

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЯДЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ

В.Г.Картавенко

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен развитию методов описания нелинейных явлений и процессов релаксации в сложных ядерных системах, образующихся при взаимодействии тяжелых ионов с атомными ядрами при энергиях $10+100$ МэВ/нуклон. Для анализа линейных и нелинейных возбуждений ядерной плотности развит вариант ядерной гидродинамики, основанный на алгебре токов и плотностей. Показано, что для безвихревого движения в квазиклассическом пределе уравнения ядерной гидродинамики можно свести к нелинейному уравнению Шредингера. Показано, что сферически-симметричные односолитонные решения хорошо описывают свойства ядерной плотности в основном состоянии. Указано на возможность существования сферически-симметричных узловых состояний ядерной плотности. Получены аналитические решения для одномерных нелинейных возбуждений: «кноидальные» волны, «кинки», «дырки» в ядерной материи. Получены основные уравнения для описания вихревых «дисков» ядерного вещества. Эволюция границы «диска» аналогична распространению в плоскости нелинейной дисперсной волны. Проведен качественный анализ основных свойств «дисковых» состояний. Метод обратной задачи для среднего поля ядра использован для анализа статических (описание профилей плотности и одночастичных потенциалов) и динамических (простая модель для анализа эволюции сжатого в начальный момент ядра) свойств ядерных систем. Показано, что монополярные изоскалярные гигантские резонансы можно рассматривать как линеаризованные колебания солитона ядерной плотности. Построено аналитическое самосогласованное решение для колебаний двойной ядерной системы. Исследовано влияние канала когерентного возбуждения гигантских резонансов на процесс эмиссии неравновесных легких частиц и явление диссипации кинетической энергии.

A review of the nonlinear phenomena and relaxation processes in the low and intermediate energy ($E \sim 10+100$ MeV/nucleon) nucleus-nucleus collisions is given. Current and density algebra approach to nuclear hydrodynamics is proposed to describe linear and nonlinear excitations of the nuclear density. In a semiclassical limit the main equations have been reduced to the nonlinear Schrödinger equation for irrotational flow motion. The nodeless spherical symmetrical soliton-type solutions describe well the main properties of a nuclear density in a ground state. It is pointed out that there may exist a nodal isomer state (a first nonlinear excitation) of the nuclear density. The following analytical one-dimensional solutions: soliton-like solutions (describing nuclear «slabs»), periodical nonlinear oscillations (analogue to «cnoidal»-type waves in plasma), a small amplitude nonlinear wave (subsonic «hole»-like localized pulse), exact solutions under nonvanishing boundary conditions («kinks», «holes») have been derived. The basic equations for the nonlinear nuclear vortical «disks» have been constructed. The evolution of the

shape of the vortex is analogous to the propagation of a nonlinear dispersion wave in a plane. A qualitative analysis of the main features of the vortex is done. Inverse mean field method has been used to analyze the statical (density profiles and single particle potentials) and dynamical (a simple model to describe an evolution of the initially compressed nuclei) properties of the nuclear systems. It is shown the monopole isoscalar density giant resonances can be considered as the linearized soliton oscillations. An analytical solution to describe the self-consistent two-center nuclear density oscillations is constructed. An influence of the coherent giant resonances channel on the light particle emission processes and dissipation phenomena is investigated.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительно вырос интерес к изучению нелинейных динамических явлений практически во всех областях современной физики. Во многом это связано с тем, что был достигнут прогресс в развитии методов точного решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, для которого фундаментальным является понятие солитона — нелинейной уединенной волны, способной распространяться без изменения формы и энергии. Это удивительное явление было открыто Дж. Расселом более 150 лет назад [1] при анализе волн, бегущих по поверхности воды. Современное развитие теории солитонов было инициировано исследованиями по термализации энергии в нелинейных колебательных системах [2]. Отсутствие термализации в численных экспериментах на ЭВМ оставалось долгое время парадоксом. Объяснение этому явлению было найдено в 1965 г. Забуски и Крускалом [3]. Они показали, что длинные волны, бегущие в одном направлении по струне с квадратичным взаимодействием между частицами, могут быть описаны уравнением Кортевега — де Вриза (КдВ), которое впервые получено при исследовании длинных волн в канале с водой [4]. Показано, что отсутствие термализации в данных системах объясняется наличием стабильных объектов, которые и были названы солитонами. Открытие в 1967 г. Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой [5] того факта, что для уравнения КдВ $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ (где индексы означают дифференцирование по соответствующей переменной) существует аналитический метод решения задачи Коши, и проведенные впоследствии исследования, показавшие что аналогичные методы применимы к многим другим эволюционным уравнениям, вызвали революцию в нелинейной физике [6—8].

Исследования, использующие концепцию солитона для анализа адронных систем, можно условно разбить на две основные области: релятивистская и нерелятивистская ядерная физика, причем используемые солитоноподобные решения могут быть разделены на два основных типа.

Топологические солитоны. Необходимое требование — граничное условие на бесконечности для солитонного состояния должно топологически отличаться от соответствующего граничного условия для физического вакуума. Одни из первых примеров топологических солитонов получены в работах Полякова [9] и т'Хофта [10], где было показано, как в системах со спонтанным нарушением симметрии помимо обычного сектора мезонных возбуждений возможна реализация тяжелых бозонов, возникающих как возбуждения над нетривиальным вакуумом. С квантово-полевой точки зрения такие монополи и солитоны представляют собой локализованные в пространстве сгустки энергии, описываемые классическими полями. Второй пример — описание барионов как топологических солитонов мезонных и киральных полей [11—12].

Нетопологические солитоны. Граничные условия на бесконечности для солитоноподобных решений и физического вакуума совпадают. Вырождения вакуумного состояния не требуется. Необходимое условие существования нетопологических солитонных решений — наличие аддитивных законов сохранения. Кроме того, для существования солитонных решений в дву- и более мерном координатном пространстве необходимо либо иметь добавочное калибровочное поле с ненулевым спином, либо рассматривать зависящие явно от времени, но недисперсные решения [13].

Данный обзор в значительной мере посвящен исследованиям, использующим концепцию нетопологического солитона в нерелятивистской ядерной физике. Литературу по топологическим и нетопологическим солитонам в релятивистской ядерной физике, кроме упомянутых выше работ, можно найти в монографиях и обзорах [14—17].

Нелинейные коллективные возбуждения в нерелятивистских ядерных системах представляют интерес по следующим основным причинам.

Во-первых, развитие экспериментальной физики тяжелых ионов предоставило реальную возможность изучения коллективных возбуждений большой амплитуды в ядерных системах: гигантские резонансы, высокоспиновые состояния, супердеформированные ядра, высоковозбужденные состояния различной природы. Особый интерес вызывают исследования, направленные на поиск новых необычных мод движения при столкновении тяжелых ионов промежуточной энергии ($E \sim 10+100$ МэВ/нуклон) с атомными ядрами.

Во-вторых, коллективные движения большой амплитуды — это одна из основных проблем современной теоретической ядерной физики, требующая развития новых теоретических методов.

В-третьих, всегда существует интерес найти новые необычные решения известных уравнений, которые нельзя получить методами теории возмущения вблизи некоторого состояния равновесия. Кроме то-

го, большинство нелинейных эволюционных уравнений с помощью масштабных преобразований могут быть приведены к универсальному виду, и поэтому решения, полученные, например, для ядерных систем, могут быть использованы при анализе аналогичных систем в теории плазмы, в радиофизических средах и т.п.

Раскроем вышеизложенное более подробно.

Одна из основных причин интенсивного исследования процессов столкновения тяжелых ионов с атомными ядрами при промежуточных энергиях заключается в том, что существует надежда обнаружить необычные эффекты, известные в физике плазмы [18—19] при энергии столкновения вблизи скорости «звука» ($E \sim 30\text{—}50$ МэВ/нуклон) в ядерном веществе.

Первые указания на возможность существования ударных волн в ядерном веществе появились более 30 лет назад [20]. Классическая картина сверхзвуковой адронной частицы, пересекающей тяжелое ядро-мишень, очень наглядна, но не адекватна для квантовых конечных ядерных систем. В работах [21—27] рассмотрено микроскопическое описание процессов, связанных с прохождением быстрой легкой частицы через большое ядро. В линейном приближении было показано, что в «сверхзвуковом» режиме в ядре-мишени происходит генерация коллективных возбуждений плотности (гигантских резонансов), формирующих резкий пакет волн — черенковский конус. «Выплескивание» нуклонов из мишени фронтом черенковского конуса очень похоже на действие классической ударной волны. Несмотря на это микроскопический способ рассмотрения не требует установления локального термодинамического равновесия, существенного для феноменологической классической гидродинамики.

Около 15 лет назад были сделаны предположения о существовании новых типов нелинейных волн ядерной плотности в холодной ядерной материи: квантовых ударных волн и солитонов [28—30]. В работах [26, 28, 30, 31] солитон соответствовал распространению в ядерной материи не только изоскалярных солитонов, но и солитонов других типов: спиновых, изоспиновых и спин-изоспиновых [32].

Использование концепции солитона дало новый импульс исследованиям, направленным на поиск состояний ядерной материи, имеющих необычную топологическую структуру.

Традиционный пример — «пузырьковые» («дырочные», «bubble») состояния ядерного вещества. Первые указания на существование таких состояний даны около 50 лет назад [33]; частично эти состояния исследовались в работах [34, 35]. Такие состояния могли бы образовываться, в принципе, при бомбардировке тяжелых ядер легчайшими античастицами (антипротонами, антидейтронами ...), при аннигиляции с протонами, на-

ходящимися на $1s$, $1p$, ... орбитах или при взаимодействии двух достаточно тяжелых ядерных систем [35]. Развитие экспериментальной физики тяжелых ионов, в принципе, дает возможность наблюдения таких состояний. Теория солитонов внесла новые нюансы в эту проблему. Дырочные солитоны ядерной плотности, движущиеся со скоростью вблизи скорости «звука» и приводящие к фрагментации ядерной системы при выходе солитона на поверхность, рассматривались в [25,26,31,36,37]. Оригинальный механизм образования пузырьковых состояний в ядерных системах нового типа — локализованные состояния каонов — был предложен в [38,39]. Авторы этих работ отметили аналогию поведения K^+ -мезона в ядерном веществе и электрона в жидком гелии [40]. Физическая картина образования пузырьков состоит в том, что при достаточно сильном взаимодействии примеси (каона) с частицами среды (нуклонами) оказывается энергетически выгодным создать локальное разрешение плотности, проиграв в энергии среды, но выиграв в энергии примесей, локализовав их в пузырьке. Были детально исследованы свойства таких возбуждений. Оказалось, что типичными значениями параметров пузырьков являются: энергия $E_b \sim 100$ МэВ, масса $m \sim 5$ ГэВ, радиус $a \sim 2$ фм, минимальное число каонов в пузырьке $N > 4$. Предсказано увеличение времени жизни K^+ -мезона за счет локализации и уширение импульсных распределений μ^+ -мезонов в $K\mu$ -распаде.

Добавим, что недавно снова были получены теоретические предсказания о возможности образования в зоне столкновения таких необычных объектов, как ядерные «диски» [41,42], «пузыри» и «кольца» [43].

Относительно методов описания коллективных возбуждений большой амплитуды в сложных ядерных системах необходимо отметить следующее. Исходное уравнение Шредингера линейно относительно многочастичной волновой функции, но полное решение многочастичной задачи найти пока невозможно. Любое сокращенное описание в ограниченном пространстве коллективных степеней свободы приводит к нелинейной задаче, которая, в большинстве случаев, линеаризуется вблизи некоторого равновесного состояния. Квантовое описание процесса столкновения двух сложных ядерных систем пока не построено, по крайней мере для процессов, сопровождающихся большой передачей энергии, вещества и значительной перестройкой структуры сталкивающихся ядер. Описание процесса столкновения двух сложных ядер проводится в основном с помощью классических или квазиклассических методов (различные варианты гидродинамики [44,45], зависящий от времени метод Хартри — Фока (TDHF) [46,47], динамическая теория Томаса — Ферми (DTFT) [48,49], подходы теории переноса, основанные на уравнениях кинетического типа (включающие самосогласованное среднее

поле и столкновительные члены) Больцмана — Нордгейма — Власова [50], Больцмана — Улинга — Уленбека [51] и т.п.). Все эти подходы требуют значительных вычислительных мощностей и напоминают черный ящик, на выходе которого основными величинами остаются профили плотности и поля скоростей частиц, интерпретация которых всегда содержит определенную неоднозначность. Поэтому всегда хотелось бы иметь более простые подходы, близкие по физике, но позволяющие получить хотя бы часть результатов в аналитическом виде и сделать более определенные предсказания об эволюции нелинейной системы. Определенную помощь и в этом вопросе может дать теория солитонов.

Обзор построен следующим образом. В разд.2 приведены основные соотношения для гидродинамического представления гамильтониана. Раздел 3 посвящен колебательным, разд.4 — вращательным возбуждениям ядерной плотности. В разд.5 приведены примеры использования методики обратной задачи. В разд.6 дан краткий обзор диссипативных эффектов.

2. ГАМИЛЬТОНИАН

Использование понятий гидродинамики в ядерной физике восходит к ранним работам Бора [52,53] и Френкеля, предложивших модель жидкой капли для описания деления атомных ядер. Для описания колебаний капли были развиты двухжидкостная гидродинамическая модель [54], а позднее — динамическая коллективная модель [55], которая привела к пониманию многих важных свойств изоскалярных гигантских резонансов [56]. Использование понятий гидродинамики в описании высокоэнергичных столкновений адронов [45] и ядер с ядрами было связано с ранними работами Ландау [57]. Успех использования концепции гидродинамики для анализа разнообразных явлений в ядерных системах инициировал исследования, направленные на построение уравнений гидродинамического типа исходя из общих свойств системы взаимодействующих нуклонов [48,49,58—60]. Здесь необходимо отметить пионерские работы Н.Н.Боголюбова [61,62], где впервые уравнения гидродинамики были получены в общем виде для системы взаимодействующих частиц. В настоящее время в теоретической ядерной физике существуют различные варианты такого подхода, который условно получил название «fluid dynamics» (см., например, обзоры [45,63]).

Напомним кратко схему квантово-гидродинамического подхода, развитого нами для описания явлений релаксации в реакциях с тяжелыми ионами [24,26,64—66].

Термин «гидродинамика» означает, что мы будем описывать динамическое поведение ядерной системы в ограниченном пространстве коллективных переменных плотности и нуклонного тока системы. Как указывалось в [67], использование токовых операторов в качестве коллективных координат нерелятивистской системы отнюдь не ново и восходит к ранним работам Ландау по гидродинамике [57]. Многие идеи, которые использованы в данной работе, давно известны в теории жидкого гелия [40]. Токи могут рассматриваться в качестве фундаментальных динамических переменных, так же, как и соответствующие канонические полевые операторы. В основе подхода лежит алгебра токовых операторов. Гамильтониан системы может быть формально переписан в терминах операторов токов. Использование одновременных коммутационных соотношений между полевыми и токовыми операторами дает полное динамическое описание системы. Мы реализовали эти идеи для ядерной гидродинамики [26,65].

Логическое построение данного подхода соответствует логике современных теорий ядерного коллективного движения: сначала выбирается пространство неких коллективных переменных, а затем ищется выражение для коллективного гамильтониана в терминах выбранных коллективных переменных, воспроизводящее коммутационные соотношения исходного многочастичного гамильтониана и коллективных операторов. В качестве примера можно было бы взять любые варианты теории коллективного движения, основанные на методе бозонного представления фермионных операторов.

Система A нуклонов с двухчастичным взаимодействием описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x \nabla \Psi^+(x) \nabla \Psi(x) + \int d^3x d^3y \Psi^+(x) \Psi(x) U(x-y) \Psi^+(y) \Psi(y), \quad (1)$$

где операторы нуклонного поля $\Psi^+(x)$, $\Psi(x)$ удовлетворяют антикомму- тационным соотношениям

$$\{\Psi^+(x), \Psi(y)\}_+ = \delta(x-y).$$

Коллективные операторы плотности и тока нуклонов в представлении вторичного квантования записываются обычным образом:

$$\hat{\rho}(x) \equiv \Psi^+(x) \Psi(x),$$

$$\hat{j}_k(x) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\Psi^+(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi(x) - \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi^+(x) \Psi(x) \right).$$

Операторы $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ и $\hat{j}_k(\mathbf{x})$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{\rho}(\mathbf{x}), \hat{j}_k(\mathbf{y})] = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\rho}(\mathbf{x})), \quad [\hat{\rho}(\mathbf{x}), \hat{\rho}(\mathbf{y})] = 0,$$

$$[\hat{j}_k(\mathbf{x}), \hat{j}_l(\mathbf{y})] = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_l} (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{j}_k(\mathbf{x})) + i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{j}_l(\mathbf{y})). \quad (2)$$

Рассмотрим уравнения движения для операторов $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ и $\hat{j}_k(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(\mathbf{x})}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\rho}(\mathbf{x}), \hat{H}] = -\sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_n} \hat{j}_n(\mathbf{x}), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{j}_k(\mathbf{x})}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{j}_k(\mathbf{x}), \hat{H}] = & -\frac{\hbar^2}{2m^2} \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\hat{T}_{nk}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{\rho}(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_k} \right) - \\ & - \frac{2}{m} \hat{\rho}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3 y U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\rho}(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (4)$$

где тензор плотности кинетической энергии

$$\hat{T}_{nk}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_n} \Psi^+(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi^+(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} \Psi(\mathbf{x})$$

удовлетворяет следующим коммутационным соотношениям:

$$[\int \hat{T}_{kl}(\mathbf{x}') d^3 x', \hat{\rho}(\mathbf{x})] = -\frac{2m}{i\hbar} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \hat{j}_l(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_l} \hat{j}_k(\mathbf{y}) \right), \quad (5)$$

$$[\int \hat{T}_{kl}(\mathbf{x}') d^3 x', \hat{j}_n(\mathbf{x})] = \frac{i\hbar}{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \hat{T}_{ln}(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_l} \hat{T}_{kn}(\mathbf{x}) - 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_n} \hat{\rho}(\mathbf{x}) \right).$$

Отсюда видно, что, найдя выражение для \hat{T}_{kl} через операторы $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ и $\hat{j}_k(\mathbf{x})$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (5), мы получили бы замкнутую систему уравнений движения, содержащих только операторы $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ и $\hat{j}_k(\mathbf{x})$.

Известно [67] следующее выражение для \hat{T}_{kl} в терминах операторов $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ и $\hat{j}_k(\mathbf{x})$, удовлетворяющее коммутационным соотношениям (5) и с этой точки зрения эквивалентное исходному выражению для \hat{T}_{kl} через операторы нуклонного поля $\Psi^+(\mathbf{x})$, $\Psi(\mathbf{x})$:

$$\hat{T}_{kl} = \frac{m^2}{\hbar^2} (\hat{j}_k \hat{\rho}^{-1} \hat{j}_l + \hat{j}_l \hat{\rho}^{-1} \hat{j}_k) + \frac{1}{2} \hat{\rho}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial x_l} \hat{\rho} + \text{const } \delta_{kl}.$$

Окончательно можно написать следующее приближенное гидродинамическое выражение для гамильтониана системы, эквивалентное исходному (1), с точки зрения уравнений движения (2) — (4) для операторов $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ и $\hat{j}_k(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_h = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^3 \int \hat{j}_k \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{j}_k d^3x + \frac{\hbar^2}{8m} \int \frac{|\nabla \hat{\rho}|^2}{\hat{\rho}} d^3x + \\ + \int d^3x d^3y \hat{\rho}(\mathbf{x}) U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\rho}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения движения (3), (4) для операторов $\hat{\rho}(\mathbf{x}, t)$ и $\hat{j}_k(\mathbf{x}, t)$ формально имеют вид операторных уравнений непрерывности и уравнения типа Эйлера:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \hat{j}_k}{\partial x_k} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \hat{j}_k}{\partial t} = - \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\hat{j}_n \hat{\rho}^{-1} \hat{j}_n - \hat{P}_{kn}), \quad (8)$$

где $\hat{P}_{kn}(\mathbf{x}, t)$ — оператор тензора «давления».

Приведем выражения для интегралов движения — полного числа частиц A , полного импульса \mathbf{P} и углового момента \mathbf{L} системы:

$$A = \int \rho d^3x, \quad \mathbf{P} = m \int \mathbf{j}(\mathbf{x}) d^3x, \quad \mathbf{L} = m \int (\mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x})) d^3x.$$

В классической гидродинамике [69] фундаментальными переменными являются локальные плотность $\rho(\mathbf{x})$ и поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, с помощью которых функция тока определяется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\hat{\rho}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{x})]. \quad (9)$$

Мы используем симметризованную форму записи для перехода к квантовой механике. Однако концепция скорости в квантовой механике является не столь определенной, как поток. Скорость не является канонической переменной. Кроме того, $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ и $\rho(\mathbf{x})$ связаны законом сохранения частиц в виде уравнения непрерывности. Поэтому существуют проблемы построения оператора скорости, играющего соответствующую роль в классической гидродинамике. Ландау [57] определял оператор скорости следующим образом:

$$\hat{v}(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\hat{\rho}(x)} \hat{j}(x) + \hat{j}(x) \frac{1}{\hat{\rho}(x)} \right].$$

Для определения перестановочных соотношений оператора скорости мы будем использовать (9). Этот выбор мы считаем более предпочтительным, он позволяет отдалить использование оператора обратной плотности до последней стадии.

По аналогии с классической гидродинамикой можно выделить в операторном виде безвихревые и чисто вихревые компоненты операторов потока или скорости [68].

Безвихревое условие для $\hat{v}(x)$ может быть обеспечено, если ввести обычным образом оператор потенциала скорости $\hat{\phi}(x)$ с помощью соотношения

$$\hat{v}(x) = \nabla \hat{\phi}(x), \quad (10)$$

сводящего коммутационные соотношения (2) к каноническим:

$$[\hat{\rho}(x), \hat{\phi}(y)] = \frac{i\hbar}{m} \delta(x - y), \quad [\hat{\rho}(x), \hat{\rho}(y)] = 0, \quad [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0. \quad (11)$$

Нелинейное квантово-механическое описание ядерных систем пока не построено (хотя определенные усилия в этом направлении предпринимаются [70]), и мы не можем построить общее решение операторных нелинейных уравнений (2), (3) или (7), (8). В следующих разделах будут приведены решения нелинейных уравнений, полученные в квазиклассическом приближении, и линеаризованные решения для квантовых колебаний.

3. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Общие замечания. Колебания ядерной плотности — объект постоянного внимания в ядерной физике. Это простейший тип возбуждений (неротационное движение). Наиболее изученные в настоящее время гигантские монополярные резонансы — линейные колебания равновесной плотности изолированного ядра. Изучение реакций с тяжелыми ионами поставило новые проблемы в теоретическом описании колебаний ядерной плотности.

Для понимания механизма глубоконеупругого взаимодействия тяжелых ионов с атомными ядрами [71] является полезной концепция входных (doorway) состояний, образующихся на начальной стадии столкновения и определяющих дальнейший процесс релаксации системы. Среди множества степеней свободы сталкивающихся ядер одним из наиболее

вероятных кандидатов в качестве входных состояний могут быть колебания ядерной плотности (гигантские резонансы) в сталкивающихся ядрах или в образовавшейся в результате взаимодействия двойной ядерной системе. Такие состояния могут быть существенными для понимания явления диссипации кинетической энергии [22, 64, 72] и механизма образования быстрых легких частиц [22—24, 27] в глубоконеупругих столкновениях.

Метод описания колебаний ядерной плотности в подобных расчетах должен удовлетворять нескольким требованиям одновременно: допускать прямое обобщение на случай двойной ядерной системы, быть достаточно последовательным (свойства возбуждений должны быть согласованы с исходным многочастичным гамильтонианом системы, основные законы сохранения должны выполняться), адекватным (воспроизводить по возможности большую часть имеющихся экспериментальных данных о свойствах возбуждений) и простым, так как информация о свойствах таких возбуждений используется в качестве входных данных для дальнейших, довольно сложных расчетов. Среди существующих методов описания колебаний ядерной плотности [56, 73—76] лучше всего удовлетворяет этим требованиям полумикроскопическая ядерная гидродинамика.

В работе [65] мы начали описание колебаний ядерной плотности для процессов релаксации в столкновениях тяжелых ионов с ядрами. Было получено простейшее аналитическое решение, моделирующее описание колебаний плотности в двойной ядерной системе [66]. При анализе колебаний изолированного ядра, имеющего диффузную границу, обнаружена [26] связь этой задачи с традиционной проблемой теории солитонов — стабильностью нелинейных волн [77—79]. Атомное ядро рассматривается как солитон ядерной плотности. Существование диффузного слоя является следствием выбора эффективного взаимодействия и симметрии задачи. Основные законы сохранения выполняются. Схема описания колебаний полностью самосогласованна. После масштабных преобразований ядерное полностью эквивалентно другим нелинейным дисперсным средам, эволюционирующим в соответствии с НУШ типа $\psi^3 - \psi^5$. Ниже кратко изложены основные соотношения данного подхода.

Нелинейное уравнение Шредингера. В квазиклассическом пределе уравнения движения (7), (8) в случае безвихревого потока (10) могут быть сведены к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) [26]:

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + \frac{\delta \mathcal{E}[|u|^2]}{\delta |u|^2} u, \quad (12)$$

где локальная плотность и потенциал скоростей

$$\rho(x, t) = |u(x, t)|^2, \quad \phi(x, t) = (\hbar/m) \arg u(x, t). \quad (13)$$

Функциональная производная эффективного взаимодействия по плотности $\delta \mathcal{E}[\rho] / \delta \rho$ полностью определяет тип нелинейности уравнений (12), (13).

Выберем функционал взаимодействия в виде сил Скирма [80] и проведем перенормировку параметров гамильтониана:

$$\int d^3x d^3y \rho(x) U(x-y) \rho(y) \Rightarrow \int d^3x \mathcal{E}[\rho(x)],$$

$$m \Rightarrow m^* \equiv (m^{-1} + (3t_1 + 5t_2) \rho_N / 8\hbar^2)^{-1}, \quad (14)$$

$$\frac{\hbar^2}{8m} \Rightarrow \frac{\hbar^2 \eta^2}{8m} \equiv \frac{\hbar^2}{8m} + \frac{\rho_N}{64} (9t_1 - 5t_2),$$

$$\mathcal{E}[\rho] \Rightarrow \frac{3}{8} t_0 \rho^2 + \frac{1}{16} t_3 \rho^3,$$

где ρ_N — плотность ядерной материи, а t_0, t_1, t_2, t_3 — параметры сил Скирма.

Такие простейшие, зависящие от плотности эффективные силы с успехом использовались в расчетах по методу Хартри — Фока для описания свойств ядер в основном состоянии [81, 82] и различных динамических расчетах [47—48].

В случае взаимодействия типа Скирма (14) после масштабного преобразования [26]

$$x \equiv (\hbar \eta / m^* c_s) x', \quad t \equiv (m^* c_s^2 / 2\hbar) \tau, \quad (15)$$

$$\rho(x, t) \equiv \rho_N \psi^2(x', \tau), \quad (16)$$

где c_s — скорость звука в ядерной материи:

$$c_s \equiv \left(\frac{1}{m^*} \rho^2 \frac{\delta^2 (\mathcal{E} / \rho)}{\delta \rho^2} \Big|_{\rho = \rho_N} \right)^{1/2}, \quad (17)$$

получаем безразмерный вариант уравнения (12):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\Delta' \psi - 4|\psi|^2 \psi + 3|\psi|^4 \psi. \quad (18)$$

Отметим сам факт, что уравнения безвихревой ядерной гидродинамики можно записать в виде нелинейного уравнения Шредингера. Такие уравнения с различными типами нелинейности с успехом использовались при анализе различных нелинейных явлений [7,8]. Наиболее популярным и изученным является кубическое НУШ ψ^3 [83,84]. Важнейшие причины: это уравнение является полностью интегрируемым, для данного типа уравнений существует отработанная схема интегрирования с помощью метода обратной задачи, формулы расчета многосолитонных решений и т.п.

НУШ (18) типа $\psi^3 - \psi^5$, к сожалению, не является полностью интегрируемой системой, хотя часть результатов может быть получена в аналитическом виде [31,26,36]. НУШ $\psi^3 - \psi^5$ ранее встречалось в теории плазменных волн [85—87]. Уравнение этого типа до сих пор слабо изучено.

Интересно отметить, что уравнениям релятивистской гидродинамики можно сопоставить уравнения теории поля. Например, релятивистский вариант уравнения (18) соответствует нелинейной теории поля $\Phi^4 - \Phi^6$ ($\square \Phi = \kappa^2 \Phi - \mu^2 |\Phi|^2 \Phi + |\Phi|^4 \Phi$), изучавшейся в работах [88,89].

Масштабное преобразование (15), (16) дает удобный набор размерных множителей: эффективную длину волны $\hbar \eta / m^* c_s$, энергию $m^* c_s^2 / 2$ и плотность ρ_N . Это позволяет отделить общие свойства системы, определяемые типом нелинейности (полиномиальное по плотности взаимодействие, конкуренция притяжения и эффективного отталкивания), от эффектов, связанных с выбором параметров взаимодействия, которые будут определять масштаб величин.

При соответствующем выборе начальных и граничных условий НУШ (18) можно использовать, наряду с упоминавшимися выше другими квазиклассическими методами, для анализа различных динамических явлений в сложных ядерных системах. Перечислим некоторые задачи.

— Можно показать, что само ядро является нелинейной волной плотности, и можно рассматривать столкновение двух нелинейных волн (ядер) или процесс взаимодействия волны с внешним полем.

— Интересно найти решения типа различных стационарных и движущихся нелинейных волн в ядерных системах: локализованные возбуждения (солитоны), нелинейные колебания системы, нелинейные вихри, пузыри, кольца и т.п.

— Анализ эволюции возбужденных ядерных систем и релаксации различных возбуждений. Особый интерес вызывает задача о развале воз-

бужденных ядерных систем на отдельные подсистемы (аналогия с процессом мультифрагментации).

— Можно показать, что полученные нами ранее уравнения для описания колебаний ядерной плотности [65,66] непосредственно связаны с условиями стабильности односолитонных решений НУШ (18). Монопольные гигантские резонансы можно рассматривать как линеаризованные решения НУШ (18), колебания нелинейной волны.

Решения некоторых из перечисленных выше задач приведены в данном обзоре.

Свойства солитонных решений. Рассмотрим свойства солитонных решений уравнений (12), (18). Такие уединенные волны обычно ищутся в виде

$$\psi_0(x', \tau) \equiv \psi_0(r) \exp(i(\lambda - v'^2/2)\tau + i\gamma v' + \sigma_0),$$

где $\gamma = x' - v'\tau - \gamma_0$, а параметры $\gamma_0, \sigma_0, v', \lambda$ определяются, соответственно, начальным положением центра волны γ_0 , начальным сдвигом фазы σ_0 , импульсом и энергией волны. Параметр λ определяется из условия сохранения числа нуклонов системы

$$A = \rho_N \left(\frac{m^* c_s}{\hbar \eta} \right)^3 \int d^3r \psi_0(r)^2. \quad (19)$$

Функция $\psi_0(r)$ — решение уравнения

$$\Delta_r \psi_0 - \lambda \psi_0 + 4\psi_0^3 - 3\psi_0^5 = 0, \quad (20)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\psi_0(\infty) = \frac{\partial \psi_0}{\partial r}(\infty) = \frac{\partial \psi_0}{\partial r}(0) = 0. \quad (21)$$

Это уравнение осуществляет экстремум действия с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{J} + \lambda \mathcal{J}_2 / 2 - \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_6 / 2,$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^{M-1} \left| \frac{\partial}{\partial r} \psi_0 \right|^2, \quad \mathcal{J}_n \equiv \int_0^\infty dr r^{M-1} \psi_0^n,$$

где M — размерность пространства. Между функционалами $\mathcal{J}(\lambda)$, $\mathcal{J}_n(\lambda)$ существуют две связи. Умножим уравнение (20) на $r^{M-1} \psi_0$ и

проинтегрируем по r от нуля до бесконечности. С учетом граничных условий (21) получим

$$2\mathcal{J} + \lambda \mathcal{J}_2 - 4 \mathcal{J}_4 + 3 \mathcal{J}_6 = 0. \quad (22)$$

Второе соотношение получим с помощью масштабного преобразования $r' \equiv \alpha r$, $\psi_0^\alpha \equiv \psi_0(\alpha r)$, при котором $\mathcal{J}^\alpha = \alpha^{M-2} \mathcal{J}$, $\mathcal{J}_n^\alpha = \alpha^M \mathcal{J}_n$, и вариационного принципа $(d\mathcal{L}^\alpha/d\alpha)|_{\alpha=1} = 0$.

В результате имеем теорему вириала

$$(M - 2)\mathcal{J} + M(\lambda \mathcal{J}_2/2 - \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_6/2) = 0. \quad (23)$$

Исключая из (22), (23) функционал \mathcal{J} , получаем следующие точные соотношения:

$$\mathcal{J}_4 = \lambda \mathcal{J}_2, \quad M = 3, \quad \lambda \mathcal{J}_2 - 3\mathcal{J}_4 + 2\mathcal{J}_6 = 0, \quad M = 1. \quad (24)$$

Соотношения (22)–(24) облегчают расчет наблюдаемых физических величин. В частности, при вычислении средней энергии системы на нуклон (с учетом сохранения полного числа нуклонов)

$$\frac{E - \Lambda A}{A} = \frac{mv^2}{2} - \Lambda + \frac{m^* c_s^2}{\mathcal{J}_2} \left(\mathcal{J} - \mathcal{J}_4 + \frac{\mathcal{J}_6}{2} \right)$$

с помощью соотношения (22) можно исключить градиентные члены

$$\frac{E - \Lambda A}{A} = \frac{mv^2}{2} - \Lambda + \frac{m^* c_s^2}{2} (-\lambda + 2\mathcal{J}_4 - 2\mathcal{J}_6/\mathcal{J}_2).$$

Дальнейшее упрощение достигается с помощью соотношений (24):

$$\frac{E - \Lambda A}{A} = \frac{mv^2}{2} - \Lambda + \frac{m^* c_s^2}{2} (\lambda - 2\mathcal{J}_6/\mathcal{J}_2), \quad M = 3,$$

$$\frac{E - \Lambda A}{A} = \frac{mv^2}{2} - \Lambda - \frac{m^* c_s^2}{2} (\mathcal{J}_4/\mathcal{J}_2), \quad M = 1.$$

Плотность ядерной системы в основном состоянии $\rho_0(x) = \rho_N \psi_0(r)^2$. Выражение для среднего импульса системы на нуклон $P/A = mv$.

Одномерные решения. В одномерном случае уравнения (20) имеют аналитические односолитонные решения

$$\psi_0(r) = (\lambda/(1 + (1 - \lambda)^{1/2} \text{ch}(\lambda^{1/2} r)))^{1/2}. \quad (25)$$

Аналитическая форма решения (25) позволяет получить в явном виде выражение для «числа частиц»

$$\bar{\alpha} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dr \rho(r) = \rho_0 \frac{\hbar \eta}{m^* c_s} \operatorname{Arth}(\sqrt{\lambda}),$$

и энергии на частицу

$$\frac{E - \Lambda \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} = \frac{m^* v^2}{2} - \Lambda - \frac{m^* c_s^2}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\operatorname{Arth}(\sqrt{\lambda})} \right).$$

Односолитонное решение (25) описывает так называемый «слой», используемый в одномерных расчетах по методам TDHF [46,47] и DTF [48], когда трехмерное столкновение двух ядер моделируется столкновением двух одномерных «слоев». Число нуклонов системы следующим образом связано с «числом частиц»: $A \approx \bar{\alpha}^3 \pi / 6 \rho_N^2$. Существование аналитического решения (25) упрощает динамические расчеты, так как начальные условия можно задавать аналитически, а не решать численно уравнения типа Томаса — Ферми. Распределение плотности «слоя» можно записать в виде симметризованного ферми-распределения:

$$\rho_0(x) = \rho_N \frac{\operatorname{sh}(\mathcal{R}/\mathcal{D})}{\operatorname{ch}(\mathcal{R}/\mathcal{D}) + \operatorname{ch}(x/\mathcal{D})}, \quad (26)$$

где «радиус слоя»

$$\mathcal{R} = \frac{\hbar \eta}{m^* c_s} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{Arth}(\sqrt{\lambda}),$$

«диффузность»

$$\mathcal{D} = \frac{\hbar \eta}{m^* c_s} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Сферически-симметричные решения. Для анализа сферически-симметричных решений уравнения (20) перепишем это уравнение в виде

$$\psi'_{r'r'} + 2\psi'_{r'} = \psi' - \psi'^3 + B\psi'^5, \quad (27)$$

сделав вспомогательное масштабное преобразование

$$\psi' \equiv 2\lambda^{-1/2}\psi, \quad r' \equiv \lambda^{1/2}r, \quad B \equiv \lambda B_0, \quad B_0 \equiv 3/16. \quad (28)$$

Параметризация $\lambda \rightarrow B$ в данном разделе более удобна для анализа перехода к хорошо исследованному кубическому уравнению Шредингера $B \rightarrow 0$.

Рассмотрим уравнение (27) на фазовой плоскости (ψ', ψ_r') . Для этого удобно отождествить r' со «временем», а (27) рассматривать как уравнение движения эффективной «частицы» под действием консервативных «сил» $F(\psi') \equiv -dV/d\psi'$ и «сил трения» $-2\psi_r'/r'$. «Потенциал» $V \equiv \psi'^2/2 + \psi'^4/4 - B\psi'^6/6$ имеет минимум в точках

$$\psi' = \pm X_1 \equiv \pm \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4B}}{2B} \right)^{1/2}$$

и максимум при

$$\psi' = 0, \quad \psi' = \pm X_2 \equiv \pm \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4B}}{2B} \right)^{1/2}.$$

«Потенциал» V обращается в нуль в точках

$$\psi' = 0, \quad \psi' = \pm X_3 \equiv \pm \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 16B/3}}{4B/3} \right)^{1/2},$$

$$\psi' = \pm X_4 \equiv \pm \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 16B/3}}{4B/3} \right)^{1/2}.$$

Картина фазовых траекторий для уравнения (27) качественно такая же, как в случае кубической нелинейности $B = 0$ [86] или в случае с насыщением нелинейности («силы» $F(\psi') = \psi'^3/(1+\psi'^2)$ [87]). При $B < B_0$ любая траектория, начинающаяся на оси $\psi_r' = 0$, при $r' \rightarrow \infty$ оканчивается в одной из трех точек $(0,0)$ или в «яме» $(\pm X_1, 0)$. Путем постепенного изменения начальной амплитуды $\psi'(0)$ можно получить счетное множество солитонных траекторий, начинающихся на оси $\psi'(0)$ и оканчивающихся при $r' \rightarrow \infty$ в нуле. Каждой такой траектории соответствует строго определенное начальное значение амплитуды $\psi_c'(0)$. Сколь угодно малое отклонение $\psi'(0)$ от $\psi_c'(0)$ приводит к тому, что при $r' \rightarrow \infty$ траектории будут оканчиваться не в нуле, а в одной из «ям». Область существования солитонных решений $B < B_0 = 3/16$, причем $X_3(B) < \psi_c'(0) < X_2(B)$. Примеры фазовых траекторий для уравнения типа (27) можно найти в работе [88].

На рис.1 приведены результаты численного интегрирования уравнения (27) для безузловых односолитонных решений. Видно, что и в этом случае амплитуды $\psi_c'(0)$ лежат в достаточно узкой области

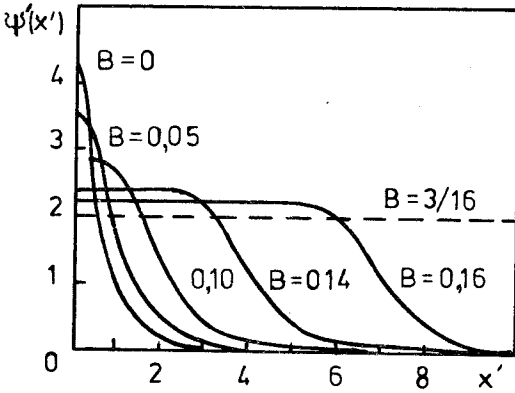


Рис.1. Безузловые сферически-симметричные односолитонные решения уравнения (27)

$2 \leq \psi'_c(0) \leq 4,337$. Как и в одномерном случае, переход $B \rightarrow B_0$ соответствует переходу к ядерной материи.

На рис.2 приведены результаты расчета функции безразмерной нормировки

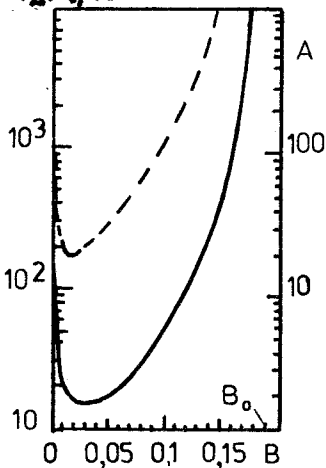
$\mathcal{J}'_2 \equiv \int_0^\infty dr' r'^2 \psi'^2$, которая связана с числом нуклонов системы соотношением, аналогичным (19):

$$A = \rho_N \left(\frac{m^* c_s}{\hbar \eta} \right)^3 \pi \left(\frac{B_0}{B} \right)^{1/2} \mathcal{J}'_2. \quad (29)$$

Видна очень резкая зависимость $A(B)$. Причем область от легких ионов $A > 10$ до любых существующих ядер лежит в пределах $0,17 > B > 0,11$ или $1 > \lambda > 0,02$.

При $B > 0,1$ можно построить приближенное аналитическое описание точных односолитонных решений уравнения (27) или (20). Для этого выберем пробную функцию в виде

$$\mathcal{J}_2(B)/\sqrt{B}$$



$$\psi_{SF}(r') = \psi_c(0) \left[\frac{\text{sh}(\mathcal{R}'/\mathcal{D}')}{\text{ch}(\mathcal{R}'/\mathcal{D}') + \text{ch}(r'/\mathcal{D}')} \right]^{1/2}. \quad (30)$$

Такая функциональная зависимость выбрана по аналогии с односолитонным решением (26) одномерной задачи и удовлетворяет необходимым граничным условиям. Кроме того, так как

Рис. 2. Зависимость безразмерной нормировки \mathcal{J}_2/\sqrt{B} от параметра B . A — соответствующее число нуклонов системы. Сплошная кривая — безузловые, штриховая — одноузловые решения

$$\rho(r) = \rho_N \left(\frac{B}{4B_0} \right) (\psi'(r'))^2, \quad (31)$$

то в этом случае $\rho(r)$ близка по форме со сферически-симметричным распределением Ферми $\rho_{SF}(r)$ [90]:

$$\rho_{SF}(r) \equiv \rho_N \frac{\text{sh}(R/d)}{\text{ch}(R/d) + \text{ch}(r/d)}. \quad (32)$$

ρ_{SF} по всем основным свойствам близко к обычному распределению Ферми ρ_F : R определяет полуспад плотности, d — ширину поверхностного слоя. На больших расстояниях ρ_{SF} спадает экспоненциально. Кроме того, ρ_{SF} обладает по крайней мере двумя преимуществами по сравнению с ρ_F : 1) важнейшие интегралы от ρ_{SF} (нормировка, среднеквадратичный радиус, фурье-преобразование) вычисляются аналитически, 2) в начале координат ρ_{SF} имеет нулевую производную. Последнее обстоятельство необходимо для того, чтобы приближенное решение (31), (32) удовлетворяло требованиям трансляционной инвариантности. Таким образом, популярное феноменологическое выражение для плотности ρ_{SF} можно рассматривать как приближенное решение НУШ $\psi^3 - \psi^5$.

Получаемые решения уравнений (20), (27) находятся в соответствии с результатами расчетов по методу Хартри — Фока и хорошо воспроизводят свойства ядерной плотности в основном состоянии. Правильно передается зависимость среднеквадратичного радиуса от массового числа $\sim A^{1/3}$. На рис.1 видно, что плотность в центре ядра постепенно падает при переходе от легких ядер к более тяжелым. Для средних и тяжелых ядер существует область постоянной плотности и поверхностный слой.

Диффузность слоя $d = \frac{\hbar \eta}{m^* c_s} \sqrt{B_0/B} \mathcal{D}'(B)$ примерно постоянна.

Отметим, что построенное описание свойств ядерной плотности на основе решений уравнений (20), (27) гораздо лучше, чем описание, основанное на уравнении КдВ или кубическом уравнении Шредингера [83,91], когда $\rho \sim \text{sech}(r')$ (см. рис.1, $B = 0$).

Узловые решения. Кроме безузловых решений, рассмотренных выше, уравнения (20), (27) могут иметь решения с узлами.

Рассмотрим одномерный случай. Умножим обе части уравнения (18) на ψ_r' и один раз проинтегрируем:

$$\psi_r' = \pm \sqrt{2(E' - V'(\psi'))} = \pm (2E' + \psi'^2 - \psi'^4/2 + B\psi'^6/3)^{1/2},$$

здесь константа интегрирования E' имеет смысл «энергии», а V' — «потенциал». Подстановкой $Z \equiv \psi'^2$ это уравнение приводится к виду

$$Z_r = \pm 2(Z(2E' + Z - Z^2/2 + BZ^3/3))^{1/2}.$$

Так как подкоренное выражение — полином четвертой степени, то это выражение может быть проинтегрировано в эллиптических функциях. Явный вид решения определяется постоянными интегрирования и граничными условиями. Односолитонное решение (25) соответствует сепаратрисе: $E' = 0$, $Z_r(\infty) = Z(\infty) = Z_r(0) = 0$. Среди других решений будут решения, являющиеся аналогом хорошо известных «кноидальных волн» уравнения КдВ. Для атомного ядра они будут иметь смысл нелинейных периодических колебаний ядерного вещества. Выбирая ненулевые граничные условия, можно получить решения типа «кинк» (движение фронта волны) и «дырочные» решения (локализованный импульс разрежения, движущийся по ядерной материи). Детальный анализ этих решений можно найти в работах [26,36].

Для сферической симметрии спектр узловых решений гораздо беднее. Периодические решения отсутствуют, зато есть солитонные решения, имеющие узлы.

На рис.3 показан пример одноузлового решения. На рис.2 есть график соответствия $A(B)$ для одноузловых решений. Следует отметить, что одноузловые решения могут появиться при некотором минимальном числе нуклонов. При использованном выборе параметров сил Скирма это $A > 19$ (рис.2). На рис.3 для ядра $A \sim 130$ показаны нижайшее безузловое решение (основное состояние ядра) и первое узловое решение (изомер плотности). Это состояние метастабильно и имеет большую энергию возбуждения $E^* \sim 10$ МэВ/нуклон.

Устойчивость солитонных решений. Для анализа устойчивости односолитонных решений используем Q-теорему [15,85,89], которая для данного НУШ формулируется так [26]:

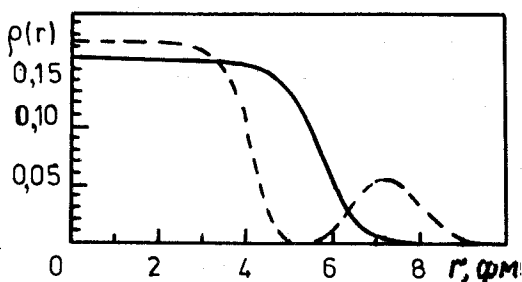


Рис. 3. Пример сферически-симметричной ядерной плотности в основном (сплошная линия) и одноузловом (штриховая) изомерном состоянии; $A \sim 130$

солитонные безузловые решения устойчивы, когда $dA/d\lambda > 0$. В одномерном случае вычисление производной можно провести аналитически и $d\bar{G}/d\lambda > 0$ при $\lambda < 1$ (или $B < B_0$), т.е. условие устойчивости в одномерном случае совпадает с условием существования солитонного решения. В трехмерном случае $dA/d\lambda > 0$ при $d\psi_2/d\lambda > 0$ или $d(\psi_2'/\sqrt{B})/dB > 0$. На рис.2 видно, что условие устойчивости для сферически-симметричных односолитонных решений выполняется при $B > 0,025$ (или $A > 1,7$), т.е. для всех ядер. Отметим, что при $B = 0$ решение неустойчиво. В теории плазмы это соответствует коллапсу ленгмюровских волн [87] или неустойчивости частицеподобных решений в нелинейной теории поля типа Φ^4 [88,89]. Для ядерных систем $B = 0$ означает отсутствие отталкивания $t_3 = 0$, поэтому оставшееся притяжение приводит к «схлопыванию» (коллапсу) ядерной системы. Можно также показать, что устойчивость односолитонного решения означает вещественность спектра частот колебаний сферического ядра с диффузной границей [77,78,79].

Солитоны в ядерном веществе. Получим приближенные решения для флуктуации плотности, движущейся в ядерном веществе со скоростью, мало отличающейся от скорости «звука» [26,30,31].

В квазиклассическом пределе уравнения (3), (4) или (7), (8) для сил типа Сkirма (14) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v = \frac{\hbar^2 \eta^2}{4m^{*2}} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{|\nabla \rho|^2}{2\rho^2} \right) - \frac{c_s^2}{2} \nabla \left(3 \left(\frac{\rho}{\rho_N} \right)^2 - 4 \frac{\rho}{\rho_N} \right). \quad (33)$$

Рассмотрим движение флуктуации плотности в ядерной материи со скоростью, близкой к скорости «звука». Для этого используем следующее масштабное преобразование:

$$\xi \equiv \alpha^{1/2}(x_1 - c_s t)/c_s^2, \quad \tau \equiv \alpha^{3/2}t/c_s, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = x_3, \quad (34)$$

где ось x_1 направлена вдоль пучка ионов, падающего в ядерное вещество и создающего флуктуации ядерной плотности. Переход $(x_1, t) \rightarrow (\xi, \tau)$ означает переход в систему координат, движущуюся со скоростью, близкой к скорости «звука». Параметр $\alpha \ll 1$ характеризует величину отклонения этой скорости «звука» c_s . Решения для (33) ищутся в виде разложения по параметру α :

$$\rho(x, t) = \rho_N(1 + \alpha \rho_{(1)} + \alpha^2 \rho_{(2)} + \dots),$$

$$v = c_s(\alpha v_{(1)} + \alpha^2 v_{(2)} + \dots). \quad (35)$$

Подставляя (34), (35) в уравнения движения (33) и собирая члены при одинаковых степенях по α , получаем, что движение по осям x_2, x_3 , в первых порядках по α отделяется от движения по осям ξ, τ . Поэтому в дальнейшем мы опустим знак вектора у переменных $v_{(1)}, v_{(2)}$, подразумевая под этим их проекции на ось x_1 . Выделяя в уравнениях (33) члены, линейные по α , получим

$$\frac{\partial \rho_{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_{(1)}}{\partial \xi}. \quad (36)$$

Квадратичные по α слагаемые дают систему двух связанных уравнений на $\rho_{(1)}, v_{(1)}, \rho_{(2)}, v_{(2)}$:

$$\frac{\partial \rho_{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (v_{(2)} + \rho_{(2)} + v_{(1)} \rho_{(1)}) = 0, \quad C \equiv \frac{\hbar^2 \eta^2}{4m^* c_s^6}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_{(2)} - v_{(2)} + v_{(1)}^2/2 + 3\rho_{(1)}^2/2) - C \frac{\partial^3 \rho_{(1)}}{\partial \xi^3} = 0. \quad (38)$$

Интегрируя (36) и комбинируя уравнения (37), (38), получим уравнение типа КдВ для $\rho_{(1)}(\xi, \tau)$:

$$\frac{\partial \rho_{(1)}}{\partial \tau} + 3\rho_{(1)} \frac{\partial \rho_{(1)}}{\partial \xi} - \frac{C}{2} \frac{\partial^3 \rho_{(1)}}{\partial \xi^3} = 0,$$

которое имеет односолитонные решения

$$\rho_{(1)}(\xi, \tau) = - \frac{\mathfrak{B}}{\text{ch}^2(\sqrt{\mathfrak{B}/2} C(\xi + \mathfrak{B}\tau))}, \quad \mathfrak{B} > 0.$$

Это решение в обычном координатном пространстве имеет вид

$$\rho(x_1, t) = \rho_N \left(1 - \frac{\alpha \mathfrak{B}}{\text{ch}^2 \left(\frac{m^* c_s}{\hbar \eta} \sqrt{2\alpha \mathfrak{B}} (x_1 - c_s(1 - \alpha \mathfrak{B})t) \right)} \right). \quad (39)$$

Видно, что решение (39) описывает распространение по ядерной материи импульсного возмущения со скоростью $c_s(1 - \alpha \mathfrak{B})$. Ширина импульса

$(\hbar \eta / m^* c_s) \sqrt{2\alpha \mathcal{B}}$ и амплитуда отклонения $\alpha \mathcal{B}$ от плотности ядерной материи определяются величиной отклонения скорости импульса от скорости «звука».

Полученный вывод о существовании «дозвуковых» солитонов разрежения, а не «сверхзвуковых» солитонов уплотнения косвенно подтверждается результатами одномерных расчетов по методу TDFH [47, 46] или в рамках DTFH [48]. В этих расчетах довольно четко видны дырочные солитоны разрежения, приводящие к фрагментации слоя, моделирующего атомное ядро, при выходе солитона на поверхность. И нет ни одного примера, где уплотнение распространялось бы по слою в виде импульса.

Линейные колебания. Колебательные возбуждения ядерной плотности мы будем описывать в терминах операторов плотности и потенциала скорости нуклонного поля, связанных каноническими коммутационными соотношениями (11).

Выделим из оператора плотности $\hat{\rho}(x)$ некоторую среднюю плотность $\rho_0(x)$ и оператор флуктуации плотности $\hat{\rho}(x) \equiv \rho_0(x) + \delta \hat{\rho}(x)$.

Требую, чтобы $\rho_0(x)$ была равновесной плотностью, и линеаризуя уравнения движения для $\delta \hat{\rho}(x)$ и $\hat{\phi}(x)$, мы получаем уравнение типа Томаса — Ферми для $\rho_0(x)$. Безразмерный аналог этого уравнения — уравнение (20), и само ядро в основном состоянии можно рассматривать как солитон ядерной плотности [26, 65, 77, 78] $\rho_0(x) = \rho_N \psi_0(r)^2$. Для анализа стационарных колебаний операторы $\delta \hat{\rho}$ и $\hat{\phi}$ могут быть разложены в терминах бозонных операторов рождения b_j^+ и уничтожения b_j :

$$[b_j, b_l^+] = \delta_{jl}, \quad [b_j, b_l] = 0, \quad [b_j^+, b_l^+] = 0, \quad (40)$$

$$\delta \hat{\rho}(x) = \rho_N^{1/2} \left(\frac{m^* c_s}{\hbar \eta} \right)^{3/2} \psi_0(r) \sum_j g_j(r) (b_j^+ + b_j), \quad (41)$$

$$\hat{\phi}(x) = \frac{i\hbar}{2m} \rho_N^{-1/2} \left(\frac{m^* c_s}{\hbar \eta} \right)^{3/2} \psi_0^{-1}(r) \sum_j f_j(r) (b_j^+ - b_j). \quad (42)$$

Амплитуды $g_j(r)$ и $f_j(r)$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\sum_j g_j(r) f_j(r') = \delta(r-r'), \quad \int d^3r g_j(r) f_l(r) = \delta_{jl}, \quad \delta(x-y) = \left(\frac{m^* c_s}{\hbar \eta} \right)^{3/2} \delta(x'-y'), \quad (43)$$

вытекающим из определения (41), (42) и коммутационных соотношений (11), (40) между операторами $\delta \hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, b_j^+ , b_j .

Частоты колебательных возбуждений $\hat{H}_h \rightarrow \sum_j \hbar \omega_j b_j^+ b_j + \text{const}$

$$\hbar \omega_j \equiv (m^* c_s^2 / 2) \Omega_j \quad (44)$$

и амплитуды $g_j(\mathbf{r})$ и $f_j(\mathbf{r})$ находят в результате решения системы уравнений

$$\hat{\mathcal{L}}_0 f_j(\mathbf{r}) = \Omega_j g_j(\mathbf{r}), \quad \hat{\mathcal{L}}_0 \equiv -\Delta_r + \lambda - 4\psi_0^2 + 3\psi_0^4, \quad (45)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_1 g_j(\mathbf{r}) = \Omega_j f_j(\mathbf{r}), \quad \hat{\mathcal{L}}_1 \equiv -\Delta_r + \lambda - 12\psi_0^2 + 15\psi_0^4. \quad (46)$$

Таким образом, мы имеем самосогласованную квантовую схему, аналогичную популярной схеме приближения хаотических фаз, для описания монополярных колебаний ядерной плотности.

Построить решение уравнений (45), (46) для нахождения амплитуд и частот колебаний совместно с решением уравнений (20), (21) для равновесной плотности и соотношениями ортогональности (43) оказалось довольно непростой задачей. Тип полученных безразмерных уравнений является общим для многих нелинейных динамических систем, которые стали объектом изучения в последние годы [7, 15, 85—89]. Поэтому развитие численных методов их решения является актуальной задачей. Нами были предложены два различных подхода для нахождения связанных состояний квантово-механических систем двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка (45), (46). Первый основан на методе стержневых сплайнов [77]. Второй подход использовал процедуру сепарабельзации [78] эффективных потенциалов, входящих в уравнения (45), (46). Для всех рассмотренных физических систем были получены только состояния в непрерывном спектре, описывающие моды распада с излучением частиц [79].

Колебания плотности и процесс эмиссии. Покажем, что когерентное состояние колебательных возбуждений ядерной плотности может имитировать источник в процессе излучения легких частиц высоких энергий в реакциях с тяжелыми ионами [24].

Эмиссия легких частиц, сопровождающая слияние или глубоко неупругие столкновения тяжелых ионов с атомными ядрами, несет информацию о начальной, далекой от равновесия стадии столкновения, определяющей дальнейшее развитие процесса. Именно этим объясняется тот

большой интерес, который вызывает изучение испускания легких частиц в реакциях с тяжелыми ионами. Феноменологический анализ экспериментальных спектров испускания показывает, что их можно представить в виде суммы двух компонентов, первый из которых обусловлен равновесной эмиссией частиц из компаунд-ядра и описывает низкоэнергетическую часть спектра испускания, а второй включает более жесткие частицы, вылетающие преимущественно вперед. Чтобы объяснить происхождение второго компонента, предложено несколько моделей испускания (см., например, ссылки в [24]). Большинство моделей используют концепцию источника для интерпретации данных по эмиссии быстрых легких частиц в ядро-ядерных столкновениях. Понятие излучающей термализованной нагретой области (модель ядерного файерболла [92]), введенное для интерпретации инклюзивных спектров легких частиц при высоких энергиях налетающего иона > 100 МэВ/нуклон, было распространено на более низкие энергии ~ 10 МэВ/нуклон [24, 93]. Несмотря на то, что такое феноменологическое описание наглядно и удобно для анализа экспериментальных данных, говорить о реальном излучающем куске ядра при энергиях ~ 10 МэВ/нуклон нельзя. Однако оказалось возможным построить в линейном приближении микроскопическое описание, по основным свойствам очень близкое к модели источника [24].

Будем предполагать следующую картину процесса столкновения ядер. Начиная с момента контакта, происходит перестройка средних полей сталкивающихся ядер и формирование общего для составной системы среднего поля. В результате этого процесса часть энергии относительного движения перейдет во внутреннее возбуждение. Другая ее часть сосредоточится на коллективной моде, описываемой переменной R_{rel} — относительным расстоянием между центрами сталкивающихся ядер.

Выделим из оператора плотности ρ усредненную часть ρ_0 и флуктуирующую часть $\delta\rho \equiv \rho - \rho_0$. Ток j равен сумме тока, связанного с относительным движением частей составной системы j_{rel} , и одночастичного тока j_{sp} :

$$j = j_{rel} + j_{sp}, \quad j_{rel}(x) \equiv \rho(x)p_{rel}(x)/m,$$

где $p_{rel}(x)$ — импульс относительного движения, приходящийся на один нуклон. Импульс изменяет направление при переходе через шейку, связывающую две части составной системы. Рассмотрение проводим в системе центра масс. В результате имеем

$$H_h = \frac{1}{2m} \int d^3x \rho(\mathbf{x}) \mathbf{p}_{rel}^2(\mathbf{x}) + \mathcal{E}[\rho_0] + \frac{m}{2} \int d^3x \mathbf{j}_{sp}(\mathbf{x}) \rho^{-1} \mathbf{j}_{sp}(\mathbf{x}) + \\ + (\mathcal{E}[\rho_0 + \delta\rho] - \mathcal{E}[\rho_0]) + \int d^3x \mathbf{p}_{rel}(\mathbf{x}) \mathbf{j}_{sp}(\mathbf{x}).$$

Первые два слагаемых — это кинетическая и потенциальная энергия относительного движения. Все градиентные слагаемые мы для простоты включили в эффективный функционал взаимодействия $\mathcal{E}[\rho]$. После образования среднего поля составной системы величина $\mathcal{E}[\rho_0]$ переходит в энергию основного состояния, рассчитанного в гидродинамическом приближении, а кинетическая энергия становится энергией коллективного движения составной системы, связанного с относительным движением ее частей. Следующие два члена — гамильтониан внутреннего движения. Мы возьмем его в одночастичном приближении. Последнее слагаемое описывает связь относительного движения с внутренним. Будем в дальнейшем предполагать известным одночастичный потенциал $U(\mathbf{x})$, одночастичные энергии и собственные функции одночастичного гамильтониана.

Таким образом, внутреннее состояние составной системы описывается зависящим от времени гамильтонианом

$$H_h = \frac{1}{2m} \int d^3x \rho(\mathbf{x}) \mathbf{p}_{rel}^2(\mathbf{x}) + \mathcal{E}[\rho_0] + \sum_s \varepsilon_s a_s^+ a_s + \int d^3x \mathbf{p}_{rel}(\mathbf{x}) \mathbf{j}_{sp}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{j}_{sp}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^+(\mathbf{x}) \nabla \Psi(\mathbf{x}) - \nabla \Psi^+(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x})),$$

$$\Psi^+(\mathbf{x}) = \sum_s \varphi_s(\mathbf{x}) a_s^+, \quad |a_s, a_{s'}^+| = \delta_{ss'}.$$

Поскольку в процессе столкновения возбуждается большое число различных частично-дырочных состояний и каждое конкретное состояние имеет маленькую вероятность возбуждения, мы будем следовать схеме приближения хаотических фаз. В рамках квазибозонного приближения для парных фермионных операторов нетрудно найти собственное состояние

$$|\Psi\rangle \sim \exp\left(\sum_{ss'} \gamma_{ss'}(t) \theta(\varepsilon_s - \varepsilon_F) \theta(\varepsilon_F - \varepsilon_{s'}) a_s^+ a_{s'}\right) |0\rangle,$$

$$\gamma_{ss'} = -\hbar^{-1} \int_0^t dt' \exp(-\hbar^{-1}(\varepsilon_s - \varepsilon_{s'})(t - t')) \chi_{ss'}(t'), \quad (47)$$

$$\chi_{ss'} = \frac{\hbar}{2mi} \int d^3x \mathbf{p}_{rel}(\mathbf{x}, t) (\varphi_s^*(\mathbf{x}, t) \nabla \varphi_{s'}(\mathbf{x}, t) - \nabla \varphi_s^*(\mathbf{x}, t) \varphi_{s'}(\mathbf{x}, t)),$$

где $|0\rangle$ — основное состояние системы, и рассчитать плотность распределения по ядерной системе внутренней энергии возбуждения и тока нуклонов. Эти результаты можно получить, не конкретизируя вида одночастичных функций $\varphi_s(x)$, а используя только условие их полноты и тот факт, что сумма $\sum_{\varepsilon_s < \varepsilon_F} \varphi_s^*(x) \varphi_s(y)$ равна $\rho_0(x)$ при $x = y$ и быстро спадает с ростом $|x - y|$. Мы предположили, что

$$\sum_{\varepsilon_s < \varepsilon_F} \varphi_s^*(x) \varphi_s(y) = \rho_0 \left(\frac{x+y}{2} \right) \exp \left(\frac{(x-y)^2}{2r_0^2} \right),$$

где r_0 по порядку величины равен межнуклонному расстоянию. Можно показать, что энергия возбуждения и ток концентрируются там, где или резко изменяется импульс \mathbf{p}_{rel} (т.е. в области контакта ядер), или велик градиент плотности ρ_0 (т.е. в поверхностном слое). Если пренебречь поверхностными эффектами, то для плотности энергии возбуждения получаем (при малых t) следующий результат:

$$E^*(x, t) = - \frac{5\hbar^2}{2mr_0^2} \rho_0(x) S \int_0^t dt' \dot{\mathbf{R}}_{rel}(t') \mathbf{R}_{rel}(t') / |\mathbf{R}_{rel}(t')|.$$

Энергия возбуждения, сосредоточенная в области контакта, равна

$$E^*(t) = \frac{5\hbar^2}{2mr_0^2} \rho_N S \int_0^t dt' \dot{\mathbf{R}}_{rel}(t') \mathbf{R}_{rel}(t') / |\mathbf{R}_{rel}(t')|,$$

где $\dot{\mathbf{R}}_{rel}$ — скорость относительного движения ядер, S — площадь сечения шейки. Величина $\rho_N S \int_0^t dt' \dot{\mathbf{R}}_{rel}(t') \mathbf{R}_{rel}(t') / |\mathbf{R}_{rel}(t')|$ приближенно равна числу нуклонов в зоне контакта, а $5\hbar^2/2mr_0^2 \approx 100$ МэВ. Таким образом, в зоне контакта сосредотачиваются и импульс, внесенный налетающим ионом, и большая энергия возбуждения.

Используя волновую функцию (47), можно рассчитать импульсное распределение нуклонов $N(\mathbf{p}, t)$ в возбужденной составной системе. В этом случае необходимо конкретизировать вид функций φ_s . Для качественных оценок мы заменим φ_s плоскими волнами. Это означает, что мы пренебрегаем поверхностными эффектами. Если предположить для простоты, что $\dot{\mathbf{R}}(t) = v \theta(\tau - t)$, то для $N(\mathbf{p}, \tau)$ получаем следующий результат:

$$N(p, \tau) = 2(2\pi)^{-5} \left(\frac{A_p A_t}{2\rho_N (A_p + A_t)} \right) \frac{(pv)^2}{p} \int_0^{p_F} dq q (1 - q/p)^2 \times \\ \times \frac{1 - \cos(\hbar^{-1}((\epsilon_p - \epsilon_q) - pv(1 - q/p)) \tau)}{(\hbar^{-1}(\epsilon_p - \epsilon_q) - pv(1 - q/p))^2} (R_p^{-2} \exp(-\frac{1}{2} p^2 R_p^2 (1 - q/p)^2) + \\ + R_t^{-2} \exp(-\frac{1}{2} p^2 R_t^2 (1 - q/p)^2)).$$

Следующие основные черты характеризуют это распределение.

Факторы $(pv)^2$ и $\frac{1 - \cos(\hbar^{-1}((\epsilon_p - \epsilon_q) - pv(1 - q/p)) \tau)}{(\hbar^{-1}(\epsilon_p - \epsilon_q) - pv(1 - q/p))^2}$ определяют

преимущественное возбуждение частиц с импульсами, направленными вдоль скорости налетающего иона, и угловое распределение вылетающих нуклонов имеет максимум вперед.

Наклон высокоэнергетической части спектра не зависит непосредственно от скорости (энергии на нуклон) налетающего иона. Но вклад эмиссии из начального состояния системы в полный спектр испускания будет увеличиваться с ростом v пропорционально v^2 и одновременно будет расти эффективный наклон энергетического спектра (оглабающая испарительной и предравновесной компонент), т.е. эффективная температура. Полное число нуклонов с $p > p_F$ растет с увеличением числа нуклонов в налетающем ионе. Именно эти черты характеризуют импульсное распределение нуклонов в модели движущегося источника [24].

Следует отметить также результат, полученный в [25] и состоящий в том, что взаимодействие солитона с частицами среды может формировать у них почти максвелловский спектр. Таким образом, ядерная система, оставаясь холодной, может излучать, как горячее тело с эффективной температурой, грубо пропорциональной обратному размеру коллективного возбуждения, распространяющегося по ядру [22—27].

4. ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПЛОТНОСТИ

Общие замечания. Вращательные состояния всегда были в центре внимания теоретической и экспериментальной ядерной физики. Высокоспиновые состояния [94,95] — наиболее популярный тип вращательного движения в ядерных системах, но далеко не единственно возможный. Неоднократно предпринимались попытки найти нетривиальные

вихревые состояния. В работе [96] высказывалось предположение о существовании вихревых изомерных ядер (сверхпроводящая компонента ядерной жидкости с квантованным вихрем, проходящим по оси капли). Не так давно снова было высказано близкое по физическому смыслу предположение [97].

В работах [98—99] в рамках жидкокапельной модели были получены приближенные решения, описывающие вихревые стабильные образования. В первом случае они сопоставлялись горячему пятну, рожденному в периферических столкновениях [98]. В [99] солитоны на поверхности ядра ассоциировались с кластерными конфигурациями.

По аналогии с примесными электронами и позитронами в плотных газах можно высказать предположение о возможности существования в ядерных системах аналогов вихревых колец на примесных адронах [40,100].

Недавно были получены теоретические предсказания о возможности образования в зоне столкновения двух сложных ядер таких экзотических объектов, как диски [41,42] и кольца [97].

В данном разделе рассмотрен один из возможных типов вихревых состояний несжимаемой ядерной материи — плоские вихревые диски [42]. Это конечные области постоянной завихренности, ограниченные равномерно вращающейся границей. Данные состояния можно рассматривать как обобщение эллиптических вихрей Кирхгофа [69]. В рамках полумикроскопической ядерной гидродинамики [26] получено нелинейное интегродифференциальное уравнение для описания границы диска. Метод применим для анализа дисков любого типа, без использования добавочных предположений об эллипсоидальном характере границы или предположений о малости отклонения границы от окружности [69].

Основные уравнения. При описании чисто вихревых состояний несжимаемого ($\rho \equiv \rho_N$) ядерного вещества нелинейное уравнение типа Эйлера (4), (8) может быть переписано в следующей кинематической форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}], \quad \mathbf{j} \equiv \rho_N \mathbf{v} \quad (48)$$

для поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Дальнейшее рассмотрение удобно проводить в терминах завихренности ξ и векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0, \\ \xi &\equiv \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi + (\mathbf{v} \nabla) \xi = 0.$$

Ограничимся в дальнейшем простейшим вихревым движением, движением на плоскости

$$A = A e_z, \quad \zeta = \zeta e_z, \quad v(r, \phi) = v_r e_r + v_\phi e_\phi, \\ \frac{\partial}{\partial t} \zeta + v_r \frac{\partial}{\partial r} \zeta + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \zeta = 0, \quad \zeta = -\Delta A, \quad (50)$$

$$v(r, \phi) = v_r e_r + v_\phi e_\phi, \quad v_r(r, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \phi}, \quad v_\phi(r, \phi) = -\frac{\partial A}{\partial r},$$

где (r, ϕ) — полярные координаты точки.

Функция тока может быть получена из уравнения Пуассона с помощью двумерной функции Грина для оператора Лапласа:

$$A(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int d\phi' dr' r' \ln(|\delta r|) \zeta(r', \phi'), \\ |\delta r| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi'))^{1/2}.$$

Если область постоянной завихренности $\zeta(r', \phi', t) \equiv \zeta_0$ ограничена контуром:

$$\Gamma(r, \phi) \equiv r - R(\phi) = 0, \quad (51)$$

то формулы упрощаются, причем интегрирование проводится по области, ограниченной этим контуром:

$$A(r, \phi) = \frac{\zeta_0}{2\pi} \int_{\Gamma} d\phi' dr' r' \ln(|\delta r|). \quad (52)$$

Проекции скорости v_r, v_ϕ определяются по формулам (50) дифференцированием $A(r, \phi)$ по r и ϕ . Поэтому при их вычислении остается только одномерное интегрирование по контуру.

До сих пор рассмотрение было чисто кинематическим. Оно должно быть дополнено динамическим условием на контуре $(n \cdot v) = (n \cdot v_{\text{contour}})$, определенном с помощью (51). n — вектор единичной нормали к границе:

$$n = \frac{\sigma \nabla \Gamma}{|\nabla \Gamma|} = \sigma (e_r - S(\phi) e_\phi) (1 + S(\phi)^2)^{-1/2}, \quad (53)$$

$$\Omega \frac{dR}{d\phi} + v_r - v_\phi S(\phi) = 0, \quad S(\phi) \equiv \frac{1}{R} \frac{dR}{d\phi}, \quad (54)$$

где Ω — угловая скорость равномерного вращения контура, а $\sigma = \pm 1$ определяет ориентацию контура.

С помощью формул (50) — (53) уравнение (54) для границы диска может быть переписано в виде нелинейного интегродифференциального уравнения:

$$\frac{2\pi \Omega}{\xi_0} \frac{dR}{d\phi} = \int_0^{2\pi} d\phi' R(\phi') \ln(|\delta R|) [1 + S(\phi)S(\phi') \sin(\phi' - \phi) + (S(\phi) - S(\phi')) \cos(\phi' - \phi)], \quad (55)$$

$$|\delta R| = (R(\phi)^2 + R(\phi')^2 - 2R(\phi)R(\phi') \cos(\phi - \phi'))^{1/2}.$$

Отметим, что уравнения движения для одночастичной плотности и плотности поля скоростей нелинейные, и уравнения (54), (55) получены без обычно используемой процедуры линеаризации уравнений движения по степеням v и отклонения одночастичной плотности от равновесной. Прежде чем проводить анализ полученных уравнений, напомним основные свойства уже известных решений.

Свойства эллиптических вихрей Кирхгофа. В настоящее время хорошо известны эллиптические вихри Кирхгофа и малые возмущения кругового вихря (мы будем ссылаться на фундаментальную монографию Г.Ламба [69], где можно найти ссылки на оригинальные работы, в настоящее время малодоступные).

Простейший случай круглого сечения был исследован Кельвином [69]. Рассмотрим малые возмущения кругового вихря: $\Gamma(r, \phi) \equiv r - R_0$, где R_0 — радиус круга. Непосредственным вычислением функции тока по формуле (52) получаем при $r \leq R_0$:

$$A_0(r, \phi) = \frac{1}{4} \xi_0 (R_0^2 - r^2).$$

Небольшое безвихревое возмущение

$$\delta A(r, \phi) = \alpha \frac{\xi_0}{2} R_0^2 \left(\frac{r}{R_0} \right)^l \cos(l\phi - \omega t), \quad (56)$$

где l — целое число, соответствует следующему, привычному для ядерной физики уравнению контура (для малых $\alpha \ll R_0$):

$$R(\phi) = R_0 (1 + \alpha \cos(l\phi - \omega t)). \quad (57)$$

Таким образом, малое возмущение (56), выраженное тригонометрическими функциями (57), представляет собой гофр, перемещающийся по окружности вихря с угловой скоростью: $\Omega = \xi_0 \omega / l = (l - 1) / 2l$. Например, для $l = 2$ возмущенное поперечное сечение есть эллипс, вращаю-

щийся вокруг своего центра с угловой скоростью $\xi_0/4$, т.е. в два раза медленнее жидкости внутри контура. Возмущения высшей симметрии $l \geq 3$ вращаются еще медленнее. Частный случай эллиптического возмущения был точно решен Кирхгофом [69].

Для эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ можно получить следующее соотношение между частотой вращения контура и завихренностью внутри контура: $\Omega = \xi_0 ab / (a + b)^2$.

Из рассмотренных выше частных случаев следует:

1) несмотря на то, что внутренняя часть диска вращается с постоянной угловой скоростью, движение отличается от вращения твердого тела, т.к. граница вращается с другой угловой скоростью — более медленно;

2) скорость границы зависит от симметрии возмущения, чем выше симметрия состояния, тем вращение более медленное;

3) фиксированное значение отношения Ω / ξ_0 и симметрия состояний полностью определяют форму контура (например, для эллиптического вихря — его эксцентриситет).

Отдельное внимание необходимо уделить вопросу стабильности рассматриваемых состояний. Показано, что рассмотренные выше частные случаи дисков устойчивы. Однако если форма контура не является стационарным решением уравнения (10) при фиксированном Ω / ξ_0 , то диск будет неустойчив. Поэтому отношение Ω / ξ_0 будет параметром бифуркации.

Анализ дисковых состояний общего вида. Для количественного анализа уравнения (55) необходимо построить его дискретизованный аналог. Такие исследования мы в настоящее время проводим. Однако в данной работе мы ограничимся качественным анализом, который можно провести по аналогии с результатами предыдущего раздела.

Можно ожидать, что точные состояния нелинейного уравнения (55) также могут быть приближенно классифицированы по параметру l ($l = 2, 3, 4, \dots$), т.е. по симметрии границы диска относительно поворотов на угол $2\pi/l$. Тогда если сделать фурье-анализ контура, то амплитуды разложения перед соответствующим $\cos(l\phi)$ должны быть наибольшими.

Можно также ожидать, что параметр Ω / ξ_0 будет параметром бифуркации и характеризовать устойчивость состояния.

Уравнение (55) совместно с определением проекций поля скоростей (50) описывает движение контура как распространение нелинейной дисперсионной волны в плоскости. При движении контур будет вначале с неизбежностью искажаться. Однако если это состояние устойчиво, то конкуренция нелинейности и дисперсии приведет к возврату начальной

формы контура. Если удастся показать, что существуют такие состояния, то вихревые диски ядерного вещества будут аналогом солитонов в плоскости.

Если движение контура будет неустойчиво, то очень интересно проследить его эволюцию. Сохраняющиеся величины: площадь контура — двумерный аналог числа частиц, и циркуляция, определяемая с помощью ζ_0 . Поэтому при распаде контура следует ожидать появления нитей, а может, и распада диска на отдельные диски или нити.

Очень интересно было бы провести анализ трехмерных аксиально-симметричных конечных дисков. Здесь следует отметить недавно вышедшую работу [41], где проводились расчеты по стимулированию столкновения двух почти симметричных тяжелых ионов с использованием уравнения Больцмана — Нордгейма — Власова. Обнаружено образование состояний дискового типа в процессе столкновения. Толщина диска уменьшалась, а диаметр монотонно увеличивался при увеличении энергии столкновения. Достаточно тонкие диски начинали разваливаться на куски, сопоставимые по размеру с толщиной диска. Таким образом, задача об устойчивости дисков ядерного вещества оказывается связанной с процессом мультифрагментации.

Мы попытались рассмотреть чисто вихревое движение без обычных приближений малости амплитуд возбуждений или добавочных предположений о форме ядерной системы. При выделении вихревой компоненты поля скоростей из уравнений движения выпадают градиентные компоненты членов «давления», и уравнения движения для $\text{rot } v$ формально имеют чисто кинематический вид, по крайней мере для сил типа Скирма. Использование других видов взаимодействия, содержащих зависимость от скорости, будет приводить к более сложным уравнениям. Интересно также было бы проанализировать аналогичные уравнения, полученные в рамках кинетического подхода.

Наконец, в данном разделе получены основные уравнения для описания вихревых дисков ядерного вещества. Эволюция границы диска аналогична распространению в плоскости нелинейной дисперсионной волны. Проведен качественный анализ основных свойств дисковых состояний.

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Общие замечания. Один из важнейших разделов теории солитонов — метод обратной задачи рассеяния и его приложение к интегрированию нелинейных уравнений в частных производных [5—8]. В настоящее вре-

мя уже накоплен определенный опыт использования данной методики и в ядерной физике. В этом разделе мы будем следовать методу обратной задачи для среднего поля ядра (Inverse Mean Field Method — Imefim) [101]. Этот метод позволяет получить полезную информацию о радиусах ядер [102], оптических потенциалах [103]. Предлагалось использовать Imefim для описания динамики [104], релаксации [105] и развала ядерных систем [106,107]. Специфика использования методики обратной задачи при интегрировании нелинейных уравнений движения заключается в том, что данные о структуре начального состояния (количество связанных состояний и их схема, данные о коэффициентах отражения) позволяют предсказать эволюцию начального состояния [5,8,106,107]. Это позволяет по-новому взглянуть на спектроскопию ядерных состояний.

Ниже мы приведем два примера использования методики обратной задачи для статических (описание профилей плотности и одночастичных потенциалов ядерных систем [108]) и динамических (простая модель для анализа эволюции сжатого в начальный момент ядра [106,107]) задач ядерной физики.

Основные уравнения. Тип систем, которые мы будем рассматривать, это незаряженные слои ядерного вещества [46,47]. Слои конечны в направлении оси z , бесконечны и однородны в поперечных направлениях.

Основные уравнения, дающие описание слоя в приближении среднего поля:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}_{\perp n}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\Omega} \psi_n(z) \exp(i \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{\mathbf{k}_{\perp n}} = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m} + e_n, \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} \psi_n(z) + U(z) \psi_n(z) &= e_n \psi_n(z), \\ \rho(\mathbf{x}) \Rightarrow \rho(z) &= \sum_{n=1}^{N_0} a_n \psi_n^2(z), \\ A \Rightarrow \bar{\Omega} &= (6A \rho_N^2 / \pi)^{1/3} = \sum_{n=1}^{N_0} a_n, \end{aligned} \quad (58)$$

$$a_n = \frac{2m}{\pi \hbar^2} (e_F - e_n),$$

$$\frac{E}{A} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m \bar{\Omega}} \left(\sum_{n=1}^{N_0} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\psi_n}{dz} \right)^2 dz + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N_0} a_n^2 \right) + \frac{1}{\bar{\Omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[\rho(z)] dz,$$

где $N(N_0)$ — полное число (число занятых) связанных состояний, $\bar{\Omega}$ — толщина слоя, \mathcal{E} — функционал взаимодействия.

Прямой способ решения данной задачи — задать функционал взаимодействия, число частиц (или толщину слоя) и решать уравнения Хартри — Фока для нахождения спектра одночастичных состояний и волновых функций $\psi_n(z)$.

Следуя методике обратной задачи, необходимо найти функцию $K(x, y)$, являющуюся решением интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко [109—111]:

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^\infty B(y + z)K(x, z)dz = 0. \quad (59)$$

Ядро B определяется с помощью коэффициентов отражения $R(k)$ ($e_k = \hbar^2 k^2 / 2m$) и набора N собственных энергий связанных состояний ($e_n = -\hbar^2 \kappa_n^2 / 2m$):

$$B(z) = \sum_{n=1}^N C_n^2(\kappa_n) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k) \exp(ikz)dk. \quad (60)$$

Коэффициенты C_n определяются граничными условиями

$$C_n(\kappa_n) = \lim_{z \rightarrow \infty} \psi_n(z) \exp(\kappa_n z). \quad (61)$$

Искомый одночастичный потенциал

$$U(z) = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial}{\partial z} K(z, z). \quad (62)$$

С помощью заданных фазовых сдвигов и спектра связанных состояний системы решение интегрального уравнения (59) может быть получено только численно. Однако в случае безотражательных потенциалов $R(k) = 0$ можно построить следующее решение:

$$U(z) = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln(\det \| M \|) = -\frac{2\hbar^2}{m^2} \sum_{n=1}^N \kappa_n \psi_n^2(z),$$

$$\psi_n(z) = \sum_{l=1}^N (M^{-1})_{nl} \lambda_l(z),$$

$$\lambda_n(z) = C_n(\kappa_n) \exp(-\kappa_n z), \quad (63)$$

$$M_{nl}(z) = \delta_{nl} + \frac{\lambda_n(z) \lambda_l(z)}{\kappa_n + \kappa_l},$$

$$C_n(\kappa_n) = \left(2\kappa_n \prod_{l \neq n} \frac{\kappa_n + \kappa_l}{\kappa_n - \kappa_l} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, волновые функции, потенциал и профиль плотности полностью определяются спектром связанных состояний.

Профили плотностей и потенциалов. В работе [108] мы провели серию расчетов слоев как в основных состояниях, так и в различных внешних полях. При проведении прямой части расчета по методу Хартри — Фока функционал взаимодействия выбирался в виде эффективных сил Скирма. Полученный спектр связанных состояний закладывался в схему обратной задачи, и с помощью соотношений (63) восстанавливались волновые функции состояний, одночастичные потенциалы и плотности.

На рис.4 приведены результаты расчета профилей плотности для слоев, имитирующих легкие ($\bar{\alpha} = 1,0, A \approx 20$) и тяжелые ($\bar{\alpha} = 2,15, A \approx 230$) ядра. Сплошной линией показаны результаты расчета по методу Хартри — Фока (HF), точечной — по методу обратной задачи для среднего поля ядра (INV). Видно, что профили плотности воспроизводятся очень хорошо.

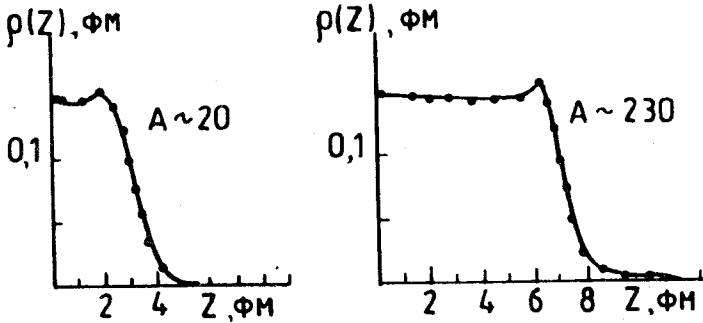


Рис. 4. Профили плотности (—HF, ...INV)

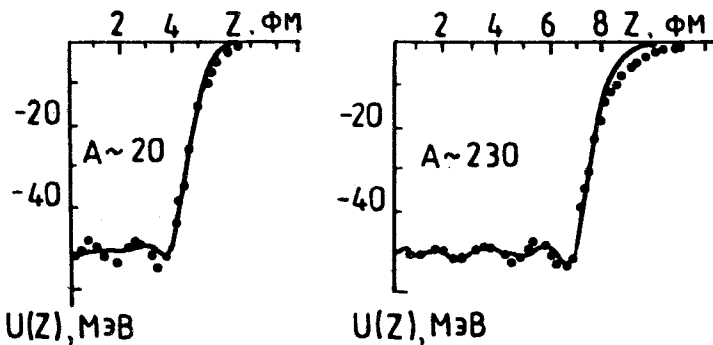


Рис. 5. Одночастичные потенциалы

На рис.5 приведены результаты расчета соответствующих одночастичных потенциалов. Обозначения прежние. Видно, что, хотя средние свойства потенциалов (глубина, эффективный радиус) воспроизводятся хорошо, во внутренней области потенциала видны слабые осцилляции.

На рис.6 в логарифмическом масштабе показаны безразмерные профили плотности и потенциала в области диффузного слоя и на асимптотике. Видно, что «хвосты» плотностей воспроизводятся очень хорошо, «хвосты» потенциалов — хуже. Следует отметить, что расчет потенциала по методу Хартри — Фока производится с помощью первой вариации функционала взаимодействия по плотности, поэтому для сил Скирма наклоны плотности и потенциала в логарифмическом масштабе совпадают (см. рис.6). В рамках метода обратной задачи при расчете потенциалов учитываются все связанные состояния, а при расчете плотности — только заполненные (см. формулы (58)). Поэтому наклон «хвостов» потенциалов и плотностей будет различным.

Поскольку схема обратной задачи реализована в приближении безотражательности потенциала, можно сделать следующие выводы: 1) учет членов отражения при расчете плотности несуществен; 2) учет членов отражения при расчете потенциалов будет приводить к сглаживанию осцилляций во внутренней части и коррекции «хвоста» потенциала.

Все вышеизложенное касалось расчета слоев в основном состоянии. Для дальнейшей проверки метода мы провели расчеты слоев в различных внешних полях. Таким способом обычно формируют начальные неравновесные состояния в динамических расчетах, для анализа эволюции системы. Во всех рассмотренных нами случаях профили плотности практически совпадают с результатами расчетов по методу Хартри — Фока. Это позволяет с очень хорошей точностью имитировать возбужденные состояния ядерных систем с помощью метода обратной задачи.

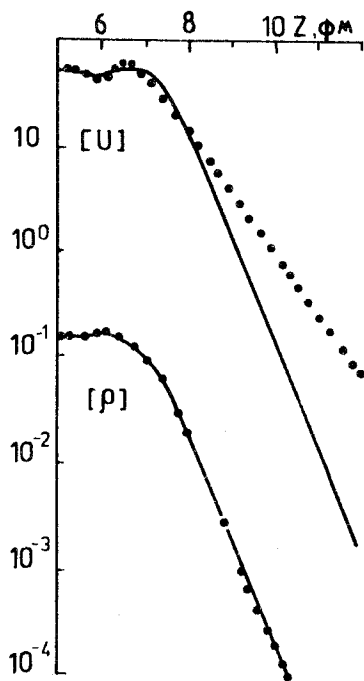


Рис. 6. Безразмерные профили плотности $[\rho]$ и потенциалы $[U]$ ($A \sim 230$) на границе ядра и на асимптотике

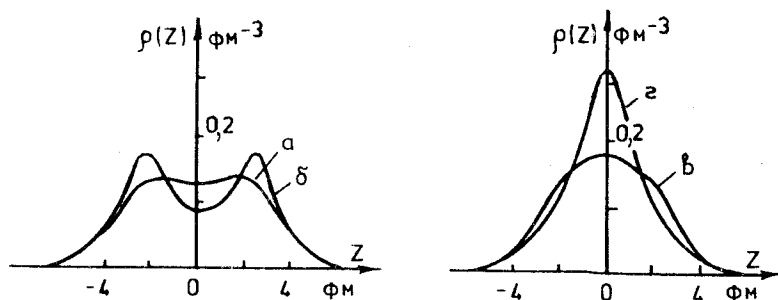


Рис. 7. Примеры профилей плотности, вычисленных по методу обратной задачи (А-16); а — основное состояние, б — ядро с двумя центрами, в (z) — слабо (сильно) сжатое ядро

На рис.7 показаны примеры построения различных состояний ядерной системы при фиксированном числе частиц с помощью методики обратной задачи.

В заключение можно сделать вывод о том, что метод обратной задачи для среднего поля ядра (в приближении безотражательных одночастичных потенциалов) дает простое аналитическое описание профилей плотности и потенциалов ядерных систем.

Эволюция холодного сжатого ядра. В данном разделе представлена простая аналитическая модель для описания эволюции сжатых в начальный момент холодных ядерных систем [106,107,112].

Для анализа эволюции ядерных систем следует решать, в принципе, многочастичное уравнение Шредингера, дополняя его необходимыми начальными и граничными условиями. Однако точное решение этой проблемы пока невозможно. Известный путь преодоления многих трудностей решения многочастичной задачи — использование приближения среднего поля. Тогда многочастичное уравнение Шредингера сводится к системе одночастичных уравнений Шредингера (индекс состояния для простоты опущен):

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t) + U(x, t)\psi(x, t), \quad (64)$$

которые необходимо дополнить условием самосогласования для одночастичного потенциала.

Основная идея метода Imefim в приложении к динамике ядерных систем заключалась в использовании вместо (64) уравнения типа КдВ для одночастичного потенциала

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial U}{\partial(S_n t)} = 6U \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} \quad (65)$$

и известной схемы интегрирования уравнения КдВ с помощью метода обратной задачи. Данная схема основана на существовании нелинейного преобразования $U = V^2 + V_z$, $V \equiv \psi_z / \psi$ (с точностью до масштабных преобразований), после которого нелинейному уравнению (65) сопоставляется линейное уравнение типа уравнения Шредингера (все обозначения предыдущего раздела):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_n(z, t) + U(z, t) \psi_n(z, t) = e_n \psi_n(z, t), \quad (66)$$

где время играет роль параметра. Изложенная выше схема интегрирования безотражательных потенциалов (63) полностью применима, если сделать единственную замену переменных $z \rightarrow (z, t)$ при вычислении $\lambda_n(z)$:

$$\lambda_n(z, t) \equiv C_n(\kappa_n) \exp(-\kappa_n z + 2\hbar^2 \kappa_n^3 S_n t / m).$$

Несмотря на определенный прогресс в области применения методов обратной задачи в ядерной физике, данная методика пока непривычна. В качестве иллюстрации приведем основные формулы для волновых функций одномерной трехуровневой системы [106]. Простейшие одно- и двумерные системы подробно рассматривались ранее [113]. Трехуровневая система полезна при моделировании легких ядер, например, кислорода [112] $\kappa_3 > \kappa_2 > \kappa_1$:

$$\begin{aligned} \psi_1(z, t) &= \left(2\kappa_1 \left(\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right) \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_1}{\kappa_3 - \kappa_1} \right) \right)^{1/2} D^{-1}(z, t) \times \\ &\times \left(\operatorname{ch}(\xi_2 + \xi_3) - \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_2}{\kappa_3 - \kappa_2} \right) \operatorname{ch}(\xi_3 - \xi_2) \right), \\ \psi_2(z, t) &= \left(2\kappa_2 \left(\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right) \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_2}{\kappa_3 - \kappa_2} \right) \right)^{1/2} D^{-1}(z, t) \times \\ &\times \left(\operatorname{sh}(\xi_3 + \xi_1) - \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_1}{\kappa_3 - \kappa_1} \right) \operatorname{ch}(\xi_3 - \xi_1) \right), \end{aligned}$$

$$\psi_3(z, t) = \left(2\kappa_3 \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_2}{\kappa_3 - \kappa_2} \right) \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_1}{\kappa_3 - \kappa_1} \right) \right)^{1/2} D^{-1}(z, t) \times \\ \times \left(\operatorname{ch}(\xi_1 + \xi_2) - \left(\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right) \operatorname{ch}(\xi_2 - \xi_1) \right),$$

$$D(z, t) = \operatorname{ch}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \left(\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right) \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_1}{\kappa_3 - \kappa_1} \right) \operatorname{ch}(\xi_3 + \xi_2 - \xi_1) + \\ + \left(\frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right) \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_2}{\kappa_3 - \kappa_2} \right) \operatorname{ch}(\xi_3 + \xi_1 - \xi_2) + \\ + \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_1}{\kappa_3 - \kappa_1} \right) \left(\frac{\kappa_3 + \kappa_2}{\kappa_3 - \kappa_2} \right) \operatorname{ch}(\xi_2 + \xi_1 - \xi_3), \\ \xi_n(z, t) \equiv \kappa_n z - 2\hbar^2 \kappa_n^3 S_n t / m, \quad n = 1, 2, 3.$$

Асимптотическое поведение волновых функций и одночастичного потенциала при фиксированном ξ_n :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_k = \delta_{kn} \sqrt{\kappa_n} \operatorname{sech}(\xi_n - \xi_n^0),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(z, t) = -\frac{\hbar^2 \kappa_n^2}{m} \operatorname{sech}^2(\xi_n - \xi_n^0),$$

$$\xi_n^0 = \frac{1}{2} \ln \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\kappa_n - \kappa_k}{\kappa_n + \kappa_k} \right)^2 \prod_{m \neq n} \left| \frac{\kappa_n + \kappa_m}{\kappa_n - \kappa_m} \right| \right).$$

Таким образом, при больших z и t зависящий от времени одночастичный потенциал и соответствующее ему распределение плотности описываются набором уединенных волн. Спектр начальной сжатой неравновесной системы полностью определяет ширины, скорости и сдвиги фаз солитонов. Учет членов отражения приводит к тому, что в выходном канале будут волны малой амплитуды («рябь»), которые отождествляют с эмиссией легких частиц. Сжатая в начальный момент неравновесная система расширяется и в выходном канале можно наблюдать уединенные стабильные волны. Такая картина находится в качественном согласии с результатами численной симуляции эволюции ядра ^{16}O в рамках метода

TDHF [112]. Распад приводит к наличию коллективного потока и кластеризации.

Следует отметить, что изложенная выше модель слишком упрощена, чтобы описывать эволюцию неравновесных ядерных систем. Однако она может быть использована в иллюстративных целях, чтобы продемонстрировать общую схему Imefim, нелинейный принцип суперпозиции и, главное, идею о том, что образование стабильных объектов (кластеризация) в процессе развала ядерных систем может быть связано с наличием нелинейных и дисперсных эффектов.

6. ДИССИПАТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Диссипативные эффекты, связанные с возбуждениями ядерной плотности, можно условно разбить на две группы:

1) затухание, обусловленное действием среды на движущееся коллективное возбуждение плотности;

2) влияние возбуждений ядерной плотности, рассматриваемых в качестве внутренних степеней свободы, на некоторое коллективное движение. Например, возбуждение гигантских резонансов при глубоко-неупругих [71] столкновениях тяжелых ионов с атомными ядрами как механизм диссипации кинетической энергии [64].

Напомним, что существование солитона обусловлено наличием двух факторов — нелинейности и дисперсии. С точки зрения спектрального анализа, нелинейность обогащает спектр высокочастотными гармониками, а дисперсия, т.е. зависимость скорости от длины волны, приводит к расплыванию волнового пакета, описывающего анализируемое возбуждение. Баланс обоих факторов может быть достигнут лишь для некоторых типов нелинейности, что и обеспечивает существование солитоноподобных решений. Однако даже в этих случаях солитон будет устойчив, пока систему можно считать слабодиссипативной. Тем не менее существование устойчивых волн возможно, если обеспечивается необходимая подкачка энергии [19,25]. Во многом эти волны похожи на гидродинамические ударные волны, однако возникают в режиме отсутствия столкновений между частицами среды. Поэтому в физике плазмы они были названы бесстолкновительными ударными волнами [19]. При небольшой, но конечной нелинейности уравнение, описывающее такие волны, отличается лишь наличием диссипативного члена (уравнение КдВ — Бюргера) [6—19].

Диссипативные эффекты данного типа для ядерных систем были исследованы в работе [25]. В рамках теории конечных ферми-систем [76] в линейном и бездисперсном приближении было получено кинетическое

уравнение с интегралом столкновений. Интеграл столкновений возникает при учете ненулевого затухания квазичастиц в низшем порядке по параметру γ/ϵ_F .

С использованием этого уравнения, с учетом вклада нелинейности и дисперсии, в пределе небольших амплитуд было получено уравнение для нелинейных диспергирующих волн в плазме. Его решения — квантовые ударные волны — аналогичны бесстолкновительным ударным волнам в плазме, которые существенно отличаются от ударных волн классической гидродинамики. Во-первых, существование квантовых ударных волн не требует режима термализации среды. Во-вторых, состояние вещества за фронтом такой волны также не является термодинамически равновесным из-за наличия интенсивных коллективных колебаний. Уплотнение достигается не за счет разогрева среды, а за счет когерентного сложения колебательных возбуждений. В-третьих, такие волны имеют сложную (осциллирующую или турбулентную) структуру в переходной области. В-четвертых, квантовые ударные волны распространяются со скоростью, большей скорости нулевого c_0 , а не первого (гидродинамического) «звука» c_s . Поскольку $c_0 > c_s$, то квантовая волна бежит быстрее гидродинамической.

Распространение волны приводит к «выплескиванию» [21] нуклонов из ядра. Энергетический спектр нуклонов — максвелловского типа. Эффективная «температура» $T \sim 10$ МэВ. Конусы Маха экспериментально пока не наблюдаются, по крайней мере, отчетливо. Но и с теоретической точки зрения не следует ожидать четко выраженных конусов Маха. Причинами тому являются, во-первых, конечность ядра (искажение воли за счет отражения от границы ядра), во-вторых, распадная неустойчивость колебаний, приводящая к турбулентности нелинейной волны плотности и, в-третьих, взаимодействие волны с нуклонами, искажающее волну за счет создаваемого ею потенциала. Наиболее существенно, как упоминалось в разд.3, то, что все подходы дают квазимакселловский спектр эмиссии неравновесных нуклонов. С одной стороны, это оправдывает феноменологический способ анализа энергетических спектров нуклонов с помощью модели эффективного источника, но, с другой стороны, вносит большую степень неопределенности для выяснения механизма образования таких частиц.

Исследование процесса диссипации кинетической энергии в глубоко-неупругих столкновениях ионов с атомными ядрами — одна из наиболее интересных проблем теоретической физики тяжелых ионов. В данном обзоре мы коснемся только небольшой части этой проблемы, касающейся роли в этом явлении канала возбуждения колебаний плотности.

Потери энергии относительного движения на внутреннее возбуждение ядер (степень неупругости процесса) определяют основные характеристики глубоконеупругих столкновений тяжелых ионов [71] — угловые и массовые распределения продуктов.

Величина диссипации кинетической энергии характеризует длительность реакции, поскольку энергия относительного движения всегда частично переходит в энергию внутреннего возбуждения ядер, а процесс установления равновесия не заканчивается за время глубоконеупругой части столкновения. Это обстоятельство делает величину диссипаций кинетической энергии своеобразными «часами», позволяющими получать информацию о развитии во времени процесса взаимодействия. Масштаб потерь кинетической энергии $100+300$ МэВ говорит о том, что возбуждаемые ядерные состояния могут иметь сложную структуру. Но так как «сброс» энергии относительного движения происходит за очень короткое время ($\sim 10^{-22}$ с), то возможно существование когерентного механизма потерь энергии. Большая величина потерь энергии говорит о том, что «входными» в реакцию состояниями должны быть наиболее высокочастотные моды возбуждения. Среди них наиболее вероятные кандидаты — мультипольные колебания плотности ядерного вещества (гигантские резонансы) [72,22,64].

Основываясь на этих соображениях, мы получили в [64] уравнения, описывающие в рамках теории линейного отклика [114] относительное движение сталкивающихся ядер в классическом приближении. Эти уравнения имеют ряд особенностей, отличающих их от обычно используемых в феноменологических моделях уравнений, включающих силы «трения» [115]. Во-первых, из-за того, что время сброса энергии на внутренние степени свободы и время релаксации — величины одного порядка, существенную роль в уравнениях играет явная зависимость от времени коэффициентов трения и перенормированных вследствие возбуждения внутренних степеней свободы потенциала ядро-ядро и массового параметра. Во-вторых, асимптотическое значение коэффициента радиального трения значительно меньше того значения, которое используется в феноменологических моделях [115]. Эти два факта послужили основанием для предположения, что источником необратимых потерь кинетической энергии является не только радиальное «трение», но и явно зависящий от времени потенциал взаимодействия. Было показано, что в рамках этих предположений можно объяснить величину потерь кинетической энергии и корреляцию средняя энергия — угол отклонения продуктов реакции. Причем важен одновременный учет зависящего от времени потенциала и переменного во времени «трения». Детали можно найти в работах [64]. Следует отметить, что большинство выводов этих

работ применимы для любых систем, гамильтониан которых состоит из трех частей: коллективный гамильтониан, гамильтониан «внутреннего» движения (описываемый набором не взаимодействующих осцилляторов) и член взаимодействия (в линейном приближении по амплитудам «внутренних» осцилляторов). С физической точки зрения, изложенный механизм диссипации — когерентное возбуждение колебаний плотности — соответствует механизму, описанному в предыдущих разделах обзора.

Исследование роли вязкости и теплопроводности при вихревом движении (связь гидродинамического коллективного движения с «внутренними» степенями свободы) представляет особый интерес. Однако информация о тангенциальной вязкости, приводящей к диссипации момента количества движения, пока очень неопределенная даже для наиболее исследованного в настоящее время процесса диссипации кинетической энергии в глубоконеупругих столкновениях тяжелых ионов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре развиты методы описания нелинейных явлений и процессов релаксации в сложных ядерных системах, образующихся при взаимодействии тяжелых ионов с атомными ядрами при энергиях $10+100$ МэВ/А.

Для анализа линейных и нелинейных возбуждений плотности различных систем развит вариант ядерной гидродинамики, основанный на алгебре токов и плотностей. Показано, что для безвихревого движения в квазиклассическом пределе уравнения ядерной гидродинамики с эффективным взаимодействием Скирма можно свести к нелинейному уравнению Шредингера $\psi^3 - \psi^5$.

Исследованы основные свойства одномерных и сферически-симметричных односолитонных решений и показано, что они хорошо описывают свойства ядерной плотности в основном состоянии. Указано на возможность существования сферически-симметричных узловых состояний ядерной плотности. Получены аналитические решения для одномерных нелинейных возбуждений: «кноидальные» волны, кинки, «дырки» в ядерной материи.

Получены основные уравнения для описания вихревых дисков ядерного вещества. Эволюция границы диска аналогична распространению в плоскости нелинейной дисперсионной волны. Проведен качественный анализ основных свойств дисковых состояний.

Предложена простая модель для анализа эволюции холодной, сжатой в начальный момент ядерной системы, и показано, что методика обратной задачи позволяет предсказать, что в выходном канале будут устой-

чивые волны плотности («кластеры»—солитоны) и волны плотности малой амплитуды («излучение»).

В рамках метода обратной задачи для среднего поля ядра построено аналитическое описание профилей плотности и одночастичных потенциалов ядерных слоев. Таким способом можно не только хорошо воспроизвести результаты расчетов по методу Хартри — Фока, но и смоделировать различные возбуждения ядерных систем (сжатые ядра, ядра с двумя центрами и т.д.).

Монопольные изоскалярные гигантские резонансы можно рассматривать, как линеаризованные колебания солитона ядерной плотности. Получены основные уравнения для описания таких состояний и развиты численные методы их решения. Построено аналитическое самосогласованное решение для колебаний двойной ядерной системы.

Когерентное состояние колебательных возбуждений ядерной плотности может имитировать источник в процессе излучения легких частиц высоких энергий в реакциях с тяжелыми ионами. Исследовано влияние канала возбуждения ядерной плотности на процесс диссипации кинетической энергии в глубоконеупругих столкновениях тяжелых ионов. Значительная часть потерь кинетической энергии объясняется возбуждением монопольных колебаний плотности ядерного вещества. Основной вклад в диссипацию энергии дают не пропорциональные скорости силы трения, а явно зависящий от времени потенциал взаимодействия тяжелых ионов, перенормированный с учетом возбуждения ядер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Russel J.S. — Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science (ed. John Murray), London, 1844, p.311.
2. Fermi E., Pasta J., Ulam S. — Studies of Nonlinear Problems, Report LA 1940, Los Alamos, p.1955.
3. Zabusky N.J., Kruskal M.D. — Phys.Rev.Lett., 1965, vol.15, p.240.
4. Kortevog D.J., de Vries G. — Phil.Mag., 1895, vol.39, p.422.
5. Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. — Phys.Rev.Lett., 1967, vol.19, p.1095.
6. Уизем Дж. — Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
7. Solitons (ed by R.K.Bullough and P.J.Caudrey), Springer-Verlag, N.Y., 1980.
8. Теория солитонов: Метод обратной задачи (под ред. С.П.Новикова), М.: Наука, 1980.
9. Поляков А.М. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т.20, с.194.
10. 't Hooft G. — Nucl.Phys., 1974, vol.B792, p.76.
11. Skyrme T.H.R. — Proc.Royal Soc., 1958, vol.A247, p.260.
12. Witten E. — Nucl.Phys., 1983, vol.B223, p.433.
13. Derric G.H. — J.Math.Phys., 1964, vol.5, p.1254.
14. Раджараман Р. — Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
15. Makhankov V.G. — Phys.Rep., 1978, vol.35, p.1; ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.123.

16. Willets L. — Nontopological Solitons, Lect. Notes in Phys., Singapore, World Scientific, 1989, vol.24.
17. Lee T.D., Pang Y. — Phys.Rep., 1992, vol.221, p.251.
18. Davidson R.C. — Methods in Nonlinear Plasma Theory, Academic Press, N.Y., 1972.
19. Саргеев Р.З. — Вопросы теории плазмы, 1959, т.4, с.20.
20. Glassgold A.E., Heckroth W., Watson K.M. — Ann. of Phys., 1959, vol.6, p.1.
21. Belyaev S.T., Romyantsev B.A. — Phys.Lett., 1974, vol.B53, p.6.
22. Румянцев Б.А. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т.22, с.114; Материалы 12-й Зимней школы ЛИЯФ, Л., 1977, с.97.
23. Iwasaki M., Takagi S. — Prog. Theor. Phys., 1976, vol.55, p.949; 1979, vol.61, p.475.
24. Джолос Р.В., Картавенко В.Г. — Сообщение ОИЯИ Р4-80-37, Дубна, 1980.
Джолос Р.В., Картавенко В.Г., Иванова С.П. — Изв. АН СССР, сер.физ., 1981, т.45, с.1927.
25. Курилкин Н.Н., Мишустин И.Н., Ходель В.А. — Письма в ЖЭТФ, 1979, т.30, с.463; ЯФ, 1980, т.32, с.1249.
26. Картавенко В.Г. — ЯФ, 1984, т.40, с.377.
27. Крыловецкий А.Г. — ЯФ, 1986, т.43, с.817.
28. Khodel V.A., Kurilkin N.N., Mishustin I.N. — Phys.Lett., 1980, vol.90B, p.37.
29. Easson I. — Nucl.Phys., 1981, vol.A363, p.69.
30. Fowler G.N., Raha S., Stelte N., Weiner R.M. — Phys.Lett., 1982, vol.B115, p.286.
31. Картавенко В.Г. — Сообщение ОИЯИ Р4-83-461, Дубна, 1983.
32. Курилкин Н.Н., Мишустин И.Н., Ходель В.А. — ЯФ, 1982, т.36, с.95.
33. Wilson H.A. — Phys.Rev., 1946, vol.69, p.538.
34. Siemens P., Bethe H. — Phys.Rev.Lett., 1967, vol.18, p.704.
35. Wong C.Y. — Phys.Lett., 1972, vol.B41, p.451;
Davies K.T.R., Wong C.Y., Krieger S.J. — Phys.Lett., 1972, vol.B41, p.455.
36. Varashenkov I.V., Makhankov V.G. — Preprint JINR E2-84-173, Dubna, 1984.
37. Hefter E., Raha S., Weiner R. — Phys.Rev., 1985, vol.C32, p.2201.
38. Троицкий М.А., Ходель В.А. — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.218.
39. Курилкин Н.Н., Ходель В.А. — ЯФ, 1988, т.47, с.95.
40. Халатников И.М. — Введение в теорию сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
41. Moretto L.G., Tso K., Colonna N., Wozniak G.J. — Preprint LBL-32035, Berkeley, 1992.
42. Kartavenko V.G. — Preprint JINR E4-92-463, Dubna, 1992.
43. Bauer W., Bertsch G.F., Shulz H. — Preprint MSUCL-840, Michigan, 1992.
44. Nix J.R. — Prog. Part. Nucl. Phys., 1979, vol.2, p.237.
45. Stöcker H., Greiner W. — Phys.Rep., 1986, vol.137, p.277.
46. Negele J.W. — Rev.Mod.Phys., 1982, vol.54, p.913.
47. Bonche P., Koonin S., Negele J.W. — Phys.Rev., 1976, vol.C13, p.1226.
48. Holzwarth G. — Phys.Lett., 1977, vol.B66, p.29.
49. Holzwarth G., Eckart G. — Nucl.Phys., 1979, vol.A325, p.1.
50. Bonasera A., Burgio G.F., Di Toro M. — Phys.Lett., 1989, vol.B221, p.233.
Bonasera A., Russo G., Wolter H.H. — Phys.Lett., 1990, vol.B246, p.337.
51. Bertsch G.F., Kruse H., Das Gupta S. — Phys.Rev., 1984, vol.C29, p.673;
Bertsch G.F., Das Gupta S. — Phys.Rep., 1988, vol.160, p.189.
Stöcker H., Greiner W. — Phys.Rep., 1988, vol.160, p.189.
52. Bohr N., Kalckar F. — Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk., 1937, vol.14, No.10.
53. Bohr N., Wheeler J.A. — Phys.Rev., 1939, vol.56, p.426.
54. Steinwedel H., Jensen J.H.D. — Z.Naturforsch., 1950, vol.5a, p.413.
55. Danos M., Greiner W. — Phys.Lett., 1964, vol.8, p.113; Phys.Rev., 1964, vol.134, p.B284.
56. Айзенберг И., Грайнер В. — Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления. М.: Атомиздат, 1975.

57. Ландау Л.Д. — ЖЭТФ, 1941, т.5, с.71; 1957, т.32, с.59; УФН, 1955, т.56, с.309.
58. Bertsch G. — Nucl.Phys., 1975, vol.A249, p.253; Ann. of Phys., 1974, vol.86, p.138.
59. Wong C.Y., Maruhn J.A., Welton T.A. — Nucl.Phys., 1975, vol.A253, p.469.
60. Giannoni M.J., Vautherin D., Veneroni M., Brink D.M. — Phys.Lett., 1976, vol.B63, p.8.
61. Боголюбов Н.Н. — Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: ГИТТЛ, 1946.
62. Боголюбов Н.Н. — Сб. трудов Инст. Мат. АН УССР, 1948, т.10, с.41.
63. Бальбуцев Е.Б., Михайлов И.Н. — Описание коллективного движения атомных ядер методом моментов. Коллективная ядерная динамика. Л.: Наука, 1990, с.3.
64. Джолос Р.В., Картавенко В.Г., Федотов С.И. — ЯФ, 1980, т.31, с.137; 1981, т.33, с.151.
65. Джолос Р.В., Картавенко В.Г., Пермяков В.П. — ЯФ, 1981, т.34, с.144.
66. Картавенко В.Г. — ЯФ, 1983, т.38, с.627.
67. Dashen R.F., Sharp D.H. — Phys.Rev., 1968, vol.165, p.1857.
68. Yee D.D.H. — Phys.Rev., 1969, vol.184, p.196.
69. Lamb H. — Hydrodynamics (6th Ed., Dover, N.Y.), 1932.
70. Reinhardt H. — Phys.Lett., vol.B121, p.9.
71. Волков В.В. — Ядерные реакции глубококонепругих передач. М.: Энергоиздат, 1982.
72. Broglia R.A., Dasso C.H., Winther A. — Phys.Lett., 1974, vol.B53, p.301.
73. Blaizot J.P. — Phys.Rep., 1980, vol.64, p.171.
74. Соловьев В.Г. — Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971.
75. Бор О., Моттельсон Б. — Структура атомного ядра. М.: Мир, 1977, т.2.
76. Мигдал А.Б. — Теория конечных ферми-систем и свойства конечных ядер. М.: Наука, 1983.
77. Картавенко В.Г., Караджов Д., Клуге Д., Пиперова И. — Сообщение ОИЯИ Р4-85-543, Дубна, 1985.
78. Картавенко В.Г., Клуге Д., Реван Я. — Изв. АН СССР, сер.физ., 1989, т.53, с.2428.
79. Kartavenko V.G. — IV Int. Conf. on Nucl.-Nucl. Collisions (Kanazava, Japan), RIKEN-AF-NP-105, 1991, p.318.
80. Skyrme T.H.R. — Nucl.Phys., 1959, vol.9, p.615.
81. Vauterin D., Brink D. — Phys.Rev., 1972, vol.C5, p.626.
82. Quentin P., Flocard H. — Ann. Rev. Nucl. Sci., 1978, vol.28, p.523.
83. Захаров В.Е. — ЖЭТФ, 1957, т.53, с.1735.
84. Захаров В.Е., Шабат А.Б. — ЖЭТФ, 1971, т.61, с.118.
85. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. — Изв. вузов, сер. радиофиз. 1973, т.26, с.1020.
86. Янкаускас З.К. — Изв. вузов, сер. радиофиз. 1966, т.9, с.412.
87. Веряев А.А., Цитович Б.И. — Изв. вузов, сер. радиофиз. 1977, т.20, с.1634.
88. Anderson D.L.T. — Journ. Math. Phys., 1971, vol.12, p.945.
89. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. — Phys.Rev., 1976, vol.D13, p.2739.
90. Елдышев Ю.Н., Лукьянов В.К., Поль Ю.С. — ЯФ, 1972, т.16, с.506.
91. Gridnev K.A., Hefter E.F. — Phys.Lett., 1980, vol.A77, p.490.
92. Westfall G.D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1976, vol.37, p.1202.
Gosset J. et al. — Phys. Rev., 1977, vol.C37, p.1202.
93. Aves T.C. et al. — Phys.Rev., 1982, vol.C25, p.2361.
94. Sharpey-Schafer J.F. — Nucl. Phys., 1988, vol.A488, p.127c.
95. Aberg S. — Nucl. Phys., 1988, vol.A488, p.147 c.
96. Зельдович Я.Б. — Письма в ЖЭТФ, 1966, т.4, с.78.
97. Bertsch G.F., Broglia R.A., Schrieffer R. — Nuovo Cimento, 1988, vol.A100, p.283.
98. Fowler G.N., Raha S., Weiner R.M. — Phys. Rev., 1985, vol.C31, p.1515.
99. Sandulescu A., Ludu A., Greiner W. — Int. Journ. of Mod. Phys. E, 1993 (in press).
100. Храпак А.Г., Якубов И.Т. — УФН, 1979, т.129, с.45.
101. Hefter E.F. — Journ. de Phys., 1984, vol.45, p.C6:67.

102. Hefter E.F. — Phys. Rev., 1985, vol.A32, p.1205.
Hefter E.F., de Liano M., Mitropolsky I.A. — Phys.Rev., 1985, vol.A30, p.2042.
Гриднев К.А., Иванов А.Б., Семенов В.М. и др. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1986, т.50, с.898.
103. Hefter E.F. — Phys. Rev., 1986. vol.C34, p.1688.
104. Gridnev K.A., Hefter E.F. — Prog. Theor. Phys., 1984, vol.72, p.549.
105. Hefter E.F. — Lett. Nuovo Cim., 1981, vol.32, p.9.
106. Hefter E.F., Kartavenko V.G. — JINR Rapid. Comm., 1987, No.3, p.29.
107. Kartavenko V.G. — In: III Int. Conf. on Nucl-Nucl. Collisions (San-Malo, France), 1988, p.142.
108. Картавенко В.Г., Медлер П. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1987, т.51, с.1973.
109. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1951, т.15, с.309.
110. Марченко В.А. — ДАН СССР, 1955, т.104, с.695.
111. Фаддеев Л.Д. — ДАН СССР, 1958, т.121, с.63.
112. Dhar A., Das Gupta S. — Phys. Rev., 1984, vol.C30, p.1545.
113. Бхатнагар П.Л. — Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983.
114. Hofmann H., Siemens P.J. — Nucl.Phys., 1976, vol.A257, p.165.
115. Gross D.H.E., Kalinowski H. — Phys. Rep., 1978, vol.45, p.198.