«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1996, ТОМ 27, ВЫП.5

УДК 531.145

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ РИМАНОВОМ МИРЕ

Н.С.Шавохина

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре рассматривается спинорное поле в четырехмерном римановом мире событий. Это поле подчиняется уравнению Дирака — Фока — Иваненко. Затем формулируются принципы квантования спинорного поля в римановом мире, которые в частном случае плоского мира эквивалентны каноническим правилам квантования. Сформулированные принципы апробируются на примере мира де Ситтера. Изучение квантовой теории поля в мире де Ситтера интересно потому, что оно само собой приводит к методу инвариантного ящика для плоского мира. Изучение же квантовой теории спинорного поля в произвольно заданном римановом мире позволяет учесть влияние внешнего гравитационного поля на квантованное спинорное поле.

The review deals with the spinor field in the four-dimensional Riemannian space-time. The field obeys the Dirac-Fock-Ivanenko equation. Principles of quantization of the spinor field in the Riemannian space-time are formulated which in a particular case of the plane space-time are equivalent to the canonical rules of quantization. The formulated principles are exemplified by the De Sitter space-time. The study of quantum field theory in the De Sitter space-time is interesting because it itself leads to a method of an invariant well for plane space-time. However, the study of the quantum spinor field theory in an arbitrary Riemannian space-time allows one to take into account the influence of the external gravitational field on the quantized spinor field.

ВВЕДЕНИЕ

В литературе мы встречаем авторитетные указания на то, что с помощью идей общей теории относительности (ОТО) можно найти выход из трудностей теории квантованных полей и элементарных частиц [1—12]. Полное включение этих идей в теорию квантованных полей, очевидно, предполагает, наряду с другими полями, квантование гравитационного поля [13—18], но в столь общей постановке эта задача, по-видимому, далека от своего решения. Поэтому представляет немалый интерес эта задача хотя бы и в частной постановке, когда поля, отличные от гравитационного, рассматриваются в четырехмерном мире событий с фиксированной римановой геометрией. Согласно ОТО, это позволяет учитывать влияние внешнего гравитационного поля на поведение негравитационных полей.

С необходимостью учитывать влияние внешнего гравитационного поля на прочие поля впервые встретились в электродинамике при записи уравнений Максвелла в ОТО. При этом только потребовалось частные производные от бивектора электромагнитного поля заменить ковариантными [19]. С другими полями дело оказалось сложнее. Так, было установлено, что в уравнении Клейна — Фока для скалярного поля при переходе от плоской геометрии мира к римановой одной лишь замены частных производных ковариантными недостаточно: потребовалось еще добавить слагаемое, пропорциональное скалярной кривизне мира [20—22]. Напротив, в уравнении Дирака для спинорного поля при таком же переходе добавлять новое слагаемое не нужно, зато пришлось ввести новое геометрическое понятие — ковариантную производную спинорного поля, что само по себе является очень крупным достижением. Последнее принадлежит Фоку и Иваненко [23—30]. Ввиду важности полученного ими результата уравнение Дирака в условиях риманова мира мы будем называть уравнением Дирака — Фока — Иваненко (ДФИ). Сравнительный анализ описания спинорного и скалярного полей в римановом мире событий был сделан в работе [31]. В данном обзоре, напротив, все внимание будет сосредоточено на описании спинорного поля.

Спинорное поле, в самом деле, заслуживает особого внимания: оно содержит информацию о поведении электронов и нейтрино (и других частиц со спином 1/2) во внешнем гравитационном поле, а значит, и об их поведении в необозримых просторах Вселенной.

Уравнение ДФИ мы будем записывать в форме Картана. Согласно Картану [32], спинор имеет метрическую, а не аффинную природу, и поэтому «*...невозможно ввести спинорные поля в классическую технику исследования в римановой геометрии; то есть при произвольном выборе системы координат x^i пространства невозможно определить спинор при помощи конечного числа N составляющих u_α таким образом, чтобы u_α допускали ковариантные производные вида*

$$u_{\alpha,i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i} + \Lambda^\beta_{\alpha i}\, u_\beta,$$

где $\Lambda^\beta_{\alpha i}$ являются определенными функциями от x^h» [32, с.218]. (Выделено самим Картаном).

Для того чтобы ввести спинорное поле в риманов мир, необходимо, как это и было сделано Фоком и Иваненко, задать в мире поле метрически конгруэнтных касательных базисов. Переход от одного такого поля базисов к другому достигается обобщенным преобразованием Лоренца. Уравнение

Дирака — Фока — Иваненко инвариантно относительно обобщенных преобразований Лоренца. Последние привлекают большое внимание [33—35]. В теории же спинорного поля они просто необходимы.

Уравнение Дирака — Фока — Иваненко рассматривается в первой части обзора. Во второй части рассматриваются общие принципы квантовой теории спинорного поля в условиях римановой геометрии. В третьей, вспомогательной, части эти принципы реализуются на примере двумерных римановых миров в базисе F. В четвертой части эти принципы реализуются на примере двумерного сферического мира де Ситтера в базисе dX. Определение базисов F и dX дается попутно в тексте обзора.

Интересно, что в тридцатые годы с целью установить связь между теоретической физикой и математической теорией групп Дирак изучал, к чему приводит замена мира Пуанкаре — Минковского на мир де Ситтера. В работе [36] он предложил специальное уравнение для спинорного поля в мире де Ситтера. В работе [37] мне удалось доказать, что это уравнение Дирака является особой формой спинорного уравнения, написанного Фоком и Иваненко для римановых миров. Оно получается при переходе от базиса F к базису dX.

Мир де Ситтера заслуживает внимания потому, что, будучи пространством постоянной кривизны, он допускает десятипараметрическую группу изометрий. В пределе бесконечно большого радиуса кривизны эта группа переходит в группу Пуанкаре, сам же мир де Ситтера переходит в мир Пуанкаре — Минковского. Вместо интегралов Фурье, с которыми приходится иметь дело в плоском мире, в мире де Ситтера выступают ряды. В указанном выше пределе эти ряды переходят в интегралы. Таким образом, изучение квантовой теории поля оправдывается уже тем, что приводит нас к методу инвариантного ящика для плоского мира. Применительно к спинорному полю этот метод предложен в работе [38]. Квантовая теория спинорного поля в четырехмерном мире де Ситтера в базисе dX рассмотрена в работе [39].

Но и в общем случае риманова мира теория спинорного поля может иметь прикладной характер. Так, Виттен [40] применил уравнение ДФИ к доказательству теоремы о положительности энергии поля тяготения и материи. Багров и Обухов [41] решили проблему полной классификации пространственно-временных многообразий, в которых уравнение Дирака — Фока — Иваненко допускает полное разделение переменных. С начала шестидесятых годов спиноры и связанные с ними изотропные тетрады широко применяются к изучению ряда вопросов ОТО [42,43].

В обзоре нумерация формул внутри одной части идет независимо от других частей. При ссылке на формулу из другой части перед номером формулы ставится номер этой другой части. Таких ссылок немного. При ссылке же на формулу из одной и той же части номер части не ставится.

I. СПИНОРНОЕ ПОЛЕ В РИМАНОВОМ МИРЕ

1. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

В 1928 году П.А.М.Дирак [44] для описания поведения релятивистского электрона установил следующую систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка (см. также [29, с.87]):

$$
\begin{aligned}
&(E - mc^2)\,\psi_1 - c(p_x - ip_y)\,\psi_4 - cp_z\psi_3 = 0,\\
&(E - mc^2)\,\psi_2 - c(p_x + ip_y)\,\psi_3 + cp_z\psi_4 = 0,\\
&(E + mc^2)\,\psi_3 - c(p_x - ip_y)\,\psi_2 - cp_z\psi_1 = 0,\\
&(E + mc^2)\,\psi_4 - c(p_x + ip_y)\,\psi_1 + cp_z\psi_2 = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где c — скорость света, m — масса электрона, она же масса позитрона, $\hbar$ — постоянная Планка,

$$
E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}.
$$

Систему (1), следуя Дираку, записывают в матричном виде

$$
i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \tag{2}
$$

располагая искомые функции $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ в виде столбца ψ и приводя тем самым систему к канонической форме Шредингера, в соответствии с чем оператор $\hat{H}$ называют гамильтонианом (см. [45, с.136—139]):

$$
\hat{H} = \alpha_0 mc^2 + c\alpha_1 p_x + c\alpha_2 p_y + c\alpha_3 p_z, \tag{3}
$$

где α_ν — матрицы Дирака, равные

$$
\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad
\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}
$$

Эти матрицы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$
\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2e\delta_{\mu\nu}, \tag{5}
$$

где e — единичная матрица. Поэтому

$$\hat{H}\hat{H} = \{m^2c^4 + c^2(p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z)\}e, \tag{6}$$

так что гамильтониан $\hat{H}$ является квадратным корнем из оператора (6).

Разумеется, открытие системы уравнений (1) шло обратным путем. Было известно, что нерелятивистский электрон описывается двумя (а не четырьмя) функциями, поскольку спин электрона равен $\frac{1}{2}\hbar$, и что спин электрона описывается следующими матрицами:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Последние называются матрицами Паули [46, с.239—241]. Перестановочные соотношения для этих матриц имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 &= 2i\sigma_1, \\ \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3 &= 2i\sigma_2, \\ \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 &= 2i\sigma_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Для матриц Паули были известны и соотношения вида (5), т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_1 = \sigma_2\sigma_2 &= \sigma_3\sigma_3 = e, \\ \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_3 &= 0, \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

В отличие от (5) здесь e — единичная матрица, состоящая из двух строк и столбцов. Впрочем, дальше единичную матрицу любого порядка и любой единичный оператор будем обозначать, как правило, через 1. Равным образом нулевую матрицу любого порядка, любой нулевой оператор, а также и любой нулевой вектор будем обозначать через 0. При этом условии матрицы Дирака (4), например, как это замечено в [47, с.84], могут быть выражены через матрицы Паули (7) следующим образом:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поставив перед собой задачу составить для релятивистского электрона уравнение Шредингера, Дирак принял за основу уравнение Клейна — Фока

$$E^2\psi = \{m^2c^4 + c^2(p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z)\}\psi. \tag{10}$$

Поиск квадратного корня из оператора, стоящего в правой части уравнения (10), увенчался успехом. Составив с помощью матриц Паули матрицы (4), Дирак установил формулу (6), а затем и уравнение Шредингера (2), которое в развернутом виде записывается в виде системы уравнений (1).

Тот факт, что для описания релятивистского электрона потребовались не две, а четыре функции, привел Дирака к открытию позитрона.

Надо сказать, что выбор матриц α_v не является однозначным. Так, Фок [46, с.291—301] указал следующие две подстановки:

$$\eta_1 = \frac{\psi_1 + \psi_3}{\sqrt{2}}, \quad \eta_2 = \frac{\psi_2 + \psi_4}{\sqrt{2}},$$

$$\eta_3 = \frac{\psi_2 - \psi_4}{\sqrt{2}}, \quad \eta_4 = \frac{\psi_3 - \psi_1}{\sqrt{2}}; \qquad (11)$$

$$\zeta_1 = \frac{\psi_1 - i\psi_3}{\sqrt{2}}, \quad \zeta_2 = \frac{\psi_2 - i\psi_4}{\sqrt{2}},$$

$$\zeta_3 = \frac{-\psi_3 + i\psi_1}{\sqrt{2}}, \quad \zeta_4 = \frac{-\psi_4 + i\psi_2}{\sqrt{2}}. \qquad (12)$$

Они переводят уравнения Дирака (1), соответственно, в уравнения

$$-i\hbar c\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial x} - i\frac{\partial\eta_2}{\partial y} + \frac{\partial\eta_1}{\partial z}\right) - mc^2\eta_4 = i\hbar\frac{\partial\eta_1}{\partial t},$$

$$-i\hbar c\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + i\frac{\partial\eta_1}{\partial y} - \frac{\partial\eta_2}{\partial z}\right) + mc^2\eta_3 = i\hbar\frac{\partial\eta_2}{\partial t},$$

$$-i\hbar c\left(\frac{\partial\eta_4}{\partial x} + i\frac{\partial\eta_4}{\partial y} + \frac{\partial\eta_3}{\partial z}\right) + mc^2\eta_2 = i\hbar\frac{\partial\eta_3}{\partial t},$$

$$-i\hbar c\left(\frac{\partial\eta_3}{\partial x} - i\frac{\partial\eta_3}{\partial y} - \frac{\partial\eta_4}{\partial z}\right) - mc^2\eta_1 = i\hbar\frac{\partial\eta_4}{\partial t} \qquad (13)$$

и в уравнения

$$\frac{\partial\zeta_2}{\partial x} - \frac{\partial\zeta_4}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} + \frac{mc}{h}\zeta_2 = 0,$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_3}{\partial y} - \frac{\partial\zeta_2}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\zeta_2}{\partial t} - \frac{mc}{h}\zeta_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\zeta_4}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}+\frac{\partial\zeta_3}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\zeta_3}{\partial t}-\frac{mc}{\hbar}\zeta_4=0,$$
$$\frac{\partial\zeta_3}{\partial x}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}-\frac{\partial\zeta_4}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\zeta_4}{\partial t}+\frac{mc}{\hbar}\zeta_3=0. \tag{14}$$

Замечательно, что в последней системе уравнений, в отличие от систем (1) и (13), все коэффициенты — вещественные числа.

В свою очередь, Картан указал следующую подстановку:

$$\psi_1^c=\xi_0=\frac{\psi_2-\psi_4}{\sqrt{2}},\qquad \psi_2^c=\xi_{12}=\frac{\psi_1-\psi_3}{\sqrt{2}},$$
$$\psi_3^c=\xi_1=\frac{\psi_1+\psi_3}{\sqrt{2}},\qquad \psi_4^c=\xi_2=\frac{-\psi_2-\psi_4}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

(см. [32, с.196]). Она переводит систему уравнений (1) в систему уравнений

$$c(p_x+ip_y)\,\xi_1+(E+cp_z)\,\xi_2=-mc^2\xi_0,$$
$$(cp_z-E)\,\xi_1-c(p_x-ip_y)\,\xi_2=-mc^2\xi_{12},$$
$$c(p_x-ip_y)\,\xi_0+(E+cp_z)\,\xi_{12}=mc^2\xi_1,$$
$$(cp_z-E)\,\xi_0-c(p_x+ip_y)\,\xi_{12}=mc^2\xi_2. \tag{16}$$

Несколько неожиданная система индексов имеет глубокий смысл.

Для доказательства инвариантности уравнения Дирака (2) относительно группы Лоренца обычно вводят матрицы γ [45,47,48,49], и записывают уравнение в виде

$$\left(i\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}-m\right)\psi(x)=0 \tag{17}$$

(см. [49, с.50]), хотя можно обойтись и без этого [46, с.301—309]. Мы не будем останавливаться на этом, потому что для той же цели, а равным образом и для других, удобней записывать уравнение Дирака в форме Картана, указанной в книге [32, с.195].

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В ФОРМЕ КАРТАНА

Систему уравнений (16) Картан объединил в одном уравнении

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}-mcK\right)\xi=0, \tag{18}$$

что в более подробной записи, предложенной в [37], означает

$$\left(i\hbar \sum_{\nu=0}^{3} H^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + mcH^{4} \right) \xi = 0. \tag{19}$$

Здесь

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \tag{20}$$

матрицы H равны

$$H^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^4 = K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Мы будем употреблять также матрицы $H_0 = -H^0$, $H_a = H^a$, где $a = 1, 2, 3, 4$. Матрицы H удовлетворяют следующим соотношениям:

$$H^A H^B + H^B H^A = 2\eta^{AB}, \tag{22}$$

где $\eta^{00} = -1$, $\eta^{aa} = 1$, $\eta^{AB} = 0$ при $A \neq B$. Кроме того,

$$H_0 H_1 H_2 H_3 H_4 = i. \tag{23}$$

Мы встретились с индексами трех сортов. Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3. Большие латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, 4. Малые латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4. По одинаковым верхнему и нижнему индексам предполагается суммирование в пределах, указанных сортом этих индексов, например:

$$\sum_{\nu=0}^{3} H^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = H^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \quad \sum_{B=0}^{4} \eta^{AB} H_B = \eta^{AB} H_B = H^A. \tag{24}$$

С помощью тензора η^{AB} и обратного к нему тензора n_{AB} мы будем поднимать и опускать индексы. Смысл этого очевиден: $\eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}$ — метрическая форма четырехмерного, а $\eta_{AB}\, dx^A dx^B$ — метрическая же форма пятимерного мира Пуанкаре — Минковского.

Полагая

$$\Xi = \xi \exp\left\{ -\frac{imc}{\hbar} x^4 \right\}, \tag{25}$$

мы можем записать уравнение (19) в виде

$$H^A \frac{\partial}{\partial x^A} \Xi = 0. \tag{26}$$

Заметим, что слова «спин» и «спинор» английского происхождения: первоначальный смысл английского глагола «to spin» есть «вертеть веретено» (см. [46, с.239]). Так был наречен собственный момент количества движения электрона, не зависящий от его движения в пространстве. Затем это название отнесли к собственному моменту количества движения всякой элементарной частицы. Что до спиноров, то это такие геометрические объекты, поведение которых принципиально отличается от поведения векторов и тензоров. С ними физики встретились впервые после открытия Дирака. Вернее, они встретились с ними немного раньше, в теории Паули, но заинтересовались их поведением лишь после открытия Дирака, когда потребовалось понять инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований Лоренца. Однако на самом деле спиноры были открыты Картаном в 1913 году, о чем не только физики, но и алгебраисты, по-видимому, не ведали. Мы осмеливаемся так говорить, поскольку спиноры были переоткрыты Ван дер Варденом [50] после 1928 года. Поэтому лекции Картана по теории спиноров [32], написанные им в 1938 году, представляют исключительный интерес. Прочитав их, можно понять, сколь велика услуга, которую оказал нам П.А.Широков, переведя эту книгу на русский язык и снабдив ее замечательным комментарием. (Широков Петр Алексеевич (1895—1944), выдающийся геометр, профессор Казанского университета [51]).

А вот перестановочные соотношения типа (5), (9) и (22) были изучены еще раньше, в прошлом веке [52]. Порожденная ими алгебра в современной литературе называется алгеброй Клиффорда.

В алгебре Клиффорда с любым числом независимых элементов H, при любой сигнатуре метрического тензора и в любом базисе выполняются следующие соотношения:

$$H^\nu H^\alpha H^\mu = [H^\nu H^\alpha H^\mu] + \eta^{\alpha\mu} H^\nu + \eta^{\alpha\nu} H^\mu - \eta^{\mu\nu} H^\alpha, \tag{27}$$

$$\frac{1}{2}\{[H^\alpha H^\beta][H^\mu H^\nu] - [H^\mu H^\nu][H^\alpha H^\beta]\} =$$

$$= \eta^{\mu\beta}[H^\alpha H^\nu] - \eta^{\alpha\mu}[H^\beta H^\nu] + \eta^{\nu\beta}[H^\mu H^\alpha] - \eta^{\nu\alpha}[H^\mu H^\beta]. \tag{28}$$

Здесь квадратные скобки означают альтернированное произведение.

3. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА — ФОКА — ИВАНЕНКО

Переход к уравнению Дирака в римановом мире (то есть к уравнению Дирака — Фока — Иваненко) совершается следующим образом [37]. Метрическая форма $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ пространства-времени с помощью подходящим образом выбранных линейных дифференциальных форм

$$f^{\alpha} = f^{\alpha}_{\beta}(x) dx^{\beta} \tag{29}$$

может быть приведена к следующему каноническому виду:

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} f^{\alpha} f^{\beta}. \tag{30}$$

Разрешая уравнение (29) относительно dx, получаем

$$dx^\alpha = e^\alpha_\beta f^{\beta},$$

где $f^{\alpha}_{\sigma} e^{\sigma}_{\beta} = \delta^\alpha_\beta$, а следовательно, и $e^\alpha_\sigma f^\sigma_\beta = \delta^\alpha_\beta$, в свою очередь, δ^α_β — единичный аффинор. Дуальный к f^{α} базис состоит из векторных полей

$$e_\alpha = e^\beta_\alpha \partial_\beta. \tag{31}$$

Имеем также

$$\partial_\alpha = f^\beta_\alpha e_\beta.$$

Всякое ковекторное поле a_α можно задать как в координатном базисе $d = dx$, так и в ортогональном базисе f: $a_\alpha d^{\alpha} = A_\alpha f^{\alpha}$, откуда $A_\alpha = a_\beta e^\beta_\alpha$, $a_\alpha = A_\beta f^\beta_\alpha$.

Аналогично всякое векторное поле a^α можно задать как в координатном базисе $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$, так и в ортогональном базисе e: $a^\alpha \partial_\alpha = A^\alpha e_\alpha$, откуда $A^{\alpha} = a^\beta f^\alpha_\beta$, $a^\alpha = A^{\beta} e^\alpha_\beta$.

Ковариантный дифференциал векторного поля равен

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \omega^\alpha_\mu A^\mu, \tag{32}$$

а ковариантный дифференциал ковекторного поля равен

$$DA_\alpha = dA_\alpha - \omega^\mu_\alpha A_\mu, \tag{33}$$

где $\omega^\alpha_\mu = \omega^\alpha_{\beta\mu} f^{\beta}$, в свою очередь, $\omega^\alpha_{\beta\mu}$ — компоненты аффинной связности в ортогональном базисе, задаваемой метрикой (30). Отсюда получаются ковариантные производные вектора и ковектора:

$$D_\beta A^\alpha = e_\beta A^\alpha + \omega^\alpha_{\beta\mu} A^{\mu}, \tag{34}$$

$$D_\beta A_\alpha = e_\beta A_\alpha - \omega^\mu_{\beta\alpha} A_\mu. \tag{35}$$

Компоненты связности находятся из двух условий. Первое из них — отсутствие кручения. Для скалярной функции F это означает

$$D_\alpha e_\beta F = D_\beta e_\alpha F.$$

Отсюда следует равенство

$$\omega^\gamma_{\alpha\beta} - \omega^\gamma_{\beta\alpha} = C^\gamma_{\alpha\beta}, \tag{36}$$

где компоненты $C^\gamma_{\alpha\beta}$ определяются операцией Ли:

$$e_\alpha e_\beta - e_\beta e_\alpha = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma. \tag{37}$$

Они равны

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = e^\mu_\alpha e^\nu_\beta \left(\frac{\partial f^\gamma_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial f^\gamma_\nu}{\partial x^\mu} \right) = (e^\mu_\alpha e_\beta - e^\mu_\beta e_\alpha) f^\gamma_\mu. \tag{38}$$

Второе условие, определяющее компоненты связности, — сохранение метрического тензора при параллельном переносе:

$$D_\alpha \eta_{\beta\gamma} = -\omega^\mu_{\alpha\beta}\eta_{\mu\gamma} - \omega^\mu_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\mu} = 0. \tag{39}$$

Разрешая уравнения (36) и (39) относительно ω, находим

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2}(C_{\nu\beta\alpha} + C_{\nu\alpha\beta} - C_{\beta\alpha\nu}), \tag{40}$$

где обозначено

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \omega^\mu_{\alpha\beta}\eta_{\nu\mu}, \quad C_{\nu\beta\alpha} = C^\mu_{\alpha\beta}\eta_{\nu\mu}. \tag{41}$$

Подобно метрическому тензору, матрицы H при параллельном переносе не меняются. Поэтому для векторной матрицы $A = A^\alpha H_\alpha$ имеем

$$DA = dA + \omega^\alpha_\mu A^\mu H_\alpha = dA + \Omega A - A\Omega, \tag{42}$$

где

$$\Omega = \frac{1}{4}\omega_{\alpha\mu\nu} f^\nu H^\alpha H^\mu. \tag{43}$$

Так как для векторной матрицы согласно (42) с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка получилось равенство

$$DA - dA + A = (1 + \Omega) A (1 + \Omega)^{-1}, \tag{44}$$

то для спинора должно выполняться равенство

$$D\xi - d\xi + \xi = (1 + \Omega)\xi. \tag{45}$$

Следовательно, ковариантный дифференциал спинора ξ равен

$$D\xi = d\xi + \frac{1}{4}\omega_{\alpha\mu\nu} f^\nu H^\alpha H^\mu \xi, \tag{46}$$

а его ковариантная производная

$$D_\nu \xi = e_\nu \xi + \frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\mu\nu}\,H^\alpha H^\mu \xi. \tag{47}$$

Последнее заключение сделано на том основании, что если векторная матрица преобразуется по закону A в SAS^{-1}, то вслед за ней спинор преобразуется по закону ξ в $S\xi$.

Уравнение Дирака — Фока — Иваненко получается из уравнения (19) заменой частной производной спинора на ковариантную, так что оно выступает в следующем виде:

$$(i\hbar H^\mu D_\nu + mcH^4)\,\xi = 0. \tag{48}$$

Уравнение ДФИ, очевидно, можно записать в виде

$$H^\nu D_\nu \xi = \frac{imc}{\hbar} H^4 \xi. \tag{49}$$

Следовательно, для дираковски-сопряженного спинора

$$\bar\xi = \xi^+ H_0 \tag{50}$$

уравнение ДФИ принимает вид

$$D_\nu \bar\xi H^\nu = -\frac{imc}{\hbar}\,\bar\xi H^4, \tag{51}$$

где

$$D_\nu \bar\xi = e_\nu \bar\xi - \bar\xi\,\frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\mu\nu}\,H^\alpha H^\mu. \tag{52}$$

Наконец, заметим, что решение (40) находится с помощью равенства

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2}(\omega_{\nu\beta\alpha} + \omega_{\beta\nu\alpha}) + \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\nu\beta} + \omega_{\nu\alpha\beta}) - \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\beta\nu} + \omega_{\beta\alpha\nu}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\beta\nu} - \omega_{\alpha\nu\beta}) + \frac{1}{2}(\omega_{\nu\beta\alpha} - \omega_{\nu\alpha\beta}) - \frac{1}{2}(\omega_{\beta\nu\alpha} - \omega_{\beta\alpha\nu}).$$

4. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА — ФОКА — ИВАНЕНКО В БАЗИСЕ ЛАМЕ

Уравнение ДФИ заметно упрощается в случае ортогональных координат (если таковые имеются), когда можно построить базис Ламе, то есть положить $f^\alpha_\beta = h^\alpha \delta^\alpha_\beta$. Прибегая к формуле (27), получаем

$$\frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\mu\nu} H^\nu H^\alpha H^\mu = \frac{1}{4}\,\omega_{[\alpha\mu\nu]} H^\nu H^\alpha H^\mu + \frac{1}{2}\,\eta^{\alpha\nu}\omega_{\alpha\mu\nu} H^\mu.$$

Но

$$\omega_{[\alpha\mu\nu]} = \frac{1}{2} C_{[\alpha\mu\nu]}, \quad \eta^{\alpha\nu}\omega_{\alpha\mu\nu} = C^\alpha_{\alpha\mu},$$

а в базисе Ламе

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{h^{\alpha}h^{\beta}}\left[\delta^{\gamma}_{\alpha}\frac{\partial h^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \delta^{\gamma}_{\beta}\frac{\partial h^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right]$$

и, следовательно,

$$C_{[\alpha\mu\nu]} = 0, \qquad \frac{1}{2}C^{\alpha}_{\alpha\mu} = \frac{1}{\sqrt{hh^{\mu}}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\sqrt{\frac{h}{h^{\mu}}},$$

где $h = h^0h^1h^2h^3$. Таким образом, в базисе Ламе

$$\frac{1}{4}\omega_{\alpha\mu\nu}H^{\nu}H^{\alpha}H^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{3}\frac{H^{\mu}}{\sqrt{hh^{\mu}}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\sqrt{\frac{h}{h^{\mu}}} \tag{53}$$

и уравнение ДФИ в таком базисе записывается в виде

$$\sum_{\mu=0}^{3}\frac{H^{\mu}}{\sqrt{hh^{\mu}}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{\frac{h}{h^{\mu}}}\,\xi\right) = \frac{imc}{\hbar}H^4\xi. \tag{54}$$

Сопряженное уравнение ДФИ в базисе Ламе записывается в виде

$$\sum_{\mu=0}^{3}\frac{1}{\sqrt{hh^{\mu}}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{\frac{h}{h^{\mu}}}\,\bar{\xi}\right)H^{\mu} = \frac{imc}{\hbar}\bar{\xi}H^4. \tag{55}$$

5. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ

Метрическая форма $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}f^{\alpha}f^{\beta}$ определяет базис f лишь с точностью до ортогонального преобразования: $f^{\alpha} = L^{\alpha}_{\beta}f'^{\beta}$ и, наоборот, $f'_{\alpha} = \tilde{L}^{\alpha}_{\beta}f^{\beta}$. Из $\eta_{\alpha\beta}f'^{\alpha}f'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}f^{\alpha}f^{\beta}$ следует $\eta_{\alpha\sigma}\tilde{L}^{\sigma}_{\beta} = \eta_{\beta\sigma}\tilde{L}^{\sigma}_{\alpha}$. Имеем также

$$e'_{\alpha} = L^{\beta}_{\alpha}e_{\beta}, \qquad e_{\alpha} = \tilde{L}^{\beta}_{\alpha}e'_{\beta}, \qquad e^{\alpha}_{\beta} = e'^{\alpha}_{\gamma}\tilde{L}^{\gamma}_{\beta}, \qquad f^{\beta}_{\alpha} = f'^{\gamma}_{\alpha}L^{\beta}_{\gamma}.$$

Подставляя две последние формулы в (38), находим

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = C'^{\sigma}_{\mu\nu}\tilde{L}^{\mu}_{\alpha}\tilde{L}^{\nu}_{\beta}L^{\gamma}_{\sigma} + \tilde{L}^{\sigma}_{\alpha}e_{\beta}L^{\gamma}_{\sigma} - \tilde{L}^{\sigma}_{\beta}e_{\alpha}L^{\gamma}_{\sigma}. \tag{56}$$

Следовательно,

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \omega'_{\mu\nu\sigma}\tilde{L}^{\mu}_{\alpha}\tilde{L}^{\nu}_{\beta}\tilde{L}^{\sigma}_{\gamma} + \eta_{\mu\nu}\tilde{L}^{\mu}_{\alpha}e_{\gamma}\tilde{L}^{\nu}_{\beta}\,. \tag{57}$$

Отсюда легко получаются формулы

$$D_{\beta}A^{\alpha} = \tilde{L}^{\mu}_{\beta}L^{\alpha}_{\nu}d'_{\mu}A'^{\nu}, \qquad D_{\beta}A_{\alpha} = \tilde{L}^{\mu}_{\beta}\tilde{L}^{\nu}_{\alpha}D'_{\mu}A'_{\nu}$$

и аналогичные формулы для любых тензоров.

Рассмотрим теперь, как преобразуются ковариантный дифференциал спинора при ортохронных преобразованиях Лоренца. Всякое такое преобразование $f'^{\alpha} = \tilde{L}^{\alpha}_{\beta} f^{\beta}$ можно разложить в произведение некоторого числа p пространственных симметрий. Число p четное, если определитель матрицы преобразования равен 1, и нечетное, если этот определитель равен -1, так что $(-1)^p = \det(L^{\alpha}_{\beta})$. Симметрия же относительно гиперплоскости P, ортогональной к единичному вектору a^{α}, выражается формулой $f'^{\alpha} = f^{\alpha} - 2a^{\alpha}a_{\beta}f^{\beta}$. Так как

$$-AH^{\alpha}A = H^{\alpha} - 2a^{\alpha}A,$$

где $A = a_{\alpha}H^{\alpha}$, то при всяком ортохронном преобразовании Лоренца

$$(-1)^p S^{-1}H^{\alpha}S = \tilde{L}^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}, \qquad (-1)^p SH^{\alpha}S^{-1} = L^{\alpha}_{\beta}H^{\beta},$$

$$(-1)^p SH_{\alpha}S^{-1} = \tilde{L}^{\beta}_{\alpha}H_{\beta}, \qquad (-1)^p S^{-1}H_{\alpha}S = L^{\beta}_{\alpha}H_{\beta}, \tag{58}$$

где $S = A_p \ldots A_1$, $S^{-1} = A_1 \ldots A_p$.

Поэтому, согласно (57), матрица (43) преобразуется следующим образом:

$$\Omega = S\Omega' S^{-1} + \frac{1}{4} S^{-1}H_{\mu}Sd(S^{-1}H^{\mu}S). \tag{59}$$

Докажем, что

$$\frac{1}{4} S^{-1}H_{\mu}Sd(S^{-1}H^{\mu}S) = S^{-1}dS. \tag{60}$$

При $p = 1$ это равенство легко проверяется. Действительно,

$$\frac{1}{4} AH_{\mu}Ad(AH^{\mu}A) = \frac{1}{4}(2a_{\mu}A - H_{\mu})\, d(2a^{\mu}A - H^{\mu}) =$$

$$= \frac{1}{2}(2a_{\mu}A - H_{\mu})(Ada^{\mu} + a^{\mu}dA) = AdA. \tag{61}$$

Здесь учтено, что $2a_{\mu}da^{\mu} = d(a_{\mu}a^{\mu}) = 0$, $dA^2 = A{\cdot}dA + dA{\cdot}A = d(a_{\mu}a^{\mu}) = 0$, так как по условию $A^2 = a_{\mu}a^{\mu} = 1$. Докажем теперь, что если равенство (60) выполняется при некотором p, то оно выполняется и при $p + 1$. Нам требуется, таким образом, доказать, что из (60) следует равенство

$$\frac{1}{4} S^{-1}AH_{\mu}ASd(S^{-1}AH^{\mu}AS) = S^{-1}Ad(AS). \tag{62}$$

Здесь для краткости мы опустили номер $p + 1$ у матрицы A. Имеем

$$\frac{1}{4}S^{-1}AH_\mu ASd(S^{-1}AH^\mu AS)=\frac{1}{4}S^{-1}AH_\mu H^\mu AdS+$$
$$+\frac{1}{4}S^{-1}AH_\mu Ad(AH^\mu A)\,S+\frac{1}{4}S^{-1}AH_\mu AS(dS^{-1})\,AH^\mu AS.$$

Так как $H_\mu H^\mu$ равно числу — размерности пространства-времени, то первое слагаемое

$$\frac{1}{4}S^{-1}AH_\mu H^\mu AdS=\frac{1}{4}S^{-1}H_\mu H^\mu dS.$$

Второе слагаемое, согласно (61),

$$\frac{1}{4}S^{-1}AH_\mu Ad(AH^\mu A)S=S^{-1}A(dA)S.$$

Третье же слагаемое

$$\frac{1}{4}S^{-1}AH_\mu AS(dS^{-1})\,AH^\mu AS=$$
$$=\frac{1}{4}S^{-1}(2a_\mu A-H_\mu)\,S(dS^{-1})(2a^\mu A-H^\mu)S=$$
$$=\frac{1}{4}(2a_\mu a^\nu-\delta^\nu_\mu)\,(2a^\mu a_\sigma-\delta^\mu_\sigma)\,S^{-1}H_\nu S(dS^{-1})H^\sigma S=$$
$$\frac{1}{4}S^{-1}H_\mu S(dS^{-1})\,H^\mu S.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}S^{-1}AH_\mu ASd(S^{-1}AH^\mu AS)=$$
$$=\frac{1}{4}S^{-1}H_\mu Sd(S^{-1}H^\mu S)+S^{-1}A(dA)S. \tag{63}$$

Таким образом, из (60) следует (62). По индукции равенство (60) доказано, а значит, согласно (59),

$$\Omega=S\Omega'S^{-1}+S^{-1}dS. \tag{64}$$

Полагая

$$\xi'=S\xi, \tag{65}$$

отсюда находим

$$D\xi=d\xi+\Omega\xi=S^{-1}(d\xi'+\Omega'\xi')=S^{-1}D'\xi'. \tag{66}$$

Таким образом, ξ и $D\xi$ преобразуются по одному и тому же правилу.

Рассмотрим, как преобразуется сопряженный спинор (50). Нетрудно проверить, что если матрица A соответствует единичному вектору, то

$$A^+H_0=-H_0A^{-1}, \tag{67}$$

где знак +, как и в (50), указывает эрмитово сопряжение. Поэтому

$$S^+H_0 = -(-1)^p H_0 S^{-1}. \tag{68}$$

Следовательно, сопряженный спинор преобразуется по правилу

$$\bar{\xi}' = (-1)^p \bar{\xi} S^{-1}. \tag{69}$$

По такому же правилу преобразуется и его ковариантный дифференциал:

$$D\bar{\xi} = d\bar{\xi} - \bar{\xi}\Omega = (-1)^p(d\bar{\xi}' - \Omega'\bar{\xi}')\,S = (-1)^p(D'\bar{\xi}')\,S. \tag{70}$$

Теперь нетрудно доказать, что уравнения (49) и (51) ковариантны относительно преобразования от одного ортогонального базиса к другому. Действительно, из (66) и (70) следуют правила преобразования ковариантных производных спинора:

$$D_\nu\xi = \tilde{L}_\nu^{\mu} S^{-1} D'_\mu \xi',$$
$$D_\nu\bar{\xi} = (-1)^p \tilde{L}_\nu^{\mu}(D'_\mu\bar{\xi}')\,S. \tag{71}$$

Согласно (58) получаем

$$H^\nu D_\nu \xi = (-1)^p S^{-1} H^\mu D'_\mu \bar{\xi}',$$
$$D_\nu \bar{\xi} H^\nu = D'_\mu \bar{\xi}' H^\mu S. \tag{72}$$

Кроме того, имеем

$$(-1)^p S H^4 S^{-1} = H^4. \tag{73}$$

Следовательно,

$$H^\nu D_\nu \xi - \frac{imc}{\hbar} H^4 \xi = (-1)^p S^{-1}\left(H^\nu D'_\nu \xi' - \frac{imc}{\hbar} H^4 \xi' \right),$$
$$D_\nu \bar{\xi} H^\nu + \frac{imc}{\hbar}\,\bar{\xi} H^4 = \left(D'_\nu \bar{\xi}' H^\nu + \frac{imc}{\hbar}\,\bar{\xi}' H^4 \right) S, \tag{74}$$

так что уравнения (49) и (51) действительно ковариантны.

6. ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ СПИНОРА И ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

Вторая ковариантная производная спинора приводит нас к определению тензора кривизны Римана — Кристоффеля

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = \eta_{\nu\sigma} R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta}, \tag{75}$$

где

$$R^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta} = e_\beta \omega^\sigma_{\alpha\mu} - e_\alpha \omega^\sigma_{\beta\mu} + C^\gamma_{\alpha\beta}\omega^\sigma_{\gamma\mu} + \omega^\gamma_{\alpha\mu}\omega^\sigma_{\beta\gamma} - \omega^\gamma_{\beta\mu}\omega^\sigma_{\alpha\gamma}. \tag{76}$$

Действительно, ковариантная производная (47) спинора ξ имеет и спинорный и ковекторный характер. Поэтому вторая ковариантная производная спинора ξ имеет и спинорный и тензорный характер. В соответствии с (35) и (47) она равняется

$$D_\alpha D_\beta \xi = \left(e_\alpha + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu\alpha} H^\mu H^\nu \right) D_\beta \xi - \omega^\sigma_{\alpha\beta}\, D_\sigma \xi. \tag{77}$$

Отсюда следует, что

$$D_\alpha D_\beta \xi - D_\beta D_\alpha \xi = \frac{1}{4}\, H^\mu H^\nu R_{\mu\nu,\alpha\beta}\,. \tag{78}$$

Для доказательства надо воспользоваться равенствами (28) и (37).

7. КВАДРИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА — ФОКА — ИВАНЕНКО

Так называемое квадрирование уравнения ДФИ достигается следующим приемом. Имеем

$$\left(H^\alpha D_\alpha - \frac{imc}{\hbar} H^4 \right)\left(H^\beta D_\beta - \frac{imc}{\hbar} H^4 \right) = H^\alpha H^\beta D_\alpha D_\beta - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2$$

и, далее,

$$H^\alpha H^\beta D_\alpha D_\beta = \frac{1}{2}\, H^\alpha H^\beta (D_\alpha D_\beta + D_\beta D_\alpha) + \frac{1}{2}\, H^\alpha H^\beta (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha).$$

В последней сумме первое слагаемое

$$\frac{1}{2}\, H^\alpha H^\beta (D_\alpha D_\beta + D_\beta D_\alpha) = \frac{1}{4}\,(H^\alpha H^\beta + H^\beta H^\alpha)\,(D_\alpha D_\beta + D_\beta D_\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta}(D_\alpha D_\beta + D_\beta D_\alpha) = \eta^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta,$$

а второе слагаемое, согласно (79), равно

$$\frac{1}{2}\, H^\alpha H^\beta (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) = \frac{1}{8}\, H^\alpha H^\beta H^\mu H^\nu R_{\mu\nu,\alpha\beta}\,.$$

Далее, так как альтернация тензора Римана — Кристоффеля по трем значкам дает нуль, то, согласно (27),

$$H^\alpha H^\beta H^\mu R_{\mu\nu,\alpha\beta} = (\eta^{\beta\mu} H^\alpha + \eta^{\beta\alpha} H^\mu - \eta^{\alpha\mu} H^\beta)\, R_{\mu\nu,\alpha\beta} =$$

$$= 2H^\alpha \eta^{\beta\mu} R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 2H^\alpha R_{\nu\alpha}\,.$$

Следовательно, второе слагаемое

$$\frac{1}{2}H^{\alpha}H^{\beta}(D_{\alpha}D_{\beta}-D_{\beta}D_{\alpha})=\frac{1}{4}H^{\alpha}H^{\nu}R_{\nu\alpha}=\frac{1}{4}R.$$

Тем самым мы получили квадрированное уравнение ДФИ:

$$\left\{\eta^{\alpha\beta}D_{\alpha}D_{\beta}+\frac{1}{4}R-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^{2}\right\}\xi=0. \tag{79}$$

В общем случае эта система уравнений второго порядка не распадается на четыре отдельных уравнения для каждой компоненты спинорного поля. Тем не менее в следующей части эта система нам пригодится.

II. ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОРНОГО ПОЛЯ

1. АНТИКОММУТАТОР СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Стремясь сохранить основные понятия квантовой теории поля, мы будем рассматривать только такие римановы миры, в которых находятся пространственно-подобные гиперповерхности, разделяющие мир на две части. Причем одна из частей мира может служить образом прошедшего, другая — образом будущего, сама же гиперповерхность — образом настоящего. Такие гиперповерхности мы будем называть полными и обозначать Σ. Будем предполагать, что решение уравнения ДФИ во всем римановом мире однозначно задается значениями спинорного поля на полной гиперповерхности Σ. На самой же гиперповерхности спинорное поле может быть задано произвольно.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} H^{\nu}D_{\nu}u &= \frac{imc}{\hbar}H^{4}u, \\ D_{\nu}\bar{v}H^{\nu} &= -\frac{imc}{\hbar}\bar{v}H^{4}, \end{aligned} \tag{1}$$

состоящую из уравнения ДФИ и сопряженного с ним уравнения. Пусть u, $\bar{v}$ — решение этой системы. Дивергенция вектора

$$S^{\nu}=-\bar{v}H^{\nu}u, \tag{2}$$

равная

$$D_{\nu}S^{\nu}=-(D_{\nu}\bar{v}H^{\nu})u-\bar{v}(H^{\nu}D_{\nu}u),$$

в силу (1) равна нулю. Следовательно, по теореме Гаусса интеграл

$$\int\limits_{\Sigma} S_\mu d\sigma^\mu \tag{3}$$

не зависит от выбора полной гиперповерхности Σ. В интеграле (3) $d\sigma^\alpha$ — вектор элементарной площадки на Σ. Если обозначить $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ полностью антисимметричный тензор с условием $\varepsilon_{0123} = 1$, то

$$S_\mu d\sigma^\mu = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} q_1^\alpha q_2^\beta q_3^\gamma S^\mu, \tag{4}$$

где q_1^α, q_2^α, q_3^α — векторы элементарных смещений по Σ. Если, например, гиперповерхность Σ задана уравнениями

$$x^\alpha = T^\alpha(q^1, q^2, q^3),$$

то

$$q_1^\alpha = f_\mu^\alpha \frac{\partial T^\mu}{\partial q^1} dq^1, \qquad q_2^\alpha = f_\mu^\alpha \frac{\partial T^\mu}{\partial q^2} dq^2, \qquad q_3^\alpha = f_\mu^\alpha \frac{\partial T^\mu}{\partial q^3} dq^3.$$

Иначе сумма (4) записывается в виде определителя

$$S_\mu d\sigma^\mu = \begin{vmatrix} q_1^0 & q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 \\ q_2^0 & q_2^1 & q_2^2 & q_2^3 \\ q_3^0 & q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 \\ S^0 & S^1 & S^2 & S^3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Далее, так как

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} H^\mu = -iH_4[H_\alpha H_\beta H_\gamma], \tag{6}$$

то согласно (2)

$$S_\mu d\sigma^\mu = i\bar{v}H_4[Q_1 Q_2 Q_3]u, \tag{7}$$

где

$$Q_1 = H_\alpha q_1^\alpha, \; Q_2 = H_\alpha q_2^\alpha, \; Q_3 = H_\alpha q_3^\alpha. \tag{8}$$

Интеграл (3) задает скалярный квадрат в пространстве решений системы уравнений (1). При этом спинорные поля u и $\bar{v}$ здесь и далее считаются классическими, а не операторными.

Напротив, спинорное поле ξ квантуется, и квантуется согласно статистике Ферми. При этом требуется, чтобы пара ξ и $\bar{\xi}$ удовлетворяла уравнениям (1) и порождала (бесконечномерную) алгебру Клиффорда. Генераторы этой алгебры, то есть ξ и $\bar{\xi}$, на полной гиперповерхности Σ считаются линейно независимыми.

Рассмотрим следующие векторы из линейной оболочки этой алгебры:

$$U = i\int\limits_{\Sigma} \bar{\xi}H_4[Q_1Q_2Q_3]u, \qquad V^* = i\int\limits_{\Sigma} \bar{v}H_4[Q_1Q_2Q_3]\xi. \tag{9}$$

Интегралы (9) не зависят от выбора полной гиперповерхности Σ, так как пары u, $\bar{\xi}$ и ξ, $\bar{v}$ удовлетворяют системе уравнений (1).

Сумма

$$U + V^* \tag{10}$$

по определению является общим элементом линейной оболочки генераторов алгебры Клиффорда, которую хотим построить. Полагая

$$(U + V^*)^2 = i \int_{\Sigma} \bar{v} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u, \tag{11}$$

вводим симметричное скалярное произведение в оболочке генераторов, что является точным выражением принципа квантования по статистике Ферми.

Так как пары u, 0 и 0, $\bar{v}$ удовлетворяют системе уравнений (1), то из (11) следует, что

$$U^2 = 0, \quad V^{*2} = 0. \tag{12}$$

Следовательно, антикоммутатор

$$\{UV^*\} = UV^* + V^*U \tag{13}$$

равен

$$\{UV^*\} = i \int_{\Sigma} \bar{v} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u. \tag{14}$$

Ввиду того, что на Σ спинорное поле $\bar{v}$ можно задать произвольно, получаем, что на Σ

$$\{\xi(x) U\} = u(x), \tag{15}$$

а ввиду того, что на Σ и спинорное поле u можно задать произвольно, получаем, что на Σ

$$\{V^* \bar{\xi}(x)\} = \bar{v}(x). \tag{16}$$

Далее видим: так как пара ξ, $\bar{\xi}$ подчиняется системе (1), то и пара $\{\xi U\}$, $\{V^* \bar{\xi}\}$ подчиняется системе (1). Но этой же системе уравнений подчиняется и пара u, $\bar{v}$. Поскольку на полной поверхности Σ последние две пары совпадают, то в силу предполагаемой единственности задачи Коши для системы (1) равенства (15) и (16) оказываются справедливыми не только на Σ, но и во всем мире.

Подобным же образом из (12) выводится, что во всем мире

$$\{\xi(x) V^*\} = 0, \quad \{U \bar{\xi}(x)\} = 0. \tag{17}$$

Ввиду произвольности u, $\bar{v}$ на Σ из (17) получаем, что для любой точки y, лежащей на Σ,

$$\{\xi_p(x)\, \xi_q(y)\} = 0, \quad \{\bar{\xi}_q(y)\, \bar{\xi}_p(x)\} = 0, \tag{18}$$

где p и q — номера компонент спиноров ξ и $\bar{\xi}$. В силу единственности задачи Коши для системы уравнений (1) равенства (18) оказываются справедливыми для любой мировой точки y.

Обозначим

$$\{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\} \tag{19}$$

матрицу с компонентами $\{\xi_p(x)\,\bar{\xi}_q(y)\}$. Она удовлетворяет следующему условию:

$$\{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\}H^0 = H_0\{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\}^+. \tag{20}$$

Как и раньше, знак + указывает на эрмитово сопряжение.

Из (9) и (13) следует, что если через две точки x и y можно провести полную гиперповерхность Σ, то $\{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\} = 0$. В частности, $\{\xi(x)\,\bar{\xi}(x)\} = 0$.

Записав равенства (15) и (16) в развернутом виде

$$\begin{gathered} u(x) = i\int\limits_{\Sigma} \{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\}\, H_4[Q_1Q_2Q_3]\, u(y), \\ \bar{v}(x) = i\int\limits_{\Sigma} \bar{v}(y)\, H_4[Q_1Q_2Q_3]\, \{\xi(y)\,\bar{\xi}(x)\}, \end{gathered} \tag{21}$$

замечаем, что антикоммутатор $\{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\}$ дает решение задачи Коши для системы уравнений (1).

Поскольку и сам антикоммутатор $\{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\}$ удовлетворяет этой системе, то, согласно (21), имеем

$$\{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\} = i\int\limits_{\Sigma} \{\xi(x)\,\bar{\xi}(z)\}\, H_4[Q_1Q_2Q_3]\, \{\xi(z)\,\bar{\xi}(y)\}. \tag{22}$$

Пусть теперь для некоторой полной гиперповерхности Σ для системы уравнений (1) каким-либо методом решена задача Коши и решение представлено в виде

$$\begin{gathered} u(x) = i\int\limits_{\Sigma} \bar{S}(x, y)\, H_4[Q_1Q_2Q_3]\, u(y), \\ \bar{v}(x) = i\int\limits_{\Sigma} \bar{v}(y)\, H_4[Q_1Q_2Q_3]\, S(y, x). \end{gathered} \tag{23}$$

Сравнивая (21) с (23), замечаем, что на прямом произведении $M \times \Sigma$, где M — весь пространственно-временной мир,

$$\begin{gathered} \{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\} = \bar{S}(x, y), \\ \{\xi(y)\,\bar{\xi}(x)\} = S(y, x). \end{gathered} \tag{24}$$

В соответствии с (20) функции $\bar{S}$ и S связаны условием

$$\bar{S}(x, y)\, H^0 = H_0\, S^+(y, x). \tag{25}$$

Согласно (22) находим антикоммутатор в виде

$$\{\xi(x)\,\bar{\xi}(y)\} = i\int \bar{S}(x, z)\,H_4[Q_1Q_2Q_3]\,S(x, y) \tag{26}$$

всюду на $M \times M$.

Заметим, что если пара $(u, \bar{v})$ является решением системы (1), то и пара $(u, \bar{v})^* = (v, \bar{u})$ тоже является решением системы (1). Решение назовем действительным, если $(u, \bar{v})^* = (u, \bar{v})$, т.е. если $u = v$. Элемент

$$U + U^* \tag{27}$$

оболочки генераторов, соответствующий действительному решению, называется действительным или эрмитовым элементом.

2. ВЕКТОР ТОКА И ОПЕРАТОР ЗАРЯДА

В спинорном случае вектор тока определяется выражением (2) и равняется

$$J^{\mu} = e\bar{\xi}\,H^{\mu}\xi, \tag{28}$$

где e — заряд позитрона.

Оператор заряда задается интегралом

$$\hat{e} = \int\limits_{\Sigma} J_{\mu}d\sigma^{\mu} = -ie\int\limits_{\Sigma} \bar{\xi}H_4[Q_1Q_2Q_3]\,\xi \tag{29}$$

по полной гиперповерхности Σ. Он не зависит от выбора Σ, поскольку

$$D_{\mu}J^{\mu} = 0. \tag{30}$$

3. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Компоненты тензора энергии-импульса в римановом мире во всяком ортогональном базисе имеют такой же вид, как в плоском мире в прямоугольных координатах, а именно:

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{4}\,\{S_{\mu\nu} + S_{\nu\mu}\}, \tag{31}$$

где

$$S_{\mu\nu} = \bar{\xi}H_{\mu}\xi_{\nu} - \bar{\xi}_{\nu}H_{\mu}\xi. \tag{32}$$

В свою очередь,

$$\xi_{\mu} = D_{\mu}\xi, \qquad \bar{\xi}_{\mu} = D_{\mu}\bar{\xi}. \tag{33}$$

Докажем, что обе дивергенции тензора (32) равны нулю. Действительно, одна из них равна

$$D^{\nu}S_{\mu\nu} = \bar{\xi}^{\nu}H_{\mu}\xi_{\nu} + \bar{\xi}H_{\mu}(D^{\nu}\xi_{\nu}) - (D^{\nu}\bar{\xi}_{\nu})H_{\mu}\xi - \bar{\xi}_{\nu}H_{\mu}\xi^{\nu} =$$

$$= \bar{\xi}H_{\mu}(D^{\nu}\xi_{\nu}) - (D^{\nu}\bar{\xi}_{\nu})\,H_{\mu}\xi,$$

а последняя разность равна нулю в силу того, что спинорное поле подчиняется квадрированному уравнению ДФИ (I.79). Следовательно,

$$D^{\nu}S_{\mu\nu} = 0. \tag{34}$$

Переходя к рассмотрению другой дивергенции тензора (32), заметим, что если пара ξ и $\bar{\xi}$ удовлетворяет системе уравнений (1), то

$$S_{\nu\mu} - S_{\mu\nu} = D_{\alpha}\{\bar{\xi}\,[H_{\mu}H_{\nu}H^{\alpha}]\,\xi\}. \tag{35}$$

Это проверяется с помощью соотношений (I.22). Из (34) и (35) находим

$$D^{\nu}S_{\nu\mu} = D_{\nu}D_{\alpha}\{\bar{\xi}\,[H_{\mu}H^{\nu}H^{\alpha}]\,\xi\} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(D_{\nu}D_{\alpha} - D_{\alpha}D_{\nu})\,\{\bar{\xi}\,[H_{\mu}H^{\nu}H^{\alpha}]\,\xi\} =$$

$$= \frac{1}{2}\,R_{\mu\sigma,\nu\alpha}\{\bar{\xi}\,[H^{\sigma}H^{\nu}H^{\alpha}]\,\xi\} = 0. \tag{36}$$

Итак, имеем

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \qquad D^{\mu}T_{\mu\nu} = 0. \tag{37}$$

Кроме того,

$$T = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\,mc\,\bar{\xi}\,H^{4}\xi. \tag{38}$$

Из (31) и (35) следует, что

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{4}\,(2S_{\mu\nu} + D_{\alpha}\{\bar{\xi}\,[H_{\mu}H_{\nu}H^{\alpha}]\,\xi). \tag{39}$$

В таком виде тензор энергии-импульса нам понадобится в дальнейшем.

4. ВТОРИЧНО-КВАНТОВАННЫЕ ИЗОМЕРИЧЕСКИЙ И КОНФОРМНЫЙ МОМЕНТЫ

По теореме Гаусса, если гиперповерхность ∂o ограничивает простую область o, то для всякого тензорного поля $T_{\mu\nu}$ и всякого векторного поля K^{μ}

$$\int_{\partial o} K^{\mu}T_{\mu\nu}\,d\sigma^{\nu} = \int_{0} D^{\nu}(K^{\mu}T_{\mu\nu})\,dv. \tag{40}$$

Если тензорное поле $T_{\mu\nu}$ удовлетворяет условиям (37), то

$$D^{\nu}(K^{\mu}T_{\mu\nu}) = K_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + FT, \tag{41}$$

где T — след тензора $T_{\mu\nu}$, в данном случае равный (38);

$$F = \frac{1}{4} D_\alpha K^\alpha, \tag{42}$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(D_\mu K_\nu + D_\nu K_\mu) - F\eta_{\mu\nu}. \tag{43}$$

Однопараметрическая группа преобразований пространственно-временного мира, получающаяся в результате решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f^\alpha_\beta \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{f^\alpha}{d\lambda} = K^\alpha, \tag{44}$$

называется конформной в случае, когда

$$K_{\mu\nu} = 0. \tag{45}$$

В более частном случае, когда

$$K_{\mu\nu} = 0, \quad F = 0, \tag{46}$$

она называется изомерической. Система равенств (46) эквивалентна системе

$$D_\mu K_\nu + D_\nu K_\mu = 0. \tag{47}$$

В случае (46) дивергенция (41) равна нулю, а вместе с ней равен нулю и интеграл (40). Следовательно, в этом случае интеграл

$$\hat{K} = \int_\Sigma K^\mu T_{\mu\nu}\, d\sigma^\nu \tag{48}$$

не зависит от выбора полной гиперповерхности Σ. Назовем его вторично-квантованным оператором изомерического момента.

По той же причине в случае (45) интеграл (48) также не зависит от выбора полной гиперповерхности Σ, но только при условии $T = 0$, что, согласно (38), выполняется, если масса спинорной частицы равна нулю. В этом случае интеграл (48) при $m = 0$ назовем вторично-квантованным оператором конформного момента.

Дадим общее (в спинорном варианте) определение вторично-квантованного оператора.

Пусть некоторый оператор $\hat{K}$ действует в пространстве решений уравнения ДФИ; это значит, что если ξ удовлетворяет уравнению ДФИ, то и $K\xi$ удовлетворяет этому уравнению . Всякому такому оператору соответствует интеграл

$$K = (\bar{\xi}, \hat{K}\xi) = i\int_\Sigma \bar{\xi} H_4[Q_1 Q_2 Q_3]\, \hat{K}\xi, \tag{49}$$

не зависящий от выбора полной гиперповерхности Σ, который назовем вторично-квантованным оператором.

В частности, таким (вторично-квантованным) оператором является оператор заряда (29):

$$\hat{e} = (\bar{\xi}, -e\xi). \tag{50}$$

В данном случае $\hat{K}$ — это оператор умножения на число $-e$.

Интеграл (48) подходит под общее определение вторично-квантованного оператора, так как он равен интегралу (49), где

$$\hat{K} = -i\hbar\left\{K^{\mu}D_{\mu} + \frac{1}{4}(D_{\alpha}K_{\beta})\,H^{\alpha}H^{\beta}\right\} \tag{51}$$

в изомерическом случае и

$$\hat{K} = -i\hbar\left\{K^{\mu}D_{\mu} + \frac{1}{4}(D_{\alpha}K_{\beta})\,H^{\alpha}H^{\beta} + \frac{1}{2}F\right\} =$$

$$= -i\hbar\left\{K^{\mu}D_{\mu} + \frac{1}{4}(D_{\alpha}K_{\beta} - F\eta_{\alpha\beta})\,H^{\alpha}H^{\beta} + \frac{3}{2}F\right\} \tag{52}$$

в конформном случае. Действительно, взяв $T_{\mu\nu}$ в виде (39), нетрудно убедиться, что векторное поле

$$T^{\alpha} = K^{\mu}T_{\mu\nu}\eta^{\nu\alpha} + \bar{\xi}H^{\alpha}\hat{K}\xi$$

является дивергенцией $T^{\alpha} = D_{\beta}A^{\alpha\beta}$ антисимметричного тензорного поля

$$A^{\alpha\beta} = i\hbar\left\{\frac{1}{4}\bar{\xi}[H^{\alpha}KH^{\beta}]\,\xi + \frac{1}{2}\bar{\xi}(K^{\alpha}H^{\beta} - K^{\beta}H^{\alpha})\,\xi\right\},$$

где $K = K^{\nu}H_{\nu}$, а значит, по теореме Стокса

$$\int_{\Sigma} T^{\alpha}\eta_{\alpha\nu}d\sigma^{\nu} = 0.$$

5. ОПЕРАТОР ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Уравнение (47) имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда в пространственно-временном мире действует группа изометрий. Поэтому выполняется равенство

$$f_{\beta'}^{\alpha'}(x') = f_{\beta}^{\alpha}(x), \tag{53}$$

где штрихом отмечен результат операции из этой группы. Для бесконечно малого преобразования

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + K^{\mu} e_{\mu}^{\alpha} \lambda \tag{54}$$

это означает, что

$$K^{\mu} e_{\mu} f_{\beta}^{\alpha} = 0. \tag{55}$$

Рассмотрим соответствующее преобразование репера. В силу (53) и (54)

$$f^{\alpha'} = f_{\beta'}^{\alpha'}(x')\, dx^{\beta'} = f_{\beta}^{\alpha}(dx^{\beta} + dK^{\mu} e_{\mu}^{\beta} \lambda + K^{\mu} de_{\mu}^{\beta} \lambda) =$$

$$= f^{\alpha} + (dK^{\alpha} - K^{\mu} e_{\mu}^{\beta} d f_{\beta}^{\alpha})\lambda.$$

Согласно (I.38)

$$C_{\mu\nu}^{\alpha} f^{\nu} = e_{\mu}^{\beta} df_{\beta}^{\alpha} - e_{\nu}^{\beta} e_{\mu} f_{\beta}^{\alpha} f^{\nu}.$$

Поэтому, ввиду (55), в данном случае

$$K^{\mu} C_{\mu\nu}^{\alpha} f^{\nu} = K^{\mu} e_{\mu}^{\beta} d f_{\beta}^{\alpha},$$

так что

$$f^{\alpha'} = f^{\alpha} + (dK^{\alpha} - K^{\mu} C_{\mu\nu}^{\alpha} f^{\nu})\, \lambda.$$

Учитывая (I.32) и (I.36), наконец, находим

$$f^{\alpha'} = f^{\alpha} + (D_{\nu} K^{\alpha} - K^{\mu} \omega_{\mu\nu}^{\alpha})\, f^{\nu} \lambda. \tag{56}$$

Таким образом, при бесконечно малом изометрическом преобразовании (54) репер испытывает бесконечно малое вращение (56), задаваемое антисимметричной матрицей

$$D_{\nu} K_{\alpha} + K^{\mu} \omega_{\nu\alpha\mu}. \tag{57}$$

В соответствии с (I.42) и (I.47) отсюда следует, что приращение спинорного поля при рассматриваемом преобразовании (54) равняется

$$\xi'(x') - \xi(x) = \lambda \left\{ K^{\mu} e_{\mu} + \frac{1}{4} K^{\mu} \omega_{\nu\alpha\mu} H^{\nu} H^{\alpha} + \frac{1}{4} (D_{\mu} K_{\alpha})\, H^{\nu} H^{\alpha} \right\} \xi =$$

$$= \lambda \left\{ K^{\mu} D_{\mu} + \frac{1}{4} (D_{\nu} K_{\alpha})\, H^{\nu} H^{\alpha} \right\} \xi. \tag{58}$$

Таким образом, мы приходим к оператору (51) изометрического момента спинорного поля.

Докажем, что он коммутирует с оператором $H^{\nu} D_{\nu}$ из левой части уравнения ДФИ; имеем

$$\frac{i}{\hbar} [H^{\nu} D_{\nu} \hat{K} - \hat{K} H^{\nu} D_{\nu}] = K^{\mu} H^{\nu} (D_{\nu} D_{\mu} - D_{\mu} D_{\nu}) +$$

$$+ \frac{1}{4} (D_{\nu} D_{\alpha} K_{\beta})\, H^{\nu} H^{\alpha} H^{\beta} + \hat{O}, \tag{59}$$

где

$$\hat{O} = (D_\nu K^\mu) H^\nu D_\mu + \frac{1}{4} (D_\alpha K_\beta) (H^\nu H^\alpha H^\beta - H^\alpha H^\beta H^\nu) D_\nu.$$

Так как

$$H^\nu H^\alpha H^\beta - H^\alpha H^\beta H^\nu = 2\eta^{\alpha\nu} H^\beta - 2\eta^{\beta\nu} H^\alpha,$$

то $\hat{O} = 0$. Учитывая далее (I.78), находим, что коммутатор (59) равен

$$\frac{1}{4} \{K^\mu R_{\alpha\beta,\nu\mu} + (D_\nu D_\alpha K_\beta)\} H^\nu H^\alpha H^\beta.$$

Нетрудно убедиться, что для поля, подчиненного уравнению (47),

$$K^\mu R_{\alpha\beta,\nu\mu} + (D_\nu D_\alpha K_\beta) = 0. \tag{60}$$

Поэтому коммутатор (59) равен нулю. Но очевидно, что и $\hat{K} H^4 = H^4 \hat{K}$.

Следовательно, если спинорное поле ξ удовлетворяет уравнению ДФИ, то и спинорное поле $\hat{K}\xi$ удовлетворяет тому же уравнению.

6. КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПОВЕДЕНИЯ НЕЙТРИНО

Если пренебречь всеми взаимодействиями фермионов, кроме их взаимодействия с гравитационным полем, то в таком приближении поведение фермионов вполне определяется уравнением ДФИ (I.49), скалярным произведением

$$(\bar{v}, u) = i \int_\Sigma \bar{v} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u, \tag{61}$$

определяющим алгебру полевых операторов, и тензором энергии-импульса (31). Для рассматриваемых здесь вопросов, изученных в [49], неважно, описывать ли нейтринное поле четырехкомпонентным спинором или двухкомпонентным полуспинором. Поэтому будем его описывать уравнением

$$H^\nu \xi_\nu = 0, \tag{62}$$

попросту полагая в уравнении ДФИ $m = 0$.

Докажем, что поведение нейтрино конформно-инвариантно. Это значит, что нейтрино ведет себя в мире с метрикой ds^2 так же, как и в мире с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$. Два гравитационных поля, из которых одно отвечает метрике ds^2, а другое — метрике ds'^2, для нейтрино одинаковы.

Поясним это на важном примере, когда одно из такой пары полей статическое. Оно отвечает метрике, приводимой к следующему виду:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} g_{ik}(x^1, x^2, x^3)\, dx^i dx^k - c^2 dt^2. \tag{63}$$

Понятно, что статическое поле не может порождать нейтрино, как, впрочем, и другие фермионы или бозоны. Утверждение о конформной инвариантности поведения нейтрино означает, в частности, что и гравитационное поле с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$, пропорциональной (63), тоже не может порождать нейтрино.

К числу таких полей принадлежит гравитационное поле в мире Фридмана. В этом случае множитель B зависит только от времени, пространственная же часть в (63) является метрической формой либо евклидова пространства, либо сферического пространства, либо пространства Лобачевского.

Чтобы доказать наше утверждение о конформной инвариантности поведения нейтрино, достаточно доказать конформную инвариантность уравнения (62), скалярного произведения (61) и интеграла (48), где K^{μ} — векторное поле.

Доказательство будем проводить для n-мерного мира. Для уравнения ДФИ существенно, однако, чтобы число n было четным. В реальном случае, разумеется, $n = 4$. Но в третьей части обзора мы рассмотрим модельный случай $n = 2$.

Пусть в мире с метрикой ds^2 выбран ортогональный репер f^{α}, так что $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} f^{\alpha} f^{\beta}$. В мире с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$ репер $f'^{\alpha} = Bf^{\alpha}$ удовлетворяет аналогичному условию $ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} f'^{\alpha} f'^{\beta}$. Имеем также $e_{\alpha} = Be'_{\alpha}$. Таким образом, полагаем

$$f_{\beta}'^{\alpha} = Bf_{\beta}^{\alpha}, \quad e_{\beta}^{\alpha} = Be_{\beta}'^{\alpha}. \tag{64}$$

Отсюда следует, что

$$[Q'_1 \dots Q'_{n-1}] = B^{n-1}[Q_1 \dots Q_{n-1}].$$

Поэтому, если сделаем подстановку

$$u = B^{\frac{n-1}{2}} u', \quad \bar{v} = B^{\frac{n-1}{2}} v', \tag{65}$$

то добьемся равенства

$$\bar{v}' H_n[Q'_1 \dots Q'_{n-1}]u' = \bar{v} H_n[Q_1 \dots Q_{n-1}]u, \tag{66}$$

нужного для доказательства конформной инвариантности скалярного произведения, определяющего алгебру полевых операторов.

В соответствии с (65) мы должны прибегнуть далее к подстановке

$$\xi = B^{\frac{n-1}{2}} \xi'. \tag{67}$$

Затем из (64) находим связь между коэффициентами неголономности

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = BC'^{\gamma}_{\alpha\beta} + \delta^{\gamma}_{\beta} e'_{\alpha} B - \delta^{\gamma}_{\alpha} e'_{\beta} B$$

и коэффициентами вращения реперов

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = B\omega'_{\alpha\beta\gamma} + \eta_{\beta\nu} e'_{\alpha} B - \eta_{\alpha\nu} e'_{\beta} B.$$

Отсюда получаем

$$\xi_{\nu} = B^{\frac{n+1}{2}} \xi'_{\nu} + \frac{1}{2} B^{\frac{n-1}{2}} (ne'_{\nu} B - H_{\nu} H^{\alpha} e'_{\alpha} B)\, \xi',$$

$$\bar{\xi}_{\nu} = B^{\frac{n+1}{2}} \bar{\xi}'_{\nu} + \frac{1}{2} B^{\frac{n-1}{2}} \bar{\xi}'(ne'_{\nu} B - e'_{\alpha} BH^{\alpha} H_{\nu}). \tag{68}$$

Следовательно,

$$H^{\nu}\xi_{\nu} = B^{\frac{n+1}{2}} H^{\nu} \xi'_{\nu}; \tag{69}$$

$$T_{\mu\nu} = B^{n} T'_{\mu\nu}. \tag{70}$$

В силу (69) уравнение (62) конформно-инвариантно.

Наконец, векторному полю K^{μ} в одном мире соответствует векторное поле $K'^{\mu} = BK^{\mu}$ в другом. Кроме того, $d\sigma'^{\nu} = B^{n-1} d\sigma^{\nu}$. В силу (70), следовательно,

$$K'^{\mu} T'_{\mu\nu} d\sigma'^{\nu} = K^{\mu} T_{\mu\nu} d\sigma^{\nu}. \tag{71}$$

Последнее равенство нужно для доказательства конформной инвариантности интеграла (48).

Мы почти уже доказали наше утверждение о конформной инвариантности поведения нейтрино. Чтобы завершить доказательство, остается предположить, что функции B и B^{-1} заданы всюду и нигде не обращаются в нуль.

Можно, однако, ослабить последнее условие и потребовать, чтобы эти функции были заданы и не обращались в нуль в некоторой области, содержащей полную гиперповерхность Σ. В этой области поведение нейтрино будет опять-таки конформно-инвариантным.

Это ослабленное условие особо интересно в случае мира Фридмана, когда функция не зависит от пространственных координат, а в качестве полных можно выбирать такие гиперповерхности, на которых координата времени задана. Мы видим, что поведение нейтрино в мире Фридмана определяется только знаком кривизны гиперповерхности $t = \text{const}$. Таким образом, чтобы изучить поведение нейтрино в мире Фридмана, достаточно рассмотреть плоский мир с метрикой

$$d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2dt^2,$$

сферический мир с метрикой

$$d\rho^2 + R^2\sin^2\frac{\rho}{R}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2dt^2,$$

и мир Лобачевского с метрикой

$$d\rho^2 + k^2\,\mathrm{sh}^2\frac{\rho}{k}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2dt^2.$$

А вот если на функции B и B^{-1} не накладывать никаких ограничений, то в области, где они обе не обращаются в нуль, сохраняются не все черты конформно-инвариантного поведения нейтрино, не те, которые, наподобие (61) и (48), описываются интегральными характеристиками, а только те, что подобно (62), (66) и (71) описываются характеристиками дифференциальными. Этим замечанием мы воспользуемся дальше для вывода оператора конформного момента (52).

7. ОПЕРАТОР КОНФОРМНОГО МОМЕНТА

Оператор конформного момента спинорного поля выведен в работах [53] и [54]. Для двух миров, находящихся в конформном соответствии, имеем

$$BD'_\alpha K'_\beta = BD_\alpha K_\beta + \eta_{\alpha\beta}K^\nu e_\nu B + K_\beta e_\alpha B - K_\alpha e_\beta B. \tag{72}$$

Рассматривая тензор (43), где в n-мерном случае

$$F = \frac{1}{n}D_\alpha K^\alpha, \tag{73}$$

а не (42), находим

$$K'_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}, \qquad BF' = BF + K^\nu e_\nu B. \tag{74}$$

Пусть теперь для поля K^α выполняется условие (44). В таком случае это же условие выполняется и для поля K'^α, какова бы ни была функция B. Но в некоторой окрестности мировой точки всегда можно найти такую функцию B, чтобы выполнялось условие $F' = 0$. Подобрав так функцию B, то есть решив уравнение

$$BF + K^\nu e_\nu B = 0, \tag{75}$$

мы будем располагать оператором изометрического момента, переводящего спинор ξ' в спинор

$$- i\hbar \left\{ K'^{\mu} \xi'_{\mu} + \frac{1}{4} (D'_{\alpha} K'_{\beta}) H^{\alpha} H^{\beta} \xi' \right\}.$$

С помощью подстановки (67) и формул (68), (72), (75) отсюда нетрудно получить оператор конформного момента

$$\hat{K} = - i\hbar \left\{ K^{\mu} D_{\mu} + \frac{1}{4} (D_{\alpha} K_{\beta} - F \eta_{\alpha\beta}) H^{\alpha} H^{\beta} + \frac{n-1}{2} F \right\} =$$

$$= - i\hbar \left\{ K^{\mu} D_{\mu} + \frac{1}{4} (D_{\alpha} K_{\beta}) H^{\alpha} H^{\beta} + \frac{n-2}{4} F \right\}. \tag{76}$$

Для произвольного векторного поля получается коммутатор

$$\frac{i}{\hbar} [H^{\nu} D_{\nu} \hat{K} - \hat{K} H^{\nu} D_{\nu}] = \frac{1}{2} H^{\alpha} (D^{\beta} K_{\alpha\beta}) + H^{\alpha} K_{\alpha\beta} D^{\beta} + F H^{\alpha} D_{\alpha}. \tag{77}$$

Действительно, имеем

$$\left[H^{\nu} D_{\nu}, K^{\mu} D_{\mu} \right] = K^{\mu} H^{\nu} (D_{\nu} D_{\mu} - D_{\mu} D_{\nu}) + H^{\nu} (D_{\nu} K^{\mu}) D_{\mu},$$

$$\left[H^{\nu} D_{\nu}, \frac{1}{4} (D_{\alpha} K_{\beta}) H^{\alpha} H^{\beta} \right] = \frac{1}{4} (D_{\nu} D_{\alpha} K_{\beta}) H^{\nu} H^{\alpha} H^{\beta} +$$

$$+ \frac{1}{4} (D_{\alpha} K_{\beta}) (H^{\nu} H^{\alpha} H^{\beta} - H^{\alpha} H^{\beta} H^{\nu}) D_{\nu},$$

$$\left[H^{\nu} D_{\nu}, \frac{n-2}{4} F \right] = \frac{n-2}{4} F_{\nu} H^{\nu}.$$

Далее, из тождества

$$D_{\nu} D_{\alpha} K_{\beta} = D_{\nu} (K_{\alpha\beta} + F \eta_{\alpha\beta}) + D_{\alpha} (K_{\beta\nu} + F \eta_{\beta\nu}) - D_{\beta} (K_{\alpha\nu} + F \eta_{\alpha\nu}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \{ (D_{\beta} D_{\alpha} - D_{\alpha} D_{\beta}) K_{\nu} + (D_{\nu} D_{\alpha} - D_{\alpha} D_{\nu}) K_{\beta} - (D_{\nu} D_{\beta} - D_{\beta} D_{\nu}) K_{\alpha} \}$$

следует равенство

$$D_{\nu} D_{\alpha} K_{\beta} = D_{\nu} K_{\alpha\beta} + D_{\alpha} K_{\beta\nu} - D_{\beta} K_{\alpha\nu} +$$

$$+ F_{\nu} \eta_{\alpha\beta} + F_{\alpha} \eta_{\beta\nu} - F_{\beta} \eta_{\alpha\nu} + R^{\sigma}_{\nu,\beta\alpha} K_{\sigma}.$$

Учитывая (I.78), получаем (77).

Следовательно, если спинорное поле ξ удовлетворяет уравнению (62), то тому же уравнению удовлетворяет и поле $\hat{K}\xi$, если $K_{\alpha\beta} = 0$.

III. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ МИРЕ

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДФИ В ДВУМЕРНОМ МИРЕ

Эта часть написана по материалам работ [55,56,57]. Метрику двумерного мира можно локально привести к виду

$$ds^2 = a^2(dz^2 - c^2dt^2), \tag{1}$$

где a — некоторая функция от z и t. Можно развить спинорный анализ непосредственно в двумерном мире, но здесь предпочтительней вложить двумерный мир в четырехмерный с метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + a^2(dz^2 - c^2dt^2)$$

и воспользоваться вышеизложенными результатами.

Если в оригинальных уравнениях Дирака (I.1) положить

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = \psi_2(z, t), \qquad \psi_3 = 0, \qquad \psi_4 = \psi_4(z, t), \tag{2}$$

то получаются уравнения Дирака в двумерном мире Минковского

$$\begin{aligned} &(E - mc^2)\ \psi_2 + cp_z\psi_4 = 0, \\ &(E + mc^2)\ \psi_4 + cp_z\psi_2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Подстановка Картана (I.15) с условиями (2) приводит уравнения (I.16), а также и уравнения (3), к следующему виду:

$$\begin{aligned} &(E + cp_z)\ \xi_2 = - mc^2\xi_0, \\ &(cp_z - E)\ \xi_0 = mc^2\xi_2. \end{aligned} \tag{4}$$

В соответствии с (I.53) уравнения ДФИ в форме Картана принимают вид (4) не только в двумерном мире Минковского, но и мире с метрикой (1), если положить

$$E\,\xi = \frac{i\hbar}{a\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{a}\xi), \qquad p_z\xi = -\frac{i\hbar}{a\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{a}\xi).$$

Для величин $u = \sqrt{a}\cdot\xi$ отсюда следуют уравнения

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_2 + i\,\frac{mc}{\hbar}au_0 = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)u_0 - i\,\frac{mc}{\hbar}\,au_2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

В этой части обзора все рассмотрение проводится в двумерном мире, и поэтому не вызовут путаницы следующие обозначения для изотропных координат:

$$x = \frac{ct + z}{2}, \quad y = \frac{ct - z}{2}. \tag{6}$$

В изотропных координатах (6) уравнения (5) перепишутся в следующем каноническом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_0 &= i \frac{mc}{\hbar} a u_2, \\ \frac{\partial}{\partial y} u_2 &= i \frac{mc}{\hbar} a u_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Для этой системы уравнений будем решать задачу Коши: требуется найти решение системы (7), если функции u_0 и u_2 произвольно заданы на произвольной пространственно-подобной кривой $y = \lambda(x)$. Последнее означает, что произвольная $\lambda'(x)$ отрицательна.

Классический метод Римана для одного уравнения второго порядка гиперболического типа удается распространить на систему уравнений (7).

Если пара функций u_0, u_2 удовлетворяет системе уравнений (7), а пара функций v_0, v_2 удовлетворяет сопряженной системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_0 &= - i \frac{mc}{\hbar} a v_2, \\ \frac{\partial}{\partial y} v_2 &= - i \frac{mc}{\hbar} a v_0, \end{aligned} \tag{8}$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_0 u_0) + \frac{\partial}{\partial y}(v_2 u_2) = 0. \tag{9}$$

Следовательно, линейная форма

$$v_2 u_2 dx - v_0 u_0 dy \tag{10}$$

является полным дифференциалом и интеграл

$$\oint (v_2 u_2 dx - v_0 u_0 dy) = 0 \tag{11}$$

по любому замкнутому контуру равен нулю.

Выберем контур $P_0 M_0 Q_0$ (рис.1), образованный прямыми $x = x_0$, $y = y_0$ и кривой $y = \lambda(x)$, где $M_0 = (x_0, y_0)$ — точка, в которой мы хотим найти значение искомой пары функций; точка Q_0 имеет координаты x_0, $\lambda(x_0)$; точка P_0 имеет координаты $\lambda^{-1}(y_0)$, y_0; $x = \lambda^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = \lambda(x)$. Для такого контура условие (11) означает

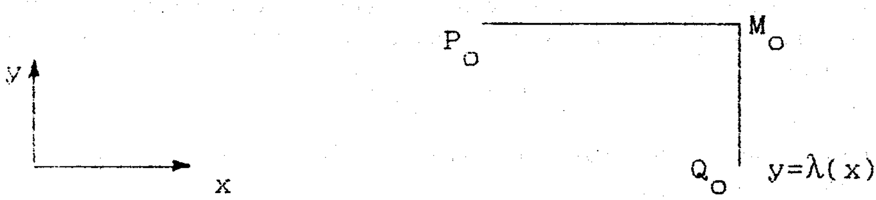

Рис.1

$$\int\limits_{Q_0}^{M_0} v_0(M)u_o(M)\,\Big|_{x=x_0} dy + \int\limits_{P_0}^{M_0} v_2(M)u_2(M)\,\Big|_{y=y_0} dx =$$
$$= \int\limits_{P_0}^{Q_0} [v_2(M)u_2(M) - \lambda'(x)v_0(M)u_0(M)]\,\Big|_{y=\lambda(x)} ds. \tag{12}$$

Подберем функции $v_0(M) = v_{00}(M;\, M_0)$ и $v_2(M) = v_{20}(M;\, M_0)$ так, чтобы

$$v_{00}(M;\, M_0)\,\Big|_{x=x_0} = 0,$$
$$v_{20}(M;\, M_0)\,\Big|_{y=y_0} = i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x,\, y_0). \tag{13}$$

Первая из формул (7) и формула (12) дают

$$u_0(M_0) = u_0(P_0) +$$
$$+ \int\limits_{P_0}^{Q_0} [v_{20}(M;\, M_0)u_2(M) - \lambda'(x)v_{00}(M;\, M_0)u_0(M)]\,\Big|_{y=\lambda(x)} ds. \tag{14}$$

Подберем теперь функции $v_0(M) = v_{02}(M;\, M_0)$ и $v_2(M) = v_{22}(M,\, M_0)$ так, чтобы

$$v_{02}(M;\, M_0)\,\Big|_{x=x_0} = i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x_0,\, y),$$
$$v_{22}(M;\, M_0)\,\Big|_{y=y_0} = 0. \tag{15}$$

Вторая из формул (7) и формула (12) дают

$$u_2(M_0) = u_2(Q_0) +$$
$$+ \int\limits_{P_0}^{Q_0} [v_{22}(M;\, M_0)\, u_2(M) - \lambda'(x)\, v_{02}(M;\, M_0)\, u_0(M)]\,\Big|_{y=\lambda(x)} dx. \tag{16}$$

Формулы (14) и (16) сводят задачу Коши к отысканию функции Римана (матричной) $v_{ik}(M;\ M_0)$. Последняя выражается через матричную функцию $w_{ik}(M;\ M_0)$, которая удовлетворяет тем же уравнениям, что и $v_{ik}(M;\ M_0)$, то есть уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} w_{00} = -\,i\,\frac{mc}{\hbar}\,a w_{20}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\, w_{02} = -\,i\,\frac{mc}{\hbar}\,a w_{22},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\, w_{20} = -\,i\,\frac{mc}{\hbar}\,a w_{00}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\, w_{22} = -\,i\,\frac{mc}{\hbar}\,a w_{02}, \tag{17}$$

но подчиняется более простым характеристическим условиям, а именно

$$w_{00}\Big|_{x = x_0} = 1, \qquad w_{02}\Big|_{x = x_0} = 0,$$

$$w_{20}\Big|_{y = y_0} = 0, \qquad w_{22}\Big|_{y = y_0} = 1. \tag{18}$$

Дифференциальные уравнения (17) с условиями (18) эквивалентны следующим интегральным уравнениям:

$$w_{00}(x,\ y;\ x_0,\ y_0) = 1 - i\,\frac{mc}{\hbar}\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi,\ y)\ w_{20}(\xi,\ y;\ x_0,\ y_0)d\xi,$$

$$w_{20}(x,\ y;\ x_0,\ y_0) = -\,i\,\frac{mc}{\hbar}\int\limits_{y_0}^{y} a(x,\ \eta)\ w_{00}(x,\ \eta;\ x_0,\ y_0)d\eta,$$

$$w_{22}(x,\ y;\ x_0,\ y_0) = 1 - i\,\frac{mc}{\hbar}\int\limits_{y_0}^{y} a(x,\ \eta)\ w_{02}(x,\ \eta;\ x_0,\ y_0)d\eta,$$

$$w_{02}(x,\ y;\ x_0,\ y_0) = -\,i\,\frac{mc}{\hbar}\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi,\ y)\ w_{22}(\xi,\ y;\ x_0,\ y_0)d\xi. \tag{19}$$

Функция Римана $v_{ik}(M;\ M_0)$ получается из функции $w_{ik}(M;\ M_0)$ дифференцированием по параметрам x_0 и y_0:

$$\frac{\partial w_{00}}{\partial y_0} = v_{00}, \qquad \frac{\partial w_{02}}{\partial x_0} = v_{02},$$

$$\frac{\partial w_{20}}{\partial y_0} = v_{20}, \qquad \frac{\partial w_{22}}{\partial x_0} = v_{22}, \tag{20}$$

в чем нетрудно убедиться.

Функцию $w_{ik}(M; M_0)$ можно найти методом последовательных приближений, сведя систему уравнений (19) к следующим уравнениям:

$$w_{00}(x, y; x_0, y_0) = 1 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\int_{x_0}^{x} a(\xi, y)d\xi \int_{y_0}^{y} a(\xi, \eta)w_{00}(\xi, \eta; x_0, y_0)d\eta,$$

$$w_{22}(x, y; x_0, y_0) = 1 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\int_{y_0}^{y} a(\xi, \eta)d\eta \int_{x_0}^{x} a(\xi, \eta)\, w_{22}(\xi, \eta; x_0, y_0)\, d\xi. \qquad (21)$$

Как нетрудно видеть, первое из уравнений (21) получается подстановкой второго из уравнений (19) в первое. Второе из уравнений (21) получается подстановкой четвертого из уравнений (19) в третье.

2. АНТИСИММЕТРИЧНОСТЬ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ РИМАНА

Антисимметричность матричной функции Римана означает

$$v_{ik}^{*}(M_1; M_2) = - v_{ki}(M_2; M_1). \qquad (22)$$

Докажем это равенство.

Выберем произвольно две точки $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ и построим по ним точку $M_3 = (x_3, y_3)$, лежащую на пересечении прямых P_1M_1 и Q_2M_2, и точку $M_4 = (x_4, y_4)$, лежащую на пересечении прямых P_2M_2 и Q_1M_1 (рис.2). Теперь мы располагаем четырьмя контурами $P_k M_k Q_k$, $k = 1, 2, 3, 4$ типа контура $P_0M_0Q_0$, изображенного на рисунке 1, причем $P_3 = P_1$, $Q_3 = Q_2$, $P_4 = P_2$, $Q_4 = Q_1$. Применяя к ним формулу (11), получим четыре формулы типа (12).

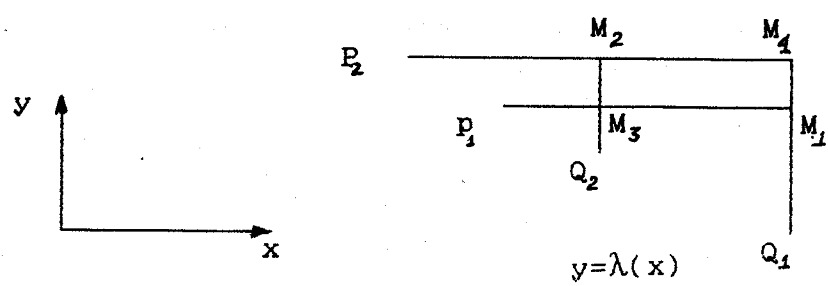

Рис.2

В каждой из четырех формул типа (12) положим сначала

$$u_0(M) = v_{00}^*(M; M_1), \qquad u_2(M) = v_{20}^*(M; M_1),$$
$$v_0(M) = v_{00}(M; M_2), \qquad v_2(M) = v_{20}(M; M_2),$$

затем

$$u_0(M) = v_{00}^*(M; M_1), \qquad u_2(M) = v_{20}^*(M; M_1),$$
$$v_0(M) = v_{02}(M; M_2), \qquad v_2(M) = v_{22}(M; M_2),$$

потом

$$u_0(M) = v_{02}^*(M; M_1), \qquad u_2(M) = v_{22}^*(M; M_1),$$
$$v_0(M) = v_{00}(M; M_2), \qquad v_2(M) = v_{20}(M; M_2),$$

наконец,

$$u_0(M) = v_{02}^*(M; M_1), \qquad u_2(M) = v_{22}^*(M; M_1),$$
$$v_0(M) = v_{02}(M; M_2), \qquad v_2(M) = v_{22}(M; M_2).$$

В результате получим

$$\int_{P_1}^{Q_1} \Lambda_{ik}\Big|_{y=\lambda(x)} dx = \int_{Q_1}^{M_1} X_{ik}\Big|_{x=x_1} dy + \int_{P_1}^{M_1} Y_{ik}\Big|_{y=y_1} dx,$$

$$\int_{Q_1}^{P_2} \Lambda_{ik}\Big|_{y=\lambda(x)} dx = \int_{M_4}^{Q_1} X_{ik}\Big|_{x=x_1} dy + \int_{M_4}^{P_2} Y_{ik}\Big|_{y=y_2} dx,$$

$$\int_{P_2}^{Q_2} \Lambda_{ik}\Big|_{y=\lambda(x)} dx = \int_{Q_2}^{M_2} X_{ik}\Big|_{x=x_2} dy + \int_{P_2}^{M_2} Y_{ik}\Big|_{y=y_2} dx,$$

$$\int_{Q_2}^{P_1} \Lambda_{ik}\Big|_{y=\lambda(x)} dx = \int_{M_3}^{Q_2} X_{ik}\Big|_{x=x_2} dy + \int_{M_3}^{P_1} Y_{ik}\Big|_{y=y_1} dx \qquad (23)$$

(эти формулы написаны в порядке 1, 4, 2, 3; в формулах, относящихся к вершинам M_3 и M_4 по сравнению с (12) переставлены местами верхние и нижние пределы интегрирования), где

$$\Lambda_{ik} = Y_{ik} - \lambda'(x)X_{ik},$$

$$X_{00} = v_{00}(M;\, M_2)\, v^*_{00}(M;\, M_1), \qquad Y_{00} = v_{20}(M;\, M_2)\, v^*_{20}(M;\, M_1),$$

$$X_{20} = v_{02}(M;\, M_2)\, v^*_{00}(M;\, M_1), \qquad Y_{20} = v_{22}(M;\, M_2)\, v^*_{20}(M;\, M_1),$$

$$X_{02} = v_{00}(M;\, M_2)\, v^*_{02}(M;\, M_1), \qquad Y_{02} = v_{20}(M;\, M_2)\, v^*_{22}(M;\, M_1),$$

$$X_{22} = v_{02}(M;\, M_2)\, v^*_{02}(M;\, M_1), \qquad Y_{22} = v_{22}(M;\, M_2)\, v^*_{22}(M;\, M_1).$$

Складывая в левой части равенства (23) четыре интеграла по кривой $y = \lambda(x)$, получаем нуль. Поэтому сумма всех интегралов, расположенных в правой части равенств (23), тоже равна нулю. Сумма двух интегралов по прямой $x = x_1$ равна интегралу от M_4 до M_1, такая же сумма по прямой $x = x_2$ равна интегралу от M_3 до M_2. Сумма двух интегралов по прямой $y = y_1$ равна интегралу от M_3 до M_1, такая же сумма по прямой $y = y_2$ равна интегралу от M_4 до M_2. Следовательно,

$$\int\limits_{M_4}^{M_1} X_{ik}\big|_{x = x_1} dy + \int\limits_{M_3}^{M_2} X_{ik}\big|_{x = x_2} dy +$$
$$+ \int\limits_{M_3}^{M_1} Y_{ik}\big|_{y = y_1} dx + \int\limits_{M_4}^{M_2} Y_{ik}\big|_{y = y_2} dx = 0. \qquad (24)$$

Далее, в соответствии с (13) и (15) имеем

$$\begin{aligned} X_{00}\big|_{x=x_1} &= 0, & X_{00}\big|_{x=x_2} &= 0,\\ X_{20}\big|_{x=x_1} &= 0, & Y_{20}\big|_{y=y_2} &= 0,\\ X_{02}\big|_{x=x_2} &= 0, & Y_{02}\big|_{y=y_1} &= 0,\\ Y_{22}\big|_{y=y_1} &= 0, & Y_{22}\big|_{y=y_2} &= 0. \end{aligned} \qquad (25)$$

Поэтому равенства (24) эквивалентны следующим равенствам:

$$\int\limits_{M_3}^{M_1} Y_{00}\big|_{y = y_1} dx + \int\limits_{M_4}^{M_2} Y_{00}\big|_{y = y_2} dx = 0,$$

$$\int\limits_{M_3}^{M_2} X_{20}\big|_{x = x_2} dy + \int\limits_{M_3}^{M_1} Y_{20}\big|_{y = y_1} dx = 0.$$

$$\int_{M_4}^{M_1} X_{02}\Big|_{x=x_1} dy + \int_{M_4}^{M_2} Y_{02}\Big|_{y=y_2} dx = 0,$$

$$\int_{M_4}^{M_1} X_{22}\Big|_{x=x_1} dy + \int_{M_3}^{M_2} X_{22}\Big|_{x=x_2} dy = 0. \tag{26}$$

Теперь, в соответствии с (13) и (15) имеем

$$Y_{00}\Big|_{y=y_1} = -i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x, y_1)\,v_{20}(x, y_1; M_2),$$

$$Y_{00}\Big|_{y=y_2} = +i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x, y_2)\,v^*_{20}(x, y_2; M_1),$$

$$Y_{20}\Big|_{y=y_1} = -i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x, y_1)\,v_{22}(x, y_1; M_2),$$

$$Y_{02}\Big|_{y=y_2} = +i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x, y_2)\,v^*_{22}(x, y_2; M_1),$$

$$X_{20}\Big|_{x=x_2} = +i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x_2, y)\,v^*_{00}(x_2, y; M_1),$$

$$X_{02}\Big|_{x=x_1} = -i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x_1, y)\,v_{00}(x_1, y; M_2),$$

$$X_{22}\Big|_{x=x_1} = -i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x_1, y)\,v_{02}(x_1, y; M_2),$$

$$X_{22}\Big|_{x=x_2} = +i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x_2, y)\,v^*_{02}(x_2, y; M_1), \tag{27}$$

а так как функция v_{ik} удовлетворяет уравнениям (17), то, следовательно,

$$Y_{00}\Big|_{y=y_1} = \frac{\partial}{\partial x}\,v_{00}(x, y_1; M_2), \qquad Y_{00}\Big|_{y=y_2} = \frac{\partial}{\partial x}\,v^*_{00}(x, y_2; M_1),$$

$$X_{20}\Big|_{x=x_2} = \frac{\partial}{\partial y}\,v^*_{20}(x_2, y; M_1), \qquad Y_{20}\Big|_{y=y_1} = \frac{\partial}{\partial x}\,v_{02}(x, y_1; M_2),$$

$$X_{02}\Big|_{x=x_1} = \frac{\partial}{\partial y}\,v_{20}(x_1, y; M_2), \qquad Y_{02}\Big|_{y=y_2} = \frac{\partial}{\partial x}\,v^*_{02}(x, y_2; M_1),$$

$$X_{22}\Big|_{x=x_1} = \frac{\partial}{\partial y}\,v_{22}(x_1, y; M_2), \qquad X_{22}\Big|_{x=x_2} = \frac{\partial}{\partial y}\,v^*_{22}(x_2, y; M_1). \tag{28}$$

Подставляя (28) в (26), получаем

$$v_{00}(M_1; M_2) - v_{00}(x_3, y_1; M_2) + v^*_{00}(M_2; M_1) - v^*_{00}(x_4, y_2; M_1) = 0,$$

$$v^*_{20}(M_2; M_1) - v^*_{20}(x_2, y_3; M_1) + v_{02}(M_1; M_2) - v_{02}(x_3, y_1; M_2) = 0,$$

$$v_{20}(M_1; M_2) - v_{20}(x_1, y_4; M_2) + v^*_{02}(M_2; M_1) - v^*_{02}(x_4, y_2; M_1) = 0,$$

$$v_{22}(M_1; M_2) - v_{22}(x_1, y_4; M_2) + v^*_{22}(M_2; M_1) - v^*_{22}(x_2, y_3; M_1) = 0. \qquad (29)$$

Так как $x_3 = x_2$, $x_4 = x_1$, $y_3 = y_1$, $y_4 = y_2$, то

$$v_{00}(x_{3,}\ y_1; M_2) = v_{00}(M_3; M_2) = v_{00}(x_2, y_1; M_2),$$

$$v^*_{00}(x_{4,}\ y_2; M_1) = v^*_{00}(M_4; M_1) = v^*_{00}(x_1, y_2; M_1),$$

$$v^*_{20}(x_{2,}\ y_3; M_1) = v^*_{20}(M_3; M_1) = v^*_{20}(x_2, y_1; M_1),$$

$$v_{02}(x_{3,}\ y_1; M_2) = v_{02}(M_3; M_2) = v_{02}(x_2, y_1; M_2),$$

$$v_{20}(x_{1,}\ y_4; M_2) = v_{20}(M_4; M_2) = v_{20}(x_1, y_2; M_2),$$

$$v^*_{02}(x_{4,}\ y_2; M_1) = v^*_{02}(M_4; M_1) = v^*_{02}(x_1, y_2; M_1),$$

$$v_{22}(x_{1,}\ y_4; M_2) = v_{22}(M_4; M_2) = v_{22}(x_1, y_2; M_2).$$

$$v^*_{22}(x_2, y_3; M_1) = v^*_{22}(M_3; M_1) = v^*_{22}(x_2, y_1; M_1). \qquad (30)$$

Из условий (13) и (15) получаются следующие равенства:

$$v_{00}(x_3, y_1; M_2) = 0, \quad v^*_{00}(x_4, y_2; M_1) = 0,$$

$$v^*_{20}(x_2, y_3; M_1) = -\,i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x_2, y_1),$$

$$v_{02}(x_3, y_1; M_2) = +\,i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x_2, y_1),$$

$$v_{20}(x_1, y_4; M_2) = +\,i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x_1, y_2),$$

$$v^*_{02}(x_4, y_2; M_1) = -\,i\,\frac{mc}{\hbar}\,a(x_1, y_2),$$

$$v_{22}(x_1, y_4; M_2) = 0, \quad v^*_{22}(x_2, y_3; M_1) = 0. \qquad (31)$$

Подставляя эти равенства в (29), получаем (22).

3. АНТИКОММУТАТОР СПИНОРНОГО ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ МИРЕ

Как видно из формул (14) и (16), антикоммутатор спинорного поля определяется во всем двумерном мире перестановочными соотношениями на некоторой пространственно-подобной кривой $y = \lambda(x)$. На этой кривой перестановочные соотношения запишем, введя операторы вида

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \{f_2 u_2^*(x) + \tilde{f}_2 u_2(x) - \lambda'(x)[f_0 u_0^*(x) + \tilde{f}_0 u_0(x)]\} dx, \tag{32}$$

где (f_0, f_2) и $(\tilde{f}_0, \tilde{f}_2)$ — некоторые «пробные» спинорные функции от x, а

$$u_k(x) = u_k(x, \lambda(x)), \quad u_k^*(x) = u_k^*(x, \lambda(x)), \quad k = 0{,}2.$$

Оператор (32) будет эрмитово самосопряженным, если $\tilde{f}_k = f_k^*$.

Для всяких двух операторов вида (32) положим

$$\{FG\} = FG + GF = 2(f, g), \tag{33}$$

где

$$(f, g) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{f_2 \tilde{g}_2 + \tilde{f}_2 g_2 - \lambda'(x)\, [\, f_0 \tilde{g}_0 + \tilde{f}_0\, g_0]\} dx. \tag{34}$$

Тем самым заданы перестановочные соотношения на кривой $y = \lambda(x)$.

Согласно (14) и (16) операторы $u_k(M_0)$ и $u_k^*(M_0)$ имеют вид (32), и поэтому для них справедливы формулы (33) и (34). Очевидно,

$$\{u_j\,(M_1)\, u_k(M_2)\} = 0, \quad \{u_j^*(M_1)\, u_k^*(M_2)\} = 0. \tag{35}$$

Воспользовавшись равенствами (23) для функции Римана, нетрудно показать, что

$$\begin{gathered}
\{u_0(M_1)\, u_0^*(M_2)\} = \varepsilon(M_1, M_2)\, v_{00}^*(M_1; M_2) + \delta(y_2 - y_1), \\
\{u_0(M_1)\, u_2^*(M_2)\} = \varepsilon(M_1, M_2)\, v_{02}^*(M_1; M_2), \\
\{u_2(M_1)\, u_0^*(M_2)\} = \varepsilon(M_1, M_2)\, v_{20}^*(M_1; M_2), \\
\{u_2(M_1)\, u_2^*(M_2)\} = \varepsilon(M_1, M_2)\, v_{22}^*(M_1; M_2) + \delta(x_2 - x_1),
\end{gathered} \tag{36}$$

где

$$\varepsilon(M_1, M_2) = \left| \begin{array}{ll} 1, & \text{если } M_2 \text{ в «будущем» по отношению к } M_1, \\ 0, & \text{если } M_1 \text{ и } M_2 \text{ пространственно-подобны}, \\ -1, & \text{если } M_1 \text{ в «будущем» по отношению к } M_2. \end{array} \right.$$

Функцию $\varepsilon(M_1, M_2)$ можно записать в виде

$$\varepsilon(M_1, M_2) = \theta(x_2 - x_1)\theta(y_2 - y_1) - \theta(x_1 - x_2)\theta(y_1 - y_2), \tag{37}$$

где

$$\theta(x) = \begin{vmatrix} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{matrix} \tag{38}$$

Из (36) следует, что антикоммутатор не зависит от выбора кривой $\lambda(x)$. Равенство нулю антикоммутатора при пространственном расположении точек M_1 и M_2 является выражением принципа причинности.

4. ФУНКЦИЯ РИМАНА В ДВУМЕРНОМ ПЛОСКОМ МИРЕ

В этом случае $a = 1$. Найдем функцию $w_{ik}(M; M_0)$. Согласно (21) при $a = 1$, очевидно,

$$w_{00}(x, y; x_0, y_0) = w_{22}(x, y; x_0, y_0) = w(x, y; x_0, y_0). \tag{39}$$

Для функции $w(x, y; x_0, y_0)$ имеем уравнение

$$w(x, y; x_0, y_0) = 1 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \int\limits_{x_0}^{x} d\xi \int\limits_{y_0}^{y} w(\xi, \eta; x_0, y_0)d\eta, \tag{40}$$

которое легко решается методом последовательных приближений. Решение выражается через функцию Бесселя $J_0(z)$:

$$w(x, y; x_0, y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = J_0(z), \tag{41}$$

где

$$z = 2\frac{mc}{\hbar}\sqrt{(x - x_0)(y - y_0)}.$$

Таким образом, функция $w(M; M_0)$ зависит только от интервала между точками M и M_0.

Из (19) находим

$$w_{20} = -i\frac{mc}{\hbar}(y - y_0)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \sqrt{\frac{y - y_0}{x - x_0}}\, J_1(z),$$

$$w_{02} = -i\frac{mc}{\hbar}(x - x_0)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \sqrt{\frac{x - x_0}{y - y_0}}\, J_1(z). \tag{42}$$

Функция Римана находится отсюда по формулам (20).

5. ФУНКЦИЯ РИМАНА В ДВУМЕРНОМ МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

Двумерный мир де Ситтера представляется в виде однополостного гиперболоида $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2 = r^2$ в трехмерном плоском мире с метрикой $(dx^1)^2 + (dx^2) - (dx^0)^2$. В качестве координат на гиперболоиде удобны углы θ и φ:

$$x^0 = r\,\mathrm{tg}\,\theta, \quad x^1 = r\,\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}, \quad x^2 = r\,\frac{\sin\varphi}{\cos\theta},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{43}$$

Метрика на гиперболоиде равна

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^0)^2 = a^2(d\varphi^2 - d\theta^2),$$

где

$$a = \frac{r}{\cos\theta}. \tag{44}$$

Вводя изотропные координаты

$$x = \frac{\theta + \varphi}{2}, \quad y = \frac{\theta - \varphi}{2}, \tag{45}$$

находим, что в данном случае функция Римана подчиняется уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} v_{0k} = -\frac{i\,\mathrm{m}}{\cos(x+y)}\, v_{2k},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} v_{2k} = -\frac{i\,\mathrm{m}}{\cos(x+y)}\, v_{0k}, \quad (k = 0, 2) \tag{46}$$

и удовлетворяет следующим характеристическим условиям:

$$v_{00}\big|_{x = x_0} = 0, \qquad v_{02}\big|_{x = x_0} = \frac{i\,\mathrm{m}}{\cos(x_0 + y)},$$

$$v_{20}\big|_{y = y_0} = \frac{i\,\mathrm{m}}{\cos(x + y_{0)}}, \qquad v_{22}\big|_{y = y_0} = 0, \tag{47}$$

где $\mathrm{m} = \dfrac{mcr}{\hbar}$ — безразмерный параметр.

Введем теперь связанные с точкой M_0 координаты $\gamma = \mathrm{ch}\,\Gamma$ и $\beta = \mathrm{th}\,B$, где Γ — геодезическое расстояние между точками M и M_0, а B— угол между отрезком M_0M и координатной линией $\varphi = \varphi_0$:

$$\gamma = \frac{\cos(x - x_0 + y_0 - y) - \sin(x + y)\sin(x_0 + y_0)}{\cos(x + y)\cos(x_0 + y_0)},$$

$$\beta = \frac{\cos(x_0 + y_0)\sin(x - x_0 + y_0 - y)}{\sin(x + y) - \sin(x_0 + y_0)\cos(x - x_0 + y_0 - y)}. \tag{48}$$

Угол f лоренцева поворота от локального репера ($d\theta$, $d\varphi$) к локальному реперу ($d\gamma$, $d\beta$) находится по формуле

$$e^{f/2} = \sqrt{\frac{\sin(x - x_0)\cos(x + y_0)}{\sin(y - y_0)\cos(x_0 + y)}}. \tag{49}$$

Общая процедура преобразования спинора при переходе от одного локального репера к другому приводит к подстановке

$$\tilde{v}_{00} = v_{00}\sqrt{\frac{\cos(x + y)}{r}}\, e^{-f/2}, \qquad \tilde{v}_{02} = v_{02}\sqrt{\frac{\cos(x + y)}{r}}\, e^{-f/2},$$

$$\tilde{v}_{20} = v_{20}\sqrt{\frac{\cos(x + y)}{r}}\, e^{f/2}, \qquad \tilde{v}_{22} = v_{22}\sqrt{\frac{\cos(x + y)}{r}}\, e^{f/2}, \tag{50}$$

которая существенно упрощает систему уравнений (46).

Действительно, $\tilde{v}_{jk}$ подчиняются системе уравнений с разделяющимися переменными, а именно:

$$\left(\frac{1 - \beta^2}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\frac{\partial}{\partial\beta} + \sqrt{\gamma^2 - 1}\,\frac{\partial}{\partial\gamma} + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\right)\tilde{v}_{0k} = -\,im\tilde{v}_{2k},$$

$$\left(\frac{\beta^2 - 1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\frac{\partial}{\partial\beta} + \sqrt{\gamma^2 - 1}\,\frac{\partial}{\partial\gamma} + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\right)\tilde{v}_{2k} = -\,im\tilde{v}_{0k}. \tag{51}$$

Чтобы удовлетворить характеристическим условиям (47) и чтобы v_{jk} не имели особенностей, надо положить

$$\tilde{v}_{j1} = \frac{i\,\mathrm{m}}{\sqrt{r\cos(x_0 + y_0)}}\, G_{j1}(\gamma)e^{B/2},$$

$$\tilde{v}_{j2} = \frac{i\,\mathrm{m}}{\sqrt{r\cos(x_0 + y_0)}}\, G_{j2}(\gamma)e^{-B/2} \tag{52}$$

и потребовать выполнения равенств

$$G_{02}(\gamma) = G_{20}(\gamma) = G_0(\gamma), \quad G_0(1) = 1.$$

$$G_{22}(\gamma) = G_{00}(\gamma) = G_2(\gamma). \tag{53}$$

При этом функции G_0 и G_2 подчиняются следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sqrt{\gamma^2-1}\,\frac{d}{d\gamma}G_0+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,G_0=imG_2,$$

$$\sqrt{\gamma^2-1}\,\frac{d}{d\gamma}G_2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,G_2=imG_0, \tag{54}$$

решение которой известно [58]:

$$G_0(\gamma)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,F\left(1-im,\ 1+im;\ 1;\ \frac{1-\gamma}{2}\right),$$

$$G_2(\gamma)=-\,im\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,F\left(1-im,\ 1+im;\ 2;\ \frac{1-\gamma}{2}\right), \tag{55}$$

где F — гипергеометрическая функция.

Собирая результаты, получаем функцию Римана:

$$v_{00}=\frac{\mathrm{m}^2}{\cos(\mathrm{x}+\mathrm{y})}\,\frac{\sin(x-x_0)}{\cos(x_0+y_0)}\,F\left(1-im,\ 1+im;\ 2;\ \frac{1-\gamma}{2}\right),$$

$$v_{20}=\frac{im}{\cos(x+y)}\,\frac{\cos(x_0+y)}{\cos(x_0+y_0)}\,F\left(1-im,\ 1+im;\ 1;\ \frac{1-\gamma}{2}\right),$$

$$v_{02}=\frac{im}{\cos(x+y)}\,\frac{\cos(x+y_0)}{\cos(x_0+y_0)}\,F\left(1-im,\ 1+im;\ 1;\ \frac{1-\gamma}{2}\right),$$

$$v_{22}=\frac{\mathrm{m}^2}{\cos(\mathrm{x}+\mathrm{y})}\,\frac{\sin(y-y_0)}{\cos(x_0+y_0)}\,F\left(1-im,\ 1+im;\ 2;\ \frac{1-\gamma}{2}\right). \tag{56}$$

6. ОПЕРАТОРЫ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ДВУМЕРНОМ МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

Чтобы ввести операторы рождения и уничтожения частиц в двумерном мире де Ситтера, запишем уравнения ДФИ в следующем матричном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{i\,\mathrm{m}}{\cos\theta}\,Lu+K\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \tag{57}$$

где u — столбец, K и L — матрицы:

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Решение уравнения (57) будем искать в виде ряда Фурье

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{s+1/2} \exp\left\{ i\left(s + \frac{1}{2} \right)\varphi \right\}. \tag{59}$$

Разложение по полуцелым гармоникам определяется следующим условием:

$$u(\theta, 2\pi) = -u(\theta, 0). \tag{60}$$

Заметим, что этому глобальному условию удовлетворяет и функция Римана, определяемая локально.

Для коэффициентов ряда (59) получаем уравнение

$$\frac{d}{d\theta} u_{s+1/2} = i\left(s + \frac{1}{2} \right) K u_{s+1/2} + \frac{im}{\cos\theta} L u_{s+1/2}. \tag{61}$$

Так как сумму в разложении (59) можно представить в виде

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[u_{p+1/2} \exp\left\{ i\left(p + \frac{1}{2} \right)\varphi \right\} + u_{-p-1/2} \exp\left\{ -i\left(p + \frac{1}{2} \right)\varphi \right\} \right], \tag{62}$$

то для определения коэффициентов разложения требуется решить для всех $p > 0$ следующие две системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{df}{d\theta} + i\left(p + \frac{1}{2} \right) f = \frac{im}{\cos\theta} g, \\ &\frac{dg}{d\theta} - i\left(p + \frac{1}{2} \right) g = \frac{im}{\cos\theta} f \end{aligned} \tag{63}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{df}{d\theta} - i\left(p + \frac{1}{2} \right) f = \frac{im}{\cos\theta} g, \\ &\frac{dg}{d\theta} + i\left(p + \frac{1}{2} \right) g = \frac{im}{\cos\theta} f. \end{aligned} \tag{64}$$

Первая система имеет следующие два решения:

$$1)\ f = f_p(\theta), \qquad g = g_p(\theta);$$

$$2)\ f = -g_p^*(\theta) = -g_p(-\theta), \quad g = f_p^*(\theta) = f_p(-\theta).$$

Они линейно независимы, так как составленный из них характерный определитель равен

$$\begin{vmatrix} f_p(\theta) & g_p(\theta) \\ -g_p^*(\theta) & f_p^*(\theta) \end{vmatrix} = |f_p(\theta)|^2 + |g_p(\theta)|^2 \tag{65}$$

и вследствие (63) не зависит от времени θ.

Вторая система имеет следующие два решения:

$$1)\ f = -g_p(\theta), \quad g = -f_p(\theta), \quad 2)\ f = f_p^*(\theta), \quad g = -g_p^*(\theta).$$

По той же причине они также линейно независимы.

Таким образом, коэффициенты ряда Фурье (62) можно записать в следующем виде:

$$u_{p+1/2}(\theta) = \begin{pmatrix} f_p(\theta) \\ g_p(\theta) \end{pmatrix} A_{p+1/2} + \begin{pmatrix} -g_p^*(\theta) \\ f_p^*(\theta) \end{pmatrix} B^+_{-p-1/2},$$

$$u_{-p-1/2}(\theta) = \begin{pmatrix} -g_p(\theta) \\ -f_p(\theta) \end{pmatrix} A_{-p-1/2} + \begin{pmatrix} f_p^*(\theta) \\ -g_p^*(\theta) \end{pmatrix} B^+_{p+1/2}, \tag{66}$$

где A и B — операторные константы.

Что до явного вида функций $f_p(\theta)$ и $g_p(\theta)$, то они равны

$$f_p(\theta) = N_p e^{-i(p+1/2)\theta} F\left(-i\mathrm{m}, i\mathrm{m}; p+1; \frac{e^{-i\theta}}{2\cos\theta}\right),$$

$$g_p(\theta) = -N_p \frac{\mathrm{m}}{2(p+1)\cos\theta} e^{-i(p+1/2)\theta} \times$$

$$\times F\left(1 - i\mathrm{m}, 1 + i\mathrm{m}; p+2; \frac{e^{-i\theta}}{2\cos\theta}\right), \tag{67}$$

где N_p — нормировочный множитель. Считая, что определитель (65) равен 1, находим

$$N_p = \frac{\sqrt{\Gamma(p+1+i\mathrm{m})\Gamma(p+1-i\mathrm{m})}}{p!}. \tag{68}$$

В соответствии с (36) полевой оператор подчиняется коммутационным соотношениям

$$\{u_k(\theta, \varphi_2)\, u_j(\theta, \varphi_1)\} = 0, \qquad \{u_k^*(\theta, \varphi_2)\, u_j^*(\theta, \varphi_1)\} = 0,$$

$$\{u_k(\theta, \varphi_2)\, u_j^*(\theta, \varphi_1)\} = \delta_{kj}\, \delta(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{69}$$

Отсюда следует, что операторы A и B удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\{A_{r+1/2}, A_{s+1/2}\} = 0, \quad \{B_{r+1/2}, B_{s+1/2}\} = 0,$$

$$\{A^+_{r+1/2}, A^+_{s+1/2}\} = 0, \quad \{B^+_{r+1/2}, B^+_{s+1/2}\} = 0,$$

$$\{A_{r+1/2}, A^+_{s+1/2}\} = \delta_{rs}, \quad \{B_{r+1/2}, B^+_{s+1/2}\} = \delta_{rs}. \tag{70}$$

К тому же операторы, обозначенные разными буквами (A и B), независимо от того, какими индексами они снабжены, антикоммутируют. Операторы A^+ и A можно истолковать как операторы рождения и уничтожения электронов, а операторы B^+ и B — как операторы рождения и уничтожения позитронов.

7. КАНОНИЧЕСКИЙ ПУТЬ

Для метрики

$$ds^2 = a^2(\varphi, \theta)\,(d\varphi^2 - d\theta^2) \tag{71}$$

уравнение ДФИ

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{imc}{\hbar} aLu + K\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \tag{72}$$

частным случаем которого является уравнение (57), можно получить каноническим путем из интеграла действия

$$S = \int\int \Lambda d\varphi d\theta, \tag{73}$$

где

$$\Lambda = \frac{i\hbar}{2}\left(u^* \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial u^*}{\partial \theta} u - u^* K \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u^*}{\partial \theta} Ku - \frac{2imc}{\hbar} au^* Lu \right). \tag{74}$$

Каноническим же путем отсюда получается вектор тока

$$J_\theta = -u^* u, \qquad J_\varphi = -u^* Ku \tag{75}$$

и тензор энергии-импульса

$$T_{\theta\theta} = \frac{i\hbar}{2}\left(u^* \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial u^*}{\partial \theta} u \right),$$

$$T_{\theta\varphi} = T_{\varphi\theta} = \frac{i\hbar}{2}\left(u^* K \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial u^*}{\partial \theta} Ku \right) = \frac{i\hbar}{2}\left(u^* \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} u \right),$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{i\hbar}{2}\left(u^* K \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} Ku \right). \tag{76}$$

След тензора энергии-импульса равен

$$T = a^{-2}(T_{\varphi\varphi} - T_{\theta\theta}) = \frac{mc}{a} u^* L u. \tag{77}$$

Ковариантные дивергенции любого вектора J_α и любого симметричного тензора $T_{\alpha\beta}$ в мире с метрикой (71) равны

$$g^{\mu\alpha}\nabla_\mu J_\alpha = g^{\mu\alpha}\partial_\mu J_\alpha, \tag{78}$$

$$g^{\mu\alpha}\nabla_\mu T_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha}\partial_\mu T_{\alpha\beta} - Ta^{-1}\partial_\beta a. \tag{79}$$

Подставляя сюда (75), (76) и (77) и учитывая уравнение (72), находим, что ковариантные дивергенции вектора тока и тензора энергии-импульса равны нулю.

В силу этого интеграл

$$\hat{e} = \int j_\alpha d\sigma^\alpha \tag{80}$$

по Σ, где Σ — пространственно-подобная кривая, разделяющая мир на две части, не зависит от выбора Σ. Это есть оператор заряда. Если существует векторное поле ζ^α, порождающее изометрическое преобразование, то интеграл

$$M = \int T_{\alpha\beta}\zeta^\alpha\sigma^\beta \tag{81}$$

по кривой Σ также не зависит от выбора Σ. На кривой $\theta = \mathrm{const}$, являющейся одной из кривых вида Σ,

$$j_\alpha d\sigma^\alpha = j_\theta d\varphi, \quad T_{\alpha\beta}\zeta^\alpha d\sigma^\beta = T_{\alpha\theta}\zeta^\alpha d\varphi. \tag{82}$$

В частном случае (44) три векторных поля

$$\frac{-i}{\hbar}\underset{(01)}{X} = \cos\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\frac{-i}{\hbar}\underset{(02)}{X} = \cos\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\frac{-i}{\hbar}\underset{(12)}{X} = -\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{83}$$

порождают группу изометрических преобразований гиперболоида (43). При этом два вещественных поля $\underset{(01)}{X}$ и $\underset{(02)}{X}$ удобно объединить в одно комплексное поле

$$\frac{-i}{\hbar}\left(\underset{(01)}{X} + i\underset{(02)}{X}\right) = e^{i\varphi}\left(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + i\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{84}$$

Воспользовавшись разложением (59), получаем интеграл (80) в виде

$$\hat{e} = -e\int_0^{2\pi} u^* u d\varphi = -e\sum_{s=-\infty}^{\infty} u^*_{s+1/2} u_{s+1/2} \tag{85}$$

и два интеграла типа (81) в виде

$$\underset{(12)}{M} = -\int_0^{2\pi} T_{\theta\varphi} d\varphi = h\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left(s+\frac{1}{2}\right) u^*_{s+1/2} u_{s+1/2}, \tag{86}$$

$$\underset{(01)}{M} + i\underset{(02)}{M} = \int_0^{2\pi}(\cos\theta T_{\theta\theta} + i\sin\theta T_{\theta\varphi})\, e^{i\varphi} d\varphi = -h\sum_{s=-\infty}^{\infty}\mu_s, \tag{87}$$

где

$$\mu_s = u^*_{s+1/2}(\mathrm{m}L + sKe^{iK\theta})u_{s-1/2}. \tag{88}$$

Все эти интегралы не зависят от θ, в чем можно убедиться, проверив, что в силу уравнения (61)

$$\frac{d}{d\theta} u^*_{s+1/2} u_{s+1/2} = 0, \qquad \frac{d}{d\theta}\mu_s = 0. \tag{89}$$

На основании (66) находим

$$\begin{aligned} u^*_{p+1/2} u_{p+1/2} &= A^+_{p+1/2} A_{p+1/2} + B_{-p-1/2} B^+_{-p-1/2}, \\ u^*_{-p-1/2} u_{-p-1/2} &= A^+_{-p-1/2} A_{-p-1/2} + B_{p+1/2} B^+_{p+1/2}, \end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mathrm{m}(B_{-1/2} B^+_{1/2} - A^+_{1/2} A_{-1/2}), \\ \mu_{p+1} &= \sqrt{(p+1)^2 + \mathrm{m}^2}\,(B_{-p-3/2} B^+_{-p-1/2} - A^+_{p+3/2} A_{p+1/2}), \\ \mu_{-p-1} &= \sqrt{(p+1)^2 + \mathrm{m}^2}\,(B_{p+1/2} B^+_{p+3/2} - A^+_{-p-1/2} A_{-p-3/2}). \end{aligned} \tag{91}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{e} &= e\sum_{s=-\infty}^{\infty}(B^+_{s+1/2} B_{s+1/2} - A^+_{s+1/2} A_{s+1/2}), \\ \underset{(12)}{M} &= h\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left(s+\frac{1}{2}\right)(A^+_{s+1/2} A_{s+1/2} + B^+_{s+1/2} B_{s+1/2}), \\ \underset{(01)}{M} + i\underset{(02)}{M} &= h\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sqrt{s^2 + \mathrm{m}^2}\,(A^+_{s+1/2} A_{s-1/2} + B^+_{s+1/2} B_{s-1/2}). \end{aligned} \tag{92}$$

Из двух первых этих формул видно, что $A^+_{s+1/2}$ и $B^+_{s+1/2}$ являются операторами рождения электрона и позитрона в состоянии с моментом $\hbar\left(s+\frac{1}{2}\right)$ и что $A_{s+1/2}$ и $B_{s+1/2}$ являются операторами уничтожения электрона и позитрона в состоянии с моментом $\hbar\left(s+\frac{1}{2}\right)$.

Замечательно, что операторы (92) инвариантны относительно подстановки

$$A_{s+1/2} \to \frac{e^{-i\alpha}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}}\left(A_{s+1/2} + i(-1)^s B^+_{-s-1/2}\right),$$

$$B_{s+1/2} \to \frac{e^{i\beta}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}}\left(B_{s+1/2} + i(-1)^s A^+_{-s-1/2}\right), \qquad (93)$$

где α и β — любые действительные числа, λ — любое комплексное число. Эта подстановка каноническая в том смысле, что она сохраняет коммутационные соотношения (70). Она аналогична подстановке Боголюбова в теории сверхпроводимости [59].

Следовательно, непрерывная группа изометрий в мире де Ситтера не определяет однозначно вакуумное состояние. Не уменьшает произвола в выборе вакуума и пространственное отражение $\varphi \to -\varphi$. Напротив, отражение $\theta \to -\theta$ времени накладывает следующие ограничения:

$$\alpha = \beta, \quad \lambda = \lambda^*. \qquad (94)$$

8. РАЗЛОЖЕНИЕ АНТИКОММУТАТОРА В РЯД ФУРЬЕ

В разделе 3 и 5 антикоммутатор спинорного поля в двумерном мире де Ситтера был получен нами с помощью метода Римана, но его можно получить и непосредственно из условий (70). Для ряда (59) с коэффициентами (66) антикоммутатор равен

$$\{u_0(M_1)u_0^*(M_2)\} = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=-\infty}^{\infty} F_{s+1/2}\exp\left\{i\left(s+\frac{1}{2}\right)\varphi_0\right\},$$

$$\{u_2(M_1)u_0^*(M_2)\} = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=-\infty}^{\infty} G_{s+1/2}\exp\left\{i\left(s+\frac{1}{2}\right)\varphi_0\right\},$$

$$\{u_0(M_1)u_2^*(M_2)\} = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=-\infty}^{\infty} G_{-s-1/2}\exp\left\{i\left(s+\frac{1}{2}\right)\varphi_0\right\},$$

$$\{u_2(M_1)u_2^*(M_2)\} = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=-\infty}^{\infty} F_{-s-1/2}\exp\left\{i\left(s+\frac{1}{2}\right)\varphi_0\right\}, \tag{95}$$

где $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$.

Коэффициенты разложения равны

$$F_{p+1/2} = f_p(\theta_1)f_p^*(\theta_2) + g_p^*(\theta_1)\,g_p(\theta_2),$$

$$F_{-p-1/2} = f_p(\theta_1)f_p^*(\theta_2) + g_p^*(\theta_1)\,g_p(\theta_2),$$

$$G_{p+1/2} = g_p(\theta_1)\,f_p^*(\theta_2) - f_p^*(\theta_1)\,g_p(\theta_2),$$

$$G_{-p-1/2} = f_p(\theta_1)\,g_p^*(\theta_2) - g_p^*(\theta_1)\,f_p(\theta_2), \tag{96}$$

где $p = 0, 1, 2, \ldots$. Они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial\theta_1} + i\left(s+\frac{1}{2}\right)F = \frac{im}{\cos\theta_1}G,$$

$$\frac{\partial G}{\partial\theta_1} - i\left(s+\frac{1}{2}\right)G = \frac{im}{\cos\theta_1}F, \tag{97}$$

с начальными данными $F = 1$, $G = 0$, при $\theta_1 = \theta_2$.

Но такой же системе дифференциальных уравнений и с теми же начальными данными удовлетворяет следующая пара функций:

$$I_{s+1/2} = \exp\left\{-i\left(s+\frac{1}{2}\right)\theta_0\right\} -$$

$$-\frac{m^2}{2}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{\sin\dfrac{\theta_0+\varphi_0}{2}}{\cos\theta_1\cos\theta_2}F\left(1-im, 1+im; 2; \frac{1-\gamma}{2}\right)\exp\left\{-i\left(s+\frac{1}{2}\right)\varphi_0\right\}d\varphi_0,$$

$$J_{s+1/2} = \frac{im}{2}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{\cos\dfrac{\theta_0+\varphi_0}{2}}{\cos\theta_1\cos\theta_2}F\left(1-im, 1+im; 2; \frac{1-\gamma}{2}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-i\left(s+\frac{1}{2}\right)\varphi_o\right\}d\varphi_0, \tag{98}$$

где

$$\theta_0 = \theta_1 - \theta_2, \quad \gamma = \frac{\cos\varphi_0 - \sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2}. \tag{99}$$

Следовательно,

$$F_{s+1/2} = I_{s+1/2}, \quad G_{s+1/2} = J_{s+1/2}. \tag{100}$$

Это позволяет просуммировать ряды (95) и получить антикоммутатор спинорного поля в известном нам виде (36).

IV. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В БАЗИСЕ *dX*

1. СПЕЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

Переход от уравнения ДФИ к специальному уравнению, указанному Дираком для мира де Ситтера в работе [36], установлен в работе [37]. $2n$-мерный случай рассмотрен в работе [60].

$2n$-мерный мир де Ситтера можно представить в виде гиперболоида $\eta_{AB}x^Ax^B = r^2$ в $(2n+1)$-мерном мире Минковского. Здесь при $\eta_{aa} = -\eta_{00} = 1$, $\eta_{AB} = 0$ при $A \neq B$, большие латинские индексы пробегают значения $0, 1, \ldots, 2n$, малые латинские индексы пробегают значения $1, 2, \ldots, 2n$. В этом общем случае спинор имеет 2^n компонент [32], и можно подобрать одну антиэрмитову матрицу H^0 и $2n$ эрмитовых матриц H^a, удовлетворяющих условиям $H^AH^B + H^BH^A = 2\eta^{AB}$.

Специальное уравнение Дирака в $2n$-мерном случае обобщается в следующем виде:

$$H^Am_A\Xi = (n + i\mathrm{m})\,\frac{X}{r}\,\Xi, \tag{1}$$

где Ξ — спинор ξ, отнесенный к базису dx^A, $X = x^AH_A$,

$$m_A = r\,\frac{\partial}{\partial x^A} - \frac{x_Ax^B}{r}\,\frac{\partial}{\partial x^B}. \tag{2}$$

Так как

$$\frac{1}{2}\,H^AH^Bm_{AB} = \frac{1}{2}\,(XH^A - H^AX)\,\frac{\partial}{\partial x^A} = \frac{X}{r}\,H^Am_A, \tag{3}$$

где

$$m_{AB} = x_A\,\frac{\partial}{\partial x^B} - x_B\,\frac{\partial}{\partial x^A}, \tag{4}$$

то уравнение (1) можно записать в виде

$$\left(\frac{1}{2} H^A H^B m_{AB} - n \right) \Xi = i \, \mathrm{m} \, \Xi. \tag{5}$$

Оператор M, равный

$$M = \frac{1}{2} H^A H^B m_{AB} - n, \tag{6}$$

антикоммутирует с оператором X, то есть

$$MX + XM = 0. \tag{7}$$

Отсюда заключаем, что оператор, равный $(-iH_0XM)$, эрмитов. Кроме того, эрмитов и оператор H_0X. Следовательно, при действительных значениях параметра m уравнение (1) «эрмитизируется» умножением на оператор, равный $(-iH_0)$.

Дираковски-сопряженный спинор

$$\bar{\Xi} = \Xi^* H_0 \tag{8}$$

удовлетворяет уравнению

$$m_A \bar{\Xi} H^A = (n - i\mathrm{m}) \bar{\Xi} \frac{X}{r} \tag{9}$$

или

$$\frac{1}{2} m_{AB} \bar{\Xi} H^A H^B = (n - i\mathrm{m}) \bar{\Xi}. \tag{10}$$

Наряду с (7) оператор M обладает еще одним важным свойством, а именно

$$(M + n)(M + 1 - n) = -\frac{1}{2} m_{AB} m^{AB} = -m_A m^A. \tag{11}$$

В силу этого каждая из 2^n компонент спинора Ξ в отдельности удовлетворяет одному и тому же уравнению

$$m_A m^A \Xi = (n + i\mathrm{m})(n - 1 - i\mathrm{m}) \Xi, \tag{12}$$

если сам спинор Ξ удовлетворяет уравнению (5). При этом каждая компонента сопряженного спинора $\bar{\Xi}$ удовлетворяет уравнению

$$m_A m^A \bar{\Xi} = (n - i\mathrm{m})(n - 1 + i\mathrm{m}) \bar{\Xi}. \tag{13}$$

Из очевидного тождества

$$(M + n)(M + 1 - n) - (n + i\mathrm{m})(i\mathrm{m} + 1 - n) = \\ = (M - i\mathrm{m})(M + 1 + i\mathrm{m}) \tag{14}$$

следует лемма:

Если спинор Φ удовлетворяет уравнению (12), то спинор

$$\Xi = (M + 1 + i\mathrm{m})\Phi \tag{15}$$

удовлетворяет уравнению (1) (или, что то же, уравнению (5)).

Аналогично доказывается сопряженная лемма:

Если спинор $\overline{\Phi}$ удовлетворяет уравнению (13), то спинор

$$\overline{\Xi} = \overline{\Phi}(M + 1 - i\mathrm{m}) \tag{16}$$

удовлетворяет уравнению (9) (или, что то же, уравнению (10)).

В случае $n = 2$ уравнения (1), (5) и (12) были указаны самим Дираком в работе [36]. Здесь мы подробно рассмотрим случай $n = 1$.

2. ПЕРЕХОД ОТ БАЗИСА F К БАЗИСУ dX

Уравнение (III.72) можно записать в виде

$$H^0 \frac{\partial u}{\partial \theta} + H^1 \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{imc}{\hbar} aH^2 u, \tag{17}$$

где матрицы H^A равны

$$H^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Эти матрицы удовлетворяют следующим условиям:

$$H^0H^1 = H^2, \quad H^0H^2 = -H^1, \quad H^1H^2 = -H^0, \quad H^0H^1H^2 = 1,$$
$$H^AH^B + H^BH^A = 2\eta^{AB}. \tag{19}$$

Столбец u связан со спинором ξ, отнесенным к базису $f(f^0 = ad\theta$, $f^1 = ad\varphi)$, следующим образом: $u = \sqrt{a}\xi$.

Ковариантная производная спинора в базисе f равна

$$\xi_\mu = D_\mu \xi = e_\mu \xi + \frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\beta\mu} H^\alpha H^\beta \xi, \tag{20}$$

где $e_0 = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$, $e_1 = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, $\omega_{\alpha\beta\mu} = \varepsilon_{\alpha\beta}C_\mu$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор и $\varepsilon_{10} = 1$, $C_0 = a^{-2}\dfrac{\partial a}{\partial\varphi}$, $C_1 = a^{-2}\dfrac{\partial a}{\partial\theta}$. Ковариантная производная сопряженного спинора $\overline{\xi} = \xi^* H_0$ в базисе f равна

$$\overline{\xi}_\mu = D_\mu\, \overline{\xi} = e_\mu\, \overline{\xi} - \frac{1}{4}\,\overline{\xi}\omega_{\alpha\beta\mu}\, H^\alpha H^\beta. \tag{21}$$

В этих обозначениях уравнение (17) записывается в следующем виде:

$$\left(H^{\nu} D_{\nu} - \frac{imc}{\hbar} H^2 \right) \xi = 0. \tag{22}$$

Вернемся к рассмотрению двумерного мира де Ситтера и представим его в виде гиперболоида (III.43). При этом $a = r(\cos\theta)^{-1}$. К дифференциальным формам f^0, f^1 добавим форму $f^2 = dr$ и от базиса

$$F = \left\{ \frac{r}{\cos\theta} d\theta,\ \frac{r}{\cos\theta} d\varphi,\ dr \right\} \tag{23}$$

перейдем к базису

$$dX = \{dx^0,\ dx^1,\ dx^2\}, \tag{24}$$

составленному из дифференциалов функций (III.43). При этом удобно сделать замену

$$\varphi \to \frac{\pi}{2} - \varphi. \tag{25}$$

Переход от базиса F к базису dX достигается преобразованием Лоренца вида $dx^A = \tilde{L}^A_B f^B$, $f^B = L^B_A dx^A$. Можно подобрать такую матрицу S, что

$$S^{-1} H^A S = \tilde{L}^A_B H^B, \qquad S H^A S^{-1} = L^A_B H^B,$$

$$S H_A S^{-1} = \tilde{L}^B_A H_B, \qquad S^{-1} H_A S = L^B_A H_B. \tag{26}$$

Если обозначить $dX = H_A dx^A$, $F = H_A f^A$, то $dX = SFS^{-1}$, $F = S^{-1} dXS$. Переход от базиса F к базису dX сопровождается подстановкой

$$\Xi = S\xi. \tag{27}$$

В данном случае

$$S = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + H_1 H_2 \sin\frac{\varphi}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\cos\theta}} \left(\cos\frac{\theta}{2} + H_0 H_2 \sin\frac{\theta}{2} \right),$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\cos\theta}} \left(\cos\frac{\theta}{2} - H_0 H_2 \sin\frac{\theta}{2} \right) \left(\cos\frac{\varphi}{2} - H_1 H_2 \sin\frac{\varphi}{2} \right). \tag{28}$$

Имеем

$$S^{-1} H^0 S = H^0 \frac{1}{\cos\theta} + H^2 \operatorname{tg}\theta,$$

$$S^{-1} H^1 S = H^0 \operatorname{tg}\theta \sin\varphi + H^1 \cos\varphi + H^2 \frac{\sin\varphi}{\cos\theta},$$

$$S^{-1} H^2 S = H^0 \operatorname{tg}\theta \cos\varphi - H^1 \sin\varphi + H^2 \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \tag{29}$$

и, наоборот,

$$SH^0S^{-1} = H^0 \frac{1}{\cos\theta} - H^1 \operatorname{tg}\theta \sin\varphi - H^2 \operatorname{tg}\theta\cos\varphi,$$

$$SH^1S^{-1} = H^1 \cos\varphi - H^2 \sin\varphi,$$

$$SH^2S^{-1} = -H^0 \operatorname{tg}\theta + H^1 \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} + H^2 \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} = \frac{X}{r}. \tag{30}$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\beta\nu} H^\alpha H^\beta = S^{-1} e_\nu S - \frac{1}{2r} H_\nu H^2. \tag{31}$$

Следовательно,

$$D_\nu \xi = S^{-1} e_\nu \,\Xi - \frac{1}{2r} H_\nu H^2 S^{-1}\,\Xi,$$

$$D_\nu \bar{\xi} = (e_\nu \bar{\Xi})\, S + \frac{1}{2r}\,\bar{\Xi}\, S H_\nu H^2. \tag{32}$$

Поэтому

$$H^\nu D_\nu \xi = H^\nu S^{-1} e_\nu\, \Xi - \frac{1}{r} H^2 S^{-1}\,\Xi,$$

$$D_\nu \bar{\xi} H^\nu = (e_\nu \bar{\Xi})\, SH^\nu - \frac{1}{r}\,\bar{\Xi}\, SH^2. \tag{33}$$

Далее, векторные поля (2) в рассматриваемом случае равны

$$m_0 = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad m_1 = -\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$m_2 = -\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{34}$$

Поэтому, ввиду (30),

$$rSH^\nu S^{-1} e_\nu = H^A m_A, \tag{35}$$

так что уравнение (22) в базисе dX принимает вид (1) при $n = 1$. Сопряженное с ним уравнение

$$D_\nu \bar{\xi} H^\nu = -\frac{imc}{\hbar}\,\bar{\xi} H^2 \tag{36}$$

принимает вид (9) при $n = 1$.

3. ВЕКТОР ТОКА И ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В БАЗИСЕ dX

В двумерном мире в базисе F вектор тока равен (II. 28), а тензор энергии-импульса согласно (II. 31) и (II. 35) равен

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{2}(\bar{\xi} H_\mu \xi_\nu - \bar{\xi}_\nu H_\mu \xi) = \frac{i\hbar}{2}(\bar{\xi} H_\nu \xi_\mu - \bar{\xi}_\mu H_\nu \xi), \tag{37}$$

так как в двумерном случае $[H_\mu H_\nu H^\alpha] = 0$.

Чтобы преобразовать вектор тока и тензор энергии-импульса к базису dX, наряду с (27) и (32) надо воспользоваться равенствами

$$\bar{\xi} = \bar{\Xi} S, \qquad D_\mu \bar{\xi} = (e_\mu \bar{\Xi}) - \frac{1}{2r} \bar{\Xi} S H_2 H_\mu. \tag{38}$$

В результате получается

$$J^A = \frac{e}{r} \bar{\Xi} X^A \Xi, \tag{39}$$

$$T_{AB} = \frac{i\hbar}{2r^2}[\bar{\Xi} X_A \Xi_B - \bar{\Xi}_B X_A \Xi + \varepsilon_{ABC} X^C \bar{\Xi}\Xi =$$

$$= \frac{i\hbar}{2r^2}[\bar{\Xi} X_A \Xi_B - \bar{\Xi}_B X_A \Xi + \bar{\Xi} X_B \Xi_A - \bar{\Xi}_A X_B \Xi], \tag{40}$$

где ε_{ABC} — полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{012} = 1$, $\Xi_A = m_A \Xi$, $\bar{\Xi}_A = m_A \bar{\Xi}$, $X_A = m_A X = rH_A - \frac{x_A}{r} X = \frac{X}{2r}[XH_A - H_A X]$. Так как в базисе F дивергенция вектора тока и дивергенция тензора энергии-импульса равны нулю, то в базисе dX

$$m_A J^A = 0, \quad m_A T^{AB} = 0. \tag{41}$$

4. ОПЕРАТОР ЗАРЯДА В БАЗИСЕ dX

Оператор заряда $\hat{e}$ в базисе F равен интегралу от определителя

$$\begin{vmatrix} f^0 & f^1 \\ J^0 & J^1 \end{vmatrix}$$

по кривой Σ. Тот же оператор в базисе dX равен интегралу по кривой Σ от определителя

$$\frac{1}{r}\begin{vmatrix} J^0 & x^0 & dx^0 \\ J^1 & x^1 & dx^1 \\ J^2 & x^2 & dx^2 \end{vmatrix}. \tag{42}$$

Подставляя сюда вектор тока (39), находим

$$\hat{e} = \frac{-e}{r}\int \bar{\Xi}\, XdX\, \Xi. \tag{43}$$

Этот интеграл не зависит от выбора кривой Σ. Задавая ее уравнением $\theta = 0$, находим $XdX = r^2 H^0 d\varphi$ и

$$\hat{e} = -er\int_0^{2\pi} \Xi^* \Xi\, d\varphi. \tag{44}$$

5. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ В БАЗИСЕ dX

В двумерном мире де Ситтера имеется три векторных поля Киллинга вида (4) с компонентами, равными

$$\underset{(PQ)}{Z^C} = x_P\,\delta_Q^C - x_Q\delta_P^C. \tag{45}$$

Им соответствуют изометрические операторы

$$\underset{(PQ)}{K} = -i\hbar\left(m_{PQ} + \frac{1}{2}H_P H_Q\right) \tag{46}$$

и вторично квантованные операторы, представленные интегралами

$$\underset{(PQ)}{M} = \frac{-1}{r}\int \bar{\Xi}\, XdX \underset{(PQ)}{K}\, \Xi \tag{47}$$

по кривой Σ. Последние определяются интегралами по кривой Σ от выражений вида (42), в которых компоненты J^A заменяются на свертки $T_C^A \underset{(PQ)}{Z^C}$ тензора (40) с вектором (45). Задавая Σ уравнением $\theta = 0$, получаем

$$\underset{(PQ)}{M} = -i\hbar r\int_0 \Xi^*(m_{pq} + H_P H_Q)\, \Xi d\varphi. \tag{48}$$

6. АНТИКОММУТАТОР СПИНОРНОГО ПОЛЯ В БАЗИСЕ dX

В третьей части данного обзора получен антикоммутатор поля, подчиненного уравнению (17). Для этого потребовалось решить задачу Коши. Последняя была решена методом Римана, и антикоммутатор выразился через функцию Римана для уравнения (17). Там же была в явном виде найдена функция Римана для уравнения (17). Если полученный там антикоммутатор преобразовать к базису dX, то он выразится в любом из следующих двух видов:

$$\{\bar{\Xi}(x)\,\Xi(y)\} = r^{-2}(\underset{x}{M} + 1 + im)\,D^{(+)}(x, y,)Y =$$

$$= r^{-2}XD^{(-)}(x, y)\,(\underset{y}{M} + 1 - im), \tag{49}$$

где $\{\Xi(x)\,\bar{\Xi}(y)\}$ — матрица, элементы которой равны $\Xi_p(x)\,\bar{\Xi}_q(y) + {}$ $+\bar{\Xi}_q(y)\,\Xi_p(x)$. Значки x и y под M означают, что оператор M отнесен, соответственно, к точкам x и y. Матрица Y равна $Y = y^A Y_A$.

Функция $D^{(+)}$ равна

$$D^{(+)}(x, y) = \varepsilon(x^0 - y^0)\,\frac{1 + \varepsilon(\Lambda)}{2}\,F\left(-im,\, 1 + im;\, \frac{\Lambda}{4}\right), \tag{50}$$

где $\Lambda = r^{-2}(x^A - y^A)\,(x_A - y_A)$, $\varepsilon(\Lambda)$ равно знаку Λ. Функция $D^{(+)}$ подчиняется уравнению (12) при $n = 1$.

Функция $D^{(-)}$ получается из $D^{(+)}$ заменой m на $-m$. Она подчиняется уравнению (13) при $n = 1$.

Антикоммутатор (49) подчиняется уравнению

$$(\underset{x}{M} - im)\,\{\Xi(x)\,\bar{\Xi}(y)\} = 0. \tag{51}$$

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ В БАЗИСЕ dX

Антикоммутатор (49) можно получить непосредственно, решая задачу Коши для уравнения (1). При $n = 1$ имеем

$$m_0 = \frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad m_1 = -\sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$m_2 = -\sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{52}$$

Отсюда получаем

$$m_A m^A = \cos^2\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right). \tag{53}$$

Согласно (12) спинорное поле в данном случае подчиняется уравнению

$$\cos^2\theta\left(\frac{\partial^2\Xi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\Xi}{\partial\varphi^2}\right) = im(1 + im)\,\Xi. \tag{54}$$

Пусть данные Коши относятся к кривой Σ, разделяющей гиперболоид (23) на две части. Ее можно задать уравнением $\theta = f(\varphi)$, причем $f(2\pi) = f(0)$ и $-1 < \dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi} < 1$. Решение задачи Коши для уравнения (54) выражается через функцию $D^{(+)}$:

$$\Xi(x) = \int_0^{2\pi} [D^{(+)}(x, y)\,\Xi_{(o)}(y) - D^{(+)}_{(o)}(x, y)\,\Xi(y)]\,\Big|_{\tilde\theta = f(\tilde\varphi)} d\tilde\varphi, \tag{55}$$

где (o) — знак нормальной производной к кривой Σ. Например,

$$\Xi_{(o)}(y) = \left[\frac{\partial}{\partial\tilde\theta} + \frac{df(\tilde\varphi)}{d\tilde\varphi}\frac{\partial}{\partial\tilde\varphi}\right]\Xi(y). \tag{56}$$

Взяв ее из уравнения (1) при $n = 1$, можно получить для этого уравнения решение задачи Коши [56] в виде (15), где

$$\Phi = \frac{1}{r}\int D^{(+)}(x, y)dY\,\Xi(y), \tag{57}$$

$$dY = \left[\frac{\partial Y}{\partial\tilde\varphi} + \frac{\partial Y}{\partial\tilde\theta}\frac{df(\tilde\varphi)}{d\tilde\varphi}\right]d\tilde\varphi \tag{58}$$

— элементарное смещение матрицы Y вдоль кривой Σ.

Полученное решение можно записать через антикоммутатор (49):

$$\Xi(x) = \int \{\Xi(x)\,\bar\Xi(y)\}\,\frac{Y}{r}\,dY\,\Xi(y). \tag{59}$$

Решение задачи Коши для сопряженного уравнения Дирака можно записать через тот же антикоммутатор (49):

$$\bar\Xi(x) = \int \bar\Xi(y)\,\frac{Y}{r}\,dY\{\Xi(x)\,\bar\Xi(y)\}. \tag{60}$$

Предложенный метод решения задачи Коши легко обобщается на $2n$-мерный случай.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь рассмотрены далеко не все задачи о спинорном поле в римановом мире. Например, осталась в стороне построенная в работах [37—39] квантовая теория спинорного поля в четырехмерном мире де Ситтера. Остался в стороне общий метод разделения переменных в уравнении ДФИ. По-видимому, точное, а не приближенное квантование спинорного поля возможно как раз в тех мирах, где допустимо разделение переменных. Не рассмотрено здесь и взаимодействие спинорного поля с другими полями и, в первую очередь, с электромагнитным полем. Рассмотрение всех таких вопросов далеко выходит за рамки одного обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блохинцев Д.И.** — Флуктуации пространственно-временной метрики. Тезисы 1-й советской гравитационной конференции. М., 1961.
2. **Блохинцев Д.И.** — Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
3. **Markov M.A.** — Prog. Theor. Phys. Suppl. Extra Number. 1965, p.85—95. Commemoration Issue for 30-th Anniversary of Meson Theory by Dr. H.Yukawa.
4. **Марков М.А.** — ЖЭТФ, 1966, 51, №9, с.878.
5. **Марков М.А.** — В сб.: Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев: Наукова думка, 1967, с.671.
6. **Марков М.А.** — Проблемы теоретической физики (сб., посвященный Н.Н.Боголюбову в связи с его шестидесятилетием). М.: Наука, 1969.
7. **Марков М.А.** — В сб.: Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля. ОИЯИ 27-41, Дубна, 1970.
8. **Тамм И.Е.** — Природа, 1968, №11, с.17.
9. **Станюкович К.П.** — Гравитационное поле и элементарные частицы. М.: Наука, 1965.
10. **Станюкович К.П.** — ДАН СССР, 1970, т.190, №2, с.309.
11. **Уилер Д.** — Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: ИЛ, 1962.
12. **Utiyama R.** — Progr. Theor. Physic., 1965, vol.33, No.3, p.524.
13. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1958, vol.A246, p.326. (Русский перевод в сб.: Новейшие проблемы гравитации. М.: ИЛ, 1961, с.128).
14. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1958, vol.A246, p.333. (Русский перевод в сб.: [13], с.139).
15. **Gupta S.** — Proc. Roy. Soc., 1952, vol.A26, p.161. (Русский перевод в сб.: [13], с.326).
16. **Gupta S.** — Proc. Roy. Soc., 1952, vol.A26, p.601. (Русский перевод в сб.: [13], с.341).
17. **Bergman P., Komar A.** — Preprint. (Русский перевод в сб.: [13], с.361).
18. **Brill D., Wheeler J.** — Rev. Mod. Phys., 1957, vol.29, p.465. (Русский перевод в сб.: [13], с.381).
19. **Паули В.** — Теория относительности. М.: Наука, 1983.
20. **Черников Н.А.** — ЭЧАЯ, 1987, т.18, вып.5, с.1000.

21. **Chernikov N.A., Tagirov E.A.** — Ann. Inst. Henri Poincare. 1968, vol.IX, No.2, p.109. Section A: Physique theorique.
22. **Penrose R.** — In: Relativity, Groups and Topology. Ed. by C.De Witt, New York — London, 1964, p.565. Русский перевод в сб.: Гравитация и топология. Мир.: 1966, с.152.
23. **Fock V., Ivanenko D.** — Zs. f. Phys., 1928, vol.54, p.798.
24. **Fock V., Ivanenko D.** — C.R., Paris., 1929, vol.188, p.1470.
25. **Fock V., Ivanenko D.** — Zs. f. Phys., 1929, vol.60, p.648.
26. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1929, vol.57, p.261.
27. **Фок В.** — Журнал Русского физ.-хим. общ., 1930, т.62, с.133.
28. **Фок В.А.** — В сб.: А.П.Котельников, В.А.Фок. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, с.59.
29. **Соколов А.А., Иваненко Д.Д.** — Квантовая теория поля. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.
30. **Ivanenko D.** — Gravitation and Unified Picture of Matter. Attid. Convegno. s. Relativity, Firenze, 1965.
31. **Chernikov N.A., Shavokhina N.S.** — Acta Fhysica Polonica, 1989, vol.B20, No.2, p.177.
32. **Картан Э.** — Теория спиноров. (Перевод с французского под редакцией профессора П.А.Широкова). М.: ИЛ, 1947.
33. **Родичев В.И.** — ЖЭТФ, 1961, т.40, вып.5, с.1469.
34. **Levaschev A.** — Ann. Phys. (DDR), 1966, vol.18, No.5—6, p.209.
35. **Иваницкая О.С.** — Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск: Наука и техника, 1969, с.1.
36. **Dirac P.A.M.** —Ann. of Mathematics, 1935, vol.36, No.3, p.657.
37. **Шавохина Н.С.** — ТМФ, 1972, т.10, №3, с.412.
38. **Черников Н.А., Шавохина Н.С.** — ТМФ, 1973, т.15, №1, с.91.
39. **Черников Н.А., Шавохина Н.С.** — ТМФ, 1973, т.16, №1, с.77.
40. **Witten E.** — Commun Math. Phys., 1981, vol.80, p.381.
41. **Багров В.Г., Обухов В.В.** — В сб.: Труды V семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны», ОИЯИ, Р2-92-559, Дубна, 1993, с.182.
42. **Алексеев Г.А., Хлебников В.И.** — Формализм Ньюмена-Пенроуза и его применение в общей теории относительности. ЭЧАЯ, 1978, т.9, вып.5, с.790.
43. **Пенроуз Р., Риндлер В.** — Спиноры и пространство-время. М.: Мир, т.1, 1987; т.2, 1988.
44. **Dirac P.A.M.** — The Quantum Theory of the Electron. Proc. Roy. Soc. of London, (A), 1928, vol.117, p.610.
45. **Соколов А.А., Тернов И.М.** — Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974.
46. **Фок В.А.** — Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.
47. **Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.** — Квантовая электродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1969.
48. **Паули В.** — Релятивистская теория элементарных частиц. М.: ИЛ, 1947.
49. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей. 3-е изд. М.: Наука, 1976.
50. **B.L.Van der Waerden** — Die gruppentheoretishe Methode in der Quantenmechanik. 1932. (Ван дер Варден. Метод теории групп в квантовой механике. Харьков: ОНТИ, 1938).

51. **Лаптев Б.Л.** — П.А.Широков (1895—1944) — Избранные работы по геометрии. Казань: изд-во Казанского университета, 1966, с.5.
52. **Clifford W.K.** — Mathematical parers. London: Macmillan&Co, 1882, p.267.
53. **Черников Н.А., Шавохина Н.С.** — В сб.: «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М.: Атомиздат, 1974, вып.5, с.154.
54. **Черников Н.А., Шавохина Н.С.** — ТМФ, 1974, т.18, №3, с.310.
55. **Шавохина Н.С.** — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань: изд-во Казанского университета, 1970, №7, с.139.
56. **Шавохина Н.С.** — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань: изд-во Казанского университета, 1970, №7, с.147.
57. **Шавохина Н.С.** — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань: изд-во Казанского университета. 1971, №8, с.142.
58. **Виленкин Н.Я.** — Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
59. **Боголюбов Н.Н.** — О новом методе в теории сверхпроводимости. ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.1, с.58.
60. **Шавохина Н.С.** — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань: изд-во Казанского университета. 1970, №9, с.82.