«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1997, ТОМ 28, ВЫП.3

УДК 512.667; 514.8

R-МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ НА КВАНТОВЫХ ГРУППАХ

А.П.Исаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

e-mail: isaevap@thsun1.jinr.dubna.su

В теоретической и математической физике все большее применение находят новые симметрии (квантовые симметрии), которые формулируются на языке квантовых групп. Настоящий обзор посвящен обсуждению ковариантного дифференциального исчисления на квантовых группах и квантовых векторных пространствах и является второй частью обзора [1]. Здесь подробно излагается бековариантная теория Вороновича, считающаяся в настоящее время базой для построения некоммутативной дифференциальной геометрии на квантовых группах. На основе R-матричного подхода дано полное описание дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$ и линейных квантовых пространствах. Показано, каким образом дифференциальная алгебра на группе $SL_q(N)$ может быть получена (как подалгебра) из дифференциальной алгебры на группе $GL_q(N)$. Обсуждаются проблемы биковариантного дифференциального исчисления на группах $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$. Сделаны также необходимые дополнения по общей теории квантовых групп, не затронутые в первой части обзора.

The new symmetries (quantum symmetries) are being used more and more in theoretical and mathematical physics. This paper is the second part of the review [1] and devoted to the discussion of bicovariant differential calculi on quantum groups and quantum vector spaces. The Woronowicz's bicovariant theory which is a base for constructing the noncommutative differential geometry on quantum groups is considered in detail. A complete description of the differential calculus on $GL_q(N)$ is presented with using of R-matrix approach. We show how to obtain the differential algebra on $SL_q(N)$ as a subalgebra from the $GL_q(N)$ differential algebra. We discuss problems of the bicovariant differential calculi on $SO_q(N)$ and $Sp_q(2n)$ groups. We make also relevant suplements about general theory of quantum groups which are not mentioned in the first part of review.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах Н.Ю.Решетихина, Л.А.Тахтаджяна, Л.Д.Фаддеева [2] и В.Г.Дринфельда [3] (а также М.Дзимбо [4]) были даны определения и систематический анализ квантовых аналогов простых групп и алгебр Ли. Квантовые группы не являются группами в математическом смысле, тем не менее они обладают рядом свойств, которые позволяют говорить о них как о "группах симметрии". В связи с этим естественной представляется идея о поиске или конструировании (деформации) каких-либо квантовых физических систем, которые будут обладать симметриями относительно специального действия квантовых групп (отдельные примеры таких систем даны в [8–13]). Наличие данных "квантовых" симметрий, как правило, приводит к интегрируемости рассматриваемых моделей, например, с помощью квантового метода обратной задачи [5–7]. Реализация подобных идей требует более глубокого понимания геометрии квантовых групп и, в частности, предполагает детальную разработку некоммутативной дифференциальной геометрии на квантовых группах. Указание на необходимость последнего содержится, например, в работах [8, 14]. Следует также напомнить, что коммутативное дифференциальное и интегральное исчисления играют важнейшую роль при формулировке и изучении практически всех физических теорий.

Первым шагом в исследовании некоммутативной дифференциальной геометрии на квантовых группах (отметим, что достаточно общая программа построения некоммутативной геометрии была сформулирована А.Коном [15]) является построение некоммутативного дифференциального исчисления на квантовых группах, что и будет основной темой нашего рассмотрения. В данной статье под построением некоммутативного дифференциального исчисления мы будем понимать бековариантное расширение алгебры функций на квантовой группе с генераторами $\{T^i_j\}$, $i, j = 1, \ldots, N$ (мы выбираем в качестве объекта исследования RTT-алгебры Хопфа [2], см. также [1]) до алгебры функций с генераторами $\{T^i_j,\ \Omega^i_j,\ \mathcal{L}^i_j,\ \Im^i_j\}$, где элементы Ω^i_j образуют базис внешних дифференциальных 1-форм, $\mathcal{L}^i_j$ — базис производных Ли и $\Im^i_j$ — базис внутренних производных. Кроме расширения алгебры функций необходимо также определить внешний дифференциал, т.е. линейный нильпотентный оператор d ($d^2 = 0$), действующий по определенным правилам на расширенную алгебру функций. Градуированная подалгебра $\Gamma^\wedge = \bigoplus_n \Gamma^{\wedge n}$ с генераторами $\{T^i_j \in \Gamma^{\wedge 0},\ \Omega^i_j \in \Gamma^{\wedge 1}\}$, на которой задано действие дифференциала $d:\ \Gamma^{\wedge n} \to \Gamma^{\wedge n+1}$, определяет дифференциальный комплекс:

$$\Gamma^{\wedge 0} \xrightarrow{d} \Gamma^{\wedge 1} \xrightarrow{d} \ldots .$$

Поэтому иногда в дальнейшем мы будем называть дифференциальным комплексом саму подалгебру $\Gamma^\wedge$, снабженную отображением d.

К настоящему времени имеется довольно обширная литература, посвященная дифференциальному исчислению на квантовых группах. Однако в большинстве статей, следуя работе [16], оперируют с квантовыми группами как с абстрактными некоммутативными и некокоммутативными алгебрами Хопфа (см., например, обзор [17] и цитируемую там литературу). Если же мы обратимся к рассмотрению конкретных примеров квантовых групп, то, по-видимому, законченным можно считать построение бековариантного дифференциального исчисления только на группе $GL_q(N)$. Значительный прогресс в построении бековариантного дифференциального исчисления на группе $SL_q(N)$ был достигнут лишь сравнительно недавно в работе [18]. Что касается построений дифференциальных исчислений на группах $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$, то, учитывая аргументы, приведенные в разд. 6 предлагаемого обзора, мы не можем считать эти построения удовлетворительными.

Настоящая статья является продолжением обзора [1] и представляет собой попытку систематизировать и критически осмыслить накопленные факты о дифференциальных исчислениях на квантовых группах. Во втором разделе, посвященном построению дифференциальных форм, векторных полей и дифференциалов над произвольной алгеброй Хопфа (АХ), мы обсуждаем биковариантную теорию Вороновича [16]. Чтение этого раздела предполагает знание основ теории АХ (см., например, [19–21, 1]). В третьем и четвертом разделах на основе R-матричного подхода [2] описаны дифференциальные исчисления на квантовых группах $GL_q(N)$ и соответствующих квантовых векторных пространствах. В разд. 5 показано, как можно получить дифференциальную алгебру на $SL_q(N)$ [18], исходя из дифференциальной алгебры на $GL_q(N)$. В шестом разделе мы изложим (используя результаты работы [22]), каким образом подход Вороновича [16] может быть адаптирован к R-матричной формулировке теории квантовых групп [2]. Кроме того, в этом разделе обсуждаются некоторые проблемы теории Вороновича, возникающие в связи с построением биковариантных дифференциальных исчислений на группах $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$. В последнем, седьмом разделе мы приводим ряд необходимых сведений о квантовых группах, которые не были затронуты в первой части обзора [1].

2. ТЕОРИЯ ВОРОНОВИЧА

Центральным понятием при построении дифференциального исчисления на АХ (квантовых группах) по Вороновичу [16] является понятие биковариантного бимодуля.

Определение 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ $(\Delta,\ \epsilon,\ S)$ *является алгеброй Хопфа,* Γ *есть двухсторонний* $\mathcal{A}$*-бимодуль, а* $\Delta_L = \Delta_\Gamma : \Gamma \to \mathcal{A} \otimes \Gamma$ *и* $\Delta_R = {}_\Gamma\Delta : \Gamma \to \Gamma \otimes \mathcal{A}$ *— левое и правое кодействие. Мы называем* $(\Gamma,\ \Delta_\Gamma,\ {}_\Gamma\Delta)$ *биковариантным бимодулем* (ББ), *если*

1. *Для любых* $a \in \mathcal{A}$ *и* $\rho \in \Gamma$:

$$\Delta_\Gamma(a\rho) = \Delta(a)\Delta_\Gamma(\rho)\ ,\quad \Delta_\Gamma(\rho a) = \Delta_\Gamma(\rho)\Delta(a)\ ,$$
$$ {}_\Gamma\Delta(a\rho) = \Delta(a){}_\Gamma\Delta(\rho)\ ,\quad {}_\Gamma\Delta(\rho a) = {}_\Gamma\Delta(\rho)\Delta(a)\ . \tag{2.1}$$

2. *Для любого* $\rho \in \Gamma$:

$$(\epsilon \otimes id)\Delta_\Gamma(\rho) = \rho \ , \quad (id \otimes \epsilon)\ {}_\Gamma\Delta(\rho) = \rho \ . \tag{2.2}$$

3. *Для любого* $\rho \in \Gamma$:

$$(\Delta \otimes id)\Delta_\Gamma(\rho) = (id \otimes \Delta_\Gamma)\Delta_\Gamma(\rho) \ , \tag{2.3}$$

$$(id \otimes \Delta)\ {}_\Gamma\Delta(\rho) = (\ {}_\Gamma\Delta \otimes id)\ {}_\Gamma\Delta(\rho) \ , \tag{2.4}$$

$$(\Delta_\Gamma \otimes id)\ {}_\Gamma\Delta(\rho) = (id \otimes\ {}_\Gamma\Delta)\Delta_\Gamma(\rho) \ . \tag{2.5}$$

○

ББ над квантовыми группами можно рассматривать как некоммутативные аналоги сечений тензорных расслоений над группами Ли.

Следующим важным понятием в теории Вороновича является понятие биковариантного дифференциального исчисления первого порядка.

Определение 2. *Рассмотрим биалгебру* $\mathcal{A}$, *и пусть* Γ *есть двухсторонний бимодуль над* $\mathcal{A}$, *а отображение* $d: \ \mathcal{A} \to \Gamma$ *является линейным. Мы называем* $(\Gamma,\ d)$ *дифференциальным исчислением первого порядка над* $\mathcal{A}$, *если:*
1) $d(ab) = (da)b + a(db)$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$.
2) Любое $\rho \in \Gamma$ *имеет вид* $\rho = \sum_{k=1}^{K} a_k\, db_k$, *где* $a_k, \ b_k \in \mathcal{A}, \ k = 1, 2, \dots K$.
○

Определение 3. *Дифференциальное исчисление первого порядка* $(\Gamma,\ d)$ *называется биковариантным, если из равенства* $\sum_k a_k\, db_k = 0$ *вытекают условия:*

$$\sum_k \Delta(a_k)\,(id \otimes d)\Delta(b_k) = 0 = \sum_k \Delta(a_k)\,(d \otimes id)\Delta(b_k) \ . \tag{2.6}$$

○

Условия (2.6) можно понимать так, что "идеалы" $\sum_k a_k\, db_k = 0$ в пространстве дифференциальных 1-форм являются ковариантами при правом и левом кодействии биалгебры $\mathcal{A}$ на саму себя и на бимодуль Γ.

Можно показать [16] (прямой проверкой аксиом (2.1)-(2.5)), что если дифференциальное исчисление первого порядка $(\Gamma,\ d)$ является биковариантным, то Γ является биковариантным бимодулем со структурными отображениями $\Delta_\Gamma : \Gamma \to \mathcal{A} \otimes \Gamma$, ${}_\Gamma\Delta : \Gamma \to \Gamma \otimes \mathcal{A}$:

$$\Delta_\Gamma(\rho) = \sum_k \Delta(a_k)\,(id \otimes d)\Delta(b_k) \ , \quad {}_\Gamma\Delta(\rho) = \sum_k \Delta(a_k)\,(d \otimes id)\Delta(b_k) \ . \tag{2.7}$$

Причем соотношения (2.6) необходимы лишь для того, чтобы линейные отображения (2.7) были хорошо определены.

Выберем теперь в ББ Γ подмножество ${}_{\rm inv}\Gamma$ элементов ω, которые являются левоинвариантными: $\Delta_\Gamma(\omega) = I \otimes \omega$. Ясно, что ${}_{\rm inv}\Gamma$ является линейным подпространством в Γ. Аналогично выбирается подпространство $\Gamma_{\rm inv}$ правоинвариантных элементов $\eta \in \Gamma$: ${}_\Gamma\Delta(\eta) = \eta \otimes I$. Пусть теперь набор элементов $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, J$, образует базис в ${}_{\rm inv}\Gamma$. Тогда из аксиомы (2.5) следует, что правое кодействие $\mathcal{A}$ на ω_i имеет вид

$$ {}_\Gamma\Delta(\omega_i) = \sum_j \omega_j \otimes \mathbf{r}_{ji} \ , \ \ \mathbf{r}_{ji} \in \mathcal{A} \ . \tag{2.8}$$

Из аксиом (2.2),(2.4) для ББ, очевидно, вытекает, что

$$ \Delta(\mathbf{r}_{ij}) = \sum_k \mathbf{r}_{ik} \otimes \mathbf{r}_{kj} \ , \ \ \epsilon(\mathbf{r}_{ij}) = \delta_{ij} \ . \tag{2.9}$$

Если $\mathcal{A}$ – алгебра Хопфа, то из аксиом для АХ следует:

$$ \sum_k \mathbf{r}_{ik} S(\mathbf{r}_{kj}) = \sum_k S(\mathbf{r}_{ik})\mathbf{r}_{kj} = \delta_{ij}\, I \ . \tag{2.10}$$

Имеет место важная теорема [16]:

Теорема 1. *Пусть* $(\Gamma,\ \Delta_\Gamma,\ {}_\Gamma\Delta)$ *является* ББ *над алгеброй Хопфа* $\mathcal{A}$ *и элементы* $\{\omega_i\}$ *образуют базис в векторном пространстве всех левоинвариантных элементов из* Γ. *Тогда:*

1) Любой элемент $\rho \in \Gamma$ *представим в виде*

$$ \rho = \sum_i a_i \omega_i \ , \ \ \rho = \sum_i \omega_i b_i \ , \tag{2.11}$$

где элементы a_i, $b_i \in \mathcal{A}$ *однозначно определены.*

2) Существуют линейные функционалы $f_{ij} \in \mathcal{A}^*$ *такие, что*

$$ \omega_i b = \sum_j (f_{ij} \triangleright b)\omega_j \ , \tag{2.12}$$

$$ a\omega_i = \sum_j \omega_j((f_{ij} \cdot S^{-1}) \triangleright a) \tag{2.13}$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$. *Эти функционалы определяются однозначно равенствами (2.12) и удовлетворяют следующим условиям:*

$$ f_{ij}(ab) = \sum_k f_{ik}(a) f_{kj}(b) \ , \ \ f_{ij}(I) = \delta_{ij} \ . \tag{2.14}$$

Левое $f \triangleright a$ *и правое* $a \triangleleft f$ *действия* $\mathcal{A}^*$ *на алгебру* $\mathcal{A}$ *определяются стандартным образом (см., например, книгу [19], обозначения из которой мы, в частности, используем):*

$$ f \triangleright a = \sum_a a_{(1)} f(a_{(2)}) \ , \ \ a \triangleleft f = \sum_a f(a_{(1)}) a_{(2)} \ , \ \ \Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)} \tag{2.15}$$

(в дальнейшем мы будем опускать знаки сумм $\sum_a$, встречающиеся в аналогичных формулах).

3) Существует базис $\{\eta_i\}$, $i = 1, 2, \dots, J$, в векторном пространстве всех правоинвариантных элементов из Γ такой, что

$$\omega_i = \sum_j \eta_j \mathbf{r}_{ji} \Leftrightarrow \tag{2.16}$$

$$\sum_i \omega_i S(\mathbf{r}_{ij}) = \eta_j \ , \tag{2.17}$$

и, соответственно, утверждение (2.11) справедливо и для правого базиса. Кроме того, выполняются соотношения

$$\eta_i b = \sum_j (b \triangleleft (\tilde{f}_{ij} \cdot S^{-2}))\eta_j \ , \tag{2.18}$$

$$a\eta_i = \sum_j \eta_j (a \triangleleft (\tilde{f}_{ij} \cdot S^{-1})) \tag{2.19}$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Функционалы $\tilde{f}_{ij}$ в формулах (2.18),(2.19) совпадают с функционалами f_{ij} из соотношений (2.12),(2.13).

4) Для всех $a \in \mathcal{A}$ имеют место тождества:

$$\sum_i \mathbf{r}_{ij}(a \triangleleft f_{ih}) = \sum_i (f_{ji} \triangleright a)\mathbf{r}_{hi} \ . \tag{2.20}$$

Доказательство.

1) Введем проектор $P_L : \Gamma \to \Gamma$ следующего вида (суммирование подразумевается, см. разд. 1):

$$P_L(\rho) = S(\bar{\rho}^{(1)})\rho^{(2)} \ , \ \ (P_L^2 = P_L) \ , \tag{2.21}$$

где $\bar{\rho}^{(1)} \in \mathcal{A}$, $\rho^{(2)} \in \Gamma$ определяются из равенства $\Delta_\Gamma(\rho) = \bar{\rho}^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$. Легко показать, используя аксиомы АХ и ББ, что $\Delta_\Gamma(P_L(\rho)) = I \otimes P_L(\rho)$. Таким образом, P_L является проектором на ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$. Заметим, что для проектора P_L выполняются формулы (необходимо снова использовать аксиомы АХ и ББ):

$$\rho = \bar{\rho}^{(1)} P_L(\rho^{(2)}) \ , \tag{2.22}$$

$$P_L(b\rho) = \epsilon(b) P_L(\rho) \ . \tag{2.23}$$

Проектор, удовлетворяющий (2.22),(2.23), является единственным, т.к. для любого другого проектора такого типа мы имеем

$$P'(\rho) = P'(\bar{\rho}^{(1)} P_L(\rho^{(2)})) = \epsilon(\bar{\rho}^{(1)}) P_L(\rho^{(2)}) = P_L(\rho) \ . \tag{2.24}$$

Существование первого разложения из (2.11) следует из (2.22). Единственность этого разложения следует из линейной независимости элементов ω_i. Аналогично можно ввести проектор P_R и затем показать, что существует единственное разложение

$$\rho = \sum_i \eta_i c_i, \tag{2.25}$$

где $c_i \in \mathcal{A}$ и $\{\eta_i\}$ — любой линейно независимый базис в пространстве $\Gamma_{\rm inv}$. Существование и единственность второго представления из (2.11) мы докажем при доказательстве следующего утверждения.

2) Для любого $b \in \mathcal{A}$ элемент $\omega_j b$ может быть представлен в виде первого разложения из (2.11):

$$\omega_j b = \sum_i F_{ji}(b)\omega_i \ . \tag{2.26}$$

Ясно, что отображения $F_{ij} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ являются линейными. Далее мы имеем

$$\sum_i F_{ji}(ab)\omega_i = \omega_j ab = \sum_k F_{jk}(a)\omega_k b = \sum_k F_{jk}(a)F_{ki}(b)\omega_i \ ,$$

откуда, в силу единственности первого разложения из (2.11), следуют равенства

$$F_{ji}(ab) = F_{jk}(a)F_{ki}(b) \ . \tag{2.27}$$

Определим следующие линейные функционалы: $f_{ij}(a) = \epsilon(F_{ij}(a))$. Тогда, действуя отображением ϵ на обе части (2.27) и учитывая формулу $F_{ij}(I) = \delta_{ij} I$ (которая следует из (2.26) при $b = I$), мы получаем (2.14).

Для того чтобы доказать (2.12), подействуем Δ_Γ на обе части уравнения (2.26). Тогда получим

$$(I \otimes \omega_j)\Delta(b) = \sum_i \Delta(F_{ji}(b))(I \otimes \omega_i) \ . \tag{2.28}$$

С другой стороны, из (2.26) имеем

$$(I \otimes \omega_j)\Delta(b) = \sum_i (id \otimes F_{ji})\Delta(b)(I \otimes \omega_i) \ . \tag{2.29}$$

Сравнивая (2.28) и (2.29), получаем равенство

$$\Delta(F_{ji}(b)) = (id \otimes F_{ji})\Delta(b) \ ,$$

действуя на которое отображением $(id \otimes \epsilon)$, видим, что

$$F_{ji}(b) = (id \otimes f_{ji})\Delta(b) = f_{ji} \triangleright b \ .$$

Подставляя этот результат в (2.26), получаем (2.12). Т.е. элементы $b \in \mathcal{A}$ можно проносить через $\omega \in {}_{\rm inv}\Gamma$ справа налево.

Для доказательства (2.13) мы должны показать, что

$$\sum_j f_{ji} \triangleright (f_{hj} \cdot S^{-1}) \triangleright = \delta_{ih}\, \epsilon \triangleright \ . \tag{2.30}$$

Действительно (учитывая аксиомы АХ):

$$\begin{aligned}
\sum_j f_{ji} \triangleright \left((f_{hj} \cdot S^{-1}) \triangleright S(a)\right) &= \sum_j \left(id \otimes f_{ji} \otimes (f_{hj} \cdot S^{-1})\right) \Delta^2(S(a)) = \\
&= \sum_j S(a_{(3)}) f_{ji}(S(a_{(2)})) f_{hj}(a_{(1)}) = \\
&= S(a_{(3)}) f_{hi}(a_{(1)} S(a_{(2)})) = \\
&= S(a_{(2)}) f_{hi}(\epsilon(a_{(1)}) I) = \\
&= S(a) \delta_{hi} \ ,
\end{aligned}$$

что и доказывает (2.30), т.к. $\epsilon \triangleright a = a$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Подставляя в (2.12) $b = (f_{hi} \cdot S^{-1}) \triangleright a$, суммируя по i и используя (2.30), мы получаем (2.13). Формула (2.13) доказывает существование и единственность второго разложения из (2.11).

3) Рассмотрим элементы $\eta_i \in \Gamma$ вида (2.17). Тогда правое кодействие АХ $\mathcal{A}$ на эти элементы равно:

$$_\Gamma\Delta(\eta_j) = \sum_i {}_\Gamma\Delta(\omega_i)\Delta(S(\mathbf{r}_{ij})) = \sum_{i,h,k} (\omega_h \otimes \mathbf{r}_{hi})\,(S(\mathbf{r}_{kj}) \otimes S(\mathbf{r}_{ik})) = \eta_j \otimes I \ ,$$

и, следовательно, элементы $\{\eta_i\}$ являются правоинвариантными. Из существования и единственности второго разложения из (2.11) и из (2.17), очевидно, следует единственное разложение

$$\rho = \sum_i \eta_i \tilde{b}_i = \sum_{i,j} \eta_i (\mathbf{r}_{ij} b_j) \tag{2.31}$$

для всех $\rho \in \Gamma$ и, в частности, для любого правоинвариантного элемента $\rho = \eta \in \Gamma_{\rm inv}$. Тогда из (2.31) при $\rho = \eta$ получаем

$$\eta \otimes I = \sum_i (\eta_i \otimes I)\Delta(\tilde{b}_i) \ .$$

Из этой формулы, учитывая единственность разложения (2.31) ($\rho = \eta$), выводим равенство $\Delta(\tilde{b}_i) = \tilde{b}_i \otimes I$, которое эквивалентно (см. аксиомы АХ) утверждению $\tilde{b}_i = \epsilon(\tilde{b}_i)I$. Таким образом, мы доказали, что любой элемент $\eta \in \Gamma_{\rm inv}$ представим в виде единственной линейной комбинации элементов η_i (2.17), т.е. $\{\eta_i\}$ – базис в пространстве $\Gamma_{\rm inv}$. Далее, абсолютно параллельно тому, как мы доказывали формулы (2.12),(2.13) для левоинвариантного базиса $\{\omega_i\}$, можно доказать аналогичные формулы (2.18),(2.19) для правоинвариантного базиса. Остается доказать, что $\tilde{f}_{ij} = f_{ij}$. Для этого подставим в (2.19) формулу (2.17) и учтем (2.13). В результате имеем

$$\sum_j ((f_{jh} \cdot S^{-1}) \triangleright a) S(\mathbf{r}_{ji}) = \sum_j S(\mathbf{r}_{hj})(a \triangleleft (\tilde{f}_{ij} \cdot S^{-1})) \ . \tag{2.32}$$

Действуя на обе части этого равенства отображением ϵ и учитывая тождества $\epsilon(f \triangleright a) = \epsilon(a \triangleleft f) = f(a)$ и (2.9), получаем $f_{ih}(S^{-1}(a)) = \tilde{f}_{ih}(S^{-1}(a))$, что и требовалось доказать.

4) Вычислим S^{-1} от обеих частей соотношения (2.32):

$$\sum_j \mathbf{r}_{ji} S^{-1}((f_{jh} \cdot S^{-1}) \triangleright a) = \sum_j S^{-1}(a \triangleleft (f_{ij} \cdot S^{-1}))\mathbf{r}_{hj} \ . \tag{2.33}$$

Далее имеем равенства

$$S^{-1}((f_{jh} \cdot S^{-1}) \triangleright a) = S^{-1}(a) \triangleleft f_{jh} \ , \quad S^{-1}(a \triangleleft (f_{ij} \cdot S^{-1})) = f_{ij} \triangleright S^{-1}(a) \ ,$$

подставляя которые в (2.33) и заменяя a на $S(a)$, получаем (2.20). Теорема 1 доказана.

Теорема 1 дает полное описание ББ. Действительно, если мы рассмотрим некоторый левый модуль $\tilde{\Gamma}$ с базисом $\{\omega_i\}$ над АХ $\mathcal{A}$ и определим правое умножение, левое и правое коумножение согласно следующим правилам:

$$\begin{gathered}
(\textstyle\sum_i a_i \omega_i) b = \sum_{ij} a_i (f_{ij} \triangleright b) \omega_j \ , \\
\Delta_{\tilde{\Gamma}}(\textstyle\sum_i a_i \omega_i) = \sum_i \Delta(a_i)(I \otimes \omega_i) \ , \\
{}_{\tilde{\Gamma}}\Delta(\textstyle\sum_i a_i \omega_i) = \sum_{i,j} \Delta(a_i)(\omega_j \otimes \mathbf{r}_{ji}) \ ,
\end{gathered} \tag{2.34}$$

то $(\tilde{\Gamma},\ \Delta_{\tilde{\Gamma}},\ {}_{\tilde{\Gamma}}\Delta)$ является ББ при условии, что $\mathbf{r}_{ij} \in \mathcal{A}$ удовлетворяют (2.9), а функционалы f_{ij} удовлетворяют (2.14),(2.20).

В начале этого раздела мы упомянули, что описание ББ Γ над АХ $\mathcal{A}$ эквивалентно описанию биковариантного дифференциального исчисления первого порядка над $\mathcal{A}$. Другими словами, на данном этапе, имея в своем распоряжении теорему 1, мы имеем конструктивный способ построения пространства Γ дифференциальных 1-форм над $\mathcal{A}$ и, кроме того, мы имеем биковариантные правила коммутации (см. (2.12)) элементов из Γ с элементами АХ $\mathcal{A}$. Следующим этапом должно быть биковариантное построение внешнего произведения дифференциальных 1-форм и, соответственно, построение всей градуированной внешней алгебры

$$\Gamma^{\wedge} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{\wedge n} ,$$

где $\Gamma^{\wedge 0} = \mathcal{A}$, $\Gamma^{\wedge 1} = \Gamma$, а $\Gamma^{\wedge n}$ обозначает пространство всех дифференциальных n-форм.

В действительности мы покажем, как строятся две бековариантные градуированные алгебры, связанные с ББ (Γ, Δ_Γ, ${}_\Gamma\Delta$): тензорная алгебра ($\Gamma^\otimes$, $\Delta_\Gamma^\otimes$, ${}_\Gamma\Delta^\otimes$) и внешняя алгебра ($\Gamma^\wedge$, $\Delta_\Gamma^\wedge$, ${}_\Gamma\Delta^\wedge$). Тензорная алгебра $\Gamma^\otimes = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{\otimes n}$ строится очевидным образом. Элементами пространств $\Gamma^{\otimes n}$ являются тензорные произведения: $\tau = \rho_1 \otimes_{\mathcal{A}} \rho_2 \otimes_{\mathcal{A}} \ldots \otimes_{\mathcal{A}} \rho_n$, где $\rho_i \in \Gamma$, а левое и правое кодействие $\mathcal{A}$ на τ определяется по формулам

$$\Delta_\Gamma^{\otimes n}(\tau) = \bar{\rho}_1^{(1)} \bar{\rho}_2^{(1)} \cdots \bar{\rho}_n^{(1)} \otimes (\rho_1^{(2)} \otimes_{\mathcal{A}} \rho_2^{(2)} \otimes_{\mathcal{A}} \ldots \otimes_{\mathcal{A}} \rho_n^{(2)}) ,$$

$${}_\Gamma\Delta^{\otimes n}(\tau) = (\rho_1^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}} \rho_2^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}} \ldots \otimes_{\mathcal{A}} \rho_n^{(1)}) \otimes \underline{\rho_1}^{(2)} \underline{\rho_2}^{(2)} \cdots \underline{\rho_n}^{(2)} ,$$

где $\Delta_\Gamma(\rho_i) = \bar{\rho}_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)}$, ${}_\Gamma\Delta(\rho_i) = \rho_i^{(1)} \otimes \underline{\rho_i}^{(2)}$ и $\bar{\rho}_i^{(1)}$, $\underline{\rho_i}^{(2)} \in \mathcal{A}$. Заметим, что в силу некоммутативности $a \in \mathcal{A}$ и $\rho \in \Gamma$ имеем

$$\rho \otimes_{\mathcal{A}} (\rho' a) \neq \rho \otimes_{\mathcal{A}} (a\rho') = (\rho a) \otimes_{\mathcal{A}} \rho' \neq (a\rho) \otimes_{\mathcal{A}} \rho' . \tag{2.35}$$

Прежде чем перейти к построению внешней некоммутативной алгебры ($\Gamma^\wedge$, $\Delta_\Gamma^\wedge$, ${}_\Gamma\Delta^\wedge$), напомним, что внешнее произведение в коммутативной дифференциальной геометрии определяется следующим образом:

$$\rho \wedge \rho' = \rho \otimes_{\mathcal{A}} \rho' - \sigma_0(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \rho') , \tag{2.36}$$

где σ_0 является оператором обычной перестановки:

$$\sigma_0(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \rho') = \rho' \otimes_{\mathcal{A}} \rho . \tag{2.37}$$

Естественно попытаться постулировать формулу (2.36) и в некоммутативном случае, однако сразу же видно, что оператор σ_0 (2.37) должен быть модифицирован. Действительно, применяя σ_0 (2.37) к обеим частям равенства из (2.35), получаем в некоммутативном случае, вообще говоря, неравенство

$$a\rho' \otimes_{\mathcal{A}} \rho \neq \rho' \otimes_{\mathcal{A}} \rho a . \tag{2.38}$$

Как было показано в [16], справедливо следующее утверждение:

Предложение 1. *Существует единственный бимодульный гомоморфизм* σ : $\Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$, *самосогласованный в некоммутативном случае, такой, что*

$$\sigma(a\omega \otimes_{\mathcal{A}} \eta) = a\eta \otimes_{\mathcal{A}} \omega , \tag{2.39}$$

где a — любой элемент $\mathcal{A}$, ω — любой левоинвариантный и η — любой правоинвариантный элементы ББ Γ. *Оператор σ является обратимым и коммутирует с кодействием АХ:*

$$(id \otimes \sigma)\Delta_\Gamma^{\otimes 2}(\Gamma^{\otimes 2}) = \Delta_\Gamma^{\otimes 2}\sigma(\Gamma^{\otimes 2}) \ , \quad (\sigma \otimes id)\ {}_\Gamma\Delta^{\otimes 2}(\Gamma^{\otimes 2}) = {}_\Gamma\Delta^{\otimes 2}\sigma(\Gamma^{\otimes 2}) \ .$$

Кроме того, оператор σ удовлетворяет сплетающему соотношению:

$$(id \otimes \sigma)(\sigma \otimes id)(id \otimes \sigma) = (\sigma \otimes id)(id \otimes \sigma)(\sigma \otimes id) \ . \tag{2.40}$$

Отметим, что определение операции σ (2.39), которая является сужением обычной перестановки (2.37), избавляет нас от трудности (2.38). То, что σ переставляет один левоинвариантный и один правоинвариантный элементы Γ, гарантирует биковариантность σ (2.39). Мы не будем приводить здесь полное доказательство предложения 1, отсылая интересующихся к работе [16]. Справедливость соотношения (2.40) будет продемонстрирована в конце этого раздела.

Данное определение σ позволяет вычислить его действие на любой элемент $\Gamma^{\otimes 2}$. Например, для $\sigma(\omega_i \otimes_\mathcal{A} \rho)$ мы получаем, пользуясь утверждениями теоремы 1:

$$\begin{gathered} \sigma(\omega_i \otimes_\mathcal{A} \textstyle\sum_j a_j \eta_j) = \sum_j \sigma(\omega_i a_j \otimes_\mathcal{A} \eta_j) = \\ = \textstyle\sum_{j,k} (f_{ik} \triangleright a_j)\eta_j \otimes_\mathcal{A} \omega_k = \sum_k (f_{ik} \triangleright \rho) \otimes_\mathcal{A} \omega_k . \end{gathered} \tag{2.41}$$

Отсюда, в частности, для $\rho = \omega_j$ выводим

$$\sigma(\omega_i \otimes_\mathcal{A} \omega_j) = \sum_{kl} f_{ik}(\mathbf{r}_{lj})\omega_l \otimes_\mathcal{A} \omega_k . \tag{2.42}$$

Теперь с помощью оператора σ (2.39) можно определить внешнее произведение двух дифференциальных 1-форм (двух элементов ББ Γ). Например, в терминах левоинвариантных 1-форм имеем

$$\begin{gathered} \omega_i \wedge \omega_j = \omega_i \otimes_\mathcal{A} \omega_j - \sigma(\omega_i \otimes_\mathcal{A} \omega_j) = \\ = \omega_i \otimes_\mathcal{A} \omega_j - \textstyle\sum_{kl} f_{ik}(\mathbf{r}_{lj})\omega_l \otimes_\mathcal{A} \omega_k = \sum_{kl}(\delta^i_l \delta^j_k - \hat{\sigma}^{ij}_{lk})\omega_l \otimes_\mathcal{A} \omega_k \ . \end{gathered} \tag{2.43}$$

Аналогичная формула для правоинвариантных 1-форм имеет вид

$$\eta_i \wedge \eta_j = \eta_i \otimes_\mathcal{A} \eta_j - \sum_{kl} f_{jl}(\mathbf{r}_{ki})\eta_l \otimes_\mathcal{A} \eta_k = \sum_{kl}(\delta^i_l \delta^j_k - \hat{\sigma}^{ji}_{kl})\eta_l \otimes_\mathcal{A} \eta_k \ . \tag{2.44}$$

В компактных матричных обозначениях формулы (2.43) и (2.44) представимы следующим образом:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (I_{12} - \hat{\sigma}_{12})\omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \omega_2 \ , \quad \eta_2 \wedge \eta_1 = (I_{12} - \hat{\sigma}_{12})\eta_2 \otimes_{\mathcal{A}} \eta_1 \ . \tag{2.45}$$

Пусть матрицы $\hat{\sigma}$ из (2.45) удовлетворяют характеристическому уравнению

$$(I_{12} - \hat{\sigma}_{12})(\lambda_1 I_{12} - \hat{\sigma}_{12}) \cdots (\lambda_H I_{12} - \hat{\sigma}_{12}) = 0 \ ,$$

где $1, \lambda_i \neq 1$ – набор $(H+1)$ собственных значений оператора $\hat{\sigma}$. Тогда для внешнего умножения (2.45) можно получить эквивалентное определение:

$$\mathbf{P}\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 = \mathbf{P}\eta_2 \wedge \eta_1 \ , \tag{2.46}$$

где $\mathbf{P} = (\lambda_1 I_{12} - \hat{\sigma}_{12}) \cdots (\lambda_H I_{12} - \hat{\sigma}_{12})$ – проецирует $\hat{\sigma}$ на единичное собственное значение.

Сплетающее соотношение (2.40), очевидно, переписывается в виде уравнения Янга — Бакстера:

$$\hat{\sigma}_{23}\hat{\sigma}_{12}\hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{12}\hat{\sigma}_{23}\hat{\sigma}_{12} \tag{2.47}$$

и гарантирует, что внешнее умножение (2.45) является ассоциативным:

$$(\rho \wedge \rho') \wedge \rho'' = \rho \wedge (\rho' \wedge \rho'') \ .$$

Однако мы не можем утверждать, основываясь на определении внешнего умножения (2.43)—(2.46), что соответствующая внешняя алгебра обладает свойством Пуанкаре — Биркгофа — Витта (ПБВ), т.е. что любой моном, построенный из дифференциальных 1-форм, может быть однозначно лексикографически упорядочен. Другими словами, мы не можем в общем случае утверждать, что размерности пространств $\Gamma^{\wedge n}$ совпадают с размерностями соответствующих пространств в коммутативном случае. Действительно, внешняя алгебра со структурными соотношениями (2.46) может удовлетворять свойству ПБВ, если ранг проектора $\mathbf{P}$ равен $J(J+1)/2$ (J – размерность пространства Γ 1-форм) и если (2.46) переписывается в виде

$$(I_{12} - \tilde{\sigma}_{12})\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 = (I_{12} - \tilde{\sigma}_{12})\eta_2 \wedge \eta_1 \ ,$$

где $\sigma_0 \cdot \tilde{\sigma}$ приводится к блочно-треугольному виду и $\tilde{\sigma}$ удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера (2.47) (достаточное условие). Как мы увидим в следующих разделах, определения (2.43)—(2.46) в случае квантовой группы $GL_q(N)$ приводят, а в случае групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(N)$ не приводят к внешним алгебрам ПБВ-типа.

Обсудим теперь конструкцию дифференциала, который согласован с внешней алгеброй, построенной выше. Имеет место следующая теорема [16].

Теорема 2. *Пусть* $(\Gamma^\wedge,\ \Delta_\Gamma^\wedge,\ {}_\Gamma\Delta^\wedge)$ *является внешней алгеброй, построенной (как это изложено выше) над биковариантным дифференциальным исчислением первого порядка* $(\Gamma,\ {}_\Gamma\Delta,\ \Delta_\Gamma,\ d)$. *Тогда существует единственное линейное отображение* $d : \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge$ *такое, что:*

1) d *увеличивает градуировку на единицу, т.е.* $d : \Gamma^{\wedge n} \to \Gamma^{\wedge n+1}$;

2) на элементы с нулевой градуировкой оператор d *действует так, как это сформулировано в определении 2 (см. выше);*

3) d *является градуированным дифференциалом:*

$$d(\theta \wedge \theta') = d\theta \wedge \theta' + (-1)^k \theta \wedge d\theta' \ , \quad (\theta \in \Gamma^{\wedge k} \ , \quad \theta' \in \Gamma^\wedge) \ ; \tag{2.48}$$

4) для всех $\theta \in \Gamma^\wedge$ *имеем* $d(d\theta) = 0$;

5) оператор d *является биковариантным оператором:*

$$\Delta_\Gamma^\wedge(d\theta) = (id \otimes d)\Delta_\Gamma^\wedge(\theta), \quad {}_\Gamma\Delta^\wedge(d\theta) = (d \otimes id)\ {}_\Gamma\Delta^\wedge(\theta) \ .$$

Доказательство. Для доказательства используется метод расширения ББ Γ путем добавления к нему одномерного левого $\mathcal{A}$-модуля X. Тогда любой элемент $\tilde{\xi}$ расширенного ББ $\tilde{\Gamma}$ имеет вид

$$\tilde{\xi} = cX + \xi \ , \quad c \in \mathcal{A},\ \xi \in \Gamma \ . \tag{2.49}$$

Правое умножение $a \in \mathcal{A}$ на $\tilde{\xi}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\xi} a = caX + (c\, da + \xi a) \ , \tag{2.50}$$

а левое и правое кодействие $\mathcal{A}$ на $\tilde{\Gamma}$ задается формулами

$$\tilde{\Delta}_\Gamma(\tilde{\xi}) = \Delta(c)(I \otimes X) + \Delta_\Gamma(\xi), \quad {}_\Gamma\tilde{\Delta}(\tilde{\xi}) = \Delta(c)(X \otimes I) +_\Gamma \Delta(\xi) \ . \tag{2.51}$$

Легко убедиться в том, что двухсторонний бимодуль $\tilde{\Gamma}$ со структурными отображениями (2.49)—(2.51) является биковариантным. Более того, из (2.50) следует, что

$$da = Xa - aX \ , \tag{2.52}$$

а из (2.51) вытекает, что X – коинвариантный элемент. Таким образом,

$$\sigma(X \otimes_\mathcal{A} X) = X \otimes_\mathcal{A} X,$$

и, следовательно, $X \wedge X = 0$. Определяя теперь дифференциал от любого элемента $\theta \in \Gamma^{\wedge n}$ согласно формуле

$$d(\theta) = [X,\ \theta]_{\rm grad} \equiv X\theta - (-1)^n \theta X \ , \tag{2.53}$$

мы без труда можем проверить утверждения 1—5 из теоремы 2. Теорема 2 доказана. •

Отметим, однако, что при формулировке условий данной теоремы мы не учитывали возможное наличие нетривиальных идеалов в АХ $\mathcal{A}$ и во внешней алгебре $\Gamma^{\wedge}$ (типа $\mathrm{det_q(T)} - 1 = 0$ и $\mathrm{Tr}_q(\omega) = 0$ для группы $SL_q(N)$, см. ниже), и что введение дополнительного элемента X должно быть согласовано с наличием таких идеалов. Неучет этого требования (как мы покажем в разд. 5 и 6) приводит к различным сложностям при построении биковариантного дифференциального исчисления на специальных квантовых группах $SL_q(N)$, $SO_q(N)$ и $Sp_q(N)$. В частности, покажем, что определение внешнего дифференциала с помощью элемента X приводит к несовпадению размерностей пространств $\Gamma^{\wedge n}$ в классическом и квантовом случаях.

Теперь кратко обсудим, каким образом в теории Вороновича вводятся некоммутативные аналоги векторных полей над АХ $\mathcal{A}$. Воспользуемся для этого проектором P_L (2.21), который отображает любой элемент из ББ Γ в некоторый элемент из линейного подпространства ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ левоинвариантных форм. Тогда, используя базис $\{\omega_i\}$ в ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$, для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ всегда можно записать равенство

$$P_L(d\,a) \equiv S(a_{(1)})\,d\,a_{(2)} = \sum_i \chi_i(a)\,\omega_i \ , \tag{2.54}$$

где мы ввели набор $\{\chi_i\}$ линейных функционалов из $\mathcal{A}^*$. Очевидно, что для этих функционалов выполняются условия

$$\chi_i(a) = 0 \ \ , \text{если} \ \ S(a_{(1)})da_{(2)} = 0 \ \ , \quad \chi_i(I) = 0 \ . \tag{2.55}$$

В работе [16] было показано, что $\{\chi_i\}$ образуют линейное пространство, дуальное к Γ, если в качестве билинейного спаривания определить ($\forall a, b \in \mathcal{A}$):

$$< \chi_i \, , \, a\,db > \equiv \epsilon(a)\,\chi_i(b) \ . \tag{2.56}$$

Легко показать, усредняя (2.54) с χ_j, что $\{\chi_i\}$ является ортонормированным базисом к $\{\omega_j\}$:

$$< \chi_i, \omega_j > = \delta_{ij} \ .$$

Таким образом, по аналогии с классической дифференциальной геометрией (см., например, [23]) естественно интерпретировать χ_i как базисные элементы в некоммутативном кокасательном пространстве над АХ $\mathcal{A}$.

Свойства функционалов χ_i мы сформулируем в виде следующей теоремы (см. [16]):

Теорема 3.

1) Для любого $a \in \mathcal{A}$ имеем

$$da = \sum_i (\chi_i \triangleright a)\,\omega_i \ . \tag{2.57}$$

2) Пусть $\{f_{ij}\}$ является семейством линейных функционалов на $\mathcal{A}$, введенных в теореме 1. Тогда

$$\chi_i(ab) = \sum_j \chi_j(a)\, f_{ji}(b) + \epsilon(a)\, \chi_i(b) \tag{2.58}$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$.

3) Пусть $\{\mathbf{r}_{ij}\}$ — семейство элементов из $\mathcal{A}$, введенных в (2.8) и рассмотренных в теореме 1. Тогда

$$\mathbf{r}_{ij} = (\chi_i \otimes id)\, \mathrm{ad}_R(a_j)\ , \tag{2.59}$$

где $\mathrm{ad}_R(a) = a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)}$, и элементы a_i из АХ $\mathcal{A}$ удовлетворяют условиям

$$\chi_i(a_j) = \delta_{ij}\ ,\ \ \epsilon(a_i) = 0\ . \tag{2.60}$$

Доказательство.

1) Воспользуемся соотношениями (2.22) и (2.54), тогда имеем

$$da = a_{(1)}\, P_L\, da_{(2)} = \sum_i a_{(1)}\, \chi_i(a_{(2)})\, \omega_i = \sum_i (\chi_i \triangleright a)\, \omega_i\ .$$

2) Из (2.54) следует, что

$$P_L(d(a\,b)) = \sum_i \chi_i(a\,b)\, \omega_i\ . \tag{2.61}$$

С другой стороны, используя (2.12), (2.54) и аксиомы АХ, получаем

$$\begin{aligned} P_L(d(a)\,b + a\,d(b)) &= \textstyle\sum_i P_L\left((\chi_i \triangleright a)\, \omega_i\, b\right) + \epsilon(a)\, P_L(d\,b) = \\ &= \textstyle\sum_{i,j} \epsilon(\chi_i \triangleright a)\, \epsilon(f_{ij} \triangleright b)\, \omega_j + \epsilon(a)\, \sum_j \chi_j(b)\, \omega_j = \\ &= \textstyle\sum_j \left[\sum_i \chi_i(a)\, f_{ij}(b) + \epsilon(a)\, \chi_j(b)\right] \omega_j\ . \end{aligned} \tag{2.62}$$

Сравнивая (2.61) и (2.62), получаем (2.58). Заметим, что (2.58) и второе условие из (2.55) можно формально представить в виде структурных отображений

$$\Delta^*(\chi_i) = \sum_j \chi_j \otimes f_{ji} + \epsilon \otimes \chi_i\ ,\ \ \epsilon^*(\chi_i) = 0\ . \tag{2.63}$$

3) Воспользуемся снова соотношением (2.54) и равенством (2.8):

$$_{\Gamma}\Delta(P_L(d\,a)) = \sum_{i,j} \chi_i(a)\, \omega_j \otimes \mathbf{r}_{ji}\ . \tag{2.64}$$

С другой стороны, (2.64) переписывается в виде

$$\mathrm{r}\Delta(S(a_{(1)})\,d\,a_{(2)}) = P_L(d\,a_{(2)}) \otimes S(a_{(1)})\,a_{(3)} = \sum_j \chi_j(a_{(2)})\,\omega_j \otimes S(a_{(1)})\,a_{(3)}\ . \tag{2.65}$$

Формула (2.59) следует из сравнения (2.64) и (2.65) при $a = a_i$, что заканчивает доказательство теоремы 3. •

Из равенства (2.57) легко выводится квантовый аналог формулы Маурера — Картана. Эта формула имеет отношение к дифференциальному исчислению на $\mathcal{A}$ высшего порядка. Принимая во внимание свойства внешнего дифференциала d, сформулированные в теореме 2, получаем

$$0 = d(d\,a)) = d(\sum_i (\chi_i \triangleright a)\,\omega_i) =$$

$$= \sum_i d(\chi_i \triangleright a) \wedge \omega_i + \sum_i (\chi_i \triangleright a)\,d\,\omega_i =$$

$$= \sum_{i,j} (\chi_j \triangleright \chi_i \triangleright a)\omega_j \wedge \omega_i + \sum_i (\chi_i \triangleright a)\,d\,\omega_i\ .$$

Применяя P_L к обеим частям этого соотношения (напомним, что пространство 2-форм над $\mathcal{A}$ также является ББ, для которого справедливы формулы (2.23)), мы выводим ($\forall a \in \mathcal{A}$):

$$\sum_i \chi_i(a)\,d\omega_i = -\sum_{i,j} (\chi_i * \chi_j)(a)\,\omega_i \wedge \omega_j\ . \tag{2.66}$$

Здесь $(\chi_i * \chi_j)(a) \equiv \chi_i(a_{(1)})\,\chi_j(a_{(2)})$. Теперь, вспоминая определение (2.43) внешнего произведения для 1-форм ω_i, уравнение (2.66) можно представить в виде

$$\sum_i \chi_i(a)\,d\omega_i = -\sum_{i,j} [\chi_i,\, \chi_j](a)\,\omega_i \otimes \omega_j\ , \tag{2.67}$$

где мы ввели коммутатор двух векторных полей

$$[\chi_i,\, \chi_j] = \chi_i * \chi_j - \hat{\sigma}^{kl}_{ji}\,\chi_k * \chi_l\ . \tag{2.68}$$

Для данного коммутатора может быть написано тождество, которое является аналогом тождества Якоби (см. [16]). Более того, в работе [16] показано, что этот коммутатор снова оказывается векторным полем, для которого выполняются условия (2.55). Пусть (2.68) выражается в виде линейной комбинации базисных функционалов χ_i:

$$[\chi_i,\, \chi_j] = C^k_{ij}\,\chi_k\ . \tag{2.69}$$

Тогда функционалы $\{\chi_i\}$ образуют алгебру относительно билинейной операции умножения (2.68), и можно показать, что при определенных условиях на C_{ij}^k отображения (2.63) являются гомоморфизмами этой алгебры.

Продемонстрируем теперь справедливость соотношений (2.40) и (2.47). Пусть элементы $\{e_A\}$ образуют базис в АХ $\mathcal{A}$, а элементы $\{e^B\}$ образуют базис в дуальной АХ $\mathcal{A}^*$ такой, что $< e^B, e_A >= \delta_A^B$. Из соотношений (2.9) и (2.14) следует, что средние

$$\begin{array}{c} f_{ij}(e_A) =< f_{ij}, e_A >\equiv \rho_{ij}(e_A)\ , \\ < e^A, \mathbf{r}_{ij} >\equiv \rho^*_{ij}(e^A) \end{array} \tag{2.70}$$

дают матричные представления алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Пользуясь обозначениями, введенными в (2.70), элементы $\mathbf{r}_{ij} \in \mathcal{A}$ можно представить в виде

$$\mathbf{r}_{ij} = \sum_A e_A\, \rho^*_{ij}(e^A)\ . \tag{2.71}$$

В дальнейшем будем опускать знаки сумм по повторяющимся индексам A, $B, \ldots$. С помощью базиса $\{e_A\}$ запишем структурные отображения для АХ $\mathcal{A}$ в виде

$$\begin{array}{c} e_A\, e_B = m_{AB}^C\, e_C\ ,\ \ \Delta(e_A) = \Delta_A^{BC}\, e_B \otimes e_C\ , \\ S(e_A) = S_A^B\, e_B\ ,\ \ \epsilon(e_A) = \epsilon_A\ ,\ \ E^A\, e_A = I\ , \end{array} \tag{2.72}$$

где E^A — коэффициенты разложения единичного элемента $I \in \mathcal{A}$, а m_{AB}^C, Δ_A^{BC}, S_A^B и ϵ_A являются структурными константами для структурных отображений в $\mathcal{A}$. Соответственно для $\mathcal{A}^*$ получаем

$$\begin{array}{c} e^A\, e^B = \Delta_C^{AB}\, e^C\ ,\ \ \Delta(e^A) = m_{BC}^A\, e^B \otimes e^C\ , \\ S(e^A) = S_B^A\, e^B\ ,\ \ \epsilon(e^A) = E^A\ ,\ \ \epsilon_A\, e^A = I\ . \end{array} \tag{2.73}$$

Тогда в обозначениях (2.70)—(2.73) условия (2.20) при $a = e_B$ принимают вид

$$\Delta_B^{DC}\, m_{AC}^E\, \rho^*_{ij}(e^A)\, \rho_{ik}(e_D) = \Delta_B^{CD}\, m_{CA}^E\, \rho_{ji}(e_D)\, \rho^*_{ki}(e^A)\ . \tag{2.74}$$

Данные соотношения можно интерпретировать как правила коммутации матриц $\rho(e_D)$ и $\rho^{*t}(e^A)$, где t обозначает матричное транспонирование. Отметим, однако, что ρ^{*t} уже не является представлением АХ $\mathcal{A}^*$, а является представлением алгебры, имеющей, по крайней мере, противоположное умножение по сравнению с $\mathcal{A}^*$, т.к. $\rho^{*t}(e^A\, e^B) = \rho^{*t}(e^B)\, \rho^{*t}(e^A)$. Кроме того, заметим, что соотношения (2.74) напоминают кросс-коммутационные соотношения для квантового дубля [3]. Для того чтобы действительно установить связь соотношений (2.74) с конструкцией квантового дубля, рассмотрим алгебру $\mathcal{A}^o$

с генераторами $\{\overline{e}^A\}$, для которых определим матричное представление ρ^o согласно правилам:

$$\begin{gathered} \rho^o_{ij}(\overline{e}^A) = \rho^*_{ji}(S^{-1}(e^A)) = (S^{-1})^A_B\, \rho^*_{ji}(e^B)\ , \\ \rho^o_{ij}\cdot\rho^o_{kl}(\overline{e}^A) = \rho^*_{ji}\cdot\rho^*_{lk}(S^{-1}(e^A))\ . \end{gathered} \tag{2.75}$$

Пользуясь этими правилами и структурными отображениями (2.73), можно показать, что структурные отображения в алгебре $\mathcal{A}^o$ должны иметь вид

$$\overline{e}^A\,\overline{e}^B = \Delta^{AB}_C\,\overline{e}^C\ ,\ \ \Delta(\overline{e}^A) = m^A_{CB}\,\overline{e}^B\otimes\overline{e}^C\ ,\ \ S(\overline{e}^A) = (S^{-1})^A_B\,\overline{e}^B\ . \tag{2.76}$$

Таким образом, матрицы $\rho^{*t}(S^{-1}(e^A))$ (то же самое справедливо и для $\rho^{*t}(S(e^A)))$ реализуют представление АХ $\mathcal{A}^o$ с противоположным коумножением и косым антиподом по сравнению с алгеброй $\mathcal{A}^*$. Как показал Дринфельд [3] (см. также [1] и цитируемую там литературу), можно построить квазитреугольную АХ $\mathcal{D} = \mathcal{A}\bowtie\mathcal{A}^o$ (квантовый дубль), как специальное кросс-произведение АХ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^o$, причем универсальная R-матрица для $\mathcal{D}$ дается формулой

$$\mathcal{R} = (e_A\bowtie I)\otimes(I\bowtie\overline{e}^A)\ , \tag{2.77}$$

а кросс-коммутационные соотношения для элементов алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^o$ следуют из уравнения

$$\mathcal{R}^{-1}\,\Delta'_{\mathcal{D}}(a\bowtie\overline{a}) = \Delta_{\mathcal{D}}(a\bowtie\overline{a})\,\mathcal{R}^{-1}\ . \tag{2.78}$$

Здесь $\Delta' = \sigma_0\cdot\Delta$ обозначает коумножение, противоположное к Δ. Подставим в уравнение (2.78) элемент из $\mathcal{D}$ следующего вида:

$$(a\bowtie\overline{a}) = \big(I\bowtie S^{-1}(\overline{e}^E)\big) = \big(I\bowtie S^E_A\,\overline{e}^A\big)$$

и учтем (2.77) и (7.2). В результате получаем

$$\Delta^{DC}_B\,m^E_{AC}\,(I\bowtie S^{-1}(\overline{e}^A))\,(e_D\bowtie I) = \Delta^{CD}_B\,m^E_{CA}\,(e_D\bowtie I)\,(I\bowtie S^{-1}(\overline{e}^A))\ . \tag{2.79}$$

Запишем это равенство в матричном представлении $\rho_{\mathcal{D}}$:

$$\rho_{\mathcal{D}}\left(e_A\bowtie\overline{e}^B\right)\longrightarrow\rho(e_A)\otimes\rho^o(\overline{e}^B)$$

и учтем первую из формул (2.75), тогда мы получим условия (2.74) и, следовательно, $\rho_{\mathcal{D}} = \rho\otimes(\rho^{*t}\cdot S^{-1})$, при действии на $e_A\otimes e^B$, реализует представление квантового дубля. Таким образом, каждый ББ над АХ $\mathcal{A}$, который характеризуется элементами $\mathbf{r}_{ij}\in\mathcal{A}$ и $f_{ij}\in\mathcal{A}^*$, определяет, согласно (2.70) и (2.71), фиксированное матричное представление квантового дубля $\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A}^o$. Этот факт был получен в работах [24].

Заметим теперь, что

$$\hat{\sigma}^{ij}_{kl} = < f_{il}, \mathbf{r}_{kj} > = \rho_{il}(e_A)\, \rho^*_{kj}(e^A) =$$
$$= \rho_{il}(e_A)\, \rho^o_{jk}(S^{-1}(\overline{e}^A)) = (\rho_{\mathcal{D}})^{ij}_{lk}(\mathcal{R}^{-1}) \equiv (\hat{R}^{-1})^{ij}_{kl} ,$$

откуда, в силу того, что универсальная $\mathcal{R}$-матрица удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера, мы сразу же получаем соотношения (2.40) и (2.47).

В заключение мы сформулируем еще одно важное утверждение [25] относительно свойств внешней алгебры $(\Gamma^\wedge,\ d)$.

Теорема 4. *Пусть* $(\Gamma,\ {}_\Gamma\Delta,\ \Delta_\Gamma,\ d)$ *есть бековариантное дифференциальное исчисление первого порядка над АХ* $\mathcal{A}$. *Тогда внешняя алгебра* $(\Gamma^\wedge,\ d)$ *является АХ. Обратное утверждение также справедливо.*

Доказательство этой теоремы приведено в [25]. Отметим, что структурные отображения для всей дифференциальной АХ $\Gamma^\wedge$ могут быть построены с помощью очевидного расширения структурных отображений, заданных на подпространстве $\Gamma = \Gamma^{\wedge 1}$:

$$\Delta(\rho) = {}_\Gamma \Delta(\rho) + \Delta_\Gamma(\rho) ,$$
$$\epsilon(\rho) = 0 , \quad S(\omega_i) = -\omega_j S(\mathbf{r}_{ji}) = -\eta_i . \tag{2.80}$$

Необходимо, однако, помнить, что тензорные произведения элементов алгебры $\Gamma^\wedge$ подчиняются градуированному правилу умножения:

$$(\rho \otimes \rho') \cdot (\rho'' \otimes \rho''') = (-1)^{k \cdot n} (\rho \rho'' \otimes \rho' \rho''') , \tag{2.81}$$

где k и n — степени дифференциальных форм ρ' и ρ''. В следующем разделе мы покажем, как утверждение этой теоремы реализуется в случае дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА ГРУППЕ $GL_q(N)$

Прежде всего напомним, каким образом строится дифференциальное исчисление на $GL_q(N)$-ковариантной гиперплоскости с координатами $\{x^i\}$ ($i = 1, \ldots, N$). Впервые такое исчисление было получено в работе [26]. Напомним [2,27], что имеются два типа $GL_q(N)$-ковариантных гиперплоскостей с определяющими соотношениями ($c = \pm q^{\pm 1}$):

$$R^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}\, x^{j_1}\, x^{j_2} = c\, x^{i_2}\, x^{i_1} \Leftrightarrow R_{12}\, x_1\, x_2 = c\, x_2\, x_1 \ , \tag{3.1}$$

которые можно представить в более удобном виде, используя проекторы $\mathbf{P}^+$ и $\mathbf{P}^-$ [2] (q-симметризатор и q-антисимметризатор):

$$(\hat{R} - c) x x' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}^{\pm} x x' = 0 , \tag{3.2}$$

$$\mathbf{P}^{\pm} = \frac{1}{q+q^{-1}}(\pm\hat{R} + q^{\pm 1}\mathbf{1}) \,,$$

где $\hat{R} = P_{12}R_{12} \in Mat_N \otimes Mat_N$, $1,2$ обозначают номера матричных пространств, и в случае $GL_q(N)$ мы имеем [2,4]:

$$R_{12} = R^{i_1,i_2}_{j_1,j_2} = \delta^{i_1}_{j_1}\,\delta^{i_2}_{j_2}\,(1 + (q-1)\delta^{i_1 i_2}) + (q - q^{-1})\,\delta^{i_1}_{j_2}\,\delta^{i_2}_{j_1}\,\Theta_{i_1 i_2} \,, \tag{3.3}$$

$$\Theta_{ij} = \{1, \text{ если } i > j, \ 0, \text{ если } i \leq j\},$$

$P_{12} = P^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1}$ — матрица перестановки, $x \equiv x_1$, $x' \equiv x_2$, $\mathbf{1}$ — $N^2 \times N^2$ единичная матрица, и при $c = q$ мы имеем бозонную, а при $c = -q^{-1}$ фермионную гиперплоскость. Напомним, что R-матрица (3.3) удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера:

$$\hat{R}_{12}\,\hat{R}_{23}\,\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\,\hat{R}_{12}\,\hat{R}_{23} \,. \tag{3.4}$$

Ковариантность соотношений (3.1) и (3.2) относительно кодействия квантовой группы $GL_q(N)$ будет обсуждаться ниже (см. также [1]).

Более или менее очевидно, что соответствующие (3.1) коммутационные соотношения для дифференциалов $\{dx^i\}$ будут иметь вид

$$(\hat{R} + c^{-1})dx\,dx' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mp}dx\,dx' = 0 \,. \tag{3.5}$$

Здесь и в дальнейшем мы опускаем знак $\wedge$ внешнего произведения дифференциальных форм. Для того чтобы найти кросс-коммутационные соотношения, переставляющие элементы $\{x^i\}$ и $\{dx^i\}$, продифференцируем соотношение (3.2):

$$\hat{R}(dxx' + x\,dx') = c(dxx' + x\,dx') \,. \tag{3.6}$$

Добавим теперь в обе части этого равенства выражение $(-(q - q^{-1})x\,dx')$ и используем соотношение Гекке для $GL_q(N)$-R-матрицы (3.3):

$$(\hat{R} - q)(\hat{R} + q^{-1}) = 0 \Leftrightarrow \hat{R}^2 = \lambda\,\hat{R} + \mathbf{1} \,, \ \ \lambda = q - q^{-1} \,, \tag{3.7}$$

после чего равенство (3.6) приводится к виду

$$\hat{R}dxx' + \hat{R}^{-1}x\,dx' = cdxx' + (c - \lambda)x\,dx' \,. \tag{3.8}$$

Отметим, что $c - \lambda = c^{-1}$, и, следовательно, (3.8) (соответственно (3.6)) выполняется, если мы положим

$$c\,\hat{R}\,dx\,x' = x\,dx' \,. \tag{3.9}$$

Это и есть искомые кросс-коммутационные соотношения для элементов $\{x^i\}$ и $\{dx^i\}$. Если мы продифференцируем (3.9) еще один раз, учитывая градуированное правило Лейбница и условие $d^2 = 0$, то мы получим (3.5). Таким образом, дифференциальная алгебра (дифференциальный комплекс) $\Omega^\wedge$ на $GL_q(N)$-ковариантной гиперплоскости имеет вид

$$(\hat{R} - c)xx' = 0\ , \quad c\hat{R}dx\,x' = x\,dx'\ , \quad (\hat{R} + c^{-1})dx\,dx' = 0\ . \tag{3.10}$$

Для данной алгебры свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта (т.е. свойство, при котором любой моном, построенный из генераторов x^i, dx^j, может быть однозначно лексикографически упорядочен) гарантируется явным видом соотношений (3.10), расписанных в компонентной форме, и, в частности, подтверждается тем, что $\hat{R}$-матрица (3.3) удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера (3.4). Заметим, что если бы мы добавляли в обе части (3.6) выражения $(-\lambda dx\,x')$, то пришли бы к кросс-коммутационным соотношениям, получающимся из (3.9) заменой $c \to c^{-1}$, $\hat{R} \to \hat{R}^{-1}$. Этот второй вариант коммутационных соотношений полностью эквивалентен первому, и он не будет рассматриваться в дальнейшем.

Для R-матрицы более общего типа, удовлетворяющей характеристическому уравнению (ср. с (3.7)):

$$\prod_{j=1}^{M}(\hat{R} - \lambda_j) = 0\ , \quad M \geq 2 \tag{3.11}$$

(где λ_j – собственные значения R-матрицы такие, что $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \neq j$), также можно определить квантовые гиперплоскости и соответствующие дифференциальные комплексы $\Omega^\wedge_{\lambda_k}$ [28]:

$$\prod_{j\neq k}\frac{(\hat{R} - \lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_j)}xx' \equiv \mathbf{P}_k xx' = 0,$$

$$\hat{R}(dx)x' = -\lambda_k x(dx)'\ , \tag{3.12}$$

$$\hat{R}(dx)(dx)' = \lambda_k (dx)(dx)'.$$

В частном случае, когда характеристическое уравнение (3.11) совпадает с соотношением Гекке (3.7), формулы (3.10) и (3.12) идентичны. Отметим, однако, что соотношения (3.12) не всегда удовлетворительны с точки зрения выполнения свойства ПБВ (например, для $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ R-матриц соотношения (3.12) не определяют ПБВ-алгебры).

Расширим теперь алгебру с определяющими соотношениями (3.10), вводя в качестве дополнительных генераторов некоммутативные производные $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Естественно предположить, что при кодействии алгебры $\mathrm{Fun}(GL_q(N))$ с генераторами $\{T^i_j\}$ на образующие квантовой гиперплоскости:

$$x^i \to T^i_j \otimes x^j\ , \quad dx^i \to T^i_j \otimes dx^j \Leftrightarrow |x> \to T|x>\ , \quad |dx> \to T|dx> \tag{3.13}$$

(гиперплоскость (3.1) и ее дифференциальное расширение (3.10) называются $GL_q(N)$-ковариантными, т.к. уравнения (3.1), (3.10) являются ковариантными при преобразованиях (3.13), что вытекает из соотношений $\hat{R}_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}$), производная ∂_i преобразуется как контргградиентный вектор:

$$\partial_i \to (T^{-1})^j_i \otimes \partial_j \Leftrightarrow < \partial| \to < \partial|T^{-1} \ . \tag{3.14}$$

Тогда ковариантные правила коммутации для производных очевидны:

$$< \partial|' < \partial|\hat{R} = c < \partial|' < \partial| \ . \tag{3.15}$$

После чего несложно построить ковариантное, удовлетворяющее свойству ПБВ расширение алгебры (3.10). Действительно, естественно рассмотреть в качестве внешнего дифференциала d коинвариантное выражение

$$d = < \partial|dx > \ . \tag{3.16}$$

Тогда из условия $d \cdot x = d(x) + x \cdot d$ с учетом (3.9),(3.16) получаем

$$|x >' < \partial|' = -I_2 + c^{-1} < \partial|\hat{R}^{-1}|x > \ , \tag{3.17}$$

где I_2 — единичная матрица, действующая во втором матричном пространстве. Остается найти коммутационные соотношения между $|dx >$ и $< \partial|$. Будем искать эти соотношения в виде

$$|dx >' < \partial|' = < \partial|\hat{Q}|dx > \ , \tag{3.18}$$

где $\hat{Q} = \hat{Q}_{12} \in \mathrm{Mat}(N) \otimes \mathrm{Mat}(N)$. Умножим (3.18) слева на $|x >$ и применим (3.9) и (3.17). В результате получаем уравнение

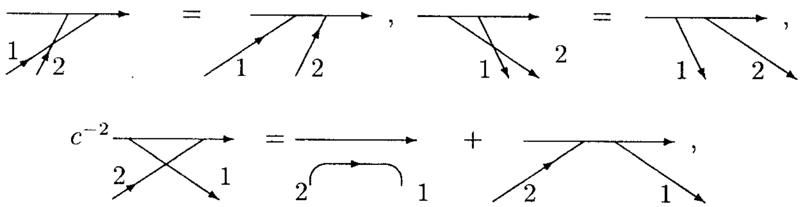
$$\begin{aligned} &-c\hat{R}'|dx >' + < \partial|\hat{R}'\hat{Q}(\hat{R}')^{-1}|dx > |x >' = \\ &= -\hat{Q}'|dx >' + < \partial|\hat{R}^{-1}\hat{Q}'\hat{R}|dx > |x >' \ , \end{aligned}$$

которое тождественно выполняется, если в (3.18) положить $\hat{Q} = c\hat{R}$. Итак, новая расширенная алгебра наряду с (3.10) задается еще и соотношениями

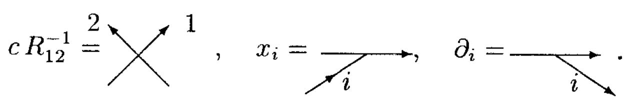
$$\begin{gathered} < \partial|' < \partial|\hat{R} = c < \partial|' < \partial| \ , \ \ |x >' < \partial|' = -I_2 + c^{-1} < \partial|\hat{R}^{-1}|x > \ , \\ |dx >' < \partial|' = c < \partial|\hat{R}|dx > \ , \ \ d < \partial| = c^2 < \partial|d \ , \end{gathered} \tag{3.19}$$

где последнее равенство следует из определения дифференциала (3.16).

Заметим, что подалгебра с образующими $\{x^i, \ \partial_j\}$ (q-алгебра Гейзенберга — Вейля) может интерпретироваться как алгебра $GL_q(N)$-ковариантных квантовых осцилляторов [29–31]. Известна индуктивная процедура построения кольца q-дифференциальных операторов (q-алгебры Гейзенберга — Вейля) с $2N$ образующими из кольца q-дифференциальных операторов с $2(N-1)$ образующими (см. [32,33]). Определяющие соотношения (3.2), (3.15), (3.17) для рассматриваемой подалгебры имеют удобное графическое представление:



где



С другой стороны, мы можем рассматривать (см. [34, 35]) подалгебру с образующими $\{x^i,\ \partial_j\}$ как центральное расширение $Sp_q(2N)$-ковариантной квантовой гиперплоскости [2]. Таким образом, данная подалгебра является конечномерной алгеброй Замолодчикова — Фаддеева [7, 36].

Построенное выше дифференциальное исчисление несколько отличается от дифференциального исчисления, предложенного в [26]. Это связано с тем, что в работе [26] рассматривается отличное от (3.13),(3.14) кодействие $\mathrm{Fun}(GL_q(N))$ на координаты и производные: $x^i \to S(T^i_j)x^j$, $\partial_i \to \partial_j S^2(T^j_i)$. Тем не менее алгебра (3.10), (3.19) легко может быть сведена к соответствующей алгебре, полученной в [26].

Последним шагом в построении дифференциального исчисления на $GL_q(N)$-ковариантной гиперплоскости должно быть определение внутренней производной $\mathbf{i}_j$, которую формально можно интерпретировать как градуированную производную по дифференциалам dx^j. Очевидно, что алгебра $\mathrm{Fun}(GL_q(N))$ кодействует на $\mathbf{i}_j$ аналогично кодействию (3.14):

$$\mathbf{i}_k \to \mathbf{i}_j (T^{-1})^j_k \ , \tag{3.20}$$

и в силу антикоммутационного поведения производных $\mathbf{i}_j$ естественно положить

$$\mathbf{i}' \, \mathbf{i} \, \hat{R} = -c^{-1} \, \mathbf{i}' \, \mathbf{i} \ . \tag{3.21}$$

Рассмотрим теперь следующий очевидный анзац для правил коммутации элементов $\mathbf{i}_j$ с элементами x^i, dx^i:

$$|dx>' < \mathbf{i}|' = I_2 + < \mathbf{i}|\hat{S}|dx> \ , \quad |x>' < \mathbf{i}|' = < \mathbf{i}|\hat{U}|x> \ . \tag{3.22}$$

Матрицы $\hat{S}_{12}$ и $\hat{U}_{12}$ находятся из условия совместности дифференциального комплекса $\Omega^\wedge$ и коммутационных соотношений (3.22). Умножая все соотношения (3.10) справа на $< \mathbf{i}|'$ и пронося $\mathbf{i}_j$ справа налево, получаем

$\hat{S} = -c^{-1}\hat{R}$, $\hat{U} = c^{-1}\hat{R}^{-1}$. Остается найти перестановочные соотношения для $\mathbf{i}_j$ и ∂_k. Положим

$$< \partial|' < \mathbf{i}| =< \mathbf{i}|' < \partial|\hat{W} .$$

Умножим это соотношение слева на $|dx >'$ и пронесем координаты dx^i направо, в результате мы получим $\hat{W} = c\hat{R}$. Таким образом, к соотношениям (3.10),(3.19) необходимо добавить

$$\begin{gathered} \mathbf{i}'\,\mathbf{i}\,\hat{R} = -c^{-1}\,\mathbf{i}'\,\mathbf{i}\,, \quad |dx >' < \mathbf{i}|' = I_2 - c^{-1} < \mathbf{i}|\hat{R}|dx > , \\ |x >' < \mathbf{i}|' = c^{-1} < \mathbf{i}|\hat{R}^{-1}|x > , \quad < \partial|' < \mathbf{i}| = c < \mathbf{i}|' < \partial|\hat{R} , \end{gathered} \tag{3.23}$$

что завершает построение дифференциального исчисления на $GL_q(N)$-ковариантной гиперплоскости. Прямыми вычислениями проверяется, что полная алгебра (3.10),(3.19) и (3.23) удовлетворяет свойству ПБВ. Напомним, что заменой $\hat{R} \to \hat{R}^{-1}$, $c \to c^{-1}$ из этой алгебры получается другой самосогласованный вариант дифференциального исчисления.

Прежде чем перейти к построению дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$, отметим, что, перемножая фундаментальные $\{x^i\}$ и контрградиентные $\{\partial_i\}$ копредставления $GL_q(N)$, можно конструировать тензоры более высокого ранга. Простейший тензор такого рода имеет вид $E^i_j = x^i\,\partial_j$. Правила преобразования этого тензора даются формулами

$$E^i_j \to T^i_k(T^{-1})^l_j \odot E^k_l \equiv (TET^{-1})^i_j\ , \tag{3.24}$$

которые с очевидностью следуют из (3.13),(3.14). Таким образом, тензор E^i_j реализует пространство присоединенного копредставления $GL_q(N)$. Используя соотношения (3.17), легко получить для величин E^i_j замкнутые тождества [37]:

$$(\hat{R} - c\mathbf{1})(c^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E} - \mathbf{E}) = 0\ , \quad (c^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E} - \mathbf{E})(\hat{R} - c\mathbf{1}) = 0\ , \tag{3.25}$$

где матрица $\mathbf{E} = E_1 = E \otimes I$ действует в первом матричном пространстве. Вычитая второе тождество (3.25) из первого, мы получаем коммутационные соотношения

$$\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1} - \hat{R}^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E} = c(\mathbf{E}\hat{R}^{-1} - \hat{R}^{-1}\mathbf{E})\ , \tag{3.26}$$

ковариантные относительно присоединенного кодействия группы $GL_q(N)$ (3.24). Соотношения (3.26) при $q \to 1$ переходят в структурные соотношения для алгебры Ли $gl(N)$. Заметим, что система уравнений (3.25) эквивалентна уравнению (3.26), где на генераторы E^i_j наложены дополнительные связи:

$$(\hat{R} - c\mathbf{1})(c^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E} - \mathbf{E})(\hat{R} - c\mathbf{1}) = 0\ .$$

Тривиальной заменой $E \to E - (c/\lambda)I$ (учитывая тождество Гекке (3.7)) равенства (3.26) записываются в виде уравнения отражения

$$\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1} - \hat{R}^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E} = 0 . \tag{3.27}$$

Эти уравнения впервые возникли в контексте факторизованного рассеяния на полупрямой [38] и в последнее время интенсивно изучались многими авторами (см., например, [39—44]). Отметим, что алгебра со структурными соотношениями (3.27) для геккиевской R-матрицы эквивалентна алгебре

$$\mathbf{E}\hat{R}\mathbf{E}\hat{R} - \hat{R}\mathbf{E}\hat{R}\mathbf{E} = \lambda(\mathbf{E}^2\hat{R} - \hat{R}\mathbf{E}^2) .$$

Перейдем теперь к построению дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$. В принципе, такое исчисление можно получить непосредственно исходя из дифференциального исчисления на квантовой гиперплоскости (3.12), как это было сделано, например, в [45]. Однако мы предпочтем здесь более прямой способ. Вначале мы построим, следуя работам [46—51], дифференциальный комплекс на группе $GL_q(N)$, т.е. построим алгебру функций $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$, которая генерируется операторами $T^i_j \in \mathrm{Fun}(GL_q(N))$ и соответствующими дифференциалами $dT^i_j \in \Gamma^{\wedge 1}_{GL_q(N)}$ (как мы увидим ниже, дифференциальное отображение d для этой алгебры определяется стандартным образом). Рассмотрим для этого следующее кодействие алгебры $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$ на образующие дифференциального комплекса $\Omega^{\wedge}$:

$$\begin{aligned} x^i &\to \tilde{x}^i = T^i_j \otimes x^j , \\ dx^i &\to d\tilde{x}^i = T^i_j \otimes dx^j + dT^i_j \otimes x^j . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Эти преобразования являются естественными обобщениями преобразований (3.13) и выглядят как калибровочные преобразования. Последнее наблюдение послужило отправной идеей для введения некоммутативных связностей и кривизн в [43,50,51]. Требование ковариантности алгебры $\Omega^{\wedge}$ (3.10) относительно преобразований (3.28) приводит нас к следующим соотношениям на генераторы T^i_j, dT^i_j алгебры $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$:

$$(\hat{R} - c\mathbf{1})TT'(\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1}) = 0 , \quad (\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1})(dT)(dT)'(\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1}) = 0 , \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} &(\hat{R}(dT)T' - T(dT)'\hat{R}^{-1})(\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1}) = 0 , \\ &(\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1})((dT)T'\hat{R} - \hat{R}^{-1}T(dT)') = 0 , \end{aligned} \tag{3.30}$$

где $T = T_1 = T \otimes I$, $T' = T_2 = I \otimes T$, и мы, как обычно, опустили знак внешнего произведения дифференциальных форм. Равенства (3.29), (3.30) должны выполняться как для $c = q$, так и для $c = -q^{-1}$, и, следовательно, они эквивалентны полному набору определяющих соотношений для биковариантного дифференциального комплекса $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$ на $GL_q(N)$ (см. [49,50], [37,45,48,54]):

$$\hat{R}TT' = TT'\hat{R}\,, \tag{3.31}$$

$$\hat{R}(dT)T' = T(dT)'\hat{R}^{-1}\,, \tag{3.32}$$

$$\hat{R}(dT)(dT)' = -(dT)(dT)'\hat{R}^{-1}\,. \tag{3.33}$$

Биковариантность этих соотношений означает их ковариантность относительно двух типов преобразований:

$$L)\quad T^i_j \to T^i_k \otimes T^k_j\ ,\quad dT^i_j \to T^i_k \otimes dT^k_j\ ,$$

$$R)\quad T^i_j \to T^i_k \otimes T^k_j\ ,\quad dT^i_j \to dT^i_k \otimes T^k_j\ ,$$

которые можно записать единым образом:

$$T \to T_L\, T\, T_R\ , \tag{3.34}$$

$$dT \to T_L\, dT\, T_R\ , \tag{3.35}$$

где элементы матриц T_L, T_R являются генераторами двух взаимно коммутирующих алгебр $\mathrm{Fun}(GL_q(N))$, т.е. удовлетворяют соотношениям (3.31) и $[T_L, T'] = [T_R, T'] = [T_L, T'_R] = 0$. Анализ, аналогичный проведенному в работе [37], показывает, что все алгебры "бозонного типа", обладающие ковариантностью относительно преобразований (3.34), определяются соотношениями (3.31), а все алгебры "фермионного типа", обладающие ковариантностью относительно преобразований (3.35), определяются соотношениями (3.33). Это следует из представлений (3.29) и из подсчета рангов проекторов $\mathbf{P}^{\pm}$. Подчеркнем, что (3.33) выводится из (3.32), если дифференциал d нильпотентен $d^2 = 0$ и подчиняется градуированному правилу Лейбница $d(\rho\eta) = d(\rho)\eta + (-1)^{\hat{\rho}}\rho d(\eta)$, где $\hat{\rho}$ – градуировка элемента ρ (степень дифференциальной формы ρ). Пользуясь указанными правилами, мы можем задать действие d на произвольный элемент алгебры $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$.

В работе [50]) было показано, что алгебра $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$ является алгеброй Хопфа. Коумножение Δ, коединица ϵ и антипод S определяются по формулам:

$$\Delta(T^i_j) = T^i_k \otimes T^k_j\ ,\quad \Delta(dT^i_j) = dT^i_k \otimes T^k_j + T^i_k \otimes dT^k_j, \tag{3.36}$$

$$\epsilon(T) = I\ ,\quad S(T) = T^{-1}\ ,\quad \epsilon(dT) = 0\ ,\quad S(dT) = -T^{-1}dTT^{-1} \tag{3.37}$$

(здесь $\otimes$ – градуированное прямое произведение) и удовлетворяют всем аксиомам АХ. Таким образом, алгебра $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$ представляет собой частный пример внешних дифференциальных АХ, рассмотренных в конце второго раздела (см. теорему 4). Отметим, что алгебра $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$ обладает также аддитивным копроизведением с нетривиальными правилами "брэйдинга" [55]. Из определения коумножения Δ (3.36) следует, что алгебра $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$ ковариантна не только относительно преобразований (3.34),(3.35), но и относительно преобразований

$$T \to T_L\, T\, T_R \ , \ \ dT \to dT_L\, T\, T_R + T_L\, dT\, T_R + T_L\, T\, dT_R \ , \tag{3.38}$$

где $\{T_L,\ dT_L\}$, $\{T_R,\ dT_R\}$ и $\{T,\ dT\}$ — идентичные взаимно коммутирующие дифференциальные комплексы $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$. Легко показать, используя равенства (3.28), (3.36), что понятие дифференциала d можно расширить и определить его действие на градуированное прямое произведение алгебр $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$ и $\Omega^{\wedge}$. Например, действие d на прямое произведение $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)} \otimes \Omega^{\wedge}$ определяется по следующим правилам:

$$d(\rho \otimes \Omega^{\wedge}) = d(\rho) \otimes \Omega^{\wedge} + (-1)^k \rho \otimes d(\Omega^{\wedge}),$$

где $\rho \in \Gamma^{\wedge k}_{GL_q(N)}$ и $d^2 = 0$.

Расширим теперь алгебру (3.31)—(3.33), добавив к ней новые генераторы

$$\frac{\partial}{\partial T^i_j} = \partial^j_i \ ,$$

имеющие смысл некоммутативных производных по координатам T^i_j. Тогда из (3.34) мы получаем преобразования ковариантности для ∂^i_j в виде [37]:

$$\partial \to T_R^{-1}\, \partial\, T_L^{-1} \ . \tag{3.39}$$

Следовательно, естественными q-коммутационными соотношениями для ∂^i_j, которые ковариантны относительно преобразований (3.39), должны быть соотношения

$$\hat{R}\, \partial'\, \partial = \partial'\, \partial\, \hat{R} \ . \tag{3.40}$$

Здесь мы, как обычно, подразумеваем $\partial \equiv \partial_1$ и $\partial' \equiv \partial_2$, где 1 и 2 – номера матричных пространств. Определим теперь ковариантные кросс-коммутационные соотношения генераторов $\{\partial^i_j\}$ и генераторов $\{T^i_j,\ dT^i_j\}$ дифференциального комплекса $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$. Метод, аналогичный тому, который был использован в случае квантовых гиперплоскостей, плюс проверка свойства ПБВ приводят к тому, что в качестве таких кросс-коммутационных соотношений необходимо выбрать

$$\partial \hat{R} (dT) = (dT)' \hat{R}^{-1} \partial' \ , \tag{3.41}$$

$$\partial\, \hat{R}^{\pm 1}\, T = T'\, \hat{R}^{\mp 1}\, \partial' + \mathbf{1} \ . \tag{3.42}$$

Соотношения (3.41), (3.42), очевидно, ковариантны относительно преобразований (3.34), (3.35) и (3.39).

Итак, мы имеем два варианта (в зависимости от выбора знаков в формуле (3.42)) замкнутой алгебры с генераторами $\{T^i_j,\ dT^i_j,\ \partial^k_l\}$ и определяющими соотношениями (3.31)—(3.33), (3.40)—(3.42). Оба варианта этой алгебры обладают свойством ПБВ, что можно проверить непосредственно, рассматривая различные способы упорядочения мономов третьей степени, построенных из генераторов T, dT и ∂. На самом деле, как показано в работе [54], эти два варианта приводят к изоморфным алгебрам. Действительно, выберем алгебру с нижними знаками и переопределим в ней элементы ∂^i_j в виде (аналогичные преобразования для производных на q-евклидовых пространствах рассматривались в [56]):

$$\partial \to \widetilde{\partial} = \frac{1}{I + \lambda \partial T} \partial \, . \tag{3.43}$$

Тогда алгебра с нижними знаками переходит в алгебру $\{T,\ dT,\ \widetilde{\partial}\}$ с верхними знаками. Соотношение (3.43) устанавливает искомый изоморфизм, и следовательно, без ограничения общности, мы можем изучать только один из вариантов (3.42). Заметим, что алгебра с верхними знаками приводит к соотношению $\partial d = d\partial$, однако выбор алгебры с нижними знаками более предпочтителен, так как в этом случае явное выражение для дифференциала имеет более простой вид и является прямым обобщением классической формулы

$$d \equiv q^{-N} \mathrm{Tr}_q(dT\,\partial) = q^N \overline{\mathrm{Tr}}_q(\partial\, dT) \, . \tag{3.44}$$

Определение q-следов дано в работах [2, 57]:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_q(E) &\equiv \mathrm{Tr}(DE) \equiv \textstyle\sum_{i=1}^N q^{-N-1+2i} E^i_i \, , \\ \overline{\mathrm{Tr}}_q(A) &\equiv \mathrm{Tr}(D^{-1}A) \equiv \textstyle\sum_{i=1}^N q^{N+1-2i} A^i_i \, , \end{aligned} \tag{3.45}$$

где E и A, соответственно, левый и правый присоединенные $\mathrm{Fun}(GL_q(N))$-комодули:

$$E^i_j \to T^i_k\,(T^{-1})^l_j \otimes E^k_l \, , \quad A^i_j \to A^k_l \otimes (T^{-1})^i_k\, T^l_j \, .$$

Введем теперь вместо генераторов $\{dT,\ \partial\}$ эквивалентный набор левоинвариантных образующих: $V = \partial\, T$, $\Omega = T^{-1}\, dT$, где V – левоинвариантные векторные поля, а Ω – левоинвариантные 1-формы. Тогда структурные соотношения (3.32), (3.33), (3.41) и (3.42) в терминах этих образующих переписываются следующим образом:

$$\Omega\, T' = T'\, \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} \, , \tag{3.46}$$

$$\hat{R}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} \Omega' + \Omega'\, \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} = 0 \, , \tag{3.47}$$

$$\begin{cases} V\,T' = T'\,\hat{R}^{\mp 1}\,V'\,\hat{R}^{\mp 1} + T'\,\hat{R}^{\mp 1}\,, \\ \hat{R}^{\mp 1}\,V'\,\hat{R}^{\mp 1}\,V' = V'\,\hat{R}^{\mp 1}\,V'\,\hat{R}^{\mp 1} + V'\,\hat{R}^{\mp 1} - \hat{R}^{\mp 1}\,V'\,, \\ \hat{R}^{\pm 1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1}\,V' = V'\,\hat{R}^{\mp 1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1} + \Omega'\,\hat{R}^{-1}\,. \end{cases} \tag{3.48}$$

Для полноты картины приведем более компактную форму записи соотношений (3.48):

$$T'\,\hat{R}^{\mp 1}\,Y'\,\hat{R}^{\mp 1} = Y\,T'\,, \quad \hat{R}^{\pm 1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1}\,Y' = Y'\,\hat{R}^{\mp 1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1}\,,$$
$$\hat{R}^{\mp 1}\,Y'\,\hat{R}^{\mp 1}\,Y' = Y'\,\hat{R}^{\mp 1}\,Y'\,\hat{R}^{\mp 1}\,, \tag{3.49}$$

где $Y = I \mp \lambda V = I \mp \lambda \partial T$. Отметим, что все формулы (3.46)—(3.49) и доказательство изоморфизма алгебр с разным выбором знаков в (3.42) были сформулированы в работе [54] в терминах правоинвариантных векторных полей и 1-форм: $T\,\partial$, $dT\,T^{-1}$.

Расширим теперь построенную алгебру с генераторами $\{T^i_j,\ dT^i_j,\ \partial^i_j\}$, добавив к ней еще один набор образующих (внутренних производных) $\mathbf{i}^i_j$. Эти образующие переводят дифференциальные (n)-формы в $(n-1)$-формы и имеют смысл градуированных производных по элементам dT^i_j. Следовательно, в соответствии с правилами (3.35), элементы $\mathbf{i}^i_j$ должны преобразовываться так же, как и элементы ∂^i_j (3.39):

$$\mathbf{i} \to T_R^{-1}\,\mathbf{i}\,T_L^{-1}\,. \tag{3.50}$$

С учетом "фермионного" характера генераторов $\mathbf{i}$ единственно возможные ковариантные коммутационные соотношения для них имеют вид

$$\hat{R}\,(\mathbf{i})'\,\mathbf{i} = -(\mathbf{i})'\,\mathbf{i}\,\hat{R}^{-1} \tag{3.51}$$

(ср. с формулой (3.33)). Далее наш метод построения самосогласованных (с точки зрения ковариантности и выполнения свойства ПБВ) коммутационных соотношений генераторов $\mathbf{i}$ с другими генераторами аналогичен тому, которым мы пользовались в случае построения дифференциальных алгебр для квантовых гиперплоскостей, а также для получения коммутационных соотношений элементов T^i_j, dT^i_j с ∂^i_j. В результате получаем

$$\mathbf{i}'\,\partial\,\hat{R} = \hat{R}^{-1}\,\partial'\,\mathbf{i}\,, \quad T'\,\hat{R}\,\mathbf{i}' = \mathbf{i}\,\hat{R}^{-1}\,T\,, \tag{3.52}$$

$$\mathbf{i}\,\hat{R}^{\mp 1}\,(dT) + (dT)'\,\hat{R}^{\mp 1}\,\mathbf{i}' = \mathbf{1}\,. \tag{3.53}$$

Опять же, как и в случае формулы (3.42), мы имеем, в зависимости от выбора знаков в (3.53), два варианта самосогласованной (с точки зрения ковариантности и выполнения свойства ПБВ) алгебры. Можно показать, что оба эти варианта снова приводят к идентичным алгебрам, связанным друг с другом нелинейным преобразованием, аналогичным преобразованию (3.43):

$$\mathbf{i} \to \widetilde{\mathbf{i}} = \frac{1}{I - \lambda \mathbf{i} dT} \mathbf{i} ,$$

т.е. алгебра с нижними знаками в (3.53) переходит в алгебру $\{\ldots, \widetilde{\mathbf{i}}\}$ с верхними знаками. Поэтому для определенности мы выберем один из вариантов (3.53), а именно вариант с нижними знаками.

Итак, мы продемонстрировали справедливость следующего утверждения: **Предложение 2.** *Дифференциальное исчисление на группе $GL_q(N)$ задается дифференциальной алгеброй с образующими $\{T^i_j,\ dT^i_j,\ \partial^i_j,\ \mathbf{i}^i_j\}$, дифференциалом (3.44) и определяющими соотношениями:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{R} T T' = T T' \hat{R} , \\ \\ \hat{R} (dT) T' = T (dT)' \hat{R}^{-1} , \quad \hat{R} (dT) (dT)' = -(dT) (dT)' \hat{R}^{-1} , \end{array} \right. \tag{3.54}$$

$$\hat{R} \partial' \partial = \partial' \partial \hat{R} , \quad \mathbf{i}' \partial \hat{R} = \hat{R}^{-1} \partial' \mathbf{i} , \quad \hat{R} (\mathbf{i})' \mathbf{i} = -(\mathbf{i})' \mathbf{i} \hat{R}^{-1} , \tag{3.55}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \hat{R}(dT) = (dT)' \hat{R}^{-1} \partial' , \quad \partial \hat{R}^{-1} T = T' \hat{R} \partial' + \mathbf{1} , \\ \\ T' \hat{R} \mathbf{i}' = \mathbf{i} \hat{R}^{-1} T , \quad \mathbf{i} \hat{R} (dT) + (dT)' \hat{R} \mathbf{i}' = \mathbf{1} \end{array} \right. \tag{3.56}$$

(вторая и четвертая формулы в (3.56) выписаны с учетом того выбора знаков, который мы сделали выше). Эти соотношения являются ковариантными относительно копреобразований (3.34), (3.35), (3.39) и (3.50) и, кроме того, определяют алгебру, обладающую свойством ПБВ.

Отметим, что подалгебра с генераторами $\{\partial, \mathbf{i}\}$ и определяющими соотношениями (3.55) является АХ, которая аналогична дифференциальной АХ $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$. Действительно, коумножение, антипод и коединица для алгебры (3.55) могут быть заданы в виде

$$\begin{array}{c} \Delta(\partial) = \partial \otimes \partial , \quad \epsilon(\partial) = I , \quad S(\partial) = \partial^{-1} , \\ \\ \Delta(\mathbf{i}) = \mathbf{i} \otimes \partial + \partial \otimes \mathbf{i} , \quad \epsilon(\mathbf{i}) = 0 , \quad S(\mathbf{i}) = -\partial^{-1} \mathbf{i} \partial^{-1} , \end{array} \tag{3.57}$$

где мы предположили возможность расширения алгебры (3.55) за счет включения в нее обратной матрицы ∂^{-1}. Соотношения (3.56) можно теперь рассматривать как правила для специального кросс-умножения двух АХ (3.55), (3.57) и (3.54), (3.36), (3.37).

Замечательным фактом является то, что все определяющие соотношения (3.31)—(3.33), (3.40)—(3.42) и (3.51)—(3.53) для дифференциальной алгебры на $GL_q(N)$ можно записать в компактной форме:

$$\hat{R} T(x) T(x)' = T(x) T(x)' \hat{R} , \tag{3.58}$$

$$\hat{R}\, dT(y)\, T(x)' = T(x)\, dT(y)'\, \hat{R}^{-1} \,, \tag{3.59}$$

$$\hat{R}\, dT(y)\, dT(y)' = -dT(y)\, dT(y)'\, \hat{R}^{-1} \,, \tag{3.60}$$

где

$$T(x) = \frac{1}{(x + T\partial)} T \,, \quad dT(y) = \frac{1}{(y + dT\mathbf{i})} dT \,, \tag{3.61}$$

и x, $y \neq 0$ — произвольные параметры. Заметим, что соотношения (3.58)—(3.60), содержащие в себе все соотношения дифференциальной алгебры на $GL_q(N)$, идентичны структурным соотношениям дифференциального комплекса (3.31)—(3.33). Таким образом, ковариантность и выполнение свойства ПБВ для всей алгебры дифференциального исчисления на $GL_q(N)$ непосредственно следуют из ковариантности и выполнения свойства ПБВ для дифференциального комплекса $\Gamma^{\wedge}_{GL_q(N)}$.

Докажем теперь следующее утверждение.

Предложение 3. *Дифференциальная алгебра на $GL_q(N)$ с определяющими соотношениями (3.54), (3.55) и (3.56) эквивалентна дифференциальной алгебре на $GL_q(N)$ с определяющими соотношениями:*

$$\begin{cases} \hat{R}\, T\, T' = T\, T'\, \hat{R} \,, \\ \Omega\, T' = T'\, \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} \,, \quad \hat{R}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} \Omega' + \Omega'\, \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} = 0 \,, \end{cases} \tag{3.62}$$

$$\begin{cases} \Im\, T' = T'\, \hat{R}\, \Im'\, \hat{R} \,, \quad \hat{R}\, \Im'\, \hat{R} \Omega' + \Omega'\, \hat{R}\, \Im'\, \hat{R} = \hat{R} \,, \\ \hat{R}\, \Im'\, \hat{R} \Im' + \Im'\, \hat{R}\, \Im'\, \hat{R}^{-1} = 0 \,. \end{cases} \tag{3.63}$$

$$\begin{cases} \hat{R}\, \mathcal{L}'\, \hat{R}\, \Im' - \Im'\, \hat{R}\, \mathcal{L}'\, \hat{R} = \Im'\, \hat{R} - \hat{R}\, \Im' \,, \\ \mathcal{L}\, T' = T'\, \hat{R}\, \mathcal{L}'\, \hat{R} + T'\, \hat{R} \,. \end{cases} \tag{3.64}$$

$$\begin{cases} \hat{R}\, \mathcal{L}'\, \hat{R}\, \mathcal{L}' - \mathcal{L}'\, \hat{R}\, \mathcal{L}'\, \hat{R} = \mathcal{L}'\, \hat{R} - \hat{R}\, \mathcal{L}' \,, \\ \hat{R}\, \mathcal{L}'\, \hat{R}\, \Omega' - \Omega'\, \hat{R}\, \mathcal{L}'\, \hat{R} = \Omega'\, \hat{R} - \hat{R}\, \Omega' \,. \end{cases} \tag{3.65}$$

Новые образующие $\{\Omega^i_j,\ \mathcal{L}^i_j,\ \Im^i_j\}$ имеют следующий смысл. Элементы $\Omega = T^{-1}\, dT$ задают левоинвариантный базис дифференциальных 1-форм на $GL_q(N)$, элементы

$$\Im \equiv \mathbf{i}\, T \tag{3.66}$$

определяют базис левоинвариантных внутренних производных на $GL_q(N)$, а

$$\mathcal{L} \equiv d\, \Im + \Im\, d \tag{3.67}$$

определяют базис левоинвариантных производных Ли на $GL_q(N)$. Алгебра с определяющими соотношениями (3.62)—(3.65) является алгеброй ПБВ-типа.

Доказательство. Прежде всего заметим, что вторая и третья формулы из (3.62) были получены выше (см. (3.46) и (3.47)). Далее, формулы (3.63) для левоинвариантных внутренних производных $\Im$ (3.66) легко выводятся из коммутационных соотношений (3.31)-(3.33), (3.55) и (3.56). Для левоинвариантной производной Ли $\mathcal{L}^i_j$, заданной классической формулой Картана (3.67), мы, очевидно, имеем $d\,\mathcal{L} = \mathcal{L}\,d$ и, кроме того, из определения (3.66) для $\Im$ следует соотношение $\mathcal{L} = l\,T - \mathbf{i}\,(dT)$, в котором мы использовали операторы l^i_j (модификация генераторов ∂):

$$l \equiv d\,\mathbf{i} + \mathbf{i}\,d = (I - \lambda\,\mathbf{i}\,(dT))\partial \,.$$

Явный вид l^i_j вытекает из явного вида дифференциала (3.44). Далее, из коммутационных соотношений (3.31)-(3.33), (3.55) и (3.56) следуют полезные коммутационные соотношения для операторов l:

$$\hat{R}\,l'\,\mathbf{i} = \mathbf{i}'\,l\,\hat{R}\,, \quad l\,\hat{R}^{-1}\,T = T'\,\hat{R}\,l' + (I - \lambda\,\mathbf{i}\,(dT))\,, \tag{3.68}$$

с учетом которых уже довольно легко получаются равенства (3.64). Отметим, что эти равенства можно проверить, дифференцируя соотношения (3.63). Аналогично, действуя на формулы (3.64) внешним дифференциалом d, мы выводим оставшийся набор основных соотношений (3.65). Выполнение ПБВ-свойства для рассматриваемой алгебры следует из ПБВ-свойства для алгебры с определяющими соотношениями (3.54), (3.55) и (3.56). Таким образом, доказательство предложения 3 завершено. •

Формулы (3.62)—(3.65) (с точностью до замены $\Im, \mathcal{L} \to -\Im, -\mathcal{L}$) совпадают с определяющими соотношениями для дифференциальной алгебры на $GL_q(N)$, построенной в работах [45, 52, 53]. Таким образом, предложение 3 демонстрирует эквивалентность дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$, основанного на формулах (3.54)—(3.56) (соответствующих определенному выбору знаков в (3.42),(3.53)), и дифференциального исчисления на $GL_q(N)$, предложенного в [45,52,53]. Другой выбор знаков приведет к дифференциальным исчислениям, которые, как мы показали выше, некоторыми нелинейными преобразованиями генераторов сводятся к рассмотренному.

Заметим, что (3.64) и (3.65) можно представить компактно в виде

$$\hat{R}\,L'\,\hat{R}\,\Im' = \Im'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\,, \tag{3.69}$$

$$L\,T' = T'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\,, \quad \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,L' = L'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\,, \quad \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,\Omega' = \Omega'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\,, \tag{3.70}$$

где

$$L = I + \lambda\,\mathcal{L} = (I - \lambda\,\mathbf{i}\,dT)(I + \lambda\,\partial\,T) \equiv (L W L^{-1})\,Y \Leftrightarrow L = Y.W\,; \tag{3.71}$$

и мы ввели в рассмотрение новый объект $\{W^i_j\}$:

$$W = L^{-1}(I - \lambda \Im \Omega) L = Y^{-1}(I - \lambda \Im \Omega) Y = Y^{-1} L ,$$

который понадобится нам в разд. 5 и который удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} W T' = T' \hat{R}^{-1} W' \hat{R} , \\ \hat{R}^{-1} W' \hat{R} Y' = Y' \hat{R}^{-1} W' \hat{R} , \quad \hat{R} W' \hat{R} W' = W' \hat{R} W' \hat{R} . \end{gathered} \tag{3.72}$$

Два последних из этих соотношений легко выводятся из правила коммутации для векторных полей Y и производных Ли L:

$$Y' \hat{R} L' \hat{R} = \hat{R} L' \hat{R} Y' ,$$

которое, в свою очередь, получено с учетом второго и третьего соотношений из (3.49) (нижние знаки) и равенства

$$\hat{R}^{-1} Y' \hat{R} \Im' = \Im' \hat{R} Y' \hat{R} .$$

Компактные соотношения (3.58)—(3.60) также можно переписать в терминах левоинвариантных образующих $\{L,\ \Omega,\ \Im\}$:

$$\hat{R}\, \overline{T}(x)\, \overline{T}(x)' = \overline{T}(x)\, \overline{T}(x)' \hat{R} , \tag{3.73}$$

$$\overline{\Omega}(y)\, T' = T' \hat{R}^{-1} \overline{\Omega}(y)' \hat{R}^{-1} , \quad \hat{R} L' \hat{R}\, \overline{\Omega}(y)' = \overline{\Omega}(y)' \hat{R} L' \hat{R} , \tag{3.74}$$

$$\hat{R}\, \overline{\Omega}(y)' \hat{R}^{-1} \overline{\Omega}(y)' = \overline{\Omega}(y)' \hat{R}^{-1} \overline{\Omega}(y)' \hat{R}^{-1} , \tag{3.75}$$

где

$$\overline{T}(x) = T(L + x) , \quad \overline{\Omega}(y) = \left(\Omega \frac{1}{y + \Im \Omega} \right) = \left(\frac{1}{y + \Omega \Im} \Omega \right) .$$

Напомним, что параметры x, $y \neq 0$ являются произвольными. Подчеркнем еще раз, что ключевыми формулами, исходя из которых мы построили полное дифференциальное исчисление на группе $GL_q(N)$, являются определяющие соотношения (3.31)—(3.33) для дифференциального комплекса на $GL_q(N)$.

Пользуясь формулой (3.73) и первой формулой из (3.70), можно довольно быстро вывести выражение для характеристического полинома в некоммутативном случае (см. [58,59]):

$$\mathcal{D}\mathrm{et}_q(L; x) \equiv \frac{1}{\det_q(T)} \det_q[T(L + x)] =$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{E}|^2}\mathcal{E}^q_{\hat{1}\hat{2}\ldots\hat{N}} \prod_{i=1}^{N} [(L_{\hat{N}} + q^{2(N-i)}x)\hat{R}_{\hat{N-1}} \ldots \hat{R}_{\hat{1}}]\mathcal{E}^q_{\hat{1}\hat{2}\ldots\hat{N}} = \sum_{i=0}^{N} x^i \, C^i_N(q) \, \sigma_{N-i}(L) \,, \tag{3.76}$$

где

$$\sigma_{N-i}(L) = \frac{1}{|\mathcal{E}|^2}\mathcal{E}^q_{\hat{1}\hat{2}\ldots\hat{N}} \, (L_{\hat{N}}\hat{R}_{\hat{N-1}} \ldots \hat{R}_{\hat{i+1}})^{N-i} \, \mathcal{E}^q_{\hat{1}\hat{2}\ldots\hat{N}} \,,$$

$$C^i_N(q) = \frac{[N]_q!}{[i]_q! \, [N-i]_q!} \, q^{i(i-N)} \,, \quad [i]_q \equiv \frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}} \,;$$

$\hat{1}, \hat{2}, \ldots, \hat{N}$ — номера матричных пространств; $[j]_q = (q^j - q^{-j})/(q - q^{-1})$; $\hat{R}_{\hat{k}} \equiv \hat{R}_{\hat{k}\hat{k+1}}$; $\mathcal{E}^q_{\hat{1}\hat{2}\ldots\hat{N}} \in (\mathrm{Vect}_N)^{\otimes N}$ обозначает q-аналог полностью антисимметричного тензора [61] (см. также [1]);

$$|\mathcal{E}|^2 = \sum_{i_1,\ldots,i_N} \mathcal{E}^q_{i_1 i_2 \ldots i_N} \mathcal{E}^q_{i_1 i_2 \ldots i_N} = q^{N(N-1)/2} \, [N]_q!$$

и

$$\det_q(T)\mathcal{E}^q_{\hat{1}\hat{2}\ldots\hat{N}} = \mathcal{E}^q_{\hat{1}\hat{2}\ldots\hat{N}} T_{\hat{1}} \, T_{\hat{2}} \ldots T_{\hat{N}} \,. \tag{3.77}$$

Если мы подставим в (3.76) $x = -L$, то получим характеристическое тождество [58, 59]:

$$\sum_{i=0}^{N} (-L)^i \, C^i_N(q) \, \sigma_{N-i}(L) = 0 \,.$$

Заметим, что равенство

$$\mathcal{D}\mathrm{et}_{q^{-1}}(Y; x) = \det_{q^{-1}}[(Y + x) \, T^{-1}] \det_q(T) \,, \quad \det_q(T) = \frac{1}{\det_{q^{-1}}(T^{-1})} \,,$$

аналогичное (3.76), но записанное для образующих алгебры (3.49), есть не что иное, как q-аналог тождеств Капелли (см. [60]).

Важной с точки зрения приложений является задача о явных реализациях и представлениях алгебры (3.31) — (3.33). Приведем одну из возможных реализаций [51] (см. также [62]) этой алгебры, связанную с построением нетривиального отображения из двумерного классического пространства в алгебру $\mathrm{Fun}(GL_q(N))$. При этом внешний дифференциал d выступает как обычный дифференциал: $d = dz\partial_z + d\bar{z}\partial_{\bar{z}}$ по классическому двумерному пространству с координатами $\{z, \, \bar{z}\}$. Действительно, рассмотрим алгебру (ПБВ-типа):

$$\hat{R}TT' = TT'\hat{R} \,, \quad TY' = \hat{R}Y\hat{R}T \,, \quad \hat{R}Y\hat{R}Y = Y\hat{R}Y\hat{R} \,, \tag{3.78}$$

$$\overline{Y}T' = T'\hat{R}^{-1}\overline{Y}'\hat{R}^{-1} \,, \quad \hat{R}^{-1}\overline{Y}'\hat{R}^{-1}\overline{Y}' = \overline{Y}'\hat{R}^{-1}\overline{Y}'\hat{R}^{-1} \,, \quad [\overline{Y}, \, Y'] = 0 \,, \tag{3.79}$$

где, как обычно, $Y = Y_1$ и $Y' = Y_2$ и т.д. Алгебра (3.78) называется алгеброй функций на кокасательном расслоении над $GL_q(N)$, и генераторы Y интерпретируются как правоинвариантные векторные поля. Отметим, что соотношения (3.79) можно получить из (3.78), если положить $\overline{Y} = T^{-1}\,Y\,T$. Однако для наших целей предпочтительнее считать, что Y и $\overline{Y}$ не связаны какими-либо соотношениями. Теперь можно доказать, что операторы

$$T(z,\,\bar{z}) = \exp(zY)\,T\exp(\bar{z}\overline{Y}) = U^{-1}\,T\,U\;, \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned} dT(z,\,\bar{z}) &= dz\,(\partial_z T(z,\,\bar{z})) + d\bar{z}\,(\partial_{\bar{z}} T(z,\,\bar{z})) = \\ &= dz\,Y\,T(z,\,\bar{z}) + d\bar{z}\,T(z,\,\bar{z})\,\overline{Y}\;, \end{aligned} \tag{3.81}$$

где

$$U = U(z,\,\bar{z}) = \exp[\frac{1}{\lambda}(zq^{-N}\mathrm{Tr}_q(Y) + \bar{z}q^{N}\overline{\mathrm{Tr}}_q(\overline{Y}))]\;,$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.31)—(3.33). Генераторы $\{x^i,\ (dx^i)\}$ алгебры $\Omega^\wedge$ (3.10) для $c = q$ могут быть реализованы как столбцы квантовых матриц $T(z,\bar{z})$, $dT(z,\bar{z})$. Подчеркнем, что равенства (3.78)—(3.81) напоминают формулы, возникающие в контексте канонического квантования моделей Весса — Зумино — Новикова — Виттена (ВЗНВ) (см., например, [62—64]) и моделей деформированных волчков [8, 14]. Более того, квантовые матрицы $T(z,\bar{z})$, очевидно, удовлетворяют полевым уравнениям модели ВЗНВ:

$$\partial_{\bar{z}}(\partial_z T\,T^{-1}) = \partial_z(T^{-1}\,\partial_{\bar{z}} T) = 0\;.$$

Представление (3.80) для матриц $T(z,\ \bar{z})$ примечательно еще и тем, что ведет к соотношениям

$$\mathcal{D}\mathrm{et}_q\left(\exp(z\,Y)\right) \equiv \det_q(T(z,\ 0))\,\frac{1}{\det_q(T)} = \exp\left(z\,q^{1-N}\,\mathrm{Tr}_q(\,Y\,)\right)\;, \tag{3.82}$$

$$\mathcal{D}\mathrm{et}_q\left(\exp(\bar{z}\,\overline{Y})\right) \equiv \frac{1}{\det_q(T)}\,\det_q(T(0,\ \bar{z})) = \exp\left(\bar{z}\,q^{N-1}\,\overline{\mathrm{Tr}}_q(\,\overline{Y}\,)\right)\;, \tag{3.83}$$

которые можно рассматривать как квантовые аналоги известного классического тождества $\det(A) = \exp(\mathrm{Tr}(ln\,A))$, где A — невырожденная числовая матрица. При выводе соотношений (3.82) и (3.83) необходимо воспользоваться равенствами

$$\det_q(T)\,Y = q^2\,Y\det_q(T)\;,\;\; \det_q(T)\,\overline{Y} = q^2\,\overline{Y}\det_q(T)\;, \tag{3.84}$$

вытекающими из определения q- детерминанта (3.77) и соотношений (3.78), (3.79).

В заключение приведем формулу [66], обобщающую автоморфизм (3.80):

$$T_n(z) = \exp\{z\,[Y^n + \sum_{m=1}^{n-1}(c_m\,\mathrm{Tr}_q(Y^{n-m})\,Y^m)]\}\,T = U_n(z)^{-1}\,T\,U_n(z)\;,$$

где

$$c_m = \frac{\lambda q^{-N}}{[n]_{q^2}} [m]_{q^2} \ , \quad U_n(z) = \exp\left[z \frac{q^{-N}}{\lambda [n]_{q^2}} \mathrm{Tr}_q(Y^n) \right] \ ,$$

а T и Y образуют алгебру (3.78). Соответствующая формула для $\overline{Y}$ легко получается заменой $Y \to T\overline{Y}T^{-1}$.

4. СВОЙСТВА ВНЕШНЕЙ АЛГЕБРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА ГРУППЕ $GL_q(N)$

Укажем ряд важных фактов, касающихся алгебры 1-форм на $GL_q(N)$ (3.47). Эту алгебру, кстати, можно интерпретировать как алгебру некоммутативных БРСТ-полей [67]. Прежде всего перепишем структурные соотношения (3.47) в более удобном виде в терминах правоинвариантных 1-форм $\Omega = dT\,T^{-1}$:

$$\hat{R}\,\Omega\,\hat{R}\,\Omega + \Omega\,\hat{R}\,\Omega\,\hat{R}^{-1} = 0 \tag{4.1}$$

(мы избавляемся при этом от штрихов и части обратных степеней у R-матриц). Коумножение Δ (3.36) в терминах генераторов Ω представляется следующим образом [37]:

$$\Omega^i_j \to \Delta(\Omega^i_j) = T^i_l (T^{-1})^k_j \odot \Omega^l_k + \Omega^i_j \odot I \equiv (T\,\Omega\,T^{-1} + dT\,T^{-1})^i_j \ , \tag{4.2}$$

где в последней части этого соотношения мы использовали краткий способ записи, который демонстрирует, что Ω^i_j преобразуются как 1-формы связности. Таким образом, соотношения (4.1) являются ковариантными относительно преобразований (4.2). В работах [43,50,51] алгебра (4.1) интерпретировалась как алгебра 1-форм калибровочных полей. В дальнейшем такая интерпретация была использована в [68] для построения квантовых деформаций инстантонных решений. Вычислим теперь квантовый след от (4.1) по второму пространству. В результате получаем

$$[\Omega^{(1)}, \Omega]_+ = -\lambda q^N \Omega^2 \ , \tag{4.3}$$

где $\Omega^{(1)} = \mathrm{Tr}_q(\Omega)$, и мы воспользовались формулами

$$\mathrm{Tr}_{q2}(\hat{R}^{\pm 1} E \hat{R}^{\mp 1}) = \mathrm{Tr}_q(E),\ \mathrm{Tr}_{q2}(\hat{R}^{\pm 1}) = q^{\pm N},\ \mathrm{Tr}_q(I) = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} \equiv [N]_q \ . \tag{4.4}$$

Здесь $\mathrm{Tr}_{q2}(.)$ обозначает квантовый след (3.45) по второму матричному пространству. Умножим (4.1) на $\hat{R}$ справа и снова вычислим q-след по второму пространству

$$\mathrm{Tr}_{q2}(\hat{R}\,\Omega\,\hat{R}\,\Omega\,\hat{R}) + q^N\,\Omega^2 = 0 \ , \tag{4.5}$$

а затем усредним это соотношение и по первому пространству:

$$\lambda(\Omega^{(1)})^2 + q^N(2+\lambda^2)\mathrm{Tr}_q(\Omega^2) = 0 . \tag{4.6}$$

Ключевым моментом при получении (4.6) является циклическое свойство квантовых следов:

$$\mathrm{Tr}_{q1}\,\mathrm{Tr}_{q2}(\hat{R}\,E_{12}) = \mathrm{Tr}_{q1}\,\mathrm{Tr}_{q2}(E_{12}\,\hat{R}), \tag{4.7}$$

справедливое для любой квантовой матрицы $E_{12} \in \mathrm{Mat}(N) \otimes \mathrm{Mat}(N)$. Это свойство является следствием тождества $[\hat{R},\ D_1\,D_2] = 0$, которое выполняется не только для линейных квантовых групп, но и для $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ (на самом деле, это тождество выполняется для всех обратимых R-матриц, для которых обратимы еще и матрицы $(R_{12})^{t_1}$, при этом $D \sim \mathrm{Tr}_2(P_{12}((R_{12}^{t_1})^{-1})^{t_1})$, см. [57]).

Усредняя (4.3) еще раз, получаем

$$[\Omega^{(1)},\ \Omega^{(1)}]_+ = -\lambda q^N \mathrm{Tr}_q(\Omega^2) . \tag{4.8}$$

Однородная система уравнений (4.6) и (4.8) при $q + q^{-1} \neq 0$ дает решение:

$$(\Omega^{(1)})^2 = 0\ , \quad \mathrm{Tr}_q(\Omega^2) = 0 . \tag{4.9}$$

Заметим,что алгебра (4.1) является комодульной алгеброй относительно присоединенного кодействия $\mathrm{Fun}(GL_q(N))$:

$$\Omega^i_j \to T^i_l (T^{-1})^k_j \otimes \Omega^l_k\ , \tag{4.10}$$

что, в частности, следует из (4.2). Ясно, что (4.1) можно переписать в виде

$$X^{\pm\pm} \equiv \mathbf{P}^{\pm}\,\Omega\,\hat{R}\,\Omega\,\hat{R}\,\mathbf{P}^{\pm} = 0 . \tag{4.11}$$

Итак, если рассматривать объект $\Omega\hat{R}\Omega\hat{R}$ как прямое произведение двух N^2-мерных присоединенных $\mathrm{Fun}(GL_q(N)$-комодулей $\Omega^i_j \in \mathcal{A}$ (в классическом пределе мы имеем $\Omega\hat{R}\Omega\hat{R} \to \Omega_1\,\Omega_2$), то ковариантные соотношения (4.1) и (4.11) можно понимать как зануление некоторых из неприводимых копредставлений, имеющихся в разложении Клебша — Гордана:

$$\begin{gathered}\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} = [(N^2-1)+1]^2 = 2\,[1] \oplus (3+\theta_{N,2})\left[N^2-1\right] \oplus \\ \oplus 2\theta_{N,2}\left[\frac{(N^2-1)(N^2-4)}{4}\right] \oplus \left[\frac{N^2(N+3)(N-1)}{4}\right] \oplus \\ \oplus\theta_{N,3}\left[\frac{N^2(N+1)(N-3)}{4}\right],\end{gathered} \tag{4.12}$$

где $\theta_{N,M} = \{1$ для $N > M$; 0 для $N \le M\}$. То есть, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ расщепляется на 2 коинварианта (явный вид этих коинвариантов совпадает с левыми частями равенств (4.9)), 4 (3 для $N = 2$) присоединенных (бесшпуровых) копредставлений (два из них могут быть извлечены из соотношений (4.3), (4.5)) и 4 (1 для $N = 2$ и 3 для $N = 3$) копредставления более высоких размерностей. Как видно из (4.12), квантовое разложение $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ на неприводимые копредставления по размерностям совпадает с классическим (исключением является случай, когда q равно корню из единицы), что следует из результатов работ [69]. Зная ранги проекторов (см. [1,2]) $\text{rang}(P^+) = N(N+1)/2$ и $\text{rang}(P^-) = N(N-1)/2$, легко понять, какие из неприводимых копредставлений, входящих в разложение (4.12), зануляются соотношениями (4.11). Имеем

$$
\begin{aligned}
X^{++} &= \left[\tfrac{N^2(N+1)^2}{4}\right] = [\tfrac{1}{4}N^2(N+3)(N-1)] \oplus [N^2-1] \oplus [1], \\
X^{--} &= [\tfrac{N^2(N-1)^2}{4}] = \theta_{N,3}\left[\tfrac{1}{4}N^2(N-3)(N+1)\right] \oplus \theta_{N,2}[N^2-1] \oplus [1].
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Сравнивая (4.12) и (4.13), заключаем, что

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}/\{X^{\pm\pm} = 0\} &= X^{+-} \oplus X^{-+} = \tfrac{1}{2}N^2(N^2-1) = \\
&= 2\left[N^2-1\right] \oplus 2\theta_{N,2}\left[\tfrac{(N^2-1)(N^2-4)}{4}\right].
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Изложенная только что (в случае группы $GL_q(N)$) методика рассмотрения биковариантных соотношений для дифференциальных исчислений была впервые сформулирована в работе [37] (см. также [54]). В конце этого раздела мы приведем аналогичные рассуждения при построении биковариантных соотношений для присоединенных $\text{Fun}(SL_q(N))$-комодулей.

Формула (4.3), с учетом соотношения $d\Omega = \Omega^2$, показывает, что оператор $(-\lambda q^N)^{-1}\Omega^{(1)} \equiv d'$ можно интерпретировать как X-оператор Вороновича (см. разд. 2), который генерирует действие внешнего дифференциала. Отметим, что d' и $d = q^{-N}\text{Tr}_q(dT\,\partial)$ (3.44) определяют бидифференциальную структуру на алгебре (3.54) и являются частными случаями ($x = 0$ и $z = 0$) более общей формулы для дифференциала

$$
d'' = \frac{q^{-N}}{z - \lambda x}\,\text{Tr}_q\left((dT)\,(x\,T^{-1} + z\,\partial)\right) = \frac{q^N}{z - \lambda x}\,\overline{\text{Tr}}_q\left((x\,T^{-1} + z\,\partial)\,(dT)\right)\ , \tag{4.15}
$$

$$
d'' \cdot T = (dT) + T \cdot d''\ ,\quad (d'')^2 = 0\ . \tag{4.16}
$$

Оператор d'' является линейной комбинацией d и d'. Подчеркнем, что классический предел предполагает наличие условия $z \neq 0$ при $q = 1$. Тождество

$(d'')^2 = 0$ из (4.16) является следствием первого соотношения из (4.9) и соотношений (3.58)—(3.61), которые показывают, что операторы

$$\Omega_{xyz} = z\,\frac{1}{(1+y^{-1}\,dT\mathbf{i})}\,dT\,(\frac{x}{z}T^{-1}+\partial)$$

являются генераторами алгебры (4.1), и, соответственно, $(\mathrm{Tr}_q\Omega_{xyz})^2 = 0$ для всех значений параметров x, y, z и, в частности, для $y \to \infty$.

Второе соотношение из (4.9) может быть обобщено, а именно справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Для дифференциальных 1-форм Ω^i_j на группе $GL_q(N)$, которые образуют алгебру (4.1), имеют место тождества:*

$$\Omega^{(2r)} \equiv \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2r}) = 0\ ,\quad \forall r = 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{4.17}$$

Прежде чем перейти к доказательству этого предложения, отметим, что, вообще говоря, мы имеем $\Omega^{(2r+1)} = \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2r+1}) \neq 0$ для достаточно малых показателей $(2r+1)$, и, соответственно, выполняется нетривиальное коцикличеcкое равенство

$$d\Omega^{(2r-1)} = \Omega^{(2r)} = 0\ ,$$

при получении которого мы снова воспользовались связью $d\Omega = \Omega^2$. Доказательство предложения 4 очевидно в классическом пределе $q = 1$. Однако в некоммутативном случае $q \neq 1$ это доказательство требует определенных усилий.

Доказательство. Необходимо вычислить двумя способами антикоммутаторы

$$[\Omega^{(2l+1)},\ \Omega^{(2k-1)}]_+ \equiv [\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+1}),\ \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2k-1})]_+\ , \tag{4.18}$$

$$\forall l = 0, 1, 2, 3, \ldots\ ;\ \ \forall k = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Сначала попытаемся пронести оператор $\Omega^{(2l+1)}$ через $\Omega^{(2k-1)}$ с помощью соотношений (4.1) и с учетом тождества Гекке (3.7). При этом необходимо пользоваться равенствами

$$\Omega\,\hat R\Omega^k\,\hat R^{-1} = (-1)^k\,(\hat R\,\Omega\,\hat R)^k\,\Omega\ ,\quad \hat R\,\Omega^2\,\hat R\,\Omega^k = \Omega^k\,\hat R\,\Omega^2\,\hat R\ ,$$

$$\Omega\,\mathrm{Tr}_q(\Omega^k) = (-1)^k\,\mathrm{Tr}_{q2}\left((\hat R\Omega\hat R)^k\right)\,\Omega\ ,\quad [\Omega^2,\ \mathrm{Tr}_q(\Omega^k)] = 0\ ,$$

$$(\hat R\Omega\hat R)^{2k} = \hat R\Omega^{2k}\hat R + \lambda\sum_{n=1}^{2k-1}(-1)^n\Omega^{2k-n}\hat R\Omega^n\ ,$$

$$\Omega^k\hat R\Omega\hat R - \lambda\sum_{n=0}^{k-2}(-1)^n\Omega^{k-n}\hat R\Omega^{n+1} + (-1)^{k-1}\hat R^{-1}\Omega\hat R\Omega^k = 0\ , \tag{4.19}$$

$$\mathrm{Tr}_{q2}\left((\hat{R}\,\Omega\,\hat{R})^{2k-1}\right) = \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2k-1}) + \lambda q^N[2k-1]_q\Omega^{2k-1} + \ldots \,, \qquad (4.20)$$

которые непосредственно следуют из (4.1). Точками в (4.20) обозначены члены, которые исчезают при условии выполнения (4.17) для $r < k$. Учитывая эти равенства, антикоммутатор (4.18) сводится к выражению (ср. с (4.8)):

$$\Omega^{(2k-1)}\,\Omega^{(2l+1)} - \mathrm{Tr}_{q1}\left(\mathrm{Tr}_{q2}\left((\hat{R}\Omega\hat{R})^{2k-1}\right)\,\Omega^{2l+1}\right) =$$

$$= -\lambda q^N[2k-1]_q\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+2k}) + \ldots \,, \qquad (4.21)$$

где члены, обозначенные точками, снова зануляются, если мы предположим, что условия (4.17) выполняются при $r < l + k$ (см., например, второе тождество из (4.9)).

С другой стороны, протаскивая оператор $\Omega^{(2k-1)}$ через $\Omega^{(2l+1)}$, мы, очевидно, получим вместо (4.21) равенство

$$[\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+1}),\ \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2k-1})]_+ = -\lambda q^N[2l+1]_q\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+2k}) + \ldots \,, \qquad (4.22)$$

которое вместе с (4.21) дает искомое утверждение

$$\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+2k}) = 0 = [\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+1}),\ \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2k-1})]_+ \,. \qquad (4.23)$$

Предложение 4 доказано. •

Интересно отметить, что из равенств (4.19) можно получить рекуррентные соотношения ($r > 1$):

$$q^N(2+\lambda^2)\,\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2r}) = \lambda\sum_{n=1}^{2r-3}(-1)^n\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2r-1-n})\mathrm{Tr}_q(\Omega^{n+1}) \,,$$

которые в случае выполнения условий $\Omega^{(2n)} = 0$ для $n < r$ сводят выражение $\Omega^{(2r)} = \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2r})$ к сумме антикоммутаторов (4.18).

Другим важным наблюдением (см. [54]) относительно алгебры (4.1) является следующий факт.

Предложение 5. *Алгебра (4.1) дифференциальных 1-форм на группе $GL_q(N)$ является полупрямым произведением двух подалгебр: одномерной алгебры с генератором $\Omega^{(1)} = \mathrm{Tr}_q(\Omega)$ и определяющим соотношением*

$$(\Omega^{(1)})^2 = 0 \,, \qquad (4.24)$$

а также (N^2-1)-мерной алгебры с бесшпуровыми генераторами

$$\tilde{\Omega}^i_j = \Omega^i_j - \frac{1}{[N]_q}\,\Omega^{(1)}\,\delta^i_j \,, \quad (\mathrm{Tr}_q(\tilde{\Omega}) = 0) \qquad (4.25)$$

и определяющими соотношениями

$$\hat{R}\,\tilde{\Omega}\,\hat{R}\,\tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}\,\hat{R}\,\tilde{\Omega}\,\hat{R}^{-1} = \kappa(\hat{R}\,\tilde{\Omega}^2\,\hat{R} + \tilde{\Omega}^2) \tag{4.26}$$

с фиксированным параметром

$$\kappa = \kappa_q = \frac{\lambda q^N}{[N]_q + \lambda q^N} \,. \tag{4.27}$$

Доказательство. Для того чтобы доказать это предложение, введем новые генераторы:

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \alpha\Omega^{(1)}\,I \,. \tag{4.28}$$

Здесь α — произвольный параметр. В терминах этих генераторов структурные соотношения (4.1) записываются в виде (4.26), где константа $\kappa = \frac{\alpha\lambda q^N}{1+\alpha\lambda q^N}$, и мы учли равенство, вытекающее из (4.3):

$$[\tilde{\Omega},\, \Omega^{(1)}]_+ = -\frac{\lambda q^N}{1+\alpha\lambda q^N}\tilde{\Omega}^2 \,. \tag{4.29}$$

Мы можем рассматривать (4.26) как структурные соотношения для однопараметрического семейства алгебр 1-форм на $GL_q(N)$ [54]. Образующие этих алгебр получены некоторым линейным преобразованием генераторов алгебры (4.1), являющейся алгеброй ПБВ-типа. Естественно ожидать, что алгебра с определяющими соотношениями (4.26) также является алгеброй ПБВ-типа для любого значения параметра $\kappa \neq 1$ (прямое доказательство этого утверждения содержится в [54]).

Если мы выберем в определении (4.28) параметр α в виде $\alpha = 1/[N]_q$, то соответствующие генераторы $\tilde{\Omega}$ (4.25) будут бесшпуровыми. В этом случае соотношения (4.26), с фиксированным параметром (4.27), интерпретируются как определяющие соотношения для (N^2-1)-мерных подалгебр, которые вкладываются в алгебры дифференциальных 1-форм на группе $GL_q(N)$ (4.1). Тем самым мы показали, что алгебра (4.1) содержит две подалгебры: одна является одномерной и генерируется нильпотентным элементом $\Omega^{(1)}$, а другая имеет N^2-1 генератор (в силу условия $\mathrm{Tr}_q\tilde{\Omega} = 0$) со структурными соотношениями (4.26), где параметр κ определяется в (4.27). Кросскоммутационные соотношения этих двух подалгебр приведены в (4.29), где $\alpha = 1/[N]_q$. Утверждения предложения 5 доказаны. •

Данное предложение дает возможность определить набор неприводимых $\mathrm{Fun}(SL_q(N))$-комодулей, которые зануляются соотношениями (4.26), имеющими эквивалентное представление в виде

$$\tilde{X}^{\pm\pm} \equiv \mathbf{P}^{\pm}\left(\tilde{\Omega}\hat{R}\tilde{\Omega}\hat{R} - \kappa\, q^{\pm 2}\,\tilde{\Omega}^2\right)\mathbf{P}^{\pm} = 0 \,.$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{A}}$ есть присоединенный $\mathrm{Fun}(SL_q(N))$-комодуль. Тогда

$$\widetilde{\mathcal{A}} \otimes \widetilde{\mathcal{A}} = [(N^2-1)]^2 = [1] \oplus (1+\theta_{N,2}) \cdot \left[N^2-1\right] \oplus \tag{4.30}$$

$$\oplus 2\theta_{N,2} \cdot \left[\frac{(N^2-1)(N^2-4)}{4}\right] \oplus \left[\frac{N^2(N+3)(N-1)}{4}\right] \oplus$$

$$\oplus \theta_{N,3} \cdot \left[\frac{N^2(N+1)(N-3)}{4}\right].$$

Предложение 5 утверждает, что (4.1) содержит в себе соотношения (4.26) плюс одно соотношение (4.24) (коинвариант) и плюс N^2-1 соотношение (4.29) (присоединенный комодуль). Учитывая (4.13), получаем

$$\begin{gathered} \widetilde{X}^{++} \oplus \widetilde{X}^{--} = [\tfrac{1}{4}N^2(N+3)(N-1)] \oplus \\ \oplus \theta_{N,3}\left[\tfrac{1}{4}N^2(N-3)(N+1)\right] \oplus \theta_{N,2}[N^2-1] \oplus [1], \end{gathered} \tag{4.31}$$

и из разложения (4.30) следует, что

$$[\widetilde{\mathcal{A}} \otimes \widetilde{\mathcal{A}}]/\{\widetilde{X}^{\pm\pm}=0\} = \left[N^2-1\right] \oplus 2\theta_{N,2}\left[\frac{(N^2-1)(N^2-4)}{4}\right]. \tag{4.32}$$

Подалгебра (4.26) с (N^2-1) генератором и параметром κ (4.27) (вместе с нетривиальной идеей Л.Д.Фаддеева [14] о деформации правила Лейбница для внешнего дифференциала) послужила основой для построения "деформированного" дифференциального исчисления на группе $SL_q(N)$ [18], которое выходит за рамки аксиоматики Кона для некоммутативной дифференциальной геометрии.

Квазиклассический предел ($q \equiv \exp(h) \to 1$) соотношений (4.26) дает нам нечетную скобку Пуассона [70, 71]:

$$\{\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2\} = \left[[\tilde{r}_{21}, \tilde{\Omega}_2], \tilde{\Omega}_1\right]_+ + \left(-\kappa^{(1)} + P_{12}\right)(\tilde{\Omega}_1^2 + \tilde{\Omega}_2^2), \tag{4.33}$$

где матрица $\tilde{r}_{21} = \frac{1}{2}(r_{21} - r_{12})$ является решением модифицированного классического уравнения Янга — Бакстера, $\kappa = h\kappa^{(1)} + h^2 \ldots$ и $\tilde{\Omega}^i_j$ – классические антикоммутирующие объекты. Скобка Пуассона (4.33) автоматически (в силу ПБВ-свойства алгебры (4.26)) удовлетворяет градуированному тождеству Якоби.

В заключение отметим, что утверждение (4.17) для квантового случая в завуалированном виде содержится в [50]. Очевидно, что это утверждение справедливо и для всех 1-форм, полученных сдвигом (4.28).

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА НА ГРУППЕ $SL_q(N)$

Известна (см. [18, 53, 54]) следующая проблема редукции $GL_q(N)$-дифференциальной алгебры к дифференциальной алгебре на $SL_q(N)$, а именно: из коммутационных соотношений для образующих T и Ω (3.62) вытекают равенства (ср. с (3.84))

$$\det_q(T)\,\Omega = q^2\,\Omega\,\det_q(T)\ ,$$

которые запрещают одновременно полагать $\det_q(T) = 1$ и $\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega) = 0$. В данном разделе мы опишем правильную редукцию к дифференциальной алгебре на $SL_q(N)$.

Перейдем в определяющих соотношениях (3.62), (3.63), (3.69) и (3.70) к новому базису дифференциальных форм, внутренних производных и новым генераторам квантовой группы $\mathrm{Fun}(GL_q(N))$:

$$\Omega \to \Omega_L = \Omega\,L\ ,\quad \Im \to \Im_L = L^{-1}\,\Im\ ,\quad T \to \frac{1}{(\det_q(T))^{\beta}}\,T\ . \tag{5.1}$$

Тогда указанные соотношения в терминах новых генераторов принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \Omega_L\,T' = T'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'_L\,\hat{R}\ ,\quad \hat{R}\,\Omega'_L\,\hat{R}\Omega'_L + \Omega'_L\,\hat{R}\,\Omega'_L\,\hat{R}^{-1} = 0\ , \\ \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,L' = L'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\ ,\quad \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,\Omega'_L = \Omega'_L\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\ , \\ q^{2\beta}\,L\,T' = T'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\ , \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} \Im_L\,T' = T'\,\hat{R}^{-1}\,\Im_L{}'\,\hat{R}\ ,\quad \hat{R}\,\Im_L{}'\,\hat{R}^{-1}\Im_L{}' + \Im_L{}'\,\hat{R}^{-1}\,\Im_L{}'\,\hat{R}^{-1} = 0\ , \\ \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,\Im_L{}' = \Im_L{}'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\ ,\quad \Im_L{}'\,\hat{R}\,\Omega'_L\,\hat{R} + \hat{R}\,\Omega'_L\,\hat{R}\,\Im_L{}' = \hat{R}\ . \end{cases} \tag{5.3}$$

Оператор дифференциала (4.15) в терминах переменных (5.1) с учетом (3.71) представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} d &= \frac{q^N}{(z-\lambda x)}\,\overline{\mathrm{Tr}}_q\left(x\Omega + z[\frac{1}{\lambda}\,(L-I) + L\,(W^{-1}\,\Im_L\Omega_L)]\Omega\right) = \\ &= \frac{q^N}{u}\,\overline{\mathrm{Tr}}_q\left(\mathcal{L}_u\,\Omega_L + \frac{1}{W}\,\Im_L\,\Omega_L^2\right)\ , \end{aligned} \tag{5.4}$$

где

$$W = 1 - \lambda\,\Im_L\,\Omega_L\ ,\qquad u = 1 - \lambda\frac{x}{z}\ ,\qquad \mathcal{L}_u = \frac{1}{\lambda}(I - u\,L^{-1})\ ,$$

и образующие W были введены в (3.71). При $q \to 1$, $\lambda \to 0$ выражение (5.4) сводится к известному выражению для БРСТ-заряда. Таким образом, формулу (5.4) можно рассматривать как определение q-деформации БРСТ-заряда (напомним, что $d^2 = 0$).

Алгебра (5.2), (5.3) по построению является алгеброй ПБВ-типа. В действительности имеется большое число вариантов этой алгебры, все они обладают свойством ПБВ и отличаются друг от друга только расстановкой знаков степеней у R-матриц. Например, если вместо (5.1) мы выберем несколько иной базис дифференциальных форм и внутренних производных: $\Omega \to L\,\Omega$, $\Im \to \Im\, L^{-1}$, то в первом соотношении из (5.2) и первом соотношении из (5.3) произойдет замена $\hat{R} \to \hat{R}^{-1}$, а остальные соотношения останутся без изменения. Другой вариант алгебры (5.2), (5.3) можно получить, меняя местами генераторы $\Omega_L \leftrightarrow \Im_L$, что также сводится к определенной замене степеней у R-матриц в соотношениях (5.2), (5.3). Замечательно, что полученная таким образом новая алгебра будет связана с алгеброй (5.2), (5.3) преобразованием генераторов

$$\Omega_H = \frac{1}{(\overline{W}\,W)}\Omega_L \ , \quad \Im_H = \Im_L(\overline{W}\,W) \ , \tag{5.5}$$

где $\overline{W} = (I - \lambda\,\Omega_L\,\Im_L)$, а образующие W уже использовались в (3.71) и (5.4). Для операторов W и $\overline{W}$, кроме (3.72), получаем следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}
\hat{R}\,\overline{W}'\,\hat{R}^{-1}\,W' = W'\,\hat{R}\,\overline{W}'\,\hat{R}^{-1} \ , \quad \hat{R}\,\overline{W}'\,\hat{R}\,\overline{W}' = \overline{W}'\,\hat{R}\,\overline{W}'\,\hat{R} \ , \\
\hat{R}\,Y'\,\hat{R}\,\overline{W}' = \overline{W}'\,\hat{R}\,Y'\,\hat{R} \ , \quad \overline{W}\,T' = T'\,\hat{R}^{-1}\,\overline{W}'\,\hat{R} \ , \\
W'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R} = \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,W' \ , \quad \overline{W}'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R} = \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,\overline{W}' \ , \\
W'\,\hat{R}\,\Omega'_L\,\hat{R}^{-1} = \hat{R}\,\Omega'_L\,\hat{R}\,W' \ , \quad \overline{W}'\,\hat{R}\,\Omega'_L\,\hat{R} = \hat{R}^{-1}\,\Omega'_L\,\hat{R}\,\overline{W}' \ , \\
\hat{R}\,W'\,\hat{R}\Im'_L = \Im'_L\,\hat{R}^{-1}\,W'\,\hat{R} \ , \quad \hat{R}\,\overline{W}'\,\hat{R}^{-1}\,\Im'_L = \Im'_L\,\hat{R}\overline{W}'\,\hat{R} \ .
\end{gathered} \tag{5.6}$$

Два соотношения (5.6) и третье равенство из (3.72) автоматически (см., например, [41,44]) дают уравнение отражения для произведения $(\overline{W}W)$:

$$\hat{R}\,(\overline{W}\,W)'\,\hat{R}\,(\overline{W}\,W)' = (\overline{W}\,W)'\,\hat{R}\,(\overline{W}\,W)'\,\hat{R} \ . \tag{5.7}$$

Наконец, коммутационные соотношения $(\overline{W}\,W)$ с генераторами алгебры (5.2), (5.3) выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}
\hat{R}\,(\overline{W}\,W)'\,\hat{R}\,\Im_L{}' = \Im_L{}'\,\hat{R}\,(\overline{W}\,W)'\,\hat{R} \ , \quad \hat{R}\,(\overline{W}\,W)'\,\hat{R}\,\Omega'_L = \Omega'_L\,\hat{R}\,(\overline{W}\,W)'\,\hat{R} \ , \\
(\overline{W}\,W)\,T = T'\,\hat{R}^{-1}\,(\overline{W}\,W)'\,\hat{R} \ , \quad (\overline{W}\,W)'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R} = \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,(\overline{W}\,W)' \ .
\end{gathered} \tag{5.8}$$

Теперь можно заметить, осуществляя сдвиг левоинвариантных 1-форм Ω_H (ср. с формулой (4.25) из разд. 4 для правоинвариантных 1-форм):

$$\Omega_H \to \tilde{\Omega}_H = \Omega_H - \frac{1}{[N]_q}\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega_H)\,I\,, \tag{5.9}$$

что при $\beta = -1/N$ алгебра (5.2), (5.3) переходит в алгебру с определяющими соотношениями:

$$\tilde{\Omega}_H\,T' = T'\,\hat{R}^{-1}\,\tilde{\Omega}'_H\,\hat{R}\,, \tag{5.10}$$

$$\hat{R}\,\tilde{\Omega}'_H\,\hat{R}^{-1}\tilde{\Omega}'_H + \tilde{\Omega}'_H\,\hat{R}^{-1}\,\tilde{\Omega}'_H\,\hat{R}^{-1} = \kappa_{1/q}\left(\hat{R}^{-1}(\tilde{\Omega}'_H)^2\hat{R}^{-1} + (\tilde{\Omega}'_H)^2\right)\,, \tag{5.11}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,L' = L'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\,,\quad \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,\tilde{\Omega}'_H = \tilde{\Omega}'_H\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\,, \\ \qquad\qquad q^{2/N}\,L\,T' = T'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\,, \end{array}\right. \tag{5.12}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Im_H\,T' = T'\,\hat{R}^{-1}\,\Im_H{}'\,\hat{R}\,,\quad \hat{R}\,\Im_H{}'\,\hat{R}\Im_H{}' + \Im_H{}'\,\hat{R}\,\Im_H{}'\,\hat{R}^{-1} = 0\,, \\ \hat{R}\,L'\,\hat{R}\,\Im_H{}' = \Im_H{}'\,\hat{R}\,L'\,\hat{R}\,,\quad \hat{R}\,\Im_H{}'\,\hat{R}\,\tilde{\Omega}'_H + \tilde{\Omega}'_H\,\hat{R}\,\Im_H{}'\,\hat{R} = \frac{(\kappa_{1/q})/\lambda + \hat{R}}{1-\kappa_{1/q}}\,. \end{array}\right. \tag{5.13}$$

Здесь

$$\kappa_{1/q} = \frac{-\lambda\,q^{-N}}{[N]_q - \lambda\,q^{-N}}\,,$$

и мы воспользовались формулами, аналогичными (4.4):

$$\overline{\mathrm{Tr}}_{q1}(\hat{R}^{\pm 1}E'\hat{R}^{\mp 1}) = \mathrm{Tr}_q(E)\,,\quad \overline{\mathrm{Tr}}_{q1}(\hat{R}^{\pm 1}) = q^{\pm N}\,. \tag{5.14}$$

Вместе с RTT-соотношениями алгебра (5.10)—(5.13) допускает частичную редукцию к случаю $SL_q(N)$ [18]:

$$\det_q(T) = 1,\ \ \overline{\mathrm{Tr}}_q(\tilde{\Omega}_H) = 0,\ \ \mathcal{D}\mathrm{et}_q(L) = 1\,,$$

где (см. [72])

$$\mathcal{D}\mathrm{et}_q(L) = \frac{1}{\det_q(T)}\det_q(T\,L)\,,\quad \mathcal{D}\mathrm{et}_q(L) = \mathcal{D}et_q(Y)\cdot\mathcal{D}\mathrm{et}_q(W)\,.$$

Факт такой редукции не является удивительным, т.к. подалгебра (5.10), (5.11) и (5.12), переписанная в терминах правоинвариантных генераторов, совпадает с дифференциальной алгеброй, предложенной в [18]. Для того чтобы осуществить полную редукцию к случаю $SL_q(N)$, необходимо наложить самосогласованным образом еще одно дополнительное условие на генераторы

$\Im_H$. Из соотношений (5.8) следует, что для алгебры (5.2), (5.3) можно построить дополнительный центральный элемент:

$$Z = \mathcal{D}\mathrm{et}_q\left((\overline{W}\,W)\right) \equiv \frac{1}{\det_q(T)}\det_q\left(T\,(\overline{W}\,W)\right)\ ,\quad Z = \mathcal{D}\mathrm{et}_q(\overline{W})\cdot\mathcal{D}\mathrm{et}_q(W)\ , \tag{5.15}$$

который, в силу выполнения тождества

$$\begin{aligned} \overline{W}\,W = W_H\,\overline{W}_H &= (1-\lambda\Im_H\Omega_H)(1-\lambda\Omega_H\Im_H) = \\ &= \frac{1}{1-\kappa_{1/q}} - \lambda[\tilde{\Omega}_H,\,\Im_H]_+ + \lambda^2\,(1-\kappa_{1/q})\,\Im_H\,\tilde{\Omega}_H^2\,\Im_H = \\ &= (1-\kappa_{1/q})\left(\frac{1}{1-\kappa_{1/q}} - \lambda\Im_H\tilde{\Omega}_H\right)\left(\frac{1}{1-\kappa_{1/q}} - \lambda\tilde{\Omega}_H\Im_H\right)\ , \end{aligned} \tag{5.16}$$

не зависит от генератора $\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega_H)$ и, соответственно, является центральным и для алгебры с определяющими соотношениями (5.10)—(5.13). Можно попытаться выбрать дополнительное условие на генераторы $\Im_H$, в случае $SL_q(N)$, в виде $Z=\mathrm{const}$. Однако не совсем ясно, достаточно ли этого условия для уменьшения на единицу числа генераторов $\Im_H$, т.к., например, в квазиклассическом пределе соотношение $Z=\mathrm{const}$ не приводит к содержательному условию на $\Im_H$.

Отметим, что рассмотрение чисто "фермионной" подалгебры $\mathcal{B}_L$ с генераторами $\{\Omega_L,\,\Im_L\}$, содержащейся в алгебре (5.2), (5.3), или подалгебры $\mathcal{B}_H$ с генераторами $\{\Omega_H,\,\Im_H\}$ (5.5) (определяющие соотношения для этой подалгебры получаются из определяющих соотношений для $\mathcal{B}_L$ заменой $\Omega_L\to\Im_H$, $\Im_L\to\Omega_H$), имеет также самостоятельный интерес, т.к. эти подалгебры могут интерпретироваться как q-деформации квантовых $b-c$-систем (систем БРСТ-переменных и их канонически сопряженных переменных на группе $GL_q(N)$). Отметим, что величина $(1-\overline{W}W)/\lambda$ в этом случае может однозначно интерпретироваться как квантовый аналог фермионного БРСТ-тока.

Как мы только что видели, в алгебре $\mathcal{B}_H$ можно "отцепить" генератор $\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega_H)$, положив его равным нулю (см. (5.10) - (5.13)). Совершенно аналогично в алгебре $\mathcal{B}_L$ можно "отцепить" генератор $\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Im_L)$. Так как генераторы алгебр $\mathcal{B}_L$ и $\mathcal{B}_H$ связаны обратимыми преобразованиями (5.5), то эти алгебры изоморфны, и возникает идея сформулировать алгебру $\mathcal{B}_L\simeq\mathcal{B}_H$ в терминах образующих $\{\Omega_H,\,\Im_L\}$, попытавшись затем "отцепить" генераторы $\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega_H)$ и $\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Im_L)$ одновременно. Действительно, определяющие соотношения для

$\mathcal{B}_L \simeq \mathcal{B}_H$ могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered}\hat R\, \Omega'_H\, \hat R^{-1} \Omega'_H + \Omega'_H\, \hat R^{-1}\, \Omega'_H\, \hat R^{-1} = 0\,,\\ \hat R\, \Im_L{}'\, \hat R^{-1} \Im_L{}' + \Im_L{}'\, \hat R^{-1}\, \Im_L{}'\, \hat R^{-1} = 0\,,\\ \Im_L{}'\, \hat R^{-1}\, \Omega'_H\, \hat R + \hat R^{-1}\, \Omega'_H\, \hat R\, \Im_L{}' = \hat R^{-1}\, (\tfrac{1}{\overline{W} W})'\,.\end{gathered} \tag{5.17}$$

Попытаемся теперь выделить из этой алгебры подалгебру с бесшпуровыми генераторами $\tilde\Omega_H$ (5.9) и $\tilde\Im_L$:

$$\tilde\Im_L = \Im_L - \frac{1}{[N]_q} \overline{\mathrm{Tr}}_q(\Im_L)\, I\,.$$

Для упрощения формул мы не будем писать индексы H и L у переменных $\tilde\Omega_H$ и $\tilde\Im_L$. После довольно утомительных вычислений получаем

$$\begin{gathered}\hat R\, \tilde\Omega'\, \hat R^{-1} \tilde\Omega' + \tilde\Omega'\, \hat R^{-1}\, \tilde\Omega'\, \hat R^{-1} = \kappa_{1/q} \left(\hat R^{-1} (\tilde\Omega')^2 \hat R^{-1} + (\tilde\Omega')^2\right)\,,\\ \hat R\, \tilde\Im'\, \hat R^{-1} \tilde\Im' + \tilde\Im'\, \hat R^{-1}\, \tilde\Im'\, \hat R^{-1} = \kappa_{1/q} \left(\hat R^{-1} (\tilde\Im')^2 \hat R^{-1} + (\tilde\Im')^2\right)\,,\\ \tilde\Im'\, \hat R^{-1}\, \tilde\Omega'\, \hat R + \hat R^{-1}\, \tilde\Omega'\, \hat R\, \tilde\Im' = \\ = R^{-1} \left(\mathcal{V}' + \frac{\kappa_{1/q}}{\lambda(1-\kappa_{1/q})} (\mathcal{V}'\, \hat R + \hat R\, \mathcal{V}')\right) - \frac{\kappa_{1/q}}{\lambda(1-\kappa_{1/q})} \frac{\overline{\mathrm{Tr}}_q(\mathcal{V})}{[N]_q}\,,\end{gathered} \tag{5.18}$$

где $\mathcal{V} \equiv \frac{1}{\overline{W} W}$. При выводе (5.18) мы учли соотношения, вытекающие из (5.17):

$$\begin{gathered}\Omega_H^2 = (1-\kappa_{1/q})\, \tilde\Omega^2\,, \quad \Im_L^2 = (1-\kappa_{1/q})\, \tilde\Im^2\,,\\ [\Im_L, \overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega_H)]_+ = q^{-N}\, \mathcal{V}\,, \quad [\Omega_H, \overline{\mathrm{Tr}}_q(\Im_L)]_+ = q^{-N}\, \mathcal{V}\,.\end{gathered} \tag{5.19}$$

Для того чтобы выяснить, является ли алгебра (5.18) действительно замкнутой подалгеброй в (5.17), необходимо проверить независимость операторов $\mathcal{V}$ и $\overline{W}W$ от $\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Im_L)$ и $\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega_H)$. Подставим определение для $\Im_H$ (5.5) в последнее выражение для $\overline{W}W$ из (5.16). В результате получаем

$$\begin{gathered}\overline{W} W = (1-\kappa_{1/q})\, (\frac{1}{1-\kappa_{1/q}} - \lambda \overline{W} W\, \tilde\Omega\, \Im_L)\, (\frac{1}{1-\kappa_{1/q}} - \lambda\, \Im_L\, \overline{W} W\, \tilde\Omega) = \\ = \frac{1}{1-\kappa_{1/q}} - \lambda [\overline{W} W\, \tilde\Omega,\, \Im_L]_+ + \lambda^2\, (1-\kappa_{1/q})^2\, \overline{W} W\, \tilde\Omega\, \tilde\Im^2\, \overline{W} W\, \tilde\Omega\,.\end{gathered} \tag{5.20}$$

Учтем теперь соотношения

$$[\overline{W} W,\, \overline{\mathrm{Tr}}_q(\Im_L)] = 0\,, \quad [\tilde\Omega,\, \overline{\mathrm{Tr}}_q(\Im_L)]_+ = q^{-N}\, \mathcal{V} - \frac{q^{-N}}{[N]_q} \overline{\mathrm{Tr}}_q(\mathcal{V})\,,$$

которые следуют из (5.8) и (5.19), тогда из (5.20) выводятся уравнения

$$\overline{W}W = \left(1 - \frac{\kappa_{1/q}}{(1-\kappa_{1/q})[N]_q} \overline{\mathrm{Tr}}_q(\frac{1}{\overline{W}W})\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\kappa_{1/q}}{1-\kappa_{1/q}} - \lambda[\overline{W}W\,\tilde{\Omega},\, \tilde{\Im}]_+ + \lambda^2\,(1-\kappa_{1/q})^2\,\overline{W}W\,\tilde{\Omega}\,\tilde{\Im}^2\,\overline{W}W\,\tilde{\Omega}\right) .$$

Эти уравнения решаются методом последовательных приближений и позволяют выразить $\overline{W}W$ только через N^2-1 переменных $\tilde{\Omega}$ и N^2-1 переменных $\tilde{\Im}$. Таким образом, соотношения (5.18) (отметим, что они не квадратичны) действительно являются определяющими соотношениями для замкнутой алгебры с образующими $\{\tilde{\Omega},\ \tilde{\Im}\}$, которую можно попытаться интерпретировать как алгебру дифференциальных форм и внутренних производных на группе $SL_q(N)$. Единственный вопрос, который остается неясным - выполняется ли для этой алгебры свойство ПБВ?

Несмотря на все остающиеся неясные моменты, изложенный метод получения $SL_q(N)$-дифференциальной подалгебры (5.10)—(5.12) и (5.18) из дифференциальной алгебры для $GL_q(N)$ позволяет надеяться на решение проблемы построения явного вида (типа (5.4)) оператора деформированного дифференциала, предложенного в [18], а также на прояснение хопфовой структуры этой подалгебры.

6. ТЕОРИЯ ВОРОНОВИЧА И R-МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД. ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ НА ГРУППАХ $SO_q(N)$ И $Sp_q(2n)$

В разд. 2, посвященном изложению теории Вороновича [16], было показано, что классификация всех биковариантных дифференциальных исчислений над АХ $\mathcal{A}$ сводится к классификации всех биковариантных бимодулей над $\mathcal{A}$, или, другими словами, к классификации всевозможных выборов функционалов $f_{ij} \in \mathcal{A}^*$ и элементов $\mathbf{r}_{ij} \in \mathcal{A}$. Функционалы f_{ij} и элементы $\mathbf{r}_{ij}$ должны удовлетворять определенным условиям (2.9), (2.12), (2.14) и (2.20), сформулированным в теореме 1, доказательство которой было воспроизведено в разд. 2 (см. также [16]).

Для случая квантовых групп $GL_q(N)$ $(SL_q(N))$, $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ классификация всех возможных ББ была проведена в работах [22, 73]. При этом ключевым является R-матричный подход к квантовым группам, сформулированный в [2]. Было доказано [22], что для данных квантовых групп существуют лишь восемь возможностей выбрать подходящие для дифференциального исчисления ББ, которые были обозначены как $\Gamma_i \otimes \Gamma_j^c$, $\Gamma_i^c \otimes \Gamma_j$ $(i, j = 1, 2)$. Эти ББ были разделены на две группы [22]: I) $(\Gamma_i \otimes \Gamma_i^c,\ \Gamma_i^c \otimes \Gamma_i)$ и

II) $(\Gamma_i \otimes \Gamma_j^c,\ \Gamma_i^c \otimes \Gamma_j,\ i \neq j)$. Можно показать, что все ББ внутри каждой из групп соответствуют аналогичным дифференциальным исчислениям. Поэтому мы возьмем в группе I ББ: $\Gamma_I = \Gamma_1^c \otimes \Gamma_1$, который соответствует выбору $\mathbf{r}$ и f в виде:

$$\mathrm{r}\Delta(\Omega^i_j) = \Omega^k_l \otimes \mathbf{r}^{li}_{kj} \equiv \Omega^k_l \otimes (T^{-1})^i_k T^l_j \,, \tag{6.1}$$

$$\Omega^i_j T^m_n = (f^{il}_{jk} \triangleright T^m_n)\Omega^k_l \equiv (L^{-i}_{\ \ k} S(L^{+l}_{\ \ j}) \triangleright T^m_n)\Omega^k_l \,. \tag{6.2}$$

Здесь элементы $\{\Omega^i_j\}$ (дифференциальные 1-формы) образуют левоинвариантный базис в Γ_I, $\{T^i_j\}$ – образующие алгебры $\mathcal{A}$ функций на квантовой группе и $\{L^{\pm i}_{\ \ j}\}$ – образующие дуальной алгебры $\mathcal{A}^*$ (см. [2]). Левое действие алгебры $\mathcal{A}^*$ на $\mathcal{A}$ задается соотношениями:

$$L_2^{\pm} \triangleright T_1 = T_1 < L_2^{\pm}, T_1 >= T_1 R^{\pm} \,,$$

$$S(L_2^{\pm}) \triangleright T_1 = T_1 < S(L_2^{\pm}), T_1 >= T_1 (R^{\pm})^{-1} \,,$$

где $R^+ = R_{12}$, $R^- = R_{21}^{-1}$. Согласно правилам, изложенным в разд. 2, объекты $\mathbf{r}$ и f из (6.1), (6.2) определяют для ББ Γ_I дифференциальную алгебру $\Gamma_I^\wedge$:

$$\hat{R}\, T\, T' = T\, T'\, \hat{R} \,, \tag{6.3}$$

$$\Omega\, T' = T'\, \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} \,, \tag{6.4}$$

$$\hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} \wedge \Omega' = \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega' - \Omega' \otimes_{\mathcal{A}} \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R}^{-1} \,, \tag{6.5}$$

причем формула (6.4) является прямым следствием соотношения (6.2). В наборе II мы возьмем ББ: $\Gamma_{II} = \Gamma_1^c \otimes \Gamma_2$, для которого элементы $\mathbf{r}$ совпадают с введенными в формуле (6.1), а в качестве функционалов f из (6.2) необходимо выбрать $f^{il}_{jk} = L^{-i}_{\ \ k} S(L^{-l}_{\ \ j})$. Тогда ББ Γ_{II} определяет дифференциальную алгебру $\Gamma_{II}^\wedge$:

$$\hat{R}\, T\, T' = T\, T'\, \hat{R} \,, \tag{6.6}$$

$$\Omega\, T' = T'\, \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R} \,, \tag{6.7}$$

$$\hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R} \wedge \Omega' = \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega' - \Omega' \otimes_{\mathcal{A}} \hat{R}^{-1}\, \Omega'\, \hat{R} \,. \tag{6.8}$$

Отметим, что соотношения (6.5) и (6.8) следуют из определения внешнего умножения (2.36), (2.39), которое в нашем случае записывается в виде

$$\Omega \wedge (T'\, \Omega'\, {T'}^{-1}) = \Omega \otimes_{\mathcal{A}} (T'\, \Omega'\, {T'}^{-1}) - (T'\, \Omega'\, {T'}^{-1}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega \,.$$

Все другие ББ, содержащиеся в наборах I и II, приводят к дифференциальным алгебрам со структурными соотношениями, которые могут быть получены из формул (6.3)—(6.8) тривиальными преобразованиями, в частности, заменой $R \to R^{-1}$. Исследование всех таких дифференциальных алгебр проводится абсолютно аналогично, поэтому мы остановимся на изучении только алгебр (6.3)—(6.8). Подчеркнем, однако, что имеется свобода в задании определяющих соотношений (6.3)—(6.8), которая связана с преобразованиями базиса ББ, например, с преобразованиями типа рассмотренных в (4.28).

Алгебры (6.3)—(6.8) по построению ковариантны относительно кодействия (6.1), соответствующего правым косдвигам на квантовой группе. Согласно теории Вороновича внешние произведения (6.5), (6.8) автоматически определяют ассоциативные внешние алгебры дифференциальных форм. Однако теория Вороновича не гарантирует выполнение свойства ПБВ для этих алгебр. Выполнение свойства ПБВ важно здесь, так как только в этом случае мы можем рассматривать алгебры (6.3)—(6.8) как результат квантовой деформации соответствующих классических дифференциальных комплексов.

Существует возможность (см. [16,22]) построить полупрямое произведение алгебр $\Gamma^{\wedge}_{I,II}$ с алгеброй $\mathcal{A}^*$, при этом кросскоммутационные соотношения имеют вид

$$L_2^{\pm}\, T_1 = T_1 \; < L_2^{\pm},\, T_1 > \; L_2^{\pm} = T_1\, R^{\pm}\, L_2^{\pm} \;, \qquad (6.9)$$

$$L_2^{\pm}\, \Omega_1 = < L_2^{\pm},\, T_1^{-1}\, \Omega_1\, T_1 > \; L_2^{\pm} = (R^{\pm})^{-1}\, \Omega_1\, R^{\pm}\, L_2^{\pm} \;. \qquad (6.10)$$

Соотношение (6.9), которое в абстрактных обозначениях записывается в виде

$$c\, a = a_{(1)} \; < c_{(1)},\, a_{(2)} > \; c_{(2)} \quad (a \in \mathcal{A},\; c \in \mathcal{A}^*) \;, \qquad (6.11)$$

где $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ и $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$, говорит о том, что кросспроизведение алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ образует дубль Гейзенберга [77] (частный случай "smash"-произведения, см., напр., [1]). Соотношение (6.10) является частным случаем более общей формулы

$$c\, \gamma = \gamma_{(1)} \; < c_{(1)},\, a_{(2)} > \; c_{(2)} \quad (a \in \mathcal{A},\; c \in \mathcal{A}^*,\; \gamma \in \Gamma)$$

($_{\Gamma}\Delta(\gamma) = \gamma_{(1)} \otimes a_{(2)}$), которая также представляет собой реликт некоторого специального кросспроизведения. Образующие $L = L^+\, S(L^-)$ для построенной расширенной дифференциальной алгебры можно связать с некоммутативными производными Ли (см. [52,53]), т.к. для них, например, выполняются (согласно (6.9) и (6.10)) соотношения (3.70).

Заметим теперь, что вся алгебра первого типа (6.3)—(6.5), (6.9), (6.10) эквивалентна дифференциальной алгебре на $GL_q(N)$ (3.31), (3.46), (3.47), (3.70), если $\hat{R}$ является $GL_q(N)$-R-матрицей, удовлетворяющей условию Гекке (3.7). Эта алгебра рассматривалась во многих работах [22,45,53,54,72,74] и представляет собой прекрасный пример, иллюстрирующий построение дифференциального исчисления на квантовых группах с помощью теории Вороновича. Более того, дифференциальная алгебра (6.3)—(6.5), (6.9), (6.10) на $GL_q(N)$ является алгеброй ПБВ-типа (см. [47,54] и разд. 3 данного обзора). Как было отмечено выше в разд. 4, биинвариантный элемент $\Omega^{(1)} = \overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega)$

может служить для алгебры $\Gamma_I^{\wedge}$ первого типа X-элементом Вороновича и, соответственно, генерировать внешний дифференциал для этой алгебры. При этом, используя формулы (6.2), можно получить явные выражения для некоммутативных векторных полей χ_l^k (см. [22], [72] и разд. 2):

$$d\,a \sim [\mathrm{Tr}(D^{-1}\,\Omega),\,a] =$$

$$= \left\{\left((D^{-1})_i^j\, L^{-i}_{\ k}\, S(L^{+l}_{\ j}) - (D^{-1})_k^l\, I\right) \triangleright a\right\} \Omega_l^k \equiv \{\chi_k^l \triangleright a\}\, \Omega_l^k \,.$$

Если мы примем эту идеологию и в случае ББ второго типа, то сразу же получим, что дифференциальную алгебру (6.6) – (6.8) необходимо удалить из рассмотрения (как это было сделано в [22]), так как, используя формулы (см. (5.14))

$$\overline{\mathrm{Tr}}_{q1}(R^{\pm 1}\,\Omega'\,R^{\mp 1}) = \Omega^{(1)} I_2 \,, \tag{6.12}$$

имеем, согласно (6.7) и (6.8), тривиальный дифференциал:

$$dT \sim [\Omega^{(1)},\, T] \equiv 0\,, \quad d\Omega \sim [\Omega^{(1)},\, \Omega]_+ \equiv 0\,. \tag{6.13}$$

Другими словами, элемент $\Omega^{(1)}$ является центральным для алгебры второго типа, и мы безболезненно можем его занулить.

Отметим, однако, что элемент X в теории Вороновича (см. разд. 2 и работу [16]) не обязательно должен совпадать с $\Omega^{(1)}$ и тем самым быть встроенным в рассматриваемый ББ. Он может быть внешним элементом для данного ББ. Кроме того, для специальных групп ($SL_q(N)$, $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$) естественно потребовать $\Omega^{(1)} = 0$, и это требование невозможно выполнить (см. [45, 53, 54]), например, при построении бековариантного дифференциального комплекса на группе $SL_q(N)$, исходя из дифференциального комплекса на $GL_q(N)$, основанного на ББ первого типа (см., тем не менее, разд. 5). Нерасширенный бековариантный дифференциальный комплекс на $SL_q(N)$ (для которого мы имеем $\Omega^{(1)} = 0$ и который определяется равенствами (6.3), (5.10) и (5.11)), обладающий свойством ПБВ и предложенный в [18], очевидно, использует ББ второго типа, что проявляется в совпадении равенств (6.7) и (5.10). Отличие заключается в том, что вместо определения внешнего умножения (6.8), вытекающего из теории Вороновича, выбирается внешняя алгебра (5.11), которая связана с ББ первого типа и которая обсуждалась в разд. 4 (см. (4.26), (4.27)). Важно, что нерасширенный бековариантный дифференциальный комплекс на $SL_q(N)$ (дифференциальный комплекс Фаддеева — Пятова) обладает естественным дифференциальным отображением с нарушенным правилом Лейбница (см. [18]), что автоматически запрещает генерирование этого дифференциала с помощью недеформированного (анти)коммутатора с каким бы то ни было элементом X.

Все вышесказанное указывает на то, что соотношения (6.13) являются скорее достоинством, чем недостатком ББ второго типа, и что дифференциальные алгебры (6.6) — (6.8) вполне имеют право на существование. Более того, они являются прекрасными кандидатами на роль бековариантных дифференциальных алгебр для специальных квантовых групп.

Тем не менее в данном обзоре мы сконцентрируемся на обсуждении ББ первого типа и покажем, следуя работе [75] (см. также [42]), что в случае групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ алгебра 1-форм (6.5) и, соответственно, вся дифференциальная алгебра (6.3)—(6.5) не являются алгебрами ПБВ типа (в отличие от случая группы $GL_q(N)$, где алгебра 1-форм (6.5) эквивалентна алгебре (3.47) и обладает свойством ПБВ).

Исследуем алгебру (6.3)—(6.5), соответствующую группам $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$. В этом случае R-матрица не удовлетворяет условию Гекке (3.7), а подчиняется кубическому характеристическому уравнению [2] (см. также [1]):

$$\hat{R} = \hat{R}^{-1} + \lambda - \lambda K\ , \quad K \equiv -\frac{1}{\lambda\nu}(\hat{R}^2 - \lambda\hat{R} - 1)\ , \tag{6.14}$$

где $\nu = \epsilon q^{\epsilon - N}$ — синглетное собственное значение $\hat{R}$-матрицы, а $\epsilon = +1$ $(SO_q(N))$ и $\epsilon = -1$ $(Sp_q(2n))$.

В работах [76, 78] было показано (и это очевидным образом следует из (6.5)), что алгебра дифференциальных 1-форм на группах $SO_q(N)$, $Sp_q(N)$ определяется соотношениями

$$X^{(\pm\pm)} \equiv \mathbf{P}^{\pm}\Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'\mathbf{P}^{\pm} = 0\ , \quad X^{(00)} \equiv \mathbf{P}^{0}\Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'\mathbf{P}^{0} = 0 \tag{6.15}$$

(знак внешнего умножения мы, как всегда, опускаем). Определение проекторов дано в [2] (см. также [1]):

$$\mathbf{P}^{\pm} = \frac{1}{q + q^{-1}}(\pm\hat{R} + q^{\mp 1}I + \mu_{\pm}K)\ , \quad \mu_{\pm} = -\frac{q^{\mp 1} \pm \nu}{\mu}\ , \tag{6.16}$$

$$\mathbf{P}^{0} = \mu^{-1}K\ , \quad \mu = (1 + \epsilon[N - \epsilon]_q) = 1 + \frac{\nu^{-1} - \nu}{\lambda}\ .$$

Вычисляя квантовый след по первому пространству от уравнения (6.4) и используя характеристическое соотношение (6.14), выводим

$$[T',\, \Omega^{(1)}] = \lambda T'(\epsilon\nu\Omega' - \overline{\Omega'})\ , \tag{6.17}$$

где мы учли равенства $\overline{\mathrm{Tr}}_q(\hat{R}^{\pm 1}) = q^{\pm(N-\epsilon)}$ и ввели для удобства операцию линейного преобразования базиса в пространстве 1-форм:

$$\overline{\Omega'} = \overline{\mathrm{Tr}}_{q1}(\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,K) = \overline{\mathrm{Tr}}_{q1}(K\,\Omega'\,\hat{R}^{-1})\ . \tag{6.18}$$

Полезно отметить, что повторное применение этой операции приводит к соотношению

$$\overline{\overline{\Omega}} = \Omega + \epsilon\,\lambda\,(\frac{1}{\nu}\,\Omega^{(1)} - \overline{\Omega})\ ,$$

при выводе которого мы воспользовались свойством

$$K\,\overline{\Omega'} = \epsilon\,K\,\Omega'\,\hat{R}^{-1}\ ,\quad \overline{\Omega'}\,K = \epsilon\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,K\ . \tag{6.19}$$

Подробное изложение технологии, необходимой для вывода соотношений (6.17) — (6.19) и некоторых формул, используемых ниже, можно найти в [1].

Свяжем, как это обычно делается, X-элемент Вороновича с коинвариантом $\Omega^{(1)}$. Тогда естественное определение (см. (6.17)) действия внешнего дифференциала на T выглядит следующим образом:

$$dT \equiv -\frac{1}{\lambda}[\Omega^{(1)},\,T] = T(\epsilon\nu\Omega - \overline{\Omega})\ ,$$

и, следовательно, для дифференциальных 1-форм мы должны принять аналогичное соглашение:

$$d\Omega \equiv -\frac{1}{\lambda}[\Omega^{(1)},\,\Omega]_+\ . \tag{6.20}$$

Заметим теперь, что, комбинируя соотношения (6.15) в виде

$$qX^{(++)} + q^{-1}X^{(--)} - \frac{1+\nu^2}{(q+q^{-1})\mu^2}X^{(00)}\ ,$$

их можно переписать единым образом в удобной форме:

$$(\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1} + \Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega') - \frac{1}{\mu}(K\,\Omega'\hat{R}^{-1}\,\Omega' + \Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,K) - \tag{6.21}$$

$$-\frac{1}{\nu\,\mu}(K\,\Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1} + \hat{R}^{-1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,K) = 0\ ,$$

где мы использовали равенства

$$\frac{\mu_+ + \mu_-}{q+q^{-1}} = -\frac{1}{\mu}\ ,\quad \frac{q\mu_+ - q^{-1}\mu_-}{q+q^{-1}} = -\frac{\nu}{\mu}\ ,\quad \frac{q\mu_+^2 + q^{-1}\mu_-^2}{q+q^{-1}} = \frac{1+\nu^2}{\mu^2}\ .$$

Уравнения (6.15) очевидным образом выделяются из (6.21) действием проекторов. Умножая (6.21) на $\hat{R}$ справа и вычисляя $\overline{\mathrm{Tr}}_{q1}$ по первому матричному пространству, получаем коммутационные соотношения для генераторов Ω^i_j с коинвариантным элементом $\Omega^{(1)}$:

$$[\Omega^{(1)},\,\Omega']_+ = \lambda\,\epsilon\,\nu\,{\Omega'}^2 + \frac{\nu}{\mu}(\overline{\Omega'}\,\Omega' + \Omega'\,\overline{\Omega'}) + \frac{\epsilon}{\mu}\,(\overline{\overline{\Omega}'\,\Omega'} + \overline{\Omega'\,\overline{\Omega}'}) = -\lambda d\Omega'\ . \tag{6.22}$$

которые задают действие дифференциала на левоинвариантные 1-формы согласно определению (6.20). Заметим, что, вычисляя $\overline{\mathrm{Tr}}_{q2}$ от равенства (6.22) и применяя $\overline{\mathrm{Tr}}_{q1}\overline{\mathrm{Tr}}_{q2}$ к (6.21), мы получаем (с учетом последнего из соотношений (6.15)) систему уравнений

$$2\,(\Omega^{(1)})^2 = \lambda q^{\epsilon-N}\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega^2)\ ,$$

$$-\lambda(\Omega^{(1)})^2 + q^{\epsilon-N}(2+\lambda^2)\overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega^2) = 0\ ,$$

которая аналогична системе уравнений (4.6), (4.8), для группы $GL_q(N)$. Таким образом, в случае групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ мы имеем те же дополнительные условия на дифференциальные 1-формы ($q + q^{-1} \neq 0$):

$$(\Omega^{(1)})^2 = 0\ ,\quad \overline{\mathrm{Tr}}_q(\Omega^2) = 0\ , \tag{6.23}$$

что и для группы $GL_q(N)$.

Зная ранги проекторов, можно подсчитать число независимых соотношений, содержащихся в (6.21). Оказывается, что число соотношений (6.21) равно $\frac{N^2(N^2+1)}{2} + 2 - N(N+\epsilon)$ и недостаточно для того, чтобы упорядочить произвольный моном, построенный из независимых дифференциальных 1-форм Ω^i_j, число которых предполагается равным N^2, т.е. алгебра (6.21) не является алгеброй ПБВ-типа. В работе [76] для решения этой проблемы, в случае квантовых групп $SO_q(N)$ ($\epsilon = +1$), было предложено добавить $N(N+1) - 2$ дополнительных соотношений:

$$K\Omega'\hat{R}^{-1}\Omega'\mathbf{P}^{+} = \mathbf{P}^{+}\Omega'\hat{R}^{-1}\Omega' K = 0\ . \tag{6.24}$$

Заметим, что (6.24) можно переписать с учетом (6.15), (6.18) и (6.19) в виде

$$\overline{\overline{\Omega}\Omega} = -q\,\overline{\Omega}\Omega\ ,\quad \overline{\Omega\overline{\Omega}} = -q\,\Omega\overline{\Omega}\ .$$

Теперь суммарное число соотношений (6.24) и равенств (6.21) становится равным $\frac{N^2(N^2+1)}{2}$ и оказывается достаточным для перестановки двух произвольных элементов Ω^i_j и, соответственно, для упорядочения любого монома. Однако возникает другая проблема, которая тем не менее не дает возможности утверждать, что алгебра со структурными соотношениями (6.21) и (6.24) является алгеброй ПБВ-типа, а именно: для этой алгебры упорядочение мономов не является однозначной процедурой. Проще всего продемонстрировать это проверкой свойств дифференциала (6.22), соответствующего алгебре (6.21) и (6.24). Оказывается, что дифференциал (6.22) (с учетом (6.24)) не удовлетворяет аксиоме $d^2 = 0$ и правилу Лейбница. Напомним, что теория Вороновича свободна от этих недостатков, источником которых является несовместимость определения дифференциала по Вороновичу и постулирования дополнительных соотношений (6.24). В свою очередь, это является отражением того факта, что явный вид антикоммутатора (6.22) (с учетом (6.24)) не удовлетворяет тождеству Якоби, по крайней мере, если мы не будем требовать новых соотношений (не имеющих аналогов в классическом случае) на мономы третьей степени по Ω. Это и есть указание на то, что для алгебры (6.21) и (6.24) не выполняется свойство ПБВ.

Проверим отсутствие аксиомы $d^2 = 0$. Действительно, соотношения (6.24) и (6.21) можно записать единым образом:

$$(\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,\hat{R}^{-1} + \Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega') - \frac{\mu_-}{\nu}(K\,\Omega'\hat{R}^{-1}\,\Omega' + \Omega'\,\hat{R}^{-1}\,\Omega'\,K) = 0\,. \tag{6.25}$$

Аналог соотношения (6.22) в этом случае имеет вид

$$-\lambda\,d\Omega = [\Omega^{(1)},\,\Omega]_+ = \lambda\nu\,\Omega^2 + \mu_-\left(\overline{\Omega}\Omega + \Omega\overline{\Omega}\right)\,. \tag{6.26}$$

Вычисляя еще один коммутатор с $\Omega^{(1)}$ от соотношения (6.26), получаем

$$\lambda^2 d^2\Omega = \left[\Omega^{(1)},\,[\Omega^{(1)},\,\Omega]_+\right] = \mu_-^2[\Omega,\,\overline{\Omega}^2] + \lambda\nu\mu_-[\overline{\Omega^2},\,\Omega] + q\mu_-^2[\Omega^2,\,\overline{\Omega}]\,.$$

Последняя часть этого равенства в общем случае не равна нулю (в чем можно легко убедиться, вычислив ее квазиклассический предел) и, следовательно, не выполняется условие $d^2 = 0$. С учетом равенства $(\Omega^{(1)})^2 = 0$ это означает, что антикоммутатор из (6.26) не удовлетворяет тождеству Якоби, т.е. мы имеем

$$2\,[\Omega^{(1)},\,[\Omega^{(1)},\,\Omega]_+] \neq [[\Omega^{(1)},\,\Omega^{(1)}]_+,\,\Omega]\,.$$

Это и демонстрирует отсутствие однозначности упорядочения мономов в алгебре (6.25). Более того, как показано в [75], вообще не существует биковариантных квадратичных скобок $\{\Omega_1,\,\Omega_2\}$ на SO и Sp, которые удовлетворяли бы тождеству Якоби.

Итак, мы видим, что алгебра первого типа (6.5) (в случае групп $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$) обладает некоторыми неудовлетворительными свойствами, которые не позволяют однозначно связать ее с алгеброй дифференциальных форм на группах $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$. Прежде всего, размерность пространства 1-форм в данной алгебре больше, чем размерность пространства 1-форм в классическом случае (по крайней мере, $\Omega^{(1)} \neq 0$). Кроме того, эта алгебра, являясь ассоциативной, тем не менее не является алгеброй ПБВ-типа. Это может привести к тому, что ряд Пуанкаре для данной алгебры вообще не будет ограничен, и мы будем иметь в наличии дифференциальные формы произвольно высокой степени. С другой стороны, отсутствие свойства ПБВ означает, что мы не можем получить $\Gamma_I^\wedge$ путем квантования некоторой ли-пуассоновской структуры на пространстве классических 1-форм (см. [75]).

Попытка [76] "улучшить" эту алгебру, налагая дополнительные условия (6.24), оказывается также неудовлетворительной. Вопрос о том, возможно ли определение (например, с использованием ББ второго типа) биковариантной дифференциальной алгебры на группах $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$, имеющей правильное количество 1-форм и удовлетворяющей свойству ПБВ (эти требования гарантируют совпадение классического и квантового рядов Пуанкаре), является на сегодняшний день открытым. Отметим также, что неисследованной остается возможность построения квадратичных биковариантных коммутационных соотношений для Ω (не имеющих квазиклассического предела), исходя из рассмотрения всевозможных неприводимых копредставлений, на которые расщепляется прямое произведение присоединенных копредставлений. Эти неприводимые представления можно выделить из ковариантных комбинаций $\mathbf{P}^{\alpha_1}\,\Omega^{(\alpha_2)}\,\mathbf{P}^{\alpha_3}\,\Omega^{(\alpha_4)}\,\mathbf{P}^{\alpha_5}$, где $\alpha_i = 0, \pm$ и $\Omega^{(\alpha)} \equiv \epsilon\,\mathrm{Tr}_{q2}(K\,\Omega\,\mathbf{P}^{\alpha})$ (часть этих комбинаций являются линейно зависимыми).

В заключение отметим, что случай биковариантного дифференциального исчисления на группах $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$, классические аналоги которых имеют алгебры Ли, изоморфные алгебрам Ли линейных групп (типа $sp(2) \sim so(3) \sim sl(2)$), требует специального рассмотрения. Подчеркнем также, что, в отличие от линейных квантовых групп (см., например, [79]), для ортогональных и симплектических квантовых групп не предпринимались попытки построения небиковариантных дифференциальных исчислений.

7. ДОПОЛНЕНИЕ

Здесь мы сделаем ряд необходимых дополнений к первой части обзора, опубликованной в [1].

1. Еще раз об универсальных R-матрицах. Приведем доказательство (см. [80]) соотношений для универсальной $\mathcal{R}$-матрицы

$$(\epsilon \otimes id)\mathcal{R} = (id \otimes \epsilon)\mathcal{R} = I \;, \tag{7.1}$$

$$(S \otimes id)\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1} \;, \quad (id \otimes S^{-1})\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1} \;, \tag{7.2}$$

которые упоминались в первой части обзора (см. формулы (2.29) [1]) без доказательства. Соотношения (7.1) легко получаются, если применить $(\epsilon \otimes id \otimes id)$ и $(id \otimes id \otimes \epsilon)$ соответственно к

$$(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \;, \quad (id \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \;. \tag{7.3}$$

Далее, мы докажем первое из соотношений (7.2) (второе соотношение доказывается аналогично). Рассмотрим выражение $\mathcal{R}\cdot(S \otimes id)\,\mathcal{R}$ и учтем аксиомы

АХ:

$$m(S \otimes id)\Delta = \mathbf{i} \cdot \epsilon = m(id \otimes S)\Delta \Rightarrow$$
$$S(a_{(1)})\, a_{(2)} = \epsilon(a) \cdot I = a_{(1)}\, S(a_{(2)}) \quad (\forall a \in \mathcal{A}) \tag{7.4}$$

и первую из формул (7.3). Тогда мы получаем искомое равенство:

$$\mathcal{R}_{23} \cdot (id \otimes S \otimes id)\, \mathcal{R}_{23} = (m_{12} \otimes id)\mathcal{R}_{13}(id \otimes S \otimes id)\mathcal{R}_{23} =$$
$$= (m_{12} \otimes id)\, (id \otimes S \otimes id)\mathcal{R}_{13}\, \mathcal{R}_{23} = (\mathbf{i} \cdot \epsilon \otimes id)\, \mathcal{R} = I\ .$$

2. Ленточные алгебры Хопфа. Следует добавить еще одно важное замечание в конец второго раздела [1].

Замечание 3. Рассмотрим квазитреугольную алгебру Хопфа $\mathcal{A}$ и представим универсальную R-матрицу в виде $\mathcal{R} = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$, где α_i, $\beta_j \in \mathcal{A}$. Положим $u = \sum_i S(\beta_i)\, \alpha_i$, тогда справедливо

Предложение 6 *(см. [80]).*

1) Для любого $a \in \mathcal{A}$ выполняется соотношение

$$S^2(a)\, u = u\, a\ . \tag{7.5}$$

2) Элемент u обратим, причем $u^{-1} = \sum_i S^{-1}(\delta_i)\, \gamma_i$, где $\sum_i \gamma_i \otimes \delta_i = \mathcal{R}^{-1}$.

Доказательство.

1) Из соотношения $\mathcal{R}\, \Delta(a) = \Delta'(a)\, \mathcal{R}$ следует, что $\forall a \in \mathcal{A}$ (знаки сумм опущены):

$$\alpha_i\, a_{(1)} \otimes \beta_i\, a_{(2)} \otimes a_{(3)} = a_{(2)}\, \alpha_i \otimes a_{(1)}\, \beta_i \otimes a_{(3)}\ .$$

Отсюда получаем

$$S^2(a_{(3)})\, S(\beta_i\, a_{(2)})\, \alpha_i a_{(1)} = S^2(a_{(3)})\, S(a_{(1)}\, \beta_i)\, a_{(2)}\alpha_i\ ,$$

или

$$S^2(a_{(3)})\, S(a_{(2)})\, u\, a_{(1)} = S^2(a_{(3)})\, S(\beta_i)\, S(a_{(1)})\, a_{(2)}\alpha_i\ .$$

Применяя к этому равенству последние тождества из (7.4) и учитывая $\epsilon(S(a)) = \epsilon(a)$, получаем (7.5).

2) Положим $\nu = \sum_j S^{-1}(\delta_j)\, \gamma_j$. Тогда

$$u\, \nu = \sum_j u\, S^{-1}(\delta_j)\, \gamma_j = \sum_j S(\delta_j)\, u\, \gamma_j = \sum_{i,j} S(\beta_i\, \delta_j)\, \alpha_i\, \gamma_j\ .$$

Так как $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}^{-1} = \sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j \otimes \beta_i \delta_j = 1$, то $u\, \nu = 1$. Из последнего равенства и из (7.5) следует $S^2(\nu)\, u = 1$, следовательно, элемент u обладает как правым, так и левым обратным. Таким образом, элемент u обратим, и мы можем переписать (7.5) в виде

$$S^2(a) = u\,a\,u^{-1}\ . \tag{7.6}$$

Это соотношение, в частности, показывает, что взятие антипода не является инволютивной операцией. В работе [80] было отмечено, что

$$\Delta(u) = (\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{12})^{-1}(u\otimes u) = (u\otimes u)(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{12})^{-1}\ .$$

Кроме того, было показано, что соотношения (7.6) выполняются и в случае, если мы в качестве элемента $u \equiv u_1$ выберем любой из следующих трех элементов:

$$u_2 = \sum_i S(\gamma_i)\,\delta_i\ ,\ \ u_3 = \sum_i \beta_i\,S^{-1}(\alpha_i)\ ,\ \ u_4 = \sum_i \gamma_i\,S^{-1}(\delta_i)\ .$$

Пользуясь результатами предложения 6, можно заметить, что $S(u)^{-1} = u_2$, $S(u_3)^{-1} = u_4$. Оказывается также, что все u_i коммутируют между собой, а элементы $u_i u_j^{-1} = u_j^{-1}u_i$ являются центральными в $\mathcal{A}$ (см. [80]). Следовательно, центральным является и элемент $u\,S(u) = u_1\,u_2^{-1}$. На основе этих замечаний вводится важное понятие ленточной алгебры Хопфа (см. [81]).

Определение. *Рассмотрим квазитреугольную АХ* $(\mathcal{A},\ \mathcal{R})$. *Тогда тройка* $(\mathcal{A},\ \mathcal{R},\ v)$ *называется ленточной АХ, если* v *- центральный элемент в* $\mathcal{A}$ *и*

$$v^2 = u\,S(u)\ ,\ \ S(v) = v\ ,\ \ \epsilon(v) = 1\ ,$$

$$\Delta(v) = (\mathcal{R}_{21}\,\mathcal{R}_{12})^{-1}\,(v\otimes v)\ .$$

Для каждой квазитреугольной АХ $\mathcal{A}$ можно определить $\mathcal{A}$-раскрашенные ленточные графы [81]. Если же $\mathcal{A}$ является, кроме того, ленточной АХ, то для каждого $\mathcal{A}$-раскрашенного ленточного графа можно определить структуру, которая обобщает инвариантные полиномы Джонса, связанные с инвариантами узлов (см. [57,81]).

3. Аналог картановских элементов для RTT-алгебр. Пункт 3.1. из первой части обзора [1] необходимо дополнить следующим замечанием о RTT-алгебрах, а именно: для алгебры $\mathcal{A}$ с определяющими соотношениями (3.31), где произвольная невырожденная числовая матрица $\hat{R} \in \mathrm{Mat}(N)\otimes\mathrm{Mat}(N)$ является решением уравнения Янга — Бакстера (3.4), можно построить [83] набор из N коммутирующих между собой элементов $(1 \le k \le N)$:

$$\begin{aligned} Q_k &= \mathrm{Tr}_{q1}\ldots\mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{k-1,k}\,\hat{R}_{k-2,k-1}\cdots\hat{R}_{12}\,T_1\,T_2\cdots T_k) = \\ &= \mathrm{Tr}_{q1}\ldots\mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{1,2}\,\hat{R}_{2,3}\cdots\hat{R}_{k-1,k}\,T_1\,T_2\cdots T_k)\ . \end{aligned} \tag{7.7}$$

Здесь мы воспользовались стандартными обозначениями (см. [2,57], а также [1]):

$$\mathrm{Tr}_q(X) \equiv \sum_{i,j=1}^{N} D^i_j X^j_i \ , \quad D_1 \equiv \mathrm{Tr}_2\left(P_{12}\left((R^{t_1}_{12})^{-1}\right)^{t_1}\right) \ . \tag{7.8}$$

Переменные (7.7) можно рассматривать как аналоги картановских элементов для RTT-алгебр. Второе равенство в (7.7) доказывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}_{q1}\dots\mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{1,2}\cdots\hat{R}_{k-1,k}\,T_1\cdots T_k) = \\ = \mathrm{Tr}_{q1}\dots\mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{k-1,k}\,T_1\cdots T_k\,\hat{R}_{1,2}\cdots\hat{R}_{k-2,k-1}) = \\ = \mathrm{Tr}_{q1}\dots\mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{1,2}\cdots\hat{R}_{k-3,k-2}\,\hat{R}_{k-1,k}\,\hat{R}_{k-2,k-1}\,T_1\cdots T_k\,) = \dots = \\ = \mathrm{Tr}_{q1}\dots\mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{k-1,k}\,\hat{R}_{k-2,k-1}\cdots\hat{R}_{12}\,T_1\cdots T_k)\ .\end{gathered} \tag{7.9}$$

Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является АХ,и пусть дуальная к ней алгебра $\mathcal{A}^*$ с генераторами $(L^{\pm})^i_j$ (см. [2]) является квазитреугольной АХ. Введем обозначение $\mathcal{R} \in \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*$ для универсальной R-матрицы. Тогда наиболее простой метод, демонстрирующий коммутативность всех элементов Q_k, основывается на том, что имеется (см., например, [57,74]) невырожденное отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}^*$ следующего вида:

$$\begin{gathered}< \mathcal{R}_{21}\,,\,T^i_j \otimes id >= (L^+)^i_j\ , \\ < \mathcal{R}_{12}\,,\,T^i_j \otimes id >= S((L^-)^i_j)\ , \\ < \mathcal{R}_{12}\,,\,S(T^i_j) \otimes id >= (L^-)^i_j\ .\end{gathered} \tag{7.10}$$

В действительности мы будем использовать несколько иное линейное отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}^*$ [57,74,80,82]:

$$< \mathcal{R}_{21}\,\mathcal{R}_{12}\,,\,id \otimes a >= \alpha \quad (a \in \mathcal{A}\,,\alpha \in \mathcal{A}^*)\ , \tag{7.11}$$

которое полностью определяется формулами (7.10). Ограничимся достаточно общим случаем квазитреугольных АХ $\mathcal{A}^*$, для которых отображение (7.11) является обратимым (такие АХ называются факторизуемыми [82]). Пользуясь соотношениями (7.10) и тождеством $\mathrm{Tr}_{q2}(\hat{R}_{12}) = I_1$ [1], можно прямым вычислением показать [84], что

$$< \mathcal{R}_{21}\,\mathcal{R}_{12}\,,\,id \otimes Q_k(T) >= \mathrm{Tr}_q(L^k)\ , \tag{7.12}$$

где $L \equiv S(L^-)\,L^+$. Известно, что элементы $\mathrm{Tr}_q(L^k)$ образуют центр в алгебре $\mathcal{A}^*$ (см., например, [1,2]). Пользуясь этим фактом, мы получаем равенство

$$< \mathcal{R}_{21}\,\mathcal{R}_{12}\,,\,id \otimes [Q_k(T),\,Q_n(T)] >= [\mathrm{Tr}_q(L^k),\,\mathrm{Tr}_q(L^n)] = 0\ ,$$

которое эквивалентно (для факторизуемых АХ $\mathcal{A}^*$) искомому тождеству

$$[Q_k(T),\, Q_n(T)] = 0\ .$$

Было бы интересно исследовать расширение отображения (7.11), которое связало бы дифференциальный комплекс (3.54) с дифференциальным расширением $GL_q(N)$- алгебры уравнения отражения [40,44]:

$$\hat{R}\,L\,\hat{R}\,L = L\,\hat{R}\,L\hat{R}\ ,\quad \hat{R}\,dL\,\hat{R}\,L = L\,\hat{R}dL\,\hat{R}^{-1}\ ,\quad \hat{R}\,dL\,\hat{R}\,dL = -dL\,\hat{R}\,dL\,\hat{R}^{-1}\ .$$

4. Аффинные алгебры кос. Определение. *Аффинной алгеброй кос* $\hat{B}_N$ *будем называть ассоциативную алгебру (над полем комплексных чисел) с единицей, обратимыми генераторами* σ_i $(i = 1, \ldots, N-1)$, y_j $(j = 1, \ldots, N)$ *и определяющими соотношениями*

$$\begin{aligned}
&\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i = \sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}\ ,\\
&\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i\quad |i-j| > 1\ ,\\
&y_j\,y_k = y_k\,y_j\ ,\\
&y_j\,\sigma_i = \sigma_i\,y_j\quad j \neq i, i+1\ ,\\
&\sigma_i\,y_i\,\sigma_i = y_{i+1}\ .
\end{aligned}\tag{7.13}$$

Будем предполагать также, что генераторы алгебры кос σ_i $\forall i$ удовлетворяют одному и тому же характеристическому уравнению

$$\prod_{\alpha=1}^{M} (\sigma_i - \nu_\alpha) = 0\ ,\tag{7.14}$$

где $\nu_\alpha \neq 0$ – собственные значения σ_i и $\nu_\alpha \neq \nu_\beta$, если $\alpha \neq \beta$. Перенормировкой генераторов σ_i, y_j всегда можно зафиксировать первые два собственных значения так, что $\nu_1 = q$ и $\nu_2 = -q^{-1}$. Если $M = 2$ и (7.14) имеет вид

$$(\sigma_i - q)\,(\sigma_i + q^{-1}) = 0\ ,$$

то $\hat{B}_N \equiv \hat{H}_N(q)$ называется аффинной алгеброй Гекке. Для алгебры $\hat{H}_N(q)$ элементы $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i\,y_i - y_i\,\sigma_i$ также образуют алгебру кос. Если же $M = 3$ и для (7.14) имеем

$$(\sigma_i - q)\,(\sigma_i + q^{-1})\,(\sigma_i - \nu) = 0\ ,$$

то соответствующая алгебра $\hat{B}_N$ называется аффинной алгеброй Бирмана — Венцеля.

В качестве простой реализации алгебры $\hat{B}_N$ (7.13) можно предложить следующую конструкцию (на нее автору указал П.Н.Пятов). Рассмотрим алгебру уравнения отражения

$$L\hat{R}L\hat{R} = \hat{R}L\hat{R}L \tag{7.15}$$

с невырожденной R-матрицей ($R^{t_1}_{12}$ также предполагается невырожденной), для которой выполняется характеристическое уравнение, совпадающее с (7.14):

$$(\hat{R} - q)(\hat{R} + q^{-1}) \prod_{\alpha=3}^{M} (\hat{R} - \nu_\alpha) = 0 \,. \tag{7.16}$$

Тогда легко проверить, что операторы

$$\sigma_i = \hat{R}_i = \underbrace{I \otimes \ldots \otimes I}_{i-1} \otimes \hat{R} \otimes \underbrace{I \otimes \ldots \otimes I}_{N-i-1} \,, \tag{7.17}$$

$$y_i = \hat{R}_{i-1} \cdots \hat{R}_1 \, L \, \hat{R}_1 \cdots \hat{R}_{i-1} \,, \tag{7.18}$$

удовлетворяют соотношениям (7.13) и (7.14). Заметим, что (7.16) всегда можно преобразовать к виду

$$\hat{R} = \hat{R}^{-1} + \lambda - \lambda K \,, \tag{7.19}$$

где $\lambda = q - q^{-1}$ и K — некоторый полином $(M-1)$-й степени по $\hat{R}$ (для алгебры Гекке имеем $K = 0$). Отметим, что для предложенной реализации можно ввести еще один (кроме (7.18)) набор коммутирующих переменных

$$I_j = \Big(y_j - \mathrm{Tr}_{q,j+1}(\hat{R}_j \, y_j \, K_j)\Big) \,, \tag{7.20}$$

где $\mathrm{Tr}_{q,j+1}(.)$ — квантовый след (7.8) по $(j+1)$-му пространству. Для данного определения квантового следа справедлива формула $\mathrm{Tr}_{q2}(\hat{R}) = I_1$ (см. [1]). Кроме соотношений $[I_i, I_j] = 0$, набор (7.20) интересен еще тем, что имеет простые коммутационные соотношения с $\hat{R}_i$:

$$\begin{aligned} &\hat{R}_i \, (I_i + I_{i+1}) = (I_i + I_{i+1}) \, \hat{R}_i \,, \\ &\hat{R}_i \, I_j = I_j \, \hat{R}_i \quad j \neq i, i+1 \,. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Рассмотрим теперь аффинную алгебру Бирмана — Венцеля, реализованную согласно (7.17), (7.18). Переменные (7.20) для этой алгебры переписываются в виде

$$
\begin{aligned}
&I_1 = (L - \overline{L}) \,, \\
&I_2 = (\hat{R}_1 \, L \, \hat{R}_1 - \hat{R}_1^{-1} \, \overline{L} \, \hat{R}_1^{-1}) \,, \\
&I_3 = \left(\hat{R}_2 \, \hat{R}_1 \, L \, \hat{R}_1 \, \hat{R}_2 - \hat{R}_2^{-1} \, \hat{R}_1^{-1} \, \overline{L} \, \hat{R}_1^{-1} \, \hat{R}_2^{-1}\right) \,, \\
&I_4 = \ldots \,,
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

где

$$\overline{L} \equiv \mathrm{Tr}_{q2}(\hat{R} \, L \, K) = \mathrm{Tr}_{q2}(K \, L \, \hat{R}) \,. \tag{7.23}$$

Для переменных (7.22) можно получить дополнительные равенства

$$(I_i + I_{i+1}) \, K_i = 0 = K_i \, (I_i + I_{i+1}) \,,$$

которые усиливают соотношения (7.21). Операторы L и $\overline{L}$, кроме (7.15), подчиняются коммутационным правилам

$$
\begin{gathered}
L \, \hat{R}^{-1} \, \overline{L} \, \hat{R}^{-1} = \hat{R}^{-1} \, \overline{L} \, \hat{R}^{-1} \, L \,, \quad \hat{R} \, L \, \hat{R} \, \overline{L} = \overline{L} \, \hat{R} \, L \, \hat{R} \,, \\
\overline{L} \, \hat{R}^{-1} \, \overline{L} \, \hat{R}^{-1} = \hat{R}^{-1} \, \overline{L} \, \hat{R}^{-1} \, \overline{L} \,,
\end{gathered}
\tag{7.24}
$$

откуда, в частности, следует тождество $\overline{L} \, L = L \, \overline{L}$. Если реализовать L в виде $L = S(L^-) \, L^+$, то из (7.23) легко вывести

$$\overline{L} \, L = L \, \overline{L} = I \quad \text{т.е.} \quad \overline{L} = L^{-1} \,,$$

после чего соотношения (7.24) становятся очевидными следствиями (7.15).

По-видимому, аффинные алгебры кос (7.13), через соответствующие представления операторов Дункля, будут связаны (см., например, [85]) с квантовой проблемой многих тел (имеются в виду различные обобщения интегрируемых квантовых моделей типа Калоджеро, Руджинарса и т.п.).

5. Решеточные алгебры Каца — Муди [64]. Рассмотрим две биалгебры $\mathcal{B}^{\pm}$ с генераторами $(L^{\pm})^i_j$ (L^+ — верхне- , а L^- — нижнетреугольные матрицы) и определяющими соотношениями

$$\hat{R} \, L_2^{\pm} \, L_1^{\pm} = L_2^{\pm} \, L_1^{\pm} \, \hat{R} \,. \tag{7.25}$$

Структурные отображения для биалгебр $\mathcal{B}^{\pm}$ выберем в виде $\epsilon(L^{\pm}) = I$:

$$\Delta\left((L^+)^i_j\right) = (L^+)^i_k \otimes (L^+)^k_j \,, \quad \Delta\left((L^-)^i_j\right) = (L^-)^k_j \otimes (L^-)^i_k \,. \tag{7.26}$$

Отметим, что коумножение для L^+ отличается от коумножения для L^-. В этом случае биалгебры $\mathcal{B}^\pm$ являются дуальными друг к другу относительно спаривания [86]:

$$< L_1^- , L_2^+ >= R_{12}^{-1} . \qquad (7.27)$$

Будем считать, что алгебры $\mathcal{B}^\pm$ включают в себя элементы, соответствующие обратным матрицам $(L^\pm)^{-1}$, после чего определим антиподы в виде

$$S(L^+) = (L^+)^{-1} , \quad S^{-1}(L^-) = (L^-)^{-1} ,$$

тем самым мы задаем для алгебр $\mathcal{B}^\pm$ структуру АХ. Обозначим $\mathcal{B}^{-\,O}$ АХ $\mathcal{B}^-$ с противоположным, по отношению к (7.26), коумножением

$$\Delta\left((L^-)^i_j\right) = (L^-)^i_k \otimes (L^-)^k_j .$$

Алгебры $\mathcal{B}^{-\,O}$ и $\mathcal{B}^+$ являются антидуальными относительно спаривания (7.27). Как показано в работе [86], из АХ $\mathcal{B}^{-\,O}$ и $\mathcal{B}^+$ можно построить квантовый дубль Дринфельда $\mathcal{B}^+ \bowtie \mathcal{B}^{-\,O}$, для которого перекрестные коммутационные соотношения имеют вид

$$\hat{R}\, L_2^+\, L_1^- = L_2^-\, L_1^+\, \hat{R} . \qquad (7.28)$$

Таким образом, для алгебр $\mathcal{B}^\pm$ (7.25) можно предложить специальное кросс-произведение, задаваемое соотношениями (7.28), которое снова является АХ, и которое использовалось в [2] для R-матричной формулировки квантовых деформаций универсальных обертывающих алгебр Ли.

Для определения решеточных алгебр Каца — Муди необходимо использовать более простое кросспроизведение биалгебр $\mathcal{B}^\pm$ (7.25). Имеется в виду так называемый дубль Гейзенберга (ДГ), который уже обсуждался в разд. 6 (см. (6.9) и (6.11)). Отметим, что ДГ двух АХ, вообще говоря, не является новой АХ, но сохраняет некоторые свойства комодульности. Используя формулы (6.11) и (7.27), получаем вместо (7.28) соотношения

$$L_2^+\, L_1^- = R_{12}^{-1}\, L_1^-\, L_2^+ . \qquad (7.29)$$

Рассмотрим теперь одномерную цепочку, с каждым узлом которой свяжем свой ДГ $\mathcal{B}^+ \sharp \mathcal{B}^-$ с определяющими соотношениями (7.25) и (7.29). Алгебры $\mathcal{B}^+ \sharp \mathcal{B}^-$, соответствующие разным узлам цепочки, будем считать коммутирующими. Для n-го узла определим

$$S^{(n)} = (L^-)^{-1} , \quad T^{(n)} = (L^+)^{-1} . \qquad (7.30)$$

Тогда из (7.25) и (7.29) следуют соотношения

$$\hat{R}\, S_1^{(n)}\, S_2^{(n)} = S_1^{(n)}\, S_2^{(n)}\, \hat{R} , \quad \hat{R}\, T_1^{(n)}\, T_2^{(n)} = T_1^{(n)}\, T_2^{(n)}\, \hat{R} , \qquad (7.31)$$

$$S_1^{(n)}\, T_2^{(n)} = T_2^{(n)}\, S_1^{(n)}\, R_{12} \, . \tag{7.32}$$

Зададим новые генераторы [64]:

$$L^{(n)} = T^{(n+1)}\, S^{(n)}\, (T^{(n)})^{-1} \, . \tag{7.33}$$

Для этих генераторов из (7.31), (7.32) можно получить замкнутые соотношения

$$\begin{gathered} \hat{R}\, L^{(n)}\, P\, L^{(n)} = L^{(n)}\, P\, L^{(n)}\, \hat{R} \, , \\ L^{(n)}\, P\, L^{(n+1)}\, P = P\, L^{(n+1)}\, \hat{R}^{-1}\, L^{(n)} \, , \\ L^{(n)}\, P\, L^{(m)}\, P = P\, L^{(m)}\, P\, L^{(n)}, \quad m \neq n-1, n, n+1 \end{gathered} \tag{7.34}$$

(здесь $P = P_{12}$ и $L^{(k)} \equiv L_1^{(k)}$), которые и определяют решеточную алгебру Каца — Муди [64].

Заметим, что, пользуясь техникой построения ДГ, в соотношения (7.34) довольно просто ввести спектральный параметр. Действительно, в качестве формул (7.25), (7.26) выберем

$$\hat{R}(\lambda\mu^{-1})\, L_2^{\pm}(\mu)\, L_1^{\pm}(\lambda) = L_2^{\pm}(\lambda)\, L_1^{\pm}(\mu)\, \hat{R}(\lambda\mu^{-1}) \, , \tag{7.35}$$

$$\Delta\left(L^+(\mu)^i_{\ j}\right) = L^+(\mu)^i_{\ k} \otimes L^+(\mu)^k_{\ j} \, , \quad \Delta\left(L^-(\mu)^i_{\ j}\right) = L^-(\mu)^k_{\ j} \otimes L^-(\mu)^i_{\ k} \, . \tag{7.36}$$

Соответствующее уравнение Янга — Бакстера имеет вид

$$R_{12}(\lambda)\, R_{13}(\lambda\mu)\, R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)\, R_{13}(\lambda\mu)\, R_{12}(\lambda) \, .$$

Здесь λ, μ, $\nu, \dots$ – спектральные параметры. Выберем спаривание, согласованное с (7.35), (7.36):

$$< L_1^-(\lambda)\ , L_2^+(\mu) >= R_{12}^{-1}(\lambda\mu^{-1}) \, , \tag{7.37}$$

после чего аналог перекрестных соотношений (7.29) записывается в виде

$$L_2^+(\mu)\, L_1^-(\lambda) = R_{12}^{-1}(\lambda\mu^{-1})\, L_1^-(\lambda)\, L_2^+(\mu) \, . \tag{7.38}$$

Теперь можно определить образующие $S^{(n)}(\mu)$, $T^{(n)}(\mu)$, а также

$$L^{(n)}(\mu) = T^{(n+1)}(\mu)\, S^{(n)}(\mu)\, (T^{(n)}(\mu))^{-1},$$

и соответствующая решеточная алгебра токов будет задаваться соотношениями

$$\begin{gathered} \hat{R}(\lambda\mu^{-1})\, L^{(n)}(\lambda)\, P\, L^{(n)}(\mu) = L^{(n)}(\mu)\, P\, L^{(n)}(\lambda)\, \hat{R}(\lambda\mu^{-1}) \, , \\ L^{(n)}(\mu)\, P\, L^{(n+1)}(\lambda)\, P = P\, L^{(n+1)}(\lambda)\, \hat{R}^{-1}(\lambda\mu^{-1})\, L^{(n)}(\mu) \, , \\ L^{(n)}(\lambda)\, P\, L^{(m)}(\mu)\, P = P\, L^{(m)}(\mu)\, P\, L^{(n)}(\lambda), \quad m \neq n-1, n, n+1 \, . \end{gathered} \tag{7.39}$$

В заключение отметим, что квантовый дубль для алгебр (7.35) (необходимо слегка модифицировать формулы (7.36), (7.37) за счет введения центрального элемента [87]) дает центральное расширение "квантовых групп токов" [87].

Работа над данной статьей была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-02-05679-а) и фондом INTAS (грант 93-127). Я признателен Г.Э.Арутюнову, П.П.Кулишу, А.Т.Филиппову и особенно А.А.Владимирову и П.Н.Пятову за многочисленные полезные обсуждения и замечания. Я также благодарен Л.Д.Фаддееву за привлечение моего внимания к проблеме определения внутренних производных для дифференциальной алгебры, предложенной в работе [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Исаев А.П.** — ЭЧАЯ, 1995, т.26, вып.5, с.1204; англ. пер.: Phys.Part.Nucl. 1995, vol. 26, No.5, p.501.
2. **Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.** — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып. 1, с.178.
3. **Drinfeld V.G.** — In: Proc. Inter. Congress of Mathematics, Acad. Press., Berkley, 1986, vol.1, p.798.
4. **Jimbo M.** — Lett.Math.Phys., 1986, vol.11, p.247; Comm.Math.Phys., 1986, v.102, p.537.
5. **Склянин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.** — ТМФ, 1979, т.40, No.2, с.194.
6. **Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.** — Успехи мат. наук, 1979, т.34, No.5, с.13.
7. **Фаддеев Л.Д.** — В сб.: Проблемы квантовой теории поля (Труды V Международного совещания по нелокальным и нелинейным теориям поля. Алушта, 1979), Дубна, 1979, с.249.
8. **Alekseev A.Yu., Faddeev L.D.** — Comm.Math.Phys. 1991, vol.141, p.413.
9. **Pasquier V., Saleur H.** — Nucl.Phys.,1990, vol.B330, p.523.
10. **Kulish P.P.** — Preprint YITP/K-959, 1991.
11. **Alekseev A.Yu.** Алгебра и анализ, 1994, т.6, вып.2, с.53.
12. **Karowski M., Zapletal A.** — Nucl.Phys., 1994, vol.B419, p.567.
13. **Khoroshkin S., Lebedev D., Pakuliak S.** — Phys. Lett., 1996, vol.A222, p.381; Preprint Bonn TH-96/04; (направлено в ТМФ);
 Davies, B., Foda, O., Jimbo, M., Miwa, T., Nakayashiki, A. — Comm. Math. Phys., 1993, vol.151, p.89.
14. **Алексеев А.Ю., Фаддеев Л.Д.** — Зап.Науч.Сем.ЛОМИ, 1992, т.200, с.3; hep-th/9406196.
15. **Connes A.** — Geometrie non commutative, Intereditions, Paris, 1990.
16. **Woronowicz S.L.** — Comm.Math.Phys., 1989, vol.122, p.125.
17. **Aschieri P., Castellani L.** — Int.J.Mod.Phys. A, 1993, vol.8, p.1667.
18. **Faddeev L.D., Pyatov P.N.** — The Differential Calculus on Quantum Linear Groups, In: Contemporary Mathematical Physics. Eds. R.L.Dobrushin et al, AMS Transactions – Series 2, 1996, vol.175, hep-th/9402070; в сб.: Проблемы современной теоретической физики (к 60-летию А.Т.Филиппова), ОИЯИ, 96-212, Дубна, 1996, с.19.

19. **Sweedler M.E.** — Hopf Algebras. Benjamin, 1969.

20. **Abe E.** — Hopf Algebras. Cambridge University Press, 1977.

21. **Majid Sh.** — Int. J. Mod. Phys., 1990, vol.A5, p.1.

22. **Jurčo B.** — Lett. Math. Phys., 1991, vol.22, p.177.

23. **Кобаяси Ш., Номидзу К.** — Основы дифференциальной геометрии, М.: Наука, 1981.

24. **Podleś P., Woronowicz S.L.** — Comm.Math.Phys., 1990, vol.130, p.381.
Bonechi F., Giachetti R., Maciocco R., Sorace E., Tarlini M. — Let. Math. Phys., 1996, vol.37, p.405; q-alg/9507004.

25. **Brzezinski T.** — Lett.Math.Phys., 1993, vol.27, p.287.

26. **Wess J., Zumino B.** — Nucl.Phys. (Proc. Suppl.), 1990, vol.B18, p.302.

27. **Manin Yu.I.** — Montreal University Prep. CRM-1561, 1989;
Manin Yu.I. — Comm.Math.Phys., 1989, vol.122, p.163.

28. **Hlavaty L.** — J.Phys. A: Math.Gen., 1989, vol.25, p.485.

29. **Pusz W., Woronowicz S.** — Rep.Math.Phys., 1989, vol.27, p.231.

30. **Kulish P.P., Damaskinsky E.V.** — J.Phys. A, 1990, vol.23, p.L415.

31. **Chaichian M., Kulish P.P., Lukierski J.** — Phys.Lett., 1991, vol.B262, p.43.

32. **Ogievetsky O.** — Lett. Math. Phys., 1992, vol.24, p.245.

33. **Filippov A.T., Isaev A.P., Kurdikov A.B.** — Mod. Phys. Lett. A, 1992, vol.7, p.2129; ТМФ, 1993, т.94, с.213.

34. **Zumino B.** — Mod.Phys.Lett., 1991, vol.A6, p.1225

35. **Kulish P.P.** — Phys.Lett., 1991, vol.A161, p.50.

36. **Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov Al.B.** — Nucl.Phys., 1978, vol.B133, p.525.

37. **Isaev A.P., Pyatov P.N.** — Phys.Lett., 1993, vol.A179, p.81.

38. **Чередник И.В.** — ТМФ, 1984, т.61, с.35.

39. **Kulish P.P., Sklyanin E.K.** — J.Phys. A, 1992, vol.25, p.5963;
Kulish P.P., Sasaki R. — Prog.Theor.Phys., 1993, vol.89, p.741;
Kulish P.P., Sasaki R., Schwiebert C. — J.Math.Phys., 1993, vol.34, p.286.

40. **Kulish P.P.** — Алгебра и анализ, 1994, т.6, вып.2, с.195;
de Azcarraga J.A., Kulish P.P., Rodenas F. — Fortschr. Phys., 1996, vol.44, No.1, p.1.

41. **Majid Sh.** — J.Math.Phys., 1991, vol.32, p.3246;
Majid Sh. — J.Math.Phys., 1993, vol.34, p.1176
Majid Sh. — J.Math.Phys., 1995, vol.36, p.1991.

42. **Gurevich D.** — In: Proc. of Semester "Quantum Groups and Quantum Spaces" (November 1995, Warsaw, Poland), Banach International Mathematical Center Publications, Warsaw, 1996.

43. **Isaev A.P.** — Lett.Math.Phys., 1995, vol.34, p.333.

44. **Isaev A.P., Vladimirov A.A.** — Lett.Math.Phys., 1995, vol.33, p.297.

45. **Zumino B.** — In: Proc. of XIX International Conference on Group Theoretic Methods in Physics (Salamanca, Spain 1992); Berkeley preprint LBL-33249, 1992.

46. **Maltsiniotis G.** — C.R. Acad.Sci.Paris, 1990, vol.311, Ser.I, p.831;
Maltsiniotis G. — Comm.Math.Phys., 1993, vol.151, p.275;

47. **Манин Ю.И.** — ТМФ, 1992, т.92, с.425.

48. **Sudbery A.** — Phys.Lett., 1992, vol.B284, p.61;
Sudbery A. — Math.Proc.Camb. Phyl.Soc., 1993, vol.114, p.111.

49. **Schirrmacher A.** — In: Proc. of the 1st Max Born Symposium, eds. R.Gielerak et al., Kluwer Acad. Publ.; 1992, p.55.

50. **Isaev A.P., Popowicz Z.** — Phys.Lett., 1993, vol.B307, p.353.

51. **Isaev A.P.** — J.Math.Phys., 1994, vol.35, p.6784.

52. **Zumino B.** — In: Proc. X-th IAMP Conf. Leipzig, 1991, Heidelberg, Springer, 1992.

53. **Schupp P., Watts P., Zumino B.** — Lett.Math.Phys., 1992, vol.25, p.139.

54. **Isaev A.P., Pyatov P.N.** — J.Phys. A, 1995, vol.28, p.2227.

55. **Vladimirov A.A.** — J.Phys. A, 1994, vol.27, p.4497.

56. **Ogievetsky O., Zumino B.** — Lett. Math. Phys., 1992, vol.25, p.121.

57. **Решетихин Н.Ю.** — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып.2, с.169.

58. **Pyatov P.N., Saponov P.A.** — J.Phys. A; Math.Gen., 1995, vol.28, p.4415.

59. **Nazarov M., Tarasov V.** — Kyoto Univ. Preprint RIMS-913, 1993.

60. **Noumi M., Umeda T., Wakayama M.** — Duke Math. Journal, 1994, vol.76, No.2, p.567;
Nazarov M.L. — Lett.Math.Phys., 1991, vol.21, p.123.

61. **Гуревич Д.И.** — Алгебра и анализ, 1990, т.2, вып. 4, с.119;
Burroughs N. — Comm.Math.Phys., 1990, vol.133, p.91.

62. **Aref'eva I.Ya., Volovich I.V.** — Phys.Lett., 1991, vol.B264, p.62.

63. **Faddeev L.D.** — In: Fields and Particles, Proceedings of the XXIX Winter School in Nuclear Physics, eds. H.Mitter and W.Schweiger, Schladmig, Austria, Springer, Heidelberg, 1990, p.89.

64. **Alekseev A.Yu., Faddeev L.D., Semenov-Tian-Shansky M.** — Comm.Math.Phys., 1992, vol.149, p.335;
Alekseev A.Yu., Faddeev L.D., Semenov-Tian-Shansky M,. Volkov A. — Preprint CERN TH-5981/91, 1991.

65. **Исаев А.П.** — ТМФ, 1987, vol.71, No.3, p.395.

66. **Isaev A.P., Pyatov P.N.** — In: Proc. of Workshop "Geometry and Integrable Models". Eds. P.Pyatov and S.Solodukhin, World Sci., 1996, p.182.

67. **Watamura S.** — Comm.Math.Phys., 1992, vol.158, p.67.

68. **Зупник Б.М.** — Письма в ЖЭТФ, 1995, т.61, No.6, с.434; там же, 1955, т.62, No.4, с.364.

69. **Lusztig G.** — Adv. in Math., 1988, vol.70, p.237;
Rosso M. — C.R.Acad.Sci., Paris, Ser. I, 1987, vol.305, p.587.

70. **Arutyunov G.E., Medvedev P.B.** — J.Math.Phys., 1995, vol.36, p.6981;
Arutyunov G.E., Medvedev P.B. — Препринт SMI-11-93, 1993, hep-th/9311096.

71. **Aref'eva I.Ya., Arutyunov G.E., Medvedev P.B.** — J.Math.Phys., 1994, vol.35, p.6658.

72. **Drabant B., Jurčo B., Schlieker M., Weich W., Zumino B.** — Lett.Math.Phys., 1992, vol.26, p.91.

73. **Schmudgen K., Schuler A.** — C.R. Acad.Sci., Paris, Ser. I, 1993, vol.316, p.1155.

74. **Schupp P., Watts P., Zumino B.** — Comm.Math.Phys., 1993, vol.157, p.305.

75. **Arutyunov G.E., Isaev A.P., Popowicz Z.** — J.Phys. A, 1995, vol.28, p.4349.

76. **Carow-Watamura U., Schlieker M., Watamura S.** — Comm.Math.Phys., 1991, vol.142, p.605;

77. **Семенов-Тян-Шанский М.А.** — ТМФ, 1992, т.93, с.302.

78. **Castellani L., Monteiro M.A.R.** — Phys.Lett., 1993, vol.B314, p.25.

79. **Woronowicz S.L.** — Publ.Res.Inst.Math.Sci., Kyoto University, 1987, vol.23, p.117;
Акулов В.П., Гершун В.Д., Гуменчук А.И. — Письма в ЖЭТФ, 1993, т.58, с.462.

80. **Дринфельд В.Г.** — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып. 2, с.30.

81. **Reshetikhin N.Yu., Turaev V.G.** — Comm.Math.Phys., 1990, vol.127, p.1.

82. **Reshetikhin N.Yu., Semenov-Tian-Shansky M.A.** — Geometry and Physics, 1988, vol.5, p.533.

83. **Maillet J.M.** — Phys.Lett., 1990, vol.B245, p.480.

84. **Isaev A.P., Ogievetsky O.V., Pyatov P.N., Saponov P.A.** — Preprint CPT Marseille, CPT - 96/p.3366.

85. **Cherednik I.** — In: Proc. XIth International Congress of Mathematical Physics (Paris, July 18-23, 1994) International Press, 1995, p.716;
Pasquier V. — Preprint Saclay SPhT/94-060, hep-th/9405104 (1994).

86. **Vladimirov A.A.** — Mod.Phys.Lett. A, 1993, vol.8, p.1315.

87. **Reshetikhin N.Yu., Semenov-Tian-Shansky M.A.** — Lett. Math. Phys., 1990, vol.19, p.133.