = \mathbf{R}^1_+ \ni X$ и нефиксированными типовыми слоями $\mathcal{F}_X = L_2(\widehat{\mathbf{M}}, d\widehat{\mathbf{M}})$, образованными из вещественно-аналитических собственных функций $\Phi_j(X; \widehat{\mathbf{X}})$ оператора $H^f(X)$. Слои $\mathcal{F}_X$ образуют семейство гильбертовых пространств, параметризованных точками $X \in B$. В традиционном подходе метода сильной связи каналов [51] при разложении $\Psi(\mathbf{X}) = \sum_j \Phi_j(Y)\, \chi_j(X)$ по состояниям базиса такая конструкция соответствует фиксированному слою из известных базисных функций $\Phi_j(Y)$, а неизвестные коэффициенты разложения $\chi_j(X)$, относительно которых решается задача, заданы на базе B меньшей размерности, чем первоначальное пространство. Подстановка разложения (151) в (142) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $\chi_j = \{\chi^L_{ji}(X, P)\}$, совпадающей с (6):

$$[-\sum_j D^2_{ij}(X) + U^L_{ij}(X) - P^2\delta_{ij}]\,\chi^L_{ji}(X) = 0,$$

$$P = \mathrm{diag}\,(p_n), \tag{153}$$

которая позволяет найти единственное решение исходной задачи (141)—(143). Индекс L означает фиксированное значение полного орбитального момента у соответствующих физических величин; для удобства он часто опускается. Суммирование в (153) осуществляется по полному набору канальных состояний. Потенциальная матрица

$$U^L_{ij}(X) = (\mathcal{E}^L_i(X) + \gamma\,(\gamma + 1)\, X^{-2})\,\delta_{ij} \tag{154}$$

образована элементами диагональной матрицы эффективных потенциалов, определяемых собственными значениями $\mathcal{E}^L_i(X)$ быстрого гамильтониана H^f (146) и неисчезающим в точке тройного соударения центробежным потенциалом

$$\gamma(\gamma+1)\,X^{-2}=15/4\,X^{-2}.$$

Как мы видели в разд.2, он определяется размерностью пространства. $D(X)$ — ковариантная производная:

$$D_{ij}(X)=\delta_{ij}\partial_X-iA_{ij}(X),$$

$A_{ij}(X)$ — матричные компоненты оператора связности в гильбертовом расслоенном пространстве $\mathcal{H}$, которые вдобавок обеспечивают согласование решений (153) с асимптотическими граничными условиями на фаддеевские компоненты $F_\alpha(\mathbf{X})$:

$$A_{ij}(X)=\langle\Phi_i|i\partial_X|\Phi_j\rangle+\gamma X^{-1}\delta_{ij}. \tag{155}$$

Таким образом, разложение (151), благодаря использованию в (142)—(151) асимптотических граничных условий, следующих из компактных интегральных уравнений, оказывается обобщением известного гиперсферического адиабатического разложения [2,44,54]. Кроме того, представление (148) использовалось в работах [7,8,12] для определения нового глобального адиабатического базиса $\{\Phi_i\}$, который конструируется в таком подходе с помощью локальных базисных компонент $\{F_{\alpha i}\}$, являющихся решениями задачи на собственные значения для уравнений Фаддеева (145) при некотором фиксированном значении $X\in B$. Как мы видим, в адиабатическом представлении связь между каналами реализуется матричными элементами эффективного калибровочного поля $A(X)$ в противоположность представлению взаимодействия, где она осуществляется матричными элементами потенциальной энергии. Как результат, адиабатический подход дает калибровочно-инвариантную трактовку многоканальной теории рассеяния в системе трех частиц.

7.1. Транспортный оператор и система радиальных уравнений. Остановимся более подробно на задаче рассеяния в системе трех ядерных бесспиновых частиц с парными вещественно-аналитическими центральными потенциалами $V_\alpha\equiv\hat{V}_\alpha=V_\alpha^n$, удовлетворяющими условиям [38]

$$\int_0^\infty|V_\alpha(x_\alpha)|\,dx_\alpha<\infty,\quad \int_0^\infty x_\alpha|V_\alpha(x_\alpha)|\,dx_\alpha<\infty,$$

и сохраняющими представление полного орбитального момента:

$$L=l_\alpha+\lambda_\alpha,$$

где $l_\alpha = -ix_\alpha \wedge \nabla_{x_\alpha}$ и $\lambda_\alpha = -iy_\alpha \wedge \nabla_{y_\alpha}$ — орбитальные моменты α и третьей частицы. В дальнейшем набор точных квантовых чисел $L = \{L, M, \xi\}$ — полного момента, его проекции и полной четности $\xi = (-1)^{l_\alpha + \lambda_\alpha}$, как правило, будем опускать. Модифицированные уравнения (141) переходят в стандартные уравнения Фаддеева

$$\{-\Delta_{\mathbf{X}_\alpha} + V_\alpha(x_\alpha) - E\} \, F_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{P}) = -\hat{V}_\alpha(x_\alpha) \sum_{\beta \neq \alpha} F_\beta(\mathbf{X}_\beta, \mathbf{P}). \qquad (156)$$

Слагаемое $V_\beta^{(0)}$ исчезает, соответственно, и в левой стороне уравнения (145), которое перепишется в виде

$$\{-X^{-2}\Delta_{\hat{\mathbf{X}}_\alpha} + V_\alpha(X, \hat{\mathbf{X}}_\alpha) - \mathcal{E}_j(X)\} \, F_{\alpha j}(X, \hat{\mathbf{X}}_\alpha) =$$

$$= -V_\alpha(X, \hat{\mathbf{X}}_\alpha) \sum_{\beta \neq \alpha} F_{\beta j}(X, \hat{\mathbf{X}}_\beta). \qquad (157)$$

Для определенности выберем парные потенциалы $V_\alpha \equiv V_\alpha^n = V_\alpha(X, \hat{\mathbf{X}}_\alpha)$ и однородные граничные условия для уравнений (145) и (147). Так что весь спектр $\mathcal{E}(X) = \mathrm{diag}\,\{\mathcal{E}_j(X)\} \in \sigma\,(H^f(X))$ параметрического гамильтониана (146) $H^f(X)$ чисто дискретный и вещественно-аналитический для всех значений $X \in (0, \infty)$. Отметим, что собственные значения $\mathcal{E}\,(X)$ быстрого гамильтониана $H^f(X)$

$$\mathcal{E}(X) = \langle \Phi(X, \hat{\mathbf{X}}) \,|\, H^f(X) \,|\, \Phi(X, \hat{\mathbf{X}}) \rangle \qquad (158)$$

имеют смысл эффективных потенциалов $U(X)$ в радиальных уравнениях (153). Поэтому последнее требование естественно с точки зрения теории рассеяния для потенциалов, имеющих аналитическое продолжение в комплексную плоскость значений X. В таком подходе состояния как выше, так и ниже трехчастичного порога развала описываются единым образом, что и определяет преимущество предложенного и разрабатываемого в [6—10,12] подхода по сравнению с [2,41,44,54]. Для наглядности разобьем спектр $\sigma\,(H^f(X))$ на две части:

$$\mathcal{E}\,(X) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+(X) & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_-(X) \end{pmatrix} \qquad (159)$$

в соответствии с различным асимптотическим поведением термов:

$$\mathcal{E}_+(X) = \mathrm{diag}\,\{\mathcal{E}_{i+}(X)\} \in \sigma_+(H^f(X)), \quad \text{если } \mathcal{E}_i(X \to \infty) \ge 0;$$

$$\mathcal{E}_-(X) = \mathrm{diag}\,\{\mathcal{E}_{i-}(X)\} \in \sigma_-(H^f(X)), \quad \text{если } \mathcal{E}_i(X \to \infty) < 0.$$

Следовательно, для полного набора действительных аналитических функций $\{\Phi\}$ можно ввести разбиение $\Phi = \Phi_+ \dot{+} \Phi_-$, в явном виде разделяя состояния Φ_+, соответствующие поверхностным функциям развала, и состояния Φ_-, соответствующие кластерным поверхностным функциям. Тогда гильбертовы слои $\mathcal{F}_X$ также представим в виде прямой суммы $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ \dot{+} \mathcal{F}_-$. Используя соотношения ортогональности и полноты (149), (150), определим фиксированный репер

$$|e(\hat{\mathbf{X}})\rangle \equiv |\Phi(\mathring{X}, \hat{\mathbf{X}})\rangle,$$

выбирая некоторую фиксированную точку $X = \mathring{X} \in B$ базы расслоенного пространства $\mathcal{H}(B, \mathcal{F}, \pi)$, где проекция π тривиальна. Теперь для каждой пары точек в B можем ввести унитарный билокальный оператор $\mathcal{U}(X, \mathring{X})$, действующий из $\mathcal{F}_{\mathring{X}}$ в $\mathcal{F}_X$ и осуществляющий параллельный перенос репера из $\mathring{X}$ в произвольную точку X:

$$|\Phi(X,.)\rangle = |e\rangle\, \mathcal{U}(X, \mathring{X}), \quad \mathcal{U}(X, \mathring{X}) = \langle e|\Phi(X,.)\rangle, \tag{160}$$

$$\mathcal{U}(X, \mathring{X}) = P \exp i \int_X^{\mathring{X}} A(X')\, dX'. \tag{161}$$

Структура слоев $\mathcal{F}$ в виде прямой суммы, индуцированная спектральными проекторами $Q_\pm = \sum_{j\pm} |\Phi_{j\pm}\rangle\langle\Phi_{j\pm}|$, естественным образом обобщается на все гильбертово расслоение $\mathcal{H}$:

$$\pi\,(\Pi_\pm) = Q_\pm\,,$$

где $\Pi_\pm = 1/2\,(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$, σ_1 и $i\sigma_2$ — матрицы Паули. Для матричных элементов транспортных операторов $\mathcal{U}$ получаем соответственно

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{++} & \mathcal{U}_{+-} \\ \mathcal{U}_{-+} & \mathcal{U}_{--} \end{pmatrix}. \tag{162}$$

Перепишем разложение (151) для парциальной волновой функции Ψ_i, также отделяя состояния развала Ψ_i^+ от кластерных состояний Ψ_i^-:

$$\Psi_i(X, \hat{X}) = \Psi_i^+(X, \hat{X}) + \Psi_i^-(X, \hat{X}) =$$

$$= \sum_{j+} \Phi_{j+}(X, \hat{X}) X^{-1} \chi_{j+i}(X, P) + \sum_{j-} \Phi_{j-}(X, \hat{X}) X^{-1} \chi_{j-i}(X, P). \quad (163)$$

Радиальная функция $\chi \equiv \{\chi_{ji}(X, P)\}$ представляется в блочном виде:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{++} & \chi_{+-} \\ \chi_{-+} & \chi_{--} \end{pmatrix},$$

где каждый блок — матрица

$$\chi_{++} = [\chi_{j+i+}]; \ \chi_{+-} = [\chi_{j+i-}]; \ \chi_{-+} = [\chi_{j-i+}]; \ \chi_{--} = [\chi_{j-i-}].$$

Также задается и диагональная матрица моментов:

$$P = \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E \cdot I_+ - \mathcal{E}_+(\infty)} & 0 \\ 0 & \sqrt{E \cdot I_- - \mathcal{E}_-(\infty)} \end{pmatrix}. \quad (164)$$

Здесь $P_+ = \operatorname{diag} P_{j+}$ — диагональная матрица моментов трех свободных частиц. Диагональная матрица $P_- = \operatorname{diag} P_{j-}$ отвечает кластерным состояниям двухчастичных каналов трехчастичной системы

$$P_- = \sqrt{E \cdot I_- - \mathcal{E}_-(\infty)} = \sqrt{p_A^2 + \varepsilon_A - \mathcal{E}_-(\infty)} = \sqrt{p_A^2 + \kappa_A^2 - \mathcal{E}_-(\infty)},$$

где $\varepsilon_A = -\kappa_A^2 < 0$ — собственные значения энергии парного гамильтониана

$$h_\alpha = -\Delta_{x_\alpha} + V_\alpha(x_\alpha).$$

Значение полной энергии $E = P_-^2 + \mathcal{E}_-(\infty) = p_A^2 + \varepsilon_A$ при нулевом моменте p_A относительного движения пары α и рассеиваемой частицы определяет порог двухчастичного канала

$$E_A(0) = -\kappa_A^2 < 0.$$

Двухчастичный канал открыт, когда энергия системы выше порогового значения:

$$E_A(p_A) \geq E_A(0), \quad \text{т.е. } p_A^2 \geq E + \kappa_A^2.$$

Главный канал распада на три частицы открывается при нулевой энергии

$$E_0(0) = 0, \quad \text{т.е. } p_A^2 = E_+ \geq 0.$$

Подстановка (152) в уравнение Шредингера (142) и проецирование на полную систему функций Φ, согласно (160), позволяет осуществить блочное 2×2 разбиение в системе уравнений (153). Принимая во внимание блочную структуру оператора (162), запишем явное блочное представление (153):

$$\langle \Phi | \{X^{-5}\partial_X X^5 \partial_X + H^f(X; \hat{\mathbf{X}}) - E\} (1 + \Pi_+ + \Pi_-) | \Psi \rangle =$$
$$= \begin{pmatrix} -D_{++}^2 + U_{++} - p_A^2 & -i\partial_X A_{+-} - iA_{+-}\partial_X + A_{+-}^2 \\ -i\partial_X A_{-+} - iA_{-+}\partial_X + A_{-+}^2 & -D_{--}^2 + U_{--} - p_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{++} & \chi_{+-} \\ \chi_{-+} & \chi_{--} \end{pmatrix} = 0. \tag{165}$$

Здесь 1 — единичный оператор.

Переходя к свойствам адиабатического базиса $\{\Phi_i\}$, мы должны отметить, что в каждой точке X базы B он классифицируется набором трех точных квантовых чисел $L = \{L, M, \xi\}$ и трех приближенных $i = \{i_1, i_2, i_3\}$, смысл которых устанавливается в окрестностях нуля $X \to 0$ и бесконечности $X \to \infty$. Правила соответствия между наборами асимптотических квантовых чисел $i(0)$ и $i(\infty)$ — корреляционные диаграммы — задаются оператором перехода $\mathfrak{U}(0, \infty)$.

7.2. Восстановление трехчастичного потенциала $\mathrm{V}_{123}(\mathbf{X})$. Рассмотрим вначале задачу восстановления в конфигурационном пространстве M некоторых заранее неизвестных быстроубывающих трехчастичных потенциалов $V_{123}(\mathbf{X})$. Добавим в уравнение Фаддеева (141) и Шредингера (142) некоторые действительные быстроубывающие потенциалы, удовлетворяющие условиям

$$\int d\hat{\mathbf{X}} \int_0^\infty dX \cdot X^{2\gamma+\varepsilon} | V_{123}(X, \hat{\mathbf{X}}) | < \infty, \quad \varepsilon = 0,1. \tag{166}$$

Будем считать, что парные потенциалы V_α^n известны и удовлетворяют аналогичным условиям. Полагаем также, что трехчастичные амплитуды с потенциалом $V_{123}(\mathbf{X})$ и без него, $f(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ и $\mathring{f}(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$, также известны. В нашем случае обратная задача сводится к нахождению S-матриц по амплитудам $f(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ и $\mathring{f}(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ (37), определению после этого эффективных потенциальной $U(X)$ и векторной $A(X)$ матриц, матричных решений $\chi(X, P)$ системы уравнений (153), напоминающей уравнения калибровочных теорий, и, наконец, потенциала взаимодействия $V_{123}(\mathbf{X})$.

Прежде всего, найдем функции гиперсферического адиабатического базиса $\{\Phi_j(X, \hat{\mathbf{X}})\}$ как собственные функции уравнения (147) на сфере $\hat{\mathbf{X}}$ с гамильтонианом $H^f(X, \hat{\mathbf{X}})$, заданным без потенциала $V_{123}(X, \hat{\mathbf{X}})$. Одновременно определим и собственные значения $\mathcal{E}_j(X)$ — термы, параметрически зависящие от X, которые дают эффективную потенциальную матрицу (158):

$$\mathring{U}(X) = \mathrm{diag}\ \mathcal{E}(X).$$

По известным $\{\Phi_j(X, \hat{\mathbf{X}})\}$ найдем матричные элементы оператора связности $A(X)$ (154) и по формулам (161) — билокальный транспортный оператор $\mathfrak{U}(X) \equiv \mathfrak{U}(X, \mathring{X})$. Унитарный оператор $\mathfrak{U}(X)$ позволяет перейти от системы уравнений (153) с потенциальной матрицей

$$U(X) = \mathring{U}(X) + \langle\Phi(X, \hat{\mathbf{X}}|\,V_{123}(X, \hat{\mathbf{X}})\,|\Phi(X, \hat{\mathbf{X}}\rangle \tag{167}$$

к стандартной системе связанных уравнений (16) для коэффициентов

$$\chi'(X, P) = \mathfrak{U}(X)\,\chi(X, P) \tag{168}$$

с потенциалом (154) в обкладках фиксированного репера $|e\rangle$

$$U'(X) = \mathfrak{U}(X)\,U(X)\,\mathfrak{U}^{-1}(X),$$

который в данном случае удобно выбрать при $\mathring{X} \to \infty$

$$\begin{aligned} U'(X) &= \mathring{U}'(X) + U'_{123}(X) = \\ &= \langle e|\,H^f(X, \hat{\mathbf{X}})\,|e\rangle + \langle e|\,V_{123}(X, \hat{\mathbf{X}})\,|e\rangle. \end{aligned} \tag{169}$$

Поскольку для системы уравнений (16) справедливо соотношение полноты (52), мы можем сформулировать обратную задачу по восстановлению $U'_{123}(X)$ и соответствующих решений, используя обобщенные формулы многоканальной обратной задачи рассеяния [110,109,39]:

$$K(X, X') + Q(X, X') + \int\limits_{X(0)}^{\infty(X)} K(X, X'')\,Q(X'', X')\,dX'' = 0, \tag{170}$$

$$U'(X) = \overset{\circ}{U}'(X) + U'_{123}(X) = \overset{\circ}{U}'(X) \mp 2\frac{d}{dX}K(X, X), \tag{171}$$

$$\chi'(X, P) = \overset{\circ}{\chi}'(X, P) + \int\limits_{X(0)}^{\infty(X)} K(X, X')\overset{\circ}{\chi}'(X', P)\, dX'. \tag{172}$$

Пределы интегрирования в (170), (172) и знаки в (171) зависят от конкретной формулировки обратной задачи. В частности, пределы интегрирования от X до ∞ (от 0 до X) и знак «−» («+») в (171) соответствуют методу Марченко (Гельфанда — Левитана). В R-матричной версии обратной задачи [121,39] пределы интегрирования $[X, a]$ и знак «+», «−» в (171). Многоканальная система уравнений (170) решается относительно матрицы $K(X, X')$ при известной $Q(X, X')$, определяемой данными рассеяния или спектральными данными. Матрица оператора обобщенного сдвига $K(X, X')$ определяет трехчастичную потенциальную матрицу U'_{123} и соответствующие волновые функции $\chi'(X, P)$ (172) системы уравнений (16).

В обобщенном подходе Марченко интегральное ядро $Q(X, X')$ задается соотношением

$$Q(X, X') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{F}'(X, P)\,(\hat{\overset{\circ}{S}}{}' - \hat{S}'(P))\,\overset{\circ}{F}'(X', P)\, dP +$$

$$+ \sum_{n}^{N} \overset{\circ}{F}'(X, i\kappa_n)\, M_n\, \tilde{\overset{\circ}{F}}{}'(X', i\kappa_n) - \sum_{n}^{\overset{\circ}{N}} \overset{\circ}{F}'(X, i\kappa_n)\, \overset{\circ}{M}_n\, \tilde{\overset{\circ}{F}}{}'(X', i\overset{\circ}{\kappa}_n). \tag{173}$$

Здесь решения Йоста $\overset{\circ}{F}{}'_{\pm}(X, P)$ системы уравнений (16) связаны с решениями Йоста $\overset{\circ}{F}_{\pm}(X, P)$ системы (153), в соответствии с соотношением (168), следующим образом:

$$\overset{\circ}{F}{}'_{\pm}(X, P) = \mathfrak{U}(X, \infty)\,\overset{\circ}{F}_{\pm}(X, P), \tag{174}$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$\lim_{X\to\infty} \overset{\circ}{F}{}'_{\pm}(X, P)\exp\left[\pm i(XP - \frac{\pi\gamma}{2})\right] = \lim_{X\to\infty} \overset{\circ}{F}_{\pm}(X, P)\exp\left[\pm i(XP - \frac{\pi\gamma}{2})\right] = 1,$$

поскольку, как следует из определения (160), $\mathfrak{U}(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{X}) = 1$. Благодаря унитарному произволу в калибровке радиальных функций (168), $\hat{S}$-матрица, соответствующая системе (16), совпадает с S'-матрицей (36) для системы уравнений (153); это же справедливо для нормировочных матриц состояний дискретного спектра (18). С учетом этого унитарные на открытых каналах матрицы рассеяния $\hat{S}'$ и $\hat{\mathring{S}}'$ определяются по известным амплитудам $f(\hat{X}, P)$ и $\mathring{f}(\hat{X}, P)$ и отвечают системе уравнений (16) с трехчастичным потенциалом V_{123} и без него. Соответственно M_n и $\mathring{M}_n$ — действительные положительно определенные нормировочные матрицы дискретных состояний $E_n = -(\kappa_n)^2$, $\mathring{E}_n = -(\mathring{\kappa}_n)^2$. Определяя U'_{123} по формулам (170)—(172) в представлении фиксированного базиса $|e\rangle$ и возвращаясь к представлению в базисе $|\Phi\rangle$, получаем соотношения для матриц трехчастичного потенциала U'_{123} системы (153) или (165) и соответствующих решений Йоста:

$$U_{123}(X) = U(X) - \mathring{U}'(X) = -2\mathfrak{U}-1(X,\infty)\frac{dK(X,X)}{dX}\mathfrak{U}(X,\infty), \qquad (175)$$

$$F_{\pm}(X,P) = \mathfrak{U}^{-1}(X,\infty)\,F'_{\pm}(X,P). \qquad (176)$$

Следовало бы отметить, что транспортные матрицы $\mathfrak{U}$ в (174) и (176) одни и те же, поскольку заданы на одних и тех же базисных функциях $|\Phi\rangle$. Наконец, физические решения (153) с V_{123} получаются как линейная комбинация решений Йоста $F_{\pm}(X, P)$ (41). В обобщенном подходе Гельфанда — Левитана интегральное ядро $Q^{\text{ГЛ}}(X, X')$ определяется по спектральным матрицам $\rho(P)$ и $\mathring{\rho}(P)$ для системы (16) с потенциалом V_{123} и без него соответственно:

$$Q^{\text{ГЛ}}(X,X') = \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{\chi}'^{\,\text{reg}}(X,P)\,d(\rho-\mathring{\rho})\,\tilde{\mathring{\chi}}'^{\,\text{reg}}(X',P),$$

$$\frac{d\rho}{dE} = \frac{\rho}{\pi}\,|F'(P)|^{-2} \quad \text{при } E \geq 0, \qquad (177)$$

$$\frac{d\rho}{dE} = \sum_n \delta(E-E_n)\,N_n'^{-1} \quad \text{при } E<0,$$

N_n — нормировочные матрицы, определяемые соотношением

$$N_n^{'-1} = \int_0^\infty |\chi^{'\mathrm{reg}}(X, P)|^2 dX.$$

Матрица регулярных решений выделяется граничными условиями

$$\lim_{X\to 0} \chi^{'\mathrm{reg}}(X, P)\, X^{-(K+\gamma+1)} = 1.$$

После нахождения ядра $K^{\text{ГЛ}}$ по $Q^{\text{ГЛ}}$ (177) при решении основной системы (170) по многоканальным формулам обратной задачи (171), (172) получаем матрицы потенциалов U'_{123} и регулярных решений $\chi^{'\mathrm{reg}}$ системы (16). Осуществляя обратное унитарное преобразование, находим U_{123} и χ для системы (165).

Итак, адиабатическое представление для трехчастичной волновой функции и калибровочное преобразование позволили корректно свести трехчастичную обратную задачу рассеяния по восстановлению V_{123} к многоканальной задаче и сформулировать ее, учитывая процессы как с перераспределением частиц, так и с развалом.

7.3. Восстановление трехчастичного потенциала $\mathbf{V_{123}(X)}$ и эффективных потенциалов $\sum\limits_{\alpha}^{3} \mathbf{V_\alpha(X)}$. Рассмотрим теперь следующее обобщение обратной задачи рассеяния, когда неизвестны не только трехчастичные, но и парные потенциалы V_α $(\alpha = 1, 2, 3)$. Она сводится к определению эффективных потенциалов, состоящих из суммы парных $\mathring{V}(\mathbf{X}) = \sum\limits_{\alpha} V_\alpha(\mathbf{X})$ и трехчастичных потенциалов в конфигурационном пространстве M. Эта задача решается в несколько этапов: 1) нахождение $\hat{S}$-матриц по известным амплитудам $f(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ и $\mathring{f}(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$; 2) восстановление скалярной потенциальной матрицы $U(X)$, матрицы калибровочного векторного потенциала $A(X)$ и матрицы решений системы уравнений (153); 3) определение базисных функций $\Phi_i(X, \hat{\mathbf{X}})$ и, наконец, эффективных потенциалов $\mathring{V}(X, \hat{\mathbf{X}})$ и $V_{123}(X, \hat{\mathbf{X}})$ и полного решения $\Psi(\mathbf{X})$ в M. Так же, как и в предыдущем случае, используются два набора данных рассеяния $(\hat{S}(P), \{E_n, M_n\})$, $(\hat{\mathring{S}}(P), \{\mathring{E}_n, \mathring{M}_n\})$ — с трехчастичным потенциалом $V_{123}(X, \hat{\mathbf{X}})$ и без него.

Вначале по данным рассеяния $\hat{\mathring{S}}(P)$, $\{\mathring{E}_n, \mathring{M}_n\}$ реконструируем эффективную потенциальную матрицу $\mathring{U}'(X)$

$$\mathring{U}'(X) = \mathfrak{U}(X)\,\mathfrak{E}(X)\,\mathfrak{U}^{-1}(X)$$

и находим решения системы (16), используя обычные или обобщенные формулы Гельфанда — Левитана — Марченко (170)—(172). Теперь оператор переноса $\mathfrak{U}(X)$ и энергетические термы $\mathfrak{E}(X)$ можно найти в результате решения задачи на собственные значения:

$$\mathring{U}'(X)\,\mathfrak{U}(X) = \mathfrak{U}(X)\,\mathfrak{E}(X). \tag{178}$$

Таким образом, термы $\mathfrak{E}(X)$ определяются при решении обратной задачи для системы уравнений (16) и последующей процедуры диагонализации (178), в то время как в предыдущем случае решалась прямая задача на собственные значения для реперного уравнения (147). Более того, знание $\mathfrak{U}(X)$ позволяет восстановить и матричные элементы эффективного вектор-потенциала

$$A(X) = \mathfrak{U}^{-1}(X)\,\frac{d}{dX}\mathfrak{U}(X) + \gamma X^{-1}, \tag{179}$$

ответственного за потенциал, зависящий от скорости $A(X)\,(d/dX)$ в (153). Однако, восстановив потенциальную матрицу $\mathring{U}(X)$, мы все еще не можем обычным способом определить эффективный потенциал

$$\mathring{V}(X, \hat{X}) = \sum_{\alpha} V_\alpha(X, \hat{X}) = \sum_{ij} \Phi_i(X, \hat{X})\,\mathring{U}_{ij}(X)\,\Phi_j^*(X, \hat{X}), \tag{180}$$

поскольку неизвестны базисные функции $\Phi_i(X, \hat{X})$, определяемые тем же неизвестным потенциалом $\mathring{V}(X, \hat{X})$ при решении (147) при каждом фиксированном значении «медленной» переменной X. Возникла необходимость в решении параметрической обратной задачи Штурма — Лиувилля на основе техники, разработанной в предыдущем параграфе [14]. Исходными данными для такой задачи являются спектральные характеристики $\{\mathfrak{E}_j(X), \gamma_j(X)\}$ — термы и нормировочные константы, параметрически зависящие от X. Термы определяются из (178), нормировочные константы — в соответствии с соотношением (94):

$$\gamma_j^{-1}(X) = \sum_j \mathfrak{U}_{ji}(X)\,\gamma_i^{-1}\,\mathfrak{U}_{ij}(X), \tag{181}$$

где γ_i^{-1} — обычная нормировка:

$$\gamma_i^{-1} = \int_0^{\infty} |e_i(\hat{\mathbf{X}})|^2 d\hat{\mathbf{M}}^{\gamma}.$$

Теперь, решая параметрическую задачу Штурма —Лиувилля [14], восстанавливаем эффективный потенциал $\mathring{V}(X, \hat{\mathbf{X}}) = \sum_{\alpha} V_{\alpha}(X, \hat{\mathbf{X}})$ и соответствующие решения $\Phi_i(X, \hat{\mathbf{X}})$.

Наконец, на втором этапе, используя вышеописанную схему (170)—(175), мы восстанавливаем трехчастичную потенциальную матрицу $U_{123}(X)$ и соответствующие решения по двум наборам данных рассеяния $(\hat{\mathring{S}}(P), \{\mathring{E}_n, \mathring{M}_n\})$ и $(\hat{S}(P), \{E_n, M_n\})$.

Существование «глобального» адиабатического базиса $\{\Phi_i\}$, а также возможность определения эффективных скалярных $\mathfrak{U}(X)$, $U_{123}(X)$ и векторных $A(X)$ потенциалов по данным трехчастичной задачи рассеяния обусловлены тем фактом, что в нашем подходе информация о взаимодействии фрагментов содержится не только в радиальных решениях χ, но и в базисных «квазиугловых» функциях Φ_i, в отличие от традиционных подходов разложения по K-гармоникам или кластерным функциям. Более того, появляется возможность использования техники баргмановских потенциалов для аналитического моделирования эффективных взаимодействий трех частиц и нахождения соответствующих точных решений как для систем связанных уравнений, так и для параметрического уравнения (разд.6).

8. СУПЕРСИММЕТРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Итак, мы видели, что индуцированные калибровочные потенциалы естественно возникают при описаниях квантово-механических систем, зависящих как от медленно изменяющихся внешних параметров, так и от внутренних быстрых. Это имеет место во многих реальных системах, где имеются медленные и быстрые степени свободы и необходимо оценить влияние медленной динамики на быструю и наоборот. Соответственно полный гамильтониан разбивается на две составляющие: $H = H^f + H^s$, где $H^f(\mathbf{R})$ — параметрическое семейство быстрых гамильтонианов. Искомая волновая функция полного гамильтониана H представляется в виде разложения по собственным функциям $\Phi_n(\mathbf{R};\, \mathbf{r})$ мгновенного гамильтониана H^f при каждом фиксированном значении медленных переменных $\mathbf{R}$ (3):

$$\Psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) = \sum_n \int \Phi_n(\mathbf{R};\mathbf{r})\, F_n(\mathbf{R}), \tag{182}$$

$$H^f(\mathbf{R})\, \Phi_n(\mathbf{R};\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{R})\, \Phi_n(\mathbf{R};\mathbf{r}).$$

Подставляя разложение для Ψ в исходное уравнение Шредингера (5) $H\Psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{R},\mathbf{r})$ и используя соотношения ортогональности $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$ и полноты $|n\rangle\langle n| = 1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ собственных состояний $|\Phi_n(\mathbf{R};\, \mathbf{r})\rangle$ гамильтониана $H^f(\mathbf{R})$ при фиксированных значениях $\mathbf{R}$, получаем многомерную систему уравнений калибровочного типа (6) для коэффициентов разложения F_n:

$$-\, 1/2\, [I\nabla - i\mathbf{A}(\mathbf{R})\,]^2\, F(\mathbf{R}) + V(\mathbf{R})\, F(\mathbf{R}) = EF(\mathbf{R}), \tag{183}$$

где $F = \{F_n\}$ — колонка-вектор размерности M, I — единичная матрица, $\mathbf{A}$ и V — векторная и скалярная компоненты калибровочного поля:

$$\mathbf{A}_{nm}(\mathbf{R}) = \langle \Phi_n | i\nabla | \Phi_m \rangle, \tag{184}$$

$$V_{nm}(\mathbf{R}) = \langle \Phi_n | H^f | \Phi_m \rangle\, \delta_{nm} + 1/2 \sum_{k \neq n,m} A_{nk} A_{km} + \langle \Phi_n | V^s | \Phi_m \rangle. \tag{185}$$

Уравнение (183) обладает унитарной калибровочной симметрией $U(M)$-группы. Для полного набора Φ_n второй член в (185) исчезает, и если A не имеет сингулярностей, можно найти калибровку (чистую калибровку), когда наведенный вектор-потенциал исчезает. В одноуровневом приближении $F(R)$ становится скалярной волновой функцией.

Рассмотрим вначале одномерную задачу. Представим гамильтониан H уравнения (183) в факторизованном виде

$$H^- = 1/2 Q^- Q^+, \quad H^+ = 1/2 Q^+ Q^- \tag{186}$$

с

$$Q^{\pm} = \pm D + \alpha\,(R), \quad D = \partial_R - iA(R). \tag{187}$$

Отсюда следует

$$H^{\pm} = 1/2\,\{[-D^2 + \alpha^2(R)]I + \sigma_3(D\alpha(R) - \alpha(R)D)\},$$
$$V_+(R) = V_-(R) + D\alpha(R) - \alpha(R)D. \qquad (188)$$

Здесь

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Суперсимметричный гамильтониан (188) в двухкомпонентном обозначении перепишется следующим образом:

$$H^s = 1/2\,\{Q_-, Q_+\} = \begin{pmatrix} H^+ & 0 \\ 0 & H^- \end{pmatrix}, \qquad (189)$$

где Q_- и Q_+ определяются как обычные суперсимметричные заряды:

$$Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & Q^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q^- & 0 \end{pmatrix}, \qquad (190)$$

они удовлетворяют соотношениям алгебры суперсимметрии

$$Q_+^2 = Q_-^2 = [H^s, Q_+] = [H^s, Q_-] = 0. \qquad (191)$$

Если проигнорируем недиагональные элементы перехода в системе уравнений (183), то получим систему несвязанных уравнений, т.е. адиабатическое приближение. В этом случае суперсимметричный гамильтониан (189) перепишется в виде

$$H^s = 1/2\,\{[-D^2 + \alpha^2(R)]I + \sigma_3\partial_R\,\alpha(R)\}, \qquad (192)$$

где $\alpha(R)$ связано с $V(R)$, как обычно, уравнением Рикатти: $\alpha^2(R) - \partial_R\alpha(R) = V_-(R)$. В представлении волновой функции основного состояния $\alpha(R) = \partial_R W$ [124] волновые функции H^+ и H^- при произвольной энергии связаны преобразованиями

$$\chi_+(R, E) = Q^+\chi_-(R, E) = [D + \alpha(R)]\chi_-(R, E) =$$
$$= \chi_0^{-1}(R)\, W_D\{\chi_0(R), \chi_-(R, E)\}, \qquad (193)$$

обобщающими преобразования Дарбу — Крама — Крейна. Здесь $\chi_0(R)$ — волновая функция основного состояния H^-, представленного в виде

$$\chi_0(R) = P\exp\left\{-i\int^R A(R')dR'\right\}\exp\left\{-\int^R \alpha(R')dR'\right\}, \tag{194}$$

и обобщенный вронскиан W_D определяется через ковариантную производную:

$$W_D = \{\chi_0^\dagger D\chi_- - (D\chi_0)^\dagger\chi_-\},$$

P обозначает упорядоченную экспоненту.

Далее, следуя [31,25,26], можно представить трех- или двухмерное обобщение (186)—(194) для систем калибровочных уравнений (183), которые описывают медленную динамику нерелятивистских систем (в частности, трехчастичной) и суперсимметрию для них. Введем суперзаряды следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Q}}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_+\sigma\,\mathrm{Q}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_+\sum_\mu \sigma_\mu Q_\mu^+,\\ \overline{\mathrm{Q}}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_-\sigma\,\mathrm{Q}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_-\sum_\mu \sigma_\mu Q_\mu^-,\end{aligned} \tag{195}$$

где $\overline{\mathrm{Q}}^+$, $\overline{\mathrm{Q}}^-$ — блочные 2×2 матрицы, составленные, аналогично (191), из многомерных, многоканальных генераторов суперсимметрии Q^+, Q^-, координатные компоненты которых определяются в соответствии с (187):

$$Q_\mu^\pm = \pm D_\mu + \partial_\mu W, \quad D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \tag{196}$$

$\tau_\pm = 1/2(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$, $\sigma_\mu(\mu = 1, 2, 3)$ — спиновые матрицы Паули. Тогда суперсимметричный гамильтониан можно представить в виде

$$H^s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\sigma\,\mathrm{Q}^+)(\sigma\,\mathrm{Q}^-) & 0\\ 0 & (\sigma\,\mathrm{Q}^-)(\sigma\,\mathrm{Q}^+)\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\mathrm{Q}^+\mathrm{Q}^-) + i\sigma(\mathrm{Q}^+\times\mathrm{Q}^-) & 0\\ 0 & (\mathrm{Q}^-\mathrm{Q}^+) + i\sigma(\mathrm{Q}^-\times\mathrm{Q}^+)\end{pmatrix}. \tag{197}$$

Дополнительно к обычным составляющим

$$\frac{1}{2}(\mathrm{Q}^+\mathrm{Q}^-) = \frac{1}{2}\sum_\mu Q_\mu^+Q_\mu^-, \quad \frac{1}{2}(\mathrm{Q}^-\mathrm{Q}^+) = \frac{1}{2}\sum_\mu Q_\mu^-Q_\mu^+,$$

отвечающим сумме одномерных суперсимметричных гамильтонианов (186), в H^s (197) возникают интересные новые слагаемые:

$$i\sigma\,[\mathbf{Q}^+\times\mathbf{Q}^-] = i\sigma B - 2\sigma\,[\nabla W\times\pi] =$$

$$= i\sigma F - 2\sigma\,(\nabla W\times\mathbf{p}) + 2\sigma\,(\nabla W\times\mathbf{A}), \qquad (198)$$

где $\pi = (\mathbf{p} - \mathbf{A})$, матричный тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu - i[A^\nu, A^\mu] = \varepsilon^{\nu\mu k}B^k \qquad (199)$$

отождествляется с магнитным полем; член — $2\sigma(\nabla W\times\mathbf{p})$ переходит для центральных полей в слагаемое спин-орбитальной связи $\frac{2}{R}\,\partial_R W(\sigma\cdot\mathbf{L})$ [31,32], и, наконец, новое слагаемое, пропущенное в работе [25], $2\sigma(\nabla W\times\mathbf{A})$ осуществляет связь между векторным потенциалом и градиентом скалярного потенциала. Его роль станет вполне явной в дальнейшем при исследовании геометрических фаз.

Процедура (186)—(197) обобщает обычную процедуру суперсимметричной нерелятивистской квантовой механики и основана на факторизации полного гамильтониана уравнения (183). Она позволяет генерировать большой класс точно решаемых трехчастичных и многомерных моделей дополнительно к [4,5] для уравнений (183) в присутствии эффективных векторных потенциалов.

Проанализируем подход подробнее, непосредственно обобщая хорошо известную задачу движения заряженной частицы со спином $1/2$ под воздействием неоднородного магнитного поля, направленного перпендикулярно к плоскости движения частицы [29,34]. Суперсимметрия в этом случае основана на том факте, что в двухмерном пространстве гамильтониан Паули

$$H^P = 1/2[-i\nabla - e\mathbf{A}]^2 - (e/2)\,\sigma_3\mathbf{B} \qquad (200)$$

может быть записан как квадрат гамильтониана Дирака ($h = c = m = 1$):

$$\begin{aligned} H^P &= 1/2(H^D)^2, \\ H^D &= (\sigma\cdot\pi) = \sigma\,(\mathbf{p} - e\mathbf{A}). \end{aligned} \qquad (201)$$

Определим эрмитовы суперзаряды $Q_i \equiv Q_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1/2[\sigma_1(\pi_x - \partial_y W) + \sigma_2(\pi_y + \partial_x W)], \\ Q_2 &= 1/2[\sigma_2(\pi_x - \partial_y W) - \sigma_1(\pi_y + \partial_x W)] \end{aligned} \qquad (202)$$

с дополнительными скалярными функциями $\partial_\mu W$ по сравнению с классической задачей (200), (201). Это прямое обобщение определения суперзарядов, введенных Виттеном [30] для описания движения нерелятивистской частицы со спином 1/2 в одномерном пространстве:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1/2[\sigma_1 p_x + \sigma_2 W(x)], \\ Q_2 &= 1/2[\sigma_2 p_x - \sigma_1 W(x)]. \end{aligned} \tag{203}$$

В многоканальном случае адиабатического подхода $W(x, y)$ и π_μ — матрицы; π_μ связаны с ковариантной производной D_μ соотношением

$$\pi_\mu = -iD_\mu = [-iI\partial_\mu - A_\mu],$$

где матрица A_μ определяется из (184). Суперзаряды Q_i удовлетворяют набору соотношений суперсимметричной квантовой механики Виттена:

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij}H \text{ и } [H, Q_i] = 0 \quad (i = 1,\ldots,N). \tag{204}$$

В рассматриваемом случае $i = 2$. Как обычно, введем неэрмитовы суперзаряды

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Q}}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-Q_2 + iQ_1], \\ \overline{\mathrm{Q}}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-Q_2 - iQ_1]. \end{aligned} \tag{205}$$

Матричные суперзаряды $\overline{\mathrm{Q}}^+$ и $\overline{\mathrm{Q}}^-$ представимы как блочные 2×2 матрицы:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Q}}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_+[(i\pi_x + \partial_x W) + (\pi_y - i\partial_y W)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_+[Q_x^+ - iQ_y^+], \\ \overline{\mathrm{Q}}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_-[(-i\pi_x + \partial_x W) + (\pi_y + i\partial_y W)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_-[Q_x^- + iQ_y^-], \end{aligned} \tag{206}$$

соответствующие (195). Используя их, конструируем суперсимметричный гамильтониан

$$H^s = 1/2\{\overline{\mathrm{Q}}^+, \overline{\mathrm{Q}}^-\} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\mathrm{Q}^+ \cdot \mathrm{Q}^-) + i(\mathrm{Q}^+ \times \mathrm{Q}^-) & 0 \\ 0 & (\mathrm{Q}^- \cdot \mathrm{Q}^+) - i(\mathrm{Q}^- \times \mathrm{Q}^+) \end{pmatrix}. \tag{207}$$

Суперзаряды $\overline{\mathrm{Q}}^+, \overline{\mathrm{Q}}^-$ удовлетворяют соотношениям алгебры суперсимметрии (191).

Суперпартнеры H^+ и H^- гамильтониана H^s (207) можно представить следующим образом:

$$H^+ = 1/2\,[Q_x^+Q_x^- + Q_y^+Q_y^- + i(Q_x^+Q_y^- - Q_y^+Q_x^-)\,],$$
$$H^- = 1/2\,[Q_x^-Q_x^+ + Q_y^-Q_y^+ - i(Q_x^-Q_y^+ - Q_y^-Q_x^+)\,]. \tag{208}$$

Используя определения (206), после простых преобразований гамильтонианы $H^\pm$ можно написать в явном виде:

$$H^+ = 1/2\,[\pi_x^2 + \pi_y^2 + i(\pi_x\pi_y - \pi_y\pi_x) + (\partial_x W)^2 + (\partial_y W)^2 + (i\pi_x + \pi_y)(\partial_x W + i\partial_y W) + \partial_x W\pi_y - \partial_y W\pi_x\,],$$
$$H^- = 1/2\,[\pi_x^2 + \pi_y^2 - i(\pi_x\pi_y - \pi_y\pi_x) + (\partial_x W)^2 + (\partial_y W)^2 + (-i\pi_x + \pi_y)(\partial_x W - i\partial_y W) + \partial_x W\pi_y - \partial_y W\pi_x\,]. \tag{209}$$

Перепишем эти соотношения в более удобном для анализа виде

$$H^+ = \frac{1}{2}[\pi^+\pi^- + (\partial_x W)^2 + (\partial_y W)^2 + \pi^+(\partial_x W - i\partial_y W) + \partial_x W\pi_y - \partial_y W\pi_x\,],$$
$$H^- = \frac{1}{2}[\pi^-\pi^+ + (\partial_x W)^2 + (\partial_y W)^2 + \pi^-(\partial_x W + i\partial_y W) + \partial_x W\pi_y - \partial_y W\pi_x\,]. \tag{210}$$

Здесь принято во внимание обычное определение неэрмитовых суперзарядов

$$\pi^+ = (+i\pi_x + \pi_y), \quad \pi^- = (-i\pi_x + \pi_y),$$

производящих матричный аналог гамильтониана Паули (200), записанного в виде

$$H^P = 1/2\{\pi^+, \pi^-\} \tag{211}$$

со скалярной потенциальной матрицей $V = \sigma_3 F_{xy}$. Как следует из соотношений (206), при $W(x, y) = 0$ неэрмитовы суперзаряды Q^+ и Q^- переходят в π^+ и π^-, а суперсимметричный гамильтониан (207) H^s переходит в H^P. Это эквивалентно принципу минимального включения взаимодействия с электромагнитным полем как с калибровочным A. Если векторный потенциал $A_\mu = 0$, из соотношений (202)—(207) легко получаем виттеновскую конструкцию [30] суперсимметричной квантовой механики в двумерном пространстве [31,32]. Это становится очевидным, если генераторы $i\pi_x$ и $i\pi_y$ заменяются на обычные частные производные в уравнениях (209), (210). В общем случае, заменяя для уравнений (195)—(197) π на $\mathbf{p}$, получаем суперсимметричный гамильтониан $\widehat{H}$ для уравнения Шредингера

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\sigma\cdot\mathbf{Q}^+)(\sigma\cdot\mathbf{Q}^-) & 0 \\ 0 & (\sigma\cdot\mathbf{Q}^-)(\sigma\cdot\mathbf{Q}^+) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\mathbf{Q}^+\cdot\mathbf{Q}^-) - 2\sigma(\nabla W\times\mathbf{p}) & 0 \\ 0 & (\mathbf{Q}^-\cdot\mathbf{Q}^+) + 2\sigma(\nabla W\times\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \qquad (212)$$

Теперь переопределены координатные компоненты $\mathbf{Q}^\pm$: $Q_\mu^\pm = \pm\partial_\mu + \partial_\mu W$ и использовано $\mathbf{p} = -i\nabla$.

Обобщение соотношений (200)—(207) на 4-компонентный случай можно провести двояким образом. Один из способов соответствует выбору 4-компонентных суперзарядов, определяемых соотношением (195) с $\mu = 1, 2$. Двумерный суперсимметричный гамильтониан определится из соотношения (197), которое непосредственно обобщает (207):

$$H^s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\mathbf{Q}^+\cdot\mathbf{Q}^-) + i\sigma_3(\mathbf{Q}^+\times\mathbf{Q}^-) & 0 \\ 0 & (\mathbf{Q}^-\cdot\mathbf{Q}^+) + i\sigma_3(\mathbf{Q}^-\times\mathbf{Q}^+) \end{pmatrix}. \qquad (213)$$

Второй способ следует логике выбора суперзарядов Q_1 и Q_2, определяемых соотношением (202), где в формуле для суперзаряда Q_1 σ_μ следует заменить α-матрицами. В этом случае вместо суперзарядов $Q_\mu^\pm$ удобнее ввести суперзаряды

$$\Pi_x^\pm = \pm D_x - i\partial_y W, \quad \Pi_y^\pm = \pm D_y + i\partial_x W. \qquad (214)$$

Тогда $\overline{\mathbf{Q}}^+$ и $\overline{\mathbf{Q}}^-$ (195) переопределятся следующим образом:

$$\overline{\Pi}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_+\sum_\mu \sigma_\mu \Pi_\mu^+,$$
$$\overline{\Pi}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_-\sum_\mu \sigma_\mu \Pi_\mu^-, \qquad (215)$$

и вместо суперсимметричного гамильтониана (213) имеем

$$H^s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\Pi^+\Pi^-) + i\sigma_3(\Pi^+ \times \Pi^-) & 0 \\ 0 & (\Pi^-\Pi^+) + i\sigma_3(\Pi^- \times \Pi^+) \end{pmatrix}. \quad (216)$$

Удовлетворяют ли полученные соотношения (216) и (213) принципу минимальной связи калибровочных полей? Если калибровочный векторный потенциал в соотношениях (202), (216) представим в виде

$$A_x \to A_x + \partial_y W; \quad A_y \to A_y - \partial_x W$$

(подчеркнем, что это не есть калибровочное преобразование), то B_{xy} может быть представлен как

$$B_{xy} = \partial_x(A_y - \partial_x W) - \partial_y(A_x + \partial_y W), \quad (217)$$

и H^s (216) с нецентральным полем записывается в виде уравнения Паули H^P (200), если ввести замены

$$\pi^+ \to \overline{\Pi}^+, \quad \pi^- \to \overline{\Pi}^-.$$

При определении суперзарядов соотношением (195) суперсимметричный гамильтониан (197) совпадает с уравнением Паули при следующих заменах:

$$A_\mu \to A_\mu + i\partial_\mu W.$$

Это не что иное, как калибровочное преобразование двух суперпартнеров гамильтониана Паули с $W = 0$, т.е. для соотношения (213) выполняется принцип минимальной связи калибровочных полей. После чего очевидно, что суперсимметричный гамильтониан уравнения Шредингера (212) можно представить как оператор Паули (200), если в уравнении (212) $i\partial_\mu W$ заменить на A_μ.

Исследуем соотношения (202), (214), (216), которые являются естественным обобщением виттеновской конструкции для систем калибровочных уравнений в двумерном пространстве. Трехмерная модель суперсимметричной квантовой механики для систем калибровочных уравнений получается подобным образом.

При применении такого подхода к заряженным частицам со спином 1/2 так называемый спин-флипп-эффект имеет место при одновременном изменении координатной зависимости волновых функций, когда генераторы $(\sigma\cdot\Pi^+)$ и $(\sigma\cdot\Pi^-)$ переводят состояния-суперпартнеры друг в друга:

$$\chi_+ = (\sigma\cdot\Pi^+)\chi_- \quad \text{и} \quad \chi_- = (\sigma\cdot\Pi^-)\chi_+.$$

Если $\chi_{-\sigma_3}$ — собственное состояние H^- гамильтониана (216), то собственное состояние H^+

$$\chi_{+\sigma_3} = i\,[(\sigma_1(\pi_x - \partial_y W) + \sigma_2(\pi_y + \partial_x W)\,]\chi_{-\sigma_3}. \tag{218}$$

Нулевое собственное состояние $\chi_0 = \chi_{-\sigma_3}$ гамильтониана H^- должно аннигилироваться $(\sigma\cdot\Pi^+)$:

$$(\sigma\cdot\Pi^+)\,\chi_0 = 0. \tag{219}$$

Домножим слева это соотношение на σ_2. Тогда получим

$$\{\sigma_3[\partial_x - i(A_x + \partial_y W)\,] + (i\partial_y + A_y + i\partial_x W)\}\,\chi_0 = 0. \tag{220}$$

Вспоминая теперь, что для бездивергентного векторного потенциала

$$A_x = -\partial_y\Phi, \quad A_y = \partial_x\Phi,$$

решение уравнения (220) будем искать в виде

$$\chi_0(x, y) = f(x, y)\exp\{-\sigma_3(\Phi - W)\}, \tag{221}$$

где $\Phi = \int\int F_{xy}(x, y)\,dx\,dy$ определяется как обычный поток, $F_{xy}(x, y) = \partial_x A_y - \partial_y A_x$.

Легко теперь увидеть, что в адиабатическом представлении (183) мы приходим к хорошо известной ситуации, установленной в работе [34]: основное состояние гамильтониана H^- (207) и (216) вырождено, причем число нулевых мод определяется теоремой Атиа — Сингера об индексе:

$$\chi_0(x, y) = f(x, y)\,P\exp\left\{-\sigma_3\int\int B_{xy}(x, y)\,dx\,dy\right\}, \tag{222}$$

где тензор B_{xy} выражается соотношением (217) и функция $f(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x + i\sigma_3\partial_y)\,f(x, y) = 0.$$

Следовательно, для суперсимметричного гамильтониана (216) со скалярным потенциалом $W(x, y) \neq 0$ функция $f(x, y)$ — целая функция $(x + i\sigma_3 y)$, как доказано Аароновым и Кашером [34] для случая с нулевым скалярным потенциалом, $W(x, y) = 0$. В результате так же, как и при

$W(x, y) = 0$, имеем вырождение основного состояния. Причем кратность вырождения нулевых мод для частицы, движущейся во внешнем калибровочном поле, связана с топологическим числом N, определяемым как поверхностный интеграл от матричного тензора $B_{xy}(x, y)$:

$$\iint B_{xy}(x, y) dx\, dy = \Phi - W = 2\pi(N + \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{223}$$

Здесь N определяет кратность вырождения собственных состояний нулевой энергии. Если $\varepsilon = 0$, поток, определяемый как разница обычного потока и добавочного скалярного потенциала, квантован, и можно говорить о квантовом эффекте Холла и нестандартной статистике в двухатомных системах.

Теперь легко увидеть из (222) и (217), что присутствие скалярного потенциала может приводить к увеличению и, наоборот, к уменьшению или даже сокращению положительного индекса N; т.е. может влиять на существование квантового эффекта Холла и может приводить к спонтанному нарушению суперсимметрии. Но факт присутствия или отсутствия вырождения вследствие суперсимметрии не исключает других геометрических фаз, в частности, фаз Берри [15] или неадиабатических фаз Ааронова — Анандана [17,36].

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФАЗЫ

Особый интерес представляют случаи пересечения потенциальных кривых, которые приводят к сингулярностям калибровочного векторного потенциала A. При наличии сингулярностей A возникают нетривиальные геометрические фазы в волновых функциях χ_0 и, следовательно, $\chi(R, E)$, определяемых при произвольных энергиях (193):

$$\delta = \frac{1}{2} i \oint_C A(R) dR. \tag{224}$$

Эти фазы должны быть приняты во внимание дополнительно к уже определенным геометрическим фазам.

Рассмотрим несколько простых примеров одномерной задачи. При $\alpha(R) = 0$ (или, что то же, $W = 0$) два суперсимметричных партнера одномерной задачи, как следует из (188), совпадают в отличие от N-мерной, $N \geq 2$, т.е. суперсимметрия в данном случае определяется скалярным потенциалом $\alpha(R)$.

Пусть $\alpha(R) = -iA(R)$. Тогда

$$V^+(R) = 1/2\ [-A^2 - i\partial_R A],\quad V^-(R) = 1/2\ [-A^2 + i\partial_R A]. \qquad (225)$$

Для удобства принято обозначение $\partial_R = d/dR$. Уравнение (183) с учетом (225) перепишется следующим образом:

$$-1/2\ (\partial_R - iA(R))^2\chi + 1/2\ [-A^2 \mp i\partial_R A(R)]\chi = E\chi, \qquad (226)$$

что соответствует уравнениям

$$\begin{gathered} -1/2\ \partial_R^2\chi + iA(R)\partial_R\chi = E\chi, \\ -1/2\ \partial_R^2\chi + i(\partial_R A(R) + A(R)\partial_R)\chi = E\chi, \end{gathered} \qquad (227)$$

которые представлены в факторизованном виде (186) с суперзарядами, определяемыми по формулам (187):

$$\begin{aligned} Q^- &= -\partial_R + iA(R) + \alpha(R) = -\partial_R, \\ Q^+ &= +\partial_R - iA(R) + \alpha(R) = \partial_R - 2iA(R). \end{aligned} \qquad (228)$$

В одноканальном случае $A(R)$ чисто мнимое. Если $\chi_0(R)$ — основное состояние (227) гамильтониана H^-, то $Q^+(R)$ его должно уничтожить:

$$Q^+\chi_0 = 0 \text{ или } (\partial_R - 2iA(R))\chi_0(R) = 0.$$

Отсюда имеем

$$\chi_0(R) = P\exp\Big(2i\int_{\mathring{R}}^{R} A(R')dR'\Big) = P\exp\Big(-2\int_{\mathring{R}}^{R} \alpha(R')dR'\Big). \qquad (229)$$

Вспоминая определение калибровочного преобразования

$$U(R, \mathring{R}) = P\exp\Big(\int_{\mathring{R}}^{R} A(R')dR'\Big),$$

видим, что получили простой пример точно решаемой модели, когда калибровочное преобразование с точностью до коэффициента совпадает с функцией основного состояния $\chi_0(R)$.

При изучении свободного движения в N-мерном пространстве в сферической параметризации $(\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^{N-1})$ введение геометрической фазы необходимо для учета дефекта параметризации пространства сферическими координатами и появления вследствие этого особой точки в начале координат. Уравнению (226) отвечает $A(R) = i\nu R^{-1}$ ($\nu = (N-1)/2$), где в соответствии с (225)

$$V^{+}(R) = \nu(\nu - 1)/R^2, \quad V^{-}(R) = \nu(\nu + 1)/R^2.$$

Фазы определяются согласно (224):

$$\delta_{+} = (\pi\nu)/2, \quad \delta_{-} = \pi(\nu + 1)/2.$$

В трехчастичной задаче, рассматриваемой при гиперсферической параметризации пространства, в точке тройного столкновения возникает аналогичный сингулярный потенциал и соответствующая фаза, отвечающие $\nu = 5/2$. Вообще говоря, сингулярности $A(R)$ не обязательно расположены в начале координат $R = 0$, и функциональная зависимость $A(R)$ может быть более сложной. Например, если

$$A(R) = i\prod_j f(R)/(R - ib_j) \tag{230}$$

с гладкой функцией $f(R)$, имеющей аналитическое продолжение в комплексную плоскость R, то

$$\delta = \frac{\pi i}{2}\sum_j f(ib_j). \tag{231}$$

При $f(R) = 2R$ или $f(R) = (R + ib_j)$ геометрическая фаза определяется следующим образом: $\delta = \pi\sum_j b_j$. Вообще говоря, R должно быть отмасштабировано и безразмерно. Тогда видно, что δ для четных значений b не меняет знак, для нечетных меняет, т.е. это некоторый аналог эффекта Ааронова — Бома.

Вернемся к рассмотрению более сложной задачи, связанной с уравнениями (183), (184). Недиагональные элементы $A_{nm}(R) = \langle n|i\nabla_R|m\rangle$ реализуют переходы между различными собственными состояниями быстрого гамильтониана H^f. Приближение адиабатичности здесь неприменимо, в особенности в окрестности точки пересечения термов. Перепишем матричные элементы наведенного векторного потенциала (184) в другом виде:

$$A_{nm}(R) = i\,\frac{\langle\Phi_n(R;r)|\partial_R H^f(R)|\Phi_m(R;r)\rangle}{E_n(R) - E_m(R)}, \tag{232}$$

полученном в результате дифференцирования уравнения (182) по R и использования соотношения ортонормировки базисных функций Φ.

Вполне очевидно, что, когда термы $E_n(R)$ пересекаются или квазипересекаются в некоторых точках $R = R_m$, в матричных элементах $A_{nm}(R)$ возникают сингулярности, ответственные за геометрические фазы. Удобно ввести матрицу геометрических фазовых факторов

$$S_{nm} = \exp \mathrm{Im}\, (\oint A_{nm}(R) dR). \tag{233}$$

В нашем случае получаем

$$S_{nm} = \exp \left(\pi i \sum_m \mathrm{Res} \frac{\langle \Phi_n(R; r) | \partial_R V(R, r) | \Phi_m(R; r) \rangle}{E_n(R) - E_m(R)} \right). \tag{234}$$

Легко записать обобщение на многоканальный случай рассмотренной выше одноканальной суперсимметричной модели (225)—(229):

$$\chi_0(R) = CU(R, \mathring{R}) = C \exp\, (i \int_{\mathring{R}}^{R} A(R') dR')$$

с A_{nm}, определяемым соотношением (232). Отсюда следует, что вся информация о пересечении термов содержится в функции основного состояния.

Если неполный набор Ф принят во внимание, вектор состояний определяется на n-мерном подпространстве M-мерного гильбертова пространства $(M = (n + m))$, второй член в (185) не исчезает и индуцируются нетривиальные калибровочные поля. Тогда имеем фазы Берри

$$\delta_{ii} = \sum_{j \neq i}^{n} \oint A_{ij} A_{ji} = \sum_{j \neq i}^{n} \oint \langle \Phi_i | \partial_R | \Phi_j \rangle \langle \Phi_j | \partial_R | \Phi_i \rangle \tag{235}$$

аналогично [15]. Появляются также геометрические фазы, связанные с недиагональными элементами эффективной матрицы вектор-потенциалов $\tilde{A}_{ik}(R) = A_{ij}(R) A_{jk}(R)$. В этом случае лучше использовать геометрическую S-матрицу (233):

$$S_{ik} = \exp \left(\pi i \sum_{j \neq i,k}^{n} \mathrm{Res} \frac{\langle \Phi_i (R; r) | \partial_R H^f(R; r) | \Phi_j (R; r) \rangle}{E_i (R) - E_j (R)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\langle \Phi_j (R; r) | \partial_R H^f(R; r) | \Phi_k (R; r) \rangle}{E_j (R) - E_k (R)} \right). \tag{236}$$

В последнем случае возможно пересечение даже трех термов в одной точке. Итак, отметим, что неабелева неадиабатическая фаза проявляется даже тогда, когда только радиальная зависимость имеет место. Причина заключается в наличии $A(R)$ сингулярностей. Калибровочное преобразование $U(R, \mathring{R}) = \int\limits_{\mathring{R}} A(R')dR'$ не исключает их, и они проявляются в скалярном потенциале аналогично неисчезающему вихрю векторного потенциала в N-мерном пространстве медленных переменных.

При сведении многоканальной системы калибровочных уравнений к системе конечной может быть получена система несвязанных эффективных уравнений [125] вида

$$\left\{ \mu(R) \frac{d}{dR} \mu^{-1}(R) \frac{d}{dR} + \mu(R) \left(P^2 - \bar{V}(R)\right)\right\}\Psi(R) = 0 \qquad (237)$$

с ненулевой диагональной связностью

$$\bar{A} = \operatorname{diag} \bar{A}(R) = 1/2\mu(R) \frac{d}{dR} \mu^{-1}(R),$$

где

$$\mu^{-1}(R) = 1 - (2M)^{-1} \sum_{j}^{N} \frac{A_{ij}(R)\, A_{ji}(R)}{E_i(R) - E_j(R)}\,. \qquad (238)$$

Вполне очевидна применимость здесь формул (235), (236).

При отсутствии сингулярного поведения $\mu^{-1}(R)$, что справедливо вдали от пересечения термов, уравнения (237) с помощью преобразования Лиувилля представляются в виде (1), и для них, как и для уравнения Шредингера, можно конструировать точно решаемые модели, следовательно, получать решения в замкнутом аналитическом виде.

10. ОБОБЩЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАРГМАНА — ДАРБУ

Осуществим алгебраические преобразования Дарбу — Крама — Крейна и Баргмана для уравнений более общего вида (1), чем уравнения Шредингера:

$$-\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + V(r)\psi(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\psi(r) = E\psi(r). \qquad (239)$$

Соответствующие алгебраические преобразования для уравнений Шредингера как с переменными значениями энергии E и орбитального момента l, так и с фиксированными E и l естественным образом получаются как частные случаи при определенном выборе регулярной, за исключением точки $r = 0$, функции $h(r)$.

10.1. Преобразования Дарбу. Будем использовать технику, представленную в работе [74]. Решение уравнения (1) с некоторым первоначально неизвестным потенциалом $V(R)$ будем искать через известные решения уравнения (1) с известным потенциалом $V^0(R)$ в таком же виде:

$$\phi(r, E, \lambda) = y(r) W\{y^0(r), \phi^0(r, E, \lambda)\}, \tag{240}$$

где $W\{y^0(r), \phi^0(r, E, \lambda)\}$ — вронскиан функций y^0 и ϕ^0:

$$W\{y^0(r), \phi^0(r)\} = y^0(r) d\phi^0(r)/dr - dy^0(r)/dr\, \phi^0(r),$$

как и для обычного уравнения Шредингера (239). Только теперь функции $y(r)$ и $y^0(r)$ удовлетворяют уравнению (1) с $V(R)$ и $V^0(R)$ соответственно, при некотором выделенном значении $\gamma^2 = \gamma'^2$, которое может отвечать связанному состоянию. В уравнении (1) γ^2 имеет смысл энергии с коэффициентом $h(r)$, зависящим от координатной переменной. При этом функция $h(r)$ должна удовлетворять общим требованиям, предъявляемым к потенциальной функции в теории рассеяния [38]. Домножая уравнение (1) для $y^0(r)$ с известным потенциалом $V^0(R)$ на $\phi^0(\gamma, r)$ — функцию при произвольном γ, а уравнение для $\phi^0(\gamma, r)$ — на $y^0(r)$ и вычитая результирующие выражения, получим

$$dW(r)/dr = h(r)\,(\gamma'^2 - \gamma^2) y^0(r) \phi^0(\gamma, r). \tag{241}$$

Найдем вторую производную $d^2\phi(\gamma, r)/dr^2$, используя определение (240) и соотношение (241):

$$\frac{d^2\phi(\gamma, r)}{dr^2} = \frac{d^2 y(r)}{dr^2} W\{y^0(r), \phi^0(\gamma, r)\} + y(r) \frac{d[h(r) y^0(r), \phi^0(\gamma, r)]}{dr} +$$

$$+ 2\frac{dy(r)}{dr} h(r) y^0(r) \phi^0(\gamma, r).$$

Принимая во внимание уравнение (1) для $y(r)$ и осуществляя необходимые преобразования, получим

$$\frac{d^2\phi(\gamma, r)}{dr^2} = [V(r) - \gamma'^2 h(r)]\, y(r)\, W\{y^0(r), \phi^0(\gamma, r)] +$$

$$+ 2\,\frac{d[y(r)y^0(r)]}{dr}\,h(r)\phi^0(\gamma, r) + \frac{dh(r)}{dr}\,y(r)y^0(r)\phi^0(\gamma, r) +$$

$$+ h(r)y(r)W\,\{y^0(r), \phi^0(\gamma, r)\}.$$

Используя определение (240), перепишем это соотношение в виде:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - V(r) + h(r)\gamma^2\right)\phi(\gamma, r) =$$

$$= 2h(r)\,\frac{dy(r)y^0(r)}{dr}\,\phi^0(\gamma, r) + y(r)y^0(r)\,\frac{dh(r)}{dr}\,\phi^0(\gamma, r). \qquad (242)$$

Вполне очевидно, условие обращения правой части тождества (242) в нуль

$$\frac{d}{dr}\ln y(r)y^0(r) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dr}\ln h(r) \qquad (243)$$

приводит к тому факту, что функция $\phi(\gamma, r)$, определяемая соотношением (240), удовлетворяет уравнению (1). Условие (243) соответствует

$$y(r) = \frac{1}{\sqrt{h(r)}\;y^0(r)}. \qquad (244)$$

Тогда, с учетом определения (240), решение уравнения (1) при произвольном значении γ^2 запишется следующим образом:

$$\phi(\gamma, r) = \frac{1}{\sqrt{h(r)}\;y^0(r)}\,W\,\{y^0(r), \phi^0(\gamma, r)\}. \qquad (245)$$

Найдем теперь в явном виде выражение для потенциала $V(r)$ через известные функции $h(r)$, $y^0(r)$, $V^0(r)$. Используем соотношение (244) в уравнении (1) для функции $y(r)$:

$$V(r) = \frac{d^2y(r)/dr^2}{y(r)} + h(r)\gamma'^2 = 2\left(\frac{dy^0(r)/dr}{y^0(r)}\right)^2 - \frac{d^2y^0(r)/dr^2}{y^0(r)} +$$

$$+ \frac{dy^0(r)/dr}{y^0(r)}\,\frac{dh(r)/dr}{h(r)} + h\gamma'^2 - \frac{1}{2}\,\frac{d^2h(r)/dr^2}{h(r)} + \frac{3}{4}\left(\frac{dh(r)/dr}{h(r)}\right)^2.$$

Преобразуя это выражение с учетом равенств

$$2\left(\frac{dy^0(r)/dr}{y^0(r)}\right)^2 - \frac{d^2y^0(r)/dr^2}{y^0(r)} = -2\left(\frac{dy^0(r)/dr}{y^0(r)}\right)' + \frac{d^2y^0(r)/dr^2}{y^0(r)},$$

$$\frac{d^2y^0(r)/dr^2}{y^0(r)} = V^0(r) - h(r)\gamma'^2,$$

получим окончательно

$$V(r) = V^0(r) - 2\sqrt{h(r)}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\sqrt{h(r)}}\,\frac{d}{dr}\ln y^0(r)\right] + \sqrt{h(r)}\,\frac{d^2}{dr^2}\,\frac{1}{\sqrt{h(r)}}\,. \qquad (246)$$

Легко теперь показать, как соотношения (245), (246) переходят в соответствующие соотношения [74] для преобразований Дарбу в (λ^2, E)-плоскости. В случае, когда значения энергии E и орбитального момента l изменяются вдоль произвольных прямых линий в (λ^2, E)-плоскости $(\lambda = l + 1/2)$, т.е. выполняется условие

$$aE + bl\,(l+1) = aE^0 + bl^0(l^0 + 1) = const, \qquad (247)$$

радиальное уравнение Шредингера (239) может быть записано в виде [71]:

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l^0(l^0+1)}{r^2} - E^0\right]\psi\,(r, E, l) = \gamma^2 h(r)\psi(r, E, l). \qquad (248)$$

Здесь E^0 и l^0 — некоторые фиксированные значения энергии и орбитального углового момента. Легко проверить, что при этом справедливо равенство

$$\gamma^2 h(r) = (E - E^0) + \frac{\lambda^{02} - \lambda^2}{r^2}\,. \qquad (249)$$

Полагая

$$h(r) = \frac{a + br^2}{ar^2}\,, \qquad (250)$$

из (246) и (245) тотчас получаем аналитические соотношения связи

$$\phi(r, E, \lambda) = \frac{r}{y^0(r)\sqrt{1 + \alpha r^2}}\,W\{y^0(r), \phi^0(r, E, \lambda)\}, \qquad (251)$$

$$V(r) = V^0(r) - 2\sqrt{\frac{\alpha r^2 + 1}{r^2}}\,\frac{d}{dr}\left[\sqrt{\frac{r^2}{\alpha r^2+1}}\,\frac{d}{dr}\ln y^0(r)\right] - \frac{3r}{(1+\alpha r^2)^2} \tag{252}$$

с $\alpha = b/a$. Используя (250) и (247) в (249), γ^2 можно представить или как функцию E, или как функцию λ^2, в зависимости от того, какая из переменных выбирается независимой на прямой в (λ^2, E)-плоскости, определяемой параметрами a и b:

$$\gamma^2(E) = (E - E^0)\,\frac{a}{b}, \quad \gamma^2(\lambda) = (\lambda^{02} - \lambda^2). \tag{253}$$

В статьях [69], [70]

$$h(r) = \frac{a + br^2}{r^2}. \tag{254}$$

Тогда, как следует из (249),

$$\gamma^2(E) = (E - E^0)\,\frac{1}{b}, \quad \gamma^2(\lambda) = (\lambda^{02} - \lambda^2)\,\frac{1}{a}.$$

Окончательный результат, однако, не зависит от выбора $h(r)$ в виде (250), (254) или

$$h(r) = \frac{a + br^2}{br^2},$$

если проведено согласование с (240) и (247).

Рассмотрим случай фиксированного l, $\lambda^2 = \lambda^{02}$. Из соотношения (249) следует равенство $\gamma^2 h(r) = (E - E^0)$. Сравнивая его с первым из (253), получаем $h(r) = b/a = \mathrm{const}$. С таким $h(r)$ выражения для потенциала и решений (246) и (245) переходят в соотношения

$$V(r) = V^0(r) - 2\,\frac{d^2}{dr^2}\ln y^0(r), \tag{255}$$

$$\phi\,(r, E) = \frac{1}{y^0(r)}\,W\,\{y^0(r), \phi^0(r, E)\} \tag{256}$$

при $\alpha = \infty$ и условии $y^0(r) \neq 0$ на отрезке $a < r < b$, полученные из обычных преобразований Дарбу — Крама — Крейна. В случае фиксированной энергии $E = E^0$, $h(r) = 1/r^2$. Подставляя это $h(r)$ в (246) и (245), получаем преобразования Дарбу

$$V(r) = V^0(r) - \frac{2}{r}\left[\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \ln y^0(r)\right], \tag{257}$$

$$\phi(r, \lambda) = \frac{r}{y^0(r)} W\{y^0(r), \phi^0(r, \lambda)\}, \qquad \lambda \neq \lambda' \tag{258}$$

для уравнения Шредингера при $E = \text{const}$.

Как частные случаи различного выбора $h(r)$, могут быть рассмотрены варианты преобразований при наличии кулоновских сил и кулоновской константы связи C. Полагая при $l = \text{const}$, например, $h(r) = (a + br)/r$, при условии

$$aE + bc = aE^0 + bc^0 = \text{const},$$

из соотношений (246) и (245) тотчас получаем аналитические выражения связи для потенциала и решений.

Полагая $h(r) = r^{-1}$, получаем точно решаемые модели, исследованные в [126], с переменным электрическим зарядом при фиксированных угловом моменте и энергии.

10.2. Преобразования Баргмана. Будем искать решения уравнения (1) в более общем, по сравнению с (240), виде:

$$\phi(\gamma, r) = \phi^0(\gamma, r) - \sum_{\mu}^{M} y_\mu(r) W\{\phi^0(\gamma_\mu, r), \phi^0(\gamma, r)\}, \tag{259}$$

где функции

$$y_\mu(r) \equiv y(r, \gamma_\mu) = C_\mu \phi(\gamma_\mu, r).$$

Найдем условия, при которых функция $\phi(\gamma, r)$, определяемая (259), удовлетворяет уравнению (1). Процедура аналогична предложенной в [73,75]. Дважды продифференцируем (259). Учитывая (241), получим

$$\frac{d^2\phi(\gamma, r)}{dr^2} = \frac{d^2\phi^0(\gamma, r)}{dr^2} - \sum_{\mu}^{M} \left\{\frac{d^2 y_\mu(r)}{dr^2} W\{\phi^0(\gamma_\mu, r), \phi^0(\gamma, r)\} + \right.$$

$$\left. + y_\mu(r) \frac{d[h(r)\phi^0(\gamma_\mu, r)\phi^0(\gamma, r)]}{dr} + 2\frac{dy_\mu(r)}{dr} h(r)\phi^0(\gamma_\mu, r)\phi^0(\gamma, r)\right\}.$$

Преобразуем это выражение с учетом уравнения (1) для $y_\mu(r)$ и определения (259):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - V(r) + h(r)\gamma^2\right)\phi(\gamma, r) = [-V(r) + V^0(r)]\phi^0(\gamma, r) -$$

$$- 2\sum_{\mu}^{M}\left\{h(r)\frac{dy_\mu(r)\,\phi^0(\gamma_\mu, r)}{dr} + y_\mu(r)\,\phi^0(\gamma_\mu, r)\frac{dh(r)}{dr}\right\}\phi^0(\gamma, r). \quad (260)$$

Функция $\phi(\gamma, r)$ удовлетворяет уравнению (1) при обращении правой части последнего соотношения в нуль. Это условие эквивалентно

$$V(r) = V^0(r) - \sum_{\mu}^{M}\left\{2h(r)\frac{dy_\mu(r)\,\phi^0(\gamma_\mu, r)}{dr} + y_\mu(r)\,\phi^0(\gamma_\mu, r)\frac{dh(r)}{dr}\right\}. \quad (261)$$

Решение $y_\mu(r)$ с потенциалом (261) определяется из (259) с использованием связи $y_\mu(r) = C_\mu\phi(\gamma_\mu, r)$:

$$y_\mu(r) = \sum_{\nu}^{M} C_\nu\,\phi^0(\gamma_\nu, r)P^{-1}_{\nu\mu}(r), \quad (262)$$

где

$$P_{\mu\nu}(r) = \delta_{\mu\nu} + C_\nu W\{\phi^0(\gamma_\mu, r), \phi^0(\gamma_\nu, r)\}.$$

Подстановка (262) в (261) и (259) позволяет дать определения потенциала и соответствующих ему решений через известные функции $h(r)$ и решения $\phi^0(\gamma, r)$:

$$V(r) = V^0(r) - 2\sqrt{h(r)}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\sqrt{h(r)}}\frac{d}{dr}\ln\det P(r)\right], \quad (263)$$

$$\phi(\gamma, r) =$$

$$= \phi^0(\gamma, r) - \sum_{\mu}^{M}\sum_{\nu}^{M} C_\nu\phi^0(\gamma_\nu, r)P^{-1}_{\mu\nu}(r)\,W\{\phi^0(\gamma_\mu, r)\,\phi^0(\gamma, r)\}. \quad (264)$$

Легко теперь, используя общие формулы (263) и (264) для уравнений (1), получить преобразования баргмановского типа

$$V(r) = V^0(r) - 2\frac{\sqrt{(1 + \alpha r^2)}}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{\sqrt{(1 + \alpha r^2)}}\frac{d}{dr}\ln\det P(r)\right], \quad (265)$$

$$\phi_l(r, E) = \phi_l^0(r, E) -$$

$$- \sum_{\mu}^{M} \sum_{\nu}^{M} C_\nu \phi^0(r, E_\nu, \lambda_\nu) P_{\nu\mu}^{-1}(r) \frac{W\{\phi^0(r, E_\mu, \lambda_\mu), \phi^0(r, E, \lambda)\}}{E_\mu - E_\nu} \qquad (266)$$

для потенциалов и решений уравнения Шредингера (239) и (248) с переменными значениями энергии и орбитального момента вдоль произвольных прямых линий в (λ^2, E)-плоскости [73,75]. Для этого достаточно принять в (263) и (264) $h(r)$ из (250). Преобразования баргмановского типа конструировались также в работах [69,70]. В первой из них, как и в [73,75], осуществлены алгебраические преобразования, вторая основана на общей формулировке обратной задачи [71,72] при переменных l и E. Так же просто, фиксируя угловой момент l или энергию E, получить из соотношений (263) и (264) выражения Баргмана для задач с фиксированными l и E, полагая $h(r) = b/a$ и $h(r) = 1/r^2$ соответственно.

Подход Гельфанда — Левитана или Марченко с вырожденным ядром оператора обобщенного сдвига $K(r, r')$ получается при надлежащем выборе граничных условий. В подходе Гельфанда — Левитана, разработанном для регулярных решений, вронскиан в уравнениях (263), (264) выражается следующим образом:

$$W\{\phi^0(\gamma_\mu, r), \phi^0(\gamma, r)\} = (\gamma_\mu^2 - \gamma^2) \int_0^r h(r)\, \phi^0(\gamma_\mu, r')\, \phi^0(\gamma, r') dr'. \qquad (267)$$

В подходе Марченко, использующем решения Йоста, вронскиан записывается в виде

$$W\{f^0(\gamma_\mu, r), f^0(\gamma, r)\} = (\gamma_\mu^2 - \gamma^2) \int_r^\infty h(r)\, f^0(\gamma_\mu, r')\, f^0(\gamma, r') dr'. \qquad (268)$$

Учитывая соотношения (267) или (268) в (264), получим

$$\phi(\gamma, r) = \phi^0(\gamma, r) -$$

$$- \sum_{\mu}^{M} \sum_{\nu}^{M} C_\nu \phi^0(\gamma_\nu, r) P_{\nu\mu}^{-1}(r)\, (\gamma_\mu^2 - \gamma^2) \int_{0(r)}^{r(\infty)} h(r)\, \phi^0(\gamma_\mu, r')\, \phi^0(\gamma, r') dr', \qquad (269)$$

где $P_{\nu\mu}(r)$ тоже перепишем в интегральном виде

$$P_{\nu\mu}(r) = \delta_{\nu\mu} + C_\mu(\gamma_\mu^2 - \gamma^2) \int_{0(r)}^{r(\infty)} h(r)\, \phi^0(\gamma_\mu, r')\, \phi^0(\gamma', r') dr'.$$

Теперь вполне очевидно, что в соотношениях (259), (262)—(264) под ϕ подразумеваются любые решения: регулярные, йостовские, задачи

Штурма — Лиувилля, в общем, произвольные до тех пор, пока не выбраны определенные граничные условия задачи.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована многомерная обратная задача рассеяния в адиабатическом представлении, которая с необходимостью привела к разработке двух взаимосвязанных нестандартных задач: параметрической, в слое для гамильтониана быстрого движения, и многоканальной калибровочного типа, описывающей медленную динамику системы. Предложен способ построения широкого класса точно решаемых многомерных моделей на основе развитой техники баргмановских потенциалов для параметрического семейства обратных задач и для систем уравнений с ковариантной производной. Формулировка параметрической обратной задачи и обобщение на этот случай техники баргмановских потенциалов позволяет генерировать широкий класс точно решаемых многомерных моделей при задании функциональной зависимости от внешней координатной переменной данных рассеяния.

В замкнутом аналитическом виде получены простые и ясные выражения для потенциальных матриц баргмановского типа и соответствующих им решений с использованием факторизации по индексам каналов матричных ядер уравнений обратной задачи $Q(X, X')$ и $K(X, X')$ дополнительно к их факторизации по координатной переменной.

С использованием приведенных выше формул можно изучать некоторые геометрические аспекты теории рассеяния. Например, задавая функциональную зависимость термов, можно увидеть, как ведут себя матричные элементы оператора индуцированной связности и скалярного потенциала при сближении уровней вплоть до их квазипересечений. В последовательном подходе параметрическая зависимость термов от медленных переменных должна определяться после решения обратной задачи для медленной системы уравнений. В плане приложений параметрическая формулировка обратной задачи в рамках адиабатического подхода позволяет эффективно решать вопрос о выборе того или иного класса сферически-несимметричных потенциалов, применяемых в расчетах различных квантовых систем.

Дано обобщение техники алгебраических преобразований для уравнения (1), содержащего функциональную зависимость от координаты в слагаемом с энергией, дополнительно к потенциальной функции. В замкнутом виде получены соотношения связи для потенциалов и соответствующих им решений, обобщающие формулы баргмановского подхода. Частные случаи такого подхода — преобразования с переменными и фиксированными значениями энергии, орбитального момента и кулоновской константы связи.

Полученные в рамках суперсимметричного подхода соотношения для уравнений с калибровочным потенциалом позволяют генерировать новый класс точно решаемых моделей. Особый интерес представляет развитие предложенного подхода для конструирования моделей с сингулярными потенциалами и нетривиальными топологическими фазами.

Рассмотренный подход открывает новые возможности для построения точно решаемых моделей, полезных для интерпретации особенностей поведения потенциальных кривых; связывает их с современной геометрической трактовкой теории рассеяния в терминах расслоенных гильбертовых пространств. Хотелось бы отметить, что при наличии суперсимметрии для систем калибровочных уравнений, описывающих медленную динамику квантово-механических систем, возникают геометрические фазы и возможны топологические эффекты. Неадиабатические геометрические фазы, дополнительные к фазам Ааронова — Анандана, возникают из-за сингулярностей индуцированного оператора связности A в точках пересечения термов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представим полную волновую функцию в виде

$$|\Psi_j(\mathbf{X},\mathbf{Y})\rangle = \sum_m |\Phi_m(\mathbf{X};\mathbf{Y})\rangle\langle\Phi_m(\mathbf{X};\mathbf{Y})|\Psi_j(\mathbf{X},\mathbf{Y})\rangle =$$

$$= \sum_m |\Phi_m(\mathbf{X};\mathbf{Y})\rangle\chi_{mj}(\mathbf{X}) = |\Phi(\mathbf{X};\mathbf{Y})\rangle\chi_j(\mathbf{X}). \qquad (270)$$

Отметим, что полная волновая функция Ψ должна быть инвариантна при следующем унитарном преобразовании:

$$\Phi_m(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \sum_n \Phi'_n(\mathbf{X};\mathbf{Y})\,\mathfrak{U}_{nm}(\mathbf{X}),$$

$$\chi_m(\mathbf{X}) = \sum_n \mathfrak{U}^*_{mn}(\mathbf{X})\,\chi'_n(\mathbf{X}).$$

Используем разложение единицы (полноту):

$$I = \sum_m |\Phi_m\rangle\langle\Phi_m|, \qquad (271)$$

а также ортогональность (интегрирование по быстрым переменным $\mathbf{Y}$)

$$\langle\Phi_m(\mathbf{X};\mathbf{Y})|\Phi_n(\mathbf{X};\mathbf{Y})\rangle = \delta_{mn} \qquad (272)$$

функций Ф в исходном многомерном уравнении Шредингера

$$H\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad H = -\Delta + V. \tag{273}$$

Проведем простые преобразования: выразим действие оператора $\Delta_{\mathbf{X}}$ на базисные функции, параметрически зависящие от $\mathbf{X}$:

$$\Delta_{\mathbf{X}}\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla\cdot(\nabla\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})),$$

$$\nabla|\Psi\rangle = (\nabla|\Psi\rangle)\chi + |\Phi\rangle\nabla\chi, \tag{274}$$

$$\nabla(\nabla|\Psi\rangle) = (\nabla^2|\Phi\rangle)\chi + 2\nabla|\Phi\rangle\nabla\chi + |\Phi\rangle\nabla^2\chi.$$

Домножим (273) и (274) слева на $<\Phi_m(\mathbf{X};\, \mathbf{Y})|$ и проинтегрируем по $\mathbf{Y}$

$$\langle\Phi_m|\nabla^2|\Psi\rangle =$$

$$= \sum_n (\langle\Phi_m|(\nabla^2|\Phi_n\rangle)\chi_n + 2\langle\Phi_m|\nabla|\Phi_n\rangle\nabla\chi_n + \langle\Phi_m||\Phi_n\rangle\nabla^2\chi_n), \tag{275}$$

$$\nabla[\langle\Phi_m(\mathbf{X};\, \mathbf{Y})|\nabla|\Phi_n(\mathbf{X};\, \mathbf{Y})\rangle] =$$

$$= \nabla[\langle\Phi_m(\mathbf{X};\, \mathbf{Y})]|\nabla|\Phi_n(\mathbf{X};\, \mathbf{Y})\rangle + \langle\Phi_m(\mathbf{X};\, \mathbf{Y})|(\nabla^2|\Phi_n(\mathbf{X};\, \mathbf{Y})\rangle). \tag{276}$$

Используя соотношение ортогональности (272)

$$\nabla[\langle\Phi_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))|\Phi_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\rangle] = \nabla\delta_{mn} = 0,$$

получим

$$(\nabla\langle\Phi_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|)|\Phi_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\rangle = -\langle\Phi_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\nabla|\Phi_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\rangle, \tag{277}$$

т.е. векторные матрицы, определяемые как $i\mathbf{A}_{mn} = -\langle\Phi_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\nabla|\Phi_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\rangle$, антиэрмитовы.

Используя (277) и (271) в (276), имеем

$$-i\nabla\mathbf{A}_{nm} = \mathbf{A}^2_{nm} + \langle\Phi_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|(\nabla^2|\Phi_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\rangle).$$

После чего (275) перепишется через удлиненную производную в виде

$$-i(\nabla\mathbf{A})\chi - \mathbf{A}^2\chi - 2iA\nabla\chi + \nabla^2\chi = D^2\chi = (\nabla - i\mathbf{A})^2\chi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Born M.** — Nachr. Acad. Wiss., Gottingen, 1951, bd.1, No.6, s.1.
   Борн М., Хуан Кунь — Динамическая теория кристаллических решеток. М.: ИЛЛ, 1958.
2. **Macek J.** — J. Phys., 1968, vol.B1, p.831—843.
3. **Виницкий С.И., Пономарев Л.И.** — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.6, с.1336—1418.
4. **Виницкий С.И., Сузько А.А.** — ЯФ, 1990, т.52, с.686—703; Препринт ОИЯИ Р4-90-136, Дубна, 1990.
5. **Сузько А.А.** — ЯФ, 1992, т.55, с.2161—2172; Препринт ОИЯИ Р4-92-32, Дубна, 1992.
6. **Vinitsky S.I., Dubovik V.M., Kadomtsev M.B. et al.** — In: Proc. Int. Few-Body Workshop, Microscopic Meth. in the Theory of Few-Body Systems. Kalinin, 1988, vol.1, p.4.; Препринт ОИЯИ Р4-88-532, Дубна, 1988.
7. **Vinitsky S.I., Suzko A.A., Markovski B.L. et al.** — In: Proc. of Int. Seminar Topological Phases in Quantum Theory, Dubna, 2—4 September, 1988. (B.L.Markovski and S.I.Vinitsky eds.) World Scientific, Singapore, 1989, p.173.
8. **Виницкий С.И., Кадомцев М.Б., Сузько А.А.** — ЯФ, 1990, т.51, с.952; Препринт ОИЯИ Р4-89-268, Дубна, 1989.
9. **Markovski B.L., Vinitsky S.I., Suzko A.A.** — JINR Preprint E4-91-379, Dubna, 1991.
10. **Dubovik V.M., Markovski B.L., Suzko A.A. et al.** — Phys. Lett., 1989, vol.A142, p.133. Препринт ОИЯИ Р2-89-228, Дубна, 1989.
11. **Dubovik V.M., Kadomtsev M.B., Markovski B.L. et al.** — In: Proc. Int. Workshop on Schroedinger Operators: Standard and Non-Standard, Dubna, September 6—10, 1988. World Scientific, Singapore, 1989, p.375.
12. **Виницкий С.И., Марковский Б.Л., Сузько А.А.** — ЯФ, 1992, т.55, №3, с.669.
13. **Suzko A.A., Vinitsky S.I.** — In: Int. Conf. on Few-Body Systems, Van-Couver, 1989.
14. **Suzko A.A., Vinitsky S.I.** — In: Int. Conf. on Few-Body Systems, Uzhgorod, 1990.
15. **Berry M.** — Proc. R. Soc. Lond., 1984, vol.A392, p.45.
16. **Wilczek F., Zee A.** — Phys. Rev. Lett., 1984, vol.52, p.2111.
17. **Aharonov Y., Anandan J.** — Phys. Rev. Lett., 1987, vol.58, p.1593.
18. **Mead C.A.** — Phys. Rev. Lett., 1987, vol.59, p.161; J. Chem. Phys., 1980, vol.49, p.23.
19. **Mead C.A.** — Rev. of Mod. Phys., 1992, vol.64, p.51.
20. **Semenoff G.W.** — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.56, p.1195.
21. **Kohmoto M.** — Annals of Phys., 1985, vol.160, p.343.
22. **Sukumar C.V.** — J. Phys., 1985, vol.A18, p.L.57; J. Phys., 1985, vol.A18, p.2917; 2937.
23. **Nieto M.M.** — Phys. Lett., 1984, vol.B145, p.208.
24. **Генденштейн Л.** — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.299.
25. **Gamboa J., Zanelli J.** — J. Phys., 1988, vol.A21, p.L283.
26. **Suzko A.A.** — Hadronic Journ., 1992, vol.15, p.363. JINR Preprint E4-92-282, Dubna, 1992.
27. **Сузько А.А.** — Препринт ОИЯИ Р4-92-367, Дубна, 1992.
28. **Сузько А.А.** — ЯФ, 1993, т.56, №5, с.202.
29. **Генденштейн Л.** — Письма в ЖЭТФ, 1984, т.39, с.234.
30. **Witten E.** — Nucl. Phys., 1981, vol.B185, p.513. 1982, vol.B202, p.253.
31. **Ui.H.** — Progr. Theor. Phys., 1984, vol.72, p.813.
32. **Gamboa J., Zanelli J.** — Phys. Lett., 1985, vol.B165, p.91.
33. **Генденштейн Л.Э., Криве И.В.** — УФН, 1985, т.146, вып.4, с.553.
34. **Aharonov Y., Casher A.** — Phys. Rev., 1979, vol.A19, p.2461.
35. **Bulgac A.** — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.67,5, p.965.
36. **Anandan J.** — Phys. Lett., 1988, vol.A133, p.171.
37. **Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д.** — Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.

38. Ньютон Р. — Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. 2nd Ed. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1982.
39. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. — Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985. 2-ое изд.: New York: Springer Verlag, 1990.
40. Fano U. — Phys. Rev., 1981, vol.A24, p.2402; 1982, vol.A25, p.1808.
41. Kuppermann A.P., Hipes P.G. — J. Chem. Phys., 1986, vol.84, p.5962.
42. Квицинский А.А., Кострыкин В.В., Меркурьев С.П. — ЯФ, 1989, т.49. №5, с.1273, ДАН СССР, 1988, т.301, с.581.
43. Kuperin Yu.A. et al. — Annals of Phys., 1991, vol.25, p.330.
44. Pack R.T., Parker G.A. — J. Chem. Phys., 1987, vol. 87, p.3888.
45. Makarov K.A. et al. — Preprint Fub-Hep/87-11, Berlin (West) 1987.
46. Виницкий С.И., Куперин Ю.А., Мотовилов А.К., Сузько А.А. — ЯФ, 1992, т.55, №2, с.444.
47. Matveenko A.V. — J. Phys., 1985, vol.B18, p.L645; Preprint JINR E2-7169, Dubna, 1973.
48. Amirchanov I.V. et al. — In: Proc. Int. Workshop on Schroedinger Operators: Standard and Non-Standard, Dubna, September 6—10, 1988, World Scientific, Singapore, 1989, p.353.
49. Симонов Ю.А., Бадалян А.М. — ЯФ, 1967, т.3, с.630. 1967, т.5, с.88.
50. Heller E.J., Yamany H.A. — Phys. Rev., 1874, vol.A9, p.1201.
51. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н. — Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. М.: Атомиздат, 1974.
52. Филиппов Г.Ф. — ЯФ, 1981, т.33, с.928.
53. Zakhariev B.N. — Few-Body Systems, 1988, vol.4, p.25.
54. Lin C.D., Liu X.H. — Phys. Rev., 1988, vol.A37, p.2749.
55. Gibson W.G., Larsen S.Y., Popiel J. — Phys. Rev., 1987, vol.A35, p.4919.
56. Konstant B. — Lecture Notes in Mathematics. (T.Tamm, Ed.), 1970, vol.170, p.87, Springer-Verlag, New York, Berlin.
57. Klar H. — Phys. Rev., 1977, vol.A15, p.1452.
58. Baker G.A. — Phys. Rev., 1962, vol.128, p.1485.
59. Moser J. — Advances in Math., 1975, vol.16, p.197.
60. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1951, т.15, вып.4, с.309.
61. Марченко В.А. — ДАН СССР, 1950, т.72, №3, с.457. Тр. Моск. матем. общества, 1952, т.1, с.327.
62. Марченко В.А. — ДАН СССР, 1955, т.104, №5, с.695.
63. Агранович З.С., Марченко В.А. — Обратная задача теории рассеяния. Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1960.
64. Марченко В.А. — Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
65. Марченко В.А. — Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев: Наукова думка, 1972.
66. Darboux J.G. — C.R. Acad. Sci. Paris. 1882, vol.94, p.1456;
Ince E.L. — Ordinary Differential Equations. Dover, New York, 1956.
67. Crum M.M — Quart. Journ. Math., Oxford (2), 1955, vol.6, p.121.
68. Krein M.G. — ДАН СССР, 1957, т.113, с.970.
69. Schnizer W.A., Leeb H. — Inverse Methods in Action: Proc. Muticentenniels Meeting, held: Montpellier, France, 1989 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990, XIY).
70. Rudyak B.V., Zakhariev B.N. — Inverse Problems, 1987, vol.3, p.125.
71. Cornille H. — J. Math. Phys., 1976, vol.17, p.2143; J. Math. Phys., 1977, vol.18, p.1855.
72. Coudray C., Coz M. — Ann. Phys., 1970, vol.61, p.488.
73. Suzko A.A. — Physica Scripta, 1985, vol.31, p.447.
74. Rudyak B.V., Suzko A.A., Zakhariev B.N. — Physica Scripta, 1984, vol.29, p.515.
75. Suzko A.A. — Physica Scripta, 1986, vol.34, p.5.

76. Сузько А.А. — В сб.: Труды 9-й Европейской конференции по проблеме нескольких тел в физике. Тбилиси, 1984, с.56.
77. Bargmann V. — Phys. Rev., 1949, vol.21, p.488.
78. Bargmann V. — Phys. Rev., 1949, vol.25, p.301.
79. Bargmann V. — Proc. Nat. Acad. Sci., 1952, vol.38, p.961.
80. Theis W.R. — Z. Naturf., 1956, vol.A11, p.889.
81. Fulton T., Newton R.G. — Nuovo Cimento, 1956, vol.3, p.677.
82. Шадан К., Сабатье П. — Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980. 2-ое изд.: New York: Springer Verlag, 1990.
83. Калоджеро Ф., Дегасперис А. — Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985.
84. Poschel J., Trubowitz E. — Inverse Spectral Theory, Pure and Appl. Mathematics. New York: Springer Verlag, 1986, vol.130.
85. Левитан Б.М. — Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
86. Deift P., Trubowitz E. — Commun. Pure Appl. Math., 1979, vol.32, p.121.
87. Березанский Ю.М. — Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
88. Фаддеев Л.Д. — ДАН СССР, 1966, т.167, №1, с.69. Препринт Института теоретической физики, Киев: ИТФ-71-106 Е, 1971.
89. Фаддеев Л.Д. — Обратная задача квантовой теории рассеяния. II, В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1974, т.3, с.93.
90. Newton R.G. — J. Math. Phys., 1980, vol.21, p.1698, 1981, vol.22, p.631.
91. Newton R.G. — J. Math. Phys., 1981, vol.22, p.2191, vol.23, p.693.
92. Newton R.G. — Inverse Problems, 1985, No.1, p.127.
93. Newton R.G. — Inverse Schrodinger Scattering in Three Dimensions. New York: Springer Verlag, 1989.
94. Newton R.G. — Conf. on Inverse Scattering: Theory and Application, Ed. J.B.Bednaretal, SIAM, Philadelphia, 1983.
95. Kay I., Moses H.E. — Nuovo Cim., 1961, vol.22, p.689.
96. Kay I., Moses H.E. — Commun. Pure Math., 1961, vo.14, p.435.
97. Захарьев Б.Н., Мельников В.Н., Рудяк Б.В., Сузько А.А. — ЭЧАЯ, 1977, т.8, вып.2, с.290.
98. Beals R., Coifman R.R. — Proc. of Symps in Pupe Math., 1985, vol.43, p.45. Physica, 1986, vol.D18, p.242.
99. Новиков Р.Г., Хенкин Г.М. — УМН, 1987, т.42, вып.3, с.94.
100. Новиков Р.Г. — ТМФ, 1986, т.66, с.234; Функц. анализ и его прилож., 1986, т.20, с.90.
101. Гриневич П.Г., Манаков С.В. — Функц. анализ и его прилож., 1986, т.20, с.14.
102. Redge T. — Nuovo Cimento, 1959, vol.14, p.951.
103. Newton R.G. — J. Math. Phys., 1962, vol.3, p.75.
104. Sabatier P.S. — J. Math. Phys., 1967, vol.8, p.1905.
105. Loeffel J.J. — Ann. Inst. H. Poincare, 1968, vol.A8.
106. Левитан Б.М. — В кн.: Задачи механики и матем. физики. Сборник памяти И.Г.Петровского. М.: Наука, 1976, с.166.
107. Lipperheide R., Fideldey H. — Z. Phys., 1981, vol.A301, p.81.
108. Lipperheide R., Fideldey H. — Z. Phys., 1978, vol.A286, p.45.
109. Пивоварчик В.Н., Сузько А.А. — В сб.: Эволюционные задачи энергопереноса в неоднородных средах. Минск: Изд. ИТМО АН БССР, 1982, с.168.
110. Moses H.E. — J. Math. Phys., 1979, vol.20, p.2047.
111. Coz M., von Geramb H.V., Lumpe L.D. — Z. Phys., 1987, vol.A328, p.259.
112. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Квантовая механика, М., 1974, т.3.
113. Островский В.Н. — ЖЭТФ, 1977, т.73, с.2077.

114. **Aitchison I.J.R.** — Physica Scripta, 1988, vol.T23, p.12; Acta Physica Polonica, 1987, vol.B18, p.207.
115. **Zygelman B.** — Phys. Lett., 1987, vol.A125, p.476.
116. **Zygelman B.** — Phys. Rev. Lett., 1989, vol.64, p.256.
117. **Plekhanov E.B., Suzko A.A., Zakhariev B.N.** — Ann. der Phys., 1982, vol.39, p.313.
118. **Захарьев Б.Н., Плеханов Е.Б., Сузько А.А.** — Изв. АН СССР, сер. физ., 1980, т.44, с.949.
119. **Захарьев Б.Н., Плеханов Е.Б., Сузько А.А** — Препринт ОИЯИ Р2-80-588, Дубна, 1980.
120. **Cox J.R.** — J. Math. Phys., 1964, vol.5, p.1065.
121. **Захарьев Б.Н., Ниязгулов С.А., Сузько А.А.** — ЯФ, 1974, т.20, с.1273.
122. **Жигунов В.П., Захарьев Б.Н., Ниязгулов С.А., Сузько А.А.** — Препринт ОИЯИ Р4-7768, Дубна, 1974.
123. **Захарьев Б.Н., Пивоварчик В.Н., Плеханов Е.Б., Сузько А.А.** — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.6, с.1284.
124. **Gozzi E.** — Phys. Lett., 1983, vol.B129, p.432.
125. **Виницкий С.И.** — Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук. ОИЯИ 4-91-364, Дубна, 1991.
126. **Поплавский И.В.** — Укр.физ.журн., 1983, т.28, с.1631; 1984, т.29, с.977; с.1148.