«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1993, ТОМ 24, ВЫП.5

УДК 539.21

ТЕОРЕМА О СТАТИСТИКЕ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

А.Б.Говорков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В общем виде проведено исследование возможных квантовых статистик тождественных частиц и определены ограничения, налагаемые на соответствующие им схемы квантования (свободных) полей на основе общих требований теории. Показана невозможность «небольшого» нарушения обычных статистик, но возможность их обобщения на параферми- и парабозе-статистики конечных порядков. Показано также, что в предельном случае бесконечной статистики само наличие античастиц запрещает небольшое нарушение обычных статистик. Установлено, что единственными возможными обобщениями являются: 1) известная схема параквантования Грина, 2) новая зарядово-асимметричная схема. Для последней предел парастатистики бесконечного порядка приводит к нелокальной теории, описывающей классическую статистику Максвелла — Больцмана.

The general investigation of possible quantum statistics of identical particles is performed on the general suppositions of the theory («the indistinguishability» and «the elementarity»), and the restrictions on the corresponding quantization schemes are established. The possibility of the generalizations of usual (fermi-, bose-) statistics in the form of parafermi- and parabose-statistics is shown. Simultaneously the impossibility of small violations of them is proved. The existence of antiparticles forbids such violations even within the infinite statistics. It was found that the only possible generalized schemes are 1) the well-known Green paraquantization, 2) the new charge-asymmetric scheme. For the latter, the limiting case of the infinite statistics corresponds to the classical Maxwell-Boltzmann statistics.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наш опыт учит нас тому, что все частицы, которые мы на том или ином этапе наших знаний считаем элементарными, подчиняются либо бозе-, либо ферми-статистике. Мы предполагаем, часто без особых оснований, что эта «*теорема о бозе-, ферми-статистиках*» применима не только к частицам, непосредственно наблюдаемым в наших лабораториях (электронам, фотонам, нуклонам, мезонам и т.д.), но и к воображаемым объектам, таким как кварки и глюоны, которые, по-видимому, в принципе не могут наблюдаться в свободном состоянии вне адронов.

Мы ожидаем, что причина этого общего закона природы кроется в глубоких свойствах самой материи — ее тождественности и повторяемости. Но сразу же возникают два вопроса: во-первых, насколько точно мы можем сформулировать понятие тождественности частиц с физически приемлемой точки зрения и, во-вторых, даже если это нам удастся, то сможем ли мы вывести вышеуказанную «*бозе-ферми-теорему*» в виде следствия такого определения и других общих положений квантовой теории? Какие обобщения обычных статистик окажутся при этом допустимыми и какой смысл можно придать таким обобщениям? Возможно ли, например, небольшое нарушение обычных статистик, скажем, за пределами современных экспериментальных проверок (о проверке принципа Паули для электронов и протонов см. [1]), не противоречащее более общим предположениям, лежащим в основе современной квантовой теории поля? Попыткам дать ответ на эти вопросы и посвящен настоящий обзор.

Первая часть обзора, состоящая из разд.2—11, будет посвящена определению тождественности частиц и его следствиям в рамках нерелятивистской теории. Мы построим наше рассмотрение не на определении тех или иных свойств симметрии волновых функций тождественных частиц, а на естественном свойстве *симметрии матрицы плотности* для них.

Н.Н.Боголюбов [2], рассматривая общие свойства матрицы плотности для ферми- и бозе-статистик, отметил это общее для них свойство и назвал его «*классической симметрией*», подчеркнув тем самым его соответствие симметрии классической функции распределения для *одинаковых*, но различимых классических частиц. В отличие от этого специфические свойства симметрии волновых функций фермионов и бозонов он предложил называть «*квантовыми симметриями*».

Нам представляется наиболее последовательным принять инвариантность матрицы плотности относительно перестановок всех переменных *тождественных частиц* в качестве исходного определения их неразличимости и рассмотреть все вытекающие из него следствия. Именно такое определение неразличимости тождественных частиц было принято в [3] (см. также [4]), где были исследованы также допускаемые этим определением обобщения статистик тождественных частиц. В разд.2 мы более подробно выясним смысл такого определения.

Хорошо известно, что описанию систем тождественных частиц наиболее соответствует метод вторичного квантования, содержащий в перестановочных свойствах операторов рождения и уничтожения частиц всю информацию о перестановочных свойствах их волновых функций. Однако, поскольку в общем случае последние заранее не известны, то ограничения на перестановочные свойства операторов налагаются лишь на основе указанного общего свойства симметрии матрицы плотности и имеют поэтому самый общий характер. По этой причине вторичному квантованию следует подвергать саму матрицу плотности. Этот метод развивался в [3,5], и он будет кратко повторен в разд.2. Отметим, что метод непосредственного квантования матрицы плотности широко использовался Н.Н.Боголюбовым [2] применительно к бозе- и ферми-статистикам.

Однако такая общая формулировка тождественности еще не определяет более конкретные соотношения для операторов рождения и уничтожения частиц, которые выражали бы собой особые свойства *квантовых* статистик. Для получения таких соотношений нам приходится привлекать дополнительные ограничения, основанные на вводимом нами понятии «*элементарности*» тождественных частиц. Формулировке и обсуждению этого понятия посвящен разд.3, где мы кратко коснемся также вопроса о статистике составных частиц.

В результате совмещения сделанных нами выводов из наших определений тождественности и элементарности частиц мы приходим к формулировке все еще достаточно общих *трилинейных коммутационных соотношений* для операторов рождения и уничтожения частиц. Далее нам остается выяснить свойства симметрии волновых функций тождественных частиц, следующие из таких соотношений.

В разд.5 мы построим фоковское представление полученных соотношений и в разд.6 сформулируем в виде двух теорем основной результат, заключающийся в том, что *условие положительной определенности* норм векторов состояний частиц в фоковском пространстве налагает очень жесткие ограничения на возможные обобщения статистик. Доказывается, что этому условию не противоречат лишь обобщения в виде так называемых парастатистик конечных порядков и парастатистики бесконечного порядка. *Парабозе-* и *параферми-*статистики конечного порядка допускают помещение определенного количества частиц в *антисимметричное* и *симметричное* состояния соответственно, не превышающие некоторое заданное число, называемое *порядком* парастатистики. Очевидно, обычные бозе- и ферми-статистики подпадают под это определение, если считать для них порядок равным единице (т.е. они *не* допускают помещение двух и более частиц в антисимметричное состояние для бозонов и в симметричное состояние для фермионов). *Бесконечная статистика* не налагает никаких ограничений на количество частиц ни в симметричных, ни в антисимметричных состояниях. Оказывается, однако, что парастатистикам конечных порядков отвечает не одна, а две схемы вторичного квантования, основанные на *различных* трилинейных соотношениях. Одна из них является хорошо известной схемой Грина [6], достаточно подробно исследованной в литературе [7—9]. Другая была обнаружена совсем недавно [10,11]. Краткое исследование особенностей этих схем будет произведено в разд.7 и 8. Невозможность формулировки каких-либо промежуточных схем между указанными двумя схемами приводит к невозможности формулировки *небольшого* нарушения обычных статистик в рамках парастатистик конечных порядков, предполагавшегося Игнатьевым и Кузьминым [12] и Гринбергом и Мохапатрой [13]. Заметим, что ранее опубликованное доказательство [14,15] невозможности такого нарушения было произведено в рамках простейшего частного случая параферми-статистики второго порядка. В настоящем обзоре впервые дано общее доказательство как для параферми-, так и для парабозе-статистики произвольного конечного порядка. Отметим также, что для доказательства этой теоремы наличия античастиц еще не требуется.

Бесконечные статистики мы рассмотрим в разд.9 как предел парастатистик при стремлении их порядков к бесконечности. Однако поскольку в таком пределе доказанные ранее теоремы теряют свою силу, бесконечные статистики следует рассматривать как предельные для исходных трилинейных соотношений. В пределе бесконечного порядка исходные трилинейные соотношения оказываются эквивалентными так называемым «q-деформированным» билинейным соотношениям, переходящим в случаях $q = \pm 1$ в обычные коммутационные или антикоммутационные соотношения. Возникает континуум возможных бесконечных статистик, соответствующих непрерывному изменению параметра q в допустимых пределах $-1 \leq q \leq 1$, и все они не противоречат положительной определенности норм векторов в соответствующем фоковском пространстве. На основе этого факта Гринберг [16] предложил вернуться к обсуждению обычных статистик, но уже в рамках бесконечных статистик.

Для того чтобы разобраться в физическом смысле парастатистик как конечного, так и бесконечного порядков, в разд.10 рассматривается интерпретация парастатистик как обычных статистик при наличии вырождения по некоторой дополнительной внутренней степени свободы, число состояний которой совпадает с порядком парастатистики. С этой внутренней степенью свободы оказывается связанной *унитарная* симметрия. Значения операторов Казимира этой симметрии являются наблюдаемыми и полностью характеризуют состояния парачастиц, представляя собой некоторые «*обобщенные неабелевы заряды*». На основе такой интерпретации уже в рамках нерелятивистской теории удается сформулировать понятие *сопряженных* обобщенных зарядов и соответствующих им «*античастиц*», чему посвящен разд.11. Однако оказывается, что в случае бесконечной статистики сопряженный сектор и соответствующие ему античастицы ввести невозможно. Этим завершается обсуждение нерелятивистской формулировки схем квантования тождественных частиц. Во второй части обзора, состоящей из разд.12—15, мы рассмотрим обобщенное квантование полей, соответствующее изложенному ранее вторичному квантованию парастатистик. При этом мы сделаем предположение о том, что частицы и ранее определенные античастицы должны входить в *одно и то же* свободное поле, локально зависящее от координат и времени. Для такого поля в разд.12 постулируются общие перестановочные трилинейные соотношения, согласованные с ранее определенными соотношениями для частиц. Мы убеждаемся в том, что теория поля, основанная на таких общих перестановочных соотношениях, будет *локальной* (наблюдаемые коммутируют, будучи разделены пространственноподобными интервалами) и *канонически самосогласованной* (гамильтониан, соответствующий уравнению движения данного поля, является в то же время генератором временных сдвигов, входящим в уравнение Гейзенберга). Однако теория в общем случае оказывается неинвариантной относительно зарядового сопряжения (C-сопряжения), за исключением гриновского паракнвантования. В то же время она все еще остается CPT-инвариантной.

В разд.13 мы получим коммутационные соотношения для частиц и античастиц, а в разд.14 построим их совместное фоковское представление. Для случая конечных парастатистик наши теоремы об ограниченном выборе схем обобщенного квантования полей остаются справедливыми. Более того, удается доказать совпадение парастатистик для частиц и античастиц, описываемых одним и тем же полем, и установить на этой основе обобщенную теорему Паули о правильной связи спина с *парастатистикой*.

Наконец, в разд.15 мы возвращаемся к вопросу о существовании бесконечных статистик, но теперь уже в рамках теории поля. Мы вновь рассматриваем такую статистику как предельный случай парастатистик при стремлении их порядков к бесконечности и приходим к замене трилинейных соотношений q-деформированными билинейными соотношениями. Теперь, однако, оказывается, что само *наличие античастиц* налагает жесткие ограничения на возможные значения параметра деформации q, ограничивая их теми же тремя величинами: ± 1 и 0. Таким образом, и в случае бесконечной статистики такое ограничение запрещает небольшое нарушение обычных статистик, но теперь для такого запрещения требуется наличие античастиц, входящих на равной основе с частицами в одно и то же поле. Отметим, что получающиеся в пределе парастатистик бесконечного порядка билинейные соотношения становятся нелокальными. Заметим также, что в работах [17,18] этот же результат был получен на основе исходного предположения о том, что поле с самого начала удовлетворяет q-деформированным *билинейным* соотношениям. В принципе, как это и предлагал Гринберг [16], единое поле, объединяющее частицы и античастицы, может не подчиняться никаким коммутационным соотношениям, и в этом случае небольшое нарушение обычных статистик становится возможным (все еще при сохранении CPT-инвариантности). Однако такое объединение частиц и античастиц в единое поле представляется весьма искусственным.

Допустимые значения $q = \pm 1$, очевидно, соответствуют обычному способу квантования, описывающему фермионы и бозоны. Наибольший интерес представляет случай $q = 0$. Он соответствует соотношениям, непосредственно предложенным Гринбергом [19] для описания бесконечной статистики. Как мы видим, при включении в рассмотрение античастиц этот случай оказывается и единственно пригодным для такого описания. Как же ведут себя в этом случае античастицы? Оказывается, что они могут существовать только *в паре* с частицами, а сами такие пары *коммутируют* с операторами частиц и ведут себя как независимые бозоны. Теория при этом нелокальна. В этом случае сама бесконечная статистика оказывается эквивалентной классической статистике Максвелла — Больцмана. Физический смысл такого совпадения заключается в интерпретации парастатистик как обычных статистик с вырождением по унитарной внутренней степени свободы при стремлении этого вырождения к бесконечности [10,19].

Мы завершаем наш обзор заключением, где все доказанные нами утверждения собраны в сжатом виде.

Теперь мы кратко перечислим работы, относящиеся к данному предмету и сопоставим полученные в них результаты с нашими результатами.

Как хорошо известно, общая теорема о связи спина со статистикой в случае выбора между ферми- и бозе-статистиками была установлена Паули [10]. Ее современное доказательство в рамках аксиоматики Вайтмана, основанное на общих положениях квантовой теории поля, было дано Бургойне [21] и Людерсом и Зумино [22] (см. также монографии [23]). Однако все эти доказательства носили негативный характер и утверждали, что нельзя квантовать поля с целыми спинами с помощью антикоммутаторов, а поля с полуцелыми спинами — с помощью коммутаторов. Других возможностей не предполагалось.

Впервые пример обобщенного квантования полей, отличного от обычного способа, но тем не менее удовлетворяющего всем требованиям локальной квантовой теории поля, предложили Грин [6] и (для частного случая параферми-статистики второго порядка) Волков [24]. Затем теория такого квантования изучалась многими авторами (см. литературу в [8,9]).

С другой стороны, возможность использования для описания статистик тождественных частиц не только симметричных и антисимметричных представлений, но и многомерных представлений группы перестановок координат (и спиновых переменных) частиц всегда подчеркивалась основоположниками современной квантовой теории: Паули [25], Дираком [26] и другими.

Первую попытку построить статистику, промежуточную между ферми- и бозе-статистиками, предпринял, по-видимому, Джентиле [27]. Впоследствии свойства «парагаза» изучались несколькими авторами [28]. Попытку установления коммутационных соотношений для операторов, соответствующих многомерным представлениям групп перестановок, предпринял Окайама [29]. Но, как было показано в [30], она оказалась неудачной.

Теорему о том, что статистика тождественных частиц может быть параферми- или парабозе-статистикой конечного порядка или же бесконечной статистикой, Хартл, Столт и Тейлор [31] установили на основе кластерных свойств систем тождественных частиц.

Наиболее последовательное рассмотрение статистик тождественных частиц осуществили Допличер, Хааг и Робертс [32] в рамках аксиоматического подхода, основанного на предположениях *локальной* алгебры наблюдаемых (прекрасный обзор этих работ см. в докладе Хаага [33]). В вольном изложении концепция частиц в таком подходе заменяется на локализованную в ограниченной области пространства и времени систему, характеризуемую своей алгеброй наблюдаемых (как показано в [34], такие пространственно-временные области могут быть и незамкнутыми, но иметь форму пространственноподобных конусов). Принцип локализации состоит в том, что существование такой системы некоррелировано с остальным миром в том смысле, что ее удаление из него или добавление к нему не влияет на измерения, производимые в пространственноподобном дополнении к области локализации данной системы. Такие «частицеподобные» объекты можно характеризовать *«обобщенными зарядовыми (не обязательно абелевыми) квантовыми числами»*, разделяющими все их состояния на суперотборные секторы. Далее, принцип локализации позволяет ввести в рассмотрение композицию состояний. Тогда с n-кратным произведением состояний данного сектора можно связать унитарное представление группы S_n перестановок n элементов, которые действуют точно так же, как перестановки n-частичной волновой функции в квантовой механике. Неудивительно поэтому, что классификация допустимых статистик частиц, установленная в таком подходе[1], совпадает с классификацией [31], полученной в рамках нерелятивистской квантовой механики.

Однако до сих пор не было установлено исчерпывающего соответствия таких парастатистик и обобщенных схем квантования полей. Более

[1]Лонго [35] установил связь между «параметром статистики» (обратным порядку парастатистики) и квадратным корнем из индекса Джонеса для подфакторов алгебры наблюдаемых.

того, высказывались сомнения, и, как мы увидим, обоснованные, в соответствии гриновского параквантования парастатистикам в их строгом определении как статистик тождественных частиц [36,37]. Черниковым [38] впервые было показано, что параферми-квантование второго порядка Грина — Волкова [6,24] в действительности описывает частицы *двух* сортов, которые можно различать с помощью взаимодействия, формулируемого в рамках этой же теории параполя (см. также [39]). Обобщение этого вывода на любой порядок было предложено в [3] в рамках так называемого «унитарного квантования». Правда, мы всегда можем говорить о двух или нескольких сортах различных частиц как о тождественных частицах, находящихся в различных внутренних (изоспиновом, унитарном и т.д.) состояниях.

Основная цель подхода, излагаемого в настоящем обзоре, состоит как раз в установлении самых общих схем вторичного квантования и обобщенного квантования полей, соответствующих возможным статистикам тождественных частиц. Мы увидим, что, помимо гриновского квантования, существует новое параквантование, основанное на иных трилинейных соотношениях. Такое квантование уже не различает «внутренние» состояния частиц и потому более подходит для описания парастатистик без каких-либо дополнительных ограничений. Мы увидим также, что такую схему квантования можно считать реализацией абстрактной схемы Хаага и др. [32,33]. Операторы Казимира унитарной симметрии, возникающей в нашем подходе, соответствуют обобщенным зарядовым неабелевым квантовым числам, а наше определение «античастиц» как частиц, преобразующихся по дополнительным представлениям этой группы, соответствует античастицам, относящимся к «сопряженному сектору» в алгебре наблюдаемых. Наконец, отсутствие таких представлений и, соответственно, античастиц для бесконечной статистики находится в полном соответствии с теоремой Фреденхагена [40] об отсутствии сопряженного сектора в локальной алгебре наблюдаемых. Кроме того, рассматривая бесконечную статистику как предел парастатистик при стремлении их порядков к бесконечности, мы сумеем проследить, каким образом локальная теория превращается в нелокальную.

Наша «рабочая» схема, исходно формулируемая в рамках нерелятивистского рассмотрения (хотя и обобщаемая в дальнейшем на релятивистскую теорию поля), естественно, не обладает общностью аксиоматического подхода. Однако в этом может заключаться и ряд ее преимуществ. В частности, в ней не возникает проблем, с которыми сталкивается аксиоматический подход в силу своей общности. Эти проблемы носят, в определенном смысле, «технический» характер, но существенно препятствуют его применению к теориям, которые в данное время составляют основу наших знаний об элементарных частицах, — к квантовым электродинамике и хромодинамике. Затруднение обусловлено тем, что аксиоматический подход все еще ограничен рассмотрением только массивных объектов, и включение в него безмассовых фотонов составляет проблему (обсуждение «инфрачастиц» см. в [34,41]). Другое ограничение состоит в том, что в этом подходе рассматриваются лишь такие частицеподобные объекты, которые появляются в асимптотически свободном состоянии после столкновения. При таком ограничении теория становится неприменимой для квантовой хромодинамики, объектами которой являются кварки и глюоны, заключенные внутри адронов (обсуждение проблемы введения в аксиоматическую схему локальных калибровочных групп см. в [33,42]).

В нашем подходе паракоммутационные соотношения могут быть сформулированы для любых, в том числе и безмассовых, полей. При включении взаимодействий эти поля следует считать гейзенберговскими, а перестановочные соотношения — одновременными. Следующий этап исследования таких схем должен заключаться в их сопоставлении физическим симметриям. Однако возможность формулировки калибровочных симметрий, таких как «цветовая симметрия», в рамках параполевого подхода только-только начинает рассматриваться [11,43], и мы не включили ее в данный обзор.

Заметим, наконец, что сравнительно недавно в двумерных моделях дробного холл-эффекта были обнаружены объекты, так называемые «энионы», которые могут обладать произвольным (не целым и не полуцелым) спином и подчиняться «дробной статистике» (см., например, обзор [44]). Произвольность спина связана с тем, что двумерная группа вращений $O(2)$, изоморфная $U(1)$, абелева. Дробные же статистики обусловлены нетривиальностью топологии самого двумерного пространства, тогда как топология трехмерного пространства предполагается тривиальной. Тем не менее не исключена возможность существования в трехмерном пространстве (струнных) моделей с нетривиальной топологией, в рамках которых могли бы возникать необычные статистики, наподобие дробных. Мы, однако, не будем рассматривать такого рода объекты, поскольку они не удовлетворяют предложенному нами в дальнейшем принципу «элементарности» и не описываются *локальной* теорией поля [44].

2. НЕРАЗЛИЧИМОСТЬ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ И МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ ЗАПОЛНЕНИЯ

Как хорошо известно (см., например, [45]), любую квантово-механическую систему можно описывать с помощью матрицы плотности $\rho(x;\, x';\, t)$, удовлетворяющей двустороннему уравнению Шредингера —

квантовому аналогу уравнения Лиувилля. Система N нерелятивистских частиц описывается матрицей плотности $\rho(x_1, x_2,..., x_N; x'_1, x'_2..., x'_N; t)$ — некоторой комплексной функцией от времени t и двух наборов одночастичных координат: $x_1, x_2,..., x_N$ и $x'_1, x'_2,..., x'_N$, которые мы будем называть «первичными» и «вторичными» соответственно. Таким образом, эта функция задается в $3N$-мерном конфигурационном пространстве (при наличии спина в аргументы x_i можно включить также и спиновые переменные, и тогда размерность пространства увеличится в $(2S+1)^N$ раз). Среднее значение любого оператора $\hat{Q}$ определяется в виде

$$\langle Q\rangle=\int dx_1...\int dx_N \int dx'_1...\int dx'_N \hat{Q}(x_1,...,x_N)\,\rho\,(x_1,...,x_N;\, x'_1,...,x'_N;\, t)\times \\ \times\, \delta(x_1 - x'_1)...\,\delta(x_N - x'_N), \tag{1}$$

причем выполнение интегрирования δ-функций следует производить после вычисления действия оператора на матрицу плотности. Для того чтобы средние значения эрмитовых[2] операторов, изображающих наблюдаемые, были вещественны, матрица плотности должна быть эрмитова (звездочка означает комплексное сопряжение):

$$\rho^*(x_1,..., x_N;\, x'_1,..., x'_N;\, t) = \rho(x'_1,..., x'_N;\, x_1,..., x_N;\, t). \tag{2}$$

Определение. *Тождественными частицами будем называть такие частицы, для которых* все *эрмитовы операторы наблюдаемых симметричны:*

$$\hat{Q}(x_{\mathcal{P}1},..., x_{\mathcal{P}N}) = \hat{Q}(x_1,..., x_N), \tag{3}$$

где $\mathcal{P}$ — любая перестановка индексов $1,2,...,N$, заменяющая их на некоторые индексы $\mathcal{P}1 = i_1,\ \mathcal{P}2 = i_2,...,\ \mathcal{P}N = i_N$ из того же набора. Из этого определения следует, что сама матрица плотности должна быть симметричной относительно любой такой перестановки, совершаемой над первичными и вторичными индексами одновременно[3]:

$$\rho(x_1,..., x_N;\, x'_1,..., x'_N;\, t) = \rho(x_{\mathcal{P}1},..., x_{\mathcal{P}N};\, x'_{\mathcal{P}1},..., x'_{\mathcal{P}N}\,;\, t). \tag{4}$$

---

[2]Оператор $\hat{Q}^+$, эрмитово-сопряженный $\hat{Q}$, определяется соотношением

$$\int dx\,dx'\,[\hat{Q}^+(x')\rho^*(x',x)]^*\delta(x-x') = \int dx \int dx' \hat{Q}(x)\,\rho(x,x')\,\delta(x-x').$$

Если при этом $\hat{Q}^+ = \hat{Q}$, то такой оператор эрмитов.

[3]Этому условию можно сопоставить условие независимости от порядка произведения $\rho_1 \circ \rho_2 \circ ... \circ \rho_N$ морфизмов $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N$ локальных алгебр наблюдаемых, локализованных во взаимно пространственноподобных областях [32]. Морфизмами называют такие преобразования над операторами, которые не меняют алгебраические операции над образами этих операторов.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно произвести замену переменных $x_1 \to x_{\mathcal{P}1}$, $x_2 \to x_{\mathcal{P}2}, \ldots, x_N \to X_{\mathcal{P}N}$, воспользоваться инвариантностью (3) и условием единственности среднего значения каждого эрмитова оператора наблюдаемой. Требование одновременности перестановок и первичных, и вторичных индексов при этом возникает из-за условия инвариантности δ-функций при таких перестановках.

Диагональные элементы такой симметричной матрицы плотности

$$\rho(x_1,\ldots, x_N; x_1,\ldots, x_N; t)$$

определяют плотность вероятности нахождения *тождественных* частиц в точках $x_1, x_2,\ldots, x_N$ в момент времени t. Очевидно, они должны быть положительны.

В нашем определении фигурирует условие того, что нам известны *все* эрмитовы операторы наблюдаемых и все они симметричны. Однако может возникнуть ситуация, когда лишь часть характеристик состояния системы наблюдаема, тогда как по другой части ее характеристик производится усреднение. Так может случиться, например, при усреднении по спиновым переменным, и матрица плотности, зависящая лишь от координат (нерелятивистских) частиц, обладающих ненулевым спином, также окажется симметричной. Иногда в такой ситуации говорят об *одинаковых* по своим внешним проявлениям, но не тождественных частицах. Однако мы никогда не можем быть уверены в том, что нам известен *полный* набор наблюдаемых и что симметрия матрицы плотности не является результатом какого-либо усреднения по вырожденным внутренним переменным. (Такую ситуацию можно представить себе в виде системы нейтронов и протонов в ядрах, считая «выключенными», т.е. несуществующими, электромагнитное и слабое взаимодействия и пренебрегая разностью масс. Более актуальным примером могут служить кварки и глюоны, вырожденные относительно цветовой степени свободы, которая, по-видимому, оказывается принципиально ненаблюдаемой.) Наш основной результат будет заключаться в доказательстве того, что *иной ситуации быть не может и что любую обобщенную статистику тождественных частиц всегда можно интерпретировать как обычные ферми- и бозе-статистики при наличии вырождения по некоторой внутренней координате*[4]. Однако, прежде чем добраться до этого резуль-

[4]Очевидно также, что свойство (4) будет выполнено для упомянутых ранее энионов, для которых при перестановках аргументов волновая функция приобретает произвольный фазовый множитель. Однако известно, что при соответствующем выборе калибровки частицы, подчиняющиеся такой «энионной статистике», могут быть описаны как частицы с обычной статистикой, но взаимодействующие с калибровочным полем Черна — Саймона (см., например, [44]).

тата, нам предстоит развить теорию вторичного квантования для теорий, в которых выполняется это общее свойство симметрии матрицы плотности (4).

Для этой цели, как обычно, перейдем к дискретному базису, разложив матрицу плотности по полному набору одночастичных дискретных состояний r_i $(i = 1,2,..., \infty)$ по всем своим и первичным, и вторичным аргументам. Коэффициенты разложения будут определять матрицу плотности в новом представлении и, в силу (2) и (4), также будут эрмитовы и симметричны:

$$c^*(r'_1,..., r'_N; r_1,..., r_N; t) = c(r_1,..., r_N; r'_1,..., r'_N; t), \tag{5}$$

$$c(r_{\wp_1},..., r_{\wp_N}; r'_{\wp'_1},..., r'_{\wp'_N}; t) = c(r_1,..., r_N; r'_1,..., r'_N; t), \tag{6}$$

а их диагональные элементы положительны:

$$c(r_1,..., r_N; r_1,..., r_N; t) \geq 0. \tag{7}$$

Однако в общем случае в нашей схеме свойства симметрии матрицы плотности и ее элементов относительно перестановок только первичных аргументов или только вторичных аргументов заранее не известны, и мы не можем говорить о числах заполнения тождественными частицами только первичных или только вторичных состояний. Но поскольку по обоим этим наборам состояний матрица плотности симметрична, мы можем ввести понятие совместных или *«двойных чисел заполнения»* [3]. Мы определяем двойное число заполнения n_{ij} как число тождественных частиц, находящихся в определенном состоянии $r^{(i)}$ среди всех первичных состояний $r_1,..., r_N$ и в определенном состоянии $r^{(j)}$ среди всех вторичных состояний $r'_1,..., r'_N$. Очевидно, должно выполняться условие

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} n_{ij} = N. \tag{8}$$

Полные числа частиц в первичном состоянии i или вторичном состоянии j составляют

$$N_i = \sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}, \quad N'_j = \sum_{i=1}^{\infty} n_{ij}. \tag{9}$$

Состояние системы тождественных частиц полностью определяется заданием значений всех двойных чисел заполнения, что мы будем кратко записывать в виде $\{n_{ij}\}$. Такое задание мы будем называть заданием матрицы плотности в *пространстве двойных чисел заполнения* и определять его коэффициентами матрицы

$$C(\{n_{ij}\},\ i,j = 1,\ldots,\infty;\ t).$$

Диагональные элементы (т.е. те, у которых отличны от нуля лишь двойные числа с одинаковыми номерами состояний $n_{ii} \equiv n_i$) должны быть положительны:

$$C(\{n_i\};\ t) \geq 0, \tag{10}$$

поскольку они определяют вероятность наличия n_i тождественных частиц в состоянии $r^{(i)}$ ($i = 1,2,\ldots,\infty$), нормированную условием

$$\sum_{n_1,n_2,\ldots=1}^{\infty} C(\{n_i\};\ t) = 1. \tag{11}$$

В силу (5) должно выполняться также условие эрмитовости

$$C(\{n_{ij}\};\ t) = C^*(\{n_{ji}\};\ t). \tag{12}$$

В пространстве двойных чисел заполнения мы можем ввести ортонормированные базисные векторы с фиксированными значениями этих чисел

$$|\{n_{ij}^0\}\rangle = \prod_{i,j=1}^{\infty} \delta_{n_{ij}\, n_{ij}^0}, \tag{13}$$

$$\langle \{n_{ij}^0\} \mid \{m_{ij}^0\} \rangle = \sum_{\{n_{ij}\}=0}^{\infty} \prod_{i,j=1}^{\infty} \delta_{n_{ij}\, n_{ij}^0} \prod_{k,l=1}^{\infty} \delta_{n_{ij}\, m_{kl}^0} = \prod_{i,j=1}^{\infty} \delta_{n_{ij}^0\, m_{ij}^0}. \tag{14}$$

Далее, любую матрицу в этом пространстве мы можем разложить по базису

$$C(\{n_{ij}\};\ t) = \sum_{\{n_{ij}^0\}=0}^{\infty} f(\{n_{ij}^0\};\ t)\ |\{n_{ij}^0\}\rangle, \tag{15}$$

где коэффициенты задаются проекциями

$$f(\{n_{ij}^0\};\ t) = \sum_{\{n_{ij}\}=0}^{\infty} \langle \{n_{ij}^0\} \mid C(\{n_{ij}\};\ t)\rangle. \tag{16}$$

Отметим, что векторами в пространстве двойных чисел заполнения являются сами матрицы плотности (а не волновые функции).

Мы можем теперь определить оператор перехода из одного первичного состояния r в другое *первичное* же состояние s без изменения вторичных состояний посредством следующего действия на базисные векторы (13) [3]:

$$N_{sr}\ |\{n_{ij}^0\}\rangle = \sum_{q=1}^{\infty} [(n_{sq}^0 + 1 - \delta_{rs})n_{rq}^0]^{1/2}\ |\{\ldots,n_{rq}^0 - 1,\ldots,n_{sq}^0 + 1,\ldots\}\rangle. \tag{17}$$

Нормировка выбрана так, чтобы при $s = r$ мы получали оператор (9) для полного числа частиц в первичном состоянии s:

$$N_s \mid \{n^0_{ij}\} \rangle = (\sum_{q=1}^{\infty} n^0_{sq}) \mid \{n^0_{ij}\} \rangle. \tag{18}$$

Точно такой же оператор N'_{sr} можно определить для переходов вторичных состояний. Уравнение Шредингера в пространстве двойных чисел заполнения может быть записано в терминах операторов N_{sr} и N'_{sr} [3]. Воспользовавшись определением (17), можно непосредственно убедиться в том, что операторы переходов удовлетворяют соотношениям

$$[N_{lm}, N_{sr}]_- = \delta_{lr} N_{sm} - \delta_{ms} N_{lr}, \tag{19}$$

где квадратные скобки с индексом «-» означают коммутатор. Аналогичным соотношениям удовлетворяют и операторы N'_{sr} , а между собой штрихованные и нештрихованные операторы коммутируют.

Эрмитово-сопряженный оператор определим как обычно:

$$N^+_{rs} = N^*_{sr}. \tag{20}$$

Условия для операторов (19) и (20) должны выполняться в любом их представлении. Этим *необходимым* условиям должна удовлетворять любая теория тождественных частиц. Для ферми- и бозе-статистик эти соотношения были указаны Н.Н.Боголюбовым [2, с.333].

3. ОПЕРАТОРЫ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ ЧАСТИЦ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОСТИ ЧАСТИЦ

Введение операторов переходов, удовлетворяющих (19) и (20), является необходимым, но недостаточным условием для полного определения статистических свойств тождественных частиц. Для такого определения нам нужно теперь ввести операторы рождения и уничтожения частиц a^+_r и a_r в некотором состоянии r и сформулировать для них коммутационные соотношения, так чтобы мы могли ввести статистический оператор для системы N тождественных частиц в виде

$$\hat{\rho} = \sum_{r_1,\dots,r_N;r'_1,\dots,r'_N} \rho(r_1,\dots, r_N; r'_1,\dots, r'_N)\, a^+_{r1} \dots a^+_{rN} \mid 0 \rangle \langle 0 \mid a_{r'_N} \dots a_{r'_1} \tag{21}$$

и вычислять средние значения наблюдаемых по состояниям системы таких частиц.

Мы сформулируем следующее предположение.

Предположение 1. *Существуют операторы рождения a_r^+ и уничтожения a_r частиц в первичном одночастичном состоянии r такие, что выполняются соотношения*

$$(a_r^+)^+ = a_r, \quad (a_r a_s)^+ = a_s^+ a_r^+ \tag{22}$$

и

$$[N_{sr}, a_t]_- = -\delta_{st}\, a_r, \quad [N_{sr}, a_t^+]_- = \delta_{rt}\, a_s^+. \tag{23}$$

При $r = t$ мы имеем для последнего соотношения

$$N_{sr} a_r^+ = a_r^+ N_{sr} + a_s^+$$

и можем интерпретировать его как замену под действием оператора перехода N_{sr} оператора рождения частицы в состоянии r на оператор рождения в состоянии s. Очевидно также, что при $s = r$ мы имеем оператор числа частиц

$$N_s a_t^+ = a_t^+ (N_s + \delta_{ts}). \tag{24}$$

Теперь мы сделаем более решительное предположение.

Предположение 2. *Операторы переходов N_{sr} имеют билинейную форму от операторов рождения и уничтожения частиц*

$$N_{sr} = -\rho^{-1} [a_r, a_s^+]_{-q} + c_{sr}, \tag{25}$$

где ρ, q и c_{sr}— некоторые константы, и скобки означают

$$[a_r, a_s^+]_{-q} \equiv a_r a_s^+ - q a_s^+ a_r. \tag{26}$$

Знак «минус» перед ρ^{-1} и q взят для удобства в последующем изложении.

Условие (20) приводит к тому, что параметры ρ и q должны быть вещественны:

$$\rho^* = \rho, \quad q^* = q, \tag{27}$$

а константа c_{sr} должна удовлетворять соотношению

$$c_{rs}^* = c_{sr}. \tag{28}$$

Мы можем назвать предположение (25) *«гипотезой об элементарности»* частиц или, иначе, о линейности теории. Действительно, когда мы перейдем к теории поля, мы увидим, что это предположение соответствует тому, что гамильтониан и другие наблюдаемые имеют билинейную форму (26) и описывают *свободные частицы*, уравнения для которых линейны. Только на следующем этапе мы можем ввести взаимодействия и перейти к гейзенберговским полям, постулируя для них одновременные соотношения как обобщения таких соотношений для свободных полей. Иными словами, наше предположение сводится к тому, что мы можем *сначала* совершить квантование свободных линейных (элементарных) полей, а *затем* уже включить взаимодействие. Сами частицы при этом рассматриваются как кванты такого свободного поля, и именно вследствие этого являются тождественными, на каких бы громадных расстояниях друг от друга они не появлялись.

Если же оказывается, что теорию невозможно строить по такому пути и взаимодействие или самовзаимодействие полей необходимо учитывать уже на этапе формулировки правил их квантования, то соответствующие возбуждения полей следует рассматривать как «коллективные». Обычно такие «поля» возникают при усредненном описании коллективов сильносвязанных «элементарных» частиц. По крайней мере, в рамках релятивистской локальной теории поля последовательное проведение такой процедуры квантования нам неизвестно (в вайтмановской аксиоматической формулировке взаимодействующих с самого начала полей до сих пор не решена основная проблема построения нетривиальной теории, удовлетворяющей всем положенным в основу такой формулировки аксиомам; см., например, [46]).

Как известно, в квантовой электродинамике возможность проквантовать свободные поля, а затем уже вводить их взаимодействие, связана с малостью безразмерной константы связи и с возможностью проведения релятивистской процедуры перенормировок. В квантовой хромодинамике константа связи кварков и глюонов отнюдь не мала, а сами глюонные поля существенно нелинейны по своей природе. Но счастливейшим обстоятельством оказалось то, что именно в силу этой нелинейности теория становится асимптотически свободной при больших передачах импульсов (или на малых расстояниях). Мы вновь получили область энергий, где можем рассматривать кварки и глюоны асимптотически свободными и начинать построение теории от этой точки отсчета. Это же относится к любой неабелевой теории.

С другой стороны, часто возникает вопрос о квантовании составных частиц, рассматриваемых как единое целое, как это имело место в свое время для ядер, состоящих из нуклонов, а в настоящее время для самих нуклонов, состоящих из кварков. Такое рассмотрение возможно только в том случае, если, согласно теореме Эренфеста — Оппенгеймера [47], можно *полностью* пренебречь влиянием взаимодействия составных частиц на внутреннее движение их составляющих. Если внутреннее состояние таких кластеров одинаково, то их статистика определяется статистикой составляющих; если же оно различно, то статистика составных частиц не определена, и они могут рассматриваться как *различные* частицы, хотя и построенные из одних и тех же составляющих. Очевидно, такое описание не может быть «немного» нарушено и исправлено при учете непосредственного взаимодействия между собой составляющих и является скорее аппроксимацией, чем приближением. Движение составляющих в сложной системе с учетом их взаимодействия нельзя разлагать по их внутренним состояниям внутри отдельных кластеров, поскольку в спектре состояний полной системы возникают состояния, не относящиеся к состояниям отдельных кластеров. По этой причине бессмысленно говорить о «небольшом» нарушении статистики кластеров, вызываемом учетом взаимодействия их составляющих, как это было предложено недавно в качестве модели «кажущегося» нарушения принципа Паули [48].

Хорошим примером изложенной ситуации является нуклонная модель ядра, прекрасно описывающая низкоэнергетические ядерные состояния с учетом ферми-статистики нейтронов и протонов. Учет же того, что нуклоны сами по себе являются бесцветными кластерами, состоящими из трех «разноцветных» кварков, приводит не к нарушению ферми-статистики нуклонов, являющейся следствием ферми-статистики кварков с учетом их цвета, а к возможности появления принципиально иных, ненуклонных связанных состояний. Таковыми являются многокварковые (скажем, шестикварковые) состояния, в целом бесцветные, но не имеющие каких-либо меньших бесцветных подструктур. Такое явление получило наименование «скрытый цвет». Таким образом, нуклонная модель является не приближением, а аппроксимацией некоторых, в частности основных, состояний сложной многокварковой системы. Пространство состояний последней богаче и их нельзя разлагать только по состояниям нуклонной модели. Более того, в многонуклонных моделях к нуклонным состояниям, являющимся бесцветными кластерами всей системы в целом, обязательно должны примешиваться указанные состояния со скрытым цветом. Принцип же Паули теперь соблюдается не для нуклонов, рассматриваемых как целое, а для самих кварков с учетом их цветового состояния.

4. ОСНОВНЫЕ КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Совмещая теперь соотношения (23) и (25), мы получаем *основные коммутационные соотношения* для тождественных элементарных частиц

$$[[a_r, a_s^+]_{-q}, a_t]_- = \rho\, \delta_{ts} a_r \tag{29}$$

и эрмитово-сопряженные им соотношения

$$[[a_r, a_s^+]_{-q}, a_t^+]_- = -\rho\,\delta_{rt}\,a_s^+, \tag{30}$$

которые и будут предметом всего дальнейшего нашего исследования. Параметры q и ρ могут принимать любые вещественные значения, в том числе и нулевые[5]. Заметим, что при $\rho \neq 0$ от этого произвольного параметра всегда можно избавиться посредством простой перенормировки: $a \to \rho^{1/2}a$, $a^+ \to \rho^{1/2}a^+$. Нам, однако, будет удобнее сохранить этот параметр произвольным и придавать ему впоследствии подходящие значения.

Соотношения (29) и (30) рассматривались в [5] как наиболее общие коммутационные соотношения, соответствующие парастатистикам[6]. Затем они были «переоткрыты» Игнатьевым и Кузьминым [12] для одноуровневой системы и Гринбергом и Мохапатрой [13] для соответствующей теории поля, предлагавшими использовать эти соотношения для формулировки «небольшого» нарушения принципа Паули.

Следствием (29) и (30) является соотношение[7]

$$[[a_r, a_s^+]_{-q}, [a_k, a_l^+]_{-q}]_- = \rho\,\delta_{ks}[a_r, a_l^+]_{-q} - \rho\,\delta_{rl}[a_k, a_s^+]_{-q}. \tag{31}$$

Учитывая (25) (при $\rho \neq 0$), мы можем придать соотношению (31) вид (19), если положим

$$c_{sr} = c\,\delta_{sr}, \tag{32}$$

где c — некоторая общая вещественная постоянная.

Отметим, что соотношения (29) и (30) инвариантны относительно унитарного преобразования

$$a'_r = \sum_j u_{rj}\,a_j, \quad (a'_r)^+ = \sum_j u^*_{rj}\,a^+_j \tag{33}$$

при

$$\sum_j u^*_{sj}\,u_{rj} = \delta_{sr}. \tag{34}$$

Это свойство основных соотношений весьма существенно, поскольку оно обеспечивает их независимость от исходного базиса одночастичных

---

[5]Они могли бы принимать и бесконечные значения при конечном отношении ρ/q. Однако этот случай сводится к случаю $q = 0$ путем простого переобозначения $a^+ \leftrightarrow a$.

[6]Введенные здесь параметры q и ρ соотносятся с параметрами α и ε из работы [5] следующим образом: $q = -1/\varepsilon$, $\rho = -\alpha/\varepsilon$.

[7]Для их вывода следует воспользоваться тождеством [5,9]:

$$[[A, B]_\varepsilon, [C, D]_\eta]_- \equiv [A, [B, [C, D]_\eta]_-]_\varepsilon + [[A, [C, D]_\eta]_-, B]_\varepsilon,$$

положив $\varepsilon = \eta = -q$.

состояний[8]. На важность такого преобразования в рамках гриновского квантования указал Бялиницки-Бируля [50]. Заметим, что никаких других соотношений, помимо (29) и (30), не предполагается. Например, мы не постулируем каких-либо соотношений для трех операторов уничтожения (или трех операторов рождения). Далее мы покажем, что соотношения (29) и (30) полностью определяют пространство Фока состояний частиц.

5. ФОКОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Теперь мы рассмотрим представление Фока соотношений (29) и (30), положив, как обычно, в его основу

Постулат. *Существует единственное вакуумное состояние* $|0\rangle$ *такое, что*

$$a_r|0\rangle = 0 \text{ и } \langle 0|a_r^+ = 0 \tag{35}$$

для всех состояний r.

Следствие. *Если* $\rho \neq 0$, *то*

$$a_r a_s^+|0\rangle = p\,\delta_{rs}|0\rangle, \tag{36}$$

где p — произвольное постоянное (не зависящее от состояния) число.

Доказательство. Подействуем левой и правой частями (29) на вакуумный вектор. С учетом (35) получим

$$a_t a_r a_s^+|0\rangle = 0,$$

откуда, в силу предположения о *единственности* вакуумного вектора, должно быть

$$a_r a_s^+|0\rangle = f_{rs}|0\rangle,$$

где f_{rs} — некоторое число, зависящее, вообще говоря, от состояний r и s. Далее, подействуем на вакуумный вектор левой и правой частями (31). Мы получим

$$\rho(\delta_{ks}f_{rl} - \delta_{rl}f_{ks}) = 0.$$

Согласно предположению $\rho \neq 0$ и, следовательно, обращается в нуль выражение в скобках, откуда следует $f_{rl} = p\,\delta_{rl}$, где p — число, не зависящее от r и l, и мы приходим к (36).

[8]В предложенной Л.Окунем [49] схеме «небольшого» нарушения принципа Паули, являющейся обобщением схемы Игнатьева и Кузьмина [12] на многоуровневую (но не полевую!) систему, это свойство не выполняется: для операторов, относящихся к одному и тому же уровню, предполагаются соотношения Игнатьева — Кузьмина, тогда как для сколь угодно близких, но не совпадающих состояний предполагаются обычные антикоммутационные соотношения.

Исключенный из рассмотрения случай $\rho = 0$ соответствует тому, что выражение (26) коммутирует со всеми операторами рождения и уничтожения и, следовательно, является c-числом. Этот случай будет нами рассмотрен в дальнейшем особо.

Соотношения (35) и (36) полностью определяют представление трилинейных соотношений (29) и (30). Действительно, в фоковском представлении базисные векторы получаются действием мономов от операторов рождения a^+ на вакуумный вектор. Действие операторов уничтожения на такие векторы можно определить, воспользовавшись соотношением (30) для продвижения этих операторов вправо к вакуумному вектору и затем соотношениями (35) и (36). В результате мы получаем общую формулу

$$a_r a^+_{r_1} a^+_{r_2} \ldots a^+_{r_n} | 0 \rangle = p\, \delta_{sr_1} a^+_{r_2} \ldots a^+_{r_N} | 0 \rangle + \\ + \sum_{k=2}^{n} \delta_{rr_k} [q^{k-2}(qp - \rho) a^+_{r_1} \ldots a^+_{r_{k-1}} - \\ - \rho \sum_{l=1}^{k-2} q^{k-l-2} a^+_{r_1} \ldots a^+_{r_{k-l-2}} a^+_{r_{k-l}} \ldots a^+_{r_{k-1}} a^+_{r_{k-l-1}}] a^+_{r_{k+1}} \ldots a^+_{r_n} | 0 \rangle. \tag{37}$$

Произвольный вектор в фоковском представлении может быть записан в виде разложения по базисным векторам

$$| \Psi \rangle = \Psi_0 | 0 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r_1,\ldots,r_n} \Psi^{(n)}(r_1,\ldots, r_n) a^+_{r_1} \ldots a^+_{r_n} | 0 \rangle, \tag{38}$$

в котором амплитуды $\Psi^{(n)}(r_1,\ldots,r_n)$ заранее не обладают какой-либо симметрией относительно перестановок своих аргументов. Воспользовавшись (37), для проекций этого вектора на базисные векторы получим

$$\langle 0 | \Psi \rangle = \Psi_0, \tag{39а}$$

$$\langle 0 | a_{r_1} | \Psi \rangle = p\, \Psi^{(1)}(r_1), \tag{39б}$$

$$\langle 0 | a_{r_2} a_{r_1} | \Psi \rangle = p^2\, \Psi^{(2)}(r_1,r_2) + p(qp - \rho)\Psi^{(2)}(r_2,r_1), \tag{39в}$$

$$\langle 0 | a_{r_3} a_{r_2} a_{r_1} | \Psi \rangle = p^3\, \Psi^{(3)}(r_1,r_2,r_3) + p^2(qp - \rho)\Psi^{(3)}(r_1,r_3,r_2) + \\ + p^2(qp - \rho)\Psi^{(3)}(r_2,r_1,r_3) + p(qp - \rho)^2\Psi^{(3)}(r_3,r_1,r_2) + \\ + p[q(qp - \rho)^2 - p\rho]\Psi^{(3)}(r_3,r_2,r_1) + p(qp - \rho)^2\Psi^{(3)}(r_2,r_3,r_1) \tag{39г}$$

и т.д. Мы видим, что в общем случае соотношения между проекциями и амплитудами не столь просты, как для обычных фермионных и бозонных операторов. Для того чтобы иметь взаимно-однозначное соответствие между проекциями и амплитудами, следует составить ортогональные комбинации из базисных векторов. Такая ортогонализация производится с помощью образования комбинаций с определенными свойствами симметрии относительно перестановок аргументов. Соответствующий смысл приобретают и симметризованные амплитуды как волновые функции нахождения системы в том или ином симметризованном состоянии. В дальнейшем для частных случаев двух- и трехчастичных систем мы произведем такую ортогонализацию в явном виде.

Пока что мы не налагали никаких ограничений на имеющиеся в нашем распоряжении параметры p, q и ρ (один из параметров $p \neq 0$ или $\rho \neq 0$ может быть, как отмечалось выше, исключен посредством перенормировки операторов). Теперь мы рассмотрим ограничения, возникающие из условия положительной определенности норм векторов состояний в фоковском пространстве.

Рассмотрим произвольный вектор одночастичной системы

$$|\Psi^{(1)}\rangle = \sum_r \Psi^{(1)}(r) a_r^+ |0\rangle. \tag{40}$$

Для нормы такого вектора с помощью (39б) мы получаем

$$\|\Psi^{(1)}\|^2 \equiv \langle \Psi^{(1)} | \Psi^{(1)} \rangle = \langle 0 | \sum_r \Psi^{(1)*}(r) a_r | \Psi^{(1)} \rangle = p \sum_r |\Psi^{(1)}(r)|^2. \tag{41}$$

Условие ее положительной определенности означает $p^* = p \geq 0$. Случай $p = 0$ тривиален и потому всюду в дальнейшем мы предполагаем

$$p > 0. \tag{42}$$

Теперь возникают две возможности: можно заранее предположить значение вещественного параметра p либо *конечным*, либо *бесконечным* (т. е. бóльшим любого наперед заданного числа). В оставшейся части этого раздела и вплоть до разд.9 мы будем рассматривать случай конечных значений параметра p.

Рассмотрим симметризованные двухчастичные состояния, определяемые векторами

$$|\Psi_\lambda^{(2)}\rangle = \sum_{r_1, r_2} \Psi_\lambda(r_1, r_2) a_{r_1}^+ a_{r_2}^+ |0\rangle, \tag{43}$$

где симметричная и антисимметричная волновые функции образуются из произвольной двухчастичной функции в виде известных комбинаций[9]

[9] В дальнейшем мы часто будем пользоваться термином «λ-симметричный вектор», подразумевая под ним симметричный при $\lambda = 1$ или антисимметричный при $\lambda = -1$ вектор.

$$\Psi_\lambda^{(2)}(r_1,r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\Psi(r_1,r_2) + \lambda\Psi(r_2,r_1)\,],\quad \lambda = \pm 1. \tag{44}$$

Воспользовавшись (39в), можно вычислить нормы векторов (43):

$$\|\Psi_\lambda^{(2)}\|^2 = \sum_{r_1,r_2} \Psi_\lambda^*(r_1,r_2)\,\langle\, 0\,|\, a_{r_2} a_{r_1}\,|\,\Psi_\lambda^{(2)}\,\rangle = $$
$$= p[p + \lambda(qp - \rho)\,] \sum_{r_1,r_2} |\,\Psi_\lambda(r_1,r_2)\,|^2. \tag{45}$$

Условие положительной определенности этих норм означает

$$p \pm (qp - \rho) \geq 0. \tag{46}$$

Его можно переписать в виде

$$-1 + \frac{\rho}{p} \leq q \leq 1 + \frac{\rho}{p}. \tag{47}$$

Рассмотрим, далее, симметризованные трехчастичные состояния, но при этом заранее выберем лишь такие трехчастичные волновые функции, которые обладают λ-симметрией относительно перестановки двух своих последних аргументов:

$$\Psi(r_1,\ [r_2,r_3\,]_\lambda) = \lambda\, \Psi(r_1,\ [r_3,r_2\,]_\lambda), \tag{48}$$

что мы отметили, поместив эти аргументы в квадратные скобки с индексом λ. Из этих функций мы можем составить только три ортогональные комбинации: одну полностью λ-симметричную относительно всех своих аргументов:

$$\Psi_\lambda(r_1,r_2,r_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\{\Psi(r_1,\ [r_2,r_3\,]_\lambda) + \lambda\,\Psi(r_2,\ [r_1,r_3\,]_\lambda) + \Psi(r_3,\ [r_1,r_2\,]_\lambda)\} \tag{49}$$

и две комбинации, образующие базис смешанного представления[10]:

$$\Psi'_m(r_1, r_2, r_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\{\Psi(r_1,\ [r_2,r_3\,]_\lambda) - \Psi(r_3,\ [r_1,r_2\,]_\lambda\}, \tag{50}$$

$$\Psi''_m(r_1,r_2,r_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\{\Psi(r_1,[r_2,r_3\,]_\lambda) - 2\Psi(r_2,[r_1,r_3\,]_\lambda) + \Psi(r_3,[r_1,r_2\,]_\lambda)\}. \tag{51}$$

Нас сейчас будут интересовать две последние комбинации. Воспользовавшись (39г), для норм соответствующих векторов получаем

---

[10]В том, что эти комбинации ортогональны, т.е. выражение

$$\sum_{r_1,r_2,r_3} \Psi'_m(r_1, r_2, r_3)\, \Psi''_m(r_1, r_2, r_3) = 0,$$

легко убедиться, переобозначив в сумме $r_1 \Leftrightarrow r_3$ и воспользовавшись тем, что при обратной перестановке в исходный порядок функция (50) приобретает множитель $-\lambda$, а функция (51) — множитель λ и $\lambda^2 = 1$.

$$\| \Psi'^{,''}_{m} \|^2 = p(1 \pm x)[p^2 - (pq - \rho)^2] \sum_{r_1,r_2,r_3} | \Psi'^{,''}_{m}(r_1,r_2,r_3) |^2, \tag{52}$$

где мы ввели обозначения

$$x = \lambda q, \tag{53}$$

и верхний знак перед x отвечает комбинации (50), а нижний — комбинации (51). Учитывая (46), мы заключаем, что положительная определенность норм (52) означает

$$-1 \leq x \leq 1. \tag{54}$$

Полагая $\lambda = \pm 1$, мы получим ограничения на возможные значения исходного параметра q:

$$-1 \leq q \leq 1. \tag{55}$$

Заметим, что разные выражения (52) для норм двух комбинаций (50) и (51) указывают на то, что эти состояния могут физически различаться (например, при $x = \pm 1$ одна из этих комбинаций тождественно обращается в нуль). Поэтому при перестановках их аргументов речь идет не о перестановках состояний *различных* занумерованных частиц (что для тождественных частиц бессмысленно), а о *перестановках состояний*, в которых находятся *какие-то* тождественные частицы. Классификация функций по таким неприводимым представлениям относительно перестановок состояний нужна просто для построения ортогональных комбинаций.

Теперь мы рассмотрим n частиц, относительно состояний которых произведена либо полная симметризация, либо полная антисимметризация, что мы опять обозначим как λ-симметричное состояние, сопоставляя

$$\lambda = \{1 \text{ для симметричного вектора}, \quad -1 \text{ для антисимметричного вектора}\}, \tag{56}$$

$$| \Psi^{(n)}_{\lambda} \rangle = \sum_{r_1,\dots,r_n} \Psi_{\lambda}(r_1,\dots,r_n) a^+_{r_1} \dots a^+_{r_n} | 0 \rangle, \tag{57}$$

где $\Psi_{\lambda}(r_1,\dots,r_n)$ — полностью λ-симметричная функция своих аргументов.

Мы всегда будем выбирать λ-симметрию вектора (57) так, чтобы величина

$$\omega = \lambda \rho \tag{58}$$

была положительной:

$$\omega \geq 0. \tag{59}$$

Это значит, что если исходный параметр $\rho \leq 0$, то мы выбираем $\lambda = -1$ и, следовательно, рассматриваем антисимметричные векторы; если же $\rho \geq 0$, то мы выбираем $\lambda = 1$ и рассматриваем симметричные векторы.

Воспользовавшись (37), для таких векторов мы получим

$$a_r \mid \Psi_\lambda^{(n)} \rangle = R(n,x) \sum_{r_2,\ldots,r_n} \Psi_\lambda(r,r_2,\ldots,r_n) a^+_{r_2} \ldots a^+_{r_n} \mid 0 \rangle, \tag{60}$$

где

$$R(n,x) = \sum_{k=0}^{n-1} [p - \omega(n-k-1)] x^k \tag{61}$$

— числовая функция от x, определяемого соотношением (53). Например,

$$R(1,x) = p, \tag{62а}$$

$$R(2,x) = p(1+x) - \omega, \tag{62б}$$

$$R(3,x) = p(1+x+x^2) - \omega(2+x), \tag{62в}$$

$$R(4,x) = p(1+x+x^2+x^3) - \omega(3+2x+x^2) \tag{62г}$$

и т.д.

Вычисление норм векторов (57) сводится просто к повторному применению (60) и приводит к выражению

$$\| \Psi_\lambda^{(n)} \|^2 = \sum_{r_1,\ldots,r_n} \Psi^*_\lambda(r_1,\ldots,r_n) \langle 0 \mid a_{r_n} \ldots a_{r_1} \mid \Psi_\lambda^{(n)} \rangle =$$

$$= R(1,x)\, R(2,x) \ldots R(n,x) \sum_{r_1,\ldots,r_n} | \Psi_\lambda(r_1,\ldots,r_n) |^2. \tag{63}$$

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать основные теоремы о статистике тождественных частиц.

6. ТЕОРЕМЫ О КОНЕЧНЫХ СТАТИСТИКАХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

Теорема I. *Если параметр p, входящий в условие (36), принимает конечные значения, то в симметричном или антисимметричном состоянии количество частиц не может превышать некоторое конечное число M.*

Доказательство. Полагая последовательно $n = 1,2, \ldots$, мы будем иметь из условия положительной определенности норм соответствующих λ-симметричных векторов (57) требования

$$R(1,x) \geq 0, \quad R(2,x) \geq 0, \ldots \tag{64}$$

Следовательно, для произвольного n мы имеем условие

$$p \sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq \omega \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)x^k. \tag{65}$$

Из условия (42) мы имеем положительность величины p. Далее, согласно нашему выбору λ-симметричного вектора в зависимости от знака ρ, всегда выполняется (59), а для x мы имеем, согласно (54), ограничение $|x| \leq 1$. Следовательно, в левой и правой частях неравенства (65) стоят положительные величины. Но с ростом n правая часть увеличивается быстрее левой. Поэтому при некотором n и заданных конечных p и ω правая часть начнет превосходить левую, и условие положительной определенности норм векторов нарушится. Для того чтобы этого не случилось, при некотором $n = M + 1$ неравенство (65) должно превратиться в равенство. Тогда норма соответствующего λ-симметричного вектора, а также, согласно (63), нормы всех последующих таких векторов обратятся в нуль и, следовательно, сами векторы также обратятся в нуль. Таким образом, должно иметь место соотношение

$$R(M+1,x) = 0. \tag{66}$$

Отсюда мы можем выразить параметр ω через другие параметры:

$$\omega = p\,(\sum_{k=0}^{M} x^k) \,/\, [\sum_{k=0}^{M} (M-k)x^k]. \tag{67}$$

Итак, при заданном конечном значении параметра p число частиц в λ-симметричном состоянии, выбранном в зависимости от знака ρ (см. (58) и (59)), действительно не может превосходить конечное число M.

Мы получаем, что в случае $\rho \leq 0$ мы имеем ограничение на возможное число частиц в антисимметричном состоянии ($\lambda = -1$). Если же $\rho \geq 0$, то мы имеем ограничение на возможное число частиц в симметричном состоянии. Итак, мы имеем соответствие

$$\rho \leq 0,\ \lambda = -1 \text{ — парабозе-статистика,} \tag{68а}$$

$$\rho \geq 0,\ \lambda = 1 \text{ — параферми-статистика} \tag{68б}$$

порядка M.

В частном случае двух частиц в λ-симметричном состоянии мы имеем для нормы вектора, согласно (45), (53), (58), после подстановки (67)

$$\| \Psi_\lambda^{(2)} \|^2 = p^2\beta^2 \sum_{r_1,r_2} | \Psi_\lambda(r_1,r_2) |^2, \tag{69}$$

где мы ввели обозначение

$$\beta^2 = [M - 1 + 2\sum_{k=1}^{M} (M-k)x^k] \,/\, [\sum_{k=0}^{M} (M-k)x^k]. \tag{70}$$

Коэффициент β^2 является мерой нарушения обычных статистик. Рассмотрим последовательно простейшие случаи.

При $M = 1$ мы получаем $\beta^2 = 0$, как и должно быть для обычных бозе- и ферми-статистик, не допускающих каких-либо отклонений от симметричных или антисимметричных состояний соответственно. В этом случае, согласно (62б), мы имеем также

$$p(1 + x) - \omega = 0. \tag{71}$$

Можно показать (см. дополнение 1), что это условие оказывается не только необходимым, но и достаточным для описания обычных статистик.

При $M = 2$ мы имеем

$$\beta^2 = (1 + 2x) / (2 + x). \tag{72}$$

При $x \to -1/2$ величина $\beta^2 \to 0$, что означает малость отклонения такой парастатистики от обычной (бозе- или ферми-) статистики. Например, в случае $\lambda = 1$ такая параферми-статистика допускает помещение двух (но не более!) частиц в одно и то же состояние с малой вероятностью, пропорциональной β^2 (при $q \to -1/2$). Именно такая возможность рассматривалась Игнатьевым и Кузьминым [12] при постановке вопроса о небольшом нарушении принципа Паули, например, для электронов в одном отдельном атоме. Теоретико-полевое рассмотрение такой возможности на основе трилинейных соотношений (29) было предложено Гринбергом и Мохапатрой [13]. Обращая (72) (при $\lambda = 1$ и $x = q$), мы получаем

$$q = (1 - 2\beta^2)/(-2 + \beta^2). \tag{73}$$

Авторы [12,13] полагают произвольный параметр $p=1$, и тогда, согласно (67), параметр ρ также выражается через малый параметр β^2:

$$\rho = (1 - \beta^2 + \beta^4)/(2 - \beta^2). \tag{74}$$

Однако вскоре мы убедимся в том, что в этом случае, как и во всех последующих, условие (66) оказывается необходимым, но недостаточным для описания соответствующих парастатистик, как это было установлено в общем виде в [5]. Мы увидим, что дополнительные ограничения, вытекающие *лишь из общего требования положительной определенности норм векторов состояний*, приводят к весьма жестким ограничениям на возможные значения параметра q, и небольшое нарушение обычных статистик в рамках такой теории становится невозможным. В случае $M = 2$ это было непосредственно доказано для соотношений (29) и (30) при параметризации (73), (74) в работах [14,15]. Общее доказательство этого утверждения при произвольном конечном M приводится здесь впервые.

Отметим также, что в данном случае при $M = 2$ для $x = -1$ величина $\beta^2 = -1$, что нарушает условие положительной определенности нормы вектора (69). Ограничение $\beta^2 \geq 0$ приводит в этом случае к ограничению $-1/2 \leq x$, и вместо (54) мы теперь имеем

$$-1/2 \leq x \leq 1. \tag{75}$$

Рассмотрим еще частный случай $M = 3$. Согласно (70) мы имеем

$$\beta^2 = 2(1 + x)^2 / [2 + (1 + x)^2]. \tag{76}$$

Величина β^2 становится малой при $x \to -1$. Обращение соотношения (76) приводит к выражению

$$x = -1 + \sqrt{2\beta^2(2 - \beta^2)}, \tag{77}$$

при получении мы учли также ограничение (54) и отбросили решение со знаком «минус» перед корнем. Положив $p = 1$, для выражения (67) получим

$$\omega = \sqrt{2\beta^2/(2 - \beta^2)}\,[1 - \sqrt{\beta^2(2 - \beta^2/2}\,]. \tag{78}$$

Заметим, что при $x = -1$ мы имеем $\beta^2 = 0$, что соответствует обычным статистикам. При этом, как видно из (78), $\omega = 0$, и правая часть в исходном соотношении (29) исчезает. Это означает, как и следовало ожидать, что выражение (26), являющееся в этом случае коммутатором или антикоммутатором, становится c-числом.

Рассмотренные выше примеры показывают, что значение $x = -1$ либо вообще запрещено при $M = 2$, либо соответствует обычному квантованию при $M = 3$. Можно обобщить этот результат и с помощью (70) показать, что при четном $M = 2m$ $(m = 1,2,...)$ значение $x = -1$ запрещено (он противоречит условию $\beta^2 \geq 0$ для вектора (69))[11], а при любом нечетном $M = 2m + 1$ $(m = 1,2,...)$ значение $x = -1$ соответствует $\beta^2 = -1$, т.е. обычным статистикам. При рассмотрении нетривиального обобщения обычных статистик мы можем исключить это значение и вместо (54) всегда считать

$$-1 < x \leq 1. \tag{79}$$

[11] Для четных M мы имеем следующие нижние границы: $M = 2$, $x = -0{,}5$; $M = 4$, $x = -0{,}722...$; $M = 6$, $x = -0{,}806$ и т.д. Последовательность этих значений стремится к -1 при $M \to \infty$.

Теорема II. *Для конечных $M \geq 2$, определяемых теоремой* I, *условие положительной определенности норм векторов состояний в фоковском представлении исходных трилинейных соотношений допускает только два значения x, равные нулю и единице*[12].

Доказательство. Рассмотрим вектор, в котором n частиц находятся в λ-симметричном состоянии (определяемом в соответствии со знаком ρ по правилам (68)), но, кроме того, имеется еще одна «лишняя» частица, не находящаяся с остальными в λ-симметричном состоянии. Пусть вектор такого состояния будет

$$|\,\psi_{[n]_\lambda+1}\,\rangle = \sum_{\mathcal{P}\in S_n} \lambda^{\eta(\mathcal{P})} a^+_{r_{\mathcal{P}1}} a^+_r a^+_{r_{\mathcal{P}2}} \ldots a^+_{r_{\mathcal{P}n}} \,|\, 0\,\rangle, \tag{80}$$

где $r \neq r_1, \ldots, r_n$, а $\mathcal{P}$ — любая перестановка индексов $1,2,\ldots,n$ и $\eta(\mathcal{P})$ — четность такой перестановки. С помощью повторного применения (37) можно вычислить норму такого вектора, и она будет составлять

$$\begin{gathered} \|\psi_{[n]_\lambda+1}\|^2 = R(1,x)\ldots R(n-1,\,x) \times \\ \times \{(px-2\omega)xR(n,x) + p(1-x^2)[p-\omega(n-1)] + \omega x[2p-\omega(n-1)]\}, \end{gathered} \tag{81}$$

где мы использовали обозначения (53) и (58). Положим $n = M+1$. Учитывая (66) и (67), мы получим следующее выражение для нормы (81):

$$\begin{gathered} \|\psi_{[M+1]_\lambda+1}\|^2 = R(1,x)\ldots R(M,\,x) \times \\ \times \left\{ -(M+1)p^2x^2(1-x^2)\, \frac{\left[\sum\limits_{k=0}^{[M/2]-1} x^{2k} \left(\sum\limits_{l=0}^{M-2(k+1)} x^l\right)^2\right]}{\left[\sum\limits_{k=0}^{M}(M-k)x^k\right]^2} \right\}, \end{gathered} \tag{82}$$

где сумма по k распространяется до целой части $[M/2]$ без единицы. По условию положительной определенности λ-симметричных векторов для $n = 1,2,\ldots,M$ все множители $R(1,x),\ldots,\,R(M,x)$ должны быть положитель-

[12] Отметим отличие этой формулировки от формулировки аналогичной теоремы, доказанной в [5]. В прежней формулировке было выдвинуто как *требование* обращение в нуль норм *всех* векторов, содержащих более чем $M+1$ частиц, среди которых имеется $M+1$ частиц, находящихся в λ-симметричном состоянии. В данной же формулировке это условие возникает как *следствие* более общего требования положительной определенности норм векторов состояний. Ранее это было показано в случае $M = 2$ [14].

ными. Все остальные множители не могут быть отрицательными, так как все они являются положительными суммами квадратов, а множитель $1 - x^2$ неотрицателен в силу (79). Но перед всем произведением стоит знак «минус», и потому все выражение в целом отрицательно! Единственная возможность избавиться от него заключается в том, чтобы приравнять его нулю. Этого можно добиться тремя способами: либо положить $x = 0$ или ± 1, либо приравнять нулю сумму по k. Но последняя представляет собой сумму квадратов и может обращаться в нуль, только если все ее слагаемые обращаются в нуль. В частности, должно обращаться в нуль первое слагаемое при $k = 0$:

$$\sum_{l=0}^{M-2} x^l = 0. \tag{83}$$

В случае четного $M \geq 2$ это уравнение вообще не имеет вещественных корней. При нечетных $M \geq 3$ оно имеет единственный корень $x = -1$, который, однако, исключается условием (79). Таким образом, остаются лишь две возможности обращения (82) в нуль: $x = 0$ и $x = 1$, что и требовалось доказать.

Нам остается теперь только показать, что в этих двух допустимых случаях никаких дополнительных ограничений не возникает.

7. СООТНОШЕНИЯ ГРИНА

Гриновским соотношениям соответствует значение $x = 1$. В этом случае соотношение (67) преобразуется к простому виду

$$\omega = 2p/M. \tag{84}$$

Удобно положить произвольный параметр p равным порядку парастатистики

$$p = M \text{ и } \omega = 2. \tag{85}$$

Легко видеть, что тогда все условия (64) принимают простой вид

$$n(M - n + 1) \geq 0 \tag{86}$$

и выполняются автоматически для всех $n \leq M$.

Вспоминая обозначения (53) и (58), мы получаем в этом случае для исходных параметров

$$q = \lambda \text{ и } \rho = 2\lambda. \tag{87}$$

Таким образом, исходные соотношения (29) записываются в виде

$$[[a^s, a_r^+]_{-\lambda}, a_t]_- = 2\lambda\,\delta_{rt}\,a_s, \tag{88}$$

и, согласно правилу (68), вместе с условием (36) при $p = M$ будут определять *парaферми-статистику* порядка p при $\lambda = 1$ и *парабозе-статистику* порядка p при $\lambda = -1$. Эти соотношения были непосредственно постулированы Грином [6], а Гринберг и Мессиа [7], используя условие (36), доказали, что они действительно описывают парастатистики порядка p.

Для иллюстрации особенностей гриновского квантования мы рассмотрим лишь простейший случай парастатистики *второго* порядка ($p = M = 2$). Согласно (87), в этом случае мы имеем $qp - \rho = 0$, и общее соотношение (37) преобразуется к виду

$$a_r a^+_{r_1} a^+_{r_2} \ldots a^+_{r_n} \,|\,0\,\rangle = 2\,\delta_{rr_1} a^+_{r_2} \ldots a^+_{r_n} \,|\,0\,\rangle + \\ + \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} 2\delta_{rr_{2k+1}} (-\lambda)^k a^+_{r_2} a^+_{r_1} a^+_{r_4} a^+_{r_3} \ldots a^+_{r_{2k}} a^+_{r_{2k-1}} a^+_{r_{2k+2}} a^+_{r_{2k+3}} \ldots a^+_{r_n} |0\rangle. \tag{89}$$

С помощью этого соотношения можно показать, что, помимо общих трилинейных соотношений (88), в данном случае выполняются также дополнительные соотношения

$$a_{r_1} a_{r_2} a^+_{r_3} + \lambda a^+_{r_3} a_{r_2} a_{r_1} = 2\,\delta_{r_2 r_3} a_{r_1}, \tag{90}$$

$$a_{r_1} a_{r_2} a^+_{r_3} + \lambda a_{r_3} a_{r_2} a_{r_1} = 0 \tag{91}$$

и эрмитово-сопряженные им выражения. Оказывается, что соотношения (90) и (91) заменяют собой общие соотношения (88) при $p = 2$.

Соотношение (91) указывает на то, что волновые функции, входящие в общий вектор (38), должны в данном случае обладать $(-\lambda)$-симметрией (антисимметрией при $\lambda = 1$ и просто симметрией при $\lambda = -1$) относительно аргументов, стоящих на нечетных местах, и отдельно относительно аргументов, стоящих на четных местах. Мы отметим это свойство, записывая такие аргументы в два ряда и пометив скобки индексом «$-\lambda$»:

$$\Psi \begin{bmatrix} r_1 & & r_3 & & \ldots \\ & r_2 & & r_4 & \ldots \end{bmatrix}_{-\lambda}. \tag{92}$$

Очевидно, такая симметрия волновых функций обеспечивает невозможность наличия более чем двух частиц в λ-симметричном состоянии: в симметричном для парафермионов ($\lambda = 1$) и в антисимметричном для парабозонов ($\lambda = -1$).

Схема вторичного квантования, основанная на соотношениях (90) и (91), была сформулирована изначально Грином [6] и независимо Д.В.Волковым [24] и подвергалась затем многочисленным исследованиям [36—39]. Уже по виду волновых функций (92), на которых она определена, можно догадаться, что фактически такая схема описывает совокупность обычных фермионов или бозонов *двух* сортов. Было доказано, что такая схема действительно может быть интерпретирована как схема с обычными фермионами или бозонами, обладающими некоторой скрытой степенью свободы типа изоспина [39]. Более подробное обсуждение возможности описания внутренних симметрий в рамках гриновского квантования можно найти в обзорах [8,9] и в цитированной в них литературе.

Сейчас мы хотим отметить, что в данной схеме автоматически (в рамках фоковского представления) возникли дополнительные соотношения (90) и (91), приведшие к определенному свойству симметрии (92) волновых функций. Например, в случае параферми-статистики, если состояния r_1 и r_3 совпадают, то из (эрмитово-сопряженного) соотношения (91) следует

$$a_r^+ a_{r_2}^+ a_r^+ = 0, \tag{93}$$

что означает обращение в нуль и соответствующего трехчастичного вектора [36,39]. На языке скрытой внутренней симметрии это означает, что частицы, занимающие нечетные состояния в функции (92), имеют одинаковые проекции изоспина и потому уже как просто фермионы не могут находиться в одном и том же квантово-механическом состоянии (см. [39]). Аналогичным свойством обладают и частицы, стоящие на четных местах в функции (92).

Если частицам, стоящим на нечетных и четных местах, приписать соответственно изоспиновые состояния $i_3 = 1/2$ и $-1/2$, то функциям (92) будет отвечать проекция полного изоспина I_3 либо $1/2$ (при нечетном числе частиц), либо 0 (при четном числе частиц). Таким образом, в фоковском пространстве реализуются лишь изоспиновые состояния только с этими двумя проекциями изоспина[13].

Аналогичное выделение лишь некоторых внутренних состояний имеет место и в случаях парастатистик третьего и высших порядков, когда состояния парачастиц интерпретируются как состояния обычных фермионов или бозонов при наличии у них внутренних состояний типа «странности» и т.п. [39]. В этом состоит особенность гриновского квантования, основанного на соотношениях (88).

[13] У гриновского квантования, в отличие от обычного, имеется, помимо фоковского, бесконечное множество других сепарабельных представлений, основанных на вакуумоподобных векторах, которые, однако, уже содержат некоторое начальное количество частиц [39,51]. В этих представлениях и реализуются все другие состояния внутренней степени свободы частиц. Однако при наличии лишь одного сорта парачастиц переходы между различными неприводимыми представлениями гриновских соотношений невозможны. Для их смешивания требуется наличие нескольких сортов парачастиц одного и того же порядка [9].

8. НОВОЕ ПАРАКВАНТОВАНИЕ

Рассмотрим теперь вторую возможность $x = 0$. В этом случае соотношение (67) также преобразуется к простому виду

$$\omega = p/M, \tag{94}$$

и снова удобно положить $p = M$. Тогда $\omega = 1$ и все условия (64) принимают вид

$$M - n - 1 \geq 0 \tag{95}$$

и также автоматически выполняются для всех $n \leq M$. Вновь вспоминая обозначения (53) и (58), мы имеем в этом случае для исходных параметров

$$q = 0 \quad \text{и} \quad \rho = \lambda, \tag{96}$$

и, таким образом, исходные соотношения (29) запишутся тогда

$$[a_s a_r^+, a_t]_- = \lambda\, \delta_{rt}\, a_s. \tag{97}$$

Так же, как и в предыдущем случае, эти соотношения вместе с условием (36) при $p = M$ будут определять *парaферми-статистику* порядка M при $\lambda = 1$ и *парабозе-статистику* порядка M при $\lambda = -1$. Удивительным образом для описания одних и тех же парастатистик конечных порядков оказываются возможными две схемы квантования, основанные на соотношениях (88) и (97) соответственно. Мы не можем пока что предпочесть одну из этих схем другой, но можем лишь выяснить особенности.

Согласно (96) в данном случае $qp - \rho = -\lambda$ и общее соотношение (37) теперь выглядит как

$$\begin{gathered} a_r a_{r_1}^+ a_{r_2}^+ \ldots a_{r_n}^+ \mid 0 \rangle = p\, \delta_{rr_1} a_{r_2}^+ \ldots a_{r_n}^+ \mid 0 \rangle - \\ - \lambda \sum_{k=2}^{n} \delta_{rr_k} a_{r_2}^+ a_{r_3}^+ \ldots a_{r_{k-1}}^+ a_{r_1}^+ a_{r_{k+1}}^+ \ldots a_{r_n}^+ \mid 0 \rangle, \end{gathered} \tag{98}$$

причем $p = M$. Проекции (39) в этом случае имеют вид

$$\langle 0 \mid a_{r_2} a_{r_1} \mid \Psi \rangle = p^2 \Psi^{(2)}(r_1, r_2) - \lambda p \Psi^{(2)}(r_2, r_1), \tag{99а}$$

$$\begin{gathered} \langle 0 \mid a_{r_3} a_{r_2} a_{r_1} \mid \Psi \rangle = p^3 \Psi^{(3)}(r_1, r_2, r_3) - \lambda p^2 \Psi^{(3)}(r_1, r_3, r_2) - \\ - \lambda p^2 \Psi^{(3)}(r_2, r_1, r_3) - \lambda p^2 \Psi^{(3)}(r_2, r_1, r_3) - \lambda p^2 \Psi^{(3)}(r_3, r_2, r_1) + \\ + p \Psi^{(3)}(r_3, r_1, r_2) + p \Psi^{(3)}(r_2, r_3, r_1). \end{gathered} \tag{99б}$$

Вообще, проекцию для частиц можно написать в следующем общем виде:

$$\langle 0 | a_{r_n} a_{r_{n-1}} \ldots a_{r_2} a_{r_1} | \Psi \rangle =$$
$$= \sum_{\mathcal{P} \in S_n} (-\lambda^{\mathfrak{N}(\mathcal{P})} p^{n-\mathfrak{N}(\mathcal{P})} \Psi^{(n)}(r_{\mathcal{P}_1}, r_{\mathcal{P}_2}, \ldots, r_{\mathcal{P}_n}), \tag{100}$$

где $\mathcal{P}$ — любая перестановка индексов $1,2,\ldots n$, а $\mathfrak{N}(\mathcal{P})$ — минимальное число транспозиций, необходимое для восстановления исходного натурального порядка.

Из (99а,б) видно, что, если $p(= M) = 2$, то две частицы могут находиться в λ-симметричном состоянии, тогда как три частицы не могут находиться в таком состоянии (сумма коэффициентов в правой части (99б) $p^3 - 3p^2 + 2p$ в этом случае обращается в нуль). Таким образом, мы вновь имеем дело с параферми ($\lambda = 1$)- или парабозе ($\lambda = -1$)- статистиками второго порядка. Однако никаких других соотношений для трехчастичного состояния не возникает. В этом состоит отличие этого случая от предыдущего гриновского квантования.

Вообще, если $p = M$, то λ-симметричная проекция (100) при $n = M + 1$ обращается в нуль. Следовательно, парастатистика M-го порядка без каких-либо дополнительных ограничений определена на функциях, получающихся из любой функции в виде комбинации, стоящей в правой части (100). Такие функции можно считать обобщениями симметричных и антисимметричных волновых функций для бозе- и ферми-статистик. На этих функциях автоматически обращается в нуль λ-симметричная комбинация

$$\sum_{\mathcal{P} \in S_{M+1}} \lambda^{\eta(\mathcal{P})} a_{r_{\mathcal{P}_1}} \ldots a_{r_{\mathcal{P}(M+1)}} = 0, \tag{101}$$

где $\eta(\mathcal{P})$ — четность перестановки $\mathcal{P}$. Но никаких дополнительных соотношений между операторами рождения и уничтожения не возникает.

В разд.10 будет показано, что для такой схемы парастатистик состояния парачастиц можно интерпретировать как состояния обычных фермионов или бозонов при наличии у них вырождения по некоторой внутренней степени свободы. Но при этом не происходит выделения какихлибо внутренних состояний, как это имело место в случае гриновского квантования.

9. БЕСКОНЕЧНАЯ СТАТИСТИКА

При доказательстве теорем I и II мы предполагали, что параметр p, входящий в соотношение (36), ограничен. Устремим теперь значение этого параметра к бесконечности. Наши теоремы в этом случае перестают действовать и этот случай бесконечного p следует рассматривать особо.

Рассмотрим предельное выражение соотношения (37), отбрасывая в нем все слагаемые в правой части, кроме пропорциональных $p \to \infty$. Мы получим для действия оператора уничтожения на базисные векторы фоковского представления следующий простой результат:

$$a_s a^+_{r_1} \dots a^+_{r_n} \mid 0 \rangle = p \sum_{k=1}^{n} \delta_{sr_k} q^{k-1} a^+_{r_1} \dots a^+_{r_{k-1}} a^+_{r_{k+1}} \dots a^+_{r_n} \mid 0 \rangle. \tag{102}$$

Из него вытекает, что в этом представлении операторы рождения и уничтожения должны удовлетворять в таком предельном случае *билинейным* соотношениям

$$a_s a^+_r - q a^+_r a_s = p\, \delta_{sr}. \tag{103}$$

Для того чтобы исключить бесконечнорастущий фактор p, мы совершим перенормировку операторов

$$a_r,\ a^+_r \to \sqrt{p} a_r,\ \sqrt{p} a^+_r, \tag{104}$$

и тогда соотношения (103) принимают вид

$$a_s a^+_r - q a^+_r a_s = \delta_{sr}. \tag{105}$$

Алгебра операторов, удовлетворяющих таким соотношениям, была недавно рассмотрена Гринбергом [16] с целью воспользоваться ею для формулировки «небольшого» нарушения обычных статистик (в частности, принципа Паули), но уже в рамках нелокальной теории[14].

Как видно из сравнения (26) и (105), в исходные соотношения (29) и (30) входит как раз «$(-q)$-мутатор», превращающийся теперь в c-числовой символ Кронекера, коммутирующий со всеми операторами. Левые части (29) и (30) также обращаются в нуль, поскольку после перенормировки (104) мы имеем

$$\rho / p \to 0 \tag{106}$$

при конечном ρ.

Отметим, что в общем случае, если $q^2 \neq 1$, никаких билинейных соотношений между двумя операторами a или же двумя операторами a^+ в данном предельном случае не возникает. Для проекций мы имеем

$$\langle 0 \mid a_{r_2} a_{r_1} \mid \Psi \rangle = \Psi^{(2)}(r_1, r_2) + q \Psi^{(2)}(r_2, r_1), \tag{107}$$

$$\langle 0 \mid a_{r_3} a_{r_2} a_{r_1} \mid \Psi \rangle = \Psi^{(3)}(r_1, r_2, r_3) + q \Psi^{(3)}(r_1, r_3, r_2) + q \Psi^{(3)}(r_2, r_1, r_3) +$$

[14] Для одноуровневой системы такие соотношения были предложены Курышкиным [52] и изучались затем в работах [53]. Нас сейчас, однако, интересует *статистика* частиц и потому с самого начала мы рассматриваем бесконечноуровневую систему.

$$+ q^2\Psi^{(3)}(r_3,r_1,r_2) + q^2\Psi^{(3)}(r_2,r_3,r_1) + q^2\Psi^{(3)}(r_3,r_2,r_1). \qquad (108)$$

Мы видим, что функции в правых частях (107) и (108), вообще говоря, никакой симметрией не обладают, если только $q^2 \neq 1$ (т.е. если мы не имеем дело с обычными статистиками). Легко сформулировать общее правило выражения проекции через комбинацию амплитуд

$$\langle 0 \,|\, a_{r_n} a_{r_{n-1}} \ldots a_{r_2} a_{r_1} \,|\, \Psi \rangle = \sum_{\mathcal{P} \in S_n} q^{\mathfrak{M}(\mathcal{P})} \Psi^{(n)}(r_{\mathcal{P}1}, r_{\mathcal{P}2}, \ldots, r_{\mathcal{P}n}), \qquad (109)$$

где $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$ — минимальное число последовательных (соседних) транспозиций (ср. (100), где речь шла о минимальном числе просто транспозиций — перестановок двух чисел, стоящих на любых местах).

В силу того, что проекции (109) не обладают заранее какой-либо симметрией, из них можно составлять любые комбинации, относящиеся ко всем неприводимым представлениям группы перестановок S_n. В частности, нет никаких ограничений на возможное число частиц в симметричных или антисимметричных состояниях. Такие статистики без ограничений на допустимые схемы Юнга получили наименование *бесконечных* статистик. Мы видим, что таких статистик может быть континуум при непрерывном изменении параметра q, характеризующего данную бесконечную статистику.

Условия (64) положительной определенности норм симметричных ($\lambda = 1$) или антисимметричных ($\lambda = -1$) векторов принимают теперь вид (с учетом (61) и (106))

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq 0 \qquad (110)$$

при любом $n = 2,3,\ldots$. При четных $n = 2m$ ($m = 1,2,\ldots$) это условие означает

$$(1 + x) \sum_{k=0}^{m-1} x^{2k} \geq 0 \qquad (111)$$

и всегда выполняется, если

$$-1 \leq x. \qquad (112)$$

При нечетных $n = 2m + 1$ ($m = 1,2,\ldots$) условие (110) удовлетворяется всегда, так как в этом случае оно имеет вид

$$(1 + x) \sum_{k=0}^{m-1} x^{2k} + x^{2m} \geq 0. \qquad (113)$$

Итак, единственным ограничением для параметра x является (112). Вспоминая, что $x = \lambda q$, и требуя, чтобы (112) выполнялось как для симметричных ($\lambda = 1$), так и для антисимметричных ($\lambda = -1$) векторов, получаем окончательно допустимый интервал изменения параметра q:

$$-1 \le q \le 1. \tag{114}$$

Можно показать, что никаких иных ограничений условие положительной определенности норм любых векторов на параметр q не налагает [16].

Как можно увидеть из выражений (107) и (108), при приближении q к своим нижнему и верхнему пределам вес антисимметричной и симметричной проекций соответственно возрастает, и мы получаем непрерывное приближение к ферми- и бозе-статистикам. Этим обстоятельством недавно и воспользовался Гринберг [16] для того, чтобы на основе билинейных соотношений (105) развить схему нарушения обычных статистик. Как мы видим, в рамках схемы с одними только частицами, подчиняющимися бесконечной статистике, это оказывается вполне возможным в отличие от предыдущей схемы конечных парастатистик. Однако здесь уместно напомнить доказанную в рамках локальной алгебры наблюдаемых Фреденхагеном [40] теорему о том, что в рамках этой алгебры для бесконечной статистики невозможно сформулировать сопряженный сектор античастиц и, тем самым, такая статистика противоречит локальности. Более того, в разд.15, где мы перейдем к формулировке локальных релятивистских полей, включающих как частицы, так и античастицы, мы увидим, что при переходе к пределу $p \to \infty$ теория из локальной действительно становится нелокальной, но при этом параметр q оказывается и в этой нелокальной теории ограниченным только тремя значениями $q = \pm 1, 0$ из-за самого наличия античастиц. Сейчас же мы лишь отметим определенное поведение статистик частиц для этих значений q при $p \to \infty$.

В случае гриновского квантования при $q = \pm 1$ из (103) следует, что параферми-статистика ($\lambda = 1$) в таком пределе переходит в бозе-статистику, а парабозе-статистика ($\lambda = -1$) переходит в ферми-статистику! Такое предельное изменение самого характера статистики для гриновского квантования было обнаружено еще Гринбергом и Мессиа [54]. Поскольку для конечных статистик имеет место обобщенная теорема Паули о правильной связи спина с парастатистикой, то в этом предельном случае такая правильная связь, очевидно, нарушается. Причина этого нарушения заключается как раз в том, что теория в таком пределе становится нелокальной.

Предел $p \to \infty$ в случае $q = 0$ имеет иной вид. В этом случае после перенормировки (104) и подстановки $q = 0$ в (105) мы получаем простое билинейное соотношение

$$a_s a_r^+ = \delta_{sr}. \tag{115}$$

Это соотношение было предложено Гринбергом [19] непосредственно в качестве примера бесконечной статистики. Как предельный случай трилинейных соотношений (97) при $p \to \infty$, соотношение (115) было получено в работе [10]. Согласно формулам (107)—(109) в случае $q = 0$ мы получаем взаимно-однозначное соответствие проекций и амплитуд

$$\langle 0 \,|\, a_{r_n} \ldots a_{r_2} a_{r_1} \,|\, \Psi \rangle = \Psi^{(n)}(r_1, r_2, \ldots, r_n). \tag{116}$$

При этом функции в правой части (116) заранее никакой симметрией не обладают. По этой причине *все* симметризованные по соответствующим схемам Юнга состояния имеют равные веса и в результате мы получаем классическую статистику Максвелла — Больцмана [10,19]! Этому факту можно придать следующий смысл. В следующем разд.10 будет показано, что любую парастатистику конечного порядка можно интерпретировать как обычную бозе- или ферми-статистику при наличии вырождения по некоторой дополнительной внутренней степени свободы, число различных значений которой равно порядку парастатистики. Стремление парастатистики к бесконечности соответствует вырождению по внутренней степени свободы, принимающей бесконечное число значений. Этими скрытыми степенями свободы и могут различаться (в принципе) состояния частиц, оказывающиеся равновероятными в статистическом смысле. В результате и возникает классическая статистика для одинаковых, но различающихся внутренним состоянием частиц.

Как мы увидим в разд.15, квантовая теория поля, соответствующая случаю $q = 0$, в пределе $p \to \infty$ также становится нелокальной: в ней частицы и античастицы квантуются по-разному. Таким образом, теорема Фреденхагена и в этом случае остается в силе.

Теперь ясным становится также смысл противоречия предельных статистик со спином для гриновского квантования. При таком квантовании из всех внутренних состояний выбираются (в фоковском представлении) лишь определенные состояния. При этом симметричным состояниям в случае парафермионов (или антисимметричным состояниям в случае парабозонов) отвечает антисимметричная функция по внутренним состояниям фермионов (или бозонов). При $p \to \infty$ вес этих антисимметричных внутренних состояний при фиксированном полном внутреннем состоянии фермионов (бозонов) возрастает по сравнению с другими внутренними состояниями, и, в результате, для таких выделенных внутренних состояний возникает «кажущаяся бозе-статистика» для фермионов и «кажущаяся ферми-статистика» для бозонов, вырожденных по бесконечной внутренней степени свободы при ее фиксированном полном значении. В случае же $q = 0$ такая фиксация отсутствует и разрешены все ее возможные значения.

В последнем случае для бесконечной статистики, определяемой соотношением (115), оператор числа частиц уже нельзя записать в билинейной форме. Однако Гринберг [19] предложил в этом случае для оператора числа частиц следующее выражение в виде бесконечного ряда:

$$N_r = a_r^+ a_r + \sum_{r_1} a_{r_1}^+ a_r^+ a_r a_{r_1} + \sum_{r_1, r_2} a_{r_2}^+ a_{r_1}^+ a_r^+ a_r a_{r_1} a_{r_2} + \dots \tag{117}$$

Легко убедиться в том, что такой оператор действительно удовлетворяет требуемым от оператора числа частиц свойствам

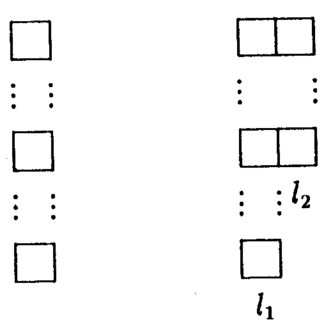
$$[N_r, a_s]_- = -\delta_{rs} a_s, \quad [N_r, a_s^+]_- = \delta_{rs} a_s^+. \tag{118}$$

Вопрос о статистике частиц для случаев промежуточных значений параметра q в допустимых интервалах $-1 < q < 0$ и $0 < q < 1$ в настоящее время до конца не исследован[15]. Можно ожидать, что при приближении $q \to \pm 1$ вес антисимметричных или симметричных состояний будет возрастать, и мы будем иметь плавный переход от классической статистики Максвелла — Больцмана (при $q = 0$) к бозе- и ферми-статистикам. Оператор числа частиц для таких случаев был недавно построен в работе [55].

10. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПАРАСТАТИСТИК КАК ОБЫЧНЫХ СТАТИСТИК ПРИ ТОЧНОМ ВЫРОЖДЕНИИ

Рассмотрим сначала простейший пример параферми-статистики второго порядка, а затем обобщим этот результат на парастатистику произвольного порядка.

В этом случае запрещено наличие более чем двух частиц в симметричном состоянии. Функции, удовлетворяющие этому условию, составляются из произвольных функций по правилу (100) при $p = 2$. Такие функции разлагаются на неприводимые представления, описываемые схемами Юнга с не более чем двумя столбцами:



[15]Недавно этот вопрос исследовался в работе [65].

В таком случае каждое неприводимое представление (l) группы S_n перестановок состояний n тождественных частиц однозначно определяется двумя целыми числами: длинами этих столбцов

$$(l_1, l_2),\ l_1 \ge l_2 \ge 0,\ l_1 + l_2 = n, \tag{119}$$

и имеет размерность

$$N_l = n!(l_1 - l_2 + 1)/(l_1 + 1)!l_2!$$

При фиксированном числе частиц n данное неприводимое представление однозначно характеризуется лишь одним параметром: разностью длин столбцов. Для дальнейшего нам будет удобно ввести полуразность

$$I = (l_1 - l_2)/2. \tag{120}$$

Этот параметр можно считать наблюдаемой, характеризующей состояние частиц, которое определяется симметрией данного неприводимого представления. Мы будем называть его «изоспином».

Покажем теперь, что при объединении двух систем из n_1 и n_2 частиц, характеризуемых изоспинами I_1 и I_2, полные изоспины этих систем действительно складываются как изоспины. Пусть эти две системы характеризуются схемами Юнга с длинами столбцов $(l_1^{(i)}, l_2^{(i)})$, $i = 1,2$. Тогда соответствующими изоспинами будут

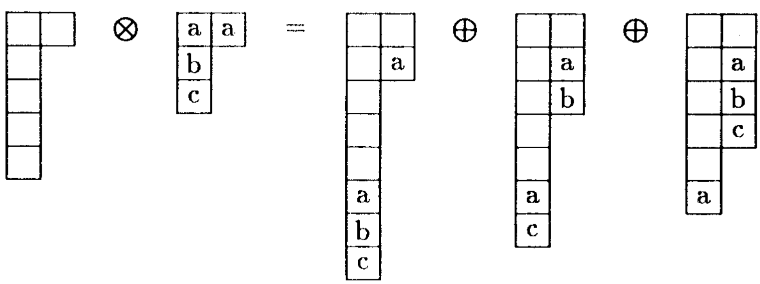
$$I_i = (l_1^{(i)} - l_2^{(i)})/2,\quad i = 1,2. \tag{121}$$

При объединении этих двух систем возникает полная система из $n = n_1 + n_2$ частиц, которой соответствует, вообще говоря, приводимое представление группы S_n, составленное как прямое (внешнее) произведение двух исходных неприводимых представлений. Его базисные векторы получаются как всевозможные произведения базисных векторов умножаемых систем. Но при этом, в силу тождественности частиц, следует перебрать всевозможные разбиения n частиц, пронумерованных как $1,2,\ldots, n$, на n_1 частиц с любыми номерами и n_2 частиц с оставшимися номерами[16]. Далее, каждое из таких произведений следует симметризовать по правилу (100) (при $p = 2$) в соответствии с допустимым классом функций для данной парастатистики.

[16]Из-за таких «переборов» всех частиц такое прямое произведение неприводимых представлений S_{n_1} и S_{n_2} и называется «внешним», поскольку оно дает уже представление полной группы S_n.

Пространство, состоящее из таких произведений базисных векторов, следует теперь разбить на неприводимые представления S_n и тем самым найти, какие изоспины возникают при сложении изоспинов I_1 и I_2. Но при этом следует иметь в виду, что при таком разбиении для данного класса функций возникают лишь схемы Юнга с не более чем двумя столбцами.

Указанное разбиение можно совершить с помощью следующего графического метода (см. [56, с.297]). Пусть перемножаются две какие-либо схемы Юнга, отвечающие двум неприводимым представлениям S_{n_1} и S_{n_2}, как это показано на нижеследующей диаграмме для случая $n_1 = 6$ и $n_2 = 4$. Следует заполнить во второй схеме все клетки первой строки одной и той же буквой a, все клетки второй строки — буквой b и т.д.



$I_1 = 2$ $\quad\quad$ $I_2 = 1$ $\quad\quad$ $I = 3$ $\quad\quad$ $I = 2$ $\quad\quad$ $I = 1$

Теперь мы начнем добавлять к первой схеме Юнга клетки второй схемы, соблюдая следующие правила: 1) две одинаковые буквы никогда не должны попадать в один и тот же столбец; 2) при каждом добавлении этих букв должны получаться правильные *решеточные схемы*. Это означает, что на каждом шаге при составлении «слова» из добавляемых букв при чтении по «восточному» способу справа налево и сверху вниз число букв a должно быть не меньше числа букв b, число букв b должно быть не меньше числа букв c и т.д. (в нашем примере такими «восточными словами» являются $cbaa$, $caba$, $acba$ и, например, запрещено «слово» $baca$, которое получилось бы, если бы мы во второй схеме в правой части переставили местами b и c).

Очевидно, такое умножение коммутативно и умножаемые схемы можно менять местами. Мы всегда можем их выбрать так, чтобы было

$$l_1^{(1)} - l_2^{(1)} \geq l_1^{(2)} - l_2^{(2)}, \quad \text{т.е.} \quad I_1 \geq I_2. \tag{122}$$

С помощью вышеприведенного правила легко показать, что получаются следующие неприводимые представления S_n:

$$\begin{aligned}&(l_1^{(1)} + l_1^{(2)},\ l_2^{(1)} + l_2^{(2)}),\\ &(l_1^{(1)} + l_1^{(2)} - 1,\ l_2^{(1)} + l_2^{(2)} + 1),\\ &\ldots\\ &(l_1^{(1)} + l_2^{(2)},\ l_2^{(1)} + l_1^{(2)}).\end{aligned} \tag{123}$$

Таким представлениям отвечают изоспины

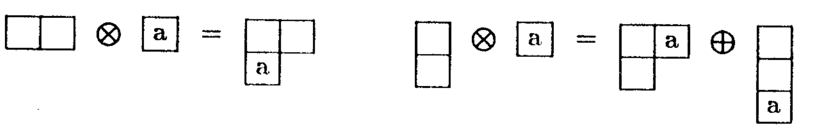
$$I = I_1 + I_2,\ \ I_1 + I_2 - 1, \ldots, I_1 - I_2.$$

Если учесть и случай, когда $I_1 \le I_2$, то правило сложения имеет вид

$$I = I_1 + I_2,\ \ I_1 + I_2 - 1, \ldots, \ |I_1 - I_2|. \tag{124}$$

Таким образом, это правило действительно соответствует правилу сложения обычных изоспинов.

Мы можем ввести изоспин $\iota = 1/2$ для каждой отдельной частицы (клетки) и составлять полный изоспин системы n частиц путем последовательного сложения изоспинов. Например, при сложении изоспинов двух частиц возникают изоспины $I = 0$ и $I = 1$, соответствующие симметричной и антисимметричной волновым функциям. Если теперь добавить третью частицу, то для парастатистики второго порядка могут возникнуть следующие диаграммы:



$I = 0 \qquad \iota = \frac{1}{2} \qquad I = \frac{1}{2} \qquad\qquad I = 1 \qquad \iota = \frac{1}{2} \qquad I = \frac{1}{2} \qquad I = \frac{3}{2}$

При этом могут возникать одни и те же конечные изоспины (в нашем примере $I = 1/2$) при различных способах сложения изоспинов отдельных частиц. Такие одинаковые конечные состояния можно характеризовать с помощью симметрии подсистемы, получающейся удалением из системы одной частицы. Следует отметить, что речь идет не об удалении какой-либо занумерованной, скажем, третьей частицы, а о физическом удалении одной из *тождественных* частиц [31].

Рассмотрим для примера случай трех парафермионов (второго порядка), состояние которых относится к смешанному представлению. Оно определяется набором двух функций:

$$\Psi'_m\ (x_1,x_2,x_3) = [\Psi(x_1,x_2,x_3) + \Psi(x_2,x_1,x_3) -$$
$$- \Psi(x_3,x_2,x_1) - \Psi(x_3,x_1,x_2)\ ] / 2, \tag{125}$$

$$\Psi''_m\ (x_1,x_2,x_3) = [\Psi(x_1,x_2,x_3) + 2\Psi(x_1,x_3,x_2) - \Psi(x_2,x_1,x_3) -$$
$$- 2\Psi(x_2,x_3,x_1) - \Psi(x_3,x_2,x_1) + \Psi(x_3,x_1,x_2)\,] / (2\sqrt{3}). \tag{126}$$

Удалим теперь *одну из тождественных частиц*, т.е. будет считать, что волновую функцию трех частиц можно представить в виде произведения

$$\Psi(x_1,x_2,x_3) = f(x_1,x_2)\psi(x_3), \tag{127}$$

при условии, что области отличия от нуля функций f и ψ не перекрываются. Для вероятности того, что тождественные частицы находятся в точках x_1, x_2 и x_3, мы должны составить *инвариантное относительно перестановок координат частиц* выражение

$$W(x_1,x_2,x_3) = [\,|\Psi'_m\ (x_1,x_2,x_3)|^2 + |\Psi''_m(x_1,x_2,x_3)\,|^2]/ 2 =$$
$$= \{[\,|f_s(x_1,x_2)\,|^2 + (1/3)\,|f_a(x_1,x_2)\,|^2]\,|\,\psi(x_3)\,|^2 +$$

+ два аналогичных слагаемых, получаемых циклической перестановкой индексов: (2,3,1) и (3,1,2)} /4, (128)

где

$$f_s(x_1,x_2) = [f(x_1,x_2) + f(x_2,x_1)\,]/ \sqrt{2}, \tag{129}$$

$$f_a(x_1,x_2) = [f(x_1,x_2) - f(x_2,x_1)\,]/ \sqrt{2}. \tag{130}$$

Приготовим теперь определенное состояние двух близких тождественных частиц (скажем, с помощью измерения их полного относительного момента), например, симметричное, так что

$$f(x_1,x_2) = f(x_2,x_1). \tag{131}$$

Затем включим в рассмотрение третью удаленную частицу. Векторы (125) и (126) превратятся в выражения, подобные (50) и (51):

$$\Psi'_m\ (x_1,x_2,x_3) = [2f_s(x_1,x_2)\,\psi(x_3) - f_s(x_3,x_2)\,\psi(x_1) -$$
$$- f_s(x_3,x_1)\,\psi(x_2)\,]/\sqrt{6}, \tag{132}$$

$$\Psi''_m\ (x_1,x_2,x_3) = [f_s(x_1,x_3)\,\psi(x_2) - f_s(x_2,x_3)\,\psi(x_1)\,]/\sqrt{2}. \tag{133}$$

Вероятность обнаружения частиц в точках x_1, x_2, x_3, согласно (128), (132) и (133), составит

$$W(x_1,x_2,x_3) = [\,|f_s(x_1,x_2)\,|^2\,|\,\psi(x_3)\,|^2 + \ |f_s(x_2,x_3)\,|^2\,|\,\psi(x_1)\,|^2 +$$

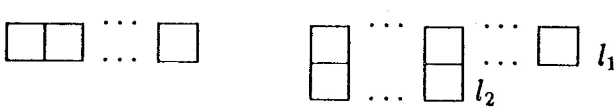
$$+ \; |f_s(x_3,x_1)|^2 \, |\psi(x_2)|^2]/\,3. \qquad (134)$$

Аналогичное выражение можно получить и для системы трех частиц, имеющей подсистему из двух частиц, находящихся в антисимметричном состоянии.

Разобранный пример показывает, что можно характеризовать каждое состояние n тождественных частиц с помощью их собственной симметрии и симметрии соответствующих подсистем из $n-1$, $n-2$, ..., 2 тождественных частиц[17]. Этому же правилу соответствует правило сложения изоспинов подсистем в полный спин.

Естественно, мы можем теперь ввести для каждой частицы *вспомогательную* изоспиновую переменную ξ, принимающую два значения: $\xi = \pm 1/2$. Полное изоспиновое пространство для частиц получается как прямое произведение всех одночастичных изоспиновых пространств: $\xi^n = \xi \otimes \xi \otimes \ldots \otimes \xi$. В этом пространстве можно определить полную изоспиновую функцию, составленную в виде произведения изоспиноров для каждой частицы.

На спинорах определены преобразования группы $SU(2)$, и ее неприводимые представления определяются симметризованными комбинациями спинорных функций в соответствии со схемами Юнга, содержащими *не более двух строк*:



Каждое такое приводимое представление характеризуется изоспином I, определяемым (120), и имеет $2I + 1$ базисных векторов, соответствующих различным проекциям полного изоспина:

$$I_3 = \sum_{i=1}^{n} \iota_3(\xi_i). \qquad (135)$$

Следует заметить, что с каждым вектором неприводимого представления S_n, изображаемого данной схемой Юнга, связывается целое неприводимое представление группы $SU(2)$, и все такие представления эквивалентны.

Теперь ясно, каким образом составить полностью антисимметричную (фермионную) волновую функцию из волновых функций парафермио-

---

[17]Подчеркнем, что при последовательном удалении отдельных частиц оставшиеся частицы остаются тождественными и никаким образом не могут быть отличны одна от другой. Такое свойство называется «кластерным законом». Оно было положено в основу классификации статистик тождественных частиц в работах [31].

нов, относящихся к данному неприводимому представлению (l) группы S_n. Нужно перемножить базисные векторы этого представления на базисные векторы сопряженного[18] неприводимого представления $(\tilde{l})$ в изотопическом пространстве ξ^n:

$$\Psi^{(l)}_{I,M}(x_1, \xi_1;...; x_n, \xi_n) = \sum_{i=1}^{N_l} \Psi^{(l,i)}(x_1,..., x_n) \times \tilde{\phi}^i_{\alpha'...\alpha^{(n)}}(\xi_1,..., \xi_n), \quad (136)$$

где $M = \alpha' + ... + \alpha^{(n)}$. При этом возникает $2l + 1$ функций, различающихся проекциями изоспина M и составляющих базис неприводимого представления группы $SU(2)$ с полным изоспином $I = (l_1 - l_2)/2$. Фиксируем теперь какое-либо (неважно, какое) значение M и произведем усреднение вероятности по вспомогательным переменным $\xi_1,..., \xi_n$. В силу ортогональности базисных векторов $\tilde{\phi}$ получим выражение для вероятности

$$W^{(l)}(x_1,..., x_n) = \sum_{\xi_1,..., \xi_n} | \Psi^{(l)}_{I,M}(x_1, \xi_1; ...; x_n, \xi_n) |^2 =$$

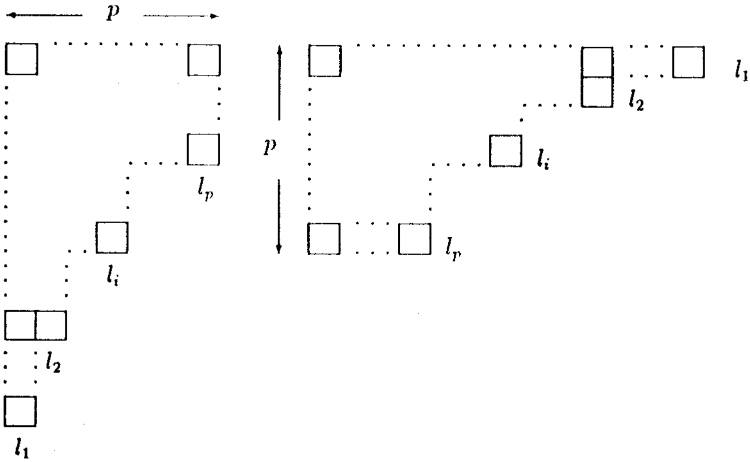
$$= \sum_{i=1}^{N_l} | \Psi^{(l,i)}(x_1,..., x_n) |^2. \quad (137)$$

Таким образом, это выражение можно, с одной стороны, рассматривать как вероятность обнаружения *тождественных парафермионов* в точках $x_1,...,x_n$, инвариантную относительно перестановок этих точек, а с другой стороны — как вероятность обнаружения *фермионов* в этих точках, но обладающих дополнительным изоспином, по которому производится усреднение. Аналогичные выражения можно написать и для других наблюдаемых.

В силу того, что вероятность (137) не зависит от того, какую проекцию M изоспина I мы выбрали, теория будет инвариантной относительно $SU(2)$-преобразований в изоспиновом пространстве. Параферми-статистика второго порядка действительно оказывается эквивалентной обычной ферми-статистике при наличии *точной* $SU(2)$-симметрии во вспомогательном изоспиновом пространстве.

Очевидно, наше рассмотрение легко обобщить на параферми- или парабозе-статистику любого порядка p, когда волновые функции (100) допускают схемы Юнга с не более чем p столбцами в случае параферми-статистики

[18]Сопряженными называются схемы, у которых столбцы заменены на строки и наоборот.



Аналогично для парабозе-статистики допускаются диаграммы с не более чем p строками.

Каждое неприводимое представление характеризуется p целыми числами

$$(l) = (l_1, l_2, \ldots, l_p), \tag{138}$$

такими, что

$$l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_p \geq 0, \quad l_1 + l_2 + \ldots + l_p = n. \tag{139}$$

При заданном n мы имеем $p - 1$ параметров

$$L_1 = l_1 - l_2,\ L_2 = l_2 - l_3, \ldots, L_{p-1} = l_{p-1} - l_p. \tag{140}$$

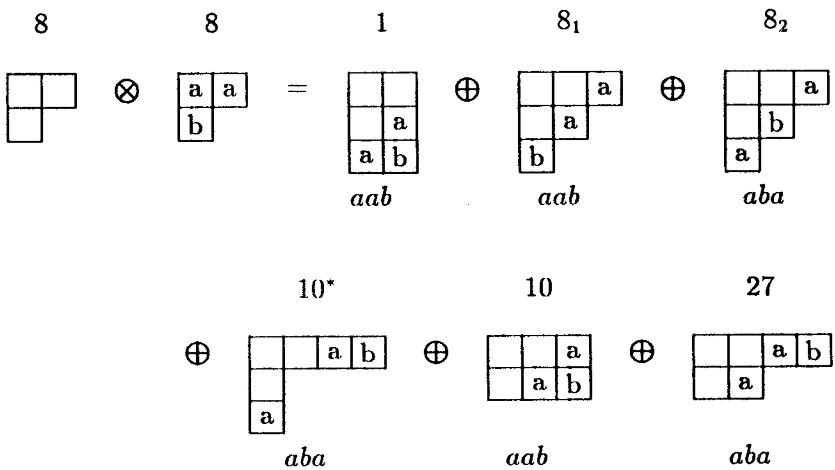
Размерность представления составляет

$$N_l = n\,! \prod_{j > i = 1}^{p} (l_i - l_j - i + j) \,/\, [(l_1 + p - 1)!(l_2 + p - 2)! \ldots l_p!\,].$$

Составление системы n парачастиц из двух подсистем с числами парачастиц n_1 и $n_2 (n_1 + n_2 = n)$ производится точно так же, как это делалось для случая $p = 2$. По тому же самому правилу производится разложение внешнего произведения неприводимых представлений групп S_{n_1} и S_{n_2} на неприводимые представления группы S_n. При этом следует учитывать, что в таком разложении могут появляться лишь схемы с не более чем p столбцами в случае параферми-статистики и с не более чем p строками в случае парабозе-статистики.

В случае параферми-статистики сопоставим схемам Юнга, определяющим для парачастиц неприводимые представления группы S_n, *сопряженные* («перевернутые») схемы Юнга, содержащие не более p строк, как это показано на нашей диаграмме (для парабозе-статистики сами исходные диаграммы имеют такой вид, и в этом случае следует взять *те же* диаграммы). Этим сопряженным диаграммам можно сопоставить неприводимые представления группы $SU(p)$ в некотором вспомогательном p-мерном *унитарном пространстве*. При этом все *инварианты* группы $SU(p)$ можно выразить через параметры (142) исходной диаграммы[19]. Таким образом, каждое неприводимое представление парачастиц может быть охарактеризовано значениями инвариантов — операторов Казимира для сопряженной диаграммы группы $SU(p)$. Заметим, что приводимые представления всегда можно представить в виде прямой суммы неприводимых.

Разложению внешнего произведения групп S_{n_1} и S_{n_2} по представлениям группы S_n для парачастиц соответствует разложение *внутреннего* произведения представлений группы $SU(p)$ на *ее же* неприводимые представления (именно поэтому такое произведение называется «внутренним»). Но последнее разложение совершается *по тем же самым* правилам (см. [58,с.94]), что и исходное разложение внешнего произведения неприводимых представлений парачастиц по представлениям S_n, только теперь последовательно (на каждом шаге) возникающие «слова» следует читать, по «европейскому» способу (слева направо), как это показано на нижеследующей диаграмме в случае $SU(3)$ для произведения двух октетов.



[19]В случае $SU(3)$ эти инварианты имеют вид [57]:
$F^2 = (L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2)/3 + L_1 + L_2$, $G_3 + [2(L_1 + L_2)^2 + L_1L_2](L_1 - L_2)/9 + (2L_1 + L_2)(L_1 + 2)$.

Размерность неприводимого представления группы $SU(p)$ подсчитывается с помощью следующей формулы (см. [59, с.275]):

$$N[l\,] = \prod_{k,i=1}^{p} (l_i - l_k - i + k)/(k - i).$$

В случае $SU(3)$ имеем

$$N[l\,] = (L_1 + 1)(L_2 + 1)(L_1 + L_2 + 2) / 2.$$

Эти размерности указаны над соответствующими схемами Юнга.

Мы заключаем, что парастатистике любого конечного порядка p можно сопоставить группу $SU(p)$, инварианты которой — операторы Казимира, определяемые числами (L), характеризуют симметрию неприводимых представлений парачастиц и являются наблюдаемыми. В общем случае, однако, нет простого правила сложения таких операторов, как это имело место для изоспина. Значения этих операторов для данного представления следует определять непосредственно из вида диаграмм, получающихся при разложении произведения схем Юнга на неприводимые части.

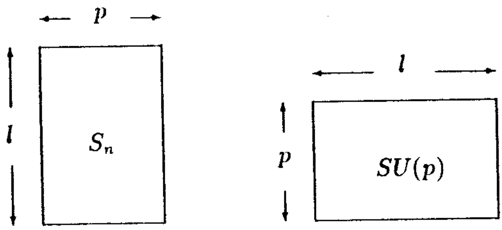
Как и в случае второго порядка, в общем случае произвольного порядка любое состояние n (тождественных) парачастиц можно характеризовать не только с помощью их собственной симметрии Юнга, но также и с помощью симметрии соответствующих подсистем из $n-1$, $n-2$,..., 2 (тождественных) парачастиц. Как и в том случае, такой кластеризации соответствует набор значений операторов Казимира группы $SU(p)$, характеризующих симметрии подсистем парачастиц.

Более того, мы опять можем ввести в явном виде дополнительные унитарные координаты для частиц ξ_1, ξ_2,..., ξ_n, каждая из которых может принимать p значений. Затем, введя соответствующие функции в пространстве ξ^n, мы можем построить полностью антисимметричные в случае параферми- (или симметричные в случае парабозе-) статистики волновые функции в $x^n \otimes \xi^n$-пространстве. Параферми(парабозе)-статистика возникает из обычной ферми(бозе)-статистики при усреднении вероятностей и средних величин по координатам вспомогательного пространства.

Мы теперь можем сравнить полученные результаты с результатами классификации статистик, основанной на локальной алгебре наблюдаемых [32—34]. Введенные нами операторы Казимира сопутствующей парастатистике группы $SU(p)$ мы можем сопоставить «обобщенным зарядовым квантовым числам» и характеризовать «суперотборные секторы» с помощью значений этих операторов. Далее, сам порядок парастатистик следует связать с введенным в этих работах «параметром статистики», равным, попросту, величине $-\lambda p^{-1}$ (в наших обозначениях $\lambda = -1$ для парабозе-статистики и $\lambda = 1$ для параферми-статистики).

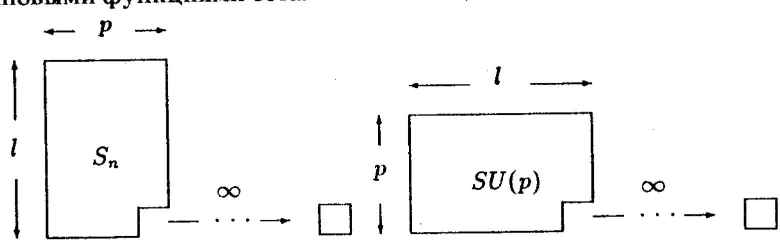
11. НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНТИЧАСТИЦ И БЕСКОНЕЧНАЯ СТАТИСТИКА

Рассмотрим для парафермионов порядка p диаграммы, имеющие вид прямоугольников с p столбцами и произвольным числом строк l:



Соответствующие им сопряженные диаграммы, изображенные справа, будут определять *синглетные* представления $SU(p)$, так как в этом случае все числа $L_1 = L_2 = \ldots = L_{p-1} = 0$. Поскольку вакуумное состояние (состояние без частиц) также является синглетом, то мы можем сказать, что такие диаграммы соответствуют *«вакуумоподобным»* состояниям парафермионов в отношении «обобщенных квантовых чисел» (операторов Казимира). Мы будем говорить в этом случае о системе частиц, состоящей из целиком заполненных парачастицами *«p-оболочек»*. (Заметим, что относительно группы перестановок мы вовсе не имеем в этом случае одномерных представлений, если только диаграмма не состоит из одной строки или одного столбца.)[20]

Удалим теперь из некоторого вакуумоподобного состояния одну парачастицу и отнесем ее в асимптотически удаленную (пространственноподобную) область так, чтобы ее волновая функция не перекрывалась с волновыми функциями остальных частиц:



[20]Рассуждения для парабозонов совершенно аналогичны, только следует рассматривать диаграммы с p строками и сопоставлять им не сопряженные, а те же самые группы $SU(p)$.

Получившимся диаграммам соответствуют сопряженные диаграммы, по которым преобразуются представления группы $SU(p)$. Оставшимся частицам соответствует диаграмма, дополнительная по этой группе к одночастичной диаграмме. Обе они характеризуются *теми же самыми* «зарядовыми квантовыми числами» (операторами Казимира), поскольку в целом они образуют $SU(p)$-синглетное представление. Мы можем сказать, что удаленная частица и оставшиеся частицы компенсируют «зарядовые квантовые числа» друг друга и образуют в целом вакуумоподобное состояние. Мы можем в отношении этих чисел назвать систему оставшихся частиц «*дыркой*» в вакуумоподобном состоянии или же «*античастицей*».

Следует заметить, что объединение такой «*античастицы*» с не зависящей от нее частицей не обязательно приводит к вакуумоподобному состоянию: в разложении произведения соответствующих диаграмм Юнга на неприводимые представления содержится как прямоугольная диаграмма, так и «*дырка*» с присоединенной к ней снизу одночастичной диаграммой. Но существенно то, что в таком произведении вакуумоподобное (прямоугольное) состояние всегда содержится.

Аналогично можно удалить на бесконечность из вакуумоподобного состояния не одну, а несколько частиц. Оставшуюся диаграмму можно считать совокупностью «дырок» по отношению к удаленным частицам. Если удаленные m частиц преобразуются по представлению (l) относительно группы перестановок S_m и по представлению $[l]$ относительно группы $SU(p)$, то оставшиеся частицы будут преобразовываться по соответствующим дополнительным[21] диаграммам (l^*) и $[l^*]$. Сектор парачастиц, определяемый этими представлениями и характеризуемый соответствующими значениями операторов Казимира группы $SU(p)$, мы будем называть «дополнительным» сектору удаленных на бесконечность частиц, а сами оставшиеся в нем частицы — «антипарачастицами» по отношению к исходным. Совершенно очевидно, что эти определения взаимно заменяемы, а также то, что антипарачастицы подчиняются той же самой парастатистике, что и частицы. При разложении произведения диаграмм $[l] \times [l^*]$ на неприводимые части среди последних всегда присутствует вакуумоподобное представление.

Наше построение находится в точном соответствии с построением аналогичного «сопряженного сектора» в рамках локальной алгебры наблюдаемых [32]. Теперь легко также понять невозможность существования такого сектора в случае бесконечной статистики [40].

[21] Мы не можем назвать эти диаграммы «сопряженными», поскольку это наименование было уже использовано для диаграмм со взаимной заменой строк на столбцы.

Рассмотрим предельный случай $p \to \infty$. В этом случае никаких ограничений на число частиц в симметричном или антисимметричном состояниях уже не налагается и допустимыми становятся любые диаграммы Юнга. Соответствующей «внутренней» симметрией будет $SU(p \to \infty)$, для которой число «обобщенных зарядов» — операторов Казимира увеличивается до бесконечности. Характеризовать состояние парачастиц приходится с помощью задания бесконечного набора значений этих операторов. В этом случае дополнить любую систему конечного числа частиц другой системой конечного числа частиц так, чтобы для всей системы в целом вся бесконечная последовательность операторов Казимира обращалась в нуль, невозможно. Иными словами, в произведении любых конечных схем Юнга отсутствует синглетное представление. Следовательно, в этом случае нельзя определить состояние частиц, эквивалентное синглетному вакуумному состоянию, и, соответственно, нельзя определить дополняющие друг друга по этому состоянию секторы частиц.

Фреденхаген [40] доказал, что в рамках локальной алгебры наблюдаемых на основе ее постулатов всегда можно построить «сопряженный» (в наших терминах «дополнительный») сектор. Поскольку бесконечная статистика, как мы видим, не позволяет определить такой сектор, она оказывается невозможной в рамках локальной алгебры наблюдаемых. В этом заключается содержание теоремы Фреденхагена.

В дальнейшем мы рассмотрим предел бесконечной статистики в рамках локальной теории поля. Мы увидим, что, хотя теория поля, соответствующая конечным парастатистикам, локальна, но при стремлении их порядков к бесконечности теория превращается в *нелокальную*, поскольку частицы и античастицы начинают вести себя различно.

Следует подчеркнуть, что данное выше нерелятивистское определение античастиц относится только к их свойствам относительно «внутренних зарядовых квантовых чисел», но, конечно, не означает равенства масс частиц и «дырок». Однако при распространении этого определения на релятивистскую теорию поля мы можем соотнести частицам и античастицам, как обычно, положительно- и отрицательно-частотные решения.

Как известно, Дирак, столкнувшись с проблемой возникновения отрицательно-энергетических состояний в своем уравнении, предложил заранее заполнять их по принципу Паули электронами и считать, что реальный вакуум представляет собой бесконечное «море» электронов, заполняющих все отрицательно-энергетические уровни. Но, очевидно, эти уровни можно было заполнять не по одной, а по две, по три и т.д., вообще любым конечным числом частиц. Тогда можно было бы предположить, что частицы подчиняются не ферми-статистике, а параферми-статистике некоторого конечного порядка. «Дырки» в таком парафермионном дираковском вакууме играли бы роль антипарафермионов. Логически такая схема ничем не уступает оригинальной схеме и тем самым парaферми-статистика имеет такое же право на существование, как и ферми-статистика. Известно, что электроны подчиняются последней. Но кварки вполне можно было бы рассматривать, как это предложил Гринберг [60], не как фермионы, вырожденные по «цвету», а как парафермионы третьего порядка. Особым вопросом является, однако, возможность введения в такой схеме цветовой калибровочной группы. Недавно было выяснено [11], что новое паракаантование в этом отношении, возможно, имеет некоторые преимущества по сравнению с гриновским параквантованием [43,61].

Если же предположить, что порядок параферми-статистики стремится к бесконечности, то, очевидно, такое заполнение отрицательно-энергетических уровней становится невозможным. Соответственно и античастицы не могут быть в этом случае определены как «дырки» в дираковском вакууме.

Наконец, следует отметить, что мы сопоставляли парастатистикам внутреннюю группу $SU(p)$, исключив тем самым фазовые преобразования и связанные с ними абелевы заряды. Нетрудно включить в рассмотрение такие преобразования, введя группу $U(p) = U(1) \times SU(p)$ и считая, как это предлагал Дирак, абелевы заряды вакуумных частиц непосредственно не наблюдаемыми, т.е. положить абелевы заряды заполненных p-оболочек парачастиц равными нулю. Тогда отсутствие частицы в такой p-оболочке будет проявлять себя как частица с абелевым зарядом противоположного знака наряду с наличием у нее дополнительных неабелевых зарядов.

Заметим, что все вышесказанное относится не только к нашему выбору класса функций (100), соответствующих новому параквантованию (97), но и к гриновскому параквантованию (88), для которого, однако, на функции налагаются дополнительные ограничения, как это было показано для случая парастатистики второго порядка. Такие ограничения приводят к тому, что «обобщенными зарядовыми квантовыми числами» могут быть не только операторы Казимира группы $SU(p)$, но также и некоторые ее аддитивные операторы, типа третьей проекции изоспина, странности и т.д. На этом пути открывается возможность описания физических симметрий и их нарушений в рамках самого гриновского параквантования [9,39].

12. ОБОБЩЕННОЕ КВАНТОВАНИЕ ПОЛЕЙ

Теперь мы попытаемся ответить на вопрос: какого рода теория поля соответствует парастатистикам?

Для определенности в качестве примера поля с целым спином мы рассмотрим скалярное поле

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k\,(2E_{\mathbf{k}})^{-1/2}(a_{\mathbf{k}}\,e^{-ikx} + b^+_{\mathbf{k}}\,e^{ikx}), \tag{141}$$

а в качестве поля с полуцелым спином — дираковское поле

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k\,(m/E_{\mathbf{k}})^{1/2} \sum_{\sigma=\pm 1/2} [a_{\sigma,\mathbf{k}} u(\sigma,\mathbf{k})\,e^{-ikx} + b^+_{\sigma,\mathbf{k}} v(\sigma,\mathbf{k})\,e^{ikx}], \tag{142}$$

где k — импульс, $k_0 = E_{\mathbf{k}} = (m^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}$ и σ — спиновое состояние; $u(\sigma, \mathbf{k})$ и $v(\sigma, \mathbf{k})$ — известные дираковские четырехкомпонентные спиноры, отвечающие положительно- и отрицательно-частотным решениям уравнения Дирака соответственно.

Будем считать коэффициенты a и b^+ операторами *уничтожения* частиц и *рождения* античастиц соответственно. Мы определим для полей такие коммутационные соотношения, которые соответствуют коммутационным соотношениям (29) и (30) для операторов рождения и уничтожения частиц. Для скалярного поля постулируем

$$[\,[\varphi(x), \varphi^+(y)\,]_{-q}, \varphi(z)\,]_- = i\rho\Delta(z-y)\,\varphi(x), \tag{143}$$

$$[\,[\varphi(x), \varphi^+(y)\,]_{-q}, \varphi^+(z)\,]_- = -i\rho\Delta(x-z)\,\varphi^+(y), \tag{144}$$

где, как и прежде,

$$[\varphi(x), \varphi^+(y)\,]_{-q} = \varphi(x)\,\varphi^+(y) - q\varphi^+(y)\,\varphi(x), \tag{145}$$

$\varphi^+(x)$ — поле, эрмитово-сопряженное полю $\varphi(x)$, и $\Delta(x)$ — хорошо известная (нечетная) сингулярная на световом конусе и обращающаяся в нуль вне его функция (см., например, [62]):

$$\Delta(x) = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{E_{\mathbf{k}}} (e^{-ikx} - e^{ikx}). \tag{146}$$

Коммутатор от двух форм (145) определяется выражением[22]

$$[\,[\varphi(x), \varphi^+(y)\,]_{-q}, [\varphi(z), \varphi^+(u)\,]_{-q}\,]_- = i\rho\Delta(z-y)\,[\varphi(x), \varphi^+(u)\,]_{-q} - i\rho\Delta(x-u)\,[\varphi(z), \varphi^+(y)\,]_{-q}. \tag{147}$$

Он обращается в нуль, если точки z и y, а также x и u разделены пространственноподобными интервалами. Таким образом, если токи и другие на-

[22]Для его вычисления следует воспользоваться тождеством, приведенным в сноске[7].

блюдаемые будут иметь форму (145), то теория будет локальной в смысле коммутирования двух наблюдаемых, относящихся к пространственноподобным разделенным областям пространства-времени.

Аналогично для спинорного поля мы постулируем соотношения

$$[[\psi(x), \widetilde{\psi}(y)]_{-q}, \psi(z)]_{-} = -i\rho S(z-y)\psi(x), \tag{148}$$

$$[[\psi(x), \widetilde{\psi}(y)]_{-q}, \widetilde{\psi}(z)]_{-} = i\rho S(x-z)\widetilde{\psi}(y), \tag{149}$$

где $\widetilde{\psi} = \psi^{+}\gamma_0$ и $S(x)$ — известная сингулярная функция для дираковского поля:

$$S(x) = -(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\,\Delta(x). \tag{150}$$

В общем случае обобщенные соотношения (143) и (148) *неинвариантны* относительно операции зарядового сопряжения, имеющего вид:

для скалярного поля

$$\varphi(x) \to \varphi_c(x) = \varphi^{+}(x),\quad \varphi^{+}(x) \to \varphi_c^{+}(x) = \varphi(x), \tag{151}$$

для спинорного поля

$$\psi(x) \to \psi_c(x) = C\,\widetilde{\psi}^{T}(x),\quad \widetilde{\psi}(x) \to \widetilde{\psi}_c(x) = [C^{-1}\psi(x)]^{T}, \tag{152}$$

где ψ^T — транспонированный (би)спинор и C — матрица зарядового сопряжения. Действительно, при таком преобразовании порядок операторов во внутреннем $(-q)$-мутаторе изменяется на противоположный, и мы получаем *другие*, по сравнению с исходными, соотношения, если только $q^2 \neq 1$. Лишь в частном случае гриновского квантования, когда $q^2 = 1$ $(q = \pm 1)$, теория остается C-инвариантной.

Таким образом, рассматриваемая теория при $q^2 \neq 1$ оказывается непригодной для описания истинно нейтральных полей, таких как нейтральное скалярное поле или майорановское спинорное поле. Для таких полей единственно пригодным оказывается лишь гриновское квантование.

С другой стороны, теория остается инвариантной относительно пространственных отражений:

$$\varphi(x) \to \varphi(i_s x),\quad \psi \to \eta_P \gamma^0\, \psi(i_s x),\quad \eta_P^2 = \pm 1,\quad i_s x = (x_0, -\mathbf{x}).$$

Но инвариантность относительно *антиунитарных* временных отражений:

$$T(i_t)\varphi(x)T^{-1}(i_t) = \varphi(i_t x),\quad T(i_t)\psi(x)T_{-1}(i_t) = \eta_t C^{-1}\gamma_5\psi(i_t x),\quad i_t = (-x_0, \mathbf{x})$$

также не имеет места. Как всякая локальная теория, данная теория обладает CPT-инвариантностью, но, в общем случае, оказывается инвариантной лишь относительно комбинированной CT-четности: при обращении времени частицы и античастицы должны взаимно заменяться. Исключение составляет лишь гриновское квантование, инвариантное относительно всех трех операций C, P и T в отдельности.

Наконец отметим, что постулированные нами коммутационные соотношения (143) и (148) обеспечивают каноническую согласованность теории поля. Мы продемонстрируем это для дираковского поля, записав его гамильтониан в форме

$$\mathcal{H}_{\text{Dir.}} = -\rho^{-1} \int d^3x [(-i\gamma\cdot\nabla + m)_{\mu\nu}\psi_\nu(x),\ \tilde{\psi}_\mu(x)]_{-q} + \text{const.} \tag{153}$$

Если теперь подставить этот гамильтониан в качестве генератора временного сдвига в уравнение Гейзенберга

$$-i\partial\psi(x)/\partial t = [\mathcal{H}_{\text{Dir.}}, \psi(x)]_-,$$

то, в силу соотношений (148) и проектирующего свойства сингулярной функции

$$\psi_\kappa(x) = i\int d^3y S_{\kappa\mu}(x-y)\gamma^0_{\mu\nu}\psi_\nu(y),$$

получится свободное уравнение Дирака

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0.$$

Аналогичный вывод справедлив и для скалярного поля, если его гамильтониан также имеет вид $(-q)$-мутатора, как и все другие наблюдаемые.

13. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ЧАСТИЦ И АНТИЧАСТИЦ

Подстановка разложений свободных полей (141) в (143), (144) и (142) в (148), (149) с использованием представления (146) для скалярной Δ-функции приводит к следующим перестановочным соотношениям для операторов рождения и уничтожения частиц и античастиц:

$$[[a_k, a^+_{k'}]_{-q}, a_{k''}]_- = \rho\delta_{k'k''}a_k, \tag{154а}$$

$$[[a_k, a^+_{k'}]_{-q}, a^+_{k''}]_- = -\rho\delta_{k'k''}a^+_{k'}, \tag{154б}$$

$$[[a_k, b_s]_{-q}, a_{k'}]_- = 0, \tag{154в}$$

$$[[b^+_s, a^+_k]_{-q}, a^+_{k'}]_- = 0, \tag{154г}$$

$$[[b^+_s, a^+_k]_{-q}, a_{k'}]_- = \rho\delta_{kk'}b^+_s, \tag{154д}$$

$$[[a_k, b_s]_{-q}, a^+_{k'}]_- = -\rho\delta_{kk'}b_s, \tag{154е}$$

$$[[b^+_s, b_{s'}]_{-q}, a_k]_- = 0, \tag{154ж}$$

$$[[b_s^+, b_{s'}]_{-q}, a_k^+]_- = 0, \tag{154з}$$

$$[[a_k, a_{k'}^+]_{-q}, b_s^+]_- = 0, \tag{154и}$$

$$[[a_k, a_{k'}^+]_{-q}, b_s]_- = 0, \tag{154к}$$

$$[[a_k, b_s]_{-q}, b_{s'}^+]_- = \mp \rho \delta_{ss'} a_k, \tag{154л}$$

$$[[b_s^+, a_k^+]_{-q}, b_{s'}]_- = \pm \rho \delta_{ss'} a_k^+, \tag{154м}$$

$$[[b_s^+, a_k^+]_{-q}, b_{s'}^+]_- = 0, \tag{154н}$$

$$[[a_k, b_s]_{-q}, b_{s'}]_- = 0, \tag{154о}$$

$$[[b_s^+, b_{s'}]_{-q}, b_{s''}^+]_- = \mp \rho \delta_{s's''} b_s^+, \tag{154п}$$

$$[[b_s^+, b_{s'}]_{-q}, b_{s''}]_- = \pm \rho \delta_{ss''} b_{s'}. \tag{154р}$$

В (154л,м,п,р) верхний знак относится к скалярному, а нижний — к спинорному полю. Эти знаки будут играть существенную роль при установлении связи спина с парастатистикой. Мы будем считать, что система находится в ограниченном трехмерном объеме и импульсы принимают дискретный набор значений. В дальнейшем мы будем обозначать состояния индексами r', r'', r''' и т.д. для частиц и индексами s', s'', s''' и т.д. для античастиц, включая в эти индексы также и спиновые состояния.

Сравнение (154а) с (29) показывает, что для частиц мы воспроизвели наши исходные коммутационные соотношения. Однако, как видно из сравнения (154а) и (154р), соотношения для частиц и античастиц получились *различными*, если только $q^2 \neq 1$.

14. ФОКОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ АНТИЧАСТИЦ И СВЯЗЬ СПИНА С ПАРАСТАТИСТИКОЙ

Мы теперь постулируем наличие *единственного* вакуумного вектора как для частиц, так и для античастиц, потребовав, чтобы он удовлетворял не только условию (35), но также и условию отсутствия в нем античастиц

$$b_s|0\rangle = \langle 0|b_s^+ = 0 \text{ для всех состояний } s. \tag{155}$$

Теперь мы можем доказать, что, аналогично (36), имеет место

$$b_s b_{s'}^+|0\rangle = p_c \delta_{ss'}|0\rangle, \tag{156}$$

где p_c — некоторый числовой параметр, который мы отметили индексом c для того, чтобы указать на его принадлежность к античастицам. Однако доказательство соотношения (156) при $q = 0$ отличается от его доказательства при $q \neq 0$, и мы рассмотрим эти случаи отдельно.

Случай $q \neq 0$. Соотношения (154п,р) для античастиц можно переписать в виде, аналогичном (29) и (30):

$$[[b_s, b^+_{s'}]_{-q_c}, b_{s''}]_- = \rho_c \delta_{s's''} b_s, \tag{157}$$

$$[[b_s, b^+_{s'}]_{-q_c}, b^+_{s''}]_- = -\rho_c \delta_{ss''} b^+_{s'}, \tag{158}$$

где мы ввели обозначения

$$q_c = 1/q, \quad \rho_c = \mp \rho/q. \tag{159}$$

Как и раньше, верхний знак в (159) относится к скалярному, а нижний — к спинорному случаям.

Действуя на вакуумный вектор обеими частями (157) и воспользовавшись его единственностью, мы снова можем доказать (156). Далее, из требования положительной определенности нормы вектора состояния одной античастицы мы получаем условие

$$p_c \geq 0. \tag{160}$$

Более того, предположив ограниченность параметра p_c, мы можем доказать точно так же, как мы это сделали для частиц, теорему I для античастиц: *при конечном p_c число античастиц в λ_c-симметричном (симмметричном при $\lambda_c = 1$ и антисимметричном при $\lambda_c = -1$) состоянии должно быть конечным и не может превосходить некоторое целое M_c, причем, в силу положительной определенности норм векторов состояний античастиц в фоковском представлении, допустимыми значениями параметра $x_c = \lambda_c q_c$ являются лишь 0 и 1.*

Сразу же отметим, что случай $x_c = q_c = 0$ сводится к случаю $x = q = 0$ и потому пока что нами рассматриваться не будет[23].

Итак, при конечных p_c остается единственная возможность

$$x_c = \lambda_c q_c = \lambda_c / q = 1, \tag{161}$$

[23]Действительно, согласно (159), случаю $q_c = 0$ соответствует предел $q \to \infty$ при конечном $\rho_c = \mp \rho/q$, т.е. и $\rho \to \infty$ (иначе $\rho_c \to 0$). Но в таком пределе соотношение (154а) для частиц (после деления на q и взятия предела $q \to \infty$) приобретает вид

$$[a^+_{r'} a_r, a_{r''}]_- = \pm \rho_c \delta_{r'r''} a_r,$$

тогда как для античастиц, согласно (157), мы имеем соотношение

$$[b_s b^+_{s'}, b_{s''}]_- = \rho_c \delta_{s's''} b_s.$$

Сравнивая первое из этих соотношений с (154р), а второе с (154а), мы видим, что они совпадают (при $q = 0$), если просто переобозначить $a \leftrightarrow b$.

где мы произвели подстановку (159). Отсюда сразу же следует

$$q = \lambda_c = q_c, \tag{162}$$

поскольку $q_c^2 = 1$. Далее, согласно теореме I для частиц при $q \neq 0$ мы имеем единственное значение

$$x = \lambda q = 1 \quad \text{и} \quad q = \lambda. \tag{163}$$

Из (162) и (163) мы заключаем, что

$$q = q_c = \lambda = \lambda_c, \tag{164}$$

т.е. тип *конечных* парастатистик, определяемый значением параметра λ (парафермионы при $\lambda = 1$ и парабозоны при $\lambda = -1$), одинаков для частиц и античастиц.

Более того, теперь мы можем установить связь типа парастатистики со спином частиц. Действительно, согласно формуле для параметра ω_c, аналогичной (58), и используя также (159) и (164), мы получаем

$$\omega_c \equiv \lambda_c \rho_c = \mp \rho \geq 0. \tag{165}$$

Следовательно, учитывая то, что верхний знак соответствует скалярному, а нижний — спинорному случаям, мы получаем

$$\begin{aligned} &\rho \leq 0 \quad \text{для скалярного поля,} \\ &\rho \geq 0 \quad \text{для спинорного поля.} \end{aligned} \tag{166}$$

Но для частиц условие (59) означает

$$\omega = \lambda\rho \geq 0. \tag{167}$$

Согласуя условия (166) и (167), мы получаем

$$\begin{aligned} &\lambda = -1 \quad \text{для скалярного поля,} \\ &\lambda = +1 \quad \text{для спинорного поля,} \end{aligned} \tag{168}$$

что означает подчинение скалярных частиц парабозе-статистике, а спинорных частиц — параферми-статистике.

Нам, однако, еще остается доказать, что порядки парачастиц для частиц и античастиц совпадают:

$$M = M_c. \tag{169}$$

На основе (165) и (167) с учетом (164) и полученного результата (168) мы можем написать

$$\omega_c = \omega. \tag{170}$$

В нашем случае $x_c = x = 1$ и, согласно (84),

$$\omega = 2p/M = 2p_c/M_c. \tag{171}$$

Параметр ω, являющийся произвольным, нам удобно положить, как и в (85), равным 2. Тогда

$$p = M \quad \text{и} \quad p_c = M_c. \tag{172}$$

Для совпадения порядков (169) нам остается показать совпадение значений параметров p и p_c, входящих в (36) и (156). Это можно сделать, воспользовавшись *взаимными* коммутационными соотношениями (154в—о) для операторов частиц и античастиц. Доказательство этого соотношения приведено в дополнении 2.

Полученная нами связь спина с парастатистикой может быть обобщена на поля с произвольным спином: *частицам с целым спином соответствует парабозе-статистика, а полям с полуцелым спином соответствует параферми-статистика.* Таким образом, мы имеем обобщение знаменитой теоремы Паули о связи спина со статистикой на парастатистики конечных порядков.

Для рассматриваемого нами сейчас гриновского квантования эта теорема была доказана в работе [63], в которой, однако, для параполей использовалось специальное представление — так называемый анзац Грина, при котором параполе составляется в виде суммы обычных (ферми- или бозе- полей, подчиняющихся аномальным (обратным) взаимным коммутационным сооотношениям. В нашем доказательстве мы не использовали такое специальное представление параполей, хотя для свободных параполей, квантуемых по Грину, такое представление всегда можно применить [7]. Сейчас мы обратимся к случаю $q = 0$, когда такое представление неприменимо, но теорема о связи спина с парастатистикой остается справедливой [10].

Случай $q = 0$ был подробно исследован в работе [10], и здесь мы лишь кратко представим ее результаты.

В отличие от гриновского квантования, схема, основанная на соотношениях (143) и (148) для скалярного и спинорного полей соответственно, при $q = 0$ не является C-инвариантной с самого начала. Поэтому в ней фоковское представление для операторов античастиц отличается от представления для операторов частиц.

Условие (155) остается в силе, однако вывод (156) теперь несколько отличается от изложенного ранее для случая $q \neq 0$.

Мы можем воспользоваться (154л) и, применяя его к вакууму, получить

$$a_k\, b_s\, b_{s'}^{+} |0\rangle = 0. \tag{173}$$

В силу нашего предположения о единственности вакуумного вектора *как для частиц, так и для античастиц* мы должны положить и в этом случае

$$b_s\, b_{s'}^{+} |0\rangle = \chi_{ss'} |0\rangle, \tag{174}$$

где $\chi_{ss'}$ — некоторое число. Подействовав на вакуумный вектор соотношением (154п), мы получаем

$$\chi_{s's''}b_s^+|0\rangle = \mp\rho\delta_{s's''}b_s^+|0\rangle \tag{175}$$

и

$$\chi_{s's''} = \mp\rho\delta_{s's''}. \tag{176}$$

Согласно (174) и (175) выражение для нормы античастичного вектора принимает вид

$$\|\sum_s \Psi_s\, b_s^+|0\rangle\|^2 = \sum_{s,s'} \Psi_s^*\Psi_{s'}\,\langle b_s\, b_{s'}^+|0\rangle = \mp\rho\sum_s |\Psi_s|^2. \tag{177}$$

Требование того, чтобы эта норма всегда была положительной, означает

$$\mp\rho \geq 0, \tag{178}$$

где, как и прежде, верхний знак относится к скалярному, а нижний — к спинорному случаям. Отсюда снова следуют условия (166) и, как и раньше, мы получаем, в силу условия (167) для частиц, правильную связь спина с парастатистикой (168).

Учитывая эту связь и воспользовавшись (94) (при $p = M$), получим для (174) просто

$$b_s\, b_{s'}^+|0\rangle = \delta_{ss'}|0\rangle. \tag{179}$$

Особенность данной схемы заключается в том, что если вектор состояния содержит лишь одни античастицы, то мы не можем вычислить его норму за исключением только что рассмотренного случая одной античастицы. Дело в том, что в случае $q = 0$ оператор уничтожения античастицы нельзя продвинуть вправо к вакууму с помощью соотношения (154п). Однако это можно сделать для *пары* частица — античастица с помощью соотношения (154л). В данной теории *допустимыми состояниями* (т.е. такими состояниями, для которых можно производить вычисление норм и вообще любых матричных элементов) *являются состояния с произвольным числом частиц, но число античастиц не может превышать число частиц более чем на единицу*[24]. Соответствующие допустимым состояниям векторы могут быть двух типов:

$$\begin{gathered} b_{s_1}^+ a_{r_1}^+ b_{s_2}^+ a_{r_2}^+ \ldots b_{s_m}^+ a_{r_m}^+ a_{r_{m+1}}^+ \ldots a_{r_{m+n}}^+ |0\rangle, \\ b_{s_1}^+ a_{r_1}^+ b_{s_2}^+ a_{r_2}^+ \ldots b_{s_m}^+ a_{r_m}^+ a_{r_{m+1}}^+ \ldots a_{r_{m+n}}^+ b_{s_{m+1}}^+ |0\rangle. \end{gathered} \tag{180}$$

[24]Как было показано в работе [11], сам вакуумный вектор в такой теории неоднозначен. За основное состояние можно принять также состояние, в которое заранее помещено некоторое конечное число античастиц. Однако такие «вакуумные» античастицы будут вести себя как обычные фермионы или бозоны.

С помощью (154в,г,н,п) можно показать, что такие векторы будут *симметричны* относительно перестановок пар $b^+_{s_k} a^+_{r_k}$ $(k = 1, ..., m)$. Вычисляя нормы векторов (180), можно убедиться в том, что при заданном $p(= M)$ в условии для частиц (36) число античастиц в симметричном при $\rho = \lambda = 1$ или в антисимметричном при $\rho = \lambda = -1$ состоянии не может превосходить число M, но может составлять M, $M - 1$, $M - 2$ и т.д. Таким образом, и в этом случае *конечные парастатистики для частиц и для античастиц совпадают.*

15. БЕСКОНЕЧНАЯ СТАТИСТИКА ДЛЯ ЧАСТИЦ И АНТИЧАСТИЦ

Для установления полной классификации возможных статистик тождественных частиц, описываемых параполевыми коммутационными соотношениями типа (143) или (148), нам остается рассмотреть предельный случай бесконечных статистик ($M \to \infty$), когда наша теорема I не действует. Для того чтобы установить такой предел, нам следует снова начать с указанных соотношений и, соответственно, соотношений (154) для операторов рождения и уничтожения частиц и античастиц при *произвольных* параметрах q и ρ, а также соотношений для вакуумного вектора (35) и (36) для частиц и (155), (156) для античастиц.

Согласно проведенному ранее рассмотрению для операторов рождения и уничтожения частиц в таком предельном случае мы имеем билинейные соотношения (103) или, после перенормировки (104), соотношения (105) с ограничением (114) на возможные значения параметра q.

Рассмотрим снова сначала случай $q \neq 0$. В этом случае мы можем использовать для античастиц соотношения (157) и (158) с параметризацией (159). Теперь мы должны рассматривать предел

$$p, p_c \to \infty. \tag{181}$$

Мы можем повторить для античастиц и их операторов, удовлетворяющих (157) и (158) при $q_c \neq 0$ $(q \neq \infty)$, все те рассуждения, которые мы проводили для частиц, и прийти для них к билинейным соотношениям, аналогичным (103):

$$b_s b^+_{s'} - q_c b^+_{s'} b_s = p_c \delta_{ss'} . \tag{182}$$

В силу (181) мы всегда можем произвести перенормировку типа (104) как для операторов частиц, так и для операторов античастиц. Тогда мы можем написать для перенормированных операторов

$$b_s b_{s'}^+ - q_c b_{s'}^+ b_s = \delta_{ss'} . \tag{183}$$

Далее, из условия положительной определенности норм λ_c-симметричных векторов для античастиц мы получаем, аналогично условию (114) для частиц, ограничение для возможных значений параметра q_c для античастиц

$$-1 \le q_c \le 1. \tag{184}$$

Но, согласно (159), $q_c = 1/q$, и теперь из (184) мы получаем новые ограничения на возможные значения параметра q:

$$q \le -1 \quad \text{и} \quad 1 \le q. \tag{185}$$

Сопоставляя (114) и (185), мы заключаем, что если $q \ne 0$, то возможными значениями параметра q в предельном случае $p = p_c \to \infty$ могут быть только ± 1, причем $q = q_c$.

В таком случае билинейные соотношения как для частиц (105), так и для античастиц (183) превращаются в обычные коммутаторы или антикоммутаторы. Таким образом, *предельными статистиками при* $p(= p_c) \to \infty$ *(если* $q \ne 0$*) являются обычные бозе- и ферми-статистики.* Наличие античастиц в нашей теории *запрещает* иные, так называемые «кюонные» статистики, отвечающие произвольным билинейным соотношениям при изменении параметра q в интервале (114) и предполагавшиеся Гринбергом [16] для формулировки «небольшого» нарушения обычных статистик.

В случае гриновского квантования ($q^2 = 1$) в пределе $p \to \infty$, как было показано в [54], параферми-статистика переходит в бозе-статистику, а парабозе-статистика переходит в ферми-статистику. Мы получаем, что скалярные поля, подчинявшиеся соотношениям (143) при $q = -1$ (и ρ отрицательном) в пределе $p \to \infty$ начинают подчиняться антикоммутаторным соотношениям, и наоборот, спинорные поля, подчинявшиеся соотношениям (148) при $q = 1$ (и ρ положительном), начинают подчиняться в этом пределе коммутаторным соотношениям. Таким образом, в этом пределе нарушается правильная связь спина со статистикой. Но при этом и сама теория становится нелокальной, что и является причиной такого нарушения. В разд.9 было разъяснено, что подобного рода аномальные статистики могут возникнуть из нормальных статистик при наличии у последних вырождения по некоторой скрытой степени свободы, принимающей бесконечное число значений, но имеющей для системы в целом одно определенное значение.

Нам остается рассмотреть поведение античастиц в предельном случае $p \to \infty$, при $q = 0$ [10]. Как следует из (179), вакуумное условие для них *не содержит* параметр p. По этой причине для античастиц, в отличие от частиц, не нужно производить перенормировку типа (104) в таком предельном случае. При этом соотношения (154д,е) превращаются в коммутаторы (так как $\rho/p \to 0$)

$$[b_s^+ a_r^+, a_{r'}]_- = 0, \tag{186}$$

$$[a_r b_s, a_{r'}^+]_- = 0, \tag{187}$$

тогда как соотношения (154л,м) остаются прежними. Мы видим, что в этом предельном случае, хотя произведение $a_r b_s$ содержит a_r, оно, тем не менее, коммутирует с $a_{r'}^+$. Более того, если ввести парные операторы

$$A_{rs} = a_r b_s, \quad A_{sr}^+ = b_s^+ a_r^+, \tag{188}$$

то в силу (115), (154в,г,л,м) (при $q = 0$), (186) и (187) мы получаем

$$[A_{rs}, A_{s'r'}^+]_- = |\rho| \delta_{rr'} \delta_{ss'}, \tag{189}$$

$$[A_{rs}, A_{s'r'}]_- = [A_{sr}, A_{s'r'}^+]_- = 0, \tag{190}$$

т.е. *бозеподобные* соотношения. Вследствие (186) и (187) эти операторы коммутируют с операторами частиц a и a^+. Последние же по-прежнему удовлетворяют (115). Таким образом, в пределе $p \to \infty$ мы получаем в данном случае совокупность непарных частиц, подчиняющихся бесконечной статистике, и совокупность пар частица — античастица, и эти две совокупности, входящие в допустимые векторы (180), ведут себя как две *независимые подсистемы, коммутирующие друг с другом!*

Наша исходная теория, основанная на трилинейных соотношениях (при $q = 0$), была локальной. Интересно проследить, каким образом такая локальная при любом сколь угодно большом, но конечном значении параметра p, теория превращается в нелокальную в пределе $p \to \infty$. В отличие от случаев конечных значений параметра p в такой предельной теории частицы и античастицы разделяются, первые начинают подчиняться соотношениям (115) (при любом конечном p эти условия не выполняются), но античастицы по-прежнему подчиняются трилинейным соотношениям (154п,р). Учитывая также измененные соотношения (186), (187), мы, вместо исходных соотношений, например (143), для скалярного поля получаем (положив $|\rho| = 1$):

$$[\varphi(x)\,\varphi^+(y), \varphi(z)]_- = -i\Delta^{(-)}(z-y)\,\varphi(x). \tag{191}$$

Стоящая в правой части сингулярная функция $\Delta^{(-)}$ не обращается в нуль вне светового конуса, и теория становится явно нелокальной. Можно показать, однако, что теория все еще остается CPT-инвариантной [10].

Итоги нашего рассмотрения теории поля, соответствующей парастатистикам, подводит

Теорема III. *Локальная теория свободного поля, подчиняющегося q-деформированным трилинейным паракоммутационным соотношениям* (типа (143) для скалярного или (148) для спинорного полей), *при условиях*

а) существования единственного вакуума для частиц и античастиц,

б) положительной определенности норм векторов состояний частиц и античастиц

допускает лишь три значения параметра $q = \pm 1$ и 0.

Обе допустимые теории: С-инвариантное гриновское параквантование ($q^2 = 1$) и новое зарядово-асимметричное параквантование ($q = 0$) описывают конечные парастатистики частиц и античастиц при правильной связи спина с парастатистикой: частицам с целым спином соответствует парабозе-статистика, а частицам с полуцелым спином соответствует параферми-статистика.

В пределе статистики бесконечного порядка трилинейные соотношения преобразуются в q-деформированные билинейные соотношения, но само наличие античастиц ограничивает их теми же значениями $q = \pm 1$ и 0. Теория при этом становится нелокальной.

В такой теории невозможно «небольшое» нарушение обычных ферми- и бозе-статистик ни в рамках локальной теории конечных парастатистик, ни в рамках бесконечной статистики.

В окончательном виде допустимые в рамках этой теории коммутационные соотношения записываются в виде

$$[[\varphi(x), \varphi^+(y)]_q, \varphi(z)]_- = -i|\rho|\Delta(z-y)\,\varphi(x), \tag{192}$$

$$[[\varphi(x), \varphi^+(y)]_q, \varphi(z)^+]_- = i|\rho|\Delta(x-z)\,\varphi^+(x) \tag{193}$$

для скалярного поля и

$$[[\psi(x), \tilde{\psi}(y)]_{-q}, \psi(z)]_- = -i|\rho|S(z-y)\,\psi(x), \tag{194}$$

$$[[\psi(x), \tilde{\psi}(y)]_{-q}, \tilde{\psi}(z)]_- = i|\rho|S(x-z)\,\tilde{\psi}(y) \tag{195}$$

для дираковского поля. При этом в этих соотношениях параметр q принимает лишь два значения $q = 1$ и $q = 0$. Произвольный параметр $|\rho|$ в этих случаях удобно положить равным 2 и 1 соответственно.

Отметим, что в случае $q = 0$ сам вид коммутационных соотношений одинаков для скалярного и дираковского полей и различие заключается лишь в спиновой структуре этих полей.

Вакуумные условия имеют вид

$$a_r|0\rangle = b_s|0\rangle = 0. \tag{196}$$

Для частиц всегда имеет место

$$a_r\, a^+_{r'}|0\rangle = p\delta_{rr'}|0\rangle, \tag{197}$$

где p — целое число 1,2,... Но для античастиц аналогичное условие имеет место лишь в случае гриновского параквантования ($q^2 = 1$):

$$b_s\, b^+_{s'}|0\rangle = p\delta_{ss'}|0\rangle, \tag{198}$$

тогда как в случае $q = 0$ имеем

$$b_s\, b^+_{s'}|0\rangle = \delta_{ss'}|0\rangle. \tag{199}$$

В пределе бесконечного порядка ($p \to \infty$) гриновское параквантование сопровождается переходом парабозе-статистики в ферми-статистику, а параферми-статистики — в бозе-статистику с нарушением правильной связи спина со статистикой и превращением локальной теории в нелокальную.

В случае $q = 0$ аналогичный предел приводит к соотношению для частиц

$$a_r\, a^+_{r'} = \delta_{rr'}, \tag{200}$$

и парастатистика переходит в классическую статистику Максвелла — Больцмана. При этом античастицы могут входить лишь в пары частица — античастица, подчиняющиеся бозе-статистике и не зависящие от уже имеющихся частиц.

Замечание о билинейных q-мутаторных соотношениях. Те же соображения, которые привели нас к запрету всех иных трилинейных соотношений, кроме соотношений при $q^2 = 1$ и 0, могут быть применены к случаю, когда с самого начала исходят из *билинейных* соотношений для полей [17,18]. Предположив сначала общий вид q-деформированных билинейных соотношений для полей, на основе лишь требования положительной определенности норм векторов состояний частиц и *античастиц* в фоковском пространстве, было получено ограничение этих соотношений только коммутаторами и антикоммутаторами, хотя теория исходно не предполагалась локальной. Заметим, что при этом не использовалось условие С-инвариантности коммутационных соотношений, как это предлагалось раньше в [64, с.196].

16. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, на основе наших определений «тождественности» (симметричности матрицы плотности) и «элементарности» (билинейной формы от операторов рождения и уничтожения частиц для операторов переходов) мы пришли к возможным обобщениям обычных статистик в виде параферми- и парабозе-статистик конечных порядков и бесконечной статистики.

Условия единственности вакуумного состояния и положительной определенности норм векторов состояний в фоковском пространстве привели к сильному ограничению возможных схем квантования лишь двумя из них: гриновскими зарядово-симметричными и новыми зарядово-асимметричными трилинейными соотношениями. Обе допустимые схемы описывают парафермии- и парабозе-статистики конечных порядков.

Поскольку в таких схемах отсутствует возможность непрерывного перехода от статистики одного порядка к статистике другого порядка, то оказывается невозможным «небольшое» нарушение обычных ферми- и бозе-статистик, в частности принципа Паули, в рамках такой теории. Отметим, что для получения этого результата в рамках статистик *конечных порядков* нам не понадобилось привлечение условий локальности соответствующих полей и наличия античастиц.

Однако оставалась открытой возможность «небольшого» нарушения обычных статистик в рамках бесконечной статистики, поскольку последняя описывается q-деформированными *билинейными* коммутационными соотношениями и допускает непрерывное изменение статистики между ферми-статистикой, соответствующей $q = -1$, и статистикой Максвелла — Больцмана, соответствующей $q = 0$, и между последней и бозе-статистикой, соответствующей $q = 1$, как это было недавно предложено Гринбергом [16]. Положительная определенность норм векторов состояний при этом не нарушается.

Мы получили также билинейные соотношения как предельные соотношения для парастатистик при устремлении их порядка к бесконечности. Однако при переходе к теории поля и включении в рассмотрение описываемых тем же самым полем *античастиц* наличие последних вновь запрещает непрерывное изменение параметра деформации q, ограничивая его значения лишь тремя указанными значениями, соответствующими ферми-, бозе- и максвелл-больцмановской статистикам. Таким образом, и в рамках теории поля, соответствующей бесконечной статистике (как предельной теории поля для конечных статистик), «небольшое» нарушение обычных статистик вновь становится невозможным. Отметим также, что при переходе от конечных статистик к бесконечной статистике соответствующая теория поля из локальной превращается в нелокальную в полном соответствии с общей теоремой Фреденхагена [40] о невозможности формулировки бесконечной статистики в рамках локальной алгебры наблюдаемых.

Итак, «небольшое» нарушение обычных статистик невозможно ни в рамках локальной теории поля, соответствующей сттистикам конечных порядков, ни в рамках нелокальной теории поля, соответствующей предельной бесконечной статистике. Во втором случае существенную роль играет условие положительной определенности норм векторов состояний не только для частиц, но и для *античастиц*. Как известно, наличие античастиц играло решающую роль при установлении Паули связи спина со статистикой в рамках обычной теории поля. Теперь их наличие оказывается необходимым для запрета «небольшого» нарушения статистик в рамках обобщенной теории поля. С другой стороны, условие положительной определенности норм векторов состояний частиц и античастиц непосредственно связано с возможностью интерпретации волновых функций как амплитуд вероятностей соответствующих состояний. В таком смысле устройство мира в соответствии с принципом Паули оказывается связанным с его возможной наблюдаемостью согласно квантово-механическим законам!

В указанных запретах и заключается содержание «теоремы о статистике тождественных частиц».

Для допустимых обобщений схемы квантования мы определили классы волновых функций, соответствующих парастатистике данного порядка. Оказалось, что в рамках нового паравантования ($q = 0$) с каждой такой парастатистикой порядка можно связать внутреннюю $SU(p)$-симметрию и рассматривать парастатистику как обычную статистику при наличии у частиц вырождения по этой симметрии. Операторы Казимира такой группы играют роль обобщенных наблюдаемых неабелевых зарядов, значения которых полностью характеризуют симметрию данного состояния парачастиц. На этой основе было введено нерелятивистское определение «антипарачастиц» как «дырок» в заполненной p-оболочке парачастиц и преобразующихся по дополнительным представлениям $SU(p)$. При таком подходе проясняется смысл теоремы Фреденхагена: при $p \to \infty$ невозможно из систем с конечным числом парачастиц составить синглетное представление $SU(p)$, так как в этом случае невозможно целиком заполнить p-оболочки. По этой причине нельзя ввести «частицы» и «античастицы» как объекты, преобразующиеся по дополнительным представлениям $SU(p)$. Становится ясной также и причина возникновения в этом пределе статистики Максвелла — Больцмана: наличие вырождения обычных фермионов или бозонов по внутренней координате, принимающей бесконечное число значений, которыми они могут в принципе различаться.

В случае гриновского квантования наблюдаемыми оказываются не только операторы Казимира группы $SU(p)$, но и некоторые ее генераторы типа третьей проекции изоспина, странности и т.д. Выделенность таких состояний приводит к тому, что в пределе $p \to \infty$ параферми-статистика переходит в бозе-статистику, и, аналогично, парабозе-статистика переходит в ферми-статистику [54].

Паракоммутационные соотношения могут представить собой, таким образом, интригующую возможность естественного описания с их помощью внутренних симметрий. Однако при таком подходе к внутренним симметриям остаются все еще открытыми многие вопросы: возможность формулировки калибровочных симметрий в рамках параполей [43,61], сопоставление возникающих в таком подходе групп внутренних симметрий с физическими симметриями [9,39] и т.д. В этом отношении интерес представляют ограничения на подобного рода выбор симметрий, возникающие в данном подходе на основе требования локальности [61]. Возможным также является дальнейшее обобщение схемы параквантования посредством конструирования неассоциативных параполей, на основе алгебры октонионов [66,67]. Такая конкретная реализация параполей, хотя и содержит характерные лишь для нее черты, но в то же время может послужить основанием для адекватного вложения в математическую конструкцию физических поколений лептонов и кварков с объяснением целочисленных значений зарядов лептонов и дробных значений зарядов кварков [67]. Однако рассмотрение такой возможности выходит за пределы целей, поставленных в данном обзоре.

Для меня большая честь принять участие в выпуске журнала, посвященном Николаю Николаевичу Боголюбову. Фундаментальные работы Н.Н.Боголюбова по статистическим методам описания сложных систем [2] и теоретико-групповому подходу в описании физических симметрий элементарных частиц [68] всегда являлись для меня вдохновляющим образцом.

ДОПОЛНЕНИЕ 1. ОПИСАНИЕ ОБЫЧНЫХ СТАТИСТИК ПОСРЕДСТВОМ ТРИЛИНЕЙНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Обычные ферми- и бозе-статистики можно рассматривать на основе общих соотношений (29) и (30) и условий (35) и (36), поставив ограничение для числа частиц в λ-симметричном (симметричном при $\lambda = 1$ и антисимметричном при $\lambda = -1$) состоянии $M = 1$. Согласно этому условию мы имеем соотношение (71), которое, вспомнив обозначения (53) и (58), мы можем переписать в виде

$$p(\lambda + q) = \rho. \qquad (\text{Д}1.1)$$

Отсюда $qp - \rho = -\lambda p$ и, как видно из (39в,г), двух- и трехчастичные проекции становятся $(-\lambda)$-симметричными, т.е. действительно соответствуют ферми- и бозе-статистикам. Более того, используя (Д1.1), мы можем переписать соотношение (37):

$$a_r a^+_{r_1} a^+_{r_2} \ldots a^+_{r_n} |0\rangle = p\Big\{\delta_{rr_1} a^+_{r_2} \ldots a^+_{r_n} |0\rangle - \sum_{k=2}^{n} \delta_{sr_k} [\lambda q^{k-2} a^+_{r_1} a^+_{r_2} \ldots a^+_{r_{k-1}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k-2} (q+\lambda) q^{k-l-2} a^+_{r_1} a^+_{r_2} \ldots a^+_{r_{k-l-2}} a^+_{r_{k-l}} a^+_{r_{k-l+1}} \ldots a^+_{r_{k-1}} a^+_{r_{k-l-1}}]\, a^+_{r_{k+1}} \ldots a^+_{r_n} |0\rangle\Big\}. \tag{Д1.2}$$

Теперь можно проверить, что в таком представлении тождественно выполняется билинейное соотношение

$$a_r a_{r'} + \lambda a_{r'} a_r = 0. \tag{Д1.3}$$

Соответственно должно выполняться также эрмитово-сопряженное соотношение

$$a^+_r a^+_{r'} + \lambda a^+_{r'} a^+_r = 0. \tag{Д1.4}$$

Теперь, воспользовавшись (Д1.2) и (Д1.4), можно показать, что выполняется также соотношение

$$a_r a^+_{r'} + \lambda a^+_{r'} a_r = p\delta_{rr'}. \tag{Д1.5}$$

Положив произвольный параметр $p = 1$, мы получаем обычные коммутационные соотношения для фермионов ($\lambda = 1$) и бозонов ($\lambda = -1$).

Легко проверить также, что при выполнении (Д1.3)—(Д1.5) исходные соотношения (29) и (30) тождественно удовлетворяются. Таким образом, исходные трилинейные соотношения при указанном ограничении (Д1.1) оказываются необходимыми и достаточными условиями для описания обычных статистик.

Если положить $p = 1$, то соотношение (Д1.1) принимает вид

$$\rho = \lambda + q. \tag{Д1.6}$$

В выборе параметра q остается произвол: q может принимать *любое* вещественное значение, и, тем не менее, общая схема будет при этом совпадать со схемой, основанной на обычном квантовании с помощью коммутаторов или антикоммутаторов. Смысл такого произвола в выборе параметра q состоит в следующем. Для фермионов и бозонов наблюдаемые можно записывать в виде любой билинейной комбинации вида (26). При этом все такие комбинации будут эквивалентны с точностью до постоянной, как раз зависящей от величины q. Это хорошо известный произвол в определении произведения операторов для фермионов и бозонов.

ДОПОЛНЕНИЕ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СОВПАДЕНИЯ ПОРЯДКОВ ПАРАСТАТИСТИК ДЛЯ ЧАСТИЦ И АНТИЧАСТИЦ (ПРИ $q^2 = 1$)

Предварительно докажем свойство вакуумного вектора:

$$a_k\, b_s^+ |0\rangle = b_s\, a_k^+ |0\rangle = 0. \tag{Д2.1}$$

Подействовав на вакуумный вектор обеими частями (154е), с учетом (36) и (155) получим

$$a_k\, b_s\, a_{k'}^+ |0\rangle = 0, \tag{Д2.2}$$

откуда, в силу единственности вакуумного вектора, заключаем

$$b_s\, a_k^+ |0\rangle = \phi_{sk} |0\rangle, \tag{Д2.3}$$

где ϕ_{sk} — некоторое число.

Подействовав на вакуумный вектор обеими частями (154з) и учитывая (155), (156) и (Д2.3), получим

$$q b_{s'}\, b_s^+ a_k^+ |0\rangle = \phi_{s'k}\, b_s^+ |0\rangle + \delta_{ss'}\, p_c\, q a_k^+ |0\rangle. \tag{Д2.4}$$

Подействуем на это уравнение оператором $b_{s''}$. Воспользовавшись (154р) в виде

$$q b_{s''}\, b_{s'}\, b_s^+ = -\, b_s^+ b_{s'}\, b_{s''} + q b_{s'}\, b_s^+ b_{s''} + b_{s''}\, b_s^+ b_{s'} \pm \rho \delta_{ss''}\, b_{s'} \tag{Д2.5}$$

и применив (Д2.3), (155) и (156), перепишем (Д2.4) в виде

$$\begin{aligned} &\delta_{ss'}\, p_c\, q\phi_{s''k} |0\rangle + \delta_{ss''}\, \phi_{s'k}\, (p_c \pm \rho) |0\rangle = \\ &= \delta_{ss''}\, p_c\, \phi_{s'k} |0\rangle + \delta_{ss'}\, p_c\, q\, \phi_{s''k} |0\rangle. \end{aligned} \tag{Д2.6}$$

Сокращая одинаковые члены в левой и правой частях этого равенства, мы остаемся с единственным слагаемым

$$\pm \rho \delta_{ss'}\, \phi_{s'k} |0\rangle = 0. \tag{Д2.7}$$

Приняв $s = s''$ и предполагая $\rho \neq 0$, получаем

$$\phi_{s'k} = 0, \tag{Д2.8}$$

что и доказывает второе равенство (Д2.1). Заметим, что это соотношение справедливо и при $q = 0$; тогда оно следует непосредственно из (Д2.4).

Аналогично доказывается и правое равенство (Д2.1). Исходя из (154л), получим

$$q b_s\, a_k\, b_{s'}^+ |0\rangle = 0. \tag{Д2.9}$$

Если $q \neq 0$, то, в силу единственности вакуумного вектора, должно быть

$$a_k\, b_s^+ |0\rangle = \chi_{ks} |0\rangle, \tag{Д2.10}$$

где χ_{ks} — некоторое число. Далее, на основе (154и) получим

$$a_k\, a^+_{k'}\, b^+_s |0\rangle = q\chi_{ks}\, a^+_{k'}|0\rangle + \delta_{kk'}\, p b^+_s |0\rangle. \qquad (\text{Д}2.11)$$

Подействовав на это равенство оператором $a_{k''}$ и воспользовавшись (154а) в виде

$$a_{k''}\, a_k\, a^+_{k'} = a_k\, a^+_{k'}\, a_{k''} - q a^+_{k'}\, a_k\, a_{k''} + q a_{k''}\, a^+_{k'}\, a_k - \rho\delta_{k'k''}\, a_k, \qquad (\text{Д}2.12)$$

а также (Д2.10), (35) и (36), получим

$$\delta_{kk'}\, p\chi_{k''s}|0\rangle + \delta_{k'k''}\,(pq-\rho)\,\chi_{ks}|0\rangle =$$
$$= \delta_{k'k''}\, pq\chi_{ks}|0\rangle + \delta_{kk'}\, p\chi_{k''s}|0\rangle. \qquad (\text{Д}2.13)$$

Сократив одинаковые члены в левой и правой частях, получим

$$\delta_{k'k''}\,\rho\chi_{ks}|0\rangle = 0, \qquad (\text{Д}2.14)$$

откуда следует

$$\chi_{ks} = 0$$

и первое равенство (Д2.1). Заметим, что при получении этого равенства мы предполагали $q \neq 0$, поэтому наши дальнейшие выводы справедливы лишь при этом условии.

Теперь рассмотрим тождество

$$[[b^+_s, a_k]_{-q}, [b_{s'}, a^+_{k'}]_{-q}]_- \equiv$$
$$\equiv [b^+_s, [a_k, [b_{s'}, a^+_{k'}]_{-q}]_-]_{-q} + [[b^+_s, [b_{s'}, a^+_{k'}]_{-q}, a_k]_{-q}. \qquad (\text{Д}2.15)$$

Для вычисления правой части воспользуемся тождеством типа тождества Якоби[25]:

$$[[a_k, [b_s, a^+_{k'}]_{-q}]_- \equiv q[[b_s, a_k]_{-1/q}, a^+_{k'}]_- + [[a^+_{k'}, a_k]_{-q}, b_s]_-. \qquad (\text{Д}2.16)$$

В нашем случае $q^2 = 1$, и мы можем производить замену $q = 1/q$. Тогда

$$[b_s, a_k]_{-1/q} = -(1/q)\,[a_k, b_s]_{-q} = -\,q[a_k, b_s]_{-q}, \qquad (\text{Д}2.17)$$

$$[a^+_{k'}, a_k]_{-q} = -\,q[a_k, a^+_{k'}]_{-1/q} = -\,q[a_k, a^+_{k'}]_{-q}. \qquad (\text{Д}2.18)$$

Подставляя эти выражения в (Д2.16) и воспользовавшись затем (154е) и (154k), получаем соотношение

$$[a_k, [b_s, a^+_{k'}]_{-q}]_- = \rho\delta_{kk'}\, b_s\,. \qquad (\text{Д}2.19)$$

[25] В общем виде это тождество записывается как

$$\alpha[[A,B]_\varepsilon, C]_\eta \equiv -\varepsilon\eta\,[[A,C]_{-\alpha/\varepsilon}], B]_{-\alpha/\eta} + \alpha^2[[B,C]_{\varepsilon\eta/\alpha}, A]_{1/\alpha}.$$

Второй член в правой части (Д2.15) вычисляется с помощью тождества

$$[b_s^+, [b_{s'}, a_{k'}^+]_{-q}]_- \equiv q[[b_{s'}, b_s^+]_{-1/q}, a_{k'}^+]_- + [[a_{k'}^+, b_s^+]_{-q}, b_{s'}]_- \qquad (Д2.20)$$

и соотношений

$$[b_{s'}, b_s^+]_{-1/q} = -(1/q)\,[b_s^+, b_{s'}]_{-q} = -q[b_s^+, b_{s'}]_{-q}, \qquad (Д2.21)$$

$$[a_{k'}^+, b_s^+]_{-q} = -q[b_s^+, a_{k'}^+]_{-1/q} = -q[b_s^+, a_{k'}^+]_{-q}. \qquad (Д2.22)$$

Подставив эти два последних соотношения в правую часть (Д2.20) и воспользовавшись (154з) и (154м), получим соотношение

$$[b_s^+, [b_{s'}, a_{k'}^+]_{-q}]_- = \mp \rho q \delta_{ss'}\, a_{k'}^+. \qquad (Д2.23)$$

Подстановка (Д2.19) и (Д2.23) в исходное тождество (Д2.15) приводит к соотношению

$$[[b_s^+, a_k]_{-q}, [b_{s'}, a_{k'}^+]_{-q}]_- = \rho\delta_{kk'}\,[b_s^+, b_{s'}]_{-q} \mp \rho q \delta_{ss'}\,[a_{k'}^+, a_k]_{-q}. \qquad (Д2.24)$$

Подействуем на вакуум обеими частями этого уравнения. В силу доказанных соотношений (Д2.1) для левой части получаем нулевое значение. Для правой части, согласно (35), (36), (155) и (156), получаем

$$-\rho q(p_c \pm qp)\,\delta_{ss'}\,\delta_{kk'}|0\rangle = 0. \qquad (Д2.25)$$

Выбрав $s = s'$ и $k = k'$ и учитывая, что $\rho \neq 0$, $q \neq 0$, получим

$$p_c = \mp qp. \qquad (Д2.26)$$

Но по ранее доказанной связи спина со статистикой в скалярном случае (верхний знак) $q = -1$, а в спинорном случае (нижний знак) $q = 1$. Следовательно, мы всегда имеем

$$p = p_c \qquad (Д2.27)$$

и, согласно (172), равенство $M = M_c$ для порядков частиц и античастиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Окунь Л.Б. — УФН, 1989, т.158, с.293; Comments on Nucl. and Part. Physics, 1989, vol.19, p.99. **Ramberg E., Snow G.A.** — Phys. Lett. B, 1990, vol.238, p.438. **Novikov V.A. et al.** — Phys. Lett. B, 1990, vol.240, p.227.
2. **Боголюбов Н.Н.** — Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1970, т.II.
3. **Govorkov A.B.** — Journ. Phys. A, 1980, vol.13, p.1673.
4. **Bach A.** — Phys. Lett. A, 1990, vol.151, p.1.
5. **Говорков А.Б.** — ТМФ, 1983, т.54, с.361.
6. **Green H.S.** — Phys.Rev., 1953, vol.90, p.170.
7. **Greenberg O.W., Messiah A.M.L.** — Phys. Rev. B, 1965, vol.138, p.1155.
8. **Ohnuki Y., Kamefuchi S.** — Quantum Field Theory and Parastatistics, Berlin-Heidelberg-N.Y., Springer-Verlag, 1982.

9. Говорков А.Б. — ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.1229.
10. Говорков А.Б. — ТМФ, 1990, т.85, с.222.
11. Govorkov A.B. — Nucl. Phys. B, 1991, vol.365, p.381.
12. Игнатьев А.Ю., Кузьмин В.А. — ЯФ, 1987, т.46, с.786.
13. Greenberg O.W., Mohapatra R.N. — Phys. Rev. Lett., 1987, vol.59, p.2507.
14. Govorkov A.B. — Phys. Lett. A, 1989, vol.137, p.7.
15. Greenberg O.W., Mohapatra R.N. — Phys. Rev. Lett., 1989, vol.62, p.712.
16. Greenberg O.W. — Phys. Rev. D, 1991, vol.43, p.4111; Physica A, 1992, vol.180, p.419.
17. Cougo-Pinto M.V. — Phys. Rev. D, 1992, vol.46, p.858.
18. Govorkov A.B. — Mod. Phys. Lett. A, 1992, vol.7, p.2383.
19. Greenberg O.W. — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.64, p.705.
20. Pauli W. — Phys. Rev., 1940, vol.58, p.116.
21. Burgoyne N. — Nuovo Cim., 1958, vol.8, p.604.
22. Luders G., Zumino B. — Phys. Rev., 1958, vol.110, p.1450.
23. Стритер Р.Ф., Вайтман А.С. — РСТ, спин и статистика и все такое. М.: Наука, 1966. Йост Р. — Общая теория квантованных полей. М.: Мир, 1967.
24. Волков Д.В. — ЖЭТФ, 1959, т.36, с.1560; 1960, т.38, с.519.
25. Паули В. — Общие принципы волновой механики. М.-Л.: ОГИЗ, 1947, с.192.
26. Дирак П.А.М. — Принципы волновой механики. М.: ГИФМЛ, 1960, с.279.
27. Gentile G. — Nuovo Cim., 1940, vol.17, p.493; 1942, vol.19, p.106.
28. McCarthy I.E. — Proc. Camb. Phil. Soc., 1955, vol.51, p.131. Guenault I.E., McDonald D.K.C. — Molec. Phys., 1962, vol.5, p.525. Ben-Abraham S.I. — Amer. J. Phys., 1970, vol.38, p.1335.
29. Okayama T. — Prog. Theor. Phys., 1952, vol.7, p.517.
30. Kamefuchi S., Takahashi Y. — Nucl. Phys., 1962, vol.36, p.177.
31. Hartle J.B., Taylor J.R. — Phys. Rev., 1969, vol.178, p.2043. Hartle J.B., Stolt R.H., Taylor J.B. — Phys. Rev. D, 1970, vol.2, p.1759. Stolt R.H., Taylor J.R. — Nucl. Phys. B, 1970, vol.19, p.1; Nuovo Cim. A, 1971, vol.5, p.185.
32. Doplicher S., Haag R., Roberts J.E. — Commun. Math. Phys., 1971, vol.23, p.199; 1974, vol.35, p.49.
33. Haag R. — In: Progress in Quantum Field Theory. Amsterdam-Oxford-N.Y., North-Holland, 1986.
34. Buchholz D., Fredenhagen K. — Commun. Math. Phys., 1982, vol.84, p.1.
35. Longo R. — Commun. Math. Phys., 1989, vol.126, p.217.
36. Galindo A., Indurain F. — Nuovo Cim., 1963, vol.30, p.1040.
37. Yamada M. — Nucl. Phys. B, 1968, vol.6, p.596.
38. Chernikov N.A. — Acta Physica Polonica, 1962, vol.21, p.51.
39. Говорков А.Б. — ЖЭТФ, 1968, т.54, с.1785; Ann. Phys. (N.Y.), 1969, vol.53, p.349; Int J. Theor. Phys., 1973, vol.7, p.49.
40. Fredenhagen K. — Commun. Math. Phys., 1981, vol.79, p.141.
41. Buchholz D., Porrmann M., Stein U. — Phys. Lett. B, 1991, vol.267, p.377.
42. Doplicher S., Roberts J.E. — Commun. Math., Phys., 1990, vol.131, p.51.
43. Greenberg O.W., Macrae K.I. — Nucl. Phys. B, 1983, vol.219, p.358.
44. Iengo R., Lechner K. — Phys.Rep., 1992, vol.213, p.179.
45. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963, с.58.
46. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.И. — Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
47. Erenfest P., Oppenheimer J.R. — Phys. Rev., 1931, vol.37, p.333.
48. Akama K. et al. — Phys. Rev. Lett., 1992, vol.68, p.1826.
49. Окунь Л.Б. — Письма в ЖЭТФ, 1987, т.46, с.420; ЯФ, 1988, т.47, с.1182.
50. Bialynicki-Birula I. — Nucl. Phys., 1963, vol.49, p.605.
51. Bracken A.J., Green H.S.J. — Math. Phys., 1973, vol.14, p.1784.

52. **Kuryshkin V.** — Annales de la Fondation Louis de-Broglie, 1980, vol.5, p.111.
53. **Jannussis A., Brodimas G., Soulas D.** — Lett. Nuovo Cim., 1981, vol.30, p.123; 1981, vol.31, p.177; 1982, vol.34, p.375. **Jannussis A.** — Hadronic Journal, 1991, vol.14, p.257.
54. **Greenberg O.W., Messiah A.M.L.** — Journ. Math. Phys., 1965, vol.6, p.500.
55. **Stanciu S.** — Preprint Universitat Bonn, BONN-HE-92-04, 1992.
56. **Хамермеш М.** — Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Мир, 1966.
57. **Де Сварт Дж.** — УФН, 1964, т.84, с.651.
58. **Littlewood D.E.** — The Theory of Group Characters. Oxford, 1950.
59. **Вейль Г.** — Классические группы, их инварианты и представления. М.: 1947.
60. **Greenberg O.W.** — Phys. Rev. Lett., 1964, vol.13, p.598.
61. **Говорков А.Б.** — ТМФ, 1982, vol.53, p.283; 1983, vol.55, p.3.
62. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей (изд. 4-е). М.: Наука, 1984.
63. **Dell'Antonio G.F., Greenberg O.W., Sudarshan E.C.G.** — In: Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics. N.Y., Gordon and Breach, 1964.
64. **Румер Ю.Б., Фет А.И.** — Теория групп и квантовые поля. М.: Наука, 1977.
65. **Ramanathan R.** — Phys. Rev., 1992, vol.45, p.4706.
66. **Günaydin M., Gursey F.** — Phys. Rev. D, 1974, vol.9, p.3387.
67. **Говорков А.Б.** — Краткие сообщения ОИЯИ, № 7-85, Дубна, 1985, с.17; Труды VIII Межд. конф. по проблемам квантовой теории поля, Алушта, 1987. ОИЯИ, Д2-87-798, Дубна, 1987, с.262. JINR, E2-90-379, Dubna, 1990.
68. **Боголюбов Н.Н.** — В сб.: Труды Межд. школы «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц». Киев: Наукова думка, 1987, с.5.