«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1996, ТОМ 27, ВЫП.2

УДК 539.14

ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ЯДЕРНОЙ МОДЕЛИ ДВУХ РОТАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА — БАРГМАНА

И.С.Доценко, Г.Ф.Филиппов

Институт теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина

На основе микроскопического подхода предлагается конструктивный метод построения базисных функций ядерной модели двух аксиальных ротаторов в явном виде. Рассматриваемая модель интерпретируется как обобщение модели $SU(3)$ Эллиота, при этом базис последней расширяется до базиса прямого произведения $SU(3) \times SU(3)$. Решение поставленной задачи облегчается процедурой отображения функций и операторов в пространстве Фока — Баргмана. В этом пространстве в явном виде получены выражения для операторов Казимира второго порядка группы $SU(3)$ и оператор Баргмана — Мошинского. Волновые функции модели в конечном счете выражены через гипергеометрические функции и сферические функции Вигнера. Рассмотрена также процедура выделения эллиотовских состояний из полного набора построенных функций. Возможно расширение области применимости полученного базиса.

Within the microscopic approach a constructive method is proposed to build the basis functions of the nuclear model of two axial rotators. The model is interpreted as the generalization of the Elliott $SU(3)$ model the basis of which is extended to the basis of the direct product $SU(3) \times SU(3)$. The solution of the problem is alleviated by using the mapping of functions and operators into the Fock — Bargmann space where the expressions for the second-order Casimir operator for the $SU(3)$ group and the Bargmann — Moshinsky operator are obtained. The wave functions of the model are expressed in terms of the hyperspherical functions and the spherical Wigner functions. The procedure of separating the so-called Elliott states from the complete set of basis states is considered. The possible applications of the obtained basis are also discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

В обзоре рассматривается метод построения волновых функций в ядерной модели двух ротаторов на основе микроскопического подхода и исследуются основные свойства этих функций. При этом главное внимание уделяется формальному аспекту проблемы; исключение составляют введение и частично второй раздел, в которых рассматривается также физическая постановка задачи.

Важная особенность излагаемого ниже подхода состоит в обращении к пространству Фока — Баргмана, в котором базисные функции модели имеют простой вид. Переход к этому пространству осуществляется с помощью волновых пакетов, генерирующих полный базис модели, а два векторных параметра волновых пакетов становятся независимыми переменными в пространстве Фока — Баргмана.

Модель двух аксиальных ротаторов, в феноменологической интерпретации, была предложена в [1—3] и рассматривалась затем в работах других авторов (см., например, [4—7]). Предлагаемый в данной работе подход назван нами микроскопическим, поскольку исходными конструктивными элементами волновых функций ядра, как и в [6,7], являются одночастичные функции гармонического осциллятора, зависящие от пространственных координат и спин-изоспиновых переменных отдельных нуклонов. Состояния ядер, в зависимости от их классификации, описываются определенными линейными комбинациями произведений таких одночастичных функций.

В работе [8] было показано, что динамику одного, вообще говоря, неаксиального, ротатора можно описать на основе микроскопической модели $SU(3)$ Эллиота [9]. Это позволяет надеяться, что в рассматриваемом нами случае можно также существенно использовать классификацию состояний в соответствии с их (λ, μ)-симметрией. Однако модель Эллиота описывает динамику всего лишь трех коллективных степеней свободы валентных нуклонов, в то время как в случае двух ротаторов число степеней свободы может принимать значения от четырех (аксиальные ротаторы) до шести. Отсюда следует необходимость расширения базиса модели Эллиота и введения новой классификации нуклонных конфигураций. В предлагаемой нами классификации используются индексы $SU(3)$-симметрии отдельно для системы нейтронов (λ_n, μ_n) и системы протонов (λ_p, μ_p). Построенная таким способом совокупность состояний образует базис прямого произведения $SU(3) \times SU(3)$ двух групп. Последующая редукция $SU(3) \times SU(3)$ на группу $SU(3)$ позволяет помечать волновые функции квантовыми числами (λ, μ), характеризующими $SU(3)$-симметрию нейтрон-протонной системы в целом. Таким образом, в рассматриваемой модели состояния идентифицируются следующим набором квантовых чисел: (λ_n, μ_n), (λ_p, μ_p), (λ, μ) и K, L, M. Величины K, L, M аналогичны квантовым числам состояний жесткого ротатора, для которого L — угловой момент, K — проекция момента на собственную ось ротатора, M — проекция момента на внешнюю ось. Квантовое число K, вообще говоря, не является интегралом движения в рассматриваемой модели, и поэтому волновая функция представляет собой суперпозицию состояний с различными значениями K. Для обеспечения аксиальной симметрии нейтронной и протонной подсистем значения квантовых чисел, характеризующих $SU(3)$-симметрию подсистем, выбираются в виде $(\lambda_n, \mu_n) = (n_1, 0)$, $(\lambda_p, \mu_p) = (n_2, 0)$. Пара чисел (λ, μ), характеризующая симметрию всей протон-нейтронной системы, может принимать значения $(n_1 + n_2, 0)$, $(n_1 + n_2 - 2, 1), \ldots$, $(n_1 - n_2, n_2)$. (Для определенности будем считать, что $n_2 < n_1$).

Как показал Эллиот [9], неприводимое представление (λ, μ) редуцируется на неприводимые представления группы трехмерных вращений R_3 со следующими значениями углового момента: $L = N$, $N + 1$, $N + 2$, ... , $N + B$, где $N = \min\{\lambda, \mu\}$; $\min\{\lambda, \mu\} - 2$; $\min\{\lambda, \mu\} - 4$; ... ; 1 или 0, $B = \max\{\lambda, \mu\}$, исключение составляет случай $N = 0$, когда $L = B$; $B - 2$;...; 1 или 0.

Перечисленных квантовых чисел оказывается достаточно для однозначной идентификации волновых функций, если $\lambda < 2$, либо $\mu < 2$. При $\lambda \geq 2$ и $\mu \geq 2$ возникает необходимость в дополнительном квантовом числе, в качестве которого можно взять, например, интеграл Баргмана — Мошинского ω [10]. В дальнейшем искомые волновые функции будем обозначать в виде $|(\lambda, \mu) LM\rangle$, опуская для краткости квантовые числа $\lambda_n = n_1$ и $\lambda_p = n_2$.

2. МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОКА — БАРГМАНА

Как уже отмечалось выше, волновые функции $|(\lambda, \mu) LM\rangle$ представляют собой определенные линейные комбинации произведений осцилляторных функций, зависящих от пространственных координат, и спин-изоспиновых переменных отдельных нуклонов. Известно, что нахождение в явном виде многочастичных волновых функций с заданными квантовыми числами представляет собой, вооще говоря, нетривиальную задачу. Адекватное описание ядерных состояний существенно упрощается, если перейти от функций, зависящих от координат частиц, к их образам в пространстве Фока — Баргмана [11]. По существу, при отображении функций на их образы происходит выделение динамических переменных модели и как бы «замораживание» тех степеней свободы, которые не затрагиваются при рассматриваемых в этой модели возбуждениях.

Процедуру отображения функций и операторов в общем виде можно представить следующим образом.

Обозначим $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ тройку единичных взаимно ортогональных векторов, и $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ — другую аналогичную тройку. Используя эти векторы, запишем в инвариантном виде нормированные трехмерные одночастичные функции гармонического осциллятора с учетом их зависимости от спин-изоспиновых переменных нуклона:

$$\Psi_{q_1,q_2,q_3}(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{r},\, \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{r},\, \mathbf{u}_3\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2^{q_1+q_2+q_3}\cdot q_1!q_2!q_3!\cdot \pi^{3/2}}}\times$$

$$\times H_{q_1}(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{r})\, H_{q_2}(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{r})\, H_{q_3}(\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{r})\, e^{-r^2/2}\,\chi_\mu\tau_{1/2}, \tag{2.1}$$

$$\Psi_{q_1,q_2,q_3}(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r},\, \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r},\, \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2^{q_1+q_2+q_3}\cdot q_1!q_2!q_3!\cdot \pi^{3/2}}}\times$$

$$\times H_{q_1}(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r})\, H_{q_2}(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r})\, H_{q_3}(\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{r})\, e^{-r^2/2}\,\chi_\mu\tau_{-1/2}, \tag{2.2}$$

где $H_{q_i}(z)$ — полиномы Чебышева — Эрмита, а $\mu=\pm 1/2$ — проекция спина нуклона на ось квантования. Функции (2.1) описывают состояния протона, а функции (2.2) — состояния нейтрона, что определяется значением проекции изотопического спина в них (τ_ν —изоспиновая функция). Отметим, что в системе координат, в которой оси x, y и z направлены вдоль векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_3$, координатная часть функции (2.1) имеет вид произведения трех одномерных осцилляторных функций, каждая из которых зависит от одной из декартовых координат x, y или z. Если же направления осей задаются векторами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$, то такой вид будет иметь координатная часть функции (2.2).

Все одночастичные состояния (2.1) и (2.2) с одним и тем же значением полного числа осцилляторных квантов $q=q_1+q_2+q_3$ будем считать, как это принято в оболочечной модели ядра, принадлежащими одной и той же оболочке. В данной работе рассматриваются только такие конфигурации, в которых незаполненной (открытой) является лишь внешняя оболочка, т.е. оболочка с наибольшим значением квантового числа q. Для иллюстрации в табл.1 записан порядок заполнения оболочек для атомных ядер ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$, ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$, ${}^{44}_{22}\mathrm{Ti}$, у которых во внешней оболочке имеется по два протона и два нейтрона. Каждой паре квадратных скобок в приведенной таблице соответствует конкретный вид одночастичной волновой функции с заданным набором чисел осцилляторных квантов q_1, q_2, q_3. Верхний индекс за квадратными скобками означает число нуклонов в данном состоянии, а нижний индекс равен 1 или 2, в зависимости от того, какой вид, (2.1) или (2.2), имеет одночастичная функция.

Таблица 1. Порядок заполнения нуклонами ядерных оболочек в рассматриваемой модели

Ядро	Порядок заполнения оболочек
${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$	$\begin{cases} [000]_1^2 \;\; [100]_1^2 \\ [000]_2^2 \;\; [100]_2^2 \end{cases}$
${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$	$\begin{cases} [000]_1^2 \;\; [100]_1^2 \;\; [010]_1^2 \;\; [001]_1^2 \;\; [200]_1^2 \\ [000]_2^2 \;\; [100]_2^2 \;\; [010]_2^2 \;\; [001]_2^2 \;\; [200]_2^2 \end{cases}$
${}^{44}_{22}\mathrm{Ti}$	$\begin{cases} [000]_1^2 \;\; [100]_1^2 \;\; [010]_1^2 \;\; [001]_1^2 \;\; [200]_1^2 \ldots [011]_1^2 \;\; [300]_1^2 \\ [000]_2^2 \;\; [100]_2^2 \;\; [010]_2^2 \;\; [001]_2^2 \;\; [200]_2^2 \ldots [011]_2^2 \;\; [300]_2^2 \end{cases}$

Перечислим основные свойства одночастичных функций:

— две функции с различными спиновыми или изоспиновыми квантовыми числами ортогональны друг другу;

— две функции, относящиеся к разным оболочкам, ортогональны;

— координатные части двух функций с разными наборами чисел q_1, q_2, q_3 ортогональны друг другу, если они обе имеют вид (2.1) и (2.2);

— координатные части двух функций, из которых одна имеет вид (2.1), а другая — (2.2), вообще говоря, не ортогональны друг другу, если они относятся к одной и той же оболочке (т.е., если полное число осцилляторных квантов q у них одинаково).

Очевидно, что заполненные оболочки с одночастичными функциями (2.1) и (2.2) сферически-симметричны. Следовательно, форма ядра полностью определяется конфигурацией нуклонов во внешней незаполненной оболочке. Нуклоны внешней оболочки принято называть валентными нуклонами, по аналогии с валентными электронами в атомах.

Обратим теперь внимание на то обстоятельство, что у всех трех ядер, ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$, ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$, ${}^{44}_{22}\mathrm{Ti}$, приведенных в табл.1, конфигурации внешней оболочки имеют вид $[q_1 00]$. Следовательно, полиномы Чебышева — Эрмита в (2.1) не зависят от векторов $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_3$, и так как экспоненциальная часть этой функции сферически-симметрична, то в целом функция (2.1) инвариантна относительно поворотов вокруг оси, направленной по вектору $\mathbf{u}_1$. Это означает, что пространственное распределение совокупности всех протонов ядра имеет осевую симметрию, причем ориентация оси симметрии задается вектором $\mathbf{u}_1$. Аналогичные рассуждения позволяют сделать вывод о том, что для рассматриваемых конфигураций распределение нейтронов также аксиально-симметрично, с осью симметрии, направленной по $\mathbf{v}_1$. Числа n_1 и n_2, через которые выражается квантовое число λ, равны произведению числа осцилляторных квантов q_1 в соответствующей (нейтронной или протонной) внешней оболочке на число соответствующих нуклонов в этой оболочке.

Рассмотрим теперь многочастичные функции в виде детерминантов Слэтера, элементами которых являются одночастичные осцилляторные функции типа (2.1) и (2.2). Для каждого конкретного ядра множество различных одночастичных функций в детерминанте определяется соответствующей оболочечной конфигурацией. Несомненным достоинством многочастичной функции, записанной в виде детерминанта Слэтера, является автоматическое выполнение в ней фундаментального принципа Паули и возможность отделения координаты центра масс системы нуклонов, что позволяет трактовать модель как трансляционно-инвариантную. Для рассматриваемых здесь конкретных оболочечных конфигураций функции-детерминанты характеризуются определенной $SU(3)$-симметрией нейтронных и протонных подсистем с квантовыми числами вида $(\lambda_p, 0)$ и $(\lambda_n, 0)$, однако при этом нейтрон-протонная система в целом не обладает определенной $SU(3)$-симметрией, и, следовательно, квантовые числа (λ, μ) не являются интегралами движения. Кроме того, в этих состояниях не имеют определенного значения полный момент системы L и его проекция M на внешнюю ось квантования.

Известно, однако [12], что детерминант Слэтера, составленный из одночастичных функций, является производящей функцией, «генерирующей» состояния $|(\lambda, \mu)\, LM\rangle$ с необходимыми в рассматриваемой модели квантовыми числами. Для оболочечных конфигураций с аксиально-симметричными нейтронными и протонными подсистемами производящая функция зависит от двух единичных векторов $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, т.е. от четырех независимых параметров.

В качестве нового набора параметров выберем три угла Эйлера α, β, γ, задающие ориентацию в пространстве «внутренней» системы координат, построенной на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а также параметр $t = \cos\theta$, где θ — угол между направлениями векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Обозначим через r — множество переменных $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_A\}$, от которых зависят волновые функции ядра, Ω — совокупность параметров $\{\alpha, \beta, \gamma, \theta\}$. Тогда разложение протон-нейтронной производящей функции $\Psi(r, \Omega)$ по состояниям с определенной (λ, μ)-симметрией и определенным значением момента можно записать в следующем виде:

$$\Psi(r,\Omega)=\sum_{(\lambda\mu)}\sum_{LM}\langle r\,|\,(\lambda,\mu)\,LM\,\rangle\,\langle(\lambda,\mu)\,LM\,|\,\Omega\rangle. \tag{2.3}$$

Функцию $\langle(\lambda,\mu)\,LM\,|\,\Omega\rangle$, зависящую от коллективных динамических переменных α, β, γ, θ, будем называть «образом» функции $\langle r\,|\,(\lambda,\mu)\,LM\,\rangle$, зависящей от координат отдельных нуклонов. «Образ» содержит в себе ту часть информации оригинала, которая касается динамики валентных нуклонов в рамках модели двух аксиальных ротаторов. Пространство, в котором определены образы, называется пространством Фока — Баргмана [11]. Преобразование функций влечет за собой преобразование операторов, и, следовательно, необходимо сформулировать правило, позволяющее каждому оператору ставить в соответствие некий образ, действующий на функции, зависящие от переменных Ω.

Оператор $\tilde F(\Omega)$ будем называть по определению образом оператора $\hat F(r)$, если тождественно выполняется следующее равенство:

$$\langle\Psi(r,\Omega)\,|\,\tilde F(\Omega)\,|\,\Psi(r,\Omega)\rangle=\langle\Psi(r,\tilde\Omega)\,|\,\hat F(r)\,|\,\Psi(r,\Omega)\rangle, \tag{2.4}$$

где скобки означают интегрирование по координатам $\mathbf r_1$, $\mathbf r_2$, ..., $\mathbf r_A$ и суммирование по спин-изоспиновым переменным нуклонов, а функция $\Psi(r,\tilde\Omega)$ совпадает с производящей функцией $\Psi(r,\Omega)$ с точностью до формального переобозначения $\Omega\to\tilde\Omega$. Упростим написание математических выражений, заменив обозначение совокупности квантовых чисел $\{(\lambda,\mu)\,LM\}$ одной буквой N. Равенство (2.3) примет при этом следующий простой вид:

$$\Psi(r,\Omega)=\sum_{N}\langle r\,|\,N\,\rangle\,\langle N\,|\,\Omega\rangle. \tag{2.5}$$

Используя это выражение, а также учитывая ортонормированность функций $\langle r\,|\,(\lambda\mu)\,LM\rangle$ (кратко $\langle r\,|\,N\,\rangle$), запишем значение интеграла перекрытия производящих инвариантов $\Psi(r,\tilde\Omega)$ и $\Psi(r,\Omega)$:

$$J\equiv\langle\Psi(r,\tilde\Omega)\,|\,\Psi(r,\Omega)\rangle=\sum_{N'}\sum_{N}\langle\tilde\Omega\,|\,N\,\rangle\,\delta_{N'N}\,\langle N\,|\,\Omega\rangle=\sum_{N}\langle\tilde\Omega\,|\,N\,\rangle\,\langle N\,|\,\Omega\rangle. \tag{2.6}$$

Отметим, что интеграл перекрытия J записывается в виде бинарной суммы образов ортонормированных функций $\langle r\,|\,(\lambda,\mu)\,LM\,\rangle$.

Преобразуем теперь левую и правую части соотношения (2.4) с учетом разложения (2.5):

$$\langle\Psi(r,\tilde\Omega)\,|\,\hat F(r)\,|\,\Psi(r,\Omega)\rangle=\sum_{N'}\sum_{N}F_{N'N}\,\langle\tilde\Omega\,|\,N'\,\rangle\,\langle N\,|\,\Omega\rangle, \tag{2.7}$$

где $F_{N'N}$ — матричные элементы оператора $\hat F(r)$ на состояниях $\langle r\,|\,(\lambda,\mu)\,LM\,\rangle$;

$$\langle\Psi(r,\tilde{\Omega})\,|\,\tilde{F}(\Omega)\,|\,\Psi(r,\Omega)\rangle = \tilde{F}(\Omega)\,\langle\Psi(r,\tilde{\Omega})\,|\,\Psi(r,\Omega)\rangle = \tilde{F}(\Omega)\sum_{N'}\langle\tilde{\Omega}\,|\,N'\rangle\langle N'\,|\,\Omega\rangle =$$

$$= \sum_{N'}\langle\tilde{\Omega}\,|\,N'\rangle\langle N'\,|\,\tilde{F}(\Omega)\,|\,\Omega\rangle = \sum_{N'}\sum_{N}\tilde{F}_{N'N}\langle\tilde{\Omega}\,|\,N'\rangle\langle N\,|\,\Omega\rangle. \tag{2.8}$$

В равенстве (2.8) $\tilde{F}_{N'N}$ представляют собой коэффициенты разложения результата действия оператора $\tilde{F}(\Omega)$ на $\langle N'\,|\,\Omega\rangle$ по функциям $\langle N\,|\,\Omega\rangle$:

$$\tilde{F}(\Omega)\,\langle N'\,|\,\Omega\rangle = \sum_{N}\tilde{F}_{N'N}\langle N\,|\,\Omega\rangle. \tag{2.9}$$

Из равенств (2.7) и (2.8), с учетом (2.4), следует

$$F_{N'N} = \tilde{F}_{N'N}\,. \tag{2.10}$$

На основе полученных соотношений перечислим теперь схематически последовательность действий для построения искомых функций и, при необходимости, сделаем соответствующие комментарии.

1. Рассматривая координаты векторов **u** и **v** в качестве генераторных параметров, построим оператор Казимира второго порядка группы $SU(3)$ протон-нейтронной системы. Так как динамическими переменными модели являются величины t, α, β, γ, то и оператор Казимира должен выражаться через эти переменные.

2. Так как квантовые числа L и M являются интегралами движения, то собственные функции оператора Казимира будем искать в виде произведения функции, зависящей от переменной $t = \cos\theta$, и D-функции Вигнера: $\langle(\lambda,\mu)\,KLM\,|\,\Omega\rangle = F(t)\,D^{L}_{KM}(\alpha,\beta,\gamma)$. Поскольку собственные значения оператора Казимира группы $SU(3)$ известны, то нахождение явного вида функций $F(t)$ сводится к решению вполне определенного дифференциального уравнения второго порядка. Нахождение собственных функций оператора Казимира и анализ их свойств будут рассмотрены ниже.

3. Искомые функции $\langle(\lambda,\mu)\,LM\,|\,\Omega\rangle$ получим в виде линейной комбинации функций $\langle(\lambda,\mu)\,KLM\,|\,\Omega\rangle$ суммированием по квантовому числу K. Коэффициенты линейной комбинации при этом находятся из дополнительного требования, чтобы искомая функция была собственной функцией оператора Баргмана — Мошинского. Следовательно, этот оператор также необходимо построить в переменных t, α, β, γ.

Отметим, однако, что нормировка найденной таким образом функции остается неопределенной. Более того, само понятие нормированной функции в рассматриваемом случае требует уточнения, поскольку не определено понятие скалярного произведения функций, зависящих от переменных α, β, γ, t.

Функции $\langle(\lambda, \mu)\, LM \,|\, \Omega\rangle$ будем считать правильно нормированными (или просто «нормированными»), если матричные элементы преобразованных операторов $\tilde{F}_{\lambda}(\Omega)$ на этих функциях совпадают с матричными элементами операторов $F(r)$ на соответствующих функциях-оригиналах $\langle r \,|\, (\lambda\mu)\, LM\rangle$, нормированных на единицу. Под матричными элементами преобразованных операторов в данном определении следует понимать коэффициенты разложения $F_{N'N}$ в соотношении (2.9). Таким образом, в основу понятия нормировки волновых функций, зависящих от коллективных переменных α, β, γ, t, положено равенство (2.10). Отсюда следует, что для получения нормированных функций нужно вычислить интеграл перекрытия производящих функций и представить его в виде бинарной линейной комбинации (2.6). Функции $\langle(\lambda, \mu)\, LM \,|\, \Omega\rangle$ в этом разложении получаются автоматически нормированными. Заметим, что при умножении одновременно всех функций $\langle(\lambda, \mu)\, LM \,|\, \Omega\rangle$ на один и тот же числовой множитель значения матричных элементов $F_{N'N}$ не изменяются (см. равенство (2.8)). Это означает, что числовой множитель, с которым записывается производящая функция, не имеет принципиального значения.

Рассмотрим теперь процедуру вычисления интеграла перекрытия $\langle\Psi(r, \tilde{\Omega} \,|\, \Psi(r, \Omega)\rangle$. Сформулируем ряд утверждений, которые не требуют доказательств вследствие своей очевидности.

1. Интеграл перекрытия $\langle\Psi(r, \tilde{\Omega} \,|\, \Psi(r, \Omega)\rangle$ для системы из A нуклонов можно представить с точностью до постоянного множителя в виде определителя матрицы $A \times A$. Элементами этой матрицы являются интегралы перекрытия (скалярные произведения) одночастичных функций вида (2.1) или (2.2).

2. Интегралы перекрытия двух одночастичных функций с разными спин-изоспиновыми квантовыми числами равны нулю.

3. Интегралы перекрытия двух одночастичных функций, относящихся к разным оболочкам, равны нулю.

4. Интегралы перекрытия одночастичных функций из одной и той же оболочки, вообще говоря, не равны нулю.

5. Интеграл перекрытия $\langle\Psi(r, \tilde{\Omega} \,|\, \Psi(r, \Omega)\rangle$ можно представить в виде произведения аналогичных интегралов перекрытия для отдельных оболочек, причем сомножители этого произведения, относящиеся к замкнутым оболочкам, являются константами.

6. Для всякой отдельно взятой оболочки интеграл перекрытия распадается на сомножители, каждый из которых характеризуется определенным значением спин-изоспинового состояния нуклона.

Пусть задана некоторая конфигурация системы нуклонов. Для вычисления интеграла перекрытия $\langle\Psi(r,\tilde{\Omega}\,|\,\Psi(r,\Omega)\rangle$ нужно последовательно выполнить следующие действия:

а) Выделить одночастичные состояния, относящиеся к отдельным незаполненным оболочкам (в конкретных примерах, приведенных выше, в каждом ядре имеется одна незаполненная оболочка).

б) В каждой незаполненной оболочке выделить группы одночастичных функций с одинаковой спин-изоспиновой частью.

в) Для каждой группы составить определители из интегралов перекрытия соответствующих одночастичных функций.

г) Перемножить полученные таким путем определители.

В порядке иллюстрации вычислим интеграл перекрытия $\langle\Psi(r,\tilde{\Omega}\,|\,\Psi(r,\Omega)\rangle$ для конфигураций нуклонов в ядрах ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$, ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$, ${}^{44}_{22}\mathrm{Ti}$. Все четыре одночастичные функции внешней оболочки в каждом из этих ядер отличаются друг от друга спин-изоспиновыми квантовыми числами. Координатные части этих функций имеют следующий вид (см. (2.1) и (2.2)) (в дальнейшем в тексте векторы $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ не встречаются, поэтому для упрощения вместо $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{v}_1$ будем писать $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$):

$$\Psi^{(1)}_{q_1,0,0}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2^{q_1} q_1!\,\pi^{3/2}}} H_{q_1}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\, e^{-r^2/2}, \tag{2.1$'$}$$

$$\Psi^{(2)}_{q_1,0,0}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2^{q_1} q_1!\,\pi^{3/2}}} H_{q_1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\, e^{-r^2/2}, \tag{2.2$'$}$$

где $q_1 = 1$ для ядра ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$, $q_1 = 2$ для ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$ и $q_1 = 3$ для ${}^{44}_{22}\mathrm{Ti}$. Приняв во внимание рекомендации, сформулированные выше, искомый интеграл перекрытия можно записать в следующем виде:

$$\langle\Psi(r,\tilde{\Omega})\,|\,\Psi(r,\Omega)\rangle = [\langle\tilde{\Psi}^{(1)}_{q_1,0,0}\,|\,\Psi^{(1)}_{q_1,0,0}\rangle]^2[\langle\tilde{\Psi}^{(2)}_{q_1,0,0}\,|\,\Psi^{(2)}_{q_1,0,0}\rangle]^2, \tag{2.11}$$

где $\tilde{\Psi}^{(1)}_{q,0,0}$ и $\tilde{\Psi}^{(2)}_{q,0,0}$ получаются из соответствующих функций $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$ заменой u на $\tilde{u}$ и v на $\tilde{v}$. Найдем значение интеграла перекрытия одночастичных функций

$$\langle\tilde{\Psi}^{(1)}_{q_1,0,0}\,|\,\Psi^{(1)}_{q_1,0,0}\rangle = \frac{1}{2^{q_1} q_1!\,\pi^{3/2}} \int\int_{-\infty}^{+\infty}\int H_{q_1}(\tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{r})\, H_{q_1}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{2^{q_1} q_1!\, \pi^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int H_{q_1}((\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})\, x + \ldots\,)\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{2^{q_1} q_1!\, \pi^{3/2}} (\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^{q_1} \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int H_{q_1}(x)\, H_{q_1}(x)\, \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = (\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^{q_1}\,.$$

Отметим, что вычисления интеграла удобно проводить в системе координат, ось x которой направлена вдоль вектора $\tilde{\mathbf{u}}_1$. По аналогии запишем интеграл перекрытия функций $\tilde{\Psi}^{(2)}_{q_1,0,0}$ и $\Psi^{(2)}_{q_1,0,0}$:

$$\langle\, \tilde{\Psi}^{(2)}_{q_1,0,0} \,|\, \Psi^{(2)}_{q_1,0,0}\,\rangle = (\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{v}})^{q_1}.$$

Подставив найденные значения интегралов перекрытия в (2.11), получим

$$\langle\, \Psi(r,\tilde{\Omega}) \,|\, \Psi(r,\Omega)\rangle = (\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^{2q_1}\cdot(\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{v}})^{2q_1}$$

или

$$\langle\, \Psi(r,\tilde{\Omega}) \,|\, \Psi(r,\Omega)\rangle = \begin{cases} (\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^2(\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{v}})^2 & \text{для} \quad {}^{8}_{4}\mathrm{Be} \\ (\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^4(\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{v}})^4 & \text{для} \quad {}^{20}_{10}\mathrm{Ne} \\ (\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^6(\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{v}})^6 & \text{для} \quad {}^{44}_{22}\mathrm{Ti}. \end{cases}$$

Отметим, что в модели двух аксиальных ротаторов в самом общем случае интеграл перекрытия имеет вид

$$\langle\, \Psi(r,\tilde{\Omega} \,|\, \Psi(r,\Omega)\rangle = (\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^{n_1}(\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{v}})^{n_2}.$$

Таким образом, интеграл перекрытия является однородным полиномом степени n_1 по компонентам вектора $\mathbf{u}$ и степени n_2 по компонентам вектора $\mathbf{v}$.

3. ГЕНЕРАТОРЫ МОДЕЛИ $SU(3)\times SU(3)$

Как упоминалось выше, мы ограничиваемся случаем, когда индексы неприводимых представлений группы $SU(3)$ каждой из двух подсистем имеют вид: $(\lambda_n, \mu_n) = (n_1, 0)$; $(\lambda_p, \mu_p) = (n_2, 0)$. Каждое из этих неприводимых представлений можно реализовать на тензорных произведениях векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$\underbrace{\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \ldots \times \mathbf{u}}_{n_1 \text{ раз}} \quad \text{для первой подсистемы,}$$

$$\underbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \ldots \times \mathbf{v}}_{n_2 \text{ раз}} \quad \text{для второй подсистемы.}$$

Прямое произведение $(n_1, 0) \times (n_2, 0)$ содержит все неприводимые представления $SU(3)$, имеющие индексы симметрии:

$$(\lambda, \mu) = (n_1 + n_2 - 2m, m), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n_2.$$

Пусть задана декартова система координат, которую в дальнейшем будем называть «лабораторной» или «неподвижной» системой. Шесть компонент $\{x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2\}$ векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в этой системе примем в качестве исходных генераторных параметров и обычным образом свяжем с ними генераторы группы $SU(3)$ для каждой из двух подсистем. В дальнейшем наряду с декартовыми координатами векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ будут использоваться и их сферические компоненты: $\{u, \theta_1, \varphi_1; v, \theta_2, \varphi_2\}$.

Из декартовых и сферических генераторных параметров можно образовать различные их комбинации, имеющие тот или иной смысл. Так, например, угол θ между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ связан с величинами θ_1, φ_1, θ_2, φ_2 следующим равенством:

$$\cos\theta = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos\theta_1 \cos\theta_2. \tag{3.1}$$

Построим при помощи векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, следуя [1—3], «собственную» или «подвижную» прямоугольную систему координат с ортами

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2|}, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_1|}, \qquad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|},$$

где

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \qquad \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Компоненты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в собственной системе запишутся в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \{\xi_1, \xi_2, 0\}, \qquad \mathbf{v} = \{\eta_1, \eta_2, 0\},$$

$$\xi_1 = u \cos\frac{\theta}{2}, \qquad \eta_1 = v \cos\frac{\theta}{2},$$

$$\xi_2 = -u \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \eta_2 = v \sin\frac{\theta}{2}. \tag{3.2}$$

Величины ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, разумеется, можно выразить через сферические компоненты u, θ_1, φ_1, v, θ_2, φ_2, если использовать соотношение (3.1). Ориентацию подвижной (собственной) системы координат относительно лабораторной системы можно задать матрицей поворотов, элементы которой имеют смысл направляющих косинусов:

$$d_{11} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1) = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} (\sin\theta_1 \cos\varphi_1 + \sin\theta_2 \cos\varphi_2),$$

$$d_{21} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_1) = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} (\sin\theta_1 \sin\varphi_1 + \sin\theta_2 \sin\varphi_2),$$

$$d_{31} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1) = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

$$d_{12} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} (-\sin\theta_1 \cos\varphi_1 + \sin\theta_2 \cos\varphi_2),$$

$$d_{22} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} (-\sin\theta_1 \sin\varphi_1 + \sin\theta_2 \sin\varphi_2),$$

$$d_{32} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} (-\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

$$d_{13} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_3) = \frac{1}{\sin\theta} (\sin\theta_1 \sin\varphi_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\varphi_2),$$

$$d_{23} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_3) = \frac{1}{\sin\theta} (\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_2 - \sin\theta_1 \cos\varphi_1 \cos\theta_2),$$

$$d_{33} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3) = \frac{1}{\sin\theta} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Приравнивая элементы матрицы поворотов, выраженные через θ_1, φ_1, θ_2, φ_2, соответствующим элементам, записанным через углы Эйлера α, β, γ [13] и учитывая соотношение (3.1), можно установить связь между переменными $\{\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2\}$, с одной стороны, и $\{\theta, \alpha, \beta, \gamma\}$ — с другой. Таким образом, в дальнейшем мы будем использовать следующие эквивалентные совокупности независимых переменных:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} u \\ \theta_1 \\ \varphi_1 \\ v \\ \theta_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}. \tag{3.3}$$

В последнем столбце в (3.3) явным образом выделены динамические переменные θ, α, β, γ коллективных движений в ядрах в рамках рассматриваемой нами модели.

Одной из наших задач в данной работе является построение оператора Баргмана — Мошинского в переменных θ, α, β, γ. Для этого предварительно запишем генераторы группы $SU(3)$ во внутренней системе координат как для каждой из подсистем, так и для всей системы в целом. Выше (3.2) уже были записаны декартовы координаты ξ_i и η_i векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ во внутренней системе, и, следовательно, для построения генераторов группы необходимо теперь записать выражения для производных $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ и $\frac{\partial}{\partial \eta_i}$. Так как $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ являются компонентами оператора набла в подвижной системе координат, то их можно выразить через соответствующие компоненты $\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \right\}$ этого вектора в лабораторной системе при помощи матрицы поворотов:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = \sum_i d_{1i} \frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}; \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \sum_i d_{2i} \frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}; \quad \frac{\partial}{\partial \xi_3} = \sum_i d_{3i} \frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}. \tag{3.4}$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} = \sum_i d_{1i} \frac{\partial}{\partial x_i^{(2)}}; \quad \frac{\partial}{\partial \eta_2} = \sum_i d_{2i} \frac{\partial}{\partial x_i^{(2)}}; \quad \frac{\partial}{\partial \eta_3} = \sum_i d_{3i} \frac{\partial}{\partial x_i^{(2)}}. \tag{3.4$'$}$$

Равенства (3.4) и (3.4′) совместно с соотношением (3.2) позволяют выразить производные $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ и $\frac{\partial}{\partial \eta_i}$ в переменных u, v, θ, α, β, γ. Сделав необходимые выкладки, получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{u}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}M_3\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = -\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{u}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}M_3\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} = \frac{1}{2u}\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}M_1 + \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}M_2\right), \tag{3.4''}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{v}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}M_3\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_2} = \sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{v}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}M_3\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_3} = \frac{1}{2v}\left(-\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}M_1 + \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}M_2\right),$$

где M_1, M_2, M_3, с точностью до множителя i (мнимой единицы), есть операторы проекций момента всей системы на подвижные оси координат, и они определяются следующими равенствами:

$$M_1 = -\left(\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_3} - \xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_3} - \eta_3\frac{\partial}{\partial\eta_2}\right) = -\sin\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial\beta},$$

$$M_2 = -\left(\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_1} - \xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_3} + \eta_3\frac{\partial}{\partial\eta_1} - \eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_3}\right) = -\cos\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial\beta},$$

$$M_3 = -\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_2} - \xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_2} - \eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right) = -\frac{\partial}{\partial\gamma}.$$

Запишем теперь все генераторы группы, связанные с вектором **u**, в подвижной системе координат:

$$\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1} = \cos^2\frac{\theta}{2}\cdot u\frac{\partial}{\partial u} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}M_3\right),$$

$$\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_2} = -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot u\frac{\partial}{\partial u} - \cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}M_3\right),$$

$$\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_3} = \frac{1}{2}M_2 + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}M_1,$$

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} = -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot u\frac{\partial}{\partial u} + \sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}M_3\right),$$

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \sin^2\frac{\theta}{2}\cdot u\frac{\partial}{\partial u} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}M_3\right),$$

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot M_2,$$

$$\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1} = \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} = 0.$$

Аналогично можно записать генераторы, связанные с вектором $\mathbf{v}$. Очевидно, что выражения для генераторов $\eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_j}$ можно получить из $\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ формальной заменой $u \to v$, $\theta \to -\theta$.

4. ОПЕРАТОР КАЗИМИРА G_2

Оператор Казимира G_2 является квадратичной скалярной сверткой генераторов $A_{ij} = u_i \frac{\partial}{\partial u_j} + v_i \frac{\partial}{\partial v_j}$ группы $SU(3)$ (либо группы $U(3)$): $G_2 = A_{ij}A_{ji}$. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы преобразовать оператор Казимира от декартовых компонент $\{u_i, v_i\}$ векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ к динамическим переменным $\{\theta, \alpha, \beta, \gamma\}$. Для этого сделаем некоторые предварительные преобразования:

$$G_2 = \left(u_i \frac{\partial}{\partial u_j} + v_i \frac{\partial}{\partial v_j}\right)\left(u_j \frac{\partial}{\partial u_i} + v_j \frac{\partial}{\partial v_i}\right) =$$
$$= u_i \frac{\partial}{\partial u_j} u_j \frac{\partial}{\partial u_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u_j} v_j \frac{\partial}{\partial v_i} + v_i \frac{\partial}{\partial v_j} u_j \frac{\partial}{\partial u_i} + v_i \frac{\partial}{\partial v_j} v_j \frac{\partial}{\partial v_i}. \tag{4.1}$$

Простой коммутацией операторов первое слагаемое в правой части равенства (4.1) можно преобразовать следующим образом:

$$u_i \frac{\partial}{\partial u_j} u_j \frac{\partial}{\partial u_i} = \left(u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right)^2 + 2u_i \frac{\partial}{\partial u_i} = \left(u \frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + 2u \frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.2}$$

Напомним, что в рассматриваемой задаче все операторы (включая оператор G_2) определены в пространстве однородных полиномов степени $n_1 + n_2$ по компонентам векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, где n_1 — сумма показателей степеней компонент вектора $\mathbf{u}$, n_2 — то же самое для вектора $\mathbf{v}$. Такие полиномы являются собственными функциями операторов $u_j \frac{\partial}{\partial u_i} \equiv u \frac{\partial}{\partial u}$ и $v_i \frac{\partial}{\partial v_i} \equiv v \frac{\partial}{\partial v}$ с собственными значениями n_1 и n_2 соответственно. Следовательно, в (4.1) оператор (4.2) можно заменить его собственным значением:

$$u_i \frac{\partial}{\partial u_j} u_j \frac{\partial}{\partial u_i} = n_1(n_1 + 2),$$

и аналогично

$$v_i \frac{\partial}{\partial v_j} v_j \frac{\partial}{\partial v_i} = n_2(n_2 + 2).$$

Далее,

$$u_i \frac{\partial}{\partial u_j} v_j \frac{\partial}{\partial v_i} = u_i \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\partial}{\partial v_i} v_j - \delta_{ij} \right) = u_i \frac{\partial}{\partial v_i} v_j \frac{\partial}{\partial u_j} - u_i \frac{\partial}{\partial u_i} = (\mathbf{u} \cdot \nabla^v)(\mathbf{v} \cdot \nabla^u) - n_1.$$

Выполнив аналогичные преобразования в следующем слагаемом выражения (4.1), получим

$$v_i \frac{\partial}{\partial v_j} u_j \frac{\partial}{\partial u_i} = (\mathbf{v} \cdot \nabla^u)(\mathbf{u} \cdot \nabla^v) - n_2 .$$

Правую часть последнего равенства можно записать иначе:

$$v_i \frac{\partial}{\partial v_j} u_j \frac{\partial}{\partial u_i} = u_j v_i \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{\partial}{\partial u_j} = u_j\left(\frac{\partial}{\partial v_j} v_i - \delta_{ij} \right)\frac{\partial}{\partial u_i} = (\mathbf{u} \cdot \nabla^v)(\mathbf{v} \cdot \nabla^u) - n_1 .$$

Следовательно, в рассматриваемом пространстве функций коммутатор операторов $(\mathbf{u} \cdot \nabla^v)$ и $(\mathbf{v} \cdot \nabla^u)$ равен просто разности чисел n_1 и n_2:

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla^v), (\mathbf{v} \cdot \nabla^u)] = n_1 - n_2. \tag{4.3}$$

Таким образом, оператор Казимира можно представить одним из следующих выражений:

$$\begin{gathered} G_2 = 2(\mathbf{u} \cdot \nabla^v)(\mathbf{v} \cdot \nabla^u) + n_1^2 + n_2(n_2 + 1), \\ G_2 = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla^u)(\mathbf{u} \cdot \nabla^v) + n_2^2 + n_1(n_1 + 1), \\ G_2 = (\mathbf{u} \cdot \nabla^v)(\mathbf{v} \cdot \nabla^u) + (\mathbf{v} \cdot \nabla^u)(\mathbf{u} \cdot \nabla^v) + n_1(n_1 + 1) + n_2(n_2 + 1). \end{gathered} \tag{4.4}$$

В дальнейшем будем использовать третью приведенную здесь форму оператора G_2, симметричную относительно перестановки $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Принимая во внимание соотношения [13]:

$$\nabla_u = \mathbf{n}_u \frac{\partial}{\partial u} - \frac{i}{u}[\mathbf{n}_u \times \mathbf{l}_u]; \qquad \nabla_v = \mathbf{n}_v \frac{\partial}{\partial v} - \frac{i}{v}[\mathbf{n}_v \times \mathbf{l}_v],$$

где $\mathbf{n}_u = \frac{\mathbf{u}}{u}$; $\mathbf{n}_v = \frac{\mathbf{v}}{v}$, а $\mathbf{l}_u$ и $\mathbf{l}_v$ — операторы орбитального углового момента, действующие на переменные u_i и v_i, преобразуем скалярные произведения $(\mathbf{u}\cdot\nabla_v)$ и $(\mathbf{v}\cdot\nabla_u)$:

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla_v) = u(\mathbf{n}_u\cdot\mathbf{n}_v)\frac{\partial}{\partial v} - i\frac{u}{v}(\mathbf{n}_u\cdot[\mathbf{n}_v\times\mathbf{l}_v]) = tu\frac{\partial}{\partial v} - i\frac{u}{v}([\mathbf{n}_u\times\mathbf{n}_v]\cdot\mathbf{l}_v) =$$

$$= tu\frac{\partial}{\partial v} - i\frac{u}{v}\sqrt{1-t^2}\, l_v^{(3)},$$

где $t = \cos\theta$, а $l_v^{(3)}$ обозначена проекция оператора углового момента $\mathbf{l}$ на третью ось подвижной (внутренней) системы координат.

Действуя аналогичным образом, получим

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla_u) = tv\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{v}{u}\sqrt{1-t^2}\, l_u^{(3)}.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla_v)(\mathbf{v}\cdot\nabla_u) = \left[tu\frac{\partial}{\partial v} - i\frac{u}{v}\sqrt{1-t^2}\, l_v^{(3)}\right]\left[tv\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{v}{u}\sqrt{1-t^2}\, l_u^{(3)}\right] =$$

$$= n_1(n_2+1)t^2 - in_1\sqrt{1-t^2}\, l_v^{(3)}t + i(n_2+1)\,t\sqrt{1-t^2}\, l_u^{(3)} +$$

$$+\sqrt{1-t^2}\, l_v^{(3)}\sqrt{1-t^2}\, l_u^{(3)}; \tag{4.5}$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla_u)(\mathbf{u}\cdot\nabla_v) = n_2(n_1+1)t^2 - i(n_1+1)t\sqrt{1-t^2}\, l_v^{(3)} + in_2\sqrt{1-t^2}\, l_u^{(3)}t +$$

$$+\sqrt{1-t^2}\, l_u^{(3)}\sqrt{1-t^2}\, l_v^{(3)}.$$

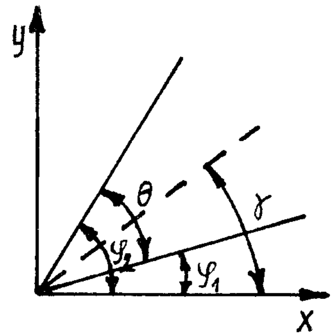
Получим теперь явный вид операторов $l_u^{(3)}$ и $l_v^{(3)}$.

Очевидно, эти операторы можно представить в виде

$$l_u^{(3)} = \frac{1}{2}L_3 + \tilde{l}_u^{(3)}; \quad l_v^{(3)} = \frac{1}{2}L_3 + \tilde{l}_v^{(3)},$$

где L_3 — проекция полного момента на третью ось внутренней системы координат, а $\tilde{l}_u^{(3)}$ и $\tilde{l}_v^{(3)}$ — проекции на ту же ось моментов «внутреннего» движения подсистем.

Связь между степенями свободы φ_1 и φ_2 двух подсистем с переменными θ, φ, характеризующими положение всей системы в целом



Так как в рассматриваемой модели имеется только одна степень свободы — θ внутреннего движения, то, очевидно,

$$l_u^{(3)} = -i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma} + c\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right); \quad l_v^{(3)} = -i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma} - c\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

где c — некоторая константа. Значение этой константы можно найти, рассмотрев связь между степенями свободы φ_1 и φ_2 подсистем и переменными θ и γ в простом случае движения относительно фиксированной оси (см. рисунок):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \gamma - \frac{\theta}{2} \\ \varphi_2 &= \gamma + \frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \theta &= \varphi_2 - \varphi_1, \end{aligned}$$

$$l_u^{(3)} = -i\,\frac{\partial}{\partial\varphi_1} = -i\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\right) = -i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

$$l_v^{(3)} = -i\,\frac{\partial}{\partial\varphi_2} = -i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Таким образом, из последнего равенства следует, что константа $c = -1$.

Учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\dfrac{\partial}{\partial(\cos\theta)} = -\sqrt{1-t^2}\,\dfrac{\partial}{\partial t}$, окончательно получим

$$l_u^{(3)} = -i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma} + \sqrt{1-t^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\right); \quad l_v^{(3)} = -i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma} - \sqrt{1-t^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\right). \qquad (4.6)$$

Подставив (4.6) в (4.5), запишем искомое выражение для оператора Казимира G_2:

$$G_2 = 2(1-t^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2(n_1+n_2-1)\, t(1-t^2) \frac{\partial}{\partial t} + (n_2-n_1)\, t\sqrt{1-t^2} \frac{\partial}{\partial\gamma} -$$

$$-\frac{1}{2}(1-t^2) \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} - 2n_1n_2(1-t^2) + (n_1+n_2)^2 + 2(n_1+n_2). \tag{4.7}$$

5. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА КАЗИМИРА G_2

Рассмотрим задачу нахождения функции $\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma)$, которая зависит от всех четырех динамических переменных модели и является собственной функцией как оператора квадрата углового момента и его проекций на внешнюю и внутреннюю оси, так и оператора Казимира G_2. Будем искать решение этой задачи в виде

$$\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma) = y(t)\, D^L_{KM}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Независимо от выбора $y(t)$ функция $\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma)$ характеризуется квантовыми числами K, L, M. Для того чтобы эти функции преобразовывались по неприводимому представлению группы $SU(3)$, необходимо, чтобы они были собственными функциями оператора Казимира G_2. Собственные значения g_2 оператора G_2 известны и просто выражаются через индексы (λ, μ) неприводимых представлений группы $SU(3)$ (либо группы $U(3)$) [15]:

$$g_2 = \lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2 + 2\lambda + 2\mu.$$

В рассматриваемой нами модели $\lambda = n_1 + n_2 - 2m$, $\mu = m$, следовательно,

$$g_2 = (n_1+n_2)^2 - 2(m-1)(n_1+n_2-m).$$

Заметим, что D-функции Вигнера являются собственными функциями операторов $\frac{\partial}{\partial\gamma}$ и $\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}$, входящих в G_2, поскольку зависимость D-функций от переменной γ определяется множителем $e^{iK\gamma}$. Таким образом, задача нахождения собственных функций оператора Казимира сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$(1-t^2)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + (n_1+n_2-1)\, t(1-t^2) \frac{dy}{dt} +$$

$$+\left[\left(\frac{1}{4}K^2 - n_1n_2\right)(1-t^2) - i\,\frac{1}{2}K(n_1-n_2)\, t\sqrt{1-t^2} + m(n_1+n_2-m+1)\right] y(t) = 0. \tag{5.1}$$

Рассмотрим свойства симметрии уравнения (5.1). Отметим, во-первых, что при значении $K=0$ оно не изменяется при перестановке местами параметров n_1 и n_2. В общем же случае $K \neq 0$ это уравнение является комплексным, и оно инвариантно относительно одновременного применения любой пары из следующих трех операций: перестановки $n_1 \leftrightarrow n_2$; замены $K \to -K$; операции комплексного сопряжения.

Сделав в (5.1) подстановку

$$y(t) = (1-t^2)^{m/2}\, u(t), \tag{5.2}$$

запишем уравнение относительно новой искомой функции $u(t)$:

$$(1-t^2)\frac{d^2u}{dt^2} + (N_1+N_2-1)\,t\frac{du}{dt} +$$

$$+\left[\frac{1}{4}K^2 - N_1N_2 - i\frac{1}{2}K(N_1-N_2)\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right]u(t) = 0, \tag{5.3}$$

где $N_1 = n_1 - m$, $N_2 = n_2 - m$.

Все соображения, высказанные выше по поводу симметрии уравнения (5.1), справедливы и для уравнения (5.3), если по отношению к нему вместо перестановки $n_1 \leftrightarrow n_2$ использовать операцию $N_1 \leftrightarrow N_2$.

Перепишем последнее уравнение, заменив в нем N_1 и N_2 на целочисленные параметры $\lambda = N_1 + N_2 = n_1 + n_2 - 2m$ и $q = N_1 - N_2 = n_1 - n_2$:

$$(1-t^2)\frac{d^2u}{dt^2} + (\lambda-1)\,t\frac{du}{dt} +$$

$$+\frac{1}{4}\left[K^2 + q^2 - \lambda^2 - i2Kq\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right]u(t) = 0. \tag{5.3$'$}$$

Непосредственно из полученного уравнения следует его инвариантность относительно перестановки местами параметров K и q.

Рассмотрим вначале решение уравнения (5.3) в некоторых частных случаях.

Решение уравнения (5.3) при ($n_1 = n_2$). Пусть $N_1 = N_2 = N$ (или, что то же самое, $n_1 = n_2 = n$). Тогда после введения новой независимой переменной $x = t^2$ и замены $K = 2l$ получим

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \left[\frac{1}{2} - (1-N)\,x\right]\frac{du}{dx} - \frac{N^2 - l^2}{4}u(x) = 0. \tag{5.4}$$

Очевидно, (5.4) представляет собой гипергеометрическое уравнение, каноническая форма которого обычно записывается в виде

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+[\,\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x\,]\frac{du}{dx}-\alpha\beta\, u=0. \qquad (5.5)$$

Если γ не равно целому числу, то в качестве двух линейно независимых решений уравнений (5.5) можно выбрать функции

$$u_1(x)=F(\alpha,\beta,\gamma;x), \qquad u_2(x)=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z),$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция.

Сопоставляя коэффициенты уравнений (5.4) и (5.5), определим значения параметров α, β, γ в (5.4):

$$\alpha=-\frac{N-l}{2}=-\frac{n-m-l}{2}, \quad \beta=-\frac{N+l}{2}=-\frac{n-m+l}{2}, \quad \gamma=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, линейно независимыми решениями уравнения (5.4) являются функции

$$u_1(t)=F\left(-\frac{n-m-l}{2},-\frac{n-m+l}{2},\frac{1}{2}t^2\right),$$

$$u_2(t)=tF\left(-\frac{n-m-l-1}{2},-\frac{n-m+l-1}{2},\frac{3}{2};t^2\right).$$

В рассматриваемой модели интерес представляют только те из решений, которые являются полиномами конечной степени по t, причем l должно изменяться в следующих пределах:

$-(n-m)\le l\le n-m$, если l — целое число той же четности, что и $n-m$,

$-(n-m-1)\le l\le n-m-1$, если четность l отличается от четности $n-m$.

Таким образом, искомыми решениями уравнения (5.1), с учетом множителя $(1-t^2)^{m/2}$, выделенного в (5.2), являются следующие функции:

$$y(t)=\psi_l^{n,m}(t)=$$

$$=\begin{cases}(1-t^2)^{m/2}F\left(-\frac{n-m-l}{2},-\frac{n-m+l}{2},\frac{1}{2};t^2\right), & \text{если } n-m-l \text{ четное},\\ (1-t^2)^{m/2}tF\left(-\frac{n-m-l-1}{2},-\frac{n-m+l-1}{2},\frac{3}{2};t^2\right), & \text{если } n-m-l \text{ нечетное}.\end{cases} \qquad (5.6)$$

Заметим, что вследствие симметрии гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ относительно перестановки $\alpha \leftrightarrow \beta$ функция $\psi_l^{n,m}(t)$ не изменится при замене $l\to -l$.

Перепишем теперь (5.6), перейдя от величин n, m, l к стандартным индексам (λ, μ), характеризующим $SU(3)$-симметрию, и параметру $K = 2l$:

$$\psi_k^{\lambda,\mu}(t) =$$

$$= \begin{cases} (1-t^2)^{\mu/2} F\left(-\dfrac{\lambda-K}{4}, -\dfrac{\lambda+K}{4}, \dfrac{1}{2}; t^2\right), \text{ если } \dfrac{\lambda-K}{2} \text{ четное}, \\ (1-t^2)^{\mu/2} F\left(-\dfrac{\lambda-K-2}{4}, -\dfrac{\lambda-K+2}{4}, \dfrac{3}{2}; t^2\right), \text{ если } \dfrac{\lambda-K}{2} \text{ нечетное}. \end{cases}$$

При фиксированных значениях индексов (λ, μ) совокупность функций $\psi_K^{\lambda,\mu}(t)$ с различными допустимыми значениями K можно рассматривать в качестве мультиплета с заданной $SU(3)$-симметрией. Величина K, принимая только четные значения ($K = 2l$), изменяется в пределах $-\lambda \le K \le \lambda$. Таким образом, при заданном λ имеется $\lambda + 1$ функций. Отметим, однако, что в рассматриваемом случае $n_1 = n_2 = n$ функции $\psi_K^{\lambda,\mu}$ совпадают с $\psi_{-K}^{\lambda,\mu}$. Следовательно, имеется всего $\dfrac{\lambda}{2} + 1$ различных функций. Инвариантность функций $\psi_K^{\lambda,\mu}(t)$ относительно замены $K \to -K$ непосредственно следует из инвариантности уравнения (5.4) относительно замены $l \to -l$ и из того факта, что это уравнение при заданном N и l (или, что то же самое, при заданных λ и K) имеет единственное полиномиальное решение. В общем случае $n_1 \ne n_2$ функции $\psi_K^{\lambda,\mu}$ и $\psi_{-K}^{\lambda,\mu}$ не совпадают, в чем мы убедимся ниже.

Решение уравнения (5.3) при $n_1 \ne n_2$ и $K = 0$, $K = \pm 1$. При $n_1 \ne n_2$ параметр $\lambda = n_1 + n_2 - 2m = N_1 + N_2$ принимает четные значения, если числа n_1 и n_2 (или, что то же самое, N_1 и N_2) одинаковой четности. В этом случае K, изменяясь в пределах $-\lambda \le K \le \lambda$, принимает четные значения. При $K = 0$ уравнение (5.3) заменой $t^2 = x$ сводится к гипергеометрическому уравнению (5.5) с параметрами $\alpha = -\dfrac{N_1}{2}$, $\beta = -\dfrac{N_2}{2}$, $\gamma = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, двумя линейно независимыми решениями этого уравнения будут функции

$$u_1(t) = F\left(-\frac{N_1}{2}, -\frac{N_2}{2}, \frac{1}{2}; t^2\right),$$

$$u_2(t) = t\,F\left(-\frac{N_1-1}{2}, -\frac{N_2-1}{2}, \frac{3}{2}; t^2\right),$$

где, как и выше, через $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ обозначена гипергеометрическая функция. Отбирая из двух полученных решений лишь функции, являющиеся конечными полиномами по переменной t, запишем вид функций $y(t)$:

$$y(t) =$$
$$= \begin{cases} (1-t^2)^{m/2} F\left(-\dfrac{n_1-m}{2}, -\dfrac{n_2-m}{2}, \dfrac{1}{2}; t^2\right), \text{ если } n_1-m \text{ и } n_2-m \text{ четные,} \\ (1-t^2)^{m/2} t\, F\left(-\dfrac{n-m-1}{2}, \dfrac{n-m-1}{2}, \dfrac{3}{2}; t^2\right), \text{ если } n_1-m \text{ и } n_2-m \text{ нечетные.} \end{cases}$$

Перепишем эту функцию, используя вместо n_1, n_2, m параметры λ, μ и q:

$$y(t) = \psi_q^{\lambda,\mu}(t) =$$
$$= \begin{cases} (1-t^2)^{\mu/2} F\left(-\dfrac{\lambda+q}{4}, -\dfrac{\lambda-q}{4}, \dfrac{1}{2}; t^2\right), \text{ если } \dfrac{\lambda+q}{2} \text{ четные,} \\ (1-t^2)^{\mu/2}\, t \cdot F\left(-\dfrac{\lambda+q-2}{2}, -\dfrac{\lambda-q-2}{2}, \dfrac{3}{2}; t^2\right), \text{ если } \dfrac{\lambda+q}{2} \text{ нечетные.} \end{cases}$$

При фиксированных значениях n_1 и n_2 параметр q также остается неизменным (в частности, при $n_1 = n_2 = n$, $q = 0$), в то время как λ может принимать значения

$$\lambda = n_1 + n_2;\ n_1 + n_2 - 2;\ \dots ;\ 1 \text{ или } 0.$$

Совокупность функций $\psi_q^{\lambda,\mu}$ при фиксированном значении параметров (λ, μ), но с различными значениями q, можно рассматривать как мультиплет с определенной $SU(3)$-симметрией. Параметр q принимает значения: $q = \lambda$; $\lambda - 2$; ... ; $-\lambda + 2$; $-\lambda$ — всего $\lambda + 1$ значений, при этом функции $\psi_q^{\lambda,\mu}$ совпадают с $\psi_{-q}^{\lambda,\mu}$. Напомним, что сейчас мы рассматриваем случай, когда $K = 0$.

Обратим внимание еще на то обстоятельство, что $\psi_q^{\lambda,\mu}$ получаются из аналогичных функций $\psi_K^{\lambda,\mu}$ формальным переобозначением $K \to q$. Это связано с тем, что уравнение (5.3′) в рассмотренных двух частных случаях имеет один и тот же вид, с точностью до замены K на q.

Наконец, запишем решение уравнения (5.3) еще для одного частного случая, когда N_1 и N_2 — числа разной четности и при этом $K = 1$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при $N_1 = n_1 - m$ четном и $N_2 = n_2 - m$ нечетном уравнению (5.3) удовлетворяет следующая функция:

$$y(t) = (1-t^2)^{m/2}\left\{ F\left(-\frac{N_1}{2}, -\frac{N_2-1}{2}, \frac{1}{2}, t^2\right)(\sqrt{1+t} + i\sqrt{1-t}) + \right.$$

$$\left. + N_1 t F\left(-\frac{N_1-2}{2}, -\frac{N_2-1}{2}, \frac{3}{2}, t^2\right)(\sqrt{1+t} - i\sqrt{1-t})\right\}.$$

6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (5.3) ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ K

Для нахождения решения уравнения (5.3) при произвольных допустимых значениях K сделаем в нем замену независимой переменной $t = \cos\theta$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} - (N_1 + N_2)\operatorname{ctg}\theta\,\frac{du}{d\theta} +$$

$$+\left[\frac{1}{4}K^2 - N_1N_2 + i\,\frac{1}{2}K(N_1 - N_2)\operatorname{ctg}\theta\right]u = 0. \tag{6.1}$$

Преобразуем уравнение (6.1), заменив $u(\theta)$ новой функцией $w(\theta)$, определяемой равенством:

$$u(\theta) = w(\theta)\,e^{i\theta(N_1 - K/2)}. \tag{6.2}$$

После подстановки (6.2) в (6.1) получим

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + \left[\,i(2N_1 - K) - (N_1 + N_2)\operatorname{ctg}\theta\,\right]\frac{dw}{d\theta} -$$

$$-\left\{N_1(N_1+N_2) - KN_1 + i\operatorname{ctg}\theta\left[N_1(N_1+N_2) - KN_2\right]\right\}w = 0. \tag{6.3}$$

После введения новой независимой переменной $z = e^{-i2\theta}$ (6.3) принимает вид

$$z(1-z)\,\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{2}\left[\,(2 + K - N_1 + N_2) + (3N_1 + N_2 - K - 2)\,z\,\right]\frac{dw}{dz} +$$

$$+\frac{1}{2}N_1(K - N_1 - N_2)\,w = 0. \tag{6.4}$$

Легко видеть, что (6.4) является гипергеометрическим уравнением, решение которого в виде полинома конечной степени по z можно записать в следующем виде:

$$w(z) = F\left(-N_1, -\frac{N_1 + N_2 - K}{2}, -\frac{N_1 - N_2 - K}{2} + 1; z \right). \qquad (6.5)$$

Случай, когда параметр γ гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ равен нулю либо целому отрицательному числу, является особым. Пусть $\gamma = 1 - s$, где s — натуральное число. Тогда решением гипергеометрического уравнения будет функция [14]:

$$w(z) = z^s F(\alpha + m, \beta + m, 1 + m; z).$$

Следовательно, в нашем случае

$$w(z) = z^{(N_1 - N_2 - K)/2} F\left(-N_2, -\frac{N_1 + N_2 + K}{2}, \frac{N_1 - N_2 - K}{2} + 1; z \right),$$

если $N_1 - N_2 - K > 0$.

Подставляя полученные выражения в (6.2) и возвращаясь к переменной θ, получим

$$u(\theta) = \begin{cases} F\left(-N_1, -\dfrac{N_1 + N_2 - K}{2}, -\dfrac{N_1 - N_2 - K}{2} + 1; e^{-i2\theta} \right) e^{i\theta(N_1 - K/2)}, \\ \text{если } N_1 - N_2 - K \le 0, \\ F\left(-N_2, -\dfrac{N_1 + N_2 + K}{2}, -\dfrac{N_2 - N_1 + K}{2} + 1; e^{-i2\theta} \right) e^{i\theta(N_2 + K/2)}, \\ \text{если } N_1 - N_2 - K > 0. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Выражения в правой части (6.6) при помощи известных соотношений [14] можно преобразовать таким образом, чтобы при $\theta = 0$ гипергеометрические функции равнялись единице:

$$u(\theta) = \begin{cases} F\left(-N_1, -\dfrac{N_1 + N_2 - K}{2}, -N_1 - N_2; 1 - e^{-i2\theta} \right) e^{i\theta(N_1 - K/2)}, & (6.6а) \\ F\left(-N_2, -\dfrac{N_1 + N_2 + K}{2}, -N_1 - N_2; 1 - e^{-i2\theta} \right) e^{i\theta(N_2 + K/2)}. & (6.6б) \end{cases}$$

Несмотря на внешнее различие, выражения (6.6а) и (6.6б) представляют одну и ту же функцию, в чем можно легко убедиться, принимая во внимание известное тождество

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; z).$$

Заметим, что если N_1 и N_2 — числа одинаковой (противоположной) четности, то параметр K в (6.6а), (6.6б) может принимать только четные (только нечетные) значения в пределах $-(N_1 + N_2) \le K \le N_1 + N_2$.

Возвращаясь к выражению (5.2), запишем теперь собственную функцию оператора Казимира с фиксированным значением K:

$$\psi_K = \sin^m \theta \begin{cases} F\left(-N_1, -\dfrac{N_1 + N_2 - K}{2}, -N_1 - N_2; 1 - e^{-i2\theta}\right) e^{i\theta(N_1 - K/2)}, \\ \text{или} \\ F\left(-N_2, -\dfrac{N_1 + N_2 + K}{2}, -N_1 - N_2; 1 - e^{-i2\theta}\right) e^{i\theta(N_2 + K/2)}. \end{cases} \tag{6.7}$$

7. ОПЕРАТОР БАРГМАНА — МОШИНСКОГО

Под оператором Баргмана — Мошинского (БМ) будем понимать скалярную свертку генераторов, определяемую равенством:

$$\Omega = L_i A_{ij} L_j, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{L}$ — оператор полного момента, т.е. сумма моментов двух подсистем

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}^u + \mathbf{l}^v, \quad \text{а} \quad A_{ij} = u_i \nabla_j^u + v_i \nabla_j^v, \tag{7.2}$$

где ∇ — оператор набла. В дальнейшем в определении оператора БМ будут сделаны некоторые уточнения для того, чтобы привести его в соответствие с аналогичным определением, используемым в книге [15].

Подставляя (7.2) в (7.1) и учитывая, что

$$(\mathbf{l}^u \cdot \mathbf{u}) \equiv 0, \quad (\mathbf{l}^v \cdot \mathbf{v}) \equiv 0, \quad (\nabla^u \cdot \mathbf{l}^u) \equiv 0 \quad \text{и} \quad (\nabla^v \cdot \mathbf{l}^v) \equiv 0, \tag{7.3}$$

получим $\Omega = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{l}^v)(\mathbf{l}^v \cdot \nabla^u) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}^u)(\mathbf{l}^u \cdot \nabla^v)$.

Принимая во внимание тождества (7.3), операторы $\mathbf{l}^u$ и $\mathbf{l}^v$ в правой части данного равенства можно заменить оператором полного момента $\mathbf{L}$:

$$\Omega = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{L} \cdot \nabla^u) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{L} \cdot \nabla^v). \tag{7.4}$$

Перепишем (7.4), сделав подстановку $\mathbf{L} = i\mathbf{M}$:

$$-\Omega = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{M})(\mathbf{M} \cdot \nabla^u) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{M})(\mathbf{M} \cdot \nabla^v). \tag{7.5}$$

Выразим скалярные произведения в последнем равенстве через компоненты векторов во внутренней системе координат:

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{M}) = u\cos\frac{\theta}{2}M_1 - u\sin\frac{\theta}{2}M_2,$$

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{M}) = v\cos\frac{\theta}{2}M_1 + v\sin\frac{\theta}{2}M_2,$$

$$(\mathbf{M}\cdot\nabla^u) = M_1\frac{\partial}{\partial\xi_1} + M_2\frac{\partial}{\partial\xi_2} + M_3\frac{\partial}{\partial\xi_3} + \delta, \qquad (7.5')$$

$$(\mathbf{M}\cdot\nabla^v) = M_1\frac{\partial}{\partial\eta_1} + M_2\frac{\partial}{\partial\eta_2} + M_3\frac{\partial}{\partial\eta_3} + \delta.$$

Наличие добавочных слагаемых δ в последних двух равенствах связано с тем, что операторы **M** не коммутируют с матрицами преобразования к внутренней системе координат. В промежуточных выкладках эти слагаемые пока опустим, их вклад будет учтен ниже при записи окончательного выражения для оператора БМ.

Подставим в (7.5′) значения производных $\frac{\partial}{\partial\xi_i}$ и $\frac{\partial}{\partial\eta_i}$ в переменных $\{\alpha, \beta, \gamma, \theta, u, v\}$ (3.4″) и перепишем (7.5) в следующем виде:

$$\Omega = -\left\{ (n_1+n_2)\left(\cos^2\frac{\theta}{2}M_1^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}M_2^2\right) + \right.$$
$$+\frac{1}{2}(n_2-n_1)\sin\theta\,(M_1M_2+M_2M_1) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(M_2^2-M_1^2) +$$
$$\left. +\left(\sin^2\frac{\theta}{2}M_2M_1M_3 - \cos^2\frac{\theta}{2}M_1M_2M_3\right) + M_1M_3M_2 - M_2M_3M_1\right\}. \qquad (7.6)$$

Вновь сделаем замену $\mathbf{M} = -i\mathbf{L}$, $\cos\theta = t$, и вместо операторов L_1, L_2, L_3 введем операторы $L_+ = L_1 + iL_2$, $L_- = L_1 - iL_2$, $L_0 = L_3$. Принимая во внимание известные коммутационные соотношения для проекций момента на внутренние оси: $[L_i, L_j] = -i\varepsilon_{ijk}L_k$, получим

$$\Omega = (n_1+n_2)\left[\frac{1}{4}t(L_+^2+L_-^2) + \frac{1}{2}\mathbf{L}^2 - L_0^2)\right] +$$
$$+ i\frac{1}{4}(n_1-n_2)\sqrt{1-t^2}\,(L_+^2-L_-^2) + \frac{1}{2}(1-t^2)\frac{\partial}{\partial t}(L_+^2-L_-^2) +$$
$$+\frac{1}{4}\left[t(L_+^2-L_-^2)+2L_0\right]L_0 + \mathbf{L}^2 - 2L_0^2 + \gamma. \qquad (7.7)$$

В правой части последнего равенства γ представляет собой поправку, приводящую (7.7) в соответствие с оператором БМ в книге [15]. При непосредственном нахождении этой поправки нужно учесть, что в [15] след (шпур) генераторов A_{ij} равен нулю, и в операторе БМ несколько иначе, чем в (2.1), записаны сомножители: $\Omega = A_{ij}\, L_i\, L_j$. Кроме того, нужно учесть поправку δ, упоминавшуюся выше.

Однако γ можно найти иначе (поскольку есть все основания считать, что она имеет простой вид), а именно подбором такого γ, при котором собственные значения оператора (7.8) при нижайших значениях L совпадают с соответствующими собственными значениями оператора БМ в [15].

Окончательное выражение оператора Баргмана — Мошинского представим в виде суммы трех операторов: $\Omega = R_+ + R_- + R_0$, где

$$R_+ = \frac{1}{4}\left[(n_1 + n_2)t + i(n_1 - n_2)\sqrt{1 - t^2} + 2(1 - t^2)\frac{\partial}{\partial t} \right] L_+^2 + \frac{1}{4}\, tL_+^2 L_0,$$

$$R_- = \frac{1}{4}\left[(n_1 + n_2)t - i(n_1 - n_2)\sqrt{1 - t^2} + 2(1 - t^2)\frac{\partial}{\partial t} \right] L_-^2 - \frac{1}{4}\, tL_-^2 L_0,$$

$$R_0 = \left[\frac{1}{6}(n_1 + n_2) + \frac{1}{2} \right] \mathbf{L}^2 - \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + 3)\, L_0^2. \tag{7.8}$$

Базисные функции, на которых в дальнейшем будут вычисляться матричные элементы операторов, являются собственными функциями оператора Казимира и представляют собой произведения D-функций Вигнера и функции $\varphi_K(t)$, зависящие только от переменной t (см. (6.7)). Функции $\varphi_K(t)\, D^L_{MK}$ являются собственными функциями оператора R_0:

$$R_0 \varphi_K(t) D^L_{MK} = \left\{ \left[\frac{1}{6}(n_1 + n_2) + \frac{1}{2} \right] L(L + 1) - \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + 3)K^2 \right] \varphi_K(t)\, D^L_{MK}.$$

Операторы R_+ и R_-, при их действии на функции $\varphi_K(t)\, D^L_{MK}$, изменяют квантовое число K на две единицы:

$$R_+\, \varphi_K(t)\, D^L_{MK} = \text{const}\; \varphi_{K-2}(t)\, D^L_{MK-2},$$

$$R_-\, \varphi_K(t)\, D^L_{MK} = \text{const}\; \varphi_{K+2}(t)\, D^L_{MK+2}. \tag{7.9}$$

8. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРА БАРГМАНА — МОШИНСКОГО

Вычислим матричные элементы оператора Баргмана — Мошинского на функциях $\varphi_K(t)\, D^L_{MK}$. Учитывая, что D-функции являются собственными функциями оператора L_0, операторы $R_\pm$ в (7.9) можно записать в факторизованном виде:

$$R_+ = \frac{1}{4} L_+^2 \tilde{R}_+, \quad R_- = \frac{1}{4} L_-^2 \tilde{R}_-,$$

где

$$\tilde{R}_+ = (n_1 + n_2 + K)\, t + i(n_2 - n_1) \sqrt{1 - t^2} + 2(1 - t^2) \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\tilde{R}_- = (n_1 + n_2 - K)\, t - i(n_2 - n_1) \sqrt{1 - t^2} + 2(1 - t^2) \frac{\partial}{\partial t}$$

или

$$\tilde{R}_+ = (n_1 + n_2 + K) \cos\theta - \sin\theta \left[i(n_1 - n_2) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \right],$$

$$\tilde{R}_- = (n_1 + n_2 - K) \cos\theta + \sin\theta \left[i(n_1 - n_2) - 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \right].$$

В дальнейшем функции, зависящие только от переменной t и отвечающие определенному значению K, там, где это целесообразно, будем обозначать кратко $|K\rangle$, а D-функции — $|LK\rangle$.

Так как операторы $\tilde{R}_+$ и $\tilde{R}_-$ при действии на функции $|K\rangle$ изменяют значение параметра K на две единицы:

$$\tilde{R}_+ |K\rangle = c_1 |K - 2\rangle,$$

$$\tilde{R}_- |K\rangle = c_2 |K + 2\rangle, \tag{8.1}$$

то для каждого данного значения квантового числа L совокупность матричных элементов оператора БМ образует (при $L \le \max\{\lambda, \mu\}$) трехдиагональную матрицу размерности $(L + 1) \times (L + 1)$, где на главной диагонали находятся матричные элементы оператора R_0, а на двух побочных диагоналях — матричные элементы операторов R_+ и R_-. Очевидно при этом, что отличные от нуля матричные элементы последних двух операторов можно представить в факторизованном виде:

$$\langle R_+ \rangle = \frac{1}{4} \langle LK - 2 | L_+^2 | LK \rangle \langle K - 2 | \tilde{R}_+ | K \rangle,$$

$$\langle R_- \rangle = \frac{1}{4} \langle LK + 2 | L_-^2 | LK \rangle \langle K + 2 | \tilde{R}_- | K \rangle. \tag{8.2}$$

Вычисление матричных элементов операторов $\tilde{R}_+$ и $\tilde{R}_-$ сводится к определению коэффициентов c_1 и c_2 в соотношениях (8.1). Для нахождения последних достаточно сравнить первые члены разложения в ряд по степеням

θ в левой и правой частях равенств (8.1). Учитывая, что при малых значениях θ

$$\tilde{R}_+ = (n_1 + n_2 + K) - 2\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \ldots,$$

$$\tilde{R}_- = (n_1 + n_2 - K) - 2\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \ldots,$$

из (8.1) получим

$$\left[(n_1 + n_2 + K) - 2\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right] \theta^m = c_1\theta^m,$$

$$\left[(n_1 + n_2 - K) - 2\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right] \theta^m = c_2\theta^m.$$

Отсюда следует

$$\langle K - 2 | \tilde{R}_+ | K \rangle = n_1 + n_2 + K - 2m = N_1 + N_2 + K = \lambda + K,$$

$$\langle K + 2 | \tilde{R}_- | K \rangle = n_1 + n_2 - K - 2m = N_1 + N_2 - K = \lambda - K.$$

Принимая во внимание известные значения матричных элементов лестничных операторов $L_\pm$, запишем:

$$\langle LK - 2 | L_+^2 | LK \rangle = [(L + K)\,(L + K - 1)\,(L - K + 1)\,(L - K + 2)]^{1/2},$$

$$\langle LK + 2 | L_-^2 | LK \rangle = [(L - K)\,(L - K - 1)\,(L + K + 1)\,(L + K + 2)]^{1/2}.$$

Диагональные матричные элементы оператора БМ находятся просто, так как функции $\varphi_K(t)\, D^L_{MK}$ являются собственными функциями оператора R_0. Запишем окончательные выражения для матричных элементов оператора Баргмана — Мошинского Ω:

$$\langle K' | \Omega | K \rangle =$$

$$= \begin{cases} \langle K + 2 | R_- | K \rangle = \dfrac{1}{4}\,(\lambda - K)\,[(L - K)(L - K - 1)(L + K + 1)(L+K + 2)]^{1/2} \\ \langle K | R_0 | K \rangle = \left[\dfrac{1}{6}\,(\lambda + 2\mu) + \dfrac{1}{2} \right] L(L + 1) - \dfrac{1}{2}\,(\lambda + 2\mu + 3)\,K^2 \\ \langle K - 2 | R_+ | K \rangle = \dfrac{1}{4}\,(\lambda + K)\,[(L + K)(L + K - 1)(L - K + 1)(L-K + 2)]^{1/2}. \end{cases}$$

В качестве примера приведем табл.2 матричных элементов оператора Ω для нечетных значений λ и момента $L = 1$. В этом случае K может принимать значения 1 и -1.

Таблица 2. Матричные элементы оператора Ω для момента $L = 1$

	$K = 1$	$K = -1$
$K' = 1$	$-\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\right]$	$\frac{1}{2}(\lambda + 1)$
$K' = -1$	$\frac{1}{2}(\lambda + 1)$	$-\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\right]$

Приведем также в табл. 3 матричные элементы оператора Ω для четных значений λ и момента $L = 2$. В этом случае K может принимать значения 2, 0 и -2.

Таблица 3. Матричные элементы оператора Ω для момента $L = 2$ (λ четные)

	$K = 2$	$K = 0$	$K = -2$
$K' = 2$	$-(\lambda + 2\mu + 3)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\,\lambda$	0
$K' = 0$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\,(\lambda + 2)$	$\lambda + 2\mu + 3$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\,(\lambda + 2)$
$K' = -2$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}\,\lambda$	$-(\lambda + 2\mu + 3)$

9. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА БАРГМАНА — МОШИНСКОГО

Процедуру нахождения собственных значений и собственных функций оператора БМ подробно рассмотрим на частном примере, когда $L = 2$, при $L \le \max\{\lambda, \mu\}$. При четном λ собственную функцию оператора БМ следует искать в виде линейной суперпозиции функций со всеми допустимыми значениями числа K:

$$|\psi\rangle = C_0\,|K = 0\rangle\, D^2_{M0} + C_2\,|K = 2\rangle\, D^2_{M2} + C_{-2}\,|K = -2\rangle\, D^2_{M-2}, \quad (9.1)$$

при этом задача сводится к нахождению коэффициентов суперпозиции C_0, C_2, C_{-2}. Так как матричные элементы оператора БМ на функциях с заданными значениями K найдены (см. табл.3), то собственные значения и собственные функции находятся обычным методом диагонализации матрицы.

Обозначим ω собственные значения оператора БМ и запишем секулярное уравнение для нахождения этих величин:

$$\begin{vmatrix} -(\lambda+\mu+3)-\omega & \sqrt{\frac{3}{2}}\,\lambda & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,(\lambda+2) & (\lambda+2\mu+3)-\omega & \sqrt{\frac{3}{2}}\,(\lambda+2) \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}\,\lambda & -(\lambda+\mu+3)-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Алгебраическое уравнение третьей степени, представленное в виде определителя, факторизуется, и вследствие этого его корни находятся просто:

$$\omega_1 = -(\lambda+\mu+3); \qquad \omega_{2,3} = \pm\sqrt{(2\lambda+\mu+3)^2 + 3\mu(\mu+2)}\,.$$

Подставляя, как обычно, ω_i в систему однородных уравнений, находим искомые коэффициенты C_0, C_2, C_{-2}:

$$C_2 = C_{-2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)+\omega_i}\,C_0; \qquad \omega_i = \omega_{2,3}.$$

В том случае, если $\omega_i = \omega_1 = -(\lambda+2\mu+3)$, то $C_0 = 0$ и $C_{-2} = -C_2$. В дальнейшем, если $C_0 = 0$ не равно нулю, то функции (9.1) будем нормировать так, чтобы $C = 1$. Таким образом, собственные функции оператора БМ имеют следующий вид:

$$|\psi\rangle_1 = |K=2\rangle\,D^2_{M2} - |K=-2\rangle\,D^2_{M-2},$$

$$|\psi\rangle_{2,3} = |K=0\rangle\,D^2_{M0} + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)+\omega_{2,3}}\,[\,|K=2\rangle\,D^2_{M2} + |K=-2\rangle\,D^2_{M-2}].$$

Перепишем выражение в правой части равенства через функции

$$D^2_{M2+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(D^2_{M2} + D^2_{M-2}) \quad \text{и} \quad D^2_{M2-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(D^2_{M2} - D^2_{M-2}):$$

$$|\psi\rangle_1 = |K_{2-}\rangle D^2_{M2+} + |K_{2+}\rangle D^2_{M2-},$$

$$|\psi_{2,3}\rangle = |K=0\rangle D^2_{M0} + \sqrt{3}\,\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu+3)+\omega_{2,3}}\,[\,|K_{2+}\rangle D^2_{M2+} + |K_{2-}\rangle D^2_{M2-}].$$

В последнем равенстве введены следующие обозначения:

$$|K_{2+}\rangle = \frac{1}{2}\,(|K=2\rangle + |K=-2\rangle) \;\; \text{и} \;\; |K_{2-}\rangle = \frac{1}{2}\,(|K=2\rangle - |K=-2\rangle).$$

При $\mu = 0$ и четных λ волновые функции имеют следующий вид:

$$|\psi\rangle_2 = |K=0\rangle\, D^2_{M0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\lambda}{(\lambda+2)}\,[\,|K_{2+}\rangle\, D^2_{M2+} + |K_{2-}\rangle\, D^2_{M2-}],$$

$$|\psi\rangle_3 = |K=0\rangle\, D^2_{M0} - \sqrt{3}\,[\,|K_{2+}\rangle\, D^2_{M2+} + |K_{2-}\rangle\, D^2_{M2-}].$$

Если λ нечетное (т.е. если n_1 и n_2 — числа противоположной четности), то совокупность матричных элементов оператора БМ для заданного четного значения момента L (это может быть только в том случае, если $\mu \neq 0$) образует матрицу размерности $L \times L$. При $L = 2$ величина K может принимать только два значения: $K = \pm 1$. В табл. 4 приведены матричные элементы.

Таблица. 4 Матричные элементы оператора Ω для $L = 2$ (λ нечетные, $\mu \neq 0$)

	$K = 1$	$K = -1$
$K' = 1$	$\frac{1}{2}\,(\lambda + 2\mu + 3)$	$\frac{3}{2}\,(\lambda + 1)$
$K' = -1$	$\frac{3}{2}\,(\lambda + 1)$	$\frac{1}{2}\,(\lambda + 2\mu + 3)$

Решая секулярное уравнение, найдем собственные значения оператора Баргмана — Мошинского:

$$\omega_1 = 2\lambda + \mu + 3, \qquad \omega_2 = -\lambda + \mu.$$

Соответствующие собственные функции оператора БМ в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$|\psi\rangle_1 = |K=1\rangle\, D^2_{M1} + |K=-1\rangle\, D^2_{M-1} = \sqrt{2}\,(|K_{1+}\rangle\, D^2_{M1+} + |K_{1-}\rangle\, D^2_{M1-},$$

$$|\psi\rangle_2 = |K=1\rangle\, D^2_{M1} - |K=-1\rangle\, D^2_{M-1} = \sqrt{2}\,(|K_{1+}\rangle\, D^2_{M1-} + |K_{1-}\rangle\, D^2_{M1+}. \tag{9.2}$$

Как видно из равенств (9.2), коэффициенты суперпозиции в рассматриваемом частном случае не зависят от λ и μ.

Функции $|K=0\rangle$, $|K_{2+}\rangle$, $|K_{2-}\rangle$, $|K_{1+}\rangle$ и $|K_{1-}\rangle$ для каждых конкретных значений N_1, N_2, m, K можно легко записать в явном виде, используя выражения (7.9). Приведем в табл.5 вид этих функций при нижайших значениях чисел N_1 и N_2. Так как все функции $|K\rangle$ с $m \neq 0$ содержат один и тот же множитель $(1 - t^2)^{m/2}$, то для краткости этот множитель при записи функций будем опускать. Учтем, что при четных λ четность чисел N_1 и N_2 одинакова, при нечетных — различна, поскольку эти числа связаны равенством $\lambda = N_1 + N_2$.

Таблица 5. Функции $|K = 0\rangle$, $|K_{2+}\rangle$, $|K_{2-}\rangle$, $|K_{1+}\rangle$ и $|K_{-1}\rangle$ для некоторых значений N_1 и N_2

	λ четное
N_1 четное $N_2 = 0$	$\vert K = 0\rangle = 1$; $\quad \vert K_{2+}\rangle = t$; $\quad \vert K_{2-}\rangle = i\sqrt{1 - t^2}$
$N_1 = 1$ $N_2 = 1$	$\vert K = 0\rangle = t \quad \vert K_{2+}\rangle = 1$; $\quad \vert K_{2-}\rangle = 0$
$N_1 = 2$ $N_2 = 2$	$\vert K = 0\rangle = \frac{1}{3}(1 + 2t^2)$; $\quad \vert K_{2+}\rangle = t$; $\quad \vert K_{2-}\rangle = 0$
$N_1 = 4$ $N_2 = 2$	$\vert K = 0\rangle = \frac{1}{5}(1 + 4t^2)$; $\quad \vert K_{2+}\rangle = \frac{11}{15}\, t\left(1 + \frac{4}{11}t^2\right)$; $\vert K_{2-}\rangle = -i\frac{1}{15}(1 + 4t^2)\sqrt{1 - t^2}$
$N_1 = 3$ $N_2 = 1$	$\vert K = 0\rangle = t \quad \vert K_{2+}\rangle = \frac{1}{2}(1 + t^2) \quad \vert K_{2-}\rangle = i\frac{1}{2}\, t\sqrt{1 - t^2}$
$N_1 = 3$ $N_2 = 3$	$\vert K = 0\rangle = \frac{3}{5}\, t\left(1 + \frac{2}{3}t^2\right) \quad \vert K_{2+}\rangle = \frac{1}{5}(1 + 4t^2) \quad \vert K_{2-}\rangle = 0$
	λ нечетное
N_1 нечетное $N_2 = 0$	$\vert K_{1+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + t}$; $\quad \vert K_{1-}\rangle = i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - t}$
$N_1 = 2$ $N_2 = 1$	$\vert K_{1+}\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 + 2t)\sqrt{1 + t}$; $\quad \vert K_{1-}\rangle = -i\frac{1}{3\sqrt{2}}(1 - 2t)\sqrt{1 - t}$;

Собственные значения и собственные функции оператора БМ для значений момента $L = 0$, 1, 2 и 3 приведены в табл.6.

Таблица 6. Собственные значения и собственные функции оператора Баргмана — Мошинского для значений момента $L = 0, 1, 2$ и 3

Момент	Собственные значения оператора БМ	Собственные функции оператора БМ
$L = 0$	$\omega = 0$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K = 0\rangle$
$L = 1$	$\omega = 1 + \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K = 0\rangle D^1_{M0}$
	$\omega = -\left[1 + \frac{1}{3}(2\lambda + \mu)\right]$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K_{1-}\rangle D^1_{M1+} + \lvert K_{1+}\rangle D^1_{M1-}$
	$\omega = \frac{1}{3}(\lambda - \mu)$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K_{1+}\rangle D^1_{M1+} + \lvert K_{1-}\rangle D^1_{M1-}$
$L = 2$	$\omega = 2\lambda + \mu + 3$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K_{1+}\rangle D^2_{M1+} + \lvert K_{1-}\rangle D^2_{M1-}$
	$\omega = -\lambda + \mu$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K_{1-}\rangle D^2_{M1+} + \lvert K_{1+}\rangle D^2_{M1-}$
	$\omega_1 = -(\lambda + 2\mu + 3)$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K_{2-}\rangle D^2_{M2+} + \lvert K_{2+}\rangle D^2_{M2-}$
	$\omega_{2,3} = \pm\sqrt{(2\lambda+\mu+3)^2+3\mu(\mu+2)}$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K = 0\rangle D^2_{M0} + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu + 3) + \omega_{2,3}} \times (\lvert K_{2+}\rangle D^2_{M2+} + \lvert K_{2-}\rangle D^2_{M2-})$
$L = 3$	$\omega_1 = 0$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K_{2-}\rangle D^3_{M2+} + \lvert K_{2+}\rangle D^3_{M2-}$
	$\omega_{2,3} = \lambda + 2\mu + 3 \pm \sqrt{(\lambda+2\mu+3)^2+15\lambda(\lambda+2)}$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K = 0\rangle D^3_{M0} + \frac{\lambda\sqrt{15}}{\omega_{2,3}}[\lvert K_{2+}\rangle D^3_{M2+} + \lvert K_{2-}\rangle D^3_{M2-}]$
	$\omega_{4,5} = -(2\lambda + \mu + 3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda+8\mu+9)^2+15(\lambda-1)(\lambda+3)}$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K_{1-}\rangle D^3_{M1+} + \lvert K_{1+}\rangle D^3_{M1-} + \frac{\sqrt{15}(\lambda - 1)}{5(\lambda + 2\mu + 3) + 2\omega_{4,5}} \times [\lvert K_{3-}\rangle D^3_{M3+} + \lvert K_{3+}\rangle D^3_{M3-}]$
	$\omega_{6,7} = \lambda - \mu \pm \frac{1}{2}\sqrt{(7\lambda+8\mu+15)^2+15(\lambda-1)(\lambda+3)}$	$\lvert\Psi\rangle = \lvert K_{1+}\rangle D^3_{M1+} + \lvert K_{1-}\rangle D^3_{M1-} + \frac{\sqrt{15}(\lambda - 1)}{5(\lambda + 2\mu + 3) + 2\omega_{6,7}} \times [\lvert K_{3+}\rangle D^3_{M3+} + \lvert K_{3-}\rangle D^3_{M3-}]$

В качестве примера приведем в табл.7 и 8 явный вид собственных функций оператора БМ в случае $L = 2$ и $L = 3$ для некоторых конкретных значений λ, μ. Заметим, что при $\mu = 0$ четность числа λ должна совпадать с четностью L.

Таблица 7. Собственные функции оператора Баргмана — Мошинского в явном виде для момента $L = 2$

Собственные значения оператора БМ	Значения μ, λ, N_1, N_2	Собственные функции оператора БМ при $L = 2$
$\omega = 2\lambda + 3$	$\mu = 0 \;\; N_2 = 0$ $\lambda = N_1$ четн.	$\|\Psi\rangle = D^2_{M0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{N_1}{N_1+2} \times$ $\times \left(tD^2_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\,D^2_{M2-} \right)$
$\omega = -(2\lambda + 3)$	$\mu = 0 \;\; N_2 = 0$ $\lambda = N_1$ четн.	$\|\Psi\rangle = D^2_{M0} - \sqrt{3}\left(tD^2_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\,D^2_{M2-} \right)$
$\omega = 2\lambda + 3 = 7$	$\mu = 0 \;\; N_1 = 1$ $\lambda = 2 \;\; N_2 = 1$	$\|\Psi\rangle = tD^2_{M0} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,D^2_{M2+}$
$\omega = -(2\lambda + 3) =$ $= -7$		$\|\Psi\rangle = tD^2_{M0} - \sqrt{3}\,D^2_{M2+}$
$\omega = 2\lambda + 3 = 11$	$\mu = 0 \;\; N_1 = 2$ $\lambda = 4 \;\; N_2 = 2$	$\|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(1 + 2t^2)\,D^2_{M0} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\,tD^2_{M2+}$
$\omega = -(2\lambda + 3) =$ $= -11$		$\|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(1 + 2t^2)\,D^2_{M0} - \sqrt{3}\,tD^2_{M2+}$
$\omega = 2\lambda + 3 = 15$	$\mu = 0 \;\; N_1 = 3$ $\lambda = 6 \;\; N_2 = 3$	$\|\Psi\rangle = \frac{3}{5}\,t\left(1 + \frac{2}{3}\,t^2\right)D^2_{M0} + \frac{\sqrt{3}}{5\cdot 4}(1 + 4t^2)D^2_{M2+}$
$\omega = -(2\lambda + 3) =$ $= -15$		$\|\Psi\rangle = \frac{3}{5}\,t\left(1 + \frac{2}{3}\,t^2\right)D^2_{M0} - \frac{\sqrt{3}}{5}(1 + 4t^2)D^2_{M2+}$
$\omega = -(\lambda + 2\mu +$ $+ 3) = -7$	$\mu = 1 \;\; N_1 = 1$ $\lambda = 2 \;\; N_2 = 1$	$\|\Psi\rangle = \sqrt{2}\,\sqrt{1-t^2}\,D^2_{M2-}$
	$\mu = 1 \;\; N_1 = 2$ $\lambda = 2 \;\; N_2 = 0$	$\|\Psi\rangle = \sqrt{2}[i(1-t^2)\,D^2_{M2+} + t\sqrt{1-t^2}\,D^2_{M2-}]$
$\omega = \sqrt{(2\lambda+\mu+3)^2 + 3\mu(\mu+2)} = \sqrt{105}$	$\mu = 2 \;\; N_1 = 1$ $\lambda = 2 \;\; N_2 = 1$	$\|\Psi\rangle = (1-t^2)\left[tD^2_{M0} + \frac{2\sqrt{3}}{9+\sqrt{105}}\,D^2_{M2+} \right]$
$\omega = -\sqrt{105}$		$\|\Psi\rangle = (1-t^2)\left[tD^2_{M0} + \frac{2\sqrt{3}}{9-\sqrt{105}}\,D^2_{M2+} \right]$
$\omega = \sqrt{105}$	$\mu = 2 \;\; N_1 = 2$ $\lambda = 2 \;\; N_2 = 0$	$\|\Psi\rangle = (1-t^2) \times$ $\times \left[D^2_{M0} + \frac{2\sqrt{3}}{9+\sqrt{105}}\,(tD^2_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\,D_{M2-}) \right]$
$\omega = -\sqrt{105}$		$\|\Psi\rangle = (1-t^2) \times$ $\times \left[D^2_{M0} + \frac{2\sqrt{3}}{9-\sqrt{105}}\,(tD^2_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\,D_{M2-}) \right]$

Таблица 8. Собственные функции оператора Баргмана — Мошинского в явном виде для $L = 3$

Собственные значения оператора БМ	Значения μ, λ, N_1, N_2	Собственные функции оператора БМ при $L = 3$
$\omega_2 = 20$	$\mu = 1\ N_2 = 1$ $\lambda = 2\ N_1 = 1$	$\lvert\Psi\rangle = \sqrt{1-t^2}\left[tD^3_{M0} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} D^3_{M2+} \right]$
	$\mu = 1\ N_2 = 0$ $\lambda = 2\ N_1 = 2$	$\lvert\Psi\rangle = \sqrt{1-t^2}\left\{ D^3_{M0} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\left[tD^3_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\, D^3_{M2-}\right]\right\}$
$\omega_3 = -6$	$\mu = 1\ N_2 = 1$ $\lambda = 2\ N_1 = 1$	$\lvert\Psi\rangle = \sqrt{1-t^2}\left[tD^3_{M0} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} D^3_{M2+} \right]$
	$\mu = 1\ N_2 = 0$ $\lambda = 2\ N_1 = 2$	$\lvert\Psi\rangle = \sqrt{1-t^2}\left\{ D^3_{M0} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\left[tD^3_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\, D^3_{M2-}\right]\right\}$
$\omega = 0$	$\mu = 1\ N_2 = 0$ $\lambda = 2\ N_1 = 2$	$\lvert\Psi\rangle = \sqrt{1-t^2}\left[tD^3_{M2-} + i\sqrt{1-t^2}\, D^3_{M2+} \right]$
	$\mu = 0\ N_2 = 1$ $\lambda = 2\ N_1 = 1$	$\lvert\Psi\rangle = \sqrt{1-t^2}\, D^3_{M2-}$
$\omega_4 = 0$	$\mu = 0\ N_2 = 0$ $\lambda = 3\ N_1 = 3$	$\lvert\Psi\rangle = \left\{ \sqrt{1+t}\, D^3_{M1-} + i\sqrt{1-t}\, D^3_{M1+} \right\} +$ $+ \frac{1}{\sqrt{15}} \{(2t-1)\sqrt{1+t}D^3_{M3-} + i(2t+1)\sqrt{1-t}D^3_{M3+}\}$
	$\mu = 0\ N_2 = 1$ $\lambda = 3\ N_1 = 2$	$\Psi = \frac{1}{3}\{(2t+1)\sqrt{1+t}D^3_{M1-} + i(2t-1)\sqrt{1-t}D^3_{M1+}\} +$ $+ \frac{1}{\sqrt{15}}\{\sqrt{1+t}\, D^3_{M3-} + i\sqrt{1-t}\, D^3_{M3+}\}$
$\omega_5 = -18$	$\mu = 0\ N_2 = 0$ $\lambda = 3\ N_1 = 3$	$\lvert\Psi\rangle = \left\{ \sqrt{1+t}\, D^3_{M1-} + i\sqrt{1-t}\, D^3_{M1+} \right\} +$ $+ \frac{\sqrt{15}}{3} \{(2t-1)\sqrt{1+t}D^3_{M3-} + i(2t+1)\sqrt{1-t}D^3_{M3+}\}$
	$\mu = 0\ N_2 = 1$ $\lambda = 3\ N_1 = 2$	$\Psi = \{(2t+1)\sqrt{1+t}D^3_{M1-} + i(2t-1)\sqrt{1-t}D^3_{M1+}\} -$ $- 15\{\sqrt{1+t}\, D^3_{M3-} + i\sqrt{1-t}\, D^3_{M3+}\}$
$\omega_{6,7} =$ $= 3(1 \pm \sqrt{41})$	$\mu = 0\ N_2 = 0$ $\lambda = 3\ N_1 = 3$	$\lvert\Psi\rangle = \{\sqrt{1+t}\, D^3_{M1+} + i\sqrt{1-t}\, D^3_{M1-}\} + \frac{\sqrt{15}}{3(6 \pm \sqrt{41})} \times$ $\times \{(2t-1)\sqrt{1+t}\, D^3_{M3+} + i(2t+1)\sqrt{1-t}\, D^3_{M3-}\}$
	$\mu = 0\ N_2 = 1$ $\lambda = 3\ N_1 = 2$	$\Psi = \{(2t+1)\sqrt{1+t}\, D^3_{M1+} + i(2t-1)\sqrt{1-t}\, D^3_{M1-}\} +$ $+ \frac{\sqrt{15}}{(6 \pm \sqrt{41})}\{\sqrt{1+t}\, D^3_{M3+} + i\sqrt{1-t}\, D^3_{M3-}\}$

10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОВОРОТЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ОТБОР «ЭЛЛИОТОВСКИХ СОСТОЯНИЙ»

Выбранная нами (из соображений удобства) в настоящей работе система координат отличается от системы, выбранной ранее Эллиотом [9]. Следовательно, для сопоставления полученных нами собственных функций оператора БМ с функциями Эллиота нужно предварительно преобразовать эти функции от одной системы координат к другой.

Переход от эллиотовской системы координат к нашей системе осуществляется преобразованием ортов, задающих направление осей, по схеме: $e_x \to e_z$, $e_y \to -e_y$, $e_z \to e_x$, с последующим поворотом вокруг новой оси z на угол $\theta/2$. Если матрицу, преобразующую декартовы компоненты вектора при переходе от «тильдованной» эллиотовской системы координат к нетильдованной, обозначить

$$\hat{D} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

то переход от тильдованной эллиотовской к нашей системе координат осуществляется матрицей

$$\hat{D}' = \begin{vmatrix} \alpha_{13}\cos\frac{\theta}{2} - \alpha_{12}\sin\frac{\theta}{2} & -\alpha_{13}\sin\frac{\theta}{2} - \alpha_{12}\cos\frac{\theta}{2} & \alpha_{13} \\ \alpha_{23}\cos\frac{\theta}{2} - \alpha_{22}\sin\frac{\theta}{2} & -\alpha_{23}\sin\frac{\theta}{2} - \alpha_{22}\cos\frac{\theta}{2} & \alpha_{23} \\ \alpha_{33}\cos\frac{\theta}{2} - \alpha_{32}\sin\frac{\theta}{2} & -\alpha_{33}\sin\frac{\theta}{2} - \alpha_{32}\cos\frac{\theta}{2} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Переход от нетильдованной эллиотовской системы к нашей системе координат можно задать также тремя углами Эйлера $\alpha = \pi$, $\beta = -\frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\theta}{2}$ и, следовательно, преобразование состояний с определенным моментом L при этом будет осуществляться при помощи функций Вигнера $D^L\left(\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}\right)$.

Рассмотрим несколько конкретных примеров преобразования эллиотовских функций при переходе от исходной (эллиотовской) системы координат к нашей системе.

Пример 1. Пусть $(\lambda, \mu) = (\lambda, 0)$ и $\lambda = N_1$, $N_2 = 0$. Тогда интеграл перекрытия $(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^{n_1}(\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{v}})^{n_2}$ при его представлении в виде суперпозиции выражений с определенным значением квантовых чисел (λ, μ) будет содержать единственное слагаемое $(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^{N_1}$. Так как $(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^{N_1} = (\cos\beta)^{N_1}$ не зависит от углов α и γ, то его можно представить в виде суммы D-функций Вигнера с нулевыми значениями проекций момента:

$$(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^{N_1} = \sum C_L\, D^L_{00}.$$

Представляя D^L_{00} в виде суммы произведений тильдованных и нетильдованных состояний: $D^L_{00} = \sum\limits_M D^{*L}_{M0}(\tilde{\Omega})\, D^L_{M0}(\Omega)$, приходим к выводу, что искомая эллиотовская функция с точностью до нормировочного множителя равна $D^L_{M0}(\Omega)$.

Преобразование этой функции к нашей системе координат осуществляется по схеме:

$$D^L_{M0}(\Omega) = \langle LM\,|\,\hat{D}(\alpha,\beta,\gamma)\,|\,L0\rangle \to \langle LM\,|\,\hat{D}(\alpha,\beta,\gamma)\, D^L\!\left(\pi,-\frac{\pi}{2},\frac{\theta}{2}\right)|\,L0\rangle =$$

$$= \sum_K D^L_{MK}(\alpha,\beta,\gamma)\, D^L_{K0}\!\left(\pi,-\frac{\pi}{2},\frac{\theta}{2}\right). \qquad (10.1)$$

При $L = 1$ это преобразование имеет вид

$$D^1_{M0}(\Omega) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\theta/2} D^1_{M1}(\Omega) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\theta/2} D^1_{M-1}(\Omega) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\sqrt{1+t}\; D^1_{M1-}(\Omega) + i\sqrt{1-t}\; D^1_{M1+}(\Omega)].$$

Правая часть последнего равенства совпадает с одной из функций, приведенных выше в табл.8.

Пример 2. Пусть $L = 2$, $N_2 = 0$, $\mu = 0$ и λ — четное. Тогда соответствующее преобразование эллиотовской функции осуществляется по схеме $D^2_{00} = \sum\limits_M D^{*2}_{M0}(\tilde{\Omega})\, D^2_{M0}(\Omega)$:

$$D^2_{M0}(\Omega) \to \sum_K D^2_{MK}(\alpha,\beta,\gamma)\, D^2_{K0}\!\left(\pi,-\frac{\pi}{2},\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\{D^2_{M0} - \sqrt{3}\,[tD^2_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\,D^2_{M2-}]\}. \qquad (10.2)$$

Полученная функция также совпадает с одной из функций из табл.8.

Пример 3. Запишем пару функций с $L = 2$, $\lambda = \mu$, заданных в эллиотовской системе координат:

$$\Psi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} D^2_{M0} - \frac{1}{2} D^2_{M2+}, \qquad \Psi_2 = \frac{1}{2} D^2_{M0} + \frac{\sqrt{3}}{2} D^2_{M2+}.$$

При переходе к нашей системе координат D^2_{M0} преобразуется в соответствии с (10.2), а преобразование D^2_{M2+} можно найти, пользуясь общим правилом (10.1):

$$D^2_{M2+} = D^2_{M2} + D^2_{M\,-2} \to \sqrt{\frac{3}{2}}\, D^2_{M0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,[tD^2_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\,D^2_{M2-}].$$

Следовательно, функции Ψ_1 и Ψ_2 преобразуются к виду

$$\Psi_1 \to \Psi_1' = -\frac{\sqrt{3}}{2} D^2_{M0} + \frac{1}{2}\,[tD^2_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\,D^2_{M2-}],$$

$$\Psi_2 \to \Psi_2' = \frac{1}{2} D^2_{M0} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,[tD^2_{M2+} + i\sqrt{1-t^2}\,D^2_{M2-}].$$

Преобразование системы координат без поворота на угол $\frac{\theta}{2}$ равнозначно преобразованию ортов

$$\mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \to -\,\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3 \to \mathbf{e}_1. \tag{10.3}$$

При этом функции Ψ_1 и Ψ_2 в новой системе координат запишутся в виде

$$\Psi_1 \to \Psi_1'' = -\left[\frac{\sqrt{3}}{2} D^2_{M0} - \frac{1}{2} D^2_{M2+}\right] = -\,\Psi_1,$$

$$\Psi_2 \to \Psi_2'' = \frac{1}{2} D^2_{M0} + \frac{\sqrt{3}}{2} D^2_{M2+} = \Psi_2.$$

Поясним полученный результат. При $\lambda = \mu$ выражение $\alpha^{\lambda}_{33}\,\alpha^{\mu}_{11}$ инвариантно относительно преобразования (10.3). Поскольку $\alpha^{\lambda}_{33}\,\alpha^{\mu}_{11}$ раскладывается в ряд, каждый член которого представляет собой произведение функции типа Ψ_1 или Ψ_2 на такие же функции (комплексно-сопряженные) тильдованных переменных, то инвариантность левой части равенства влечет за собой инвариантность его правой части. Следовательно, при преобразовании координат (10.3) функции Ψ_1 и Ψ_2 не изменяются. При этом, однако, допускается изменение знака функции, вследствие бинарности указанного разложения.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, задачу построения базисных функций модели двух ротаторов из произведений одночастичных функций гармонического осциллятора удается довести до конца и в пространстве Фока — Баргмана представить эти функции в явном виде, выразив их через гипергеометрические функции, сферические функции Вигнера и собственные векторы матрицы оператора Баргмана — Мошинского. Вычисление матричных элементов различных операторов в пространстве Фока — Баргмана сводится к простой рекуррентной процедуре для гипергеометрических функций и функций Вигнера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lo Iudice, Palumbo F.** — Phys. Rev. Lett., 1978, vol.41, p.1046.
2. **Lo Iudice, Palumbo F.** — Nucl. Phys., 1979, vol.A326, p.193.
3. **De Franceschi G., Palumbo F.** — Phys. Rev., 1984, vol.C29, p.1496.
4. **Hilton R.R.** — Z. Phys., 1984, vol.A316, No.1, p.121.
5. **Михайлов И.Н., Юлдашбаева Э.Х., Бриансон Ш.** — ЯФ, 1987, т.46, с.1055; Препринт ОИЯИ Р4-86-570, Дубна, 1986.
6. **Draayer J.P., Weeks K.J.** — Ann. Phys., 1984, vol.156, p.41.
7. **Castanos O., Draayer J.P., Leschber Y.** — Ann. Phys., 1987, vol.180, p.290.
8. **Филиппов Г.Ф., Авраменко В.И.** — ЯФ, 1977, т.37, с.597.
9. **Elliott J.P.** — Proc. Roy. Soc., 1958, vol.245, p.128,562.
10. **Bargman V., Moshinsky M.** — Nucl. Phys., 1960, vol.18, p.697.
11. **Переломов А.М.** — Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
12. **Филиппов Г.Ф., Василевский В.С., Чоповский Л.Л.** — ЭЧАЯ, 1984, т.15, вып.6, с.1338.
13. **Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.** — Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
14. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** — Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 1965, с.349,1338.
15. **Филиппов Г.Ф., Овчаренко В.И., Смирнов Ю.Ф.** — Микроскопическая теория коллективных возбуждений атомных ядер. Киев: Наукова думка, 1981.