«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1993, ТОМ 24, ВЫП.5

УДК 539.17.01

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЗАМЕН ПЕРЕМЕННЫХ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЙ УСКОРЕННУЮ СХОДИМОСТЬ

Ю.А.Митропольский

Институт математики АНУ, Киев, Украина

В обзоре кратко изложены основные идеи работ Н.Н.Боголюбова и Н.М.Крылова, в которых был предложен и обоснован метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Рассмотрен также ряд важных приложений этого метода.

This is a review of basic ideas of works by N.N.Bogolubov and N.M.Krylov in which the method of accelerated convergence in nonlinear mechanics was suggested and substantiated and a lot of important applications of this method was considered.

В 1934 г. Н.М.Крыловым и Н.Н.Боголюбовым был предложен один из многочисленных методов созданной ими нелинейной механики, так называемых асимптотических методов нелинейной механики, — специальный метод последовательных замен, который во многих случаях является эффективным аппаратом для решения ряда интересных и важных задач нелинейной механики. В частности, этим методом была решена важная задача о существовании квазипериодического режима с двумя основными частотами в нелинейных колебательных системах.

Остановимся на основных моментах этого метода [9]. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в стандартной форме*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \tag{1}$$

*Стандартной формой, как известно, называются (согласно терминологии, предложенной Н.М.Крыловым и Н.Н.Боголюбовым) дифференциальные уравнения, правая часть которых пропорциональна малому параметру ε. К таким уравнениям приводятся многие задачи нелинейной механики, содержащие малый параметр.

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $X = (X_1, ..., X_n)$ — точки n-мерного евклидова пространства E_n; t — время, ε — малый положительный параметр.

Для уравнения (1) образуем, согласно общим методам нелинейной механики, m-е приближение:

$$x^{(m)} = \xi + \varepsilon F^{(1)}(t, \xi) + \ldots + F^{(m)}(t, \xi), \tag{2}$$

в котором новые переменные ξ являются решениями уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\ \mathcal{P}^{(1)}(\xi) + \ldots + \varepsilon^{(m)}\ \mathcal{P}^{(m)}(\xi). \tag{3}$$

Здесь функции $F^{(1)}(t, \xi), ..., F^{(m)}(t, \xi)$ и $\mathcal{P}^{(1)}(\xi), ..., \mathcal{P}^{(m)}(\xi)$ подобраны (исходя из известных выражений для $X(t, \xi, \varepsilon)$) так, чтобы ряды (2) удовлетворяли уравнениям (1) с точностью до величин порядка ε^{m+1}, как только ξ будет определено из уравнений (3).

Если теперь, определив функции $F^{(1)}(t, \xi), ..., F^{(m)}(t, \xi)$, рассматривать выражение (2) не как обычно в нелинейной механике приближенное асимптотическое решение системы (1), а как некоторую замену переменных, преобразующую неизвестную x к новой неизвестной ξ, то уравнение (1) приводится к уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\ \mathcal{P}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2\ \mathcal{P}^{(2)}(\xi) + \ldots + \varepsilon^m\ \mathcal{P}^{(m)}(\xi) + \varepsilon^{m+1} \mathfrak{R}(t, \xi, \varepsilon), \tag{4}$$

состоящему из, так сказать, «интегрируемой» части и возмущения $\varepsilon^{m+1} \mathfrak{R}(t, \xi, \varepsilon)$, являющегося величиной порядка ε^{m+1} и зависящего от времени t. При этом если переменная ξ удовлетворяет уравнению (4), то выражение (2) представляет собой точное решение уравнения (1).

Устремим теперь в выражениях (2)—(4) m к бесконечности. Если ряды (2) окажутся сходящимися, то система уравнений (1) сведется к «интегрируемой» системе

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathcal{P}(\xi, \varepsilon), \tag{5}$$

где

$$\mathcal{P}(\xi, \varepsilon) = \lim_{m \to \infty} (\mathcal{P}^{(1)}(\xi) + \varepsilon\, \mathcal{P}^{(2)}(\xi) + \ldots \varepsilon^m\, \mathcal{P}^{(m)}(\xi)).$$

Однако в общем случае такое развитие метода оказалось невозможным: уже для систем с квазипериодическими по t функциями $X(t, x, \varepsilon)$ в формулах (2) появляются малые делители, и ряды (2) расходятся. В связи с этим идея сведения к «интегрируемой» системе (5) оставалась недоступной, и метод не позволял делать заключения о поведении решений системы (1).

Ряды же (2) можно было рассматривать, при m конечном и ε малом, как асимптотические приближенные решения.

В 1963 г. в связи с появлением работ А.Н.Колмогорова [6—8] и В.И.Арнольда [1—3] Николаем Николаевичем Боголюбовым [4] был разработан новый вариант метода последовательных замен переменных, и идея сведения системы (1) к «интегрируемому» виду (5) нашла свое реальное воплощение не только при доказательстве ряда интересных и важных теорем самим Н.Н.Боголюбовым, но и в работах различных авторов.

Приведем основное содержание идеи указанных работ А.Н.Колмогорова и В.И.Арнольда применительно к консервативной динамической системе, определяемой каноническими уравнениями

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q_1, \dots, q_n), \tag{6}$$

с аналитической функцией Гамильтона $H(p, q, \varepsilon)$, периодической по q с периодом 2π.

Предположим, что гамильтониан $H(p, q, \varepsilon)$ имеет следующий вид:

$$H(p, q, \varepsilon) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p,q) + \varepsilon^2 \dots \tag{7}$$

т.е. система (6) отличается от интегрируемой малым возмущением.

Подставляя значение $H(p, q, \varepsilon)$ (7) в уравнения (6), получаем систему

$$\begin{gathered} \frac{dp}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial q} + \dots \\ \frac{dq}{dt} = \omega(p) + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p} + \dots \\ \left(\omega(p) = \frac{\partial H_0}{\partial p}\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Произведем теперь в системе уравнений (8) каноническое преобразование согласно формулам

$$\begin{gathered} p = p' + \varepsilon \frac{\partial S(p', q)}{\partial q} \\ q' = q + \varepsilon \frac{\partial S(p', q)}{\partial p'}, \end{gathered} \tag{9}$$

приводящее $H(p, q, \varepsilon)$ к следующему виду:

$$H(p, q, \varepsilon) = H_0'(p', \varepsilon) + \varepsilon^2 H_1'(p', q') + \dots, \tag{10}$$

а уравнения (8) к виду

$$\frac{dp'}{dt} = -\varepsilon^2 \frac{\partial H_1'}{\partial q'} + \dots$$
$$\frac{dq'}{dt} = \omega'(p') + \varepsilon^2 \frac{\partial H_1'}{\partial p'} + \dots \qquad (11)$$

Совершив в системе уравнений (11) преобразование того же типа, что и замена (9), получаем уравнения

$$\frac{dp'}{dt} = -\varepsilon^4 \frac{\partial H_1''}{\partial q''} + \dots$$
$$\frac{dq''}{dt} = \omega''(p'') + \varepsilon^4 \frac{\partial H_1''}{\partial p''} + \dots \qquad (12)$$

и т.д., при этом порядки малости «неинтегрируемых» добавок в получаемых уравнениях будут, соответственно, пропорциональны ε^2, ε^4, $\varepsilon^8, \dots \varepsilon^{2^s}, \dots$.

В то время как в аппроксимационном процессе, осуществляемом с помощью формул (2), для повышения точности мы правые части дополняем членами высшего порядка, в приведенном, согласно А.Н.Колмогорову и В.И.Арнольду, процессе присутствует новый элемент исследования, заключающийся в том, что мы совершаем повторное применение такого же преобразования. Возникающая при этом «ускоренная сходимость» процесса подавляет влияние малых знаменателей, появляющихся в формулах замены переменных (9), и для «большинства» начальных значений p суперпозиция таких замен сходится.

При решении ряда задач нелинейной механики можно установить для соответствующих дифференциальных уравнений существование интегральных (инвариантных) многообразий, обладающих свойством асимптотического притяжения близких траекторий.

Например, пусть динамическая система характеризуется уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \varepsilon), \qquad (13)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ — векторы n-мерного евклидова пространства, ε — малый положительный параметр.

При определенных условиях для системы уравнений (13) можно установить существование инвариантного тороидального многообразия

$$x = \Phi(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m). \qquad (14)$$

В этом случае исходная система (13) сводится к уравнению на торе

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu + f(\varphi, \varepsilon), \tag{15}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$; $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — периодическая функция φ, которая может быть достаточно малой (благодаря наличию ε в правой части уравнения (13)), т.е. изменение φ близко к равномерному вращению с постоянной угловой скоростью ν.

При определенных условиях многообразие (14) обладает свойством асимптотического притяжения траекторий любых решений уравнений (13), не лежащих на торе (14).

Представляет интерес не только нахождение интегрального многообразия (14), но и исследование поведения интегральных кривых, лежащих на этом многообразии.

Исследования Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова в 1934 г., посвященные этому вопросу и опирающиеся на метод последовательных замен с помощью преобразований (2), проводились с помощью результатов Пуанкаре — Данжуа о преобразовании окружности самой на себя.

Однако их теория относится к одномерному случаю, когда исходная система дифференциальных уравнений (13) сводится к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \nu + f(\varphi, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{16}$$

Согласно теории Пуанкаре — Данжуа поведение решений на двумерном торе (16) характеризуется числом вращения Ω: 1) если Ω — иррациональное, то решения на торе квазипериодические; 2) если Ω — рациональное, то имеются периодические решения и все остальные решения с течением времени приближаются к ним.

Если исходная система дифференциальных уравнений (13) приводится к виду (16), то, как было показано Н.М.Крыловым и Н.Н.Боголюбовым в 1934 г. [10], удается доказать существование квазипериодического решения с двумя основными частотами ω_1, ω_2 и установить его устойчивость.

Общий же случай в рамках указанной теории Пуанкаре — Данжуа в то время не удалось изучить.

В 1963 г. Н.Н.Боголюбову удалось, объединяя метод ускоренной сходимости с развитым им методом интегральных многообразий, учитывая при этом ряд специфических особенностей, свойственных нелинейным колебательным системам, значительно расширить области применимости метода последовательных замен и решить задачу о существовании квазипериодических решений для общего случая $n > 2$.

Перейдем к формулировке основной задачи, рассмотренной Н.Н.Боголюбовым [4].

Обычно при исследовании системы уравнений (13) вместо переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ удобно вводить новые переменные h, φ таким образом, чтобы исходные уравнения (13) сводились к системе вида

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \varphi) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \nu + f(h, \varphi), \end{aligned} \tag{17}$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_0})$ (сумма размерностей векторов h и φ $n + n_0$ равна размерности вектора x и обозначена $n + n_0$ ради удобства), при этом полагаем, что вещественные части собственных значений $(n \times n)$-мерной матрицы H все отрицательны:

$$|e^{Ht}| \leq \mathcal{P} e^{-\alpha t}, \; t \geq 0, \tag{18}$$

где $\mathcal{P} > 0$, $\alpha > 0$ — постоянные; вектор-функции $F(h, \varphi)$ и $f(h, \varphi)$ малы при достаточно малых h и регулярны.

Заметим, что даже если функции, стоящие в правых частях системы уравнений (17), аналитические и сколь угодно малые, непосредственно нельзя доказать существование аналитического тора в комплексной области для этих уравнений. Это становится очевидным при рассмотрении простого примера.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\alpha\, h + f(\varphi) = -\alpha\, h + \sum_{(k)} \rho^{(k)} e^{i(k,\varphi)} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \nu + \varepsilon\gamma \quad (h = h_1,\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)). \end{aligned} \tag{19}$$

Для системы (19) легко найдем инвариантное многообразие

$$h = S(\varphi), \tag{20}$$

где

$$S(\varphi) = \sum_{(k)} \frac{e^{i(k,\varphi)}}{ik(\nu + \varepsilon\,\gamma) + \alpha} \quad (k = (k_1, k_2)), \tag{21}$$

очевидно, что при вещественных ε и γ тор (21) всегда существует. Если же ε или γ комплексные, то ими всегда можно распорядиться так, чтобы

$$k(\nu + \operatorname{Re}\varepsilon\gamma) = 0 \ \text{и} \ k(\operatorname{Im}\varepsilon\gamma) + \alpha = 0.$$

В этом случае для функции $S(\varphi)$ мы можем получить множество полюсов при сколь угодно малых ε, и, следовательно, непосредственно нельзя установить существование инвариантного тора, аналитического как по углу φ, так и по параметру ε в окрестности значения $\varepsilon = 0$.

Заметим также, что, так как при построении замены (2) в знаменатели входят суммы типа $(m\omega)$, мы не можем раскладывать ω по степеням малого параметра, и поэтому целесообразно выражать входящие в уравнения (17) «частоты нулевого приближения» ν через точные частоты ω, и не по ν и f находить ω, а считать, что ω заданы, и определять $\Delta = \nu - \omega$ как функцию ω.

Подставляя в уравнения (17) $\nu = \omega + \Delta$, получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \varphi, \Delta) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta). \end{aligned} \tag{22}$$

Предположим теперь, что для системы уравнений (22) выполняются следующие условия: $F(h, \varphi, \Delta)$, $f(h, \varphi, \Delta)$ — аналитические функции комплексных переменных h, φ, Δ в области

$$\| h \| \le \eta_1, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \le \rho, \quad |\Delta| \le \sigma_1, \tag{23}$$

достаточно малые при достаточно малых h, $\operatorname{Im}\varphi$, Δ, и в области (23) они удовлетворяют условиям

$$\| F(h, \varphi, \Delta) \| \le N, \quad n \left\| \frac{\partial F(h, \varphi, \Delta)}{\partial h_q} \right\| \le L,$$

$$|f(h,\varphi,\Delta)| \le M, \tag{24}$$

где константы N, L, M, η, ρ_1, σ_1 связаны рядом соотношений, которые здесь не выписываем и которые получаются в процессе сложного доказательства теоремы.

Кроме того, введена норма

$$\| h \| = \sup_{\substack{k=1,\dots,n \\ 0 \le t < \infty}} |e^{Ht}| \, e^{\alpha t}, \tag{25}$$

где H — квадратная n-мерная матрица в уравнении (22), удовлетворяющая условию

$$|e^{Ht}| \le \mathcal{P} e^{-\alpha t} \ \text{для} \ t \ge 0, \ \alpha > 0, \ \mathcal{P} = \text{const} \ge 1. \tag{26}$$

Пусть, кроме того, вещественные $\omega = (\omega_1, \omega_2,...,\omega_{n_0})$ удовлетворяют условию

$$|(m, \omega)| \geq k|m|^{-(n_0+1)}, \tag{27}$$

где n_0 — размерность пространства ω, $|m| = |m_1| + |m_2| + ...$ $... + |m_{n_0}|$, $m_1, m_2,..., m_{n_0}$ — любые целые (положительные и отрицательные) числа.

Условие (27) необходимо в связи с тем, что при построении замен переменных у нас будут появляться знаменатели типа (m, ω).

Однако известно, что если рассматривать сферу в пространстве $\omega = (\omega_1, \omega_2,..., \omega_{n_0})$, то относительная мера множества тех ω, для которых условие (27) не выполняется, будет стремиться к нулю вместе с k. Таким образом, при достаточно малых k «большинство» ω удовлетворяет неравенству (27).

Итак, Н.Н.Боголюбов, объединяя метод ускоренной сходимости с методом интегральных многообразий, после тонких рассуждений, учитывающих особенности нелинейных систем, доказал следующую основную теорему.

Теорема (теорема Н.Н.Боголюбова). Если в системе уравнений (22) функции $F(h, \varphi, \Delta), f(h, \varphi, \Delta)$ удовлетворяют всем указанным выше условиям, то эти уравнения при соответствующем выборе $\Delta = D^{(\infty)}$ имеют квазипериодическое решение с частотами $\omega = (\omega_1, \omega_2,..., \omega_{n_0})$ вида

$$\begin{aligned} h_t &= S^{(\infty)}(\omega t + \vartheta_0) \\ \varphi_t &= \omega t + \vartheta_0 + \Phi^{(\infty)}(S^{(\infty)}(\omega t + \vartheta), \omega t + \vartheta_0, 0). \end{aligned} \tag{28}$$

Если h_t, φ_t — любые решения системы (22), начальные значения которых h_0, φ_0 удовлетворяют условию

$$\| h_0 \| \leq \frac{\eta_1}{2}, \quad |\mathrm{Im}\varphi_0| \leq \frac{\rho_1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right),$$

то h_t, φ_t будут асимптотически приближаться к этому квазипериодическому решению. Если в дополнение к указанным условиям функции $F(h, \varphi, \Delta)$, $f(h, \varphi, \Delta)$ являются аналитическими функциями параметра ε из области $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, то $D^{(\infty)}$, $\Phi^{(\infty)}$ и $S^{(\infty)}$ будут также аналитическими функциями ε в области $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

На подробном доказательстве этой теоремы мы не будем останавливаться, заметим только, что в процессе доказательства существенным является построение преобразований

$$\begin{aligned} \varphi &= \vartheta + \Phi^{(\infty)}(h, \vartheta, 0), \\ \Delta &= D^{(\infty)}, \end{aligned} \tag{29}$$

с помощью которых система уравнений (22) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \vartheta, \Delta) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{30}$$

Для системы уравнений (30), согласно обычным приемам, определяется интегральное многообразие $h = S^{(\infty)}(\omega t + \vartheta_0)$.

Для построения преобразования (29) используется быстро сходящийся итерационный процесс преобразования, заключающийся в том, что в системе вводится замена переменных

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^{(1)} + u^{(1)}(h, \varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}), \\ \Delta &= \Delta(\Delta^{(1)}), \end{aligned} \tag{31}$$

в результате которой относительно h, $\varphi^{(1)}$ мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F_1(h, \varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}) \\ \frac{d\varphi^{(1)}}{dt} &= \omega + \Delta^{(1)} + f_1(h, \varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}). \end{aligned} \tag{32}$$

Применив к системе (32) преобразование

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \varphi^{(2)} + u^{(2)}(h, \varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}), \\ \Delta^{(1)} &= \Delta^{(1)}(\Delta^{(2)}), \end{aligned} \tag{33}$$

приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F_2(h, \varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}) \\ \frac{d\varphi^{(2)}}{dt} &= \omega + \Delta^{(2)} + f_2(h, \varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}). \end{aligned} \tag{34}$$

На s-м шаге описанного процесса совершаем преобразование

$$\begin{aligned} \varphi^{(s+1)} &= \varphi^{(s)} + u^{(s)}(h, \varphi^{(s)}, \Delta^{(s)}), \\ \Delta^{(s-1)} &= \Delta^{(s-1)}(\Delta^{(s)}) \end{aligned} \tag{35}$$

и приходим к уравнениям

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F_s(h, \varphi^{(s)}, \Delta^{(s)}),$$
$$\frac{d\varphi^{(s)}}{dt} = \omega + \Delta^{(s)} + f_s(h, \varphi^{(s)}, \Delta^{(s)}). \tag{36}$$

Проведя цепочку преобразований (31), (33),... (35),... Н.Н.Боголюбов сделал скрупулезные выкладки и оценки, обеспечивающие на каждом шаге аналитичность замен и в итоге — ускоренную сходимость всего процесса пропорционально $\varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^8, \dots \varepsilon^{2^s} \dots$

В дальнейшем, с помощью предложенного Н.Н.Боголюбовым метода последовательных замен, обеспечивающих ускоренную сходимость, было построено общее решение нелинейного дифференциального уравнения в окрестности квазипериодического решения.

Рассматривая, для упрощения выкладок, случай, когда в системе (30) n-мерная квадратная матрица H вырождается в вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ и предполагая, что все β имеют отрицательные действительные части, мы приходим к рассмотрению системы

$$\frac{dh}{dt} = \beta h + F(h, \varphi)$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \tag{37}$$

Для построения решений системы (37) применим метод последовательных замен, при этом в (37) будут изменяться β, в пределе стремясь к определенным значениям, которые обозначим $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, — «истинным» коэффициентам линейной системы дифференциальных уравнений, которую получим после преобразования системы (37). Поэтому, как и в случае с частотами ω, целесообразно находить не α по β и F, а, считая его заданным, определять некоторые поправки $\xi = \beta - \alpha$ ($\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$) как функции α:

$$\xi = \xi(\alpha). \tag{38}$$

Итак, введем в системе (37) поправки ξ, после чего она примет вид

$$\frac{dh}{dt} = (\alpha + \xi)h + F(h, \varphi, \xi)$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{39}$$

где $F(h, \varphi, \xi)$ — аналитическая функция комплексных аргументов h, φ, ξ, в области

$$|h| \le \eta, \quad |\mathrm{Im}\varphi| \le \rho, \quad |\xi| \le \sigma. \tag{40}$$

Задача заключается в том, чтобы найти такое аналитическое по g и φ преобразование

$$h = g + \vartheta^{(\infty)}(g, \varphi) \tag{41}$$

и такое $\xi = \xi^{(\infty)}$, при которых система (39) свелась бы к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \alpha g \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{42}$$

Тогда, интегрируя систему (42), получим общее решение системы (39) в виде

$$\begin{aligned} h &= C\, e^{\alpha t} + \vartheta^{(\infty)}\,(C\, e^{\alpha t}, \omega t + \vartheta_0) \\ \varphi &= \omega t + \vartheta_0, \end{aligned} \tag{43}$$

содержащее $n = n_0$ произвольных постоянных $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $\vartheta_0 = (\vartheta_{01}, \vartheta_{02}, \ldots, \vartheta_{0n_0})$.

Объединяя это решение с квазипериодическим (28), получим общее решение системы (27) в окрестности квазипериодического решения (28)*.

В результате может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема [11]. Пусть для системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= (\alpha = \xi)h + F(h, \varphi, \Delta, \xi) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta, \xi) \end{aligned} \tag{44}$$

выполняются все необходимые условия (см., например, [11]).

Тогда при соответствующем выборе $\Delta = D^{(\infty)}(0)$ и $\xi = \xi^{(\infty)}(0)$ заменой переменных

$$\begin{aligned} h &= g + \vartheta^{(\infty)}(g, \vartheta, 0) \\ \varphi &= \vartheta + \Phi^{(\infty)}(g + \vartheta^{(\infty)}(g, \vartheta, 0), \vartheta, 0) \end{aligned} \tag{45}$$

---

*Заметим, что на возможность решения подобной задачи указывалось в статье А.Н.Колмогорова [7], и некоторые близкие к изложенным результаты были получены Э.Г.Белагой (см. ссылки в [5]).

система (44) сводится к линейной системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{dg}{dt} = \alpha g \qquad (46)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega,$$

после интегрирования которой общее решение исходной системы (44) будет иметь вид

$$\begin{aligned} h_t &= C\,e^{\alpha t} + \vartheta^{(\infty)}(C\,e^{\alpha t}, \omega t + \vartheta_0, 0) \\ \varphi_t &= \omega t + \vartheta_0 + \Phi^{(\infty)}(C\,e^{\alpha t} + \vartheta^{(\infty)}(C\,e^{\alpha t}, \omega t + \vartheta_0, 0), \omega t + \vartheta_0, 0), \end{aligned} \qquad (47)$$

где $n+n_0$ произвольных постоянных C, ϑ_0 принадлежат области

$$|C| \le \frac{\eta}{2}, \quad |\mathrm{Im}\,\vartheta_0| \le \frac{\rho}{2}. \qquad (48)$$

С течением времени решение (47) приближается к стационарному квазипериодическому решению

$$\begin{aligned} h(\omega t) &= \vartheta^{(\infty)}(0, \omega t + \vartheta_0, 0) \\ \varphi(\omega t) &= \omega t + \vartheta_0 + \Phi^{(\infty)}(\vartheta^{(\infty)}(0, \omega t + \vartheta_0, 0), \omega t + \vartheta_0, 0), \end{aligned} \qquad (49)$$

где $|\mathrm{Im}\vartheta_0| \le \frac{\rho}{2}(1 - \frac{1}{2}n)$, по закону

$$\begin{aligned} |h_t - h(\omega t)| &\le \frac{3}{2}|C|\,e^{-\bar{\alpha} t} \\ |\varphi_t - \varphi(\omega t)| &\le \frac{3}{2}\,C_1(r_0)|C|\,e^{-\bar{\alpha} t}. \end{aligned} \qquad (50)$$

Доказанная теорема о приводимости системы уравнений (44), а следовательно, и системы (1) к уравнениям с постоянными коэффициентами (46) и о построении общего решения в окрестности устойчивого стационарного квазипериодического решения (49) дает возможность исследовать поведение решений в окрестности квазипериодического решения и открывает перспективы дальнейшего исследования различных видов уравнений, содержащих малый параметр.

Как известно, системы линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами занимают важное место в теории дифференциальных уравнений. В связи с этим остановимся на некоторых результатах, связанных с рассмотрением системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + \mathcal{P}(\varphi)x \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{51}$$

где A — постоянная, $\mathcal{P}(\varphi)$ — периодические по $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_m)$ с периодом 2π $(n\times n)$-мерные действительные при действительных φ матрицы; $\omega = (\omega_1, \omega_2,..., \omega_m)$ — частоты матрицы $\mathcal{P}(\omega t)$; $x = (x_1, x_2,..., x_n)$ — n-мерный вектор; t — время.

Для системы уравнений (51) постараемся найти замену переменных

$$x = \Phi(\varphi)y \tag{52}$$

с невырожденной периодической и действительной при действительных φ матрицей $\Phi(\varphi)$, приводящей систему (51) к системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{53}$$

где A_0 — постоянная $(n\text{x}n)$-мерная действительная матрица.

Этот вопрос рассматривался многими авторами (см. ссылки в [5]). Для случая линейной системы с периодическими коэффициентами, т.е. системы (51) при $m=1$, широко известны результаты Флоке — Ляпунова, доказывающие существование замены (52). Вопрос же о приводимости системы с квазипериодическими коэффициентами до сих пор представляет собой проблему, полностью не решенную.

Приведем сейчас некоторые результаты, посвященные отысканию решений системы (51) для случая, когда вектор-функция $\mathcal{P}(\varphi)$ малая, путем построения приводящей матрицы $\Phi(\varphi)$ с помощью метода Н.Н.Боголюбова последовательных замен, обеспечивающих ускоренную сходимость. С помощью этого метода приводимость системы уравнений (51) к системе с постоянными коэффициентами (53) осуществляется приводящей матрицей $\Phi(\varphi)$, выражающейся быстро сходящимися рядами. Итак, справедлива следующая теорема (доказательство см. в [5,12]).

Теорема. Пусть правая часть системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + \quad (\varphi)x \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega \end{aligned} \tag{54}$$

удовлетворяет следующим условиям.

1. Матрица $\mathcal{P}(\varphi)$ периодична по $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_m)$ с периодом 2π, аналитична в области

$$|\mathrm{Im}\,\varphi| = \sup_{\alpha}|\mathrm{Im}\,\varphi_\alpha| \le \rho_0 \quad (\rho_0 > 0), \tag{55}$$

и действительна при действительных φ.

2. При некоторых положительных ε и d выполняется неравенство

$$|(k, \omega)| \ge \varepsilon |k|^{-d} \quad (|k| \ne 0) \tag{56}$$

для всех целочисленных векторов $k = (k_1, k_2,..., k_m)$.

3. Собственные числа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)$ матрицы A имеют различные вещественные части.

Тогда можно указать такую достаточно малую положительную постоянную $\mathfrak{M}_0$, что при

$$|\mathcal{P}(\varphi)| = \sum_{i,j=1}^{n} |\mathcal{P}_{ij}(\varphi)| \le \mathfrak{M}_0 \tag{57}$$

система уравнений (54) с помощью невырожденной замены переменных

$$x = \Phi(\varphi)y \tag{58}$$

с периодической по φ периода 2π, аналитической и аналитически обратимой в области

$$|\mathrm{Im}\,\varphi| \le \frac{\rho_0}{2} \tag{59}$$

и действительной при $\mathrm{Im}\,\varphi = 0$ матрицей $\Phi(\varphi)$ приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= A_0 y \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{60}$$

где A_0 — постоянная матрица.

Согласно этой теореме фундаментальная матрица решений системы (54) имеет вид

$$X = \Phi(\omega t + \varphi_0)\, e^{A_0 t}, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \tag{61}$$

где $\Phi(\omega t + \varphi_0)$ — невырожденная квазипериодическая по t и действительная при действительных φ_0 матрица с частотным базисом $\omega = (\omega_1, \omega_2,..., \omega_m)$.

Учитывая известную формулу Лагранжа, дающую представление аналитической функции от матрицы $f(A)$ в виде полинома от A, и то обстоятельство, что в силу малости матрицы $\mathcal{P}(\varphi)$ собственные числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0$ матрицы A_0 близки к собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A, т.е. также имеют различные вещественные части, фундаментальную матрицу (61) можно представить в виде

$$X' = \Phi(\omega t + \varphi_0) \sum_{k_0=1}^{n} \frac{(A_0 - \lambda_1^0)\ldots(A_0 - \lambda_{k_0-1}^0)\,(A_0 - \lambda_{k_0+1}^0)\ldots(A_0 - \lambda_n^0)}{(\lambda_{k_0}^0 - \lambda_1^0)\ldots(\lambda_{k_0}^0 - \lambda_{k_0-1}^0)(\lambda_{k_0}^0 - \lambda_{k_0+1}^0)\ldots(\lambda_{k_0}^0 - \lambda_n^0)} e^{\lambda_{k_0}^0 t}. \tag{62}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В.И.** — Изв.АН СССР, сер.матем., 1961, т.25, вып.1, с.21,
2. **Арнольд В.И.** — УМН, 1963, т.18, вып.5, с.13.
3. **Арнольд В.И.** — УМН, 1963, т.18, вып.6, с.91.
4. **Боголюбов Н.Н.** — Тр. Первой летней матем. школы, Киев: «Наукова думка», 1964, т.1, с.1.
5. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.** — Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: «Наукова думка», 1969.
6. **Колмогоров А.Н.** — ДАН СССР, 1953, т.93, вып.5, с.763.
7. **Колмогоров А.Н.** — ДАН СССР, 1954, т.98, вып.4, с.527.
8. **Колмогоров А.Н.** — Общая теория динамических систем и классическая механика. Междунар.матем.конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз, 1961, с.187.
9. **Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.** — Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
10. **Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.** — Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев: Вид-во ВУАН, 1934.
11. **Митропольский Ю.А.** — Укр.мат.журн., 1964, т.16, вып.4, с.475.
12. **Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.** — В кн.: Математическая физика. Киев: «Наукова думка», 1967, с.125.