

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ И КВАЗИКЛАССИКА В БОЗОННЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

М.В.Либанов, В.А.Рубаков, С.В.Троицкий

Институт ядерных исследований РАН, Москва

Обсуждаются вопросы, связанные с процессами многочастичного рождения в модельных скалярных теориях. При числе излучаемых частиц, сравнимом с обратной величиной константы связи, обычная теория возмущений неприменима. Рассматривается возможность применения квазиклассических методов для вычисления многочастичных сечений с учетом всех существенных петлевых поправок.

We discuss the problems of multiparticle production in model scalar theories. When multiplicities are of order of inverse coupling constant, usual perturbation theory breaks down. We consider a possibility to apply semiclassical methods to calculation of multiparticle cross sections when all essential loop corrections are taken into account.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительный интерес вызывает комплекс вопросов, связанных с многочастичными процессами в бозонных теориях поля со слабой связью. Это вызвано, в первую очередь, тем, что при большом числе n участвующих в том или ином процессе бозонов в теории возникает большой параметр. Если величина n сравнима с обратной константой связи λ^{-1} , то обычная теория возмущений по λ неприменима. Для анализа многочастичных процессов необходимо разработать адекватный способ их описания, не связанный с теорией возмущений.

Первоначально интерес к многочастичным процессам был связан с вычислениями в инстантонном секторе, где была продемонстрирована возможность существенного ослабления подавления сечений электрослабых процессов, нарушающих барионное и лептонное число, при наличии большого числа бозонов в конечном состоянии [1,2] (обзор результатов можно найти в работах [3—6]). Затем аналогичные результаты были получены и в топологически тривиальном секторе; на них мы в дальнейшем и оста-

новимся. Уже наивная комбинаторная оценка показывает, что благодаря симметричному фактору амплитуды процессов с n бозонами в конечном состоянии пропорциональны $n!$, что при $n \sim 1/\lambda$ значительно превосходит подавление, связанное с малостью константы связи ($\sim \lambda^{n/2}$ для древесных амплитуд). Более детальный анализ диаграмм [7] и производящих функций [8] для древесных амплитуд в модели скалярного поля с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \quad (1)$$

(которая в основном и будет рассматриваться в дальнейшем) показал, что возможные сокращения между отдельными группами диаграмм не должны приводить к подавлению роста $\sim n! \lambda^{n/2}$ в древесном приближении. Древесные амплитуды процессов $1 \rightarrow n$ в модели (1) были найдены точно при специально выбранной кинематике; наиболее просто анализируются: случай, когда все частицы виртуальные и обладают нулевыми 4-импульсами [9], и физически более интересный случай рождения n реальных частиц на пороге реакции, то есть с 4-импульсами $(m, \mathbf{0})$, причем в начальном состоянии имеется одна виртуальная частица с 4-импульсом $(nm, \mathbf{0})$ [9—11]. Аналогичные результаты для древесных амплитуд были получены в ряде других скалярных моделей [12—14] и при несколько иной кинематике [15].

Эти вычисления (подробнее см. разд.2) подтверждают справедливость приведенных выше оценок для амплитуд и, как следствие, указывают на факториальный рост сечений процессов $1 \rightarrow n$ вблизи порога. Действительно, при росте амплитуд $A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \sim n! \lambda^{n/2}$ в предположении, что амплитуды не очень быстро уменьшаются при удалении от порога, древесное сечение вблизи порога можно оценить как

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \sim \frac{1}{n!} |A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}|^2 \times \text{фазовый объем} \sim n! \lambda^n \varepsilon^n, \quad (2)$$

где мы ввели параметр, характеризующий отклонение от порога, среднюю кинетическую энергию конечных частиц

$$\varepsilon = (E - nm)/n, \quad (3)$$

E — энергия налетающей частицы. Предположение о медленном убывании амплитуд при удалении от порога имеет веские основания; так, в работе [16] была получена нижняя оценка для древесных амплитуд $1 \rightarrow n$, которая указывает на сохранение факториального роста при любых импульсах (подробнее см. п.2.1.3).

Подчеркнем, что оценка (2) получается в древесном приближении, то есть в низшем нетривиальном порядке теории возмущений. Этим она существенно отличается от известных оценок [17] высших порядков теории возмущений для функций Грина с небольшим числом концов. Если последние связаны с асимптотическим характером ряда теории возмущений для малочастичных функций Грина, но не препятствуют использованию теории возмущений для их вычисления — пусть в принципе с ограниченной точностью — в теориях со слабой связью, то оценка (2) указывает на полную неприменимость обычной теории возмущений при $n \geq \lambda^{-1}$, поскольку поведение (2) входило бы в явное противоречие с унитарностью.

В действительности соображения, основанные на унитарности и обычной теории возмущений для малочастичных функций Грина (см., напр., [18—20]), ставят весьма жесткие ограничения на поведение многочастичных сечений. Рассмотрим представление Челлена — Лемана для двухточечной функции Грина в скалярной теории

$$\langle \int T\phi(x) \phi(0) e^{iqx} dx \rangle = \int_0^\infty ds \frac{\rho(s)}{s - q^2}, \tag{4}$$

где

$$\rho(s) = \sum_n |\langle 0 | \phi(0) | n \rangle|^2 \delta(\sqrt{s} - \sum p_i^0) = \sum_n \sigma_{1 \rightarrow n}(s).$$

Будем вычислять обе части (4) по теории возмущений, причем импульс q считаем евклидовым и небольшим (скажем, $q^2 \sim -m^2$). Стандартное предположение теории возмущений состоит в том, что двухточечная функция Грина, стоящая в левой части, представима в виде асимптотического ряда по λ . Конечное число его членов, $k \ll 1/\lambda$, вычисленное по обычной теории возмущений, должно давать хорошее приближение для функции Грина. В правой части (4) этим k членам соответствуют члены из разложения $\rho(s)$, содержащие сечения $\sigma_{1 \rightarrow n}$ при $n \leq k$. Оставшаяся часть, связанная с сечениями процессов $1 \rightarrow n$ с $n > k$, включающая многочастичные амплитуды ($n \sim 1/\lambda$), должна давать небольшой вклад:

$$\sum_{n=k+1}^\infty \int ds \frac{\sigma_{1 \rightarrow n}(s)}{s - q^2} < \text{const} \cdot \lambda^{k+1}. \tag{5}$$

Таким образом, многочастичные ($n \sim 1/\lambda$) сечения при не слишком больших энергиях ($\ln s \ll \lambda^{-1}$) должны быть в действительности подавлены сильнее, чем λ^k с произвольным k . Нарушение соотношения (5) было

бы катастрофой для обычной теории возмущений для функции Грина с небольшим числом концов, поскольку учитываемый обычной теорией возмущений для точного пропагатора вклад многочастичных промежуточных состояний в дисперсионный интеграл (4) проявлялся бы в некотором конечном порядке по λ . Подчеркнем, что древесные сечения (2) не удовлетворяют условию (5), так что поведение истинных многочастичных сечений должно быть кардинально иным.

Представление Челлена — Лемана (4) и приведенные аргументы позволяют получить оценку многочастичных сечений рассеяния (по крайней мере, ограничить их сверху из условия унитарности). Зная значение амплитуды на пороге, можно оценить (см., например, [21]), как быстро должна уменьшаться амплитуда при удалении с порога, чтобы после интегрирования по фазовому объему получилось не противоречащее условию унитарности сечение. Для древесных амплитуд такая возможность, однако, исключается оценкой, приведенной в [16] (см. п.2.1.3), что позволяет сделать вывод о принципиальной важности петлевых вкладов. Другой способ оценить многочастичные сечения с помощью (4) предложен в [22]. Двухточечная функция Грина в левой части (4) может быть в ряде случаев вычислена непertурбативным образом — на решетке. Сравнение результата с вычисленной по теории возмущений суммой первых нескольких членов разложения по λ позволяет оценить остаток (5), связанный с вкладом многочастичных промежуточных состояний. Реализованный для скалярной модели в $(1+1)$ -мерном пространстве [22], данный подход указывает, что с хорошей степенью точности теория возмущений применима для вычисления скалярного пропагатора в двумерном пространстве-времени, то есть многочастичные сечения $\sigma_{1 \rightarrow n}$ в данной модели невелики. Хотя точная двухточечная функция Грина известна недостаточно хорошо из решеточных вычислений и неясно, обобщается ли данный результат на другие модели, в частности, на четырехмерные, он представляет серьезное указание на малость многочастичных сечений.

В связи с приведенными результатами возникает целый ряд вопросов, частичному ответу на которые посвящен настоящий обзор. Один из этих вопросов носит скорее технический характер и заключается в изучении поведения *древесных* многочастичных сечений вне порога реакций. Точные результаты теории возмущений для древесных многочастичных амплитуд получены, главным образом, на кинематическом пороге или вблизи него, что связано со значительным упрощением задачи при нулевых пространственных импульсах. Ясно, что данная кинематика является далеко не общей; нулевой фазовый объем, соответствующий порогу, не позволяет надежно оценить вклад данной конфигурации в полное сечение. Кроме того, точно на пороге возникают специфические расходимости в диаграммах; для про-

цессов $n_{in} \rightarrow n$, $n_{in} \geq 2$, они имеют отношение к существованию несвязанных диаграмм [23] (см. также [24]). Таким образом, первая задача состоит в отыскании надежного способа вычисления многочастичных древесных сечений во всем фазовом объеме, то есть при любых кинетических энергиях конечных частиц. Теория возмущений непригодна для решения этой задачи даже в древесном приближении из-за непреодолимых технических сложностей. Мы увидим, что адекватным для решения этой задачи является квазиклассический подход, использующий сингулярные решения уравнений поля в евклидовом пространстве.

Более важной — и более сложной — задачей является изучение многочастичных процессов с полным учетом петлевых вкладов. Как мы обсуждали выше, древесная оценка многочастичных сечений противоречит унитарности при больших n ($n \sim 1/\lambda$). Поэтому следует ожидать, что петлевые вклады не малы по сравнению с древесными, и их учет приводит к качественному изменению поведения сечений при больших n . Это подтверждается и прямым вычислением однопетлевых вкладов в амплитуду на пороге реакции [29,30,15]: при достаточно больших n этот вклад превышает древесную амплитуду, то есть ряд обычной теории возмущений взрывается.

На первый взгляд, задача вычисления многочастичных сечений во всех порядках теории возмущений кажется безнадежной. Тем не менее имеется ряд наблюдений, указывающих на возможность непertурбативного анализа этой проблемы. Их суть вкратце состоит в следующем.

Рассмотрим в системе центра масс сечение $\sigma_{1 \rightarrow n}$ рождения n реальных частиц одной налетающей виртуальной высокоэнергетической частицей (с энергией E). Проинтегрированное по фазовому объему, оно не зависит от деталей распределения импульсов между конечными частицами и определяется двумя параметрами — числом частиц n и энергией E . Результаты пертурбативных вычислений указывают на следующую функциональную форму выражения для сечения в многочастичном пределе [25] ($\lambda \rightarrow 0$, λl и ϵ фиксированы):

$$\sigma_{1 \rightarrow n} \sim \exp\left(\frac{1}{\lambda} F(\lambda l, \epsilon)\right). \quad (6)$$

Заметим, что, поскольку ϵ фиксирована (то есть $E \sim 1/\lambda$), нас не будут интересовать аспекты, касающиеся перенормировки константы связи или тривиальности теории, так как они становятся существенными только при экспоненциально больших энергиях: $\lambda \ln \frac{E}{m} \sim 1$. Экспоненциальное поведение сечения, описываемое формулой (6), подсказывает возможный путь решения задачи о нахождении $\sigma_{1 \rightarrow n}$. Действительно, (6) имеет вид выра-

жения, полученного в результате некоторой квазиклассической процедуры. Такая процедура должна быть нетривиальной, так как в (6), помимо древесного приближения, существенным образом учитываются петлевые вклады с произвольным количеством петель. Здесь уместна аналогия с инстантонными процессами (см. [4]), где полное сечение при данной энергии (просуммированное по числу конечных частиц) также имеет квазиклассический вид, $\sigma \sim \exp\left(\frac{1}{\lambda} f(\epsilon)\right)$; соответствующая техника, учитывающая петлевые вклады, была разработана в [26] и применена для инстантонных процессов. Эта техника существенным образом использует классические решения уравнений движения с определенными граничными условиями. Возникающий в задаче о многочастичных процессах квазиклассический метод [27] имеет много общего с техникой инстантонных вычислений, хотя и отличается рядом усложнений, связанных с фиксированным числом частиц в конечном состоянии.

Следующая из условия унитарности оценка (5) в терминах (6) означает, что сечения должны быть экспоненциально подавлены, то есть для любых l и ϵ требуется, чтобы $F(\lambda l, \epsilon)$ была отрицательной. Это, однако, не исключает интересной возможности стремления $F \rightarrow -0$, то есть достижения унитарного предела, например, при больших λl или при $\epsilon \rightarrow \infty$. Квазиклассическое вычисление функции F может дать ответ, происходит ли это на самом деле.

В разд.2 мы приводим сводку основных результатов теории возмущений для многочастичных процессов, свидетельствующих в пользу гипотезы (6). В частности, кратко описываются специфические пертурбативные методы, используемые для описания процессов при большом числе частиц. Раздел 3 посвящен квазиклассическому вычислению древесных сечений при произвольном ϵ . В разд.4 приведен квазиклассический метод вычисления многочастичных амплитуд за пределами древесного приближения, и в рамках этого подхода воспроизведены некоторые результаты разд.2 и 3. В заключении подводятся итоги и формулируются нерешенные задачи. Интересное явление зануления амплитуд на пороге реакции обсуждается в приложении.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В настоящем разделе перечисляются результаты вычисления многочастичных амплитуд, связанные с прямым или косвенным суммированием диаграмм теории возмущений. Все они дают серьезные указания на справедливость формулы (6) и возможность применения квазиклассических методов для решения задачи о многочастичном рождении. Более того, уже при

пертурбативных вычислениях важную роль начинают играть решения классических уравнений поля, используемые как в древесном приближении, так и для учета петлевых вкладов.

2.1. Древесная диаграмматика

2.1.1. *Древесные амплитуды на пороге.* Рассмотрим процесс рождения n реальных скалярных частиц с нулевыми пространственными импульсами одной налетающей виртуальной частицей в модели с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4. \tag{7}$$

Пространство-время будем считать $(d + 1)$ -мерным. Древесная амплитуда такого процесса может быть вычислена прямым суммированием диаграмм [9] на основе следующего представления:

$$\text{---} \blacksquare n = \sum_{n_1, n_2, n_3 - \text{нечет}} \delta_{n, n_1 + n_2 + n_3} \text{---} \begin{matrix} \blacksquare n_1 \\ \blacksquare n_2 \\ \blacksquare n_3 \end{matrix}, \tag{8}$$

где прямоугольник с индексом n обозначает древесную амплитуду $1 \rightarrow n$, $A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}$, линии и вершины соответствуют пропагаторам и вершинам в обычной диаграммной технике (вылетающие, а следовательно, и все промежуточные частицы имеют нулевые пространственные импульсы). Этому диаграммному представлению соответствует рекуррентное соотношение для амплитуд:

$$m^2(n^2 - 1) A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = \lambda \sum_{n_1, n_2, n_3 - \text{нечет}} \delta_{n, n_1 + n_2 + n_3} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} A_{1 \rightarrow n_1}^{\text{tree}} A_{1 \rightarrow n_2}^{\text{tree}} A_{1 \rightarrow n_3}^{\text{tree}}. \tag{9}$$

Решение этого функционального уравнения [9]

$$A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = n! \left(\frac{\lambda}{8m^2} \right)^{(n-1)/2} \tag{10}$$

содержит, как и предсказывает оценка [7], множитель $n!$, который имеет комбинаторное происхождение, связанное с бозонным фактором симметрии. Решения подобных рекуррентных соотношений проще всего на-

ходить, используя технику производящих функций [28], с помощью которой, в частности, можно найти зависимость древесных амплитуд от энергии вблизи порога.

2.1.2. *Зависимость древесных амплитуд от энергии вблизи порога.* Пусть частицы в конечном состоянии имеют небольшие (нерелятивистские, $|\mathbf{p}_i| \ll 1$) импульсы $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ (здесь и далее мы будем работать в системе центра масс, так что исходная виртуальная частица вновь имеет нулевой пространственный импульс). Средняя кинетическая энергия вылетающих частиц равна

$$\epsilon = \frac{1}{2mn} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^2.$$

Процессу многочастичного рождения на пороге соответствует $\epsilon = 0$. При малых ϵ первая поправка к пороговой амплитуде (10), в силу симметрии относительно перестановок p_i и инвариантности относительно преобразований Галилея, пропорциональна кинетической энергии $n\epsilon$:

$$A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n) = A_{1 \rightarrow n} + \alpha(n) n\epsilon + \dots \quad (11)$$

Рекуррентное соотношение, соответствующее диаграмме (8), теперь включает зависимость от p_i :

$$m^2(n^2(\epsilon + 1)^2 - 1) A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n) = \lambda \sum_{n_1, n_2, n_3 - \text{нечет}} \delta_{n, n_1 + n_2 + n_3} \times \\ \times \sum_{\mathcal{P}} A_{1 \rightarrow n_1}^{\text{tree}}(p_1^{(1)}, \dots, p_{n_1}^{(1)}) A_{1 \rightarrow n_2}^{\text{tree}}(p_1^{(2)}, \dots, p_{n_2}^{(2)}) A_{1 \rightarrow n_3}^{\text{tree}}(p_1^{(3)}, \dots, p_{n_3}^{(3)}), \quad (12)$$

где сумма берется по всем возможным перестановкам \mathcal{P} импульсов p_i .

Рассмотрим случай $\epsilon \ll 1/n$. Используя разложение (11), находим рекуррентные соотношения (9) для $A_{1 \rightarrow n}$, а в линейном порядке по ϵ получаем из (12)

$$(n^2 - 1) \alpha(n) + 2nA_{1 \rightarrow n} = \\ = \frac{3\lambda}{m^2} \sum_{n_1 > 1, n_2, n_3 - \text{нечет}} \delta_{n, n_1 + n_2 + n_3} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} \frac{n_1 - 1}{n - 1} \alpha(n_1) A_{1 \rightarrow n_2} A_{1 \rightarrow n_3}. \quad (13)$$

С помощью производящих функций

$$A(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_{1 \rightarrow n} e^{n\tau}, \quad \alpha(\tau) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha(n)(n-1) e^{n\tau} \quad (14)$$

рекуррентные соотношения (9), (13) сводятся к дифференциальным уравнениям для $A(\tau)$ и $\alpha(\tau)$, решение которых после разложения по степеням e^τ приводит к ответу

$$A_{1 \rightarrow n}(p_1, \dots, p_n) = n! \left(\frac{\lambda}{8m^2} \right)^{(n-1)/2} \left(1 - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6(n-1)} \right) n\epsilon \right). \quad (15)$$

Данный результат справедлив при $n\epsilon \ll 1$, однако он дает возможность вычислить амплитуду $A_{1 \rightarrow n}(p_1, \dots, p_n)$ и при любых $\epsilon \ll 1$, то есть во всем нерелятивистском фазовом объеме. Действительно, подстановка

$$A_{1 \rightarrow n}(p_1, \dots, p_n) = n! \left(\frac{\lambda}{8m^2} \right)^{(n-1)/2} e^{An\epsilon} \quad (16)$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению (12) с точностью до $O(\epsilon)$ (см. [25]), поэтому при $\epsilon \ll 1$ амплитуда дается выражением (16), а значение A легко определить из сравнения с (15): $A = -5/6$. Отметим, что выражение (16) согласуется с общей функциональной структурой (6) в интересующем нас режиме ($\lambda \rightarrow 0$ при фиксированных λl и ϵ).

2.1.3. Оценка древесных амплитуд при произвольных импульсах. Прямой анализ древесных диаграмм позволяет оценить древесные амплитуды $1 \rightarrow n$ при произвольных импульсах вылетающих частиц из кинематических соображений [16]. Пусть ω_{\max} — наибольшая из энергий отдельных конечных частиц. Выделим в древесной диаграмме подграф, начинающийся одной виртуальной линией и кончающийся k частицами (в качестве начальной виртуальной линии может быть взята любая из внутренних линий диаграммы). Пропагатор, соответствующий этой виртуальной линии, $(s_k - m^2)^{-1}$, удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\frac{9}{8} \omega_{\max}^2 (k^2 - 1)} < \frac{1}{k^2 \omega_{\max}^2 - m^2} \leq \frac{1}{s_k - m^2} \leq \frac{1}{m^2 (k^2 - 1)}. \quad (17)$$

Здесь использовано неравенство $k^2 \omega_{\max}^2 - m^2 < \frac{9}{8} \omega_{\max}^2 (k^2 - 1)$, которое справедливо при $k \geq 3$, что выполняется для подграфов теории ϕ^4 . Так как

неравенства (17) выполняются для всех пропагаторов диаграммы, имеем неравенство для амплитуд [16]:

$$|A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(\mathbf{p}_{\text{out}} = 0)|_{m^2 \rightarrow \frac{9}{8}\omega_{\text{max}}^2} < |A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n)| \leq |A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(\mathbf{p}_{\text{out}} = 0)|. \quad (18)$$

Как выражение (16), так и неравенства (18) показывают, что древесные амплитуды имеют достаточно медленную зависимость от энергии вблизи порога реакции. Древесные сечения факториально растут с ростом n и нарушают ограничения, следующие из унитарности. График энергетической зависимости нижней границы для древесных сечений, получаемой из оценки (18), мы приведем в п.3.4 вместе с более точными оценками.

2.2. Использование классических решений и петлевые поправки

2.2.1. Древесные амплитуды на пороге. Хорошо известная связь древесного приближения в квантовой теории поля с решениями соответствующих классических задач привела к построению эффективного функционального метода пертурбативных вычислений многочастичных амплитуд. Первые оценки, указывающие на наличие факториального роста, были получены с помощью функционального метода в работе [8]; строгий формализм вычисления древесных амплитуд был развит в работе [11], где с его помощью был получен точный ответ (10).

Рассмотрим вновь процесс рождения n частиц с 4-импульсами $(m, \mathbf{0})$ одной начальной виртуальной частицей с импульсом $(nm, \mathbf{0})$. Редукционная формула Лемана — Симанчика — Циммермана для такого процесса может быть записана в виде

$$A_{1 \rightarrow n} = \lim_{\omega^2 \rightarrow m^2} \lim_{J_0 \rightarrow 0} (\omega^2 - m^2)^n \frac{\partial^n}{\partial J_0^n} \int d^4x e^{-inmt} \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle_J = J_0 \exp(i\omega t),$$

где матричный элемент вычисляется в присутствии внешнего источника $J = J_0 e^{i\omega t}$. В древесном приближении матричный элемент $\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle$ должен быть заменен его классическим значением, то есть решением классического уравнения поля

$$\partial^2 \phi + m^2 \phi + \lambda \phi^3 - J_0 e^{i\omega t} = 0. \quad (19)$$

В силу пороговой кинематики (все пространственные импульсы равны нулю), следует искать пространственно-однородные решения, зависящие только от времени. Одно из таких решений имеет следующую структуру:

$$\phi_0(t) = z(t) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (z(t))^k, \quad (20)$$

где

$$z(t) = z_0 e^{imt} \equiv \frac{J_0}{m^2 - \omega^2} e^{imt},$$

а коэффициенты c_k могут быть, в принципе, найдены по теории возмущений для уравнения (19). Пределы $\omega^2 \rightarrow m^2$ и $J_0 \rightarrow 0$ берутся одновременно, так что отношение z_0 остается конечным. При этом источник исчезает из уравнения поля, а разложение (20) начинает играть роль граничного условия, где z_0 — параметр.

Производная по источнику заменяется при этом производной по z с помощью тождества

$$e^{-imt}(m^2 - \omega^2) \frac{\partial}{\partial J_0} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Соответствующее решение однородного уравнения ϕ_0 было найдено явно [11]:

$$\phi_0(t) = \frac{z(t)}{1 - \frac{\lambda}{8m^2} z^2(t)}, \quad (21)$$

а древесная амплитуда на пороге имеет вид

$$A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \phi_0(z(t)) \Big|_{z=0}. \quad (22)$$

Таким образом, классическое решение $\phi_0(t)$ является производящей функцией для древесных амплитуд при $\mathbf{p}_i = 0$ (ср. $A(\tau)$ из (14)*). Формула (22)

*Решение (21) было получено в работе [10] из рекуррентных соотношений для древесных графов независимо от [11].

с решением (21) воспроизводит древесный результат (10), однако ее легко обобщить, выйдя за пределы древесного приближения. В этом случае производящей функцией пороговых амплитуд будет являться матричный элемент $\langle 0|\phi|0\rangle$, вычисленный во внешнем классическом поле (21) с учетом петлевых поправок. Данный подход, в принципе, может быть обобщен на вычисление амплитуд при произвольных импульсах, но при этом уравнения становятся четырехмерными, и решения их должны зависеть не от одного функционального параметра $z(t)$, а от $3n$ параметров, соответствующих импульсам конечных частиц, что делает нахождение решения нереальным с технической точки зрения.

Перейдем теперь к учету петлевых поправок.

2.2.2. *Ведущие по $1/N$ петлевые поправки в $O(N)$ -модели.* Учет петлевых поправок к амплитудам $1 \rightarrow n$ на пороге реакции возможен различными способами. Либо вычисляются квантовые поправки к матричному элементу $\langle 0|\phi|0\rangle$ [29,30,25], который является производящей функцией амплитуд, либо та же производящая функция получается из анализа диаграмм и рекуррентных соотношений [15] (оба эти способа применимы, вообще говоря, к любым моделям; на первом из них мы остановимся позднее). Существует и третий способ, применимый только в моделях с внутренней симметрией типа $O(N)$. Он позволяет учесть ведущие петлевые поправки в пределе $N \rightarrow \infty$ при фиксированных λ и n [31—33]. Остановимся кратко на результатах [31,32] для $O(N)$ -модели с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^b)^2 - \frac{1}{2} m^2 (\phi^b)^2 - \frac{1}{4} \lambda ((\phi^b)^2)^2, \quad b = 1, \dots, N.$$

Замкнутая система уравнений получается для двух производящих функций, генерирующих амплитуды $1 \rightarrow n$ и $2 \rightarrow n$, на пороге, то есть когда все конечные частицы покоятся (в данной модели такие амплитуды имеют, соответственно, $(n+1)$ и $(n+2)$ групповых $O(N)$ -индексов). Система уравнений может быть получена как из рекуррентных соотношений для диаграмм [31], так и функциональными методами, с помощью уравнений Швингера — Дайсона [32]. Приведем здесь только результат; весьма интересные детали вывода и решения уравнений подробно описаны в [31,32]. Оказывается, что учет ведущих по $1/N$ поправок приводит лишь к перенормировке массы и константы связи в древесном выражении:

$$A_{1 \rightarrow n}^{(N)} \sim n! \left(\frac{\bar{\lambda}}{8m_R^2} \right)^{(n-1)/2}$$

(здесь мы опустили множители, содержащие групповые индексы), где

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_R}{1 + N \frac{\lambda_R}{8\pi^2}}.$$

Перенормированные параметры m_R и λ_R связаны с «голыми» соотношениями

$$m^2 = m_R^2 - \frac{\lambda N}{4\pi^2} \int_{m_R^2} d\omega \sqrt{\omega^2 - m_R^2},$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_R} - \frac{N}{8\pi^2} \int_{m_R^2} d\omega \frac{\sqrt{\omega^2 - m_R^2}}{\omega^2}.$$

Иными словами, амплитуда имеет вид

$$A_{1 \rightarrow n}^{(N)} \sim n! \left(\frac{\lambda}{8m^2(1 + c\lambda N)} \right)^{(n-1)/2}, \quad (23)$$

где постоянная c зависит от схемы перенормировки. Данные вычисления были обобщены и на другие модели [33], причем учет ведущих по $1/N$ поправок там также сводится к перенормировке параметров. Особенностью рассматриваемого режима является то, что $N \rightarrow \infty$ при фиксированном n (иначе, $\lambda \rightarrow 0$, λN и n фиксированы), что отличается от режима $\lambda \rightarrow 0$ с фиксированным λn , когда сечения имеют квазиклассическую форму (6). Два режима совпадают лишь при малых $n\lambda \ll 1$, $N\lambda \ll 1$, при этом результат (23) не противоречит формуле (6).

2.2.3. *Однопетлевая поправка.* Для нахождения однопетлевой поправки к амплитуде $1 \rightarrow n$ в теории (7) на пороге удобно использовать формулу

$$A_n = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \langle 0 | \phi | 0 \rangle \quad (24)$$

(см. выше), причем матричный элемент в однопетлевом приближении удобно вычислять после викового поворота в евклидово пространство. В рассматриваемой модели имеется один размерный параметр m , поэтому в промежуточных вычислениях можно положить $m = 1$, восстановив степени m в окончательном ответе из размерных соображений.

Введем евклидово время

$$\tau = it + \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda}{8} + \ln z_0 + i \frac{\pi}{2},$$

при этом классическое решение (21) запишется в виде

$$\phi_0(\tau) = -i \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\text{ch } \tau}. \quad (25)$$

Представим оператор ϕ следующим образом:

$$\phi = \phi_0 + \tilde{\phi},$$

где $\tilde{\phi}$ соответствует квантовым поправкам. Тогда $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \phi_0 + \langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle$, и для вычисления последнего матричного элемента можно воспользоваться диаграммной техникой. Запишем евклидов лагранжиан для $\tilde{\phi}$:

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2} (1 + 3\lambda\phi_0^2) \tilde{\phi}^2 + \lambda\phi_0 \tilde{\phi}^3 + \frac{\lambda}{4} \tilde{\phi}^4.$$

Соответствующие правила Фейнмана содержат два типа вершин: тройную с множителем $(-6\lambda\phi_0)$ и четверную с множителем (-6λ) ; пропагатор $D(x, x')$ должен быть вычислен во внешнем поле ϕ_0 :

$$\hat{O}D(x, x') \equiv (-\partial_x^2 + 1 + 3\lambda\phi_0^2) D(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (26)$$

Точное выражение для пропагатора было найдено в работах [29,15]. В смешанном импульсно-временном представлении

$$D(x, x') = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p}(x - x')} D(\tau, \tau'; \mathbf{p})$$

($x = (\tau, \mathbf{x})$, $x' = (\tau', \mathbf{x}')$) он выглядит следующим образом:

$$D(\tau, \tau'; \mathbf{p}) = \frac{1}{W_{\mathbf{p}}} (f_1^\omega(\tau) f_2^\omega(\tau') \theta(\tau' - \tau) + f_2^\omega(\tau) f_1^\omega(\tau') \theta(\tau - \tau')), \quad (27)$$

где $f_i^\omega(\tau)$, $i = 1, 2$ — два линейно независимых решения однородного дифференциального уравнения

$$\left(-\partial_\tau^2 + \omega^2 - \frac{6}{\text{ch}^2 \tau} \right) f(\tau) = 0, \\ \omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}. \quad (28)$$

Уравнение (28) имеет точное решение

$$f_1^\omega(\tau) = e^{\omega\tau} \left(\omega^2 - 3\omega \operatorname{th} \tau + 2 - \frac{3}{\operatorname{ch}^2 \tau} \right),$$

$$f_2^\omega(\tau) = f_1^{-\omega}(\tau).$$

Пара решений f_1^ω, f_2^ω подобрана так, что

$$f_1^\omega(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad f_2^\omega(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

В (27) фигурирует еще W_p — вронскиан решений $f_{1,2}^\omega$:

$$W_p = f_1' f_2 - f_2' f_1 = 2\omega(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 4).$$

В однопетлевом приближении вклад в $\langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle$ дается единственной диаграммой (рис.1) и имеет вид

$$\phi_1(x) = (-3\lambda) \int dx' D(x, x') \phi_0(x') D(x', x'). \quad (29)$$

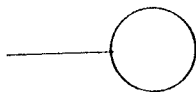


Рис.1. Диаграмма, дающая вклад в однопетлевом приближении

Непосредственное вычисление [29] приводит к выражению для однопетлевой поправки [29,15]:

$$A_{1 \rightarrow n}^{1-loop} = A_{1 \rightarrow n}^{tree} \cdot (B\lambda n^2 + O(\lambda n)), \quad (30)$$

где для модели (7) коэффициент

$$B = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{9}{4W_p}, \quad (31)$$

в частности, при $d = 3$,

$$B = -\frac{1}{64\pi^2} (\ln(7 + 4\sqrt{3}) - i\pi),$$

а вид поправки $O(\lambda n)$ в (30), приведенный в [29,15], вообще говоря, зависит от схемы перенормировки. Отметим, что в модели (7) с положительным m^2 действительная часть B отрицательна, то есть первая петлевая поправка уменьшает амплитуду. Это свойство не является общим для всех моделей; например, в модели с нарушенной дискретной симметрией $\phi \leftrightarrow -\phi$ действительная часть коэффициента B положительна. Для изучения предела $\lambda \rightarrow 0$ (λn фиксировано) важен только первый член в (30), вывод которого несколько более простым, нежели прямые вычисления, способом [25] мы сейчас приведем.

Заметим сперва, что поле ϕ_0 имеет сингулярность в точке $\tau = i\pi/2$. Это дает основание предположить (так и окажется), что вклад от k -й петли в $\langle 0|\phi|0\rangle$, $\phi_k(\tau)$ также сингулярен в этой точке. Если главная сингулярность — полюс порядка n_k , то

$$\phi_k = c_0 \phi_0^{n_k} + c_1 \phi_0^{n_k-1} + c_2 \phi_0^{n_k-2} + \dots \quad (32)$$

Из (32) и (24), учитывая явный вид ϕ_0 (25), находим, что ведущий порядок по n амплитуды $A_{1 \rightarrow n}$ определяется наиболее сингулярным членом в (32), а именно вклад от k -й петли в амплитуду равен

$$\frac{c_0}{(n_k-1)!} \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{(n_k-1)/2} n^{n_k-1} + O(n^{n_k-2}).$$

Рассмотрим теперь $\phi_1(x)$ (29) и найдем его наиболее сингулярную при $\tau = i\pi/2$ часть: согласно сказанному выше, она определит ведущий вклад в амплитуду при больших n .

Представим функции $f_{1,2}^\omega(\tau)$ в виде линейных комбинаций новых функций f и g :

$$f_{1,2}^\omega(\tau) = e^{\pm i\pi\omega/2} (f(\tau) \pm g(\tau)).$$

При $\tau = i\pi/2$ функция f сингулярна, $f \sim 3 \operatorname{ch}^{-2} \tau$, в то время как g не имеет сингулярности в этой точке: $g(\tau) \sim \operatorname{ch}^3 \tau$. Пропагатор $D(\tau, \tau'; \mathbf{p})$, выраженный через f и g , имеет вид

$$D(\tau, \tau'; \mathbf{p}) = D_0(\tau, \tau'; \mathbf{p}) + D_1(\tau, \tau'; \mathbf{p}), \quad (33)$$

где

$$D_0(\tau, \tau'; \mathbf{p}) = \frac{1}{W_{\mathbf{p}}} f(\tau) f(\tau') \sim \frac{9\lambda^2}{4W_{\mathbf{p}}} \phi_0^2(\tau) \phi_0^2(\tau'), \quad (34)$$

последнее утверждение справедливо для главной сингулярности при τ , $\tau' \rightarrow i\pi/2$, а менее сингулярная часть D_1 содержит все остальное. В частности, пропагатор $D(x', x')$, входящий в (29), имеет главную сингулярность

$$D(x', x') \sim \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{9\lambda^2}{4W_{\mathbf{p}}} \phi_0^4(\tau') = \lambda^2 B \phi_0^4(\tau').$$

Подействовав оператором \hat{O} , определенным согласно (26), на обе части (29), находим

$$\hat{O}\phi_1 = -3\lambda^3 B \phi_0^5.$$

Непосредственная проверка показывает, что для наиболее сингулярных частей

$$(\hat{O}^{-1}\phi_0^{n+2})(x) \equiv -\frac{2}{(n-2)(n+3)} \frac{1}{\lambda} \phi_0^n,$$

поэтому $\phi_1 = \lambda^2 B \phi_0^3$, откуда сразу же следует результат (30).

2.2.4. *Экспоненциация петлевых вкладов.* В приведенном выше вычислении однопетлевой поправки принципиальную роль играет утверждение о связи главного по n вклада в k -петлевую амплитуду $A_{1 \rightarrow n}$ и ведущей сингулярности в k -м члене петлевого разложения матричного элемента $\langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle$. Используя эту связь и представление (33) для пропагатора, можно найти главные по n вклады в $A_{1 \rightarrow n}$ во всех порядках разложения по петлям [25]. Благодаря тому, что наиболее сингулярная часть пропагатора D_0 факторизуется (см. (34)), задачу нахождения $\langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle$ в главной сингулярности при $\tau = i\pi/2$ можно свести к вычислению древесных диаграмм некоторой эффективной теории. Результатом является экспоненциация ведущих поправок к амплитуде рождения n частиц на кинематическом пороге:

$$A_{1 \rightarrow n} = A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \exp(B\lambda n^2 + O(\lambda n)). \quad (35)$$

При этом формула (30) представляет собой первые члены разложения экспоненты. До двухпетлевого уровня включительно формула (35) была проверена непосредственным вычислением диаграмм во внешнем поле ϕ_0 (см. [25]).

Сама по себе возможность учета вкладов от всех порядков петлевого разложения для больших n , хотя бы и для тривиальной кинематики, представляется весьма интересной. Более того, экспоненциация амплитуд на

пороге является одним из самых серьезных указаний на квазиклассическую форму многочастичных сечений. Вместе с результатом (16) и целым рядом других аргументов [25] формула (35) дает основания предполагать, что в режиме, когда $\lambda \rightarrow 0$, λl и ϵ фиксированы, сечения $1 \rightarrow n$ действительно имеют форму

$$\sigma_{1 \rightarrow n} \sim \exp\left(\frac{1}{\lambda} F(\lambda l, \epsilon)\right). \quad (36)$$

Вид сечения (36) указывает на возможность вычисления показателя экспоненты квазиклассическими методами. Как мы увидим, подходящий метод связан с обобщением метода Ландау вычисления квазиклассических матричных элементов в квантовой механике [34] на теорию поля (см. разд.3,4).

Специфическим свойством матричных элементов, вычисляемых в одномерной квантовой механике с использованием техники Ландау, является независимость соответствующего показателя экспоненты от выбора оператора. Поэтому, если возможно обобщение метода Ландау на теорию поля, то многочастичные матричные элементы вида $\langle n | \hat{O} | 0 \rangle$ не должны (с экспоненциальной точностью) зависеть от оператора \hat{O} , если он не зависит явно от малого параметра λ . На языке многочастичных амплитуд это означает их независимость от начального состояния, если последнее содержит небольшое число частиц. Вычисления таких амплитуд на пороге [35], проделанные с использованием описанной выше техники [25], показали, что амплитуды $2 \rightarrow n$ действительно совпадают с экспоненциальной точностью с амплитудами $1 \rightarrow n$. Точнее, совпадение матричных элементов можно наблюдать в следующих случаях (4-импульсы налетающих частиц равны (E, \mathbf{p}) и $(nm - E, \mathbf{p})$): а) $\hat{O} = \phi^2$, то есть амплитуда проинтегрирована по \mathbf{p} и E ; б) $\hat{O} = \phi(x)\phi(0)$, то есть амплитуда вычисляется при фиксированном значении \mathbf{p} , причем справедливость утверждения о независимости амплитуды от оператора была показана при $E \ll nm$ и при $E \sim nm$ ($|\mathbf{p}| \sim m$). В последнем случае рассматривались значения E , не принадлежащие интервалу $(0, nm)$ (одна из виртуальных частиц обладает отрицательной энергией, то есть фактически может быть названа вылетающей). При $0 < E < nm$ как древесная амплитуда на пороге, так и петлевые поправки к ней имеют сингулярную зависимость от энергии, поэтому хорошо определенный предел при больших n и фиксированном ϵ отсутствует (это является следствием уже упоминавшихся специфических особенностей пороговой кинематики).

Таким образом, приведенные пертурбативные результаты дают серьезные указания на возможность учета существенных петлевых вкладов и полного вычисления матричных элементов и сечений типа «мало \rightarrow много» квазиклассическими методами. Более того, отсутствие зависимости ведущего экспоненциального вклада в амплитуды от числа частиц в начальном со-

стоянии указывает, что наиболее вероятным кандидатом на подходящий квазиклассический метод может стать обобщение метода Ландау на теорию поля. В следующих разделах мы увидим, какие связанные с этим непertурбативные методы возникают в данной задаче, как они воспроизводят результаты теории возмущений и позволяют продвинуться за ее пределы.

Может показаться странным, что мы получим пертурбативные результаты непertурбативными методами. В действительности никакого противоречия здесь нет. Пертурбативное разложение хорошо описывает поведение амплитуд лишь в режиме $\lambda \rightarrow 0$, n — фиксировано, тогда как непertурбативные вычисления будут справедливы при $\lambda \rightarrow 0$, λn — фиксировано. Эти два режима совпадают при $\lambda n \ll 1$.

3. КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ДРЕВЕСНЫЕ СЕЧЕНИЯ ВНЕ ПОРОГА

Хорошо известно, что в квантовой механике квазиклассические матричные элементы могут быть вычислены с помощью сингулярных классических решений уравнений движения в евклидовом времени [34]. А именно рассмотрим матричный элемент не зависящего от \hbar оператора \hat{O} между двумя высоковозбужденными (квазиклассическими) состояниями $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ в одномерной квантово-механической системе. В этом случае квазиклассическая техника утверждает, что матричный элемент экспоненциально мал:

$$\langle E_2 | \hat{O} | E_1 \rangle \sim e^{-S/\hbar}. \quad (37)$$

Кроме того, имеют место следующие свойства: 1) экспоненциальный фактор не зависит от оператора \hat{O} ; 2) показатель экспоненты S равен укороченному действию, вычисленному на сингулярном классическом решении в евклидовом времени. Это решение имеет энергии E_1 и E_2 до и после сингулярности соответственно.

Существует замечательное сходство, отмеченное рядом авторов [36—38,21,39], между матричными элементами (37) и амплитудами многочастичных процессов при высоких энергиях, так что квазиклассическая техника может быть обобщена для теории поля. Чтобы увидеть это сходство, рассмотрим, например, многочастичное рождение в теории (7). Соответствующая амплитуда выглядит следующим образом:

$$\langle n | \hat{O} | 0 \rangle, \quad (38)$$

где как начальное вакуумное, так и конечное многочастичное состояния могут быть рассмотрены как квазиклассические при $n \sim 1/\lambda$, а оператор \hat{O} — это $\phi(x)$ или $\phi(x)\phi(y)$ для одно- или двухчастичного начального состояния соответственно (подчеркнем, что \hat{O} параметрически не зависит от λ). Тогда аналогия между (37) и (38) очевидна. Более того, в предыдущем разделе мы уже отмечали, что, по крайней мере, вблизи порога матричный элемент (38) имеет экспоненциальную форму и не зависит от оператора \hat{O} . Еще более замечательно то, что сингулярные решения полевых уравнений естественным образом возникают при вычислении древесных сечений при любых энергиях [27,20]. Эту связь между сингулярными решениями и древесными сечениями мы сейчас и обсудим более подробно, а к квазиклассическому подходу вычисления сечений с учетом петель перейдем в разделе 4.

3.1. Сингулярные решения и древесные сечения. Общий формализм.

Выше мы уже встречались с решениями классических уравнений при вычислении многочастичных амплитуд на пороге (эти решения являются производящими функциями для древесных амплитуд). Они обладают определенными аналитическими свойствами при продолжении в область комплексного времени, а именно: 1) убывают при $\text{Im } t = \tau \rightarrow \infty$ и 2) имеют особенности при некоторых значениях комплексного времени. Например, решение, генерирующее амплитуды в ненарушенной ϕ^4 -теории (21), сингулярно на пространственноподобной гиперплоскости

$$t_0 = i\tau_0 = \frac{i}{2m} \ln \frac{8m^2}{\lambda z_0^2}$$

и ведет себя вблизи нее следующим образом:

$$\phi = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{m}{\text{Im } t - \tau_0}.$$

То, что поверхность сингулярностей является плоскостью (не зависит от x), есть отражение того факта, что все частицы имеют нулевой пространственный импульс.

Появление таких сингулярных решений не является случайным. Чтобы увидеть это, рассмотрим в древесном приближении процесс $1 \rightarrow n$ вне порога. Очевидно, что амплитуда такого процесса зависит от всех пространственных импульсов вылетающих частиц и, конечно, не является простой

функцией своих переменных*. С другой стороны, полное (то есть проинтегрированное по всему фазовому объему) сечение зависит только от числа частиц n и их полной энергии E , поэтому мы будем искать квазиклассический метод для изучения поведения сечения, а не амплитуд.

Итак, рассмотрим процесс распада одной виртуальной частицы с энергией E и импульсом $\mathbf{P} = 0$ (мы будем изучать процесс в системе центра масс) в n реальных частиц в теории массивного скалярного поля с действием

$$S = \int dt d^d x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - V(\phi, \lambda) \right), \quad (39)$$

где по-прежнему d — число пространственных измерений и λ — константа связи. Явный вид потенциала нас пока не интересует, но мы считаем, что $\phi = 0$ — классическая вакуумная конфигурация, и $m^2 = V''(\phi = 0)$ — квадрат массы бозона. Нас будет интересовать режим, когда λ мало, а E и n — велики, то есть $\lambda \rightarrow 0$, а λn и E/n — фиксированы.

Рассмотрим сначала матричный элемент оператора ϕ между когерентным состоянием $|\{\beta(\mathbf{k})\}\rangle$ и вакуумом при данной энергии E . Согласно общему формализму представления когерентных состояний [40—42,4], в рамках которого мы далее будем работать, такой матричный элемент дается следующим функциональным интегралом на временном интервале $t \in [T_i, T_f]$, $T_{f,i} \rightarrow \pm \infty$:

$$\langle \{\beta(\mathbf{k})\} | \tilde{\phi}(E) | 0 \rangle = \int D\phi D\phi_i D\phi_f \tilde{\phi}(E) \exp \{iS + B_i(\phi_i) + B_f(\phi_f, \beta^*)\}, \quad (40)$$

где $B_{i,f}$ — граничные члены:

$$\begin{aligned} B_f(\phi_f, \beta^*) &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \beta_k^* \beta_{-k}^* e^{2i\omega T_f} - \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \omega \phi_f(\mathbf{k}) \phi_f(-\mathbf{k}) + \\ &+ \int d\mathbf{k} \sqrt{2\omega} \beta_k^* \phi_f(-\mathbf{k}) e^{i\omega T_f}, \\ B_i(\phi_i) &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \omega \phi_i(\mathbf{k}) \phi_i(-\mathbf{k}), \quad \omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

*Выше было показано, что в нерелятивистском пределе амплитуды зависят только от полной энергии частиц (16). Это отражает тот факт, что в первом порядке в разложении по импульсам вылетающих частиц существует только один симметричный относительно перестановок всех частиц и относительно преобразований Галилея инвариант — полная энергия.

$$\tilde{\phi}(E) = \int dx \phi(x) e^{-iEt + iPx},$$

$$\phi_k(t) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \phi(x) e^{-ikx}, \quad \phi_{f,i}(\mathbf{k}) = \phi_k(T_{f,i}). \quad (42)$$

В древесном приближении интеграл (40) определяется седловой точкой, которая является решением классического уравнения поля

$$\partial_{\mu}^2 \phi_c + V'(\phi_c) = 0 \quad (43)$$

с граничными условиями, получаемыми вариацией показателя экспоненты в (40) по ϕ_i и ϕ_f . Именно при $t \rightarrow -\infty$ поле ϕ подчиняется фейнмановским граничным условиям (содержит только положительно-частотную часть):

$$\phi_c(\mathbf{k}) \sim e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (44)$$

при $t \rightarrow +\infty$ положительно-частотная часть определяется β_k^* , а фейнмановская (отрицательно-частотная) часть произвольна:

$$\phi_c(\mathbf{k}) = \frac{\beta_k^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t} + f(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Граничное условие (44) означает, что энергия искомой конфигурации равна нулю при $t \rightarrow -\infty$, поэтому, в силу закона сохранения энергии, ϕ содержит только положительно-частотную часть

$$\phi_c(\mathbf{k}) = \frac{\beta_k^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (45)$$

Легко убедиться, что седловое значение показателя экспоненты в (40) на решении уравнения (43) с граничными условиями (44), (45) равно нулю ($S=0$ из-за определенной частотности решения), поэтому матричный элемент (40) сводится к фурье-образу классического решения $\phi_c(E; \beta^*)$:

$$\langle \{\beta(\mathbf{k})\} | \tilde{\phi}(E) | 0 \rangle = \phi_c(E, \beta^*) = \int dx \phi_c(\beta^*, x) e^{-iEt + iPx}. \quad (46)$$

В соответствии с формализмом когерентных состояний этот матричный элемент является производящей функцией для древесных амплитуд процессов $1 \rightarrow n$:

$$A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \left. \frac{\partial^n \phi_c(E; \beta^*)}{\partial \beta_{k_1}^* \dots \partial \beta_{k_n}^*} \right|_{\beta^* = 0} \quad (47)$$

Этот результат совпадает с полученным ранее с помощью редуционной формулы Лемана — Симанчика — Циммермана (см. п.2.2.1).

Для того, чтобы получить n -частичное сечение, введем, в духе [43], производящую функцию

$$\Sigma(\xi, E) = \frac{1}{F} \int D\beta D\beta^* \exp \left(- \int d\mathbf{k} \beta(\mathbf{k}) \beta^*(\mathbf{k}) \phi_c(\sqrt{\xi} \beta^*) \bar{\phi}_c(\sqrt{\xi} \beta) \right), \quad (48)$$

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(E) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \Sigma(\xi, E) \right|_{\xi = 0}, \quad (49)$$

где F — нормировочный фактор. В том, что (49) является производящей функцией, легко убедиться, разлагая (48) по ξ и учитывая (47); интегрирование по β и β^* соответствует, как обычно, интегрированию по всему фазовому пространству. Используя теорему Коши и произведя замену переменных $\sqrt{\xi} \beta \rightarrow \beta$, запишем выражение для сечения (49) в виде интеграла в плоскости комплексного ξ по контуру, обходящему точку $\xi = 0$:

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(E) = \frac{1}{F} \oint_{\xi^{n+1}} \frac{d\xi}{\xi} \int D\beta D\beta^* \exp \left(- \frac{1}{\xi} \int d\mathbf{k} \beta(\mathbf{k}) \beta^*(\mathbf{k}) \right) \phi_c(\beta^*) \bar{\phi}_c(\beta). \quad (50)$$

Теперь выполним интегрирование в (50) методом перевала, который применим при $n \sim 1/\lambda$. Однако необходима некоторая осторожность, так как интегрирование по β и β^* содержит нулевые моды, связанные с пространственно-временными трансляциями. Кроме того, $\phi_c(E; \beta^*)$ содержит большой параметр $E \sim 1/\lambda$, от которого возможна экспоненциальная зависимость. Чтобы учесть нулевые моды, параметризуем $\beta^*(\mathbf{k})$ следующим образом:

$$\beta^*(\mathbf{k}) = b^*(\mathbf{k}) e^{i\omega_0 - i\mathbf{k}\mathbf{x}_0},$$

где t_0 и \mathbf{x}_0 — коллективные координаты, соответствующие пространственно-временным трансляциям, а $\{b^*(\mathbf{k})\}$ — новый набор переменных интегрирования, на который мы наложим в дальнейшем некоторую связь, нарушающую трансляционную симметрию. Тогда в силу граничных условий (44) и (45)

$$\phi_c(\beta^*, x) = \phi_c(b^*, x + x_0),$$

так что

$$\phi_c(E; \beta^*) = \phi_c(E; b^*) e^{iEt_0 - i\mathbf{P}\mathbf{x}_0}.$$

Таким образом, интегрирование в (50) по β, β^* заменится на интегрирование по b, b^* и x_0, x'_0 :

$$\begin{aligned} \sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{trcc}}(E) = & \frac{1}{F} \oint \frac{d\xi}{\xi} \int Db Db^* dx_0 dx'_0 J\phi_c(E; b^*) \bar{\phi}_c(E; b) \exp \left[-n \ln \xi + \right. \\ & \left. + iE(t_0 - t'_0) - i\mathbf{P}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0) - \frac{1}{\xi} \int d\mathbf{k} b(\mathbf{k}) b^*(\mathbf{k}) e^{i\omega(t_0 - t'_0) - i\mathbf{k}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)} \right], \end{aligned}$$

где J содержит δ -функцию, выражающую связь, о которой мы говорили выше, и соответствующий детерминант Фаддеева — Попова. Интегрирование по $(x_0 + x'_0)$ дает обычный объемный фактор, который сокращается с F .

Предположим теперь, что связь на $\{b\}$ можно выбрать таким образом, что $\phi_c(E; b^*)$ не содержит экспоненциальных множителей, несмотря на то, что $E \sim 1/\lambda$. Тогда интегрирование можно выполнить методом перевала. Седловая точка $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)$ равна нулю (напомним, что мы работаем в системе центра масс, то есть $\mathbf{P} = 0$), так что мы больше не будем выписывать эту переменную. Переобозначая

$$\xi = e^\theta, \quad t_0 - t'_0 = -iT,$$

находим «эффективное действие»

$$W_{\text{trcc}}(T, \theta, b, b^*) = ET - n\theta - \int d\mathbf{k} b(\mathbf{k}) b^*(\mathbf{k}) e^{\omega T - \theta}, \quad (51)$$

которое должно быть экстремизировано по T, θ, b и b^* при условии, к которому мы сейчас возвращаемся.

Связь, налагаемая на $\{b(\mathbf{k})\}$, должна нарушать трансляционную инвариантность в пространстве-времени. Как уже говорилось выше, мы хотели бы наложить условие на $\{b(\mathbf{k})\}$ таким образом, чтобы $\phi_c(b^*)$ не содержало экспоненциальных факторов. Продолжим полученное решение ϕ_c в область комплексного времени, тогда, согласно граничным условиям (44), (45), оно должно стремиться к нулю при $\text{Im } t = \tau \rightarrow +\infty$, где τ — евклидово время. Так как мы не рассматриваем инстантонные эффекты, то есть не интересуемся классическими решениями, регулярными в евклидовом пространстве (в теории $\lambda\phi^4$ с $\lambda > 0$ их просто нет), то ϕ_c должно быть сингулярным в евклидовом пространстве-времени. В общем случае ϕ_c имеет особенности на d -мерной поверхности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, при этом $\tau_0(\mathbf{x}) < 0$ для решений, гладких на действительной оси времени. Интеграл типа (46) определяется особенностями функции ϕ_c , а именно: он пропорционален $\exp(E\tau_m + i\mathbf{P}\mathbf{x}_m)$, где τ_m и \mathbf{x}_m — координаты особенности, лежащей ближе всего к действительной оси ($\tau_m < 0$). Поэтому, чтобы $\phi_c(b)$ не содержало экспоненциальных факторов, потребуем $\tau_m \rightarrow 0$, $\mathbf{x}_m = 0$. Другими словами, необходимо, чтобы поверхность сингулярностей касалась в евклидовом времени снизу поверхности $\tau = 0$ в точке $\mathbf{x} = 0$, то есть $\tau_0(\mathbf{x} = 0) = 0$ и $\tau_0(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$. Это ограничение нарушает трансляционную инвариантность в пространстве-времени, то есть действительно представляет собой связь, выделяющую нулевые моды. Кроме того, существует еще одно свойство решений, связанное с тем, что мы работаем в системе центра масс. Так как в задаче нет выделенного пространственного направления ($\mathbf{P} = 0$), решение ϕ_c должно обладать симметрией относительно пространственных вращений ($O(d)$ -симметрией). Это означает, что $\tau_0(\mathbf{x})$ зависит только от $x = |\mathbf{x}|$: $\tau_0(\mathbf{x}) = \tau_0(x)$.

Итак, приведем окончательно способ вычисления древесного сечения $\sigma_{1 \rightarrow n}$ в режиме $\lambda \rightarrow 0$, при фиксированных $n\lambda$, E/n .

— Среди всех решений евклидовых уравнений поля выбираем $O(d)$ -симметричные, имеющие следующую асимптотику при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\int \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} \phi_c(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{-\omega\tau}, \quad (52)$$

и сингулярные на поверхности $\tau_0(\mathbf{x})$ такой, что $\tau_0(0) = 0$, $\tau_0(\mathbf{x} \neq 0) < 0$.

— Из (52) находим компоненты Фурье $b_{\mathbf{k}}^*$ и подставляем их в (51).

— Экстремизируем W (см.(51)) по всем описанным поверхностям сингулярностей (это эквивалентно экстремизации по $b_{\mathbf{k}}$ с обсуждавшейся выше связью), а также по T и θ . Тогда древесное сечение дается следующим выражением:

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(E, n) \sim \exp(W_{\text{tree}}(T(E, n), \theta(E, n))).$$

Этот рецепт совпадает с предложенным из несколько иных соображений в работе [27] (см. разд.4).

Покажем теперь, что экстремум W при фиксированных энергии и числе частиц в действительности является максимумом [44]. Рассмотрим функционал

$$\int d^d k b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{\omega T}. \quad (53)$$

Он ограничен снизу, так что достигает наименьшего значения* для решений описанного выше типа при некоторых $b_{\mathbf{k}}$ ($b_{\mathbf{k}} \neq 0$, так как они соответствуют нетривиальному решению ϕ_c):

$$\int d^d k b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{\omega T} \Big|_{\min} = C(T) > 0.$$

Допустим, что мы фиксировали некоторую поверхность сингулярностей Σ , тогда значение функционала (53) на этой поверхности больше, чем его минимальное значение:

$$\int d^d k b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{\omega T} \Big|_{\Sigma_{\text{fixed}}} = C_{\Sigma}(T) \geq C(T)$$

для всех значений T . Находя экстремальное значение θ , получим $\theta = -\ln n + \ln C(T)$ и

$$W(T) = n \ln n - n + ET - n \ln C(T) \text{ имеет экстремум при } T_1,$$

$$W(T)_{\Sigma} = n \ln n - n + ET - n \ln C_{\Sigma}(T) \text{ имеет экстремум при } T_2.$$

*То есть W , как функционал от $b_{\mathbf{k}}$, имеет максимум.

Сравнивая $W(T_1)$ и $W(T_2)$, получаем следующую цепочку неравенств:

$$W(T_1) \geq W(T_2) \geq W_{\Sigma}(T_2), \text{ если } T_1 \text{ — максимум } W;$$

$$W_{\Sigma}(T_2) \leq W_{\Sigma}(T_1) \leq W(T_1), \text{ если } T_2 \text{ — минимум } W_{\Sigma}.$$

Таким образом, если мы фиксируем некоторый класс поверхностей сингулярностей, энергию и число частиц или, другими словами, фиксируем некоторое частное сингулярное решение, то мы получим нижнюю границу для функции $W_{\text{tree}}(E, n, \lambda)$.

Кроме того, используя описанный выше метод, можно легко выяснить функциональную зависимость $W_{\text{tree}}(E, n, \lambda)$ от ее аргументов. Поскольку мы изучаем только древесные сечения, то зависимость от λ должна совпадать с зависимостью, которая следует из анализа фейнмановских диаграмм: для теории (7) $\sigma_1^{\text{tree}} \rightarrow n \sim \lambda$. Такая зависимость легко восстанавливается в W_{tree} простым перемасштабированием полей. Так, в модели (7), перейдя к новым полям $\bar{\phi} = \phi / \sqrt{\lambda}$ и фурье-компонентам $\bar{b}_k = b_k / \sqrt{\lambda}$, легко убедиться, что в терминах $\bar{\phi}$ и \bar{b}_k граничная задача, сформулированная выше, не зависит от λ . Поэтому экстремальное значение функционала

$$\int d\mathbf{k} \bar{b}_k \bar{b}_k^* e^{\omega T} = \bar{C}(T)$$

также не зависит от λ . Переходя обратно к старым полям, убеждаемся, что $C(T) = \bar{C}(T) / \lambda$, поэтому W_{tree} принимает вид

$$W_{\text{tree}}(T, \theta) = ET - n\theta - e^{-\theta} \frac{1}{\lambda} \bar{C}(T).$$

Варьируя по θ , находим $\theta = \ln \bar{C}(T) - \ln(\lambda n)$ и соответствующее значение $W_{\text{tree}}(T)$:

$$W_{\text{tree}}(T) = n(\ln(\lambda n) + \varepsilon T + mT - \ln \bar{C}(T)),$$

где, как и прежде, $\varepsilon = (E - nm) / n$ — средняя кинетическая энергия частиц. Из последнего равенства видно, что экстремальное значение T зависит только от ε , поэтому $W_{\text{tree}}(E, n, \lambda)$ имеет следующую функциональную форму:

$$W_{\text{tree}}(E, n, \lambda) = n \ln(n\lambda) + n\psi(E/n), \tag{54}$$

то есть в терминах (36)

$$F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon) = \lambda n \ln \lambda n + \lambda n \psi(\varepsilon),$$

а сечение

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \sim e^{W_{\text{tree}}} = e^{(1/\lambda)F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon)} \sim n! \lambda^n e^{n\psi(\varepsilon)}.$$

Заметим также, что при фиксированном ε древесное сечение увеличивается с ростом числа частиц и при достаточно больших n достигает унитарного предела.

Итак, мы убедились в том, что при вычислении древесных сечений естественным образом возникают сингулярные евклидовы решения уравнений поля. Описанный выше метод позволяет продвинуться значительно дальше в изучении многочастичных древесных сечений, нежели обычная пертурбативная техника. В частности, сравнительно легко получить в теории (7) низкоэнергетическое разложение $F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon)$ [27,44]; кроме того, выбрав некоторый класс поверхностей сингулярностей, можно найти нижнюю границу для $F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$ [37,27], а также численно найти нижнюю границу при любых энергиях [45]. К обсуждению этих вопросов мы сейчас и перейдем.

3.2. Низкоэнергетическое разложение $F_{\text{tree}}(n\lambda, \varepsilon)$. Далее мы будем изучать теорию (7) с действием

$$S = \int d^{d+1}x \left[\frac{\partial^2 \phi}{2} - \frac{\phi^2}{2} - \frac{\lambda \phi^4}{4} \right]. \quad (55)$$

Мы положили массу бозона равной единице, так как зависимость древесного сечения от λ тривиальна, а других размерных параметров в теории нет, поэтому зависимость от массы легко восстанавливается из размерных соображений. Из действия (55) получаем следующее евклидово уравнение ($\tau = \text{Im } t$, $\partial^2 = \partial_\tau^2 + \partial_t^2$):

$$\partial^2 \phi - \phi - \lambda \phi^3 = 0 \quad (56)$$

с граничным условием

$$\phi(\mathbf{k}, t) = \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{-\omega\tau}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Теперь нам предстоит найти решение задачи (56), (57), сингулярное на некоторой поверхности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$ такой, что $\tau_0(0) = 0$, $\tau_0(\mathbf{x} \neq 0) < 0$, и затем проварьировать функционал (51) по всем таким поверхностям.

Так как в этом разделе мы изучаем низкоэнергетическое поведение $F_{\text{tree}}(\lambda l, \epsilon)$, то есть режим $\epsilon \ll 1$ (характерный импульс вылетающих частиц много меньше массы), мы можем ожидать, что решение уравнения (56) медленно меняется с изменением \mathbf{x} . Поэтому в качестве нулевого приближения мы выберем решение, не зависящее от \mathbf{x} . Такое решение фактически уже обсуждалось нами (см. (21)). Запишем его в следующем виде:

$$\phi_0(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\text{sh } \tau}. \quad (58)$$

Функция (58) является решением граничной задачи (56), (57), а также имеет сингулярность при $\tau = 0$. Однако она соответствует случаю, когда все вылетающие частицы находятся в покое. Для того чтобы сойти с порога, мы модифицируем решение (58), введя «руками» зависимость от $x = |\mathbf{x}|$ (мы уже говорили о том, что решение должно быть $O(d)$ -симметричным):

$$\phi_0(\tau, x) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\text{sh}(\tau - \tau_0(\mathbf{x}))}, \quad (59)$$

где $\tau_0(\mathbf{x})$ — слабо меняющаяся функция своего аргумента. Заметим, что функция (59) имеет поверхность сингулярности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, поэтому, в соответствии с общим формализмом, $\tau_0(\mathbf{x})$ должна касаться плоскости $\tau = 0$ снизу. Начиная с функции (59), которая является решением (56) с точностью до $O((\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^2)$, мы представим ϕ в виде

$$\phi(\tau, x) = \phi_0(\tau, x) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\tau, x), \quad (60)$$

где ϕ_i порядка $(\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^{2i}$ (мы считаем совпадающими порядки $(\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^{2i}$ и, например, $(\partial_{\mathbf{x}}^{2i} \tau_0(\mathbf{x}))$), а все члены порядка $(\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^{2i-1}$ исчезают в силу $O(d)$ -симметрии. Таким образом, мы будем искать решение (56) по теории возмущений с малым параметром $(\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^*$.

*В действительности разложение по производным (60) соответствует разложению по импульсам вылетающих частиц и поэтому оправданно.

Подставляя разложение (60) в (56), находим, что ϕ_1 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\partial_\tau^2 \phi_1 - \phi_1 - 3\lambda \phi_0^2 \phi_1 = -\partial_i^2 \phi_0 = -\partial_\tau^2 \phi_0 (\partial_i \tau_0)^2 + \partial_\tau \phi_0 \partial_i^2 \tau_0. \quad (61)$$

Его решение можно найти в явном виде. Добавляя $\phi_0(\tau, x)$, получим, что решение (56), (57) с точностью до $(\partial_x \tau_0(\mathbf{x}))^4$ принимает вид [27]:

$$\begin{aligned} \phi = \phi_0 + \phi_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left\{ \frac{1}{\text{sh } z} + \frac{1}{2} \left(\partial^2 \tau_0 \left(\frac{\text{ch } z - \text{sh } z}{3} - \frac{1}{\text{sh } z} + z \frac{\text{ch } z}{\text{sh}^2 z} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\partial \tau_0)^2 z \frac{\text{ch } z}{\text{sh}^2 z} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (62)$$

где $z = \tau - \tau_0(\mathbf{x})$. Чтобы найти $b_{\mathbf{k}}^*$, соответствующие этому решению, найдем асимптотику (62) при $\tau \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$):

$$\phi^{\tau \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^{-z} \left\{ 2 - \frac{5}{6} \partial^2 \tau_0 + (\partial^2 \tau_0 + (\partial \tau_0)^2) z \right\}. \quad (63)$$

Функция $\phi^{\tau \rightarrow \infty}$, конечно, является решением линейризованного уравнения (56) ($\lambda = 0$) во втором порядке по производным $\tau_0(\mathbf{x})$, в чем легко убедиться прямой подстановкой. Линейризованное уравнение (56) имеет общее решение

$$\phi^{\text{linear}}(x, \tau) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d/2}} \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}x - \omega\tau}. \quad (64)$$

Обозначим

$$b(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d/2}} \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}x}. \quad (65)$$

Тогда при $\tau \rightarrow \infty$ интеграл (64) набирается в области малых импульсов, и мы имеем право разложить его следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi^{\text{linear}}(x, \tau) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d/2}} \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}x - \tau \left(1 - \frac{\tau}{2} k^2 + \dots \right)} = \\ &= e^{-\tau} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left(b + \frac{\tau}{2} \partial^2 b + \dots \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Предположим, что

$$b = 2e^{\tau_0} + b_1 + \dots, \tag{67}$$

где $b_1 \sim (\partial\tau_0)^2$, тогда с точностью до $O((\partial\tau_0)^4)$ из (66) и (67) найдем, что

$$\phi^{\text{linear}} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^{-\tau} (2e^{\tau_0} + \tau\partial^2 e^{\tau_0} + b_1). \tag{68}$$

Сравнивая члены одинакового порядка по $\partial\tau_0(\mathbf{x})$ в выражениях (68) и (63) при $x=0$ и учитывая, что $\tau_0(0)=0$ и $\partial\tau_0(0)=0$ (последнее равенство обусловлено $O(d)$ -симметрией), находим для решения (63):

$$b_1(0) = -\frac{5}{6} \partial^2 \tau_0,$$

так что

$$b(0) = 2 - \frac{5}{6} \partial^2 \tau_0. \tag{69}$$

Кроме того, дифференцируя (67) по \mathbf{x} два раза, найдем с точностью до $O((\partial\tau_0)^4)$

$$\partial_{ij}^2 b = 2\partial_{ij}^2 \tau_0(\mathbf{x}). \tag{70}$$

Подставляя последнее выражение в (69), имеем ограничение на b в точке $x=0$:

$$\left[b^2 + \frac{5}{12} \partial^2 b \right]_{\mathbf{x}=0} = 2 + O(\partial^4 b). \tag{71}$$

Если внимательно проследить за всеми выполненными шагами, то легко понять, что это ограничение является отражением того факта, что поверхность сингулярностей касается плоскости $\tau=0$ в точке 0. Вместо экстремизации функционала $W_{\text{free}}(b^*)$ по поверхностям сингулярностей удобнее экстремизировать его по $b_{\mathbf{k}}^*$ при дополнительном условии (71) (напомним, что $b(\mathbf{x})$ связано с соотношением (65)). Для этого запишем (71) в виде

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d/2}} \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{\omega}} \left(1 - \frac{5}{12} k^2 + O(k^4) \right) = \sqrt{\frac{16}{\lambda}}. \tag{72}$$

Теперь мы можем найти экстремум (51) при условии (72). Имеем для экстремума

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{Ae^{-\omega T + \theta}}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\omega}} \left(1 - \frac{5}{12} k^2 \right), \quad (73)$$

где множитель Лагранжа A находится из соотношения (72):

$$A = \sqrt{\frac{16}{\lambda}} \frac{e^{T-\theta}}{(2\pi T)^{d/2}} \left(1 - \frac{d(3d-26)}{24T} + O\left(\frac{1}{T^2}\right) \right). \quad (74)$$

Мы разложили A в ряд по обратным степеням T , так как при малых ε , как мы увидим ниже, T велико (фактически $T \sim W/E$). Кроме того, мы опустили члены порядка T^{-2} , так как члены такого же порядка возникают при удержании следующего члена в разложении (72), что соответствовало бы нахождению решения (56) с точностью до $O((\partial\tau_0(\mathbf{x}))^4)$.

Вариация (51) по θ дает следующее условие:

$$n = \int d\mathbf{k} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{\omega T - \theta}.$$

Подставляя сюда выражения (73) и (74) и интегрируя, получим уравнение

$$n = \frac{16}{\lambda} \frac{e^{\theta-T}}{(2\pi T)^{d/2}} \left(1 - \frac{d(3d-26)}{24T} \right). \quad (75)$$

Аналогично, варьируя (51) по T , приходим к уравнению

$$\varepsilon = \frac{d}{2T} \left(1 + \frac{3d-26}{12T} \right),$$

так что

$$T = \frac{d}{2\varepsilon} + \frac{3d-26}{12} + O(\varepsilon), \quad (76)$$

Видно, что T действительно велико при малых ε .

Найдя T и θ из уравнений (76) и (75) и подставив результат в (54), получим функцию F_{tree} :

$$F_{\text{tree}} = \lambda l \left(\ln \frac{\lambda l}{16} - 1 + \frac{d}{2} \left(\ln \frac{\varepsilon}{d\pi} + 1 \right) + \varepsilon \frac{(3d-26)}{12} + \varepsilon^2 C_2 \right). \quad (77)$$

Константа C_2 вычислена изложенным здесь методом путем нахождения поправки порядка $(\partial\tau_0)^4$ к решению (62) и равна [44]:

$$-\frac{1}{144d}(9d^2 - 556d + 260 + 48\pi^2(d - 1)).$$

В частности, при $d = 3$

$$F_{\text{tree}}^{d=3} = \lambda n \left(\ln \frac{\lambda n}{16} - 1 + \frac{3}{2} \left(\ln \frac{\epsilon}{3\pi} + 1 \right) - \epsilon \frac{17}{12} + \frac{\epsilon^2}{432} (1327 - 96\pi^2) \right). \quad (78)$$

Заметим, что W_{tree} имеет правильную функциональную зависимость (сравните с (54)) от λ , n и ϵ . Кроме того, можно убедиться, что найденное значение W в действительности является максимальным, что согласуется с ранее приведенным доказательством. Скажем еще несколько слов о зависимости W от ϵ . Первый, логарифмический, член в разложении W возник бы, если бы мы ограничились пространственно-независимым решением (58). Он равен логарифму нерелятивистского фазового объема и в обычной теории возмущений возникает при интегрировании квадрата амплитуды, не зависящей от импульсов (см. (10)), по фазовому объему. Второй, линейный, член совпадает с тем, который получился бы при интегрировании квадрата амплитуды, соответствующей рождению нерелятивистских частиц (см. (16)), по импульсам, в чем можно явно убедиться. Поправка порядка ϵ^2 пертурбативными методами не получена.

Наконец, последнее, что интересно найти для сравнения с численными вычислениями, на которых мы остановимся ниже (см. п.3,4), это поверхность $\tau_0(\mathbf{x})$, экстремизирующая функционал W . Проще всего это сделать, найдя производные $\tau_0(\mathbf{x})$ при $x = 0$ (см. (71)), и затем восстановить $\tau_0(\mathbf{x})$ в виде ряда Тейлора. Итак, подставляя найденное значение b_k^* (см. (73) и (74)) в определение $b(x)$ (65), а затем в равенство (71), найдем, что

$$\partial^2\tau_0(\mathbf{x})|_{x=0} = -\frac{d}{T} + O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

и, таким образом,

$$\tau_0(x) = x^2 \left(-\frac{1}{2T} + \frac{5}{12} \frac{1}{T^2} \right) = -\frac{x^2\epsilon}{d} \left(1 - \epsilon \frac{3d - 16}{6d} \right), \quad (79)$$

где мы также выписали член порядка T^{-2} , вычисление которого можно найти в работе [44]. Соотношение (79) справедливо только для x ,

меньших, чем характерный обратный импульс вылетающих частиц $\varepsilon^{-1/2}$, при этом стоит заметить, что член порядка $x^4 \varepsilon^2$, который мог бы появиться в этом разложении, равен нулю.

3.3. Нижняя граница функции $F_{\text{tree}}(\lambda l, \varepsilon)$ в ультрарелятивистском режиме. Рассмотрим теперь противоположный предел $\varepsilon \gg 1$. В этом случае характерный импульс частиц много больше их массы, и можно пренебречь массовым членом в уравнении поля. При $d=3$ безмассовая ϕ^4 -теория конформно-инвариантна, поэтому некоторые точные решения могут быть найдены аналитически. Простейшее из них — это $O(4)$ -симметричный инстантон [46,17]. Соответствующее решение, сингулярное в точке $\tau = x = 0$, легко конструируется [37] из инстантона сдвигом его центра и заменой $\rho \rightarrow i\rho$, где ρ — размер инстантона,

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \frac{\rho}{x^2 + (\tau + \rho)^2 - \rho^2}. \quad (80)$$

Легко проверить, что ϕ_0 действительно является решением безмассового уравнения (56) с граничными условиями (57), и ϕ_0 сингулярно на сфере $\tau_0(\mathbf{x}) = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - x^2}$ с центром в точке $(-\rho, 0)$, касающейся поверхности $\tau = 0$ в точке $\tau = x = 0$. Таким образом, выбрав (80) в качестве решения граничной задачи (56), (57), мы ограничились рассмотрением только $O(4)$ -симметричных поверхностей сингулярностей. Поэтому, варьируя функционал (51) по T , θ и ρ (ρ является координатой типа b_k , «нумерующей» поверхности внутри класса сферически-симметричных), мы не должны ожидать получения правильного значения W , но только его нижней границы. Такая вариационная процедура дает следующее выражение для W_{tree} [37,27]:

$$W = n \ln \frac{\lambda l}{16} - \lambda l + n \ln \frac{2}{\pi^2}. \quad (81)$$

Заметим, что W_{tree} не зависит от ε .

Покажем теперь [44], что (81) в действительности не является истинным максимумом функционала (51), а лишь дает его нижнюю границу. С этой целью рассмотрим малые возмущения около решения (80). Так как решение должно быть $O(3)$ -симметрично (по отношению к пространственным вращениям), достаточно рассмотреть возмущенное решение, имеющее

поверхность сингулярностей, зависящую только от ρ и ψ — угла между осью τ и x . Для малых возмущений запишем искомое решение в виде

$$\phi = \frac{2\sqrt{\lambda}/2\rho + \alpha_m f(r) C_m^{(1)}(\cos \psi)}{r^2 - \rho^2(1 + \alpha_m C_m^{(1)}(\cos \psi))^2} = \phi_0 + \sum_m \alpha_m C_m^{(1)}(\cos \psi) \tilde{\phi}_m(r) + O(\alpha^2),$$

где $C_m^{(1)}(\cos \psi)$ — полиномы Гегенбауэра, α_m — малые параметры, а линейные флуктуации $\tilde{\phi}_m$ должны удовлетворять уравнению

$$\left[\partial_r^2 + \frac{3}{r} \partial_r - \frac{m(m+2)}{r^2} - \frac{24\rho^2}{(r^2 - \rho^2)^2} \right] \tilde{\phi}_m(r) = 0. \tag{82}$$

Чтобы решить это уравнение, можно воспользоваться конформной инвариантностью модели и выполнить стереографическую проекцию на сферу S^4 (это обычный способ решать уравнения в конформных моделях, см., например, [47]). Решение уравнения (82) есть

$$\tilde{\phi}_m(r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{r^{2-m} \rho^{m+1}}{(r^2 - \rho^2)^2} \left(1 - \frac{2(m-1)}{m+2} \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{(m-1)m}{(m+2)(m+3)} \frac{\rho^4}{r^4} \right).$$

Вычисляя асимптотику этого решения, получаем следующее выражение для $b_{\mathbf{k}}^*$:

$$b_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}}^0 + \sum_m \alpha_m \sqrt{\frac{\pi}{k\lambda}} e^{-k\rho} \left(\rho^{m+1} \frac{k^m}{m!} - 3\rho^2 k \frac{(m+1)}{(m+2)(m+3)} \right)$$

(здесь $b_{\mathbf{k}}^0$ соответствует решению (80)). Соответствующее изменение в функционале W имеет вид

$$\Delta W = \sum_m \alpha_m (m+1) \left(2^{-m-2} - \frac{3}{2(m+2)(m+3)} \right) + O(\alpha^2).$$

Для $m=0, 1$ (дилатации и трансляции ϕ_0) $\Delta W = O(\alpha^2)$. Однако для всех остальных m изменение функционала пропорционально α_m . Это означает, что $O(4)$ -симметричные конфигурации не являются экстремальными для W . Таким образом, выражение (81) действительно является лишь нижней границей для W в ультрарелятивистском режиме.

3.4. Численные оценки. При произвольных ε необходимо рассмотреть решения массивных уравнений поля. Точно так же, как и в пределе высоких энергий, рассмотрение $O(4)$ -симметричных решений дает нижнюю оценку на сечение при любых энергиях [45]. Единственное отличие состоит в том, что уравнения движения в этом случае приходится решать численно, так как аналитическое решение для массивной теории неизвестно. Поверхности сингулярностей представляют собой трехмерные сферы в четырехмерном евклидовом пространстве, и единственным вариационным параметром является радиус сферы ρ . Поверхность сингулярностей должна содержать начало координат, поэтому центр сферы располагается в точке

$$x_0 = (-\rho, \mathbf{0}),$$

то есть $O(4)$ -симметричное решение имеет общий вид

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(r), \\ r &= \sqrt{\mathbf{x}^2 + (\tau + \rho)^2}. \end{aligned}$$

При больших r членом взаимодействия в уравнениях поля можно пренебречь, поэтому асимптотика искомого решения совпадает с асимптотикой убывающего на бесконечности решения свободного уравнения поля

$$\phi \propto \frac{K_1(r)}{r} \propto \frac{e^{-r}}{r^{3/2}},$$

то есть при $\tau \rightarrow \infty$ решение имеет вид

$$\phi = A(\rho) \frac{\exp(-\sqrt{\mathbf{x}^2 + (\tau + \rho)^2})}{(\mathbf{x}^2 + (\tau + \rho)^2)^{3/4}},$$

где $A(\rho)$ — неизвестная функция, которую нужно найти, решая численно уравнения поля при условии, что при $r = \rho$ решение сингулярно. Этой асимптотике соответствует

$$b_{\mathbf{k}} = 2A(\rho) \frac{e^{-\omega_{\mathbf{k}} \rho}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}},$$

так что функционал W выражается через $A(\rho)$:

$$W = ET - n\theta - 8\pi A^2(\rho) e^{-\theta} \frac{K_1(2\rho - T)}{2\rho - T},$$

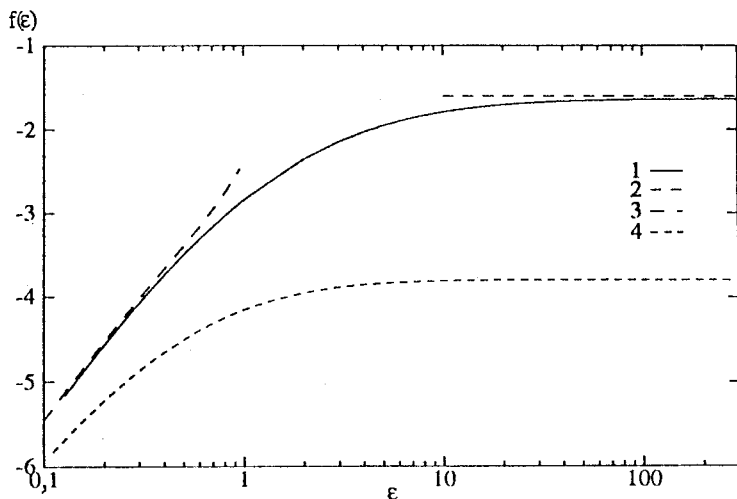


Рис.2. Зависимость функции $f(\epsilon)$: 1) результат $O(4)$ -симметричного вычисления; 2) оценка снизу для ультрарелятивистских конечных частиц; 3) низкоэнергетический аналитический результат (76); 4) оценка, полученная из анализа диаграмм [16], п.2.1.3

и становится функцией параметров ρ , T и θ . Седловые значения этих трех параметров определяются из уравнений

$$\frac{E}{n} = \frac{A'(\rho)}{A(\rho)} = \frac{K_2(2\rho - T)}{K_1(2\rho - T)}, \quad (83)$$

$$\theta = \ln \left\{ \frac{8\pi A^2(\rho)}{n} \frac{K_1(2\rho - T)}{2\rho - T} \right\}. \quad (84)$$

Таким образом, найдя множество решений сферически-симметричных уравнений поля, сингулярных на различных сферах $r^2 = \rho^2$, и из их асимптотик при $\tau \rightarrow \infty$ определив функцию $A(\rho)$, мы можем выразить седловые значения ρ , T и θ через E и n , решая алгебраические уравнения (83), (84). В результате этой процедуры получаем, что показатель экспоненты в сечении имеет вид

$$W_{\text{tree}}(E, n) = \frac{1}{\lambda} F_{\text{tree}}(\lambda n, \epsilon) = n \ln \frac{\lambda n}{16} - n + n f(\epsilon).$$

График функции $f(\epsilon)$ приведен на рис.2. При низких энергиях эти результаты совпадают с полученными из разложения по ϵ . Действительно, форма поверхности сингулярностей определяется, в общем случае, выражением

$$\tau(\mathbf{x}) = \alpha x^2 + O(x^4) + \dots,$$

и при малых ϵ играет роль лишь первый член разложения, соответствующий большому радиусу кривизны [27]. Этот член в точности воспроизводится $O(4)$ -симметричными вычислениями, которые, таким образом, дают точный древесный ответ при малых энергиях. При $\epsilon \rightarrow \infty$ массовый член в уравнениях несуществен, и решение, а вместе с ним и $f(\epsilon)$, совпадают с вычисленными аналитически в предыдущем разделе. На рис.2 приведена также нижняя оценка, полученная из анализа диаграмм (см. п.2.1.3) и возникающая из неравенства (18).

4. КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ПЕТЛИ

В предыдущем разделе мы рассмотрели связь между классическими решениями уравнений поля и древесными сечениями. В действительности древесное приближение справедливо лишь при малом числе вылетающих частиц, то есть при $n\lambda \ll 1$. В наиболее интересном режиме, $n\lambda \sim 1$, пертурбативные вычисления показывают, что петлевые поправки становятся сравнимыми с древесным вкладом (см. пп.2.2.3, 2.2.4), и их необходимо учитывать. Оказывается, что для нахождения петлевых поправок также можно применять квазиклассическую технику [27]. Основная трудность при этом заключается в учете поправок по степеням λ к (46). Эти поправки при вычислении многочастичных сечений (см. (47),(49)) могут давать вклады, пропорциональные степеням n , и при достаточно больших n ($n\lambda \sim 1$) подавление степенями λ может компенсироваться степенями n . Пертурбативные вычисления, представленные в п.2.2.4, показывают, что так оно и происходит: k -петлевые поправки к амплитуде ведут себя как $(\lambda n^2)^k$ и сравнимы с древесным вкладом даже при $n \sim 1/\sqrt{\lambda}$.

Чтобы сформулировать метод квазиклассического вычисления экспоненты для сечения $F(\lambda, \epsilon)$ во всех петлях, мы воспользуемся тем, что с экспоненциальной точностью матричный элемент (38) не зависит от оператора \hat{O} , и выберем \hat{O} в удобном для нас виде. Рассмотрим амплитуду

$$\langle n | e^{i\Phi(0)} | 0 \rangle \quad (85)$$

и соответствующее этой амплитуде сечение « $j \rightarrow n$ ». Устремляя $j \rightarrow 0$, мы рассчитываем воспроизвести с экспоненциальной точностью сечение рассеяния $1 \rightarrow n$. При $j \sim 1/\sqrt{\lambda}$ сечение « $j \rightarrow n$ » можно вычислять квазиклассическим методом (появляющиеся функциональные интегралы являются седловыми, см. ниже). Однако при $j \sim 1/\lambda$ оператор \hat{O} зависит параметрически от λ . Чтобы перейти к сечению $1 \rightarrow n$, мы воспользуемся подходом, аналогичным предложенному при изучении инстантонных переходов [43,48]. Проведем квазиклассические вычисления для $j \sim c/\sqrt{\lambda}$, где c — некоторая константа; при этом сечение будет иметь экспоненциальную форму:

$$\sigma_{j \rightarrow n} \sim e^{\frac{1}{\lambda} F(n\lambda, \epsilon; c)}$$

Затем устремим c к нулю и воспроизведем экспоненту для сечения $1 \rightarrow n$. Конечно, взятие предела $c \rightarrow 0$ является тонким местом вышеизложенного метода: этот предел может быть не гладким. Также *a priori* не ясно, воспроизведет ли он сечение $1 \rightarrow n$. Однако, ниже мы покажем, что в квантовой механике этот метод эквивалентен методу Ландау [34]; кроме того, воспроизведем результаты, полученные пертурбативными методами. Все это позволяет утверждать, что предел $c \rightarrow 0$ действительно дает экспоненту для сечения $1 \rightarrow n$. Рассмотрим, прежде всего, как этот метод работает в квантовой механике.

4.1. Метод Ландау в квантовой механике. Связь между формализмами источников и сингулярных решений легко проследить на примере метода Ландау в обычной квантовой механике.

Рассмотрим, например, в одномерной квантовой механике с потенциалом $V(x)$, изображенным на рис.3, матричный элемент перехода между состояниями с энергиями E_1 и E_2 . Нас интересует его классическое экспоненциальное подавление. Представим интересующий нас матричный элемент в виде

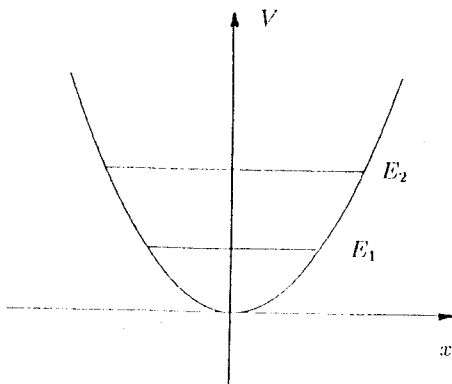


Рис.3. Квантово-механический потенциал

$$\langle E_2 | \hat{x} | E_1 \rangle = \lim_{j \rightarrow 0} \langle E_2 | e^{j\hat{x}} | E_1 \rangle,$$

где в оператор входит внешний источник $j(t) = j_0 \delta(t)$, константа $j_0 \rightarrow 0$ после вычисления матричного элемента. Пусть $P_E = |E\rangle\langle E|$ — проектор на состояние с энергией E , тогда его действие на состояние, характеризваемое некоторой координатой x , выглядит так:

$$P_E |x\rangle = |E\rangle\langle E|x\rangle = |E\rangle \cdot \Psi_E^*(x),$$

где $\Psi_E^*(x)$ — соответствующая волновая функция. В этих обозначениях

$$\langle E_2 | e^{j\hat{x}} | E_1 \rangle = \langle x_2 | P_{E_2} e^{j\hat{x}} P_{E_1} | x_1 \rangle [\Psi_{E_1}^*(x_1)]^{-1} [\Psi_{E_2}(x_2)]^{-1}. \quad (86)$$

Если

$$|\Psi_{E_{1,2}}(x_{1,2})| \sim 1, \quad (87)$$

что реализуется, например, при выборе $x_{1,2}$ в классически разрешенной области, то с экспоненциальной точностью матричные элементы в левой и правой частях (86) совпадают. Мы предположим, что условие (87) выполнено, и вычислим с экспоненциальной точностью величину

$$\begin{aligned} \langle x_2 | P_{E_2} e^{j\hat{x}} P_{E_1} | x_1 \rangle &= \langle x_2 | \int dt_2 e^{-i(\hat{H} - E_2)t_2} e^{j\hat{x}} \int dt_1 e^{i(\hat{H} - E_1)t_1} | x_1 \rangle = \\ &= \int dt_1 dt_2 e^{iE_2 t_2 - iE_1 t_1} \langle x_2 | e^{-i\hat{H}t_2} e^{j\hat{x}} e^{i\hat{H}t_1} | x_1 \rangle. \end{aligned} \quad (88)$$

Заметим, что в обкладках матричного элемента в (88) стоит хронологическое произведение $T(U(t_2 - t_1) e^{j\hat{x}})$ оператора эволюции между моментами времени $(-t_1)$ и t_2 и $e^{j\hat{x}} = e^{j_0 \hat{x}(0)}$ (источник локализован при $t=0$). Это позволяет переписать (88) в виде функционального интеграла

$$\int dt_1 dt_2 e^{iE_2 t_2 - iE_1 t_1} \int_{\substack{x(t_2) = x_2 \\ x(-t_1) = x_1}} Dx e^{iS(t_2, -t_1) + j_0 x(0)}. \quad (89)$$

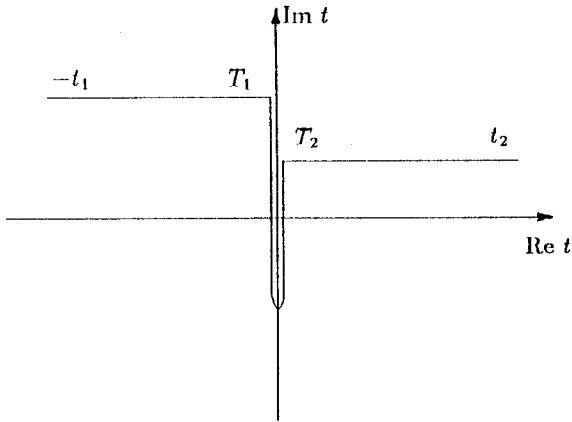


Рис.4. Контур интегрирования в комплексном времени

Интеграл по x , t_1 и t_2 вычислим методом перевала. При этом седловые значения t_1 и t_2 , вообще говоря, комплексные, а седловая траектория $x(t)$ будет определена на некотором контуре в комплексной плоскости времени, который удобно выбрать в виде, изображенном на рис.4. Седловое уравнение для функционального интеграла по $x(t)$ — это классическое уравнение движения,

$$i \frac{\delta S}{\delta x(t)} = -j_0 \delta(t),$$

а для обычного интеграла по $t_{1,2}$ условия экстремальности имеют вид

$$E_1 = \frac{\partial S}{\partial(-t_1)}, \quad E_2 = \frac{\partial S}{\partial t_2},$$

то есть E_1 и E_2 — энергии классического решения в начальном и конечном состояниях соответственно.

Решение $x(t)$ имеет, таким образом, следующий вид. При $t = -t_1$ координата равна x_1 , затем система эволюционирует в действительном времени до точки поворота (отрезок $[-t_1, T_1]$) с энергией $E = E_1$. В точке $t = T_1$ система переходит в классически запрещенную область и продолжает эволюционировать в евклидовом времени (туннелировать). В точке $t = 0$,

где сосредоточено действие внешнего источника, скорость $\dot{x}(t)$ испытывает скачок $\Delta\dot{x} = j_0$ (небольшой при небольших j_0). Энергия

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - V(x)$$

также испытывает скачок:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \dot{x} \Delta\dot{x} + (\Delta\dot{x})^2 = \dot{x} j_0 + O(j_0^2). \quad (90)$$

Далее система продолжает движение с энергией E_2 : до точки поворота T_2 в евклидовом времени, затем, на отрезке $[T_2, t_2]$ — в действительном, заканчивая движение в момент $t = t_2$ в точке x_2 . На частях контура, соответствующих действительному времени, координата $x(t)$ и скорость $\dot{x}(t)$, а стало быть и действие, вещественны, поэтому эти части, равно как и $\text{Re}(E_2 t_2 - E_1 t_1)$, дают вклад только в фазовый множитель, который нас не интересует. Вклад остальной части контура (между T_1 и T_2) равен $\exp(-S^{\text{Eucl}})$, где

$$S^{\text{Eucl}} = S_1 - S_2 \equiv \int_{T_1}^0 L_{E=E_1}^{\text{Eucl}} dt - \int_0^{T_2} L_{E=E_2}^{\text{Eucl}} dt,$$

$$L^{\text{Eucl}} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x)$$

— евклидов лагранжиан системы, который вычисляется на соответствующем решении. Седловые значения мнимых частей t_1 и t_2 равны $\text{Im} t_1 = -T_1$, $\text{Im} t_2 = T_2$, поэтому весь интеграл (89) равен с экспоненциальной точностью

$$\exp\{(E_2 T_2 - S_2) - (E_1 T_1 - S_1) + j_0 x(0)\}. \quad (91)$$

Рассмотрим теперь предел $j_0 \rightarrow 0$, в котором восстанавливается интересующий нас матричный элемент $\langle E_2 | \hat{x} | E_1 \rangle$, причем будем считать $\Delta E = E_2 - E_1$ фиксированным и конечным. В этом пределе классическая траектория становится сингулярной: как видно из (90), скачок в энергии остается конечным, только если $\dot{x} \rightarrow \infty$ одновременно с $j_0 \rightarrow 0$, так что $\dot{x} j_0 = \text{const}$. Если потенциал $V(x)$ сам по себе несингулярен и обращается в бесконечность при $x \rightarrow \pm\infty$, то условие $x(0) = \infty$ означает, что евклидова

траектория попадает в $x = +\infty$ (или $x = -\infty$) при $t = 0$. Таким образом, мы приходим к необходимости отыскания сингулярных решений евклидовых уравнений движения в полном соответствии с ВКБ-анализом [34].

Чтобы учесть вклад последнего члена в показателе экспоненты в (91) в пределе $j_0 \rightarrow 0$, следует аккуратно изучить поведение решения $x(t)$ при $t \sim 0$, где имеется сингулярность, $x(t \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Точнее, пусть для определенности главная при $x \rightarrow \infty$ асимптотика потенциала есть $V(x) \sim ax^k$. Евклидова энергия при $t \rightarrow \mp 0$ сохраняет значение, равное $E_{1(2)}$:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - ax^k = E_{1(2)},$$

поэтому

$$\dot{x} = \sqrt{2(E + ax^k)} \simeq x^{k/2}.$$

С другой стороны, из (90) следует, что

$$\dot{x} \simeq \frac{E_2 - E_1}{j_0},$$

поэтому при $j_0 \rightarrow 0$ имеем

$$j_0 x(0) \simeq j_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{j_0} \right)^{2/k} \sim j_0^{1-2/k}.$$

Следовательно, при наличии хотя бы слабой ангармоничности ($k > 2$) выполняется $j_0 x(0) \rightarrow 0$, и с экспоненциальной точностью получаем окончательно

$$\langle E_2 | \hat{x} | E_1 \rangle = \exp \{ -(S^{\text{tr}}(E_2) - S^{\text{tr}}(E_1)) \}, \quad (92)$$

где $S^{\text{tr}}(E_i) = E_i T_i - S_i$, $i = 1, 2$ — укороченное действие на каждом из участков евклидовой траектории. Формула (92) в точности совпадает с выражением для матричного элемента, вычисленного по методу Ландау [34]. Приведенный вывод устанавливает в случае одномерной квантовой механики соответствие между подходами, использующими формулировки с источниками и с сингулярными классическими решениями. Обобщение метода Ландау на случай нескольких измерений сделано в работе [49].

Перейдем теперь к рассмотрению многочастичных амплитуд в теории поля с использованием метода с источником.

4.2. Общий формализм. Здесь мы применим технику, кратко описанную в начале этого раздела, к вычислению многочастичных сечений в теории поля.

Воспользуемся формализмом когерентных состояний и рассмотрим вместо амплитуды (85) матричный элемент

$$A(j) = \langle \{b(\mathbf{k})\} | P_E e^{j\phi(0)} | 0 \rangle, \quad (93)$$

где P_E — проекционный оператор на пространство состояний с полной энергией E , который может быть записан в интегральной форме [42], так что (93) принимает вид

$$A(j) = \int d\eta e^{i\eta E} \langle \{b(\mathbf{k}) e^{i\omega\eta}\} | e^{j\phi(0)} | 0 \rangle.$$

Применяя к этому матричному элементу технику, описанную в п.3.1 (см. формулы (40), (41), (49), (50)), получим выражение для сечения в системе центра масс:

$$\begin{aligned} \sigma_{j \rightarrow n}(E) = & \int d\theta dT D b_{\mathbf{k}} D b_{\mathbf{k}}^* D \phi D \phi' \exp [ET - n\theta - \int d\mathbf{k} b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} e^{\omega T - \theta} + \\ & + B_i(0, \phi_i) + B_f(b_{\mathbf{k}}^*, \phi_f) + B_i^*(0, \phi_i') + B_f^*(b_{\mathbf{k}}, \phi_f') + \\ & + iS[\phi] - iS[\phi'] + j\phi(0) + j\phi'(0)], \end{aligned} \quad (94)$$

здесь $S[\phi]$ — классическое действие, B — граничные члены (см. (41)), $\theta = \ln \xi$, $T = i\eta$, интегрирование по полям включает в себя также интегрирование по ϕ_i , ϕ_f , ϕ_i' , ϕ_f' . Легко увидеть, что в режиме $\lambda \rightarrow 0$ с фиксированными $n\lambda$, $E\lambda$ и при $j = c/\sqrt{\lambda}$ интеграл (94) имеет седловой характер*. Как уже обсуждалось выше, нас в конечном итоге будет интересовать предел $c \rightarrow 0$.

Итак, считая, что $j \sim 1/\sqrt{\lambda}$, найдем седловую конфигурацию показателя экспоненты в интеграле (94). Заметим, что нулевых мод, связанных с трансляционной симметрией, нет, так как она явно нарушена членом $j\phi(0)$, но при этом $O(d)$ -симметрия остается, и мы можем искать $O(d)$ -симметричную седловую конфигурацию. Седловые уравнения можно разбить на две груп-

*Далее мы будем рассматривать теорию (7), но все наши рассуждения без труда обобщаются на случай произвольной бозонной теории (см. замечание после формулы (39)).

пы. Первая из них получается при вариации показателя экспоненты по ϕ , $\phi_{i,f}$, $b_{\mathbf{k}}^*$ и содержит уравнения для ϕ (мы положили массу равной единице):

$$\partial_{\mu}^2 \phi + \phi + \lambda \phi^3 = -ij \delta^{d+1}(x), \quad (95)$$

граничные условия

$$\phi(\mathbf{k}) \sim e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (96)$$

$$\phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (b_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t + \omega T - \theta} + b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega t}), \quad t \rightarrow +\infty \quad (97)$$

и аналогичные уравнения для ϕ' . Граничное условие (96) представляет собой обычное фейнмановское условие (вакуум в начальном состоянии), то есть требование положительной частотности поля при $t \rightarrow -\infty$. Условие (97) связывает положительно- и отрицательно-частотные компоненты поля между собой при $t \rightarrow +\infty$, его отличие от фейнмановского обусловлено наличием частиц в конечном состоянии. В интеграле (94) $b_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}^*$ — это независимые переменные интегрирования, однако можно считать, что для седловых значений выполнено $b_{\mathbf{k}}^* = (b_{\mathbf{k}})^*$ (это соответствует единственности седловой конфигурации для интеграла (94)). При этом не составляет труда убедиться в том, что, если ϕ — решение задачи (95)—(97), то $\phi' = \phi^*$ — решение уравнений для ϕ' . Вторая группа уравнений, получаемых вариацией по T и θ , связывает энергию и число частиц с остальными переменными:

$$E = \int d\mathbf{k} \omega b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} e^{\omega T - \theta}, \quad (98)$$

$$n = \int d\mathbf{k} b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} e^{\omega T - \theta}. \quad (99)$$

Подставив решения уравнений (95)—(99) в интеграл (94), найдем

$$\sigma_{1 \rightarrow n}(E) = \lim_{j \rightarrow 0} \sigma_{j \rightarrow n}(E) = \lim_{j \rightarrow 0} e^{W(E, n, j)}, \quad (100)$$

$$W(E, n, j) = \frac{1}{\lambda} F(\lambda n, \varepsilon, j \sqrt{\lambda}) = ET - n\theta - 2\text{Im} S[\phi] + 2j \text{Re} \phi(0), \quad (101)$$

где ϕ — решение задачи (95)—(97), при этом T и θ должны быть найдены из уравнений (98) и (99). Кроме того, видно, что (101) является преобразованием Лежандра от $\text{Im } S(T, \theta) + \text{Re } j \phi(0, T, \theta)$ к $W(E, n, j)$. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial W}{\partial E} = T, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = -\theta. \quad (102)$$

Рассмотрим теперь уравнения (98) и (99) более подробно. Физический смысл этих уравнений очень прост: они показывают, что E и n суть энергия и число частиц классической конфигурации поля* ϕ в его асимптотике $T_f \rightarrow \infty$. Так как уравнение (95) является однородным всюду, кроме точки $t = 0$, то энергия должна сохраняться отдельно при $t > 0$ и $t < 0$. В области $t > 0$ она совпадает с энергией конечного состояния и, таким образом, равна E . В области $t < 0$ мы можем вычислить энергию при $t \rightarrow -\infty$. Так как при $t \rightarrow -\infty$ ϕ содержит только фейнмановскую часть, то соответствующая энергия равна нулю. Таким образом, мы видим, что в точке $t = 0$ энергия испытывает конечный скачок $\Delta E = E$, что связано с присутствием δ -функционального источника.

Обсудим в общих чертах поведение решений граничной задачи при стремлении источника к нулю. При малых, но конечных j решение имеет особенность в пространстве Минковского только в точке $x = 0$, где действует источник. В комплексном времени решение, вообще говоря, имеет сингулярности на некоторой гиперповерхности $t = t(x)$. Так же, как и в квантовой механике, конечный скачок энергии поля при малом j возможен, только если поверхность сингулярностей подходит близко к точке $x = 0$, как схематично изображено на рис.5. В пределе $j \rightarrow 0$ поверхность сингулярностей касается точки $x = 0$, которая становится единственной точкой в пространстве-времени Минковского, где решение уравнения поля без источника с граничными условиями (96), (97) имеет сингулярность. Именно благодаря этой сингулярности происходит несохранение энергии при $j = 0$. Указанные соображения приводят к подходу [27], излагаемому в п.4.4, в котором источник сразу полагается равным нулю, а задача сводится к анализу поверхностей сингулярностей поля.

4.3. Первая квантовая поправка в $F(\lambda, \epsilon)$ в низкоэнергетическом режиме. Покажем, что сформулированный выше квазиклассический подход приводит к тем же результатам для n -частичных сечений вблизи порога

*Мы всюду предполагаем, что решение $\phi(x)$ диссипирует на линейные волны при $t \rightarrow 0$ (см. (97)). Линейной классической волне с асимптотикой (97) естественным образом можно поставить в соответствие число частиц, которое и дается правой частью формулы (99).

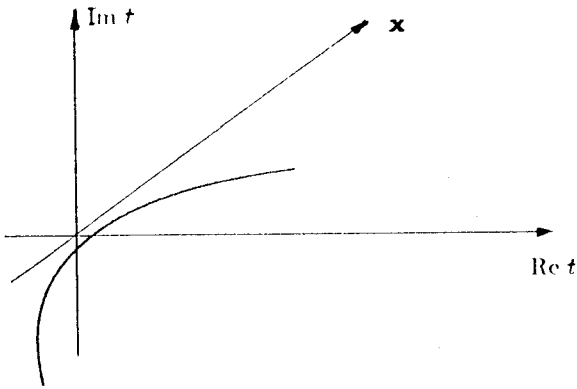


Рис.5. Поверхность сингулярностей при малом j

реакций, что и пертурбативный анализ. Это послужит нетривиальной проверкой квазиклассического метода вычисления сечений многочастичных процессов; подчеркнем, что в его рамках мы восстановим не только древесный результат, но и (экспоненциальный) *однопетлевой вклад* в показатель экспоненты для сечения. Таким образом, мы работаем в режиме $\epsilon \rightarrow 0$, $\lambda n \ll 1$ и ожидаем, что функция $F(\lambda n, \epsilon)$ имеет вид

$$F(\lambda n, \epsilon) = F_{\text{tree}}(\lambda n, \epsilon) + \text{const} (\lambda n)^2 + O(\lambda^3 n^3) + O(\epsilon \lambda n), \quad (103)$$

где

$$F_{\text{tree}}(\lambda n, \epsilon) = \lambda n \left(\ln \frac{\lambda n}{16} - 1 + \frac{d}{2} \left(\ln \frac{\epsilon}{\pi d} + 1 \right) \right) + O(\epsilon). \quad (104)$$

В последнем выражении мы опустили все члены, содержащие степени ϵ , так как $\epsilon \rightarrow 0$ (ср. с (77)). Итак, наша задача — восстановить древесный результат (104) и найти константу перед вторым членом в (103) в рамках квазиклассического подхода. Мы покажем, что эта константа равна $2\text{Re } B$, где B дается формулой (31). Заметим, прежде всего, что в случае малых λn показатель экспоненты при $j = 0$ имеет вид

$$W(E, n) = \frac{1}{\lambda} [F_{\text{tree}}(\lambda n, \epsilon) + O(\lambda n)].$$

Тогда из (102) следует, что

$$\theta = -\ln(\lambda n) + O(1).$$

Поэтому $\theta \gg 1$ при $(\lambda l) \ll 1$. Далее, решение уравнения (95) можно записать в виде формального ряда по j :

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} j^m \phi_m(x), \quad (105)$$

где $\phi_0(x)$ удовлетворяет однородному нелинейному уравнению и несингулярно в пространстве-времени Минковского, а $\phi_m(x)$ получается путем формального применения теории возмущений по j к уравнению (95). Как $\phi_0(x)$, так и $\phi_m(x)$ должны быть положительно-частотными при $t \rightarrow -\infty$ (см. (96)). Для $\phi_0(x)$ это означает, что эта функция положительно-частотна и при $t \rightarrow +\infty$ (следует из сохранения энергии поля, удовлетворяющего однородному уравнению). Напротив, компоненты $\phi_m(x)$ отрицательно-частотны при $t \rightarrow +\infty$, поскольку теория возмущений по j для уравнения (95) строится с помощью фейнмановского пропагатора во внешнем поле $\phi_0(x)$, который имеет только отрицательно-частотную часть при $t \rightarrow +\infty$. Граничное условие (97) показывает, что при больших θ отрицательно-частотная часть поля ϕ подавлена фактором $e^{-\theta}$ по сравнению с положительно-частотной, то есть ϕ_m малы относительно ϕ_0 при малых λl . Таким образом, формальное разложение (105) позволяет построить разложение решения по степеням $e^{-\theta} \sim \lambda l$. Этим мы сейчас и воспользуемся.

Для наших целей достаточно найти решение граничной задачи (95)—(99) в виде разложения (105), удерживая только линейные по j члены:

$$\phi = \phi_0 + j \phi_1 + O(j^2). \quad (106)$$

Подставляя это разложение в (95)—(99), мы получим уравнения для ϕ_0 :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi_0 + \phi_0 + \lambda \phi_0^3 &= 0, \\ \phi_0(\mathbf{k}) &\sim e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow -\infty, \\ \phi_0(\mathbf{k}) &= \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (107)$$

и для ϕ_1 :

$$(\partial_\mu^2 + 1 + 3\lambda \phi_0^2) \phi_1 = -i\delta^{d+1}(x),$$

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{k}) &\sim e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow -\infty, \\ \phi_1(\mathbf{k}) &= \frac{1}{j} \frac{b_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t + \omega T - \theta}, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (108)$$

Заметим еще раз, что, согласно (107), функция ϕ_0 имеет только одну частотность. В разд.3 мы уже говорили (см. обсуждение после формулы (78)), что выражение (104) получается, если в качестве ϕ_0 взять пространственно-независимое евклидово решение (58). Это решение сингулярно на гиперплоскости $\tau = 0$. При $j \neq 0$, как уже говорилось выше, поверхность сингулярностей в общем случае не должна проходить через точку $\tau = 0$, поэтому мы выберем в качестве решения ϕ_0 в действительном времени функцию

$$\phi_0 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\text{sh}(it - \alpha)}, \quad (109)$$

где $\alpha > 0$ — некоторая константа. Очевидно, что (109) сингулярна на плоскости $\tau = -\alpha$, при этом предполагается, что при выключении источника α также стремится к нулю. Кроме того, ϕ_0 действительно является решением задачи (107). Найдем также $b_{\mathbf{k}}^*$, соответствующие (109) (воспользуемся для этого определением (42) и учтем, что $\alpha > 0$):

$$b_{\mathbf{k}}^* = \sqrt{\frac{16}{\lambda}} \sqrt{\omega} (2\pi)^{d/2} \delta(\mathbf{k}) e^{-\alpha}. \quad (110)$$

Решение задачи (108) в поле (109) может быть найдено из выражения для пропагатора $D(x, x')$ (см. п.2.2.3) сдвигом τ и переходом к действительному времени:

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \phi_1(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \\ \phi_1(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} W} (f_1^\omega(t) f_2^{\omega}(0) \theta(-t) + f_2^\omega(t) f_1^\omega(0) \theta(t)), \end{aligned} \quad (111)$$

где

$$\begin{aligned} f_1^\omega(t) &= e^{\omega(it - \alpha)} \left(\omega^2 + 2 - 3\omega \text{cth}(it - \alpha) + \frac{3}{\text{sh}^2(it - \alpha)} \right), \\ f_2^\omega(t) &= f_1^{-\omega}(t), \quad W = 2\omega(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 4). \end{aligned}$$

Заметим, что (111) имеет правильное поведение при $t \rightarrow \pm \infty$: при $t > 0$ поведение ϕ_1 определяется функцией f_2^ω , имеющей только фейнмановскую часть при $t > 0$; при $t < 0$, наоборот, функция f_1^ω имеет фейнмановскую часть, и она определяет поведение ϕ_1 . Исследуем более внимательно асимптотику $\phi_1(\mathbf{k})$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \phi_1^{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{e^{-i\omega t} (\omega^2 - 3\omega + 2) f_1(0)}{W} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^{d/2} 2\omega(\omega^2 + 3\omega + 2)} \frac{3}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (112)$$

Так как в дальнейшем мы устремим j к нулю, и, следовательно, α также должна стремиться к нулю, то в последнем равенстве мы удержим только наиболее сингулярный член при $\alpha \rightarrow 0$.

Сравнивая (112) с граничным условием в (108), находим

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{j}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{2\omega} (\omega^2 + 3\omega + 2)} \frac{3}{\alpha^2} e^{-\omega T + \theta}. \quad (113)$$

Отметим, что при больших T (большие T соответствуют малым энергиям, как мы сейчас убедимся) эта функция сосредоточена вблизи $\mathbf{k} = 0$, т.е. $b_{\mathbf{k}} \sim \delta(\mathbf{k})$. Это позволяет удовлетворить условию $b_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}}^*$, т.е. приравнять (110) и (113). В результате получаем соотношение между j и α :

$$j = \sqrt{\frac{32}{\lambda}} 2\alpha^2 (2\pi T)^{d/2} e^{T - \theta}. \quad (114)$$

Подставив это выражение в $b_{\mathbf{k}}$, с учетом условий (98) и (99), получим

$$n = \frac{16}{\lambda} (2\pi T)^{d/2} e^{T - \theta}, \quad (115)$$

$$\varepsilon = \frac{d}{2T}. \quad (116)$$

Теперь из уравнений (115) и (114) имеем

$$j = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} n \alpha^2, \quad (117)$$

так что α действительно стремится к нулю при $j \rightarrow 0$, и, таким образом, $\phi(0)$ становится сингулярной. Из (115) и (116) видно, как и ожидалось, что $\theta \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow 0$, и $T \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Действие на поле $\phi = \phi_0 + j\phi_1$ с точностью j^2 легко вычисляется интегрированием по частям с учетом уравнений поля. Имеем

$$2\text{Re } j\phi(0) - 2\text{Im } S[\phi] = 2\text{Re } j\phi_0(0) + j^2\text{Re } \phi_1(0) - n. \tag{118}$$

На основании (109) и (117) видно, что первый член в правой части (118) при $j \rightarrow 0$ вклада не дает. Второй член, напротив, дает вклад, который легко вычисляется. Для этого найдем

$$\phi_1(0) = \frac{4}{\alpha^4} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \frac{9}{4W} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{4B}{\alpha^4}. \tag{119}$$

Подставив теперь выражения (115)—(119) в формулу (101) и устремив j к нулю (соответственно и $\alpha \rightarrow 0$), имеем

$$F(\lambda n, \varepsilon) = F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon) + 2\text{Re } B(\lambda n)^2, \tag{120}$$

что полностью согласуется с пертурбативными вычислениями. Заметим, что аналогичные вычисления можно провести и для теории (7) с нарушенной симметрией $\phi \rightarrow -\phi$.

4.4. Формализм сингулярных решений. Остановимся теперь на другой формулировке классической граничной задачи для вычисления многочастичных сечений (мы будем следовать работе [27]). Как уже отмечалось, процедура вычисления матричного элемента в присутствии источника с последующим устремлением $j \rightarrow 0$ приводит к сингулярным классическим решениям, позволяющим изучать переходы между состояниями с различной энергией. Рассмотрим более подробно структуру сингулярностей решения классической граничной задачи (95)—(99) при $j \rightarrow 0$. В пространстве Минковского решение сингулярно в точке $x = 0$, однако при аналитическом продолжении на комплексное время поле $\phi(x)$, в общем случае, сингулярно на некоторой d -мерной гиперповерхности. Для удобства изложения будем предполагать, что эта гиперповерхность целиком лежит в мнимом (евклидовом) времени и может быть описана уравнением $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, причем $\tau_0(0) = 0$ и $\partial_{\mathbf{x}}\tau_0(0) = 0$. Этого предположения можно было бы не делать; результат от

этого не изменится. Из уравнения движения в случае модели (7) следует, что вблизи сингулярности поле ведет себя как

$$\phi(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{l(x)},$$

где $l(x)$ — расстояние от точки x до поверхности сингулярности. В то же время глобально поверхность сингулярности не фиксирует решение единственным образом; для однозначного определения поля требуется задать, например, граничные условия на бесконечности.

Пусть $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ — решения классических уравнений поля с одной и той же поверхностью сингулярностей, но с различными энергиями, причем

$$\phi_1 \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \tag{121}$$

$$\phi_2(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (b_{\mathbf{k}} e^{\omega_{\mathbf{k}} T - \theta - i\omega_{\mathbf{k}} t} + b_{-\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}) \text{ при } t \rightarrow +\infty. \tag{122}$$

Данные граничные условия соответствуют тому, что поле ϕ определено (при фиксированном \mathbf{x}) на контуре в комплексной плоскости времени (см. рис.6). Поле ϕ_1 определено на мнимой (евклидовой) оси времени ($i\infty; i\tau_0$); в точке τ_0 поле сингулярно; на отрезке $(i\tau_0, 0)$ и на действительной полуоси $(0, \infty)$ определено поле ϕ_2 (на отрезке евклидовой оси времени $(0, i\tau_0)$ определены оба поля).

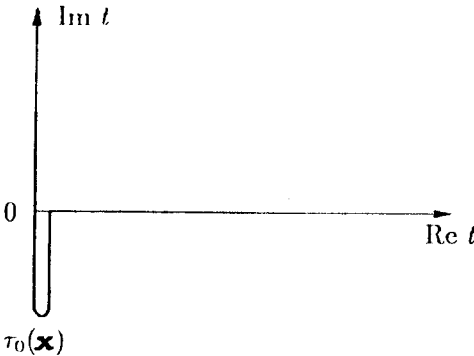


Рис.6. Контур при фиксированном \mathbf{x}

В общем случае ϕ_1 и ϕ_2 не совпадают в точке $t = 0$, что соответствует скачку поля ϕ при $t = 0$ для любых \mathbf{x} (а не только в точке $t = \mathbf{x} = 0$). Стало быть, в общем случае поля ϕ_1 и ϕ_2 в совокупности не представляют собой решение нашей граничной задачи. Однако в частном случае, когда $\phi_1(0, \mathbf{x}) = \phi_2(0, \mathbf{x})$ для всех \mathbf{x} , кроме $\mathbf{x} = 0$, описанное поле будет решением.

Чтобы выделить этот частный случай, рассмотрим евклидово действие $S_E[\phi]$, равное сумме действий полей ϕ_1 и ϕ_2 вдоль соответствующих частей контура:

$$S_E[\phi] = - \int_{+\infty}^{\tau_0(\mathbf{x})} dt d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + V(\phi_1) \right) - \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^0 dt d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 + V(\phi_2) \right) - i \int_0^\infty dt d\mathbf{x} L(\phi_2). \tag{123}$$

Вообще говоря, первые два слагаемых расходятся, ибо в точке $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$ поле имеет особенность. Однако направления интегрирования для них противоположны, и аккуратный учет поведения решений вблизи сингулярности приводит к сокращению расходимостей. Для этой цели можно, например, регуляризовать поле ϕ в сингулярности, положив его значение на поверхности сингулярности равным большому, но конечному числу Φ_0 , и устремив $\Phi_0 \rightarrow \infty$ после вычисления действия.

Покажем, что для нахождения поверхности сингулярности, соответствующей решению граничной задачи, следует экстремизировать по всевозможным поверхностям $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, проходящим через точку $\tau = \mathbf{x} = 0$, действительную часть евклидова действия (123) $\text{Re } S_E[\phi]$.

Регуляризуем поля $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ указанным выше способом. Введем на поверхности сингулярности \mathcal{A} , определенной условием $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, координаты $i = 1, \dots, d$. (Под поверхностью сингулярности здесь и далее будем подразумевать поверхность, где $\phi_1 = \phi_2 = \Phi_0$). Обозначим скачок нормальной производной поля ϕ на этой поверхности

$$j(s_i) = \partial_n(\phi_1 - \phi_2). \tag{124}$$

Тогда поле ϕ является решением классических уравнений с источником, распределенным по поверхности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$:

$$\frac{\delta S_E}{\delta \phi} = j(x) = \int d\sigma j(s_i) \delta(x - x_\mu(s)), \tag{125}$$

где интегрирование ведется по поверхности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, мера $d\sigma$ включает

$$\prod_{i=1}^d ds_i \quad \text{и метрику на поверхности } \mathcal{A}.$$

$i = 1$

Покажем, прежде всего, что после экстремизации $\text{Re } S_E[\phi]$ по поверхностям сингулярности определенный в (125) источник будет локализован в точке $x=0$ ($j(x) \sim \delta(x)$). Пусть поверхность сингулярностей \mathcal{A} слегка деформирована до поверхности \mathcal{A}' , так что каждая лежащая на ней точка x_μ сдвинута на $\delta x_\mu = n_\mu \delta x(s)$, где n_μ — зависящий от положения точки на поверхности единичный вектор нормали к поверхности. Нас интересуют поверхности, проходящие через точку $x=0$, поэтому потребуем $\delta x_\mu|_{x=0} = 0$. Полученная после деформации новая поверхность сингулярностей соответствует новым решениям, $\phi'_{1,2} = \phi_{1,2} + \delta\phi_{1,2}$. Вариация $S[\phi_1]$ связана с вариацией подынтегрального выражения и с изменением пределов интегрирования за счет изменения $\tau_0(x)$; при малых δx она может быть представлена в виде поверхностного интеграла

$$\delta S_E[\phi_1] = \int_{\mathcal{A}} d\sigma \left[(\partial_\mu \phi_1 \cdot n_\mu) \delta\phi - \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + V(\phi_1) \right) \delta x(s) \right],$$

где

$$\delta\phi(x_\mu) = \phi'(x_\mu) - \phi(x_\mu) = \phi'(x_\mu) - \phi'(x_\mu + \delta x_\mu) = -(\partial_\mu \phi \cdot n_\mu) \delta x(s),$$

поэтому

$$\delta S_E[\phi_1] = \int_{\mathcal{A}} d\sigma \left[\frac{1}{2} (\partial_n \phi_1)^2 - V(\phi_1) \right] \quad (126)$$

(мы использовали тот факт, что в выбранной регуляризации поле ϕ_1 постоянно и равно Φ_0 на поверхности \mathcal{A} , а поле ϕ'_1 — на поверхности \mathcal{A}').

Вариация части действия, связанной с полем ϕ_2 , вычисляется аналогично с единственной разницей: появляется ненулевой граничный член при $t = +\infty$, равный

$$-i \int dx \partial_0 \phi_2 \delta\phi_2|_{t=+\infty},$$

который, однако, с учетом асимптотики поля ϕ_2 при $t \rightarrow +\infty$ (122), оказывается чисто мнимым, то есть в $\text{Re } S_E[\phi]$ вклада не дает:

$$\delta S_E[\phi_2] = - \int_{\mathcal{A}} d\sigma \left[\frac{1}{2} (\partial_n \phi_2)^2 - V(\phi_2) \right]. \quad (127)$$

С учетом (126) и (127) вариация действительной части (123) оказывается равной

$$\delta \operatorname{Re} S_E[\phi] = \frac{1}{2} \int_A d\sigma ((\partial_n \phi_1)^2 - (\partial_n \phi_2)^2) \delta x(s).$$

В пределе $\Phi_0 \rightarrow \infty$ разница между $\partial_n \phi_1$ и $\partial_n \phi_2$ невелика, поэтому

$$(\partial_n \phi_1)^2 - (\partial_n \phi_2)^2 \approx 2\partial_n \phi \cdot \partial_n (\phi_1 - \phi_2),$$

откуда с учетом (124)

$$\delta \operatorname{Re} S_E[\phi] = \int_A d\sigma (\partial_n \phi) \delta x(s) j(s).$$

Требование $\delta \operatorname{Re} S_E[\phi] = 0$ для вариаций поверхности \mathcal{A} , подчиняющихся условию $\delta x|_{x=0} = 0$, может быть удовлетворено только при $j(x) = j_0 \delta(x)$. Стало быть, всюду на поверхности \mathcal{A} , кроме точки $x=0$, производные совпадают: $\partial_n \phi_1 = \partial_n \phi_2$, а также равны и сами поля, $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Следовательно, поля совпадают и при $\tau_0(x) < \tau < 0$ (кроме точки $\tau = x = 0$). При снятии регуляризации, то есть при взятии предела $\Phi_0 \rightarrow \infty$, точка $x=0$ становится сингулярной; чтобы скачок энергии в этом пределе остался конечным, надо потребовать $j_0 \rightarrow 0$. Таким образом, поле ϕ удовлетворяет обычным классическим уравнениям без источника и граничным условиям (121), (122) и сингулярно в пространстве Минковского в единственной точке $x=0$, то есть является решением граничной задачи (95)—(99).

Итак, для нахождения решения граничной задачи (95)—(99) нужно экстремизировать действительную часть евклидова действия (123) (или мнимую часть соответствующего действия в пространстве Минковского) по всем поверхностям сингулярности \mathcal{A} , проходящим через точку $t = x = 0$. Данная формулировка позволяет получить несколько иным способом те же результаты, что и при решении уравнений с источником с последующим устремлением $j_0 \rightarrow 0$ (см. п.4.2) [27]. В частности, именно в рамках данной формулировки проще всего получить рецепт вычисления древесных сечений, обсуждавшихся в разд.3. Преимуществом данной формулировки является то, что можно сразу решать уравнения без источника. Однако в общем случае оказывается, что нелегко определить, на каких поверхностях искомое решение должно быть сингулярно, — вообще говоря, требуется экстремизировать действие по бесконечнопараметрическому множеству поверхностей. В простейших случаях вид поверхности удается определить. Поверх-

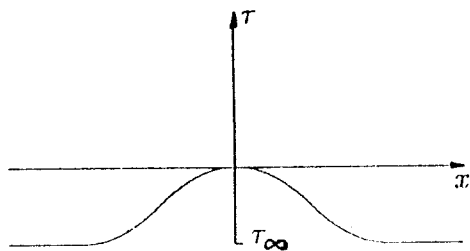


Рис.7. Поверхность сингулярностей, описывающая процессы точно на пороге

ности сингулярностей, возникающие в задаче о древесных сечениях, обсуждались в разд.3. Классическое решение (25), описывающее многочастичное рождение на пороге в древесном приближении (то есть в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ и $\lambda l \rightarrow 0$) сингулярно на плоскости $\tau = 0$. Заметим (см. п.4.2), что в древесном приближении энергия решения сохраняется, то есть источник в точке $x = 0$ эффективного влияния не оказывает. При учете квантовых поправок, то есть при конечных λl , энергия решения уже не постоянна; в терминах поверхности сингулярности этому соответствует искривление последней вблизи источника. Однако при вычислении сечения вблизи порога реакции деформация поверхности должна быть локальной, и при больших $|x|$ кривизна поверхности должна стремиться к нулю, что означает $\tau_0(x) \rightarrow \tau_\infty = \text{const}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Соответствующая поверхность сингулярности имеет форму, схематически изображенную на рис.7.

Изложенная в данном разделе постановка граничной задачи эквивалентна формулировке с источником, и в каждом конкретном случае та или иная из них может оказаться более удобной.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многочастичные процессы представляют собой замечательный пример того, что в некоторых случаях физически наблюдаемые величины в квантовой теории поля — сечения процессов «мало \rightarrow много» — могут быть вычислены квазиклассическими методами с учетом петлевых, то есть квантовых, поправок. Соответствующий метод представляет собой обобщение на теорию поля метода Ландау вычисления квазиклассических матричных элементов в квантовой механике. Две основные черты этого метода позволяют применять его в рассматриваемой задаче. Во-первых, используются сингулярные классические решения, что дает возможность вычислять матричные элементы между состояниями с различной энергией. Во-вторых, вычисляемые с помощью метода Ландау матричные элементы в квантовой механике с экспоненциальной точностью зависят лишь от состояний, между которыми вычисляется элемент, и не зависят от выбора оператора, заключенно-

го между обкладками. На языке теории поля этому соответствует независимость (с экспоненциальной точностью) сечений многочастичных процессов от числа частиц в начальном состоянии (если оно не велико) и позволяет при вычислении амплитуд вводить вместо операторов рождения исходных частиц оператор, содержащий внешний источник (устремляя затем величину источника к нулю). Экспоненциальный характер введенного оператора с источником дает возможность вычислять появляющиеся функциональные интегралы методом перевала; в то же время после устремления величины источника к нулю оператор параметрически не содержит экспоненциальных факторов, то есть, с точки зрения Ландау, неотличим от операторов рождения исходных частиц. Сингулярная форма источника приводит к требуемому скачку энергии, который невозможен в гладком классическом решении из-за сохранения энергии.

Необходимость использования непertурбативного метода в данном случае связана с неприменимостью обычной теории возмущений для процессов, в которых число участвующих частиц n столь велико, что большой параметр n «конкурирует» с малой константой связи λ , так что разложение по λ перестает работать. Соответствующим образом модифицированная теория возмущений требует уже в первых порядках учета вкладов всех членов обычного петлевого разложения, что не позволяет продвинуться в область достаточно больших n . Все имеющиеся пертурбативные результаты подтверждают квазиклассическую форму (6) многочастичных сечений и независимость их от начального состояния, что указывает на адекватность метода Ландау в данной задаче. Описанный в этом обзоре метод воспроизводит все результаты теории возмущений, включая известные петлевые поправки, и позволяет продвинуться за ее пределы. В частности, в древесном приближении сечение может быть вычислено при любых кинетических энергиях конечных частиц. Учет петлевых поправок вне порога требует значительно более сложных численных расчетов, хотя принципиально может быть проведен в рамках предложенной схемы.

Хотелось бы остановиться на нерешенных проблемах и возможных путях дальнейшего углубления знаний о многочастичных процессах.

1. Хотя все имеющиеся результаты в модели (7) свидетельствуют об экспоненциальном подавлении многочастичных сечений, они не исключают возможности того, что функция $F(\lambda n, \epsilon)$, стоящая в показателе экспоненты (6), при большом числе частиц ($\lambda n \gg 1$) окажется близкой к нулю, то есть сечения достигают унитарного предела и не подавлены. Подтвердить или исключить эту возможность могут только вычисления петлевых поправок при произвольных ϵ ; для проведения соответствующих численных расчетов требуется изучение структуры сингулярностей соответствующих комплексных классических решений в комплексной плоскости времени.

2. Как уже отмечалось, в модели ϕ^4 с нарушенной дискретной симметрией $\phi \leftrightarrow -\phi$ коэффициент B в показателе экспоненты для амплитуд $1 \rightarrow n$ на пороге (35) имеет положительную действительную часть, что могло бы служить указанием на экспоненциальное усиление амплитуд, не согласующееся с условием унитарности. При больших n , однако, следующие члены разложения экспоненты по λl могут изменить знак показателя; кроме того, при сходе с порога амплитуды могут убывать достаточно быстро, чтобы в полном сечении функция $F(\lambda l, \epsilon)$ была отрицательной. (Напомним, что выражение (35) — это результат учета первых петлевых поправок, и аргументы п.2.1.3 не противоречат указанной возможности). Объяснение необычного поведения амплитуд в данной модели может быть связано с появлением непertурбативных конфигураций в промежуточных состояниях, подобных использованным в [21] для вычисления амплитуд на пороге. Роль данных конфигураций при ненулевых кинетических энергиях до конца не ясна.

3. В приложении продемонстрировано, что в некоторых случаях сокращения между диаграммами приводят к нулям амплитуд, соответствующим занулению предэкспоненциального множителя в квазиклассическом подходе. По-видимому, за этот эффект в описанных случаях отвечают некоторые классические симметрии, явный вид (генераторы) которых известен далеко не во всех случаях. Также не доказано, что данное явление свойственно только пороговой кинематике (все известные случаи зануления амплитуд имеют место только на пороге) и только древесным (или эффективно древесным, как в $O(N)$ -модели) диаграммам. Иными словами, нет уверенности, что случайные (или вызванные неизвестной симметрией) сокращения не приведут к занулению в некоторых моделях коэффициентов, стоящих перед экспонентами в формулах (6) и (35).

4. Существует (по крайней мере, в принципе) возможность нетривиальной непertурбативной проверки гипотезы (6) для двумерных интегрируемых моделей*. В некоторых моделях благодаря точно известному виду S -матрицы существуют точные аналитические выражения для амплитуд типа $1 \rightarrow n$ при произвольном n (см., напр., [50]) (в контексте интегрируемых теорий эти матричные элементы обычно называют формфакторами). Например, для модели sine-Gordon явный вид таких матричных элементов приведен в работах [51,52]. Разумеется, точный матричный элемент $\langle 0 | \phi | n \rangle$ зависит от n параметров — импульсов конечных частиц. Проинтегрировав квадрат амплитуды по фазовому объему и взяв предел $\lambda \rightarrow 0$ при фиксированных λl и ϵ , можно проверить, будет ли полученное

* Авторы благодарны А.Замолодчикову, указавшему на эту возможность.

сечение действительно иметь вид (6). К сожалению, из-за весьма сложной зависимости амплитуд от импульсов в случае больших n такую программу пока выполнить не удалось.

Таким образом, ряд вопросов, связанных с многочастичными процессами в скалярных теориях поля, пока остается открытым. Мы, тем не менее, надеемся, что описанный квазиклассический метод может дать ответ по крайней мере на некоторые из них.

Авторы глубоко признательны своим коллегам из отдела теоретической физики ИЯИ РАН за многочисленные полезные обсуждения. Мы благодарны Ф.Л.Безрукову, П.Г.Тинякову и Д.Т.Шону за сотрудничество в изучении различных вопросов, затронутых в этом обзоре. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 96-02-17449а, и INTAS, грант 94-2352. Работа М.Л. и С.Т. частично поддержана ISSEP в рамках программы «Соросовские аспиранты».

ПРИЛОЖЕНИЕ

НУЛИ АМПЛИТУД И КЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ

Классический метод, описанный в настоящем обзоре и позволяющий продвинуться за рамки теории возмущений при изучении многочастичных процессов, дает информацию о матричном элементе или о полном сечении с экспоненциальной точностью, то есть учитывает только главное поведение вида (6). Коэффициент перед экспонентой может представлять собой произвольную функцию, пропорциональную некоторой степени λ в пределе $\lambda \rightarrow 0$ при фиксированном λl . В общем случае данное приближение учитывает главный вклад в рассматриваемом пределе. Однако при вычислении конкретных матричных элементов может оказаться, что предэкспоненциальный множитель при определенной кинематике имеет нули или полюсы, и тогда аргументы о квазиклассической вычислимости и независимости от оператора перестают работать. (Аналогичная ситуация возникает и в квантовой механике, если в качестве оператора выбрать, например, s -число. Его матричный элемент между ортогональными состояниями равен нулю, что не может быть получено квазиклассическими методами).

К сожалению, заранее сказать, имеем ли мы дело с подобным случаем, невозможно; определить наличие нулей или полюсов в предэкспоненте можно, точно вычислив (хотя бы в главном порядке) амплитуду конкретного процесса.

Подобные явления известны для пороговой кинематики, в частности, для процессов $2 \rightarrow n$. Полюсы появляются при определенных соотношениях между энергиями налетающих частиц в древесном приближении, а при

учете петлевых поправок они смещаются (см. п.2.2.4 и [35]). В значительно более широком спектре случаев известно явление зануления древесных амплитуд, на котором остановимся подробнее.

Рассмотрим процесс $2 \rightarrow n$ на пороге в древесном приближении. Пропагатор $D(\tau, \tau'; \mathbf{p})$, введенный в п.2.2.3, имеет отличные от нуля вычеты лишь в точках $\omega = 2$ и $\omega = 4$; это означает, что в точности равны нулю древесные амплитуды $2 \rightarrow n$, кроме $n = 2$ и $n = 4$ [29,15]. В случае нарушенной дискретной симметрии единственной ненулевой амплитудой такого типа является амплитуда $2 \rightarrow 2$ [30]. Более подробный анализ [13] показал, что при рассмотрении моделей с двумя полями χ и ϕ (частным случаем которых при $\phi = \chi$ можно считать (7)), зануление древесных амплитуд $2\chi \rightarrow n\phi$ на пороге имеет место лишь при определенных параметрах лагранжиана (см. ниже). В то же время в модели с мягко нарушенной $O(2)$ -симметрией

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{m_1^2}{2} \phi^3 - \frac{m_2^2}{2} \chi^2 - \lambda(\phi^2 + \chi^2)^2 \quad (128)$$

все древесные амплитуды $n_1\chi \rightarrow n_2\phi$ для покоящихся реальных частиц равны нулю [23], кроме $n_1 = n_2 = 2$ ($n_1 = 1, n_2 = 2$ при нарушенной симметрии). Зануление древесных амплитуд $2 \rightarrow n$ на пороге было обнаружено в ряде других моделей, включая бозонный сектор электрослабой теории [53—55], линейную σ -модель [53] и модель sine-Gordon. Однопетлевой вклад в амплитуду $2 \rightarrow n$ в теории (7) отличен от нуля [56,35], однако в $O(N)$ -симметричных обобщениях модели (7) зануление амплитуд $2 \rightarrow n$ сохраняется с учетом главных петлевых поправок при $N \rightarrow \infty$ [31].

Причина зануления древесных амплитуд лежит в (явной или скрытой) симметрии рассматриваемой модели. Так как речь идет о древесных амплитудах, соответствующие симметрии должны проявляться на классическом уровне. Наиболее известным примером является модель sine-Gordon, в которой классические симметрии из-за бесконечного числа законов сохранения в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени приводят к факторизации S -матрицы и занулению всех амплитуд, кроме $2 \rightarrow 2$ (см., напр., [57,51] и ссылки там). Из всех перечисленных случаев зануления амплитуд явный вид ответственной за него классической симметрии (под явным видом мы понимаем выражения для генераторов или сохраняющихся зарядов в терминах классических полей) известен [23] только для системы (128), сужение которой на нулевые пространственные импульсы представляет собой простейший случай системы Гарнье — известной интегрируемой системы классической механики (см., например, [58]).

Для нахождения древесных амплитуд $2 \rightarrow n$ в общем случае требуется рассмотреть возмущения вокруг классического решения, генерирующего амплитуды $1 \rightarrow n$ (амплитуды определяются через вычеты пропагатора в поле соответствующего решения). Производящая функция для амплитуд $2 \rightarrow n$ должна удовлетворять линеаризованному уравнению движения в поле классического решения (в случае пороговой кинематики это будет уравнение типа Шредингера). Большинство известных случаев зануления можно связать [53] с теорией двух полей ϕ и χ , взаимодействующих с потенциалом

$$V_{\text{int}}(\phi, \chi) = \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{\xi}{2} \phi^2 \chi^2;$$

в этом случае оператор в соответствующем линейном уравнении имеет вид

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 - \frac{2\xi}{\lambda} \frac{1}{\text{ch}^2 \tau}. \quad (129)$$

Когда $2\xi/\lambda = m(m+1)$, где m — целое число, это оператор Шредингера из задачи о безотражательных потенциалах [59], и зануление амплитуд имеет место лишь при таком соотношении между ξ и λ , в противном случае амплитуды растут факториально с ростом числа частиц [13]. Оператор (129) возникает также в задачах об устойчивости солитонов в $(1+1)$ -мерных теориях, что указывает на возможную связь интегрируемости последних и скрытой интегрируемости четырехмерных теорий на пороге [59].

Несколько иная формулировка данного свойства систем с занулением амплитуд на пороге [60], проясняющая общие черты с двумерными теориями, связана с функциями Бейкера — Ахиезера*, которые являются собственными функциями конечнозонных операторов Шредингера. Пусть малые возмущения около классического решения, генерирующего амплитуды $1 \rightarrow n$, описываются линейным оператором $(\hat{L} - \omega^2)$ (в описанном случае $\hat{L} = \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{m(m+1)}{\text{ch}^2 \tau}$). Тогда амплитуды $2 \rightarrow n$ равны вычетам собственной

*Функции Бейкера — Ахиезера — это функции на римановых поверхностях, имеющие конечное число существенных особенностей (экспонента на комплексной плоскости) [61,62]. Авторы признательны К.Селиванову, В.Спиридонову и Е.Троицкому за указание на эти работы.

функции оператора L , параметризованной собственным числом ω . Указанная собственная функция является функцией Бейкера — Ахизера, определенной на спектральной кривой со спектральным параметром ω (из-за фейнмановской асимптотики $e^{-i\omega t}$ она имеет существенную особенность при $t = \infty$). Когда оператор \hat{L} является оператором Лакса некоторой интегрируемой системы с конечнозонным спектром, функция Бейкера имеет конечное число полюсов [61], что соответствует конечному числу отличных от нуля амплитуд $2 \rightarrow n$. В работе [60] приведен ряд конкретных примеров интегрируемых систем, связанных через оператор \hat{L} с моделями, в которых зануляются амплитуды $2 \rightarrow n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ringwald A. — Nucl. Phys., 1990, vol.B330, p.1.
2. Espinosa O. — Nucl. Phys., 1990, vol.B343, p.310.
3. Mattis M.P. — Phys. Rep., 1992, vol.214, p.159.
4. Tinyakov P.G. — Int. J. Mod. Phys., 1993, vol.A8, p.1823.
5. Voloshin M.B. — In: Proc. 27th Int. Conf. on High Energy Physics, Glasgow, 1994. Eds. P.J.Bussey, I.G.Knowles, IOP, 1995, p.121.
6. Рубаков В.А., Шапошников М.Е. — УФН, 1996, т.166, с.493.
7. Goldberg H. — Phys. Lett., 1990, vol.B246, p.445.
8. Cornwall J.M. — Phys. Lett., 1990, vol.B243, p.271.
9. Voloshin M.B. — Nucl. Phys., 1992, vol.B383, p.233.
10. Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G. — Nucl. Phys., 1993, vol.B391, p.42; Nucl. Phys., 1993, vol.B391, p.57.
11. Brown L.S. — Phys. Rev., 1992, vol.D46, p.4125.
12. Smith B.H. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.3521.
13. Brown L.S., Cheng-Xing Zhai — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.5526.
14. Libanov M.V., Rubakov V.A., Troitsky S.V. — Nucl. Phys., 1994, vol.B412, p.607.
15. Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G. — Nucl. Phys., 1993, vol.B395, p.3.
16. Voloshin M.B. — Phys. Lett., 1992, vol.B293, p.389.
17. Липатов Л.Н. — ЖЭТФ, 1977, т.72, с.411.
18. Zakharov V.I. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.67, p.3650.
19. Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G. — Phys. Lett., 1992, vol.B296, p.139.
20. Rubakov V.A. — In: Proc. of the 2nd Recontres du Vietnam, Ho Chi Minh City, Vietnam, 1995; hep-ph/9511236.
21. Gorsky A.S., Voloshin M.B. — Phys. Rev., 1993, vol.D48, p.3843.
22. Mawhinney R.D., Willey R.S. — Phys. Rev. Lett., 1995, vol.74, p.3728.
23. Libanov M.V., Rubakov V.A., Troitsky S.V. — Phys. Lett., 1993, vol.B318, p.134.
24. Brandt F.T., Frenkel J. — Phys. Rev., 1996, vol.D53, p.2256.

25. **Libanov M.V., Rubakov V.A., Son D.T., Troitsky S.V.** — Phys. Rev., 1994, vol.D50, p.7553.
26. **Rubakov V.A., Son D.T., Tinyakov P.G.** — Phys. Lett., 1992, vol.B287, p.342.
27. **Son D.T.** — Nucl. Phys., 1996, v.B477, p.378.
28. **Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G.** — Phys. Lett., 1993, vol.B308, p.292.
29. **Voloshin M.B.** — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.357.
30. **Smith B.H.** — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.3518.
31. **Makeenko Yu.** — Phys. Rev., 1994, vol.D50, p.4137.
32. **Makeenko Yu.** — In: Proc. 8th Int. Seminar «Quarks-94». Eds. D.Yu.Grigoriev, V.A.Matveev, V.A.Rubakov, D.T.Son, A.N.Tavkhelidze; Singapore: World Scientific, 1995; hep-ph/9408337.
33. **Axenides M., Johansen A., Makeenko Yu.** — Nucl. Phys., 1994, vol.B430, p.51.
34. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
35. **Libanov M.V., Son D.T., Troitsky S.V.** — Phys. Rev., 1995, vol.D52, p.3679.
36. **Voloshin M.B.** — Phys. Rev., 1991, vol.D43, p.1726.
37. **Khlebnikov S.Yu.** — Phys. Lett., 1992, vol.B282, p.459.
38. **Diakonov D.I., Petrov V.Yu.** — Phys. Rev., 1994, vol.D50, p.266.
39. **Cornwall J.M., Tiktopoulos G.** — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.1629.
40. **Березин Ф.А.** — Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1987.
41. **Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.** — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
42. **Khlebnikov S.Yu., Rubakov V.A., Tinyakov P.G.** — Nucl. Phys., 1991, vol.B350, p.441.
43. **Rubakov V.A., Tinyakov P.G.** — Phys. Lett., 1992, vol.B279, p.165.
44. **Bezrukov F.L., Libanov M.V., Son D.T., Troitsky S.V.** — In: Proc. of 10th Int. Workshop on High Energy Theory and Quantum Field Theory, Zvenigorod, Russia, 1995; hep-ph/9512342.
45. **Bezrukov F.L., Libanov M.V., Troitsky S.V.** — Mod. Phys. Lett., 1995, vol.A10, p.2135.
46. **Fubini S.** — Nuovo Cimento, 1976, vol.A34, p.4125.
47. **Кубышин Ю.А.** — ТМФ, 1983, т.57, с.363.
48. **Tinyakov P.G.** — Phys. Lett., 1992, vol.D284, p.410.
49. **Khlebnikov S.Yu.** — Nucl. Phys., 1995, vol.B436, p.428.
50. **Smirnov F.A.** — Form-Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory. Advanced Series in Mathematical Physics. Singapore: World Scientific, vol.14, 1992.
51. **Fring A., Mussardo G., Simonetti P.** — Nucl. Phys., 1993, vol.B393, p.413.
52. **Koubek A., Mussardo G.** — Phys. Lett., 1993, vol.B311, p.193.
53. **Voloshin M.B.** — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.2573.
54. **Smith B.H.** — Phys. Rev., 1994, vol.D49, p.1081.
55. **Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G.** — Phys. Lett., 1993, vol.B308, p.315.
56. **Smith B.N.** — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.5531.

57. **Раджараман Р.** — Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
58. **Переломов А.М.** — Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
59. **Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G.** — Phys. Lett., 1993, vol.B302, p.70.
60. **Gorsky A., Selivanov K.** — Mod. Phys. Lett., 1996, v.A11, p.1597.
61. **Дубровин Б.А.** — Римановы поверхности и нелинейные уравнения. М.: МГУ, 1986.
62. **Дубровин Б.А.** — УМН, 1981, т.36, с.11.