

БОЗОНИЗОВАННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ В ВЫСШИХ ПОРЯДКАХ КИРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

А.А.Бельков, А.В.Ланев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	82
КХД-МОТИВАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ	85
БОЗОНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ	90
ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАРКОВОГО ДЕТЕРМИНАНТА МЕТОДОМ ЯДРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	94
ПОЛУЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	98
НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕЗОННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ	104
РЕДУКЦИЯ ВЕКТОРНЫХ, АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНЫХ И СКАЛЯРНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ	117
ФЕНОМЕНОЛОГИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕЗОННЫХ ПРОЦЕССОВ В p^4 - И p^6 -ПОРЯДКАХ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ	123
МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ЭФФЕКТАМИ	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	138
ПРИЛОЖЕНИЕ. p^6 -ВКЛАДЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	141
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	144

БОЗОНИЗОВАННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ В ВЫСШИХ ПОРЯДКАХ КИРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

А.А.Бельков, А.В.Ланев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Подробно рассмотрено получение эффективных мезонных лагранжианов в высших порядках кирального разложения из бозонизации четырехкваркового взаимодействия расширенной модели Намбу–Иона–Лазинио (НИЛ), трактуемой как локальное приближение низкоэнергетической КХД. Приведены и систематизированы результаты вычислений коэффициентов разложения ядра теплопроводности для кваркового детерминанта бозонизованной модели НИЛ до седьмого порядка включительно. Полученные результаты используются для фиксации структурных коэффициентов эффективных киральных лагранжианов в p^4 - и p^6 -порядках импульсного разложения. Обсуждаются различные аспекты применения бозонизованных лагранжианов к описанию низкоэнергетических мезонных процессов: редукция векторных, аксиально-векторных и скалярных резонансов, регуляризация диаграмм с мезонными петлями, зависимость феноменологических структурных коэффициентов от схемы перенормировки и параметров регуляризации. Рассматриваются также вопросы, связанные с физическим обоснованием модели НИЛ как низкоэнергетического предела КХД. В этом контексте обсуждаются нелокальные поправки к структурным коэффициентам бозонизованных лагранжианов.

We consider deriving the effective meson higher-order lagrangians from bosonization of four-quark interaction within extended Nambu–Jona–Lasinio (NJL) model which can be treated as a local approximation of low-energy QCD. The results of calculating the heat-kernel coefficients for quark determinant of the bosonized NJL model are presented systematically up to and including $O(p^7)$. The obtained results are used to fix the structure coefficients of the effective chiral lagrangians at $O(p^4)$ and $O(p^6)$. We discuss various aspects to apply the bosonized lagrangians and to describe low-energy meson processes: reduction of vector, axial-vector and scalar resonances, regularization of meson loop diagrams, dependence of the phenomenological structure coefficients on the renormalization scheme and regularization scale. The nonlocal corrections to the structure coefficients of the bosonized lagrangians are treated also in the context of physical justification of the NJL model as a low-energy limit of QCD.

ВВЕДЕНИЕ

Возросший в последние годы интерес к киральным лагранжианам и вычислению мезонных амплитуд в высших порядках импульсного разложения связан с существенным прогрессом в развитии эффективных подходов к описанию адронных процессов при низких и промежуточных энергиях с учетом динамики кварков и глюонов на больших расстояниях. Создание реалистической теории мезонов и барионов в качестве низкоэнергетического предела

КХД является одной из фундаментальных проблем физики элементарных частиц. Необходимость в эффективных подходах возникает из-за того, что пертурбативная КХД становится неприменимой на больших расстояниях, в то время как нарушенная киральная симметрия остается основным динамическим принципом, определяющим сильные взаимодействия при низких энергиях.

До сих пор пока что никому не удалось вывести киральную динамику адронов из КХД в строгом математическом смысле. Тем не менее применение функциональных методов к приближенным формам КХД (см. работы [1]–[13] и ссылки в них) и КХД-мотивированным кварковым моделям [14]– [24], возникшим как различные расширения хорошо известной модели Намбу — Иона-Лазинию (НИЛ) [25], дало возможность существенно продвинуться в понимании связи между нарушенной киральной симметрией сильных взаимодействий адронов и динамикой кварков и глюонов на больших расстояниях. Несмотря на известные недостатки (неперенормируемость и отсутствие конфайнмента), модель НИЛ приводит к описанию в терминах непертурбативной КХД (массы токовых и составляющих кварков, кварковый конденсат, число цветов кварков) тех свойств мезонов и барионов, которые определяются киральной симметрией и ее нарушением [26]– [31]. Бозонизация модели НИЛ позволяет также вывести из эффективного четырехкваркового взаимодействия мезонные лагранжианы с высшими производными [32]– [38] и тем самым зафиксировать теоретически соответствующие структурные константы, которые в стандартной киральной теории возмущений [39] рассматриваются как феноменологические параметры.

Несмотря на то, что модель НИЛ приводит к правильному описанию низкоэнергетической феноменологии мезонов и барионов, не следует забывать о ее неполноте, прежде всего с точки зрения отсутствия в ней конфайнмента кварков. Проблема неперенормируемости решается в современной модели НИЛ с помощью введения соответствующего ультрафиолетового обрезания. Такая процедура выглядит разумной с физической точки зрения, так как с самого начала можно ожидать, что исключение из рассмотрения больших переданных импульсов не должно сильно повлиять на низкоэнергетические свойства связанных состояний кварков из-за быстрого убывания пропагатора глюона в области асимптотической свободы. Как локальное низкоэнергетическое приближение, модель НИЛ физически соответствует предположению, что свойства низколежащих связанных состояний кварков (адронов) в основном определяются областью передач импульса, промежуточной между областями асимптотической свободы и конфайнмента кварков, где переданный импульс много меньше эффективной массы непертурбативного глюона. Однако такое доминирование промежуточной области не вполне очевидно из-за полюсного поведения пропагатора непертурбативного глюона в области нулевых передач импульса. Поэтому исключение из рассмотрения в модели НИЛ

области конформента не является, на первый взгляд, таким же естественным физическим приближением, как введение ультрафиолетового обрезания. Этот вопрос требует специального изучения, проведенного, в частности, в работе [23].

В настоящем обзоре мы подробно рассматриваем получение эффективных мезонных лагранжианов из бозонизации расширенной модели НИЛ, которую можно трактовать как локальное приближение в низкоэнергетическом пределе КХД. Мотивации модели НИЛ посвящен первый раздел обзора. Расширенная модель НИЛ не только включает в себя симметрии, соответствующие симметриям КХД, и явное нарушение киральной симметрии массами токовых кварков, но также воспроизводит спонтанное нарушение киральной симметрии, которое связано с появлением ненулевого кваркового конденсата и переходом токовых кварков в составляющие. В бозонизационном подходе псевдоскалярные, скалярные, векторные и аксиально-векторные мезоны вводятся как коллективные поля, соответствующие связанным состояниям кварков и антикварков, а взаимодействие между этими полями описывается кварковым детерминантом, возникающим при интегрировании по кваркам в производящем функционале.

В разделах 2, 3 и 4 мы обсуждаем технические детали вычисления кваркового детерминанта бозонизованной модели НИЛ с помощью разложения так называемого “ядра теплопроводности” по степеням “собственного времени” в соответствующей регуляризации. Приведены результаты по вычислению коэффициентов разложения ядра теплопроводности до седьмого порядка включительно. Проведено сравнение с аналогичными вычислениями других групп. Полученные результаты используются в разделе 5 для фиксации констант связи эффективных киральных лагранжианов, включая члены p^6 -порядка импульсного разложения. Особое внимание в этом разделе уделено эквивалентным преобразованиям и уравнениям движения, которые используются для устранения членов с двойными производными и приведения эффективных лагранжианов к минимальному виду.

Особое место в обзоре отведено исследованию влияния мезонных резонансов на описание псевдоскалярного сектора. В разделе 6 рассмотрен эффективный псевдоскалярный лагранжиан, получаемый при интегрировании (редукции) векторных, аксиально-векторных и скалярных степеней свободы в производящем функционале бозонизованной модели НИЛ. Редукция тяжелых резонансов, эквивалентная учету резонансных обменов, проводится с помощью статических уравнений движения, возникающих из производящего функционала после специального кирального преобразования мезонных полей. Обсуждаются поправки высшего порядка к статическим уравнениям движения и модификация структурных коэффициентов эффективных киральных лагранжианов после редукции резонансов. Феноменологическим аспектам посвящен раздел 7, где мы рассматриваем описание низкоэнергетических ме-

зонных процессов в p^4 - и p^6 -порядках киральной теории с бозонизованными лагранжианами.

В первом разделе обзора показано, что модель НИЛ возникает как локальный низкоэнергетический предел КХД в результате некоторой последовательности достаточно грубых приближений и дополнительных предположений. В этом смысле предсказательная сила модели НИЛ, демонстрируемая в разделе 7 на примерах описания взаимодействий псевдоскалярных мезонов, в каком-то смысле даже превышает ожидания. Это объясняется тем, что динамика мезонных процессов при низких энергиях определяется в первую очередь нарушенной киральной симметрией, которая уже изначально была заложена в эффективном четырехкварковом лагранжиане модели НИЛ. В этом смысле отсутствие конфайнмента в этой модели не должно влиять на те свойства мезонов, которые являются следствием киральной симметрии или ее нарушения. В разделе 8 обсуждаются нелокальные поправки к предсказаниям модели НИЛ, трактуемые в биллокальном подходе как вклады, возникающие из полюсного поведения эффективного пропагатора непертурбативного глюона в области конфайнмента кварков. Разработанный в работах [11] и [23] подход позволяет получить полуфеноменологические оценки нелокальных поправок к структурным коэффициентам бозонизованных киральных лагранжианов. Показана малость этих поправок в p^4 -порядке импульсного разложения кваркового детерминанта бозонизованной модели НИЛ, что является еще одним аргументом в пользу этой модели как реалистического приближения для взаимодействия кварков при низких энергиях.

В заключении мы обсуждаем возможные направления и перспективы дальнейшего развития эффективных кварковых моделей типа модели НИЛ. Мы также касаемся некоторых вопросов и проблем, не нашедших более детального освещения в настоящем обзоре.

1. КХД-МОТИВАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ

Квантовая хромодинамика является общепринятой теорией сильных взаимодействий в терминах кварков и глюонов, получившей хорошее экспериментальное подтверждение в пертурбативном режиме при высоких энергиях ($E \gg 1$ ГэВ). Так как кварки и глюоны не могут наблюдаться как свободные частицы, то предполагается, что они связаны в бесцветные адроны. Существует много различных феноменологических подходов и эффективных моделей для описания адронов и их взаимодействий при низких и промежуточных энергиях ($E < 1$ ГэВ). Однако до сих пор не удается вывести мезонную теорию математически строгим образом из КХД с учетом конфайнмента кварков и глюонов. Возникающие при этом трудности, в частности, обусловлены неизвестным поведением КХД-функций Грина при низких энергиях. Тем не менее

в этой области достигнут значительный прогресс, связанный с эффективными бислокальными подходами, которые в локальном пределе приводят к модели НИЛ, бозонизация которой позволяет получить эффективные киральные лагранжианы, описывающие сильные взаимодействия мезонов. В этом разделе мы конспективно рассмотрим бислокальный подход и физические приближения, при которых в рамках этого формализма происходит переход от КХД к эффективным кварковым моделям.

Сильные взаимодействия описываются в метрике Минковского действием КХД с цветной группой $SU(N_c)$:

$$S[\bar{q}, q, A] = \int d^4x \left[\bar{q}(i\hat{D} - m_0)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right], \quad (1.1)$$

отвечающим взаимодействию $n \times N_c$ цветных токовых кварков q с $(N_c^2 - 1)$ глюонными полями A_μ^a (n — число ароматов). В выражении (1.1) подразумевается неявно суммирование по цветовым индексам, а также предполагается суммирование по повторяющимся дираковским и ароматическим индексам; генераторы $U(n)$ -группы ароматов λ^a нормированы соотношениями

$$\text{tr } \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}, \quad a, b = 0, \dots, n^2 - 1; \quad \lambda_0 = \sqrt{2/n} \mathbf{1};$$

$m_0 = \text{diag}(m_0^1, \dots, m_0^n)$ — массовая матрица голых (токовых) кварков, явно нарушающая киральную и диагональную $U(n)$ -симметрии. Ковариантная производная определена как

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda_c^a}{2} A_\mu^a,$$

где λ_c^a — генераторы цветной группы, а тензор напряженности глюонного поля имеет вид

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

где g — константа связи КХД и f_{abc} — структурные константы группы $SU(3)$. Использовано также обозначение \hat{D} для свертки $\gamma_\mu D^\mu$.

Производящий функционал КХД в отсутствие глюонных источников имеет вид

$$Z[\xi, \bar{\xi}] = \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}A \exp \left(iS[\bar{q}, q, A] + i \int d^4x (\bar{q}\xi + \bar{\xi}q) \right), \quad (1.2)$$

где $\xi, \bar{\xi}$ — внешние источники кварковых полей. Интеграл (1.2) является антипериодическим по кварковым и “духовым” полям, но периодическим по глюонным полям. Поля “духов” Фаддеева — Попова и члены, фиксирующие калибровку, включены в глюонную меру.

Введем в функциональный интеграл по глюонным полям член с внешними источниками, роль которых играют синглетные по аромату локальные токи

$$j_\mu^a(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu \frac{\lambda_c^a}{2} q(x),$$

связанные с глюонными полями A_μ^a . Тогда производящий функционал КХД тождественно переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\xi, \bar{\xi}] = & \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left[i \int d^4x \bar{q} \left(i\hat{\partial} - m_0 + g \frac{\lambda_c^a}{2} \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta j_\mu^a} \right) q + \right. \\ & \left. + i \int d^4x (\bar{q}\xi + \bar{\xi}q) \right] \times \\ & \times \int \mathcal{D}A \exp \left(- \frac{i}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + i \int d^4x j_\mu^a A^{a\mu} \right) \Big|_{j=0}, \end{aligned}$$

и после интегрирования по глюонным полям мы получим [1, 2, 10]:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left[i \int d^4x \bar{q}(x)(i\hat{\partial} - m_0)q(x) \right] \exp(iW[j]), \quad (1.3)$$

где отброшены нормировочные факторы и внешние кварковые источники. Глюонный производящий функционал $W[j]$ в соотношении (1.3) можно представить в виде разложения (рис.1,а):

$$W[j] = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y j_\mu^a(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_\nu^b(y) + O(j^3). \quad (1.4)$$

Здесь

$$D_{\mu\nu}^{a,b}(x-y) = \int_{\text{connected}} \mathcal{D}A A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \exp \left(- \frac{i}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right)$$

— точный глюонный пропагатор, включающий все глюонные самодействия и взаимодействия глюонов с “духовыми” полями (рис.1,б), при этом кварковые петли исключаются из рассмотрения;

$$O(j^3) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n D_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n j_{\mu_i}^{a_i}(x_i)$$

— вклад глюонных вершин порядка более трех. Введенные таким образом n -точечные функции Грина $D_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}$ содержат полную информацию о глюонной динамике.

Ограничиваясь в разложении $W[j]$ (1.4) одноглюонным обменом (первая диаграмма рис.1,а) и отбрасывая глюонные вершины более высокого порядка,

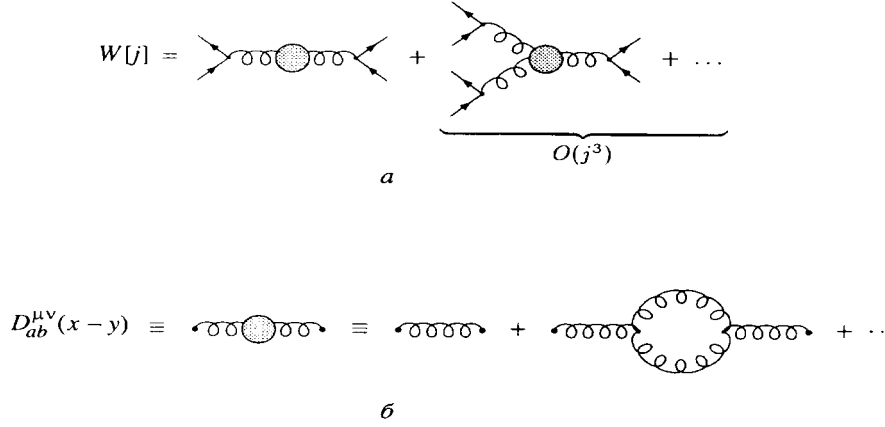


Рис. 1. Графическое представление разложения а) глюонного производящего функционала $W[j]$, б) полного глюонного пропагатора $D_{ab}^{\mu\nu}(x-y)$

получим выражение для производящего функционала, соответствующего эффективному низкоэнергетическому приближению КХД в виде

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left\{ i \left[\int d^4x \bar{q}(x) (i\hat{\partial} - m_0) q(x) \right] + i\mathcal{S}_{\text{int}} \right\}.$$

Здесь

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = -i\frac{g^2}{2} \iint d^4x d^4y j^{a\mu}(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j^{b\nu}(y) \quad (1.5)$$

— эффективное действие, соответствующее взаимодействию кварков через обмен непертурбативным глюоном;

$$g^2 D_{\mu\nu}^{ab}(x) = \delta^{ab} g_{\mu\nu} D(x) = \delta^{ab} g_{\mu\nu} 4\pi \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(q^2)}{q^2} e^{iqx}$$

— непертурбативный глюонный пропагатор, взятый в фейнмановской калибровке. В такой форме представления пропагатора предполагается, что все свойства взаимодействия кварков через глюонный обмен определяются свойствами бегущей константы связи $\alpha(q^2)$. Точный вид непертурбативного глюонного пропагатора определяется неизвестной глюонной динамикой на больших расстояниях.

После преобразования Фирца эффективное действие (1.5) приводится к виду

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \frac{i}{2} \iint d^4x d^4y D(x-y) \bar{q}(x) \frac{\mathcal{M}^\theta}{2} q(y) \bar{q}(y) \frac{\mathcal{M}^\theta}{2} q(x), \quad (1.6)$$

где \mathcal{M}^θ — тензорное произведение дираковских, ароматических и цветовых матриц вида

$$\left\{ \mathbf{1}, i\gamma_5, i\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma^\mu, i\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_5\gamma^\mu \right\}^D \left\{ \frac{1}{2}\lambda^a \right\}^F \left\{ \frac{4}{3}\mathbf{1} \right\}^C. \quad (1.7)$$

Здесь мы рассматриваем $SU(3)$ -группу ароматов и ограничиваемся вкладами только цветовых синглетов $\bar{q}q$.

Поскольку точное поведение функций Грина $D(x)$ на больших расстояниях неизвестно, для нее должен быть использован какой-либо модельный анзац. Так, благодаря конденсации при низких энергиях [45] непертурбативный глюон приобретает ненулевую массу, которая связана с глюонным конденсатом соотношением [21]:

$$m_G^2 = \frac{15}{32} \left[16\pi^2 \left\langle \frac{g^2}{4\pi^2} (G_{\mu\nu}^a)^2 \right\rangle \right]^{1/2}.$$

Используя значение глюонного конденсата

$$\left\langle \frac{g^2}{4\pi^2} (G_{\mu\nu}^a)^2 \right\rangle = (410 \pm 80 \text{ МэВ})^2,$$

извлеченное из процессов $e^+e^- \rightarrow$ [46], для массы непертурбативного глюона мы получим оценку $m_G^2 = (806 \pm 275 \text{ МэВ})^2$. В области передач $0 \ll q^2 \ll m_G^2$, “промежуточной” между областями конфайнмента и асимптотической свободы кварков, пропагатор глюона в импульсном представлении можно аппроксимировать константой

$$D(q) = \frac{1}{q^2 - m_G^2} \approx -\frac{1}{m_G^2},$$

которой в координатном представлении будет соответствовать локальный анзац $D(x) \sim \delta^{(4)}(x)$. В этом случае эффективное действие (1.6) будет приводить к эффективному четырехкварковому взаимодействию, описываемому лагранжианом модели НИЛ [25]:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = 2G_1 \left[\left(\bar{q} \frac{\lambda^a}{2} q \right)^2 + \left(\bar{q} i\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q \right)^2 \right] - 2G_2 \left[\left(\bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q \right)^2 + \left(\bar{q} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q \right)^2 \right], \quad (1.8)$$

причем универсальные константы связи G_1 и G_2 в этом случае будут связаны соотношением $G_1 = 2G_2$.

В таком приближении не учитывается свойство конфайнмента кварков, связанное с особым полюсным поведением пропагатора глюона в импульсном

представлении вблизи нулевых передач (область конфайнмента). Не учитывается также быстро убывающее поведение пропагатора глюона $D(q)$ в области асимптотической свободы кварков. Тем не менее бозонизация модели НИЛ приводит к эффективным киральным лагранжианам, обеспечивающим хорошее описание низкоэнергетических мезонных процессов как в лидирующем, так и в высших порядках киральной теории.

2. БОЗОНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ

Модель НИЛ, бозонизация которой будет рассмотрена в этом разделе, включает в себя не только все необходимые ароматические симметрии, определяющие динамику кварков в низкоэнергетической КХД, но также обеспечивает простую схему спонтанного нарушения киральной симметрии, возникающего из ее нарушения в явном виде массовыми кварковыми членами. В этой схеме токовые кварки переходят в конституэнтные благодаря появлению ненулевого кваркового конденсата, при этом легкие составные псевдоскалярные бозоны Намбу — Голдстоуна возникают вместе с более тяжелыми динамическими векторными и аксиально-векторными мезонами с правильными относительными весами, возникающими из перенормировки.

В основе обсуждаемого подхода лежит эффективный четырехкварковый лагранжиан сильных взаимодействий расширенной модели НИЛ, инвариантной относительно глобальной цветовой симметрии $SU(N_c)$ и $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ -симметрии ароматов:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{q}(i\hat{d} - m_0)q + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (2.1)$$

где взаимодействующая часть лагранжиана \mathcal{L}_{int} задана выражением (1.8). Можно заметить, что групповые структуры КХД

$$SU(3)_c^{\text{local}} \otimes SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R \otimes U(1) \otimes S$$

и модели НИЛ

$$SU(3)_c^{\text{global}} \otimes SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R \otimes U(1) \otimes S$$

очень похожи (здесь S представляет набор дискретных симметрий, таких как C -, P - и T -сопряжения).

Используя стандартный подход к бозонизации кварковых взаимодействий, основанный на технике функционального интегрирования, можно получить из лагранжиана модели НИЛ (2.1) эффективное мезонное действие. Прежде всего введем обычным образом [1, 2, 10] коллективные мезонные поля, соответствующие скалярным (S), псевдоскалярным (P), векторным (V) и

аксиально-векторным (A) мезонам, ассоциированным с кварковыми билинейными комбинациями

$$\begin{aligned} S^a &= -4G_1 \bar{q} \frac{\lambda^a}{2} q, & P^a &= -4G_1 \bar{q} i \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q, \\ V_\mu^a &= i4G_2 \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q, & A_\mu^a &= i4G_2 \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q. \end{aligned} \quad (2.2)$$

После подстановки этих выражений в (2.1) лагранжиан модели НИЛ можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathcal{L}_{NJL} = -\frac{1}{4G_1} \text{tr}(\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{4G_2} \text{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) + \bar{q} i \hat{\mathbf{D}} q, \quad (2.3)$$

где след tr берется по индексам ароматов, а $\hat{\mathbf{D}}$ — дираковский оператор в присутствии коллективных мезонных полей:

$$\begin{aligned} i\hat{\mathbf{D}} &= i(\hat{\partial} + \hat{V} + \hat{A}\gamma^5) - P_R(\Phi + m_0) - P_L(\Phi^\dagger + m_0) = \\ &= [i(\hat{\partial} + \hat{A}^R) - (\Phi + m_0)]P_R + [i(\hat{\partial} + \hat{A}^L) - (\Phi^\dagger + m_0)]P_L. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\Phi = S + iP$, $\hat{V} = V_\mu \gamma^\mu$, $\hat{A} = A_\mu \gamma^\mu$; $P_{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ — киральные правые/левые проекторные операторы; $\hat{A}^{R/L} = \hat{V} \pm \hat{A}$ — правые/левые комбинации полей и

$$S = S^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad P = P^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad V_\mu = -iV_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad A_\mu = -iA_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}.$$

Рассмотрим производящий функционал функции Грина, соответствующий лагранжиану (2.3). Поскольку он билинеен по кварковым полям, по ним можно выполнить интегрирование, после чего производящий функционал примет вид (для простоты кварковые источники опущены):

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^\dagger \mathcal{D}V \mathcal{D}A \exp [i\mathcal{S}(\Phi, \Phi^\dagger, V, A)], \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{S}(\Phi, \Phi^\dagger, V, A) = \int d^4x \left[-\frac{1}{4G_1} \text{tr}(\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{4G_2} \text{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) \right] - i \text{Tr}' [\ln(i\hat{\mathbf{D}})] \quad (2.6)$$

— эффективное действие для скалярных, псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных мезонов. След Tr' берется по пространству-времени, цвету, аромату и дираковским индексам:

$$\text{Tr}' = \int d^4x \text{Tr}, \quad \text{Tr} = \text{tr}_\gamma \cdot \text{tr}_C \cdot \text{tr}.$$

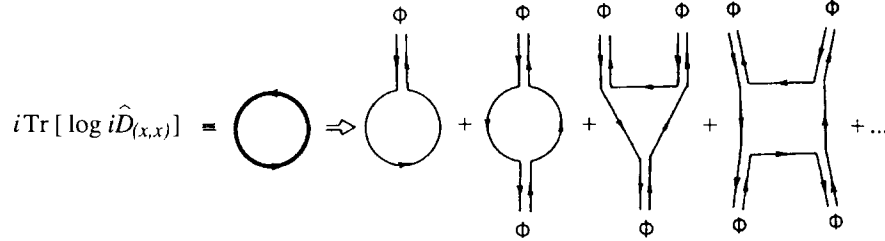


Рис. 2. Графическое представление разложения кваркового детерминанта по кварковым полям со внешними коллективными полями

Первый член в выражении (2.6), квадратичный по мезонным полям, возникает в результате линеаризации четырехкваркового взаимодействия; второй член есть кварковый детерминант, описывающий взаимодействие мезонов.

Кварковый детерминант может быть вычислен либо с помощью разложения по кварковым петлям с внешними коллективными мезонными полями [14]– [16] (см. рис.2), либо методом коэффициентов ядра теплопроводности в регуляризации собственного времени [47, 48]. Заметим, что модуль кваркового детерминанта дает вклад в неаномальную часть эффективного лагранжиана, в то время как его комплексная фаза определяет аномальное эффективное действие Весса — Зумино [59], связанное с киральными аномалиями.

Нелинейной параметризации киральной симметрии отвечает следующее представление поля Φ :

$$\Phi = \Omega \Sigma \Omega. \quad (2.7)$$

Матрица скалярных полей $\Sigma(x)$ принадлежит диагональной группе ароматов, в то время как матрица $\Omega(x)$ представляет псевдоскалярные степени свободы φ , остающиеся в пространстве $U(n)_L \times U(n)_R / U_V(n)$. Матрицу $\Omega(x)$ можно параметризовать унитарной матрицей

$$\Omega(x) = \exp \left(\frac{i}{\sqrt{2}F_0} \varphi(x) \right), \quad \varphi(x) = \varphi^a(x) \frac{\lambda^a}{2},$$

где F_0 — затравочное значение константы распада $\pi \rightarrow \mu\nu$. При киральных поворотах

$$q \rightarrow \tilde{q} = (P_L \xi_L + P_R \xi_R) q$$

поля Φ и $A_\mu^{R/L}$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \tilde{\Phi} = \xi_L \Phi \xi_R^\dagger, \\ A_\mu^R &\rightarrow \tilde{A}_\mu^R = \xi_R (\partial_\mu + A_\mu^R) \xi_R^\dagger, \quad A_\mu^L \rightarrow \tilde{A}_\mu^L = \xi_L (\partial_\mu + A_\mu^L) \xi_L^\dagger. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Электромагнитное взаимодействие мезонов с фотонным полем A_μ вводится с помощью подстановки

$$V_\mu \rightarrow V_\mu + ieQA_\mu,$$

где Q — матрица электрических зарядов кварков.

Интеграл (2.5), зависящий теперь от $\Omega(x)$ и $\Sigma(x)$, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int \mathcal{D}\mu(\Omega\Sigma) \mathcal{D}V \mathcal{D}A \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4G_1} \text{tr} \Sigma^2 - \frac{1}{4G_2} \text{tr} (V_\mu^2 + A_\mu^2) \right] \right\} \times \\ & \times \det (i\hat{\mathbf{D}}(\Omega, \Sigma, V, A)), \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}\mu(\Omega\Sigma)$ является интегральной мерой для преобразованных полей (2.7).

В простейшем случае, когда $\Omega = 1$ и $A_\mu^{R/L} = 0$, уравнение среднего поля для Σ -поля сводится к уравнению Швингера — Дайсона вида

$$\Sigma_0 = i2G_1 N_c \text{tr}_\gamma \frac{1}{i\hat{\mathbf{D}}_{\Omega=1}}. \quad (2.9)$$

В приближении исчезающих масс токовых кварков это уравнение всегда имеет тривиальное решение $\Sigma_0 = 0$, отвечающее кирально-симметричной фазе. Однако при значении G_1 , превышающем некоторую критическую величину, решение $\Sigma_0 = 0$ становится нестабильным, и возникает новый вакуум с ненулевым Σ_0 , который соответствует фазе спонтанного нарушения киральной симметрии (фаза Намбу — Голдстоуна).

Предполагая, что решение Σ_0 имеет диагональный вид

$$\Sigma_0 = \text{diag} (\sigma_1^0, \sigma_2^0, \dots, \sigma_n^0),$$

получим из (2.9) “уравнение щели”

$$\sigma_i^0 = -i \frac{8G_1 N_c}{(2\pi)^4} \int^\Lambda d^4k \frac{\sigma_i^0 + m_i^0}{k^2 - (\sigma_i^0 + m_i^0)^2} \equiv -2G_1 \langle \bar{q}_i q_i \rangle, \quad (2.10)$$

где $\langle \bar{q}q \rangle$ — кварковый конденсат и Λ — параметр обрезания. Используя (2.10) и предполагая приближенную ароматическую симметрию кваркового конденсата, получим:

$$\sigma_i^0 = -2G_1 \langle \bar{q}_i q_i \rangle \equiv \mu.$$

В дальнейшем мы везде (за исключением раздела 6) будем пренебрегать квантовыми флуктуациями скалярного поля Σ вокруг его вакуумного ожидания μ (т.е. полагать $\Sigma \sim \Sigma_0 \sim \mu \mathbf{1}$, где μ — значение массы составляющего кварка, усредненное по аромату).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАРКОВОГО ДЕТЕРМИНАНТА МЕТОДОМ ЯДРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрение метода ядра теплопроводности мы начнем с вычисления неаномальной части эффективного действия, соответствующей модулю кваркового детерминанта, который в регуляризации собственного времени τ определяется в виде интеграла

$$\ln |\det i\hat{\mathbf{D}}| = -\frac{1}{2} \text{Tr}' \ln(\hat{\mathbf{D}}^\dagger \hat{\mathbf{D}}) = -\frac{1}{2} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} \text{Tr}' K(\tau), \quad (3.1)$$

где $K(\tau) = e^{-\mathbf{A}\tau}$ — так называемое “ядро теплопроводности” для оператора $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{D}}^\dagger \hat{\mathbf{D}}$ [53], и Λ — внутренний параметр регуляризации, совпадающий с параметром обрезания в формуле (2.10). Полное ядро теплопроводности удовлетворяет “уравнению теплопроводности”

$$\frac{\partial}{\partial \tau} K(\tau) + \mathbf{A}K(\tau) = 0$$

с граничным условием $K(\tau = 0) = 1$.

В рассматриваемом случае модели НИЛ оператор \mathbf{A} может быть представлен в виде

$$\mathbf{A} = d_\mu d^\mu + a(x) + \mu^2,$$

где

$$d_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu = V_\mu + A_\mu \gamma^5, \quad a(x) = i\widehat{\nabla}H + H^\dagger H + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Gamma_{\mu\nu} - \mu^2.$$

Здесь мы используем следующие обозначения:

$$H = P_R \Phi + P_L \Phi^\dagger = S + i\gamma_5 P,$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = [d_\mu, d_\nu] = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = F_{\mu\nu}^V + \gamma^5 F_{\mu\nu}^A,$$

где $F_{\mu\nu}^{V,A}$ — тензоры напряженности поля;

$$F_{\mu\nu}^V = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + [V_\mu, V_\nu] + [A_\mu, A_\nu],$$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [V_\mu, A_\nu] + [A_\mu, V_\nu],$$

и

$$\nabla_\mu H = \partial_\mu H + [V_\mu, H] - \gamma^5 \{A_\mu, H\}$$

— ковариантная производная.

Асимптотическое поведение оператора \mathbf{A} на малых расстояниях определяется его “свободной” частью

$$\mathbf{A}_0 = \square + \mu^2,$$

которой соответствует непертурбативная часть ядра теплопроводности K_0 . Последняя может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \langle x | K_0(\tau) | y \rangle &= \langle x | \exp(-(\square + \mu^2)\tau) | y \rangle = \\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^2} e^{-\mu^2\tau + (x-y)^2/(4\tau)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

как решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\tau} K_0 + \mathbf{A}_0 K_0 = 0, \quad K(\tau = 0) = 1.$$

С помощью подстановки $K = K_0 H$ можно выделить из ядра теплопроводности его взаимодействующую часть, которая удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{1}{\tau} z_\mu d^\mu + d^\mu d_\mu + a \right) H(x, y; \tau) &= 0, \\ H(x, y; \tau = 0) &= 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $z_\mu = x_\mu - y_\mu$, и дифференциальный оператор d_μ действует только на x . Взаимодействующую часть ядра теплопроводности можно разложить по степеням “собственного времени” τ :

$$H(x, y; \tau) = \sum_k h_k(x, y) \cdot \tau^k.$$

Возникающие при этом коэффициенты разложения Сили — ДеВитта $h_k(x, y)$ удовлетворяют рекурсивному соотношению

$$(n + z_\mu d^\mu) h_{n+1}(x, y) = -(a + d^\mu d_\mu) h_{n-1}(x, y) \quad (3.4)$$

с граничным условием

$$z_\mu d^\mu h_0 = 0. \quad (3.5)$$

Таким образом, ядро теплопроводности для модуля кваркового детерминанта бозонизованной модели НИЛ можно представить в виде разложения

$$\langle x | K(\tau) | y \rangle = \frac{1}{(4\pi\tau)^2} e^{-\mu^2\tau + (x-y)^2/(4\tau)} \sum_k h_k(x, y) \cdot \tau^k. \quad (3.6)$$

После интегрирования по τ в (3.1) получим

$$\ln |\det i\hat{\mathbf{D}}| = -\frac{1}{2} \frac{\mu^4}{(4\pi)^2} \sum_k \frac{\Gamma(k-2, \mu^2/\Lambda^2)}{\mu^{2k}} \text{Tr} h_k, \quad (3.7)$$

где $\Gamma(n, x) = \int_x^\infty dt e^{-t} t^{n-1}$ — неполная гамма-функция.

Используя определение функции $\Gamma(\alpha, x)$ при целочисленных значениях $\alpha = -n$ и $\alpha = 0$, можно выделить из кваркового детерминанта (3.7) расходящиеся и конечную части

$$\frac{1}{2} \ln (\det \hat{\mathbf{D}}^\dagger \hat{\mathbf{D}}) = B_{\text{pol}} + B_{\text{log}} + B_{\text{fin}}.$$

Здесь

$$B_{\text{pol}} = \frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{(4\pi)^2} \left[-\frac{\mu^4}{2x^2} \text{Tr}' h_0 + \frac{1}{x} \left(\frac{\mu^4}{2} \text{Tr}' h_0 - \mu^2 \text{Tr}' h_1 \right) \right]$$

имеет полюс при $x = 0$ ($x = \mu^2/\Lambda^2$);

$$B_{\text{log}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma(0, x) \left[\frac{1}{2} \mu^4 \text{Tr}' h_0 - \mu^2 \text{Tr}' h_1 + \text{Tr}' h_2 \right]$$

расходится логарифмически, так как

$$\Gamma(0, x) = -(C + \ln x) + O(x),$$

где $C = 0,577$ — константа Эйлера. Конечная часть модуля кваркового детерминанта имеет вид

$$B_{\text{fin}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{k=3}^{\infty} \mu^{4-2k} \Gamma(k-2, x) \text{Tr}' h_k.$$

Следует отметить, что коэффициенты при расходящихся вкладах $\Gamma(-1, \mu^2/\Lambda^2)$ и $\Gamma(0, \mu^2/\Lambda^2)$ отвечают квадратично и логарифмически расходящимся однопетлевым интегралам I_1 и I_2 , регуляризованным в работах [16] с помощью импульсного обрезания $\tilde{\Lambda} = O(1)$. В отличие от стандартной регуляризации обрезанием, используемой в теории элементарных частиц, шкала обрезания рассматривается здесь как физический параметр, характеризующий радиус $\bar{q}q$ -сил и границу области спонтанного нарушения киральной симметрии.

В дальнейшем мы ограничимся детальным рассмотрением только неаномальной части эффективного действия, связанной с модулем кваркового детерминанта. Аномальную часть эффективного действия, которая определяется комплексной фазой кваркового детерминанта, можно представить в виде

$$\Gamma^- = \Gamma_{WZ} + \Gamma_{(h.o.)}^-. \quad (3.8)$$

Здесь Γ_{WZ} — низшие аномальные вклады, соответствующие p^4 -порядку по импульсу:

$$\begin{aligned} \Gamma_{WZ} &= \frac{iN_c}{240\pi^2} \int_{B_5} d^5x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \text{tr} (\tilde{L}_\mu \tilde{L}_\nu \tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\beta \tilde{L}_\gamma) - \\ &\quad - \frac{iN_c}{48\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} (Z_{\mu\nu\alpha\beta}(U, A_L, A_R) - Z_{\mu\nu\alpha\beta}(1, A_L, A_R)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

В первом топологическом члене выражения (3.9) псевдоскалярные киральные поля $\tilde{L}_\mu = \partial_\mu U \cdot U^\dagger$, $U = \Omega^2$ определяются на диске B_5 в 5-мерной области интегрирования, границей которого служит 4-мерное евклидово пространство-время [60]. Этот член дает аномальные вклады вида

$$\begin{aligned} &\frac{iN_c}{240\pi^2} \int_{B_5} d^5x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \text{tr} (\tilde{L}_\mu \tilde{L}_\nu \tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\beta \tilde{L}_\gamma) = \\ &= -\frac{iN_c}{30\sqrt{2}\pi^2 F_0^5} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} (\varphi \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi) + O(\varphi^7). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Второй член выражения (3.9) описывает аномальные взаимодействия псевдоскалярных степеней свободы с векторными и аксиально-векторными калибровочными полями. Явное выражение для $Z_{\mu\nu\alpha\beta}$ удобно представить в виде [61]:

$$\begin{aligned} &Z_{\mu\nu\alpha\beta}(U, A_L, A_R) = \\ &= A_{L\mu}^U (A_{R\nu} \partial_\alpha A_{R\beta} + \partial_\nu A_{R\alpha} A_{R\beta} + A_{R\nu} A_{R\alpha} A_{R\beta} - R_\nu R_\alpha A_{R\beta}) + \\ &+ U^\dagger A_{L\mu} U (A_{R\nu} R_\alpha A_{R\beta} - R_\nu \partial_\alpha A_{R\beta}) + \frac{1}{2} A_{L\mu} L_\nu A_{L\alpha} L_\beta - \\ &- (A_L \leftrightarrow A_R) + \frac{1}{2} (A_{L\mu} U A_{R\nu}^\dagger) (A_{L\alpha} U A_{R\beta} U^\dagger), \end{aligned}$$

где

$$A_{L\mu}^U = U^\dagger A_{L\mu} U + R_\mu, \quad A_{R\mu}^U = U A_{R\mu} U^\dagger - L_\mu.$$

Дополнительные к Γ_{WZ} вклады высшего порядка по импульсам $\Gamma_{(h.o.)}^-$ в полном аномальном действии (3.8) могут быть получены в подходе [62] с использованием тех же самых коэффициентов теплопроводности h_n , которые возникают при вычислении модуля кваркового детерминанта:

$$\Gamma_{(h.o.)}^- = -i \int d^4x \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(n-2)!}{16\pi^{2r}} \left[\frac{1}{\mu^{2n-2}} \text{tr} ((P_R \Phi^\dagger + P_L \Phi) \hat{\mathbf{D}} h_n) \right]_{r\varepsilon}. \quad (3.11)$$

Индексы ε и r , приписанные в (3.11) к квадратной скобке, означают, что при вычислениях в ней удерживаются только члены с нечетным числом тензоров Леви — Чивиты и члены порядка μ^{-r} .

4. ПОЛУЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рекурсивный алгоритм вычисления коэффициентов теплопроводности основан на соотношении (3.4), связывающем $h_n(x, y)$ и $h_{n-1}(x, y)$. Граничное условие (3.5) для $h_0(x, y)$ возникает из (3.4) при $n = 0$ и $h_{-1}(x, y) = 0$. Задача заключается в нахождении предела совпадения $h_n \equiv h_n(x, y)|_{z=0}$, причем мы не можем просто положить $z = 0$ в (3.4), поскольку при действии дифференциального оператора d_α на это соотношение появляется неисчезающий вклад $d_\alpha(z_\mu d^\mu h_n)|_{z=0} = g_{\alpha\mu} d^\mu h_n|_{z=0} = d_\alpha h_n|_{z=0}$.

Легко увидеть, что использование рекурсивного соотношения (3.4) для вычисления коэффициента h_n приводит к появлению членов вида $d_\alpha d_\beta \dots h_n(x, y)|_{z=0}$. Чтобы получить рекурсивное соотношение для таких членов, необходимо подействовать произведением m дифференциальных операторов $d_\alpha d_\beta \dots d_\omega$ на соотношение (3.4) и перейти к пределу $z = 0$:

$$\begin{aligned} & \underbrace{d_\alpha d_\beta \dots d_\omega}_{m} h_n(x, y)|_{z=0} = \\ & = -\frac{1}{n+m} \left\{ d_\alpha d_\beta \dots d_\omega (a + d_\mu d^\mu) h_{n-1}(x, y) + P_{\alpha\beta\dots\omega} h_n(x, y) \right\} \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $(n+m) > 0$ и

$$P_{\alpha\beta\dots\omega} = \underbrace{d_\alpha d_\beta \dots d_\omega}_{m} \cdot z_\mu d^\mu \Big|_{z=0} - m d_\alpha d_\beta \dots d_\omega.$$

Таким образом, мы получим для $P_{\alpha\beta\dots\omega}$ рекурсивное соотношение

$$P_{\alpha\beta\dots\omega} = d_\alpha P_{\beta\dots\omega} + R_{\beta\dots\omega; \alpha} \quad (4.2)$$

с граничным условием $P = 0$, где $R_{\beta\dots\omega; \alpha} = [d_\beta \dots d_\omega, d_\alpha]$. Переставляя дифференциальный оператор d_α шаг за шагом через последовательность других дифференциальных операторов d_β, \dots, d_ω , можно переместить его влево. В этом случае произойдет взаимное сокращение двух произведений m дифференциальных операторов и останутся только члены с $(m-2)$ дифференциалами. Окончательно мы получим рекурсивное соотношение

$$R_{\beta\gamma\dots\omega; \alpha} = \Gamma_{\beta\alpha} \cdot d_\gamma \dots d_\omega + d_\beta \cdot R_{\gamma\dots\omega; \alpha} \quad (4.3)$$

с граничным условием $R_{;\alpha} = 0$. Таким образом, для вычисления $h_n(x, y)|_{z=0}$ нужно использовать соотношение (4.1), начиная с $m = 0$. После каждой итерации необходимо переставлять все дифференциальные операторы, возникающие из $d_\mu d^\mu$ или $P_{\alpha\beta\dots\omega}$ вправо к $h_k(x, y)$. При таких перестановках возникнут коммутаторы вида

$$S_\mu = [d_\mu, a], \quad S_{\mu\nu} = [d_\mu, S_\nu], \quad S_{\alpha\mu\nu} = [d_\alpha, S_{\mu\nu}], \quad \dots$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = [d_\mu, d_\nu], \quad K_{\alpha\mu\nu} = [d_\alpha, \Gamma_{\mu\nu}], \quad K_{\beta\alpha\mu\nu} = [d_\beta, K_{\alpha\mu\nu}], \quad \dots \quad (4.4)$$

Индексы n и m изменяются при таких итерациях следующим образом: либо $n \rightarrow n - 1$, либо $m \rightarrow m - 2$, или $n \rightarrow n - 1; m \rightarrow m + 2$. Легко показать, что после $2n$ итераций останется только $h_0(x, y)$ без дифференциальных операторов, и требуемый результат получается в конце подстановкой предела $z = 0$ с учетом $h_0(x, y)|_{z=0} = 1$.

Весьма громоздкие вычисления коэффициентов Сили — ДеВитта в соответствии с описанным рекурсивным методом можно алгоритмизировать для систем аналитических вычислений типа FORM или REDUCE после их соответствующего расширения [49]. Выражения для коэффициентов теплопроводности содержат большое количество членов, связанных между собой следующими эквивалентными преобразованиями: циклическими перестановками под знаком следа Tr , коммутационными соотношениями (4.4), переобозначениями немых индексов и тождествами Якоби для тензоров $K_{\alpha\mu\nu}$. Поэтому полученные выражения необходимо привести к некоторому минимальному базису линейно независимых членов. Проблема приведения окончательных выражений к минимальному базису и возникающие при этом неоднозначности детально рассмотрены в работе [50]. Там же проведено сравнение полученных нами коэффициентов теплопроводности с результатами других работ.

В выбранном нами минимальном базисе коэффициенты теплопроводности h_1, \dots, h_5 имеют вид *

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1 &= -a, \\ \text{Tr } h_2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ a^2 + \frac{1}{6} \Gamma_{\mu\nu}^2 \right\}, \\ \text{Tr } h_3 &= \frac{1}{6} \text{Tr} \left\{ -a^3 + \frac{1}{2} S_\mu^2 - \frac{1}{2} a \Gamma_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{10} K_{\nu\nu\mu}^2 - \frac{1}{15} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu} \right\}, \end{aligned}$$

*Здесь и далее везде в этом разделе, там, где не использованы явно верхние и нижние индексы, подразумевается ковариантное суммирование по повторяющимся греческим индексам со стандартной метрикой $(1, -1, -1, -1)$.

$$\begin{aligned}
\text{Tr } h_4 &= \frac{1}{24} \text{Tr} \left\{ a^4 + a^2 S_{\mu\mu} + \frac{4}{5} a^2 \Gamma_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{5} (a\Gamma_{\mu\nu})^2 - \frac{2}{5} a S_{\mu} K_{\nu\nu\mu} + \frac{1}{5} S_{\mu\mu}^2 + \right. \\
&\quad + \frac{4}{15} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\rho} \Gamma_{\rho\mu} - \frac{2}{5} a K_{\nu\nu\mu}^2 + \frac{2}{15} S_{\alpha\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^2 - \frac{8}{15} S_{\beta\gamma} \Gamma_{\gamma\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} + \\
&\quad + \frac{17}{210} \Gamma_{\mu\nu}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{35} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\rho} + \frac{1}{105} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\rho} \Gamma_{\rho\sigma} \Gamma_{\sigma\mu} + \\
&\quad + \frac{1}{420} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\rho\sigma} + \frac{16}{105} K_{\mu\alpha\alpha\nu} \Gamma_{\nu\rho} \Gamma_{\rho\mu} + K_{\alpha\alpha\mu} K_{\beta\beta\nu} + \Gamma_{\mu\nu} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{35} K_{\mu\alpha\alpha\nu}^2 \right\}, \\
\text{Tr } h_5 &= \frac{1}{240} \text{Tr} \left\{ -a^5 - 2a^3 S_{\mu\mu} - a^2 S_{\mu}^2 - a^3 \Gamma_{\mu\nu}^2 - \frac{2}{3} a^2 \Gamma_{\mu\nu} a \Gamma_{\mu\nu} + \right. \\
&\quad + \frac{2}{3} a^2 S_{\mu} K_{\nu\nu\mu} - \frac{2}{3} S_{\mu} S_{\nu} a \Gamma_{\mu\nu} - a S_{\mu\mu} S_{\nu\nu} - \frac{2}{3} S_{\mu\mu} S_{\nu}^2 - \\
&\quad - \frac{2}{7} a^2 \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu} - \frac{8}{21} a \Gamma_{\mu\nu} a \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu} + \\
&\quad + \frac{4}{7} a^2 K_{\mu\mu\nu} K_{\alpha\alpha\nu} + \frac{3}{7} a K_{\mu\mu\nu} a K_{\alpha\alpha\nu} - \\
&\quad - \frac{8}{7} a S_{\mu\mu} \Gamma_{\nu\alpha} + \frac{4}{7} a S_{\mu} K_{\nu\nu\alpha} \Gamma_{\mu\alpha} + \\
&\quad + \frac{8}{7} a S_{\mu} \Gamma_{\mu\nu} K_{\alpha\alpha\nu} - \frac{4}{21} a \Gamma_{\mu\nu} S_{\alpha\alpha} \Gamma_{\mu\nu} - \\
&\quad - \frac{11}{21} S_{\mu}^2 \Gamma_{\nu\alpha}^2 + \frac{20}{21} S_{\mu} K_{\nu\nu\alpha} a \Gamma_{\mu\alpha} + \\
&\quad + \frac{2}{21} S_{\mu} S_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\nu} - \frac{10}{21} S_{\mu} S_{\nu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu} + \frac{2}{7} S_{\mu} \Gamma_{\mu\nu} S_{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu} + \\
&\quad + \frac{1}{42} S_{\mu} \Gamma_{\nu\alpha} S_{\mu} \Gamma_{\nu\alpha} + \frac{8}{21} S_{\mu\mu} S_{\nu} K_{\alpha\alpha\nu} - \frac{4}{21} S_{\mu} S_{\nu} K_{\mu\alpha\alpha\nu} + \\
&\quad + \frac{1}{14} S_{\mu\nu\nu} S_{\mu\alpha\alpha} - \frac{17}{84} a \Gamma_{\mu\nu}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 - \frac{1}{21} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\mu\beta} \Gamma_{\beta\alpha} - \\
&\quad - \frac{1}{21} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\mu} - \frac{5}{84} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^2 \Gamma_{\mu\nu} - \frac{13}{84} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta} - \\
&\quad - \frac{5}{21} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu} - \frac{2}{21} a K_{\mu\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} K_{\beta\beta\alpha} - \frac{2}{7} a \Gamma_{\mu\nu} K_{\mu\alpha\beta} K_{\nu\alpha\beta} - \\
&\quad - \frac{4}{21} a \Gamma_{\mu\nu} K_{\nu\alpha\alpha\beta} \Gamma_{\beta\mu} - \frac{2}{21} a \Gamma_{\mu\nu} K_{\alpha\alpha\mu} K_{\beta\beta\nu} - \frac{4}{21} S_{\mu\mu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\nu} - \\
&\quad - \frac{4}{21} S_{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\beta} + \frac{2}{7} S_{\mu} K_{\nu\nu\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^2 - \frac{2}{7} S_{\mu} K_{\nu\nu\alpha} \Gamma_{\mu\beta} \Gamma_{\beta\alpha} + \\
&\quad \left. + \frac{2}{21} S_{\mu} \Gamma_{\mu\nu} K_{\alpha\alpha\beta} \Gamma_{\beta\nu} - \frac{1}{7} a K_{\mu\nu\nu\alpha} K_{\mu\beta\beta\alpha} + \frac{2}{21} a K_{\mu\nu\nu\alpha} K_{\alpha\beta\beta\mu} - \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{28}S_{\mu\nu\nu}\Gamma_{\alpha\beta}^2 - \frac{1}{42}S_{\mu\mu}K_{\nu\nu\alpha}K_{\beta\beta\alpha} - \frac{2}{7}S_{\mu\mu}K_{\nu\alpha\alpha\beta}\Gamma_{\nu\beta} + \\
 & + \frac{1}{7}S_{\mu}K_{\nu\nu\alpha\alpha\beta}\Gamma_{\mu\beta} - \frac{47}{126}\Gamma_{\mu\nu}^2\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha} - \\
 & - \frac{11}{189}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\mu\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} + \frac{1}{63}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\mu\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha} + \\
 & + \frac{37}{945}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\mu} + \frac{1}{126}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\alpha\mu}\Gamma_{\beta\gamma} + \\
 & + \frac{1}{945}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\gamma\mu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma} - \frac{8}{189}K_{\mu\mu\nu}K_{\nu\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha} - \\
 & - \frac{10}{189}K_{\mu\mu\nu}K_{\alpha\alpha\nu}\Gamma_{\beta\gamma}^2 + \frac{2}{21}K_{\mu\mu\nu}K_{\alpha\alpha\beta}\Gamma_{\nu\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} + \\
 & + \frac{4}{63}K_{\mu\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}K_{\beta\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha} + \frac{5}{378}K_{\mu\mu\nu}\Gamma_{\alpha\beta}K_{\gamma\gamma\nu}\Gamma_{\alpha\beta} - \\
 & - \frac{61}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^2 + \frac{22}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\mu\beta}\Gamma_{\gamma\alpha}\Gamma_{\beta\gamma} - \\
 & - \frac{16}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\mu} - \frac{10}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\gamma\mu}\Gamma_{\beta\gamma} - \\
 & - \frac{2}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\mu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma} - \frac{4}{63}K_{\mu\nu\alpha}^2\Gamma_{\beta\gamma}^2 - \\
 & - \frac{4}{189}K_{\mu\nu\alpha}K_{\mu\alpha\beta}\Gamma_{\nu\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} - \frac{4}{189}K_{\mu\nu\alpha}K_{\mu\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\nu} - \\
 & - \frac{2}{63}K_{\mu\nu\alpha}K_{\beta\nu\alpha}\Gamma_{\mu\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} + \frac{2}{63}K_{\mu\nu\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}K_{\mu\beta\gamma}\Gamma_{\beta\gamma} + \\
 & + \frac{2}{189}K_{\mu\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}K_{\mu\nu\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} - \frac{1}{42}K_{\mu\nu\nu\alpha}K_{\alpha\beta\gamma}\Gamma_{\beta\gamma} + \\
 & + \frac{1}{63}K_{\mu\nu\nu\alpha}K_{\mu\beta\beta\gamma}\Gamma_{\alpha\gamma} + \frac{4}{63}K_{\mu\nu\nu\alpha}K_{\alpha\beta\beta\gamma}\Gamma_{\mu\gamma} - \\
 & - \frac{5}{63}K_{\mu\nu\nu\alpha}K_{\beta\beta\mu}K_{\gamma\gamma\alpha} + \frac{1}{126}K_{\mu\mu\nu\nu\alpha}K_{\beta\beta\gamma\gamma\alpha} \} + \text{h.c.}
 \end{aligned}$$

Здесь операция эрмитова сопряжения (h.c.) определена как

$$\begin{aligned}
 a^\dagger &= a, \quad (S_{\mu\dots})^\dagger = S_{\mu\dots}, \\
 (\Gamma_{\mu\nu})^\dagger &= -\Gamma_{\mu\nu}, \quad (K_{\alpha\mu\nu\dots})^\dagger = -K_{\alpha\mu\nu\dots}.
 \end{aligned}$$

Наши выражения для коэффициентов теплопроводности $h_{4,5}$ оказываются эквивалентными результатам работ [51,52], использующих минимальные базисы, отличные от используемого нами. В то же время в $\text{Tr } h_4$ мы обнаружили некоторые расхождения между результатом наших вычислений [50] и работой [53] в той части, которая содержит члены с 6 и 8 индексами:

$$(2\text{Tr } h_4) [50] - (24\text{Tr } h_4) [53] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{8}{15}ad_\mu^2d_\nu d_\alpha^2d_\nu + \frac{8}{15}ad_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\nu d_\alpha - \frac{8}{15}ad_\mu d_\nu^2d_\mu d_\alpha^2 + \\
&+ \frac{8}{15}ad_\mu d_\nu d_\mu d_\nu d_\alpha^2 + \frac{16}{15}ad_\mu d_\nu d_\alpha^2d_\nu d_\mu - \frac{16}{15}ad_\mu d_\nu d_\alpha d_\nu d_\alpha d_\mu - \\
&- \frac{16}{105}d_\mu^2d_\nu^2d_\alpha^2d_\beta^2 - \frac{16}{105}d_\mu^2d_\nu^2d_\alpha d_\beta^2d_\alpha + \frac{64}{105}d_\mu^2d_\nu^2d_\alpha d_\beta d_\alpha d_\beta + \\
&+ \frac{32}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\nu d_\beta^2d_\alpha - \frac{64}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\nu d_\beta d_\alpha d_\beta + \frac{16}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta^2d_\nu d_\alpha + \\
&+ \frac{32}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta d_\nu d_\alpha d_\beta - \frac{16}{35}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta d_\nu d_\beta d_\alpha - \frac{16}{35}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta d_\alpha d_\nu d_\beta + \\
&+ \frac{16}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta d_\alpha d_\beta d_\nu - \frac{32}{105}d_\mu d_\nu d_\mu d_\nu d_\alpha d_\beta d_\alpha d_\beta + \\
&+ \frac{64}{105}d_\mu d_\nu d_\mu d_\alpha d_\nu d_\beta d_\alpha d_\beta - \frac{32}{105}d_\mu d_\nu d_\mu d_\alpha d_\beta d_\nu d_\alpha d_\beta + \\
&+ \frac{32}{105}d_\mu d_\nu d_\mu d_\alpha d_\beta d_\nu d_\beta d_\alpha .
\end{aligned}$$

Эти отклонения возникают из членов соответствующего выражения работы [53]:

$$\left(+\frac{2}{5}S^\alpha{}_\alpha\Gamma_{\mu\nu}^2 + \frac{4}{105}\{\Gamma_{\alpha\beta} | K^\rho{}_{\rho\mu} | K^{\mu\alpha\beta}\}\right),$$

где $\{A | B | C\} \equiv ABC + CBA$. Соответствующая часть нашего выражения представлена членами

$$\left(+\frac{2}{15}S^\alpha{}_\alpha\Gamma_{\mu\nu}^2 + \frac{16}{105}K^{\mu\alpha}{}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu\rho}\Gamma_{\rho\mu}\right).$$

Для проверки наших результатов мы также убедились в том, что получаемые нами коэффициенты удовлетворяют соотношению [53]:

$$\partial(\text{Tr } h_n)/\partial a = -h_{n-1}.$$

Мы также приводим “минимальные” части коэффициентов h_5, h_6 и h_7 , соответствующие неисчезающим при $V_\mu = A_\mu = 0$ членам:

$$\begin{aligned}
\text{Tr } h_5^{\min} &= \frac{1}{120}\text{Tr} \left\{ -a^5 + 3a^2S_\mu^2 + 2aS_\mu aS_\mu - aS_{\mu\nu}^2 - \frac{5}{3}S_\mu S_\nu S_{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{14}S_{\mu\nu\alpha}^2 \right\}, \\
\text{Tr } h_6^{\min} &= \frac{1}{720}\text{Tr} \left\{ a^6 - 4a^3S_\mu^2 - 6a^2S_\mu aS_\mu + \frac{12}{7}a^2S_{\mu\nu}^2 + \frac{9}{7}aS_{\mu\nu} aS_{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{26}{7}aS_{\mu\nu} S_\mu S_\nu + \frac{18}{7}aS_\mu S_{\mu\nu} S_\nu + \frac{26}{7}aS_\mu S_\nu S_{\mu\nu} + \frac{9}{7}S_\mu^2 S_\nu^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{17}{14} S_\mu S_\nu S_\mu S_\nu - \frac{3}{7} a S_{\mu\nu\alpha}^2 - \frac{11}{21} S_{\mu\nu} S_{\nu\alpha} S_{\mu\alpha} - S_\mu S_{\mu\nu\alpha} S_{\nu\alpha} - \\
 & - S_\mu S_{\nu\alpha} S_{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{42} S_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \Big\}, \\
 \text{Tr } h_7^{\min} = & \frac{1}{5040} \text{Tr} \Big\{ -a^7 + 5a^4 S_\mu^2 + 8a^3 S_\mu a S_\mu + \frac{9}{2} a^2 S_\mu a^2 S_\mu - \\
 & - \frac{5}{2} a^3 S_{\mu\nu}^2 - \frac{9}{2} a^2 S_{\mu\nu} a S_{\mu\nu} - 6a^2 S_{\mu\nu} S_\mu S_\nu - \frac{7}{2} a^2 S_\mu S_{\mu\nu} S_\nu - \\
 & - 6a^2 S_\mu S_\nu S_{\mu\nu} - \frac{7}{2} a S_\mu^2 S_\nu^2 - \frac{11}{2} a S_\mu a S_{\mu\nu} S_\nu - \frac{11}{2} a S_\mu a S_\nu S_{\mu\nu} - \\
 & - \frac{17}{2} a S_\mu S_\nu a S_{\mu\nu} - \frac{17}{2} a S_\mu S_\nu S_\mu S_\nu + \\
 & + \frac{5}{6} a^2 S_{\mu\nu\alpha}^2 + \frac{2}{3} a S_{\mu\nu\alpha} a S_{\mu\nu\alpha} + \\
 & + \frac{17}{6} a S_{\mu\nu\alpha} S_\mu S_{\nu\alpha} + \frac{5}{2} a S_{\mu\nu\alpha} S_{\nu\alpha} S_\mu + \frac{5}{3} a S_{\mu\nu} S_{\mu\nu\alpha} S_\alpha + \\
 & + \frac{11}{3} a S_{\mu\nu} S_{\nu\alpha} S_{\mu\alpha} + \frac{17}{6} a S_{\mu\nu} S_\alpha S_{\mu\nu\alpha} + \frac{5}{3} a S_\mu S_{\mu\nu\alpha} S_{\nu\alpha} + \\
 & + \frac{5}{2} a S_\mu S_{\nu\alpha} S_{\mu\nu\alpha} + \frac{5}{3} S_\mu^2 S_{\nu\alpha}^2 + \\
 & + \frac{11}{6} S_\mu S_{\nu\alpha} S_\mu S_{\nu\alpha} + \frac{35}{18} S_\mu S_{\nu\alpha} S_\alpha S_{\mu\nu} + \\
 & + \frac{97}{18} S_\mu S_\nu S_{\mu\alpha} S_{\nu\alpha} + \frac{43}{18} S_\mu S_\nu S_{\nu\alpha} S_{\mu\alpha} + \frac{35}{9} S_\mu S_\nu S_\alpha S_{\mu\nu\alpha} - \\
 & - \frac{1}{6} a S_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{16}{15} S_{\mu\nu} S_{\mu\alpha\beta} S_{\nu\alpha\beta} - \frac{7}{10} S_{\mu\nu} S_{\alpha\beta} S_{\mu\nu\alpha\beta} - \\
 & - \frac{1}{2} S_\mu S_{\mu\nu\alpha\beta} S_{\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2} S_\mu S_{\nu\alpha\beta} S_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{132} S_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}^2 \Big\}.
 \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов теплопроводности, до $\text{Tr } h_6^{\min}$ включительно, были также приведены в работе [56], кроме того, в работах [57] можно найти выражение для $\text{Tr } h_8^{\min}$. Наши вычисления минимальных членов коэффициентов теплопроводности высших порядков согласуются с результатами других групп.

Особый интерес к вычислению коэффициентов ядра уравнения теплопроводности придает то обстоятельство, что использование этого метода для получения эффективного лагранжиана из микроскопической теории является альтернативой прямому вычислению фейнмановских диаграмм. При этом УФ-расходимостям фейнмановских диаграмм будет соответствовать расходимость интегралов по собственному времени на нижнем пределе. Преимуществом данного метода является то, что эффективный лагранжиан можно получить

в наиболее общем виде как разложение обобщенных локальных операторов, которые будут иметь различный вид в различных моделях.

Так, например, полученные выше выражения для коэффициентов h_i описывают эффективный лагранжиан рассеяния света на свете в квантовой электродинамике как для частиц со спином $1/2$, так и для бесспиновых частиц. В первом случае мы имеем $\Gamma_\mu = ieQ\mathcal{A}_\mu$, $a = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Gamma_{\mu\nu}$ и

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2\mu^4} \text{Tr} h_4 = -\frac{\alpha^2}{180\mu^4} \left[5(\mathcal{F}_{\mu\nu}^2)^2 - 14(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\nu\alpha})^2 \right], \quad (4.5)$$

где $\alpha = e^2/(4\pi)$ и $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu$ — тензор напряженности электромагнитного поля. Выражение (4.5) совпадает с известным результатом Эйлера — Гейзенберга [54] в КЭД. В случае бесспиновых частиц имеем $\Gamma_\mu = ieQ\mathcal{A}_\mu$, $a = 0$ и

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2\mu^4} \text{Tr} h_4 = -\frac{\alpha^2}{1440\mu^4} \left[5(\mathcal{F}_{\mu\nu}^2)^2 + (\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\nu\alpha})^2 \right].$$

Последнее выражение также совпадает с известным результатом скалярной электродинамики [55]. В этих простых примерах использовались лишь несколько членов из выражения для коэффициента h_4 , которые в случае абелевой симметрии $U(1)$ (все операторы коммутируют) записываются как

$$\text{Tr} h_4 \rightarrow \frac{1}{24} \text{Tr} \left[a^4 + a^2\Gamma_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{12}\Gamma_{\mu\nu}^2\Gamma_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{15}(\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\alpha})^2 \right].$$

Для получения бозонизованного лагранжиана в модели НИЛ требуются более полные выражения, которые используются и для других задач, например, для описания свойств электрослабого сфалерона [56], а также для задач квантовой гравитации [48] и в физике высоких температур. Подробную библиографию статей, посвященных различным физическим применениям коэффициентов теплопроводности, можно найти в работах [53, 58]. Поэтому полученные нами результаты и используемые для этого программы аналитических вычислений представляют гораздо более общий интерес, чем только бозонизация модели НИЛ.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕЗОННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ

Эффективные мезонные лагранжианы в терминах коллективных полей возникают из кваркового детерминанта после вычисления следа по дираковским матрицам в $\text{Tr} h_i(x)$. Здесь мы ограничимся только членами в выражениях для h_1, \dots, h_4 , дающими вклад в импульсное разложение кваркового

детерминанта, включая p^6 -порядок (члены, дающие $O(p^8)$ -вклады, опущены):

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 1, \\
 h_1 &= -a, \\
 \text{Tr } h_2 &= \text{Tr} \left\{ \frac{1}{12} (\Gamma_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} a^2 \right\}, \\
 \text{Tr } h_3 &= -\frac{1}{12} \text{Tr} \left\{ 2a^3 - S_\mu S^\mu + a (\Gamma_{\mu\nu})^2 - \frac{2}{45} (\Gamma_{\alpha\beta\gamma})^2 - \frac{1}{9} (\Gamma^\alpha_{\alpha\beta})^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{45} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu} \right\}, \\
 \text{Tr } h_4 &= \text{Tr} \left\{ \frac{1}{24} a^4 + \frac{1}{12} (a^2 S^\mu_{\mu} + a S_\mu S^\mu) + \frac{1}{720} (7(S^\mu_{\mu})^2 - (S_{\mu\nu})^2) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{30} a^2 (\Gamma_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{120} (a \Gamma_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{144} a [\Gamma^\mu_{\mu\nu}, S^\nu] + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{40} a \left(\Gamma_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \frac{11}{9} S_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \right) \right\}, \\
 \text{Tr } h_5^{\min} &= -\text{Tr} \left\{ \frac{1}{120} a^2 (a^3 - 3S_\mu S^\mu) - \frac{1}{60} (aS_\mu)^2 \right\}, \\
 \text{Tr } h_6^{\min} &= \frac{1}{720} \text{Tr } a^6.
 \end{aligned}$$

“Расходящаяся” часть эффективного мезонного лагранжиана определяется коэффициентами h_0, h_1 и h_2 разложения (3.7):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{div}} &= \frac{N_c}{16\pi^2} \text{tr} \left\{ \Gamma \left(0, \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \left[D^\mu (\Phi + m_0) \bar{D}_\mu (\Phi + m_0)^\dagger - \mathcal{M}^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} \left((F_{\mu\nu}^L)^2 + (F_{\mu\nu}^R)^2 \right) \right] + 2 \left[\Lambda^2 e^{-\mu^2/\Lambda^2} - \mu^2 \Gamma \left(0, \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \right] \mathcal{M} \right\}, \\
 &\hspace{15em} (5.1)
 \end{aligned}$$

где $\mathcal{M} = (\Phi + m_0)(\Phi + m_0)^\dagger - \mu^2$, $F_{\mu\nu}^{R/L} = F_{\mu\nu}^V \pm F_{\mu\nu}^A$. Ковариантные производные D_μ и \bar{D}_μ определены следующим образом:

$$D_\mu * = \partial_\mu * + (A_\mu^L * - * A_\mu^R), \quad \bar{D}_\mu * = \partial_\mu * + (A_\mu^R * - * A_\mu^L).$$

Полагая $\Sigma \approx \mu$ и поэтому $\Phi = \mu\Omega^2 \equiv \mu U$, можно представить p^2 -часть мезонного лагранжиана (5.1) в виде

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{F_0^2}{4} \text{tr} (L_\mu L^\mu) + \frac{F_0^2}{4} \text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger), \quad (5.2)$$

где $L_\mu = D_\mu U U^\dagger$. Затравочная константа F_0 и мезонная массовая матрица $\chi = \text{diag}(\chi_u^2, \chi_d^2, \dots, \chi_n^2)$ заданы соотношениями

$$F_0^2 = y N_c \mu^2 / (4\pi^2), \quad \chi_i^2 = m_0^i \mu / (G_1 F_0^2) = -2m_0^i \langle \bar{q}q \rangle F_0^{-2}, \quad (5.3)$$

где $y = \Gamma(0, \mu^2/\Lambda^2)$.

Эффективный лагранжиан в p^4 -порядке кирального разложения возникает из логарифмически расходящейся части кваркового детерминанта и из коэффициентов h_3 и h_4 , дающих вклад в конечную часть. Применяя свойства ковариантных производных

$$\begin{aligned} D_\mu(O_1 O_2) &= (D_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}'_\mu O_2) = (D'_\mu O_1) O_2 + O_1 (D_\mu O_2), \\ \overline{D}'_\mu(O_1 O_2) &= (\overline{D}'_\mu O_1) O_2 + O_1 (D'_\mu O_2) = (\overline{D}'_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}'_\mu O_2), \\ D'_\mu(O_1 O_2) &= (D'_\mu O_1) O_2 + O_1 (D'_\mu O_2) = (D_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}'_\mu O_2), \\ \overline{D}'_\mu(O_1 O_2) &= (\overline{D}'_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}'_\mu O_2) = (\overline{D}'_\mu O_1) O_2 + O_1 (D_\mu O_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]O &= F_{\mu\nu}^L O - O F_{\mu\nu}^R, & [\overline{D}'_\mu, \overline{D}'_\nu]O &= F_{\mu\nu}^R O - O F_{\mu\nu}^L, \\ [D'_\mu, D'_\nu]O &= [F_{\mu\nu}^L, O], & [\overline{D}'_\mu, \overline{D}'_\nu]O &= [F_{\mu\nu}^R, O], \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$D'_\mu * = \partial_\mu * + [A_\mu^L, *], \quad \overline{D}'_\mu * = \partial_\mu * + [A_\mu^R, *],$$

можно представить соответствующую конечную часть эффективного лагранжиана в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fin}}^{(p^4)} &= \frac{N_c}{32\pi^2 \mu^4} \text{tr} \left\{ \frac{1}{3} \left[\mu^2 D^2 \Phi \overline{D}^2 \Phi^\dagger - (D^\mu \Phi \overline{D}'_\mu \Phi^\dagger)^2 \right] + \frac{1}{6} (D_\mu \Phi \overline{D}'_\nu \Phi^\dagger)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \mu^2 \left[\mathcal{M} D_\mu \Phi \overline{D}'^\mu \Phi^\dagger + \overline{\mathcal{M}} \overline{D}'_\mu \Phi^\dagger D_\mu \Phi \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \mu^2 \left[D^\mu \Phi \overline{D}'^\nu \Phi^\dagger F_{\mu\nu}^L + \overline{D}'^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi F_{\mu\nu}^R \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \mu^2 F_{\mu\nu}^R \Phi^\dagger F^{L\mu\nu} \Phi - \frac{1}{6} \mu^4 \left[(F_{\mu\nu}^L)^2 + (F_{\mu\nu}^R)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\overline{\mathcal{M}} = (\Phi + m_0)^\dagger (\Phi + m_0) - \mu^2$. Мы будем использовать приближение $\Gamma(k, \mu^2/\Lambda^2) \approx \Gamma(k)$, которое хорошо выполняется при $k \geq 1$ и $\mu^2/\Lambda^2 \ll 1$.

Объединяя лагранжиан (5.5) с p^4 -вкладами, возникающими из расходящейся части (5.1), получим эффективный p^4 -лагранжиан, который в самом общем случае можно представить в виде

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_4^{G\&L}(L'_i, H'_i) + \lambda_1 \text{tr} \left(D^2 U \overline{D}^2 U^\dagger \right) + \lambda_2 \text{tr} \left(D^2 U \chi^\dagger + \chi \overline{D}^2 U^\dagger \right), \quad (5.6)$$

где $\mathcal{L}_4^{G\&L}(L_i, H_i)$ — часть p^4 -лагранжиана, содержащая минимальную комбинацию линейно независимых членов, соответствующих структурным коэффициентам L_i ($i=1, \dots, 10$) и $H_{1,2}$ Гассера и Лейтвилера [39] *:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_4^{G\&L}(L_i, H_i) = & \left(L_1 - \frac{1}{2}L_2 \right) (\text{tr } L_\mu L^\mu)^2 + \\
 & + L_2 \text{tr} \left(\frac{1}{2}[L_\mu, L_\nu]^2 + 3(L_\mu L^\mu)^2 \right) + \\
 & + L_3 \text{tr} ((L_\mu L^\mu)^2) - L_4 \text{tr} (L_\mu L^\mu) \text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) - \\
 & - L_5 \text{tr} [L_\mu L^\mu (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)] + L_6 \left(\text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \right)^2 + \\
 & + L_7 \left(\text{tr} (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \right)^2 + L_8 \text{tr} (\chi U^\dagger \chi U^\dagger + U \chi^\dagger U \chi^\dagger) - \\
 & - L_9 \text{tr} \left(F_{\mu\nu}^R R^\mu R^\nu + F_{\mu\nu}^L L^\mu L^\nu \right) - \\
 & - L_{10} \text{tr} \left(U^\dagger F_{\mu\nu}^R U F^{L\mu\nu} \right) - \\
 & - H_1 \text{tr} \left((F_{\mu\nu}^R)^2 + (F_{\mu\nu}^L)^2 \right) + H_2 \text{tr} (\chi \chi^\dagger). \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Лагранжиан (5.6) содержит два лишних члена со структурными коэффициентами $\lambda_{1,2}$, отсутствующих в стандартном представлении p^4 -лагранжиана Гассера — Лейтвилера (5.7).

Согласно теореме эквивалентности, нелинейный эффективный лагранжиан определен с точностью до преобразований псевдоскалярных полей, не меняющих его кинетическую часть [64, 65]. Такие преобразования полей влияют только на многочастичные пропагаторы с внешними линиями вне массовой поверхности, в то время как S -матрицы на массовой поверхности остаются идентичными. Это свойство эквивалентности используется для устранения лишних, например, так называемых “тахсионных” членов с двойными производными, которые возникают при бозонизации эффективных кварковых моделей. В работах [39] с этой целью использованы уравнения движения. Следует отметить, что в p^4 -порядке использование преобразования полей приводит в точности к тому же результату, что и наивное применение уравнений движений, возникающих из p^2 -части эффективного лагранжиана. Однако можно показать, что в следующих порядках импульсного разложения $O(p^6)$ преобразования полей приводят к появлению вкладов, которые могут быть утеряны при использовании только уравнений движений (см. [37, 63]).

Применяя последовательное ковариантное дифференцирование к усло-

* Следует отметить разницу в наших определениях тензоров $F^{L,R}$: $F^{L,R} = -iF_{G\&L}^{R,L}$.

вию унитарности $UU^\dagger = 1$, получим соотношения

$$\begin{aligned} D^2UU^\dagger &= \frac{1}{2}(D^2UU^\dagger - U\bar{D}^2U^\dagger) - D^\mu U\bar{D}^\mu U^\dagger, \\ U\bar{D}^2U^\dagger &= -\frac{1}{2}(D^2UU^\dagger - U\bar{D}^2U^\dagger) - D^\mu U\bar{D}^\mu U^\dagger. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Используя (5.8) и $\text{tr}(D^2UU^\dagger - U\bar{D}^2U^\dagger) = 0$, последние два члена в (5.6) можно привести к виду, наиболее удобному для применения преобразований полей:

$$\begin{aligned} \text{tr}(D^2U\bar{D}^2U^\dagger) &= \text{tr}(D_\mu U\bar{D}^\mu U^\dagger D_\nu U\bar{D}^\nu U^\dagger) + \frac{1}{12}(\text{tr}(\chi U^\dagger - U\chi^\dagger))^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}\text{tr}(U\chi^\dagger U\chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) + \frac{1}{2}\text{tr}(\chi\chi^\dagger) - \\ &\quad - \frac{1}{4}\text{tr}\left((D^2UU^\dagger - U\bar{D}^2U^\dagger)\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}\right) - \frac{1}{4}\text{tr}\left((\chi U^\dagger - U\chi^\dagger)\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}\right), \\ \text{tr}(D^2U\chi^\dagger + \chi\bar{D}^2U^\dagger) &= -\text{tr}(D_\mu U\bar{D}^\mu U^\dagger(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger)) \\ &\quad + \frac{1}{6}(\text{tr}(\chi U^\dagger - U\chi^\dagger))^2 - \frac{1}{2}\text{tr}(U\chi^\dagger U\chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) + \text{tr}(\chi\chi^\dagger) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\text{tr}\left((\chi U^\dagger - U\chi^\dagger)\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}\right), \end{aligned}$$

где оператор $\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}$ имеет функциональный вид уравнения движений, возникающего из p^2 -лагранжиана (5.2):

$$\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}(U) = D^2UU^\dagger - U\bar{D}^2U^\dagger - \chi U^\dagger + U\chi^\dagger + \frac{1}{3}\text{tr}(\chi U^\dagger - U\chi^\dagger). \quad (5.9)$$

Тогда, выражение (5.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= \mathcal{L}_4^{G\&L}(L_i, H_i) + \\ &\quad + c_1 \text{tr}\left((D^2UU^\dagger - U\bar{D}^2U^\dagger)\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}\right) + c_2 \text{tr}\left((\chi U^\dagger - U\chi^\dagger)\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}\right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Штрихованные и нештрихованные структурные коэффициенты в (5.6) и (5.10) связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} L_1 &= L'_1, \quad L_2 = L'_2, \quad L_3 = L'_3 + \lambda_1, \quad L_4 = L'_4, \quad L_5 = L'_5 - \lambda_2, \\ L_6 &= L'_6, \quad L_7 = L'_7 + \frac{\lambda_1}{12} + \frac{\lambda_2}{6}, \quad L_8 = L'_8 - \frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{2}, \quad L_9 = L'_9, \\ L_{10} &= L'_{10}, \quad H_1 = H'_1, \quad H_2 = H'_2 + \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2, \\ c_1 &= -\frac{\lambda_1}{4}, \quad c_2 = -\frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{2}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае бозонизации модели НИЛ коэффициенты $\lambda_{1,2}$ определяются соотношениями $\lambda_1 = \frac{1}{6} \frac{N_c}{16\pi^2}$ и $\lambda_2 = -\frac{N_c}{16\pi^2} xy$.

Используя метод преобразования полей, можно избавиться от двух последних членов в лагранжиане (5.10). Для этого рассмотрим преобразование

$$U(x) = \exp(iS_2(V))V(x),$$

где $S_2(V)$ представляет собой самый общий вид генератора в p^2 -порядке импульсного разложения:

$$S_2(V) = i\alpha_1(D^2VV^\dagger - V\bar{D}^2V^\dagger) + i\alpha_2\left(\chi V^\dagger - V\chi^\dagger - \frac{1}{3}\text{tr}(\chi V^\dagger - V\chi^\dagger)\right)$$

с произвольными реальными параметрами α_1 и α_2 . Рассмотрим изменение функционального вида лагранжиана \mathcal{L}_2 (5.2) при преобразованиях полей *. Подставляя $U = \exp(iS)V$ в $\mathcal{L}_2(U)$ и отбрасывая полные производные, получим

$$\mathcal{L}_2(U) = \mathcal{L}_2(V) + \delta^{(1)}\mathcal{L}_2(V, S) + \delta^{(2)}\mathcal{L}_2(V, S) + \dots, \quad (5.11)$$

где верхние индексы в скобках обозначают степени S (или $D_\mu S, \dots$), и соответствующие вклады можно выразить в виде

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\mathcal{L}_2(V, S) &= \frac{F_0^2}{4}\text{tr}\left(iS\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}(V)\right) = O(p^4), \\ \delta^{(2)}\mathcal{L}_2(V, S) &= \frac{F_0^2}{4}\text{tr}\left(S(D_\mu VV^\dagger D'^\mu S - D'^\mu S D_\mu VV^\dagger - D'^2 S) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(\chi V^\dagger + V\chi^\dagger)S^2\right) = O(p^6), \\ \delta^{(3)}\mathcal{L}_2(V, S) &= O(p^2) \times O(S^3) = O(p^8). \end{aligned}$$

Последний член представляет интерес только при учете вкладов $O(p^8)$, поэтому здесь не приведен его явный вид.

В дальнейшем мы не будем предполагать равенства нулю выражения (5.9), несмотря на то, что оно имеет функциональный вид уравнений движений, возникающих из \mathcal{L}_2 . В случае, если

$$\alpha_1 = \frac{4c_1}{F_0^2} = -\frac{\lambda_1}{F_0^2}, \quad \alpha_2 = \frac{4c_2}{F_0^2} = -\frac{\lambda_1}{F_0^2} - \frac{2\lambda_2}{F_0^2},$$

*После преобразований полей лагранжианы $\mathcal{L}_n(U)$ содержат также производные полей V порядка выше, чем p^{2n} .

член $\delta^{(1)}\mathcal{L}_2(V, S_2)$ в точности сокращает последние два члена в (5.10) ($U \rightarrow V$ в p^4 -порядке), и эффективный p^4 -лагранжиан приводится к минимальному виду (5.7) со структурными константами $L_i = N_c/(16\pi^2) \cdot l_i$ и $H_i = N_c/(16\pi^2) \cdot h_i$, определяемыми соотношениями

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{24}, \quad l_2 = \frac{1}{12}, \quad l_3 = -\frac{1}{6}, \quad l_4 = 0, \quad l_5 = x(y-1), \quad l_6 = 0, \\ l_7 &= -\frac{1}{6}\left(xy - \frac{1}{12}\right), \quad l_8 = \left(\frac{1}{2}x - x^2\right)y - \frac{1}{24}, \quad l_9 = \frac{1}{3}, \quad l_{10} = -\frac{1}{6}, \\ h_1 &= -\frac{1}{6}\left(y - \frac{1}{2}\right), \\ h_2 &= -(x + 2x^2)y + \frac{1}{12} - 2x^2y\left(1 - \frac{\Lambda^2}{\mu^2y}e^{-\mu^2/\Lambda^2}\right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где

$$x = -\mu F_0^2/(2 \langle \bar{q}q \rangle), \quad y = 4\pi^2 F_0^2/(N_c \mu^2). \quad (5.13)$$

Структурные коэффициенты (5.12) согласуются с результатами, полученными в работе [20].

Рассмотрим теперь эффективный лагранжиан, полученный из бозонизации модели НИЛ в p^6 -порядке. Прежде всего, вклад в этот лагранжиан дают дополнительные члены, возникающие из $\mathcal{L}_{\text{fin}}^{(p^4)}$ (5.5) после подстановки $\Phi \rightarrow \Phi + m_0^*$, а также конечная часть эффективного действия $\mathcal{L}_{\text{fin}}^{(p^4)}$, соответствующая коэффициентам теплопроводности h_3, h_4, h_5 и h_6 (см. выражение (A.1) в Приложении). Вклады p^6 -порядка возникают также из $\delta^{(2)}\mathcal{L}_2(V, S_2)$ (5.12). Для явного представления этих вкладов удобно ввести операторы

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{tr} \left((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \{ D_\mu U U^\dagger, (D^\mu \chi U^\dagger + U D^\mu \chi^\dagger) \} \right), \\ A_2 &= \text{tr} \left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right) \text{tr} \left(D_\mu U U^\dagger (D^\mu \chi U^\dagger + U D^\mu \chi^\dagger) \right), \\ A_3 &= \text{tr} \left((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) D_\mu U U^\dagger (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) D^\mu U U^\dagger \right), \\ A_4 &= \text{tr} \left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right) \text{tr} \left(D_\mu U D^\mu U^\dagger (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \right), \\ A_5 &= \text{tr} \left((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) (D^2 \chi U^\dagger - U D^2 \chi^\dagger) \right), \\ A_6 &= \text{tr} \left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right) \text{tr} \left(D^2 \chi U^\dagger - U D^2 \chi^\dagger \right), \end{aligned}$$

в терминах которых изменения второго порядка в S_2 запишутся в виде

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \frac{F_0^2}{4} \left(-A_1 + \frac{2}{3}A_2 + A_3 + \frac{1}{3}A_4 + A_5 - \frac{1}{3}A_6 \right). \quad (5.14)$$

*Напомним, что в определение дираковского оператора (2.4) входит комбинация $\Phi + m_0$, причем m_0 является величиной p^2 -порядка.

При получении выражения (5.14) применялись отбрасывание полных производных и преобразования полей с генераторами p^4 -порядка. (Здесь мы опять использовали символ U для записи окончательных выражений после преобразований полей. Матрица U теперь содержит уже не исходные, а преобразованные интерполирующие поля.)

Другим источником p^6 -вкладов в бозонизованный лагранжиан является модификация \mathcal{L}_4 при преобразованиях полей, которую можно представить в виде

$$\mathcal{L}_4(U) = \mathcal{L}_4(V) + \delta^{(1)}\mathcal{L}_4(V, S) + O(p^8), \quad (5.15)$$

где

$$\delta^{(1)}\mathcal{L}_4(V, S) = \frac{F_0^2}{4} \text{tr} \left(iS \mathcal{O}_{EOM}^{(4)}(V) \right) = O(p^6).$$

Из лагранжиана (5.6) можно получить p^4 -вклад в оператор уравнения движения $\mathcal{O}_{EOM}^{(4)}(U)$:

$$\mathcal{O}_{EOM}^{(4)}(U) = \frac{4}{F_0} \left(E_4 - \frac{1}{3} \text{tr}(E_4) \right),$$

где

$$\begin{aligned} E_4 = & (2L'_1 - L'_2) \text{tr} (D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger) \cdot (-U \bar{D}^2 U^\dagger + D^2 U U^\dagger) + \\ & + 2L'_2 \left[-U \bar{D}_\mu (\bar{D}_\nu U^\dagger D^\mu U \bar{D}^\nu U^\dagger) + D_\mu (D_\nu U \bar{D}^\mu U^\dagger D^\nu U) U^\dagger \right] + \\ & + 2(2L'_2 + L'_3) \left[-U \bar{D}_\mu (\bar{D}^\mu U^\dagger D_\nu U \bar{D}^\nu U^\dagger) + \right. \\ & \quad \left. + D_\mu (D_\nu U \bar{D}^\nu U^\dagger D^\mu U) U^\dagger \right] + \\ & + L'_4 \left[\text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \cdot (D^2 U U^\dagger - U \bar{D}^2 U^\dagger) + \right. \\ & \quad \left. + \text{tr} (D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger) \cdot (U \chi^\dagger - \chi U^\dagger) \right] + \\ & + L'_5 \left[-U \bar{D}_\mu (\bar{D}^\mu U^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)) + D_\mu ((\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) D^\mu U) U^\dagger + \right. \\ & \quad \left. + U \chi^\dagger D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger - D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger \chi U^\dagger \right] + \\ & + 2L'_6 \text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \cdot (U \chi^\dagger - \chi U^\dagger) - \\ & - 2L'_7 \text{tr} (\chi U^\dagger - \chi^\dagger) \cdot (U \chi^\dagger + \chi U^\dagger) + \\ & + L'_8 \left[(U \chi^\dagger)^2 - (\chi U^\dagger)^2 \right] + \\ & + L'_9 \left[-U \bar{D}^\nu (F_{\mu\nu}^R \bar{D}^\mu U^\dagger) + D^\mu (D^\nu U F_{\mu\nu}^R) U^\dagger - \right. \\ & \quad \left. - U \bar{D}^\mu (\bar{D}^\nu U^\dagger F_{\mu\nu}^L) + D^\nu (F_{\mu\nu}^L D^\mu U) U^\dagger \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - L'_{10} \left[U F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\nu} - F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\nu} U^\dagger \right] + \\
& + \lambda'_1 \left[U \bar{D}^2 \bar{D}^2 U^\dagger - D^2 D^2 U U^\dagger \right] + \lambda'_2 \left[U \bar{D}^2 \chi^\dagger - D^2 \chi U^\dagger \right]. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

В конечном итоге эффективный p^6 -лагранжиан можно привести к минимальному числу линейно независимых структур с ненулевыми коэффициентами Q_i *:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_6 = & \text{tr} \left\{ Q_1 (L_\mu L_\nu L^\nu)^2 + \right. \\
& + Q_2 (L_\mu L^\mu)^3 + \\
& + Q_3 L_\alpha L^\alpha (L_\mu L_\nu)^2 + \\
& + Q_4 (L_\mu L_\nu L_\alpha)^2 + \\
& + Q_5 (L_\mu L_\nu L^\mu)^2 + \\
& + Q_6 \left(L_\mu L^\mu D_\alpha D_\nu U \bar{D}^\alpha \bar{D}^\nu U^\dagger + R_\mu R^\mu \bar{D}_\alpha \bar{D}_\nu U^\dagger D^\alpha D^\nu U \right) + \\
& + Q_7 \left(L_\mu L_\nu D_\alpha D^\nu U \bar{D}^\alpha \bar{D}^\mu U^\dagger + R_\mu R_\nu \bar{D}_\alpha \bar{D}^\nu U^\dagger D^\alpha D^\mu U \right) + \\
& + Q_8 \left(L_\mu L_\nu D_\alpha D^\mu U \bar{D}^\alpha \bar{D}^\nu U^\dagger + R_\mu R_\nu \bar{D}_\alpha \bar{D}^\mu U^\dagger D^\alpha D^\nu U \right) + \\
& + Q_9 L_\mu L_\nu L^\nu L^\mu (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) + \\
& + Q_{10} (L_\mu L_\nu)^2 (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) + \\
& + Q_{11} (L_\mu L^\mu)^2 (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) + \\
& + Q_{12} \left(\chi R^\mu U^\dagger (D_\mu D_\nu U + D_\nu D_\mu U) U^\dagger L^\nu + \right. \\
& \quad \left. + \chi^\dagger L^\mu U (\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu U^\dagger + \bar{D}_\nu \bar{D}_\mu U^\dagger) U R^\nu \right) + \\
& + Q_{13} \left[\chi (\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu U^\dagger L^\mu L^\nu + R^\nu R^\mu U \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu U^\dagger) + \right. \\
& \quad \left. + \chi^\dagger (D_\mu D_\nu U R^\mu R^\nu + L^\nu L^\mu D_\mu D_\nu U) \right] + \\
& + Q_{14} \left[\chi \left(U^\dagger D_\mu D_\nu U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger + \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu U^\dagger D^\mu D^\nu U U^\dagger \right) + \right. \\
& \quad \left. + \chi^\dagger \left(U \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu U^\dagger D^\mu D^\nu U + D_\mu D_\nu U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger U \right) \right] +
\end{aligned}$$

*В более общем рассмотрении [66] неаномальная часть эффективного p^6 -лагранжиана включает в себя гораздо большее число линейно независимых членов. Однако в рассматриваемом нами конкретном случае бозонизации модели НИЛ ненулевыми оказываются только 65 структурных коэффициентов.

$$\begin{aligned}
 & +Q_{15}\chi^\dagger L_\mu \chi R^\mu + \\
 & +Q_{16}\left(\chi^\dagger \chi R_\mu R^\mu + \chi \chi^\dagger L_\mu L^\mu\right) + \\
 & +Q_{17}\left(U \chi^\dagger U \chi^\dagger L_\mu L^\mu + U^\dagger \chi U^\dagger \chi R_\mu R^\mu\right) + \\
 & +Q_{18}\left[(\chi U^\dagger L_\mu)^2 + (\chi^\dagger U R_\mu)^2\right] + \\
 & +Q_{19}\left[(\chi U^\dagger)^3 + (\chi^\dagger U)^3\right] + \\
 & +Q_{20}\left(U^\dagger \chi \chi^\dagger \chi + U \chi^\dagger \chi \chi^\dagger\right) + \\
 & +Q_{21}\left(F_{\mu\nu}^L \{L_\alpha L^\alpha, L^\mu L^\nu\} + F_{\mu\nu}^R \{R_\alpha R^\alpha, R^\mu R^\nu\}\right) + \\
 & +Q_{22}\left[F_{\mu\nu}^L (L^\mu L_\alpha L^\nu L^\alpha + L_\alpha L^\mu L^\alpha L^\nu) + \right. \\
 & \quad \left. + F_{\mu\nu}^R (R^\mu R_\alpha R^\nu R^\alpha + R_\alpha R^\mu R^\alpha R^\nu)\right] + \\
 & +Q_{23}\left(F_{\mu\nu}^L L_\alpha L^\mu L^\nu L^\alpha + F_{\mu\nu}^R R_\alpha R^\mu R^\nu R^\alpha\right) + \\
 & +Q_{24}\left(F_{\mu\nu}^L L^\mu L_\alpha L^\alpha L^\nu + F_{\mu\nu}^R R^\mu R_\alpha R^\alpha R^\nu\right) + \\
 & +Q_{25}\left(F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu} L_\mu L^\nu L^\mu - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu} R_\mu R^\nu R^\mu\right) + \\
 & +Q_{26}\left(F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu} \{L^\nu, L_\mu L^\mu\} - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu} \{R^\nu, R_\mu R^\mu\}\right) + \\
 & +Q_{27}\left[F_{\mu\nu}^L \left(D^\mu D^\alpha U U^\dagger L_\alpha L^\nu - L^\nu L_\alpha U \bar{D}^\mu \bar{D}^\alpha U^\dagger\right) + \right. \\
 & \quad \left. + F_{\mu\nu}^R \left(\bar{D}^\mu \bar{D}^\alpha U^\dagger U R_\alpha R^\nu - R^\nu R_\alpha U^\dagger D^\mu D^\alpha U\right)\right] + \\
 & +Q_{28}\left[F_{\mu\nu}^L \left(L^\nu D^\mu D^\alpha U U^\dagger L_\alpha - L_\alpha U \bar{D}^\mu \bar{D}^\alpha U^\dagger L^\nu\right) + \right. \\
 & \quad \left. + F_{\mu\nu}^R \left(R^\nu \bar{D}^\mu \bar{D}^\alpha U^\dagger U R_\alpha - R_\alpha U^\dagger D^\mu D^\alpha U R^\nu\right)\right] + \\
 & +Q_{29}\left[(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \{F_{\mu\nu}^L, L^\mu L^\nu\} + (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) \{F_{\mu\nu}^R, R^\mu R^\nu\}\right] + \\
 & +Q_{30}\left[(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) [F_{\mu\nu}^L, L^\mu L^\nu] + (\chi^\dagger U - U^\dagger \chi) [F_{\mu\nu}^R, R^\mu R^\nu]\right] + \\
 & +Q_{31}\left[F_{\mu\nu}^L L^\mu (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) L^\nu + F_{\mu\nu}^R R^\mu (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) R^\nu\right] + \\
 & +Q_{32}\left[\chi \left(\bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger F_{\mu\nu}^L - F_{\mu\nu}^R \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger\right) + \right. \\
 & \quad \left. + \chi^\dagger \left(D^\mu D^\nu U F_{\mu\nu}^R - F_{\mu\nu}^L D^\mu D^\nu U\right)\right] + \\
 & +Q_{33}\left[\chi \left(U^\dagger F_{\mu\nu}^L D^\mu D^\nu U U^\dagger - U^\dagger D^\mu D^\nu U F_{\mu\nu}^R U^\dagger\right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\chi^\dagger \left(U F_{\mu\nu}^R \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger U - U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger F_{\mu\nu}^L U \right) \Big] + \\
& +Q_{34} \left[\chi \left(U^\dagger F_{\mu\nu}^L U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger - \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu U^\dagger U F_{\mu\nu}^R U^\dagger \right) + \right. \\
& \quad \left. +\chi^\dagger \left(U F_{\mu\nu}^R U^\dagger D^\mu D^\nu U - D^\mu D^\nu U U^\dagger F_{\mu\nu}^L U \right) \right] + \\
& +Q_{35} \left[\chi \left(U^\dagger D^\mu D^\nu U U^\dagger F_{\mu\nu}^L - F_{\mu\nu}^R U^\dagger D^\mu D^\nu U U^\dagger \right) + \right. \\
& \quad \left. +\chi^\dagger \left(U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger U F_{\mu\nu}^R - F_{\mu\nu}^L U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger U \right) \right] + \\
& +Q_{36} \left[F^{L\alpha}{}_{\alpha\mu} (L^\mu U \chi^\dagger + \chi U^\dagger L^\mu) - F^{R\alpha}{}_{\alpha\mu} (R^\mu U^\dagger \chi + \chi^\dagger U R^\mu) \right] + \\
& +Q_{37} \left[F^{L\alpha}{}_{\alpha\mu} (L^\mu \chi U^\dagger + U \chi^\dagger L^\mu) - F^{R\alpha}{}_{\alpha\mu} (R^\mu \chi^\dagger U + U^\dagger \chi R^\mu) \right] + \\
& +Q_{38} \left[F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu} \left(D^\mu D^\nu U U^\dagger L_\mu + L_\mu U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger \right) - \right. \\
& \quad \left. - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu} \left(\bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger U R_\mu + R_\mu U^\dagger D^\mu D^\nu U \right) \right] + \\
& +Q_{39} F_{\mu\nu}^L D_\alpha U F^{R\mu\nu} \bar{D}^\alpha U^\dagger + \\
& +Q_{40} F_{\alpha\mu}^L D_\nu U F^{R\alpha\nu} \bar{D}^\mu U^\dagger + \\
& +Q_{41} F_{\alpha\mu}^L D^\mu U F^{R\alpha\nu} \bar{D}_\nu U^\dagger + \\
& +Q_{42} \left[(F_{\mu\nu}^L)^2 L_\alpha L^\alpha + (F_{\mu\nu}^R)^2 R_\alpha R^\alpha \right] + \\
& +Q_{43} \left(L_\alpha L^\alpha U F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\nu} + R_\alpha R^\alpha U^\dagger F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\nu} \right) + \\
& +Q_{44} \left(F_{\mu\alpha}^L F^{L\alpha\nu} L^\mu L_\nu + F_{\mu\alpha}^R F^{R\alpha\nu} R^\mu R_\nu \right) + \\
& +Q_{45} \left(F_{\mu\alpha}^L F^{L\alpha\nu} L_\nu L^\mu + F_{\mu\alpha}^R F^{R\alpha\nu} R_\nu R^\mu \right) + \\
& +Q_{46} \left[F_{\mu\nu}^L (D^\mu D_\alpha U + D_\alpha D^\mu U) F^{R\nu\alpha} U^\dagger + \right. \\
& \quad \left. + F_{\mu\nu}^R (\bar{D}^\mu \bar{D}_\alpha U^\dagger + \bar{D}_\alpha \bar{D}^\mu U^\dagger) F^{L\nu\alpha} U \right] + \\
& +Q_{47} \left[F_{\mu\nu}^L F^{L\nu\alpha} (U \bar{D}^\mu \bar{D}_\alpha U^\dagger + D_\alpha D^\mu U U^\dagger) + \right. \\
& \quad \left. + F_{\mu\nu}^R F^{R\nu\alpha} (U^\dagger D^\mu D_\alpha U + \bar{D}_\alpha \bar{D}^\mu U^\dagger U) \right] + \\
& +Q_{48} \left(F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu} [L_\mu, U F^{R\mu\nu} U^\dagger] - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu} [R_\mu, U^\dagger F^{L\mu\nu} U] \right) + \\
& +Q_{49} \left(F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu} [L_\mu, F^{L\mu\nu}] - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu} [R_\mu, F^{R\mu\nu}] \right) + \\
& +Q_{50} F^{L\mu}{}_{\mu\alpha} U F^{R\nu\alpha} U^\dagger + \\
& +Q_{51} \left[(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) (F_{\mu\nu}^L)^2 + (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) (F_{\mu\nu}^R)^2 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +Q_{52}\left(\chi U^\dagger F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\nu} U^\dagger + \chi^\dagger U F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\nu} U\right) + \\
 & +Q_{53}\left(\chi F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\nu} + \chi^\dagger F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\nu}\right) + \\
 & +Q_{54}\left[\left(F_{\mu\nu\alpha}^L\right)^2 + \left(F_{\mu\nu\alpha}^R\right)^2\right] + \\
 & +Q_{55}\left[\left(F^{L\mu}{}_{\mu\alpha}\right)^2 + \left(F^{R\mu}{}_{\mu\alpha}\right)^2\right] + \\
 & +Q_{56}\left(F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\alpha} U^\dagger F_{\alpha}^{L\nu} + F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\alpha} U F_{\alpha}^{R\nu}\right) + \\
 & +Q_{57}\left(F_{\mu\nu}^L F^{L\mu\alpha} F^{L\nu}{}_{\alpha} + F_{\mu\nu}^R F^{R\mu\alpha} F^{R\nu}{}_{\alpha}\right)\left\} + \right. \\
 & + \operatorname{tr}\left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger\right) \operatorname{tr}\left\{Q_{58}\left\{L_{\mu}, L_{\nu}\right\}\left(U \bar{D}_{\mu} \bar{D}_{\nu} U^\dagger - D_{\mu} D_{\nu} U U^\dagger\right) + \right. \\
 & +Q_{59} L_{\mu} L^{\mu}\left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger\right) + \\
 & +Q_{60}\left[\left(\chi U^\dagger\right)^2 - \left(\chi^\dagger U\right)^2\right] + \\
 & \left.+Q_{61}\left(F_{\mu\nu}^L L^{\mu} L^{\nu} - F_{\mu\nu}^R R^{\mu} R^{\nu}\right)\right\} + \\
 & + \operatorname{tr}\left(\chi \bar{D}_{\mu} U^\dagger - D_{\mu} U \chi^\dagger\right) \operatorname{tr}\left[Q_{62} L_{\nu} L^{\mu} L^{\nu} + Q_{63}\left(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger\right) L^{\mu} + \right. \\
 & \left.+Q_{64}\left(F_{\nu}^{L\nu\mu} - F_{\nu}^{R\nu\mu}\right)\right] + \\
 & + \left[\operatorname{tr}\left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger\right)\right]^2 Q_{65} \operatorname{tr}\left(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger\right). \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

Здесь $Q_i = N_c / (32\pi^2 \mu^2) \cdot q_i$, и

$$\begin{aligned}
 q_1 &= -\frac{3}{10}, \quad q_2 = -\frac{7}{30}, \quad q_3 = \frac{1}{3}, \quad q_4 = \frac{1}{30}, \\
 q_5 &= -\frac{1}{10}, \quad q_6 = \frac{1}{15}, \quad q_7 = \frac{1}{30}, \quad q_8 = -\frac{1}{30}, \\
 q_9 &= \frac{1}{6}(1 - 2x + 2c), \quad q_{10} = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} + x - c\right), \\
 q_{11} &= \frac{3}{20} - \frac{2}{3}c, \quad q_{12} = \frac{1}{60}, \quad q_{13} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{20} - x + c\right), \quad q_{14} = \frac{x}{6}, \\
 q_{15} &= \frac{2}{3}x(1 - x) - \left(\frac{1}{3} - 2x\right)c,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{16} &= -\frac{1}{120} + \frac{4}{3}x^2 + \frac{x}{6}(1-4x) - 2\left(x - \frac{1}{6}\right)c, \\
q_{17} &= \frac{1}{120} + \frac{x}{6}(1-4x) - \left(x + \frac{1}{6}\right)c, \quad q_{18} = \frac{4}{3}x^2 + \left(\frac{1}{6} - x\right)c, \\
q_{19} &= -\frac{1}{240} - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x(1+2xy)c, \\
q_{20} &= \frac{1}{240} + x^2 + 2x^3 - 4yx^3 - x(1+2xy)c, \\
q_{21} &= -\frac{1}{3}, \quad q_{22} = \frac{3}{10}, \\
q_{23} &= -\frac{1}{6}, \quad q_{24} = -\frac{1}{2}, \quad q_{25} = \frac{2}{15}, \quad q_{26} = -\frac{11}{30}, \quad q_{27} = -\frac{1}{15}, \\
q_{28} &= -\frac{1}{15}, \quad q_{29} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{5} - x\right), \quad q_{30} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10} - 2x + 2c\right), \\
q_{31} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{15} - x\right), \quad q_{32} = -\frac{x}{2} + \frac{c}{3}, \quad q_{33} = -\frac{x}{6} + \frac{c}{3}, \\
q_{34} &= \frac{x}{6}, \quad q_{35} = -\frac{x}{6}, \quad q_{36} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - x + c\right), \\
q_{37} &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10} - x + c\right), \quad q_{38} = \frac{1}{15}, \quad q_{39} = -\frac{1}{180}, \quad q_{40} = -\frac{1}{5}, \\
q_{41} &= -\frac{1}{5}, \quad q_{42} = -\frac{1}{360}, \quad q_{43} = \frac{1}{6}, \quad q_{44} = \frac{1}{3}, \quad q_{45} = \frac{1}{5}, \\
q_{46} &= \frac{1}{6}, \quad q_{47} = -\frac{1}{6}, \quad q_{48} = -\frac{1}{6}, \quad q_{49} = -\frac{1}{30}, \quad q_{50} = \frac{1}{15}, \\
q_{51} &= -\frac{x}{3}, \quad q_{52} = -\frac{1}{6}(1+x-c), \quad q_{53} = \frac{1}{6}(1+x-c), \\
q_{54} &= \frac{41}{540}, \quad q_{55} = -\frac{7}{135}, \quad q_{56} = -\frac{1}{6}, \quad q_{57} = \frac{1}{2}, \quad q_{58} = \frac{1}{180}, \\
q_{59} &= -\frac{1}{30}\left[\frac{1}{4} + 5c\left(\frac{1}{3} + 2x(1+y)\right)\right], \\
q_{60} &= -\frac{1}{180}\left[1 + 30cx(1+y+4xy)\right], \quad q_{61} = \frac{1}{45}, \quad q_{62} = \frac{1}{45}, \\
q_{63} &= \frac{1}{9}, \quad q_{64} = \frac{1}{90}, \quad q_{65} = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{90} - 17cxy\right). \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Члены с фактором $c = \left(1 - \frac{1}{6y}\right)$ возникают из p^4 -части уравнения движений (5.16); $F_{\alpha\mu\nu}^R = \overline{D}'_{\alpha} F_{\mu\nu}^R$ и $F_{\alpha\mu\nu}^L = D'_{\alpha} F_{\mu\nu}^L$.

Для получения выражения (5.17) мы использовали эквивалентные преобразования, вытекающие из свойств ковариантных производных (5.4) и урав-

нений движения, а также из дифференцирования условия унитарности $UU^\dagger = 1$:

$$\begin{aligned} D_\mu U U^\dagger &= -U \bar{D}_\mu U^\dagger, & U^\dagger D_\mu U &= -\bar{D}_\mu U^\dagger U, \\ D_\mu D_\nu U U^\dagger + U \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu U^\dagger &= -(D_\mu U \bar{D}_\nu U^\dagger + D_\nu U \bar{D}_\mu U^\dagger), \\ U^\dagger D_\mu D_\nu U + \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu U^\dagger U &= -(\bar{D}_\mu U^\dagger D_\nu U + \bar{D}_\nu U^\dagger D_\mu U). \end{aligned}$$

6. РЕДУКЦИЯ ВЕКТОРНЫХ, АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНЫХ И СКАЛЯРНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В модели НИЛ, рассматриваемой в настоящей работе, легкие составные псевдоскалярные голдстоуновские бозоны выступают киральными партнерами более тяжелых динамических векторных, аксиально-векторных и скалярных мезонов (резонансов). Независимо от метода включения мезонных резонансов в эффективный киральный лагранжиан, учет резонансных обменов существенно модифицирует константы связи низкоэнергетических взаимодействий в псевдоскалярном секторе. В частности, в работах [67, 68] было показано, что структурные константы L_i псевдоскалярного p^4 -лагранжиана Гассера — Лейтвилера в основном насыщаются вкладами обменов мезонными резонансами между вершинами, описываемыми лагранжианом p^2 -порядка. Поэтому если при вычислении p^4 -амплитуд взаимодействий в псевдоскалярном секторе одновременно учитываются вершины p^4 -лагранжиана (5.7) и диаграммы с резонансными обменами между вершинами p^2 -лагранжиана (5.2), то это может приводить к двойному счету, обсуждавшемуся в работе [67].

Чтобы избежать двойного счета, нужно проинтегрировать в производящем функционале (2.5) по векторным, аксиально-векторным и скалярным полям. При такой редукции резонансных степеней свободы получается эффективный псевдоскалярный лагранжиан, структурные константы которого модифицированы вкладами резонансных обменов [69].

Чтобы проинтегрировать по векторным, аксиально-векторным и скалярным полям в неаномальной части эффективного мезонного действия, мы будем использовать инвариантность модуля кваркового детерминанта относительно локальных $U_L(n) \times U_R(n)$ -преобразований (2.8) *. С помощью специально выбранного кирального поворота, соответствующего “единичной” калибровке, $\xi_L^\dagger = \xi_R = \Omega$, мы можем полностью исключить псевдоскалярные степени свободы из повернутого дираковского оператора. Кроме того, до применения такого поворота удобно также дополнительно произвести сдвиг

* Квадратичная по полям Φ , V_μ , A_μ гауссовская часть эффективного действия (2.6), а также киральные аномалии неинвариантны относительно киральных поворотов (2.8).

$\Phi \rightarrow \Phi - m_0$, который приведет к появлению псевдоскалярного массового члена из гауссовской части эффективного действия (2.6) *.

После указанных преобразований повернутый дираковский оператор примет вид

$$i\hat{\mathbf{D}} \rightarrow i\hat{\tilde{\mathbf{D}}} = (P_L\Omega + P_R\Omega^\dagger)i\hat{\mathbf{D}}(P_L\Omega + P_R\Omega^\dagger) = i(\hat{\partial} + \hat{V} + \hat{A}\gamma_5) - \Sigma, \quad (6.1)$$

и псевдоскалярные степени свободы сохраняются только в квадратичной по полям гауссовской части эффективного действия, которая в терминах повернутых полей $\tilde{V}_\mu, \tilde{A}_\mu$ (2.8) записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_0 = & -\frac{1}{4G_1}\text{tr} \left[(\mu + m_0 + \sigma)^2 - (\mu + m_0 + \sigma)(\xi_R m_0 \xi_L^\dagger + \xi_L m_0 \xi_R^\dagger) - m_0^2 \right] \\ & - \left(\frac{m_V^0}{g_V^0} \right)^2 \text{tr} [(\tilde{V}_\mu - v_\mu)^2 + (\tilde{A}_\mu - a_\mu)^2]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь скалярная степень свободы $\sigma(x)$ возникает как квантовая флуктуация поля $\Sigma(x)$ вокруг его вакуумного ожидания μ : $\Sigma(x) = \mu + \sigma(x)$; $(m_V^0/g_V^0)^2 = 1/(4G_2)$, где m_V^0 и g_V^0 — затравочные значения массы и константы связи векторного калибровочного поля;

$$v_\mu = \frac{1}{2}(\Omega\partial_\mu\Omega^\dagger + \Omega^\dagger\partial_\mu\Omega), \quad a_\mu = \frac{1}{2}(\Omega\partial_\mu\Omega^\dagger - \Omega^\dagger\partial_\mu\Omega).$$

Расходящаяся часть кваркового детерминанта для повернутого дираковского оператора примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{div}} = & \frac{N_c}{16\pi^2}y \text{tr} \left\{ \left(\partial_\mu\sigma + [\tilde{V}_\mu, m_0 + \sigma] \right)^2 - \left(2\mu\tilde{A}_\mu + \{\tilde{A}_\mu, m_0 + \sigma\} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \left[(\tilde{F}_{\mu\nu}^R)^2 + (\tilde{F}_{\mu\nu}^L)^2 \right] - \left((\mu + m_0 + \sigma)^2 - \mu^2 \right)^2 \right\} + \\ & + \frac{N_c}{16\pi^2}2 \left(\Lambda^2 e^{-\mu^2/\Lambda^2} - \mu^2 y \right) \text{tr} [(\mu + m_0 + \sigma)^2 - \mu^2]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Если пренебречь квантовыми флуктуациями поля Σ вокруг его вакуумного ожидания, соответствующие p^4 -члены конечной части кваркового детерминанта примут вид

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{fin}}^{(4)}(\Sigma = \mu) = \frac{N_c}{32\pi^2} \text{tr} \left\{ [\tilde{V}_\mu, \tilde{A}^\mu]^2 + \frac{8}{3}(\tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu)^2 - \frac{8}{3}\tilde{A}^\mu \tilde{A}^\nu (\tilde{F}_{\mu\nu}^L + \tilde{F}_{\mu\nu}^R) + \right.$$

* Псевдоскалярный массовый член в эффективном лагранжиане (5.2) возникает из расходящейся части кваркового детерминанта.

$$+\frac{1}{3}\tilde{F}_{\mu\nu}^R\tilde{F}^{L\mu\nu}-\frac{1}{6}\left[(\tilde{F}_{\mu\nu}^L)^2+(\tilde{F}_{\mu\nu}^R)^2\right]\}. \quad (6.4)$$

Так как массы векторных, аксиально-векторных и скалярных мезонов намного больше по сравнению с массой пиона, интегрирование по скалярному полю σ и повернутым полям \tilde{V}_μ и \tilde{A}_μ в производящем функционале модели НИЛ можно произвести с помощью уравнений движений, возникающих в статическом пределе [70] из массовых членов лагранжианов (6.2) и (6.3). В таком приближении как кинетические члены $(\tilde{F}_{\mu\nu}^{R/L})^2$ для повернутых полей \tilde{V}_μ и \tilde{A}_μ , так и члены с производными высшего порядка рассматриваются как возмущения.

Кинетические члены $(\tilde{F}_{\mu\nu}^{R/L})^2$, возникающие из суммы лагранжианов (6.3) и (6.4), приводятся к стандартному виду после перенормировки повернутых нефизических векторного и аксиально-векторного полей:

$$\tilde{V}_\mu = \frac{g_V^0}{(1+\tilde{\gamma})^{1/2}}\tilde{V}_\mu^{(ph)}, \quad \tilde{A}_\mu = \frac{g_V^0}{(1-\tilde{\gamma})^{1/2}}\tilde{A}_\mu^{(ph)}.$$

Здесь

$$g_V^0 = \left[\frac{N_c}{48\pi^2}(2y-1)\right]^{-1/2}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{N_c(g_V^0)^2}{48\pi^2},$$

а $\tilde{V}_\mu^{(ph)}$, $\tilde{A}_\mu^{(ph)}$ — физические поля векторного и аксиально-векторного мезонов с массами

$$m_\rho^2 = \frac{(m_V^0)^2}{1+\tilde{\gamma}}, \quad m_{A_1}^2 = Z_A^{-2}\frac{(m_V^0)^2}{1-\tilde{\gamma}},$$

где

$$Z_A^2 = \left(\frac{m_V^0}{g_V^0}\right)^2 \frac{4\pi^2}{N_c\mu^2y} \left[1 + \left(\frac{m_V^0}{g_V^0}\right)^2 \frac{4\pi^2}{N_c\mu^2y}\right]^{-1} \quad (6.5)$$

— фактор, учитывающий πA_1 -смешивание.

Статические уравнения движения возникают из вариаций массовых членов лагранжианов (6.2) и (6.3) по повернутым полям \tilde{V}_μ , \tilde{A}_μ и скалярному полю σ . В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\mu &= v_\mu, \quad \tilde{A}_\mu = Z_A^2 a_\mu, \\ \sigma &= \frac{Z_A^2}{8x}(\xi_R m_0 \xi_L^\dagger + \xi_L m_0 \xi_R^\dagger) - m_0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Для включения электромагнитного взаимодействия с фотонным полем \mathcal{A}_μ нужно просто использовать замену

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\mu &\rightarrow \tilde{V}_\mu + ie\mathcal{A}_\mu \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger + \xi_L Q \xi_L^\dagger), \\ \tilde{A}_\mu &\rightarrow \tilde{A}_\mu + ie\mathcal{A}_\mu \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger - \xi_L Q \xi_L^\dagger). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Чтобы получить редуцированный псевдоскалярный лагранжиан с учетом электромагнитного взаимодействия, необходимо сначала произвести в кварковом детерминанте с повернутым дираковским оператором замену (6.7), а затем, используя статические уравнения движения, восстановить псевдоскалярные степени свободы. В случае редукции векторных и аксиально-векторных резонансов удобно объединить оба шага в подстановках

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu &= v_\mu^{(\gamma)} + ie\mathcal{A}_\mu \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger + \xi_L Q \xi_L^\dagger), \\ \tilde{A}_\mu &= Z_A^2 \left[a_\mu^{(\gamma)} + ie\mathcal{A}_\mu \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger - \xi_L Q \xi_L^\dagger) \right],\end{aligned}$$

или

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^V = (Z_A^4 - 1)[a_\mu^{(\gamma)}, a_\nu^{(\gamma)}] + ie\mathcal{F}_{\mu\nu} \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger + \xi_L Q \xi_L^\dagger), \quad (6.8)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^A = Z_A^2 ie\mathcal{F}_{\mu\nu} \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger - \xi_L Q \xi_L^\dagger). \quad (6.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}v_\mu^{(\gamma)} &= \frac{1}{2}(\Omega \partial_\mu^{(\gamma)} \Omega^\dagger + \Omega^\dagger \partial_\mu^{(\gamma)} \Omega), \\ a_\mu^{(\gamma)} &= \frac{1}{2}(\Omega \partial_\mu^{(\gamma)} \Omega^\dagger - \Omega^\dagger \partial_\mu^{(\gamma)} \Omega) = -\frac{1}{2} \xi_R^\dagger L_\mu^{(\gamma)} \xi_R,\end{aligned}$$

$\partial_\mu^{(\gamma)*} = \partial_\mu * + ie_0 \mathcal{A}_\mu [Q, *]$ — удлиненная производная, учитывающая излучение тормозного фотона, в то время как тензор напряженности электромагнитного поля $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ соответствует структурному фотону, и $L_\mu^{(\gamma)} = (\partial_\mu^{(\gamma)} U) U^\dagger$.

Используя уравнения движений, из членов эффективных лагранжианов (6.2) и (6.3), квадратичных по векторным и аксиально-векторным полям, можно получить кинетический и массовый члены p^2 -лагранжиана в стандартном виде (5.2). При этом определения (5.3) для константы F_0 и мезонной матрицы χ изменяются после редукции следующим образом *:

$$\begin{aligned}F_0^2 = \frac{N_c \mu^2 y}{4\pi^2} &\longrightarrow F_0^2 = Z_A^2 \frac{N_c \mu^2 y}{4\pi^2}, \\ \chi = -2m_0 \mu \left(1 - \frac{\Lambda^2}{y\mu^2} e^{-\mu^2/\Lambda^2} \right) &\longrightarrow \chi = \frac{m_0 \mu}{G_1 F_0^2}.\end{aligned} \quad (6.10)$$

*Используя уравнение шели, можно показать, что оба выражения для χ в соотношениях (6.10) эквивалентны при $\mu^2/\Lambda^2 \ll 1$.

Редукция резонансных степеней свободы приводит также к модификации общей структуры эффективных лагранжианов высших порядков и к перепределению соответствующих структурных коэффициентов. Например, редуцированный лагранжиан, описывающий сильное и электромагнитное взаимодействия в псевдоскалярном секторе в p^4 -порядке, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{\text{red}} = \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} L_2^{\text{red}} [L_\mu^{(\gamma)}, L_\nu^{(\gamma)}]^2 + (3L_2^{\text{red}} + L_3^{\text{red}}) (L_\mu^{(\gamma)} L^{(\gamma)\mu})^2 - \right. \\ \left. - L_5^{\text{red}} L_\mu^{(\gamma)} L^{(\gamma)\mu} (U\chi^\dagger + \chi U^\dagger) + L_8^{\text{red}} (\chi^\dagger U\chi^\dagger U + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) - \right. \\ \left. - L_9^{\text{red}} (ie\mathcal{F}_{\mu\nu}) Q (L^{(\gamma)\mu} L^{(\gamma)\nu} + R^{(\gamma)\mu} R^{(\gamma)\nu}) - \right. \\ \left. - L_{10}^{\text{red}} (ie\mathcal{F}_{\mu\nu})^2 Q U Q U^\dagger + H_2^{\text{red}} \chi\chi^\dagger \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $L_i^{\text{red}} = \frac{N_c}{16\pi^2} l_i^{\text{red}}$ и $H_i^{\text{red}} = \frac{N_c}{16\pi^2} h_i^{\text{red}}$ — редуцированные структурные коэффициенты, аналогичные коэффициентам стандартного представления Гасера — Лейтвилера (5.7):

$$\begin{aligned} l_2^{\text{red}} &= \frac{1}{12} \left[Z_A^8 + 2(Z_A^4 - 1) \left(\frac{1}{4} y (Z_A^4 - 1) - Z_A^4 \right) \right], \\ l_3^{\text{red}} &= -\frac{1}{6} \left[Z_A^8 + 3(Z_A^4 - 1) \left(\frac{1}{4} y (Z_A^4 - 1) - Z_A^4 \right) \right], \\ l_5^{\text{red}} &= (y - 1) \frac{1}{4} Z_A^6, \quad l_8^{\text{red}} = \frac{y}{16} Z_A^4, \\ l_9^{\text{red}} &= \frac{1}{3} \left(Z_A^4 - \frac{1}{2} y (Z_A^4 - 1) \right), \quad l_{10}^{\text{red}} = -\frac{1}{6} \left(Z_A^4 - y (Z_A^4 - 1) \right), \\ h_2^{\text{red}} &= y Z_A^2 \left(\frac{Z_A^2}{2} - x \right). \end{aligned}$$

В таком приближении редукция скалярного резонанса дает вклад только в коэффициенты l_5 и l_8 , в то время как все остальные структурные коэффициенты насыщаются обменами векторных и аксиально-векторных резонансов.

За исключением коэффициентов l_3^{red} и l_8^{red} , наши результаты в статическом приближении для уравнений движений согласуются с результатами работы [36], использующей другой подход к учету вкладов резонансных степеней свободы. Указанное расхождение обусловлено, в частности, использованием в подходе [36] операторов с производными. В нашем подходе таким операторам соответствуют поправки высшего порядка к статическим уравнениям движения (6.6), возникающие в том случае, когда в модуле повернутого кваркового детерминанта удерживаются также члены, линейные по скалярному полю σ и содержащие связи с векторными, аксиально-векторными по-

лями и тензорами напряженности. Такие члены возникают как из расходящейся, так и из конечной частей кваркового детерминанта:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{\text{div}} &\rightarrow -\frac{N_c}{32\pi^2} y \text{tr} (16\mu^2 \tilde{\sigma} \tilde{A}_\mu^2), \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\text{fin}}^{(4)} &\rightarrow \frac{N_c}{32\pi^2} \text{tr} \left[16\mu^2 \tilde{\sigma} \tilde{A}_\mu^2 - \frac{4}{3\mu} (\tilde{F}_{\mu\nu}^L + \tilde{F}_{\mu\nu}^R) (\tilde{A}^\mu \{ \tilde{A}^\nu, \tilde{\sigma} \} + \{ \tilde{A}^\mu, \tilde{\sigma} \} \tilde{A}^\nu) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3\mu} \tilde{\sigma} (\tilde{F}_{\mu\nu}^R \tilde{F}^{L\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}^L \tilde{F}^{R\mu\nu}) \right], \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\text{fin}}^{(6)} &\rightarrow -\frac{N_c}{32\pi^2} \frac{1}{\mu} \text{tr} \left[\tilde{\sigma} \left((\tilde{F}_{\mu\nu}^L)^2 + (\tilde{F}_{\mu\nu}^R)^2 \right) \right],\end{aligned}$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma + m_0$. После вариации по полям \tilde{V}_μ , \tilde{A}_μ и σ получим соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu &= v_\mu, \\ \tilde{A}_\mu &= Z_A^2 a_\mu + \frac{2(1 - Z_A^2)}{\mu} \frac{1 - y}{y} \tilde{\sigma} \tilde{A}_\mu, \\ \sigma &= \frac{Z_A^2}{8x} (\xi_R m_0 \xi_L^\dagger + \xi_L m_0 \xi_R^\dagger) - m_0 - \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \frac{y - 1}{y} \tilde{A}_\mu^2 - \frac{1}{12y\mu^3} \left((\tilde{F}_{\mu\nu}^V)^2 + 2(\tilde{F}_{\mu\nu}^A)^2 \right).\end{aligned}\quad (6.11)$$

Подставляя в левые части соотношений (6.11) в качестве первых итераций выражения (6.6), мы получим новые уравнения движений, учитывающие поправки высшего порядка к статическому приближению. При этом уравнение движений для векторного поля не изменится. Применение новых уравнений движений приводит к появлению дополнительного вклада к структурному коэффициенту l_3^{red} :

$$l_3^{\text{red (h.o.)}} = \frac{1}{4} \frac{(y - 1)^2}{y} Z_A^8, \quad (6.12)$$

с учетом которого наш результат приходит в согласие с работой [36].

Аналогичным образом, используя уравнения движения (6.11) и подстановки (6.7), можно получить редуцированный эффективный лагранжиан, описывающий сильные и электромагнитные взаимодействия в p^6 -порядке импульсного разложения. Из-за громоздкости мы не приводим здесь полные выражения для редуцированного p^6 -лагранжиана и структурных коэффициентов.

7. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕЗОННЫХ ПРОЦЕССОВ В p^4 - И p^6 -ПОРЯДКАХ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим феноменологию мезонных процессов при низких энергиях с точки зрения проверки бозонизованных киральных лагранжианов в p^4 -порядке импульсного разложения. Этот вопрос детально исследован в литературе (см., например, [33, 36, 38, 40, 69] и ссылки в них на другие работы). Амплитуды мезонных процессов в p^4 -порядке включают в себя вклады как борновских диаграмм, описываемых лагранжианами (5.2) и (5.7), так и однопетлевых диаграмм с вершинами p^2 -порядка (5.2). Возникающие из мезонных петель УФ-расходимости могут быть зафиксированы в киральной теории возмущений [39, 41] с помощью соответствующего лагранжиана контрчленов, либо в рамках квантовой теории поля с мезонными петлями [42] с помощью суперпропагаторной регуляризации [43].

В стандартной киральной теории возмущений [39, 41] (см. также обзоры [40]) используется то обстоятельство, что в размерной регуляризации расходящаяся часть однопетлевого функционала имеет точно такой же вид, как и лагранжиан (5.7), если в нем произвести замену структурных коэффициентов:

$$L_i \rightarrow -\Lambda(\tilde{\mu}) \Gamma_i, \quad H_i \rightarrow -\Lambda(\tilde{\mu}) \tilde{\Gamma}_i,$$

$$\Lambda(\tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\mu}^{d-4}}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} [\ln 4\pi + 1 + \Gamma'(1)] \right\}.$$

Здесь $\Gamma_i, \tilde{\Gamma}_i$ — численные константы, вычисленные в [39]:

$$\Gamma_1 = \frac{3}{32}, \quad \Gamma_2 = \frac{3}{16}, \quad \Gamma_3 = 0, \quad \Gamma_4 = \frac{1}{8}, \quad \Gamma_5 = \frac{3}{8}, \quad \Gamma_6 = \frac{11}{144},$$

$$\Gamma_7 = 0, \quad \Gamma_8 = \frac{5}{48}, \quad \Gamma_9 = \frac{1}{4}, \quad \Gamma_{10} = -\frac{1}{4}, \quad \tilde{\Gamma}_1 = -\frac{1}{8}, \quad \tilde{\Gamma}_2 = \frac{5}{24},$$

а $\tilde{\mu}$ — произвольная шкала перенормировки, имеющая размерность массы. Устранение УФ-расходимостей в однопетлевом функционале производится с помощью перенормировок структурных коэффициентов лагранжиана контрчленов вида (5.7). При этом перенормированные коэффициенты $L_i^r(\tilde{\mu})$ и $H_i^r(\tilde{\mu})$ вводятся таким образом, чтобы в однопетлевом функционале сократились все расходящиеся части:

$$L_i = L_i^r(\tilde{\mu}) + \Gamma_i \Lambda(\tilde{\mu}), \quad H_i = H_i^r(\tilde{\mu}) + \tilde{\Gamma}_i \Lambda(\tilde{\mu}).$$

При такой процедуре в амплитуде любого мезонного процесса происходит взаимное сокращение зависимостей от $\tilde{\mu}$ во вкладах петель и контрчленов.

Однако сами перенормированные коэффициенты $L_i^r(\tilde{\mu})$ и $H_i^r(\tilde{\mu})$, являющиеся измеряемыми параметрами, зависят от выбора схемы перенормировки и шкалы $\tilde{\mu}$. Последняя зависимость может быть представлена в виде

$$L_i^r(\tilde{\mu}_2) = L_i^r(\tilde{\mu}_1) + \frac{\Gamma_i}{(4\pi)^2} \ln \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_2}, \quad H_i^r(\tilde{\mu}_2) = H_i^r(\tilde{\mu}_1) + \frac{\tilde{\Gamma}_i}{(4\pi)^2} \ln \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_2}. \quad (7.1)$$

Отсюда видно, что Γ_i и $\tilde{\Gamma}_i$ являются также коэффициентами так называемых киральных логарифмов $\sim \ln(p^2/\tilde{\mu}^2)$ в однопетлевом функционале. Явная зависимость измеряемых перенормированных коэффициентов от произвольного параметра $\tilde{\mu}$ создает определенные трудности при феноменологической проверке бозонизованных лагранжианов, поскольку совершенно не ясно, при каких $\tilde{\mu}$ следует сравнивать извлеченные из экспериментальных данных значения $L_i^r(\tilde{\mu})$ и $H_i^r(\tilde{\mu})$ с теоретическими предсказаниями, полученными из бозонизации модели НИЛ.

Указанный произвол в выборе шкалы $\tilde{\mu}$ можно устранить, используя результаты суперпропагаторной регуляризации [43], которая была разработана специально для вычисления мезонных петель в квантовой теории поля с нелинейными эффективными лагранжианами [42]. Суперпропагаторный подход приводит к тем же результатам, что и размерная регуляризация, используемая в стандартной киральной теории возмущений [39, 41]. Принципиальным отличием является то, что параметр $\tilde{\mu}$ при этом уже не является произвольным, а фиксируется естественной шкалой кирального разложения, а именно $\tilde{\mu}_{SP} = 4\pi F_0$. Для сравнения обоих подходов УФ-расходимости должны быть заменены на конечные члены в соответствии с подстановкой

$$\begin{aligned} (C - 1/\varepsilon) \longrightarrow C_{SP} &= 2C + 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dz} (\ln \Gamma^{-2}(2z + 2)) \right] \Big|_{z=0} + \beta\pi = \\ &= -1 + 4C + \beta\pi, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = (4 - D)/2$, а β — произвольная константа, возникающая из интегрального представления Зоммерфельда — Ватсона для суперпропагатора. Используя дополнительные теоретические аргументы, в том числе принцип минимальной сингулярности, можно показать, что ожидаемые значения C_{SP} должны лежать в пределах значений $C_{SP} \approx 1 \div 4$.

Разумные оценки для параметра C_{SP} можно получить, например, из расщепления констант распадов K , $\pi \rightarrow \mu\nu$, используя для них выражения

$$\begin{aligned} (F_\pi - F_0)F_0 &= 2L_5(\chi_u^2 + \chi_d^2) - \frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{3} \left(m_\pi^2(\tilde{C}_K - 1) + 2m_\pi^2(\tilde{C}_\pi - 1) \right), \\ (F_K - F_0)F_0 &= 2L_5(\chi_u^2 + \chi_s^2) - \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2} \left(2m_K^2(\tilde{C}_K - 1) + m_\pi^2(\tilde{C}_\pi - 1) \right), \end{aligned} \quad (7.2)$$

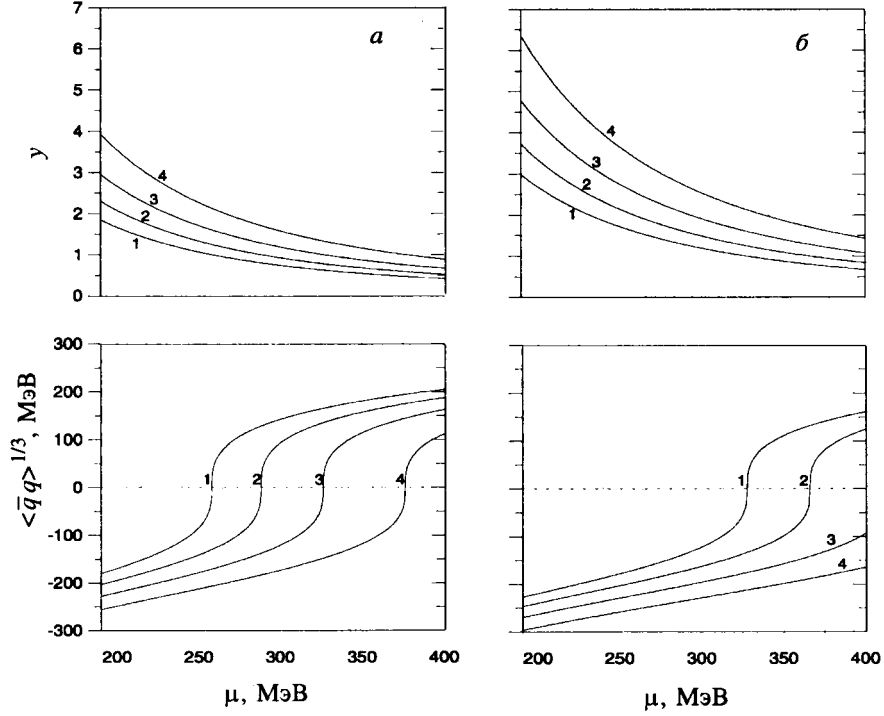


Рис. 3. Зависимость величин y и $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$ от конституэнтной массы кварка μ : а) без редукции резонансов, б) после редукции резонансов

где $\tilde{C}_{\pi,K} = C_{SP} + \ln(\pi m_{\pi,K}^2/\mu^2)$. Первые члены в правой части выражений (7.2), пропорциональные L_5 , соответствуют борновским вкладам*, в то время как все остальные возникают из однопетлевых диаграмм тадпольного типа. Из расщепления констант распадов F_π и F_K фиксируются также параметры x и y , связанные с кварковым конденсатом $\langle \bar{q}q \rangle$ и усредненной конституэнтной массой кварков μ соотношениями (5.13).

На рис.3 показаны зависимости от конституэнтной массы кварка μ для величин y и $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$, получаемых как решения уравнений (7.2) при фиксированных значениях параметра C_{SP} и экспериментальных значениях констант $F_\pi = 93$ МэВ и $F_K = 113$ МэВ. Важность учета редукции резонансных степеней свободы при описании псевдоскалярного сектора наглядно проявляется уже на этом простейшем примере. Заметное различие в поведении кривых для

*Для простоты мы отбросили члены с коэффициентом L_4 , который равен нулю в модели НИЛ.

$\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$ на рис.3,а (без редукции резонансов) и рис.3,б (после редукции резонансов) связана с появлением дополнительного фактора Z_A^2 в определении (6.10) для константы F_0 . Для численных оценок мы используем феноменологическое значение параметра

$$Z_A^2 = \frac{m_\rho^2}{m_{A_1}^2} \frac{1 + \tilde{\gamma}}{1 - \tilde{\gamma}} \approx 0,62,$$

которое соответствует $m_\rho = 770$ МэВ, $m_{A_1} = 1260$ МэВ и $g_V = g_{\rho\pi\pi} = 6,3$. Следует подчеркнуть, что без редукции резонансов (рис.3,а) ни при каких значениях C_{SP} не удастся получить решения для y и $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$, соответствующие общепринятым коридорам значений параметров F_0 , μ и m_0 . Такая фиксация становится возможной только после редукции резонансов (рис.3,б). При $\mu = 265$ МэВ ей соответствуют значения параметров $y = 2, 4$, $x = 0, 10$, $F_0 = 90$ МэВ, $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = -220$ МэВ и $C_{SP} \approx 3$, которые мы и будем использовать при численных оценках структурных констант бозонизованных лагранжианов.

Таблица. Сравнение теоретических и феноменологических значений структурных констант $L_i \times 10^3$.*

i	Бозонизация модели НИЛ		Феноменология			
	Без редукции резонансов	После редукции резонансов	$L_i^r(m_\rho) \times 10^3$ [44]		$L_i \times 10^3$ [33]	
1	0.79	0.85	0.4	\pm 0.3	0.8	\pm 0.2
2	1.58	1.70	1.35	\pm 0.3	1.6	\pm 0.3
3	-3.17	-4.30	-3.5	\pm 1.1	-3.5	\pm 0.6
4	0	0	-0.3	\pm 0.5		
5	2.66	1.58	1.4	\pm 0.5	1.6	\pm 0.3
6	0	0	-0.2	\pm 0.3		
7	0.50	0	-0.4	\pm 0.2		
8	1.03	1.10	0.9	\pm 0.3		
9	6.34	7.12	6.9	\pm 0.7	6.5	\pm 0.5
10	-3.17	-5.90	-5.5	\pm 0.7	-3.1	\pm 0.7

Коэффициенты H_1 и H_2 не могут быть зафиксированы феноменологически.

В таблице теоретические предсказания бозонизованной модели НИЛ для констант L_i сравниваются с феноменологическими значениями, полученными в [44] в рамках стандартной киральной теории возмущений, а также в квантовой теории поля с суперпропагаторной регуляризацией [33, 69]. Наиболее полный анализ низкоэнергетических мезонных процессов, проведенный

в работе [44], включает в себя описание спектра масс псевдоскалярных мезонов, расщепления констант F_π и F_K , распадов $\pi \rightarrow e\nu\gamma$ и K_{e4} , а также правило Цвейга. Значения измеряемых перенормированных коэффициентов $L_i(\tilde{\mu})$ фиксировались при $\tilde{\mu} = m_\rho$. В работах [33, 69], использующих суперпропагаторную регуляризацию, анализировались данные по $\pi\pi$ -рассеянию, электромагнитному радиусу и поляризуемости заряженного пиона, а также по распадам $\eta' \rightarrow \eta 2\pi$ и $\pi \rightarrow e\pi\gamma$. Из таблицы видно, что теоретические предсказания для коэффициентов L_i в целом хорошо согласуются с их феноменологическими значениями. Некоторая неоднозначность в фиксации коэффициента L_{10} связана с тем, что в работе [44] для этого использованы данные по формфакторам распада $\pi \rightarrow e\nu\gamma$, в то время как в нашем анализе [69] — данные по процессу $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$. По-видимому, эти данные сами нуждаются в серьезном уточнении, что прежде всего относится к поляризуемости заряженного пиона.

Феноменологическая проверка бозонизованного p^6 -лагранжиана затруднена как большим количеством входящих в него членов, так и тем обстоятельством, что в подавляющем большинстве случаев в амплитудах мезонных процессов доминируют p^2 - и p^4 -вклады. По сравнению с ними p^6 -поправки оказываются настолько малыми, что их выделение из экспериментальных данных становится практически невозможным. Исключением являются переходы $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ и $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$, которые оказываются очень чувствительными к p^6 -вкладам благодаря уникальным свойствам их амплитуд. Прежде всего, в обоих случаях ненулевые амплитуды возникают начиная с p^4 -порядка из однопетлевых диаграмм, причем в этом порядке отсутствуют как УФ-расходимости, так и борновские вклады. Ненулевые борновские амплитуды появляются начиная с p^6 -порядка. Кроме того, в распаде $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ пионные петли сильно подавлены приближенным сохранением G -четности, а каонные петли — большой массой в пропагаторе каона.

Амплитуды перехода $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ в p^6 -порядке с учетом двухпетлевых мезонных диаграмм были вычислены впервые в работе [75] в рамках стандартной киральной теории возмущений, причем структурные коэффициенты лагранжиана контрчленов в этом порядке фиксировались из модели резонансных обменов. В работе [76] оба перехода $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ и $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ рассматривались с учетом борновских вкладов бозонизованного лагранжиана модели НИЛ, причем УФ-расходимости, возникающие из одно- и двухпетлевых диаграмм в p^6 -порядке, фиксировались с помощью суперпропагаторной регуляризации. Роль редукции мезонных резонансов в p^6 -порядке рассматривалась в контексте проблемы описания процессов $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ и $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ как в работе [76], так и в работе [77].

Как показывают наши расчеты [76], редукция резонансов в p^4 - и p^6 -порядках существенно улучшает описание экспериментальных данных [78] по полным сечениям процесса $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ от порога до ρ -резонанса. Для

ширины распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ после редукции мезонных резонансов в бозонизованной модели НИЛ мы получили величину 0,11 эВ, которая не согласуется с экспериментальным значением $(0,84 \pm 0,18)$ эВ. Не имея возможности более детально обсуждать здесь эту проблему, отметим только, что количественного описания распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ в p^6 -порядке киральной теории не удастся достичь даже после включения в работе [79] дополнительного вклада, возникающего из резонансного обмена с аномальной вершиной $V\pi\gamma^*$.

8. МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ЭФФЕКТАМИ

В разд.1 была рассмотрена приближенная форма КХД, приводящая в локальном пределе к модели НИЛ. В основе модели НИЛ лежит предположение, что доминирующую роль в динамике мезонов при бозонизации кварков играет промежуточная область передач $0 \ll q^2 \ll m_G^2$, где пропагатор непертурбативного глюона можно аппроксимировать константой в импульсном пространстве, и, соответственно, δ -функцией в координатном пространстве. В таком подходе не учитывается вклад областей конфайнмента и асимптотической свободы кварков в эффективное кварковое действие (1.6). В области асимптотической свободы (т.е. при $q^2 \gg m_G^2$) пропагатор глюона убывает достаточно быстро с увеличением импульса (уменьшением расстояния). Поэтому исключение этой области из рассмотрения не должно приводить к серьезным искажениям непертурбативной динамики бозонизованных кварков (мезонов). В рассматриваемой нами расширенной модели НИЛ область асимптотической свободы исключается с помощью введения обрезания сверху по импульсам, которому соответствует параметр Λ , возникающий при вычислении кваркового детерминанта. В такой трактовке нелокальные эффекты возникают как вклады области конфайнмента.

Описание широкого круга низкоэнергетических мезонных процессов в рамках бозонизованной модели НИЛ можно рассматривать как в качестве косвенного феноменологического подтверждения реалистичности этой модели, так и как указание на то, что киральная динамика адронов оказывается нечувствительной к конфайнменту кварков. Однако, поскольку непертурбативный глюонный пропагатор имеет полюс при нулевых передачах импульса, отбрасывание вклада области конфайнмента в эффективное интегральное действие (1.6) не кажется, на первый взгляд, таким же естественным фи-

*В нашем подходе аналогичные вклады не возникают даже при учете поправок высшего порядка к статическим уравнениям движения из-за сокращения соответствующих аномальных вкладов после кирального поворота в единичной калибровке. Точное совпадение вкладов аномальных и неаномальных векторных обменов, отмеченное в работе [79], по-нашему мнению, является указанием на возможность двойного счета.

зическим приближением, как исключение области асимптотической свободы кварков с помощью импульсного обрезания. Учет области конфайнмента приводит к появлению нелокальных вкладов в эффективное действие (1.6). Поэтому, чтобы понять физические причины нечувствительности киральной динамики адронов к конфайнменту кварков, достаточно оценить нелокальные поправки к бозонизованному эффективному мезонному лагранжиану модели НИЛ, как это было сделано в работе [23], в рамках полуфеноменологического билокального подхода.

Начнем с эффективного действия (1.6), которое после введения скалярных (S), псевдоскалярных (P), векторных (V) и аксиально-векторных (A) билокальных коллективных мезонных полей [1, 2, 10] можно переписать в билинейном по кварковым полям виде

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \iint d^4x d^4y \left\{ -\frac{9}{8D(x-y)} \text{tr} \left[(\tilde{S}(x,y))^2 + (\tilde{P}(x,y))^2 + 2 \left((\tilde{V}_\mu(x,y))^2 + (\tilde{A}_\mu(x,y))^2 \right) \right] + \bar{q}(x) \tilde{\eta}(x,y) q(y) \right\}. \quad (8.1)$$

Здесь

$$\tilde{\eta}(x,y) = -\tilde{S}(x,y) - i\gamma^5 \tilde{P}(x,y) + i\gamma^\mu \tilde{V}_\mu(x,y) + i\gamma^\mu \gamma^5 \tilde{A}_\mu(x,y), \quad (8.2)$$

где

$$\tilde{S} = \tilde{S}^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad \tilde{P} = \tilde{P}^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad \tilde{V}_\mu = -i\tilde{V}_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad \tilde{A}_\mu = -i\tilde{A}_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \quad (8.3)$$

— коллективные поля, ассоциированные со следующими билинейными комбинациями кварков:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^a(x,y) &= -\frac{8}{9} D(x-y) \bar{q}(y) \frac{\lambda^a}{2} q(x), \\ \tilde{P}^a(x,y) &= -\frac{8}{9} D(x-y) \bar{q}(y) i\gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q(x), \\ \tilde{V}_\mu^a(x,y) &= -\frac{4}{9} D(x-y) \bar{q}(y) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q(x), \\ \tilde{A}_\mu^a(x,y) &= -\frac{4}{9} D(x-y) \bar{q}(y) \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q(x). \end{aligned}$$

В соответствии с работой [11], в предположении сильной локализации билокальных полей, рассмотрим анзац

$$\tilde{\eta}(x,y) \rightarrow \tilde{\eta}(z,t) = \eta(z) f(t) + \eta_\mu(z) t^\mu g(t) + \dots, \quad (8.4)$$

где $z = (x + y)/2$, $t = (y - x)/2$ — абсолютная и относительная координаты соответственно. Функция

$$\eta(z) = -S(z) - i\gamma^5 P(z) + i\gamma^\mu V_\mu(z) + i\gamma^\mu \gamma^5 A_\mu(z) \quad (8.5)$$

является комбинацией локальных коллективных полей составных операторов $\bar{q}(z)q(z)$, $\bar{q}(z)i\gamma^5 q(z)$, $\bar{q}(z)\gamma_\mu q(z)$ и $\bar{q}(z)\gamma_\mu \gamma^5 q(z)$, аналогичных определениям (2.2) и соответствующих низколежащим мезонным состояниям 0^{++} , 0^{-+} , 1^{--} , 1^{+-} . Член следующего порядка в (8.4), пропорциональный η_μ , можно идентифицировать в духе работы [11] с возбуждениями 1^{--} , 1^{+-} , 2^{++} , 2^{--} . Предполагается, что бислокальные поля $\tilde{\eta}(x, y)$ сильно локализованы на масштабе эффективного размера коллективного мезона $h \equiv 1/\tilde{\Lambda}$ за счет быстрого убывания функций $f(t)$ и $g(t)$ при $|t^2| \gg h^2$.

Разлагая $q(y)$ и $\bar{q}(x)$ в ряды Тейлора в окрестности абсолютной координаты z :

$$q(y) = q(z) + t^\mu \partial_\mu q(z) + O(t^2), \quad \bar{q}(x) = q(z) - t^\mu \partial_\mu q(z) + O(t^2)$$

и используя (8.4), получим

$$\begin{aligned} \iint d^4x d^4y \bar{q}(x) \tilde{\eta}(x, y) q(y) &= 2 \int d^4z \bar{q}(z) \eta(z) q(z) \int d^4t f(t) + \\ &+ 2 \int d^4z \partial^\mu \bar{q}(z) \eta(z) \partial_\mu q(z) \int d^4t t^2 f(t) + \\ &+ (\text{excitation terms}). \end{aligned}$$

Для первого поколения мезонов, соответствующих мультиплетам $(0^{++}, 0^{-+}, 1^{--}, 1^{+-})$, производящий функционал перепишем в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^\dagger \mathcal{D}V \mathcal{D}A \exp \left\{ \int d^4z \left[-\frac{1}{4G_1} \text{tr} [\Phi(z)^\dagger \Phi(z)] - \right. \right. \\ &- \frac{1}{4G_2} \text{tr} (V_\mu^2(z) + A_\mu^2(z)) + \bar{q}(z) i \hat{\mathbf{D}} q(z) - \\ &\left. \left. - \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \partial^\mu \bar{q}(z) \eta(z) \partial_\mu q(z) \right] \right\}, \quad (8.6) \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{D}}$ — дираковский оператор, совпадающий с выражением (2.4) расширенной модели НИЛ. В выражении (8.6) мы ввели обозначение $\tilde{\Lambda}^2 = h^{-1}$, а параметр α определен как интеграл

$$\frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} = \frac{1}{2} \int d^4t t^2 f(t), \quad (8.7)$$

где $f(t)$ нормирована следующим образом: $2 \int d^4t f(t) = 1$.

Константы связи G_1 и G_2 определены как

$$\frac{1}{G_1} = \frac{1}{2G_2} = \frac{9}{8} \int d^4t \frac{f^2(t)}{D(2t)}. \quad (8.8)$$

Заметим, что в таком приближении отношение G_2 к G_1 равно $1/2$, в то время как феноменология предсказывает $G_2/G_1 \sim 4$. В принципе проблему можно решить с помощью введения в (8.4) и (8.5) различающихся функций $f_\sigma(t)$ ($\sigma = 0, 1, \dots$), которые отвечают различной локализации мезонных состояний со спинами $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$. Однако, чтобы не усложнять наше рассмотрение нелокальных поправок, мы будем пренебрегать такой зависимостью от спина.

Первые три члена в (8.6) совпадают с выражением для лагранжиана (2.3), возникающего после линеаризации расширенной модели НИЛ. После интегрирования по частям и отбрасывания поверхностных членов последний член в (8.6) можно переписать в виде

$$\int d^4z \partial^\mu \bar{q}(z) \eta(z) \partial_\mu q(z) = - \int d^4z \bar{q}(z) [\partial^\mu \eta(z) \partial_\mu + \eta(z) \partial^2] q(z). \quad (8.9)$$

Конечно, нам не известен точный вид функции $f(t)$, чтобы оценить в выражении (8.6) параметр α . Однако для получения разумных оценок можно использовать приближение фиксированного расстояния [23], соответствующее случаю, когда составляющие кварки в мезоне жестко локализованы на шкале h .

Такую жесткую локализацию можно учесть, введя в подынтегральное выражение для действия \mathcal{S}_{int} (1.5) дельта-функцию $\delta((x-y)^2 - h^2)$. Тогда действие (1.5) примет вид

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = -i \frac{\kappa^2}{2} \iint d^4x d^4y j_\mu^a(x) j^{a\mu}(y) D(x-y) \delta((x-y)^2 - h^2), \quad (8.10)$$

где константа κ введена для получения правильной размерности ($[\kappa] = m^{-1}$). После сдвига аргумента y с помощью лоренц-инвариантного оператора

$$q(y) = \exp\left((y-x)_\mu \partial^\mu\right) q(x)$$

эффективное действие (8.10) перепишется в виде

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = -i \frac{\kappa^2 D(h)}{2} \int d^4x j_\mu^a(x) K(h, x) j^{a\mu}(x), \quad (8.11)$$

где

$$K(h, x) = \int d^4y \exp((y-x)_\mu \partial^\mu) \delta((x-y)^2 - h^2). \quad (8.12)$$

Проинтегрировав по полярным координатам и разложив выражение (8.12) в ряд

$$K(h, x) = \pi^2 h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n + 2)} h^{2n} \square^n = \pi^2 h^2 \left[1 + \frac{1}{8} \frac{\square}{\tilde{\Lambda}^2} + O\left(\frac{\square^2}{\tilde{\Lambda}^4}\right) \right], \quad (8.13)$$

мы можем переписать действие (8.11) следующим образом:

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = -i \frac{9G}{16} \int d^4x \left[j_{\mu}^a(x) j^{a\mu}(x) + \frac{1}{8\tilde{\Lambda}^2} j_{\mu}^a(x) (\square j^{a\mu}(x)) \right] + O\left(\frac{\square^2}{\tilde{\Lambda}^4}\right), \quad (8.14)$$

где $G = \frac{8}{9} \pi^2 \kappa^2 h^2 D(h)$.

После преобразования Фирца действие (8.14) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{int}} = & i \frac{9G}{16} \int d^4x \left(\bar{q}(x) \frac{\mathcal{M}^{\theta}}{2} q(x) \bar{q}(x) \frac{\mathcal{M}^{\theta}}{2} q(x) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\tilde{\Lambda}^2} \bar{q}(x) \frac{\mathcal{M}^{\theta}}{2} \square [q(x) \bar{q}(x)] \frac{\mathcal{M}^{\theta}}{2} q(x) \right), \quad (8.15) \end{aligned}$$

где \mathcal{M}^{θ} — тензорное произведение вида (1.7). Первый член в (8.15) приводит к эффективному четырехкварковому взаимодействию модели НИЛ, в то время как второй член, пропорциональный $1/\tilde{\Lambda}^2$, учитывает эффекты конечного размера коллективных мезонов. Второй член в (8.15) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{S}_{\text{int}}^{(2)} = \frac{i}{16\tilde{\Lambda}^2} \int d^4x \bar{q}(x) [\partial^{\mu} \eta(x) \partial_{\mu} + \eta(x) \partial^2] q(x) + (\text{excitation terms}), \quad (8.16)$$

где $\eta(x)$ — комбинация локальных коллективных полей (8.5), которые теперь определены соотношениями (2.2) при $G_1 = 2G_2 = G/4$. Сравнивая выражения (8.9) и (8.16), получим $\alpha = 1/16$, что соответствует наивному приближению фиксированного расстояния в бислокальной модели.

Если рассматривать мезон как связанную $\bar{q}q$ -систему в эффективном глюонном потенциале, по аналогии с атомом водорода в квантовой механике, то соответствующее нерелятивистское уравнение Шредингера запишется в виде [71] ($\hbar = c = 1$):

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + [V(\mathbf{r}) - E] \Psi(\mathbf{r}) = 0.$$

Здесь Ψ — волновая функция внутреннего движения; m — приведенная масса составляющих кварков в двухчастичной системе, $m = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$; \mathbf{r} — относительная координата; $V(\mathbf{r})$ — потенциал взаимодействия, и E —

собственное значение гамильтониана. Для сферического потенциала волновая функция Ψ обычно представляется в виде произведения радиальной функции $R(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$, и сферических гармоник $Y_{lm}(\Theta, \phi)$: $\Psi(\mathbf{r}) = R(r)Y_{lm}(\Theta, \phi)$. Уравнение Шредингера для радиальной функции имеет вид

$$-u''(r) = 2m \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)}{2mr^2} \right] u(r), \quad u(r) = rR(r) \quad (8.17)$$

с граничным условием $u(0) = 0$.

Результаты расчетов в рамках КХД на решетках [72] показывают, что на больших расстояниях эффективное кварк-антикварковое взаимодействие можно аппроксимировать (пренебрегая кулоновскими и другими поправками) линейно растущим потенциалом*:

$$V(r) = \sigma \cdot r, \quad (8.18)$$

где $\sigma \approx 0,27 \text{ ГэВ}^2$ при $m_u = m_d = \mu = 0,336 \text{ ГэВ}$ [73]. В этом случае характеристическое расстояние между составляющими кварком и антикварком $\langle r \rangle$ можно легко оценить с помощью теоремы вириала:

$$\langle r \rangle \equiv h = \frac{2E_1}{3\sigma} \approx 0,68 \text{ фм.}$$

Здесь $E_1 = 2,238(\sigma^2/2\mu)^{1/3}$ — энергия основного состояния. В дальнейшем мы будем рассматривать только основные состояния ($l = 0$), то есть будем отбрасывать возбужденные состояния, такие как π^* , K^* и т.д. После масштабирования уравнения (8.17) с помощью введения $\rho = r/h_0$ и $w(\rho) = u(r)$ получим $w''(\rho) + (\varepsilon - 2\rho)w(\rho) = 0$, где $\varepsilon = 2m(2m\sigma)^{-\frac{2}{3}}E$. Для больших ρ решения ведут себя как функции Эйри $w(\rho) \sim Ai(\rho)$, убывая экспоненциально к нулю. Радиальная волновая функция $R(r)$, определяемая уравнением (8.17), убывает еще быстрее. Поэтому можно ожидать малых среднеквадратичных отклонений Δr для расстояния между составляющими кварками.

Альтернативная оценка эффективного расстояния может быть получена с помощью моделирования в КХД на решетках [74]. В этом случае расстояние корреляций, которое является мерой области действия цветных сил, оказывается существенно меньше: $h \sim 0,22 \text{ фм}$. Для численных оценок мы будем использовать величину $h = 0,68 \text{ фм}$, получаемую из теоремы вириала. Эта величина будет давать нам ограничения сверху для оценок нелокальных эффектов.

*Мы пренебрегаем здесь эффектами экранировки виртуальными $\bar{q}q$ -парами на очень больших расстояниях.

Используя значения величин $\tilde{\Lambda} = 0, 28 \text{ ГэВ}$ и $\mu = 0, 336 \text{ ГэВ}$, получим

$$\frac{\alpha\mu^2}{\tilde{\Lambda}^2} \approx 0,09. \quad (8.19)$$

Эту величину мы будем рассматривать как малый параметр разложения при численных оценках нелокальных эффектов.

После интегрирования по полям кварков полное действие, возникающее из производящего функционала (8.6), запишется в виде, аналогичном (2.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Phi, \Phi^\dagger, V, A) = & \int d^4z \left[-\frac{1}{4G_1} \text{tr}(\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{4G_2} \text{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) \right] - \\ & -i \text{Tr}'[\ln(i\tilde{\mathbf{D}})]. \end{aligned}$$

Здесь второй член представляет собой кварковый детерминант дираковского оператора $i\tilde{\mathbf{D}}$, модифицированного нелокальными вкладами. Выражение для него можно получить из (2.4) с помощью замены

$$\begin{aligned} A_\mu^{R/L} & \rightarrow A_\mu^{R/L} \left(1 + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \partial^2 \right) + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} (\partial_\nu A_\mu^{R/L}) \partial^\nu, \\ \Phi & \rightarrow \Phi \left(1 + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \partial^2 \right) + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} (\partial_\nu \Phi) \partial^\nu. \end{aligned}$$

Метод ядра теплопроводности можно использовать и при вычислении модуля кваркового детерминанта для дираковского оператора $\tilde{\mathbf{D}}$, модифицированного нелокальными вкладами. В этом случае оператор $\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{D}}^\dagger$ примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{D}}^\dagger & = \beta \partial^2 + \mu^2 + 2\Gamma_\mu \partial^\mu + \Gamma_\mu^2 + a(x) + \\ & + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \left[b(x) + Q_\alpha(x) \partial^\alpha + c(x) \partial^2 + 2(\Gamma_\mu \partial^2 + \partial_\alpha \Gamma_\mu \partial^\alpha) \partial^\mu \right] + O\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\Lambda}^4}\right), \end{aligned}$$

где $\beta = 1 + 2\alpha\mu^2/\tilde{\Lambda}^2$. Комбинации $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $Q_\alpha(x)$ не содержат дифференциальных операторов, действующих на кварковые поля:

$$\begin{aligned} a(x) & = i\gamma^\mu (P_R D_\mu \Phi + P_L \bar{D}_\mu \Phi^\dagger) + P_R \mathcal{M} + P_L \bar{\mathcal{M}} + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Gamma_{\mu\nu}, \\ b(x) & = i\gamma^\mu \left[P_R (A_\mu^L \partial^2 \Phi + \partial_\alpha A_\mu^L \partial^\alpha \Phi - \Phi \partial^2 A_\mu^R - \partial_\alpha \Phi \partial^\alpha A_\mu^R) + \right. \\ & \quad \left. + P_L (A_\mu^R \partial^2 \Phi^\dagger + \partial_\alpha A_\mu^R \partial^\alpha \Phi^\dagger - \Phi^\dagger \partial^2 A_\mu^L - \partial_\alpha \Phi^\dagger \partial^\alpha A_\mu^L) \right] + \\ & \quad + P_R (\Phi^\dagger \partial^2 \Phi + \partial_\alpha \Phi^\dagger \partial^\alpha \Phi) + P_L (\Phi \partial^2 \Phi^\dagger + \partial_\alpha \Phi \partial^\alpha \Phi^\dagger) + \Gamma_\mu \partial^2 \Gamma^\mu + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\partial_\alpha \Gamma_\mu)^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \left([\partial_\alpha \Gamma_\mu, \partial^\alpha \Gamma_\nu] + \Gamma_\mu \partial^2 \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \partial^2 \Gamma_\mu \right), \\
 c(x) = & a(x) + i\gamma^\mu \left[P_R (A_\mu^L \Phi - \Phi A_\mu^R) + P_L (A_\mu^R \Phi^\dagger - \Phi^\dagger A_\mu^L) \right] + \\
 & + P_R \mathcal{M} + P_L \overline{\mathcal{M}} + 2\Gamma_\mu^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu], \\
 Q_\alpha(x) = & 3\Gamma_\mu \partial_\alpha \Gamma^\mu + \partial_\alpha \Gamma_\mu \Gamma^\mu + \partial_\alpha a(x) + \\
 & + 2i\gamma^\mu \left[P_R (A_\mu^L \partial_\alpha \Phi - \Phi \partial_\alpha A_\mu^R) + P_L (A_\mu^R \partial_\alpha \Phi^\dagger - \Phi^\dagger \partial_\alpha A_\mu^L) \right] + \\
 & + 2(P_R \Phi^\dagger \partial_\alpha \Phi + P_L \Phi \partial_\alpha \Phi^\dagger) + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\Gamma_\mu \partial_\alpha \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \partial_\alpha \Gamma_\mu).
 \end{aligned}$$

Модифицированные рекурсивные уравнения для коэффициентов теплопроводности $h_k(x) = h_k(x, y = x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 & 2\frac{\alpha}{\Lambda^2} \Gamma_\mu t^\mu t^2 h_{n+3}(x, y) + \\
 & + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left[t^2 (2\Gamma_\mu^2 + c(x)) + \right. \\
 & + 2\Gamma_\mu (3t^\mu + 2t^\mu t_\alpha \partial^\alpha + t^2 \partial^\mu) + 2\partial_\alpha \Gamma_\mu t^\mu t^\alpha \left. \right] h_{n+2}(x, y) + \\
 & + \left[n + 1 + 2t_\mu d^\mu + \frac{\alpha}{2\Lambda^2} \left(+ 4c(x)(1 + t_\alpha \partial^\alpha) - 8\mu^2 t_\alpha d^\alpha + 2Q_\alpha(x) t^\alpha + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2\partial_\alpha \Gamma_\mu (t^\mu \partial^\alpha + t^\alpha \partial^\mu) + 4\Gamma_\mu (2\partial^\mu + 2t_\alpha \partial^\alpha \partial^\mu + t^\mu \partial^2) \right) \right] h_{n+1}(x, y) + \\
 & + \left[a(x) + d_\mu d^\mu + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left(b(x) + Q_\alpha(x) \partial^\alpha + 2(\Gamma_\mu \partial^2 + \partial_\alpha \Gamma_\mu \partial^\alpha) \partial^\mu + \right. \right. \\
 & \left. \left. + c(x) \partial^2 \right) \right] h_n(x, y) = 0,
 \end{aligned}$$

где оператор дифференцирования ∂_μ действует только на x . В случае $V_\mu = A_\mu = 0$ рекурсивные соотношения для коэффициентов теплопроводности сводятся к уравнению

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha}{\Lambda^2} t^2 \tilde{c}(x) h_{n+2}(x, y) + \\
 & + \left\{ n + 1 + 2t_\mu \partial^\mu + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left[2(\tilde{a}(x) + \tilde{c}(x))(1 + t_\mu \partial^\mu) - 4\mu^2 t_\mu \partial^\mu + \right. \right. \\
 & \left. \left. + t_\mu (\partial^\mu \tilde{a}(x) + 2\tilde{Q}^\mu(x)) \right] \right\} h_{n+1}(x, y) + \\
 & + \left\{ \tilde{a}(x) + \partial^2 + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left[\tilde{b}(x) + (\partial_\mu \tilde{a}(x) + 2\tilde{Q}_\mu(x)) \partial^\mu + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. + (\tilde{a}(x) + \tilde{c}(x)) \partial^2 \right] \Big] \Big\} h_n(x, y) = 0, \quad (8.20)$$

где

$$\tilde{a}(x) = i\gamma^\mu (P_R \partial_\mu \Phi + P_L \partial_\mu \Phi^\dagger) + P_R \mathcal{M} + P_L \overline{\mathcal{M}},$$

$$\tilde{b}(x) = P_R (\Phi^\dagger \partial^2 \Phi + \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi) + P_L (\Phi \partial^2 \Phi^\dagger + \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^\dagger),$$

$$\tilde{c}(x) = P_R \mathcal{M} + P_L \overline{\mathcal{M}}, \quad \tilde{Q}_\mu(x) = P_R \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + P_L \Phi \partial_\mu \Phi^\dagger.$$

Из (8.20) можно получить выражения для коэффициентов теплопроводности h_0, \dots, h_3 , модифицированные нелокальными вкладами:

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1, \\ \text{tr}' [h_1(x)] &= -\text{tr}' \left[\tilde{a} + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left(\tilde{b} - \tilde{a}(\tilde{a} + \tilde{c}) \right) \right] + O\left(\frac{\alpha^2}{\Lambda^4}\right), \\ \text{tr}' [h_2(x)] &= \text{tr}' \left[\frac{1}{2} \tilde{a}^2 + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left(\tilde{a} \tilde{b} - \frac{2}{3} \tilde{a}^2 (\tilde{a} + \tilde{c}) + \frac{5}{12} (\partial_\mu \tilde{a})^2 - \frac{1}{12} \partial_\mu \tilde{a} \partial^\mu \tilde{c} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{a} \partial^\mu \tilde{Q}_\mu \right) \right] + O\left(\frac{\alpha^2}{\Lambda^4}\right), \\ \text{tr}' [h_3(x)] &= -\text{tr}' \left\{ \frac{1}{6} \tilde{a}^3 - \frac{1}{12} (\partial_\mu \tilde{a})^2 + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left[\frac{1}{2} \tilde{a}^2 \tilde{b} - \frac{1}{4} \tilde{a}^3 (\tilde{a} + \tilde{c}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{a}^2 \left(\frac{3}{10} \partial^2 \tilde{a} + \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{Q}_\mu + \frac{2}{3} \partial^2 \tilde{c} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{a} \left(\frac{5}{6} (\partial_\mu \tilde{a})^2 + \frac{1}{15} \partial^2 \tilde{a} \tilde{c} + \frac{2}{5} \partial_\mu \tilde{a} \partial^\mu \tilde{c} + \frac{11}{30} \partial_\mu \tilde{c} \partial^\mu \tilde{a} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{20} (\partial^2 \partial^2 \tilde{c} + \tilde{c} \partial^2 \tilde{a}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} (\partial^2 \partial^\mu \tilde{Q}_\mu - \tilde{Q}_\mu \partial^\mu \tilde{a} + \partial^\mu \tilde{a} \tilde{Q}_\mu - \partial^2 \tilde{b}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{15} \left(\partial^2 \tilde{c} \partial^2 \tilde{a} - \tilde{c} (\partial_\mu \tilde{a})^2 - (\partial^2 \tilde{a})^2 \right) - \frac{1}{18} \mu^2 (\partial_\mu \tilde{a})^2 \right\} + \\ &\quad + O\left(\frac{\alpha^2}{\Lambda^4}\right). \end{aligned}$$

Выражений для h_1 , h_2 и h_3 достаточно, чтобы вычислить нелокальные поправки к эффективному бозонизованному лагранжиану, включающему p^4 -члены (нелокальные поправки к коэффициенту h_4 дают вклад, начиная с p^6 -членов).

Вычисления кваркового детерминанта с учетом нелокальных эффектов [23] приводят к модифицированному выражению для константы F_0 :

$$F_0^2 = \frac{N_c \mu^2}{4\pi^2} \left[y - \frac{4\pi^2 \langle \bar{q}q \rangle}{\mu^3 N_c} \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right], \quad (8.21)$$

где первый член отвечает локальному пределу, в то время как второй соответствует нелокальной поправке. Для мезонной массовой матрицы $\chi = \text{diag}(\chi_u^2, \chi_d^2, \dots, \chi_n^2)$ получим

$$\chi_i^2 = \frac{N_c \mu m_i^0}{2\pi^2 F_0^2} \left(\Lambda^2 e^{-\mu^2/\Lambda^2} - \mu^2 y \right) = -\frac{2m_i^0 \langle \bar{q}q \rangle}{F_0^2}. \quad (8.22)$$

Кроме того, структурные коэффициенты L_i минимальной части эффективного p^4 -лагранжиана Гассера — Лейтвилера определены соотношениями $L_1 - L_2/2 = L_4 = 0$ и

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{N_c}{16\pi^2} \frac{1}{12} \left(1 + 2 \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right), \\ L_3 &= -\frac{N_c}{16\pi^2} \frac{1}{6} \left(1 + 5(1-y) \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right), \\ L_5 &= \frac{N_c}{16\pi^2} x \left[y - 1 - \frac{28}{3} \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Аналогичным способом можно оценить нелокальные поправки к неминимальной части эффективного мезонного p^4 -лагранжиана. Здесь мы ограничимся только модифицированными выражениями для структурных коэффициентов L_9 и L_{10} :

$$\begin{aligned} L_9 &= \frac{N_c}{16\pi^2} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{21y - 26}{6} \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right), \\ L_{10} &= -\frac{N_c}{16\pi^2} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{15y - 10}{3} \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Следует особо подчеркнуть, что нелокальные поправки не влияют на массовую матрицу мезонов. Нелокальные поправки к структурным коэффициентам L_2 , L_3 , L_9 и L_{10} (см. формулы (8.23) и (8.24)) не превышают 15–20% по сравнению с локальным пределом. Наиболее чувствительным к нелокальным поправкам оказывается коэффициент L_5 , в результате чего нелокальные эффекты должны сильно влиять на описание расщепления констант распадов F_π и F_K . Следует подчеркнуть, что полученные оценки, использующие значение $h = 0,68$ фм из уравнения Шредингера для линейно растущего

потенциала, дают для нелокальных поправок существенно завышенные ограничения сверху. Если использовать величину $h \sim 0,22$ фм из моделирований КХД на решетках [74], то в этом случае нелокальные поправки не будут превышать 5%. Этот результат позволяет понять, почему, несмотря на всю неполноту, бозонизация модели НИЛ приводит к правильному описанию низкоэнергетических мезонных процессов в терминах эффективных киральных лагранжианов. Малость полученных нелокальных поправок показывает, что модель НИЛ, как локальная модель эффективных четырехкварковых взаимодействий, действительно является разумным физическим приближением, описывающим киральную динамику кварков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

КХД-мотивированные биллокальные модели эффективных кварковых взаимодействий и возникающие из них в локальном пределе различные модификации расширенной модели НИЛ являются плодотворными подходами к изучению внутренней кварковой структуры адронов. В настоящем обзоре мы ограничились подробным обсуждением лишь тех аспектов бозонизации модели НИЛ, которые связаны с получением киральных мезонных лагранжианов в высших порядках импульсного разложения. Многие другие выходящие за рамки нашего рассмотрения вопросы, в том числе уравнения Бете — Солпитера для связанных $\bar{q}q$ -состояний, дикварки и солитонная модель барионов, детально разбираются в обзорах [12, 27, 30, 31] и других цитируемых нами работах.

В обычной модели НИЛ для регуляризации УФ-расходимостей в кварковых петлях с внешними мезонными полями, возникающих при вычислении кваркового детерминанта, вводится обрезание сверху по импульсам. Кроме того, в таком подходе не учитывается импульсная зависимость в кварк-мезонных вершинах (нелокальность), более детально отражающая составную структуру адронов, а также отсутствует конфайнмент кварков. Тем не менее бозонизация модели НИЛ приводит к правильной феноменологии низкоэнергетических мезонных процессов не только в древесном p^2 -приближении, воспроизводящем результаты алгебры токов, но и в высших порядках теории возмущений с учетом унитарных поправок, обусловленных мезонными петлями. Именно это обстоятельство является главным аргументом в пользу модели НИЛ как локального низкоэнергетического приближения КХД.

При обсуждении феноменологического статуса бозонизованных лагранжианов мы ограничились рассмотрением сектора псевдоскалярных мезонов. Было показано, что векторные, аксиально-векторные и скалярные мезоны могут быть исключены из явного рассмотрения с помощью интегрирования по соответствующим резонансным степеням свободы в производящем функционале бозонизованной модели НИЛ. Модификация структурных коэффици-

ентов эффективных лагранжианов после редукции резонансов приводит, как правило, к значительному улучшению описания экспериментальных данных по низкоэнергетическим мезонным процессам как в p^4 -, так и в p^6 -порядках киральной теории возмущений с бозонизованными лагранжианами. Тем не менее следует отметить, что описание процессов с векторными и аксиально-векторными мезонами на массовой поверхности, по-видимому, находится на границе применимости импульсного разложения в киральной теории.

Заметим, что трудности, обусловленные ограниченностью применимости импульсного разложения, возникают уже при описании распадов η - и η' -мезонов. В этом случае необходим также учет нарушения $U(1)$ -симметрии, например, с помощью введения дополнительного шестикваркового взаимодействия, индуцированного инстантонами и связанного с детерминантом t' Хоофта [80]. В рамках такого расширения модели НИЛ из решения уравнений Бете — Солпитера для связанных $\bar{q}q$ -состояний в работах [81] были получены спектры масс псевдоскалярных, скалярных, векторных и аксиально-векторных мезонов. В подходе же эффективных киральных лагранжианов для формализации решения $U(1)$ -проблемы более удобным представляется подход [82], основанный на учете глюонной аномалии [83] с помощью введения в киральный лагранжиан глюонных полей в виде плотности топологического заряда.

Следует особо подчеркнуть хорошо известный факт, что стандартная модель НИЛ не в состоянии правильно описать динамику низколежащих мезонных резонансов на массовой поверхности [84]. В этой модели, например, векторные мезоны могут существовать на массовой поверхности, если только масса составляющего кварка превышает 385 МэВ, но даже и в этом случае существует большой нефизический $\bar{q}q$ -континуум в спектральных функциях. Для меньших значений массы составляющего кварка векторные мезоны не могут существовать даже как резонансы в $\bar{q}q$ -континууме [85]. К аналогичному выводу пришли также авторы работы [86], в которой рассматривались свойства векторных и аксиально-векторных мезонов при конечной температуре и плотности в модели НИЛ. Было показано, что при стандартном выборе параметров модель предсказывает большую ширину распада $\rho \rightarrow q\bar{q}$, по порядку величины совпадающую с массой ρ -мезона. В результате ρ -мезон оказывается крайне нестабильным. Указанные обстоятельства, связанные с отсутствием конфайнмента в модели НИЛ, являются серьезной трудностью данной модели, поскольку они практически исключают возможность интерпретации коллективных мезонных возбуждений в векторном и аксиально-векторном секторе как реальных векторных и аксиально-векторных мезонов. Для решения этой проблемы необходим выход за рамки стандартной модели НИЛ, учитывающий свойства конфайнмента кварков.

Используя биллокальный подход, можно получить различные расширения модели НИЛ, включающие как нелокальность, так и моделирование конфайн-

мента. Так, в работе [21] рассматривалось моделирование свойств конфайнмента кварков в рамках модифицированной модели НИЛ, которая возникает из биллокального действия (1.6) при использовании специального анзаца для непертурбативного глюонного пропагатора. В импульсном представлении указанный анзац содержит сумму двух членов: константа, соответствующая обычному локальному взаимодействию модели НИЛ, и δ -функция, эффективно учитывающая $1/q^4$ -поведение глюонного пропагатора в области конфайнмента. Введение δ -функции модифицирует уравнение Швингера — Дайсона и приводит к такому поведению бегущей массы составляющего кварка $m(q^2)$, которое обеспечивает отсутствие полюсов в его пропагаторе.

Более глубокое понимание роли конфайнмента в рамках бозонизации КХД дает расширенная трактовка модели НИЛ, развитая в подходе [22]. При рассмотрении кварковых петель с внешними мезонными полями в этих работах предполагалась локальность кварк-мезонных вершин, в то время как кварковые пропагаторы описывались внутренними аналитическими функциями, обеспечивающими не только конфайнмент кварков, но и УФ-сходимость кварковых петель. В работе [87] была предложена также формулировка модели НИЛ с сепарабельным взаимодействием, которое учитывает нелокальность с помощью соответствующих формфакторов в четырехкварковых вершинах.

В последнем разделе обзора мы рассмотрели в полуфеноменологическом подходе нелокальные эффекты, связанные с вкладом области конфайнмента в биллокальное действие. Было показано, что нелокальные поправки к структурным коэффициентам бозонизованного p^4 -лагранжиана модели НИЛ достаточно малы*. Этот результат подтверждает, что динамика взаимодействий псевдоскалярных мезонов при низких энергиях оказывается нечувствительной к конфайнменту кварков и определяется киральной симметрией и ее нарушением. Поэтому можно ожидать, что включение моделирования конфайнмента в какой-либо конкретной расширенной версии модели НИЛ с целью устранения трудностей, связанных с описанием динамики векторных и аксиально-векторных мезонов на массовой поверхности, не должно серьезно сказаться на описании псевдоскалярного сектора.

Функциональные методы, используемые при бозонизации сильных взаимодействий в модели НИЛ, можно также применить для бозонизации эффективных четырехкварковых нелептонных слабых взаимодействий с изменением странности $|\Delta S| = 1$. Для этого используется введенный в работе [88] производящий функционал функций Грина для кварковых токов и их плотно-

*Следует отметить, что в ряде случаев вклады в амплитуды мезонных процессов от нелокальных поправок к структурным коэффициентам p^4 -лагранжиана могут оказаться сравнимыми с вкладами p^6 -лагранжиана.

стей, произведения которых входят в слабый четырехкварковый лагранжиан. В таком подходе мезонные $(V - A)$ - и $(S - P)$ -токи возникают в результате вариации кваркового детерминанта модели НИЛ по дополнительным внешним источникам, ассоциированным с соответствующими кварковыми токами и их плотностями. Дополнительные внешние источники появляются в кварковом детерминанте в результате переопределения дираковского оператора. В результате члены кваркового детерминанта, дающие вклад в бозонизованный сильный лагранжиан порядка p^{2n} импульсного разложения, генерируют $(V - A)$ и $(S - P)$ мезонные токи, соответственно, порядка p^{2n-1} и p^{2n-2} .

Как было показано, в частности, в работе [88], оценки прямого CP -нарушения в распадах $K \rightarrow 2\pi$ и $K \rightarrow 3\pi$, возникающего как разностный эффект из интерференций различных изотопических амплитуд, оказываются очень чувствительными к высшим поправкам киральной теории возмущений. Это относится также к фазам взаимодействий пионов в конечных состояниях распадов $K \rightarrow 2\pi$, $K \rightarrow 3\pi$ и квадратичным параметрам наклона далитц-плотов распадов $K \rightarrow 3\pi$. Более точное измерение параметров наклонов распадов $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \pi^0$ проводится в настоящее время в двух экспериментах на ускорителе $У-70$ в Протвино [89]. Точные измерения параметров наклонов необходимы для проведения нового анализа нелептонных K -распадов в киральной теории с целью фиксации модельных зависимостей в вычислениях мезонных матричных элементов, феноменологического определения вильсоновских коэффициентов и уменьшения модельных неопределенностей в предсказаниях наблюдаемых эффектов прямого CP -нарушения. В настоящее время мы проводим более полные, по сравнению с работой [88], вычисления амплитуд распадов $K \rightarrow 2\pi$, $K \rightarrow 3\pi$ в p^6 -порядке киральной теории с учетом $(V - A)$ и $(S - P)$ мезонных токов, которые генерируются бозонизованными лагранжианами высшего порядка, обсуждавшимися в обзоре.

ПРИЛОЖЕНИЕ. P^6 -ВКЛАДЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Здесь представлены исходные выражения (до применения эквивалентных преобразований, вытекающих из свойств ковариантных производных (5.4) и уравнений движения) для p^6 -вкладов конечной части бозонизованного лагранжиана, которая возникает из коэффициентов теплопроводности h_3 , h_4 , h_5 и h_6 после вычисления следа по дираковским матрицам:

$$\mathcal{L}_{\text{fin}}^{(p^6)} = -\frac{N_c}{32\pi^2 \mu^6} \text{tr} \left(\mu^4 H_3^{p^6} + \mu^2 H_4^{p^6} + 2 H_5^{p^6} + \frac{6}{\mu^2} H_6^{p^6} \right). \quad (\text{A.1})$$

Соответствующие вклады определены выражениями

$$\begin{aligned}
H_3^{p_6} &= -\frac{1}{3}(\mathcal{M}^3 + \overline{\mathcal{M}}^3) + \frac{1}{6}[(D'_\mu \mathcal{M})^2 + (\overline{D}'_\mu \overline{\mathcal{M}})^2] + \\
&\quad + \frac{1}{3}[\mathcal{M}(F_{\mu\nu}^L)^2 + \overline{\mathcal{M}}(F_{\mu\nu}^R)^2] - \\
&\quad - \frac{1}{3}(F_{\mu\nu}^L F^{L\mu\alpha} F^{L\nu}{}_\alpha + F_{\mu\nu}^R F^{R\mu\alpha} F^{R\nu}{}_\alpha) - \\
&\quad - \frac{1}{54}[(F^{L\mu}{}_{\mu\nu})^2 + (F^{R\mu}{}_{\mu\nu})^2] - \frac{41}{540}[(F_{\mu\nu\alpha}^L)^2 + (F_{\mu\nu\alpha}^R)^2], \\
H_4^{p_6} &= -\frac{1}{6}\left[D'^2 \mathcal{M} D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + \overline{D}'_\mu \overline{\mathcal{M}} (\overline{D}'^\nu \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi + \overline{D}_\nu \Phi^\dagger D^\mu D^\nu \Phi) + \right. \\
&\quad \left. + \overline{D}'^2 \overline{\mathcal{M}} \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi + D'_\mu \mathcal{M} (D^\nu D^\mu \Phi \overline{D}_\nu \Phi^\dagger + D_\nu \Phi \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \Phi^\dagger)\right] - \\
&\quad - \frac{1}{6}\left[\mathcal{M}(D_\mu D_\nu \Phi \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + D_\mu \Phi \overline{D}^2 \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + D^2 D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger) + \right. \\
&\quad \left. + \overline{\mathcal{M}} (\overline{D}_\mu \overline{D}_\nu \Phi^\dagger D^\mu D^\nu \Phi + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^2 D^\mu \Phi + \overline{D}^2 \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi)\right] - \\
&\quad - \frac{1}{3}(\mathcal{M} D_\mu \Phi \overline{\mathcal{M}} \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + \mathcal{M}^2 D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + \overline{\mathcal{M}}^2 \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi) - \\
&\quad - \frac{7}{180} D^2 D_\mu \Phi \overline{D}^2 \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + \frac{1}{180} D_\mu D_\nu D_\alpha \Phi \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger + \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} D_\mu \Phi F_{\nu\alpha}^R \overline{D}^\mu \Phi^\dagger F^{L\nu\alpha} - D_\mu \Phi F_{\nu\alpha}^R \overline{D}^\nu \Phi^\dagger F^{L\mu\alpha} + \right. \\
&\quad \left. + D^\mu \Phi F_{\mu\nu}^R \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger F^{L\nu\alpha}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{10}\left[D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger (F_{\nu\alpha}^L)^2 + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi (F_{\nu\alpha}^R)^2\right] - \\
&\quad - \frac{1}{3}\left[D_\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger [F^{L\mu\alpha}, F_{\nu\alpha}^L] + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi [F^{R\mu\alpha}, F_{\nu\alpha}^R]\right] + \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger F^{L\alpha}{}_{\alpha\mu\nu} + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi F^{R\alpha}{}_{\alpha\mu\nu}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{6}\left[(D^\alpha D^\mu \Phi \overline{D}_\alpha \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + D^2 D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + D^\mu \Phi \overline{D}^2 \overline{D}^\nu \Phi^\dagger) F_{\mu\nu}^L + \right. \\
&\quad \left. + (\overline{D}^\alpha \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\alpha D^\nu \Phi + \overline{D}^2 \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi + \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^2 D^\nu \Phi) F_{\mu\nu}^R\right] + \\
&\quad + \frac{1}{180}\left[(D^\mu D^\nu D^\alpha \Phi \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger - D_\alpha \Phi \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger) F_{\mu\nu}^L + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger D_\alpha \Phi - \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\mu D^\nu D^\alpha \Phi \right) F_{\mu\nu}^R \Big] + \\
 & + \frac{1}{6} \left[\left(D^\nu D^\alpha \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger - D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger \right) F_{\nu\alpha\mu}^L + \right. \\
 & + \left. \left(\overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger D^\mu \Phi - \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu D^\alpha \Phi \right) F_{\nu\alpha\mu}^R \right] - \\
 & - \frac{1}{72} \left[\left(D^\alpha D^\mu \Phi \overline{D}_\mu \Phi^\dagger - D_\mu \Phi \overline{D}^\alpha \overline{D}^\mu \Phi^\dagger \right) F^{L\nu}{}_{\nu\alpha} + \right. \\
 & + \left. \left(\overline{D}^\alpha \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\mu \Phi - \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\alpha D^\mu \Phi \right) F^{R\nu}{}_{\nu\alpha} \right] + \\
 & + \frac{1}{3} \left[\left(\mathcal{M} D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger \mathcal{M} + D^\mu \Phi \overline{\mathcal{M}} \overline{D}^\nu \Phi^\dagger \right) F_{\mu\nu}^L + \right. \\
 & + \left. \left(\overline{\mathcal{M}} \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi + \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi \overline{\mathcal{M}} + \overline{D}^\mu \Phi^\dagger \mathcal{M} D^\nu \Phi \right) F_{\mu\nu}^R \right], \\
 \\
 H_5^6 & = \frac{1}{20} \left[\left(D_\mu \Phi \overline{D}_\nu \Phi^\dagger - D_\nu \Phi \overline{D}_\mu \Phi^\dagger \right) D^\alpha D^\mu \Phi \overline{D}_\alpha \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + \right. \\
 & + \left. \left(\overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi - \overline{D}_\nu \Phi^\dagger D_\mu \Phi \right) \overline{D}^\alpha \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\alpha D^\nu \Phi - \right. \\
 & - \left. D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\nu D_\alpha \Phi \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger - \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi \overline{D}_\nu \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\nu D^\alpha \Phi \right] + \\
 & + \frac{1}{30} \left[\left(D_\mu \Phi \overline{D}_\nu \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger - D_\alpha \Phi \overline{D}_\nu \overline{D}_\mu \Phi^\dagger \right) D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger + \right. \\
 & + \left. \left(\overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu D_\alpha \Phi - \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger D_\nu D_\mu \Phi \right) \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu D^\alpha \Phi - \right. \\
 & - \left. D_\mu \Phi \overline{D}^\nu \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\alpha \Phi \overline{D}_\nu \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger - \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\nu D^\mu \Phi \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger D_\nu D_\alpha \Phi \right] - \\
 & - \frac{1}{12} \left[\mathcal{M} \left((D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger)^2 - (D_\mu \Phi \overline{D}_\nu \Phi^\dagger)^2 + D_\mu \Phi \overline{D}_\nu \Phi^\dagger D^\nu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger \right) + \right. \\
 & + \left. \overline{\mathcal{M}} \left((\overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi)^2 - (\overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi)^2 + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger D^\mu \Phi \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{12} \left[\left(\{ D_\alpha \Phi \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger, D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger \} + \right. \right. \\
 & + D_\alpha \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + D^\mu \Phi \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger (D^\alpha \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger - D^\nu \Phi \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger) + \\
 & + D_\alpha \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger (D^\nu \Phi \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger - D^\alpha \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger) \Big) F_{\mu\nu}^L + \\
 & + \left. \left(\{ \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\alpha \Phi, \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi \} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{D}^\mu \Phi^\dagger D_\alpha \Phi (\bar{D}^\alpha \Phi^\dagger D^\nu \Phi - \bar{D}^\nu \Phi^\dagger D^\alpha \Phi) + \\
& + \bar{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\mu \Phi (\bar{D}^\nu \Phi^\dagger D^\alpha \Phi - \bar{D}^\alpha \Phi^\dagger D^\nu \Phi) \Big] F_{\mu\nu}^R, \\
\\
H_6^{\text{p}} & = -\frac{1}{90} (D_\mu \Phi \bar{D}^\mu \Phi^\dagger)^3 + \frac{1}{30} D_\mu \Phi \bar{D}^\mu \Phi^\dagger (D_\alpha \Phi \bar{D}_\nu \Phi^\dagger)^2 - \\
& - \frac{1}{60} D_\mu \Phi \bar{D}^\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi \bar{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\alpha \Phi \bar{D}^\nu \Phi^\dagger + \\
& + \frac{1}{180} D_\mu \Phi \bar{D}_\nu \Phi^\dagger D_\alpha \Phi \bar{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi \bar{D}_\alpha \Phi^\dagger - \\
& - \frac{1}{60} D_\mu \Phi \bar{D}_\nu \Phi^\dagger D^\mu \Phi \bar{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\nu \Phi \bar{D}^\alpha \Phi^\dagger.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kleinert H. — Phys. Lett., 1976, v.62B, p.77; in: Understanding the Fundamental Constituents of Matter, ed. A.Zichichi, N.Y.: Plenum Publishing Corporation, 1978.
2. Первушин В.Н., Эберт Д. — ТМФ, 1978, т.36, с.313.
Первушин В.Н., Райнхардт Х., Эберт Д. — ЭЧАЯ, 1979, т.10, с.444.
3. Дьяконов Д.И., Эйдеес М.И. — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.358.
Diakonov D., Petrov V. — Nucl. Phys., 1984, v.B245, p.259; Nucl. Phys., 1986, v.B272, p.457.
4. Карчев Н., Славнов А. — ТМФ, 1985, т.65, с.192.
5. Andrianov A., Novozhilov Yu. — Phys. Lett., 1985, v.B153, p.422;
Андрьянов А.А., Новожилов Ю.В. — ТМФ, 1986, т.69, С.78.
Andrianov A.A. — Phys. Lett., 1985, v.B157, p.425.
Andrianov A.A., Andrianov V.A., Novozhilov V.Yu., Novozhilov Yu.V. — Lett. Math. Phys., 1986, v.11, p.217.
6. Некрасов М.Л., Рочев В.Е. — ТМФ, 1988, т.74, с.171;
Некрасов М.Л., Рочев В.Е. — Препринт ИФВЭ 86-186, Серпухов, 1986; Препринт ИФВЭ 87-162, Серпухов, 1987.
7. Balog J. — Phys. Lett., 1984, v.149B, p.197.
8. Simic P. — Phys. Rev. Lett., 1985, v.55, p.40; Phys. Rev., 1986, v.D34, p.1903.
9. McKay D., Munczek H. — Phys. Rev., 1985, v.D32, p.266;
McKay D., Munczek H., Young B. — Phys. Rev., 1988, v.D37, p.194.
10. Cahill R.T., Roberts C.D. — Phys. Rev., 1985, v.D32, p.2419;
Cahill R.T., Praschifka J., Roberts C.D. — Phys. Rev., 1987, v.D36, p.209; Ann. Phys., 1988, v.188, p.20.
11. Ball R. — In: Proc. of the Workshop on Skyrmions and Anomalies, Mogilany, Poland, 1987.
12. Cahill R.T. — Aust. J. Phys., 1989, vol.42, p.171; in Proc. of Workshop on Diquarks, Turin, ed M. Anselmino and E. Predazzi (World Scientific, Singapore, 1989), p.201; Nucl. Phys., 1992, v.A543, p.63. Contribution to the Joint Japan-Australia Workshop on Quarks, Hadrons and Nuclei, Adelaide 1995, hep-ph/9601319.
13. Diakonov D. — Lectures at the Enrico Fermi School in Physics, Varenna, 1995, hep-ph/9602375.

14. **Kikkawa K.** — *Progr. Theor. Phys.*, 1976, v.56, p.947.
15. **Eguchi T.** — *Phys. Rev.*, 1976, v.D14, p.2755.
16. **Волков М.К., Эберт Д.** — *ЯФ*, 1982, т.36, с.1265;
Volkov M.K., Ebert D. — *Z.Phys.*, 1983, v.C16, p.205;
Volkov M.K. — *Ann. Phys.*, 1984, v.157, p.282.
17. **Dhar A., Wadia S.R.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1984, v.52, p.959;
Dhar A., Shankar R., Wadia S.R. — *Phys. Rev.*, 1985, v.D31, p.3276.
18. **Bernard V., Jaffe R.L., Meißner Ulf-G.** — *Nucl. Phys.*, 1988, v.B308, p.753;
Bernard V., Meißner Ulf-G., Blin A.H., Hiller B. — *Phys. Lett.*, 1991, v.B253, p.443.
19. **Андрианов А.А., Андрианов В.А.** *ТМФ*, 1992, т.93, с.67.
20. **Esprui D., de Rafael E., Taron J.** *Nucl. Phys.*, 1990, v.B345, p.22; [Erratum: 1991, v.B355, p.278].
21. **Bel'kov A.A., Ebert D., Emelyanenko A.V.** — *Nucl. Phys.*, 1993, v.A552, p.523.
22. **Efimov G.V., Ivanov M.A.** — *The Quark Confinement Model of Hadrons*, IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1993;
Ivanov M.A., Mizutani T. *Phys. Rev.*, 1992, v.D45, p.1580.
Efimov G.V., Nedelko S.N. — *Phys. Rev.*, 1995, v.D51, p.174.
23. **Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A., Scherer S.** — Preprint TRIUMF TRI-PP-94-19, Vancouver, 1994; hep-ph/9404309; in *Proc. of the Int. Conf. on Mesons and Nuclei at Intermediate Energies (1994)*, ed. M.Kh.Khankhasayev, Zh.B.Kurmanov. World Scientific, Singapore, 1995.
24. **Nikolov E.N., Broniowski W., Christov Chr.V.** — Preprint RUB-TPII-13/95, hep-ph/9602274;
Broniowski W., Ripka G., Nikolov E.N., Goeke K. Preprint RUB-TPII-19/95, hep-ph/9509363.
25. **Nambu Y., Jona-Lasinio G.** — *Phys. Rev.*, 1961, v.122, p.345; v.124, p.246.
26. **Волков М.К.** — *ЭЧАЯ*, 1986, т.17, с.433; 1993, т.24, с.89;
Ebert D., Ivanov A.N., Volkov M.K. — *Fortschr. Phys.*, 1989, v.37, p.7;
Ebert D., Reinhardt H., Volkov M.K. — *Progr. Part. Nucl. Phys.*, 1994, v.33, p.1.
27. **Vogl U., Weise W.** *Progr. Part. Nucl. Phys.*, 1991, v.27, p.195.
28. **Klevansky S.P.** — *Rev. Mod. Phys.* 1992, v.64, p.649.
29. **Hatsuda T., Kunihiro T.** — *Phys. Rep.*, 1994, v.247, p.221.
30. **Alkofer R., Reinhardt H.** — *Chiral Quark Dynamics*, LNF, v.m33, Springer, 1995;
Alkofer R., Reinhardt H., Weigel H. — *Phys. Rep.*, 1996, v.265, p.139.
31. **Christov Chr.V., Blotz A., Kim H-C. et al.** — *Progr. Part. Nucl. Phys.*, 1996, v.37, p.91.
32. **Ebert D., Reinhardt H.** — *Nucl. Phys.*, 1986, v.B271, p.188.
33. **Bel'kov A.A., Ebert D., Pervushin V.N.** — *Phys. Lett.*, 1987, v.193B, p.315;
Бельков А.А., Ланёв А.В., Эберт Д. — *ЯФ*, 1989, т.50, с.1093.
Бельков А.А., Первушин В.Н., Эберт Д. — *ЭЧАЯ*, 1991, т.22, с.5.
34. **Hansson T.H., Prakash M., Zahed I.** — *Nucl. Phys.*, 1990, v.B335, p.67.
35. **Schuren C., Ruiz Arriola E., Goeke K.** — *Nucl. Phys.*, 1992, v.A547, p.612.
36. **Bijnens J., Bruno C., de Rafael E.** — *Nucl. Phys.*, 1993, v.B390, p.501.
37. **Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A., Scherer S.** — *Acta Phys. Slovaca*, 1995, v.45, p.121; hep-ph/9408368.
38. **Bijnens J.** — *Phys. Rep.*, 1996, v.265, p.369. hep-ph/9502335.

39. **Gasser J., Leutwyler H.** — *Ann. Phys.*, 1984, v.158, p.142; *Nucl. Phys.*, 1985, v.B250, p.65, p.517, p.539.
40. **Ecker G.** — *Progr. Part. Nucl. Phys.*, 1995, v.35, p.1.
Pich A. — *Rep. Prog. Phys.*, 1995, v.58, p.563.
41. **Weinberg S.** — *Physica*, 1979, v.a96, p.327.
42. **Волков М.К., Первушин В.Н.** — Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов, М.: Атомиздат, 1978.
43. **Volkov M.K.** — *Ann. Phys.*, 1968, v.49, p.202; *Fortschr. Phys.*, 1974, v.28, p.499.
44. **Bijnens J., Ecker G., Gasser J.** — Chiral perturbation theory. In: *The Second DAΦNE Physics Handbook*, eds. L.Maini, G.Pancheri, N.Paver, INFN, Frascati, 1995.
45. **Celenza L.S., Shakin C.M.** — *Phys. Rev.*, 1986, v.D34, p.1591; 1987, v.D35, p.2843.
46. **Berlmann R.A. et al.** — *Z. Phys.*, 1988, v.C39, p.231.
47. **Schwinger J.** — *Phys. Rev.*, 1951, v.82, p.664.
48. **DeWitt B.S.** — *Dynamical theory of groups and fields*, N.Y.: Gordon and Breach, 1965 (Перевод: Девитт Б.С. — Динамическая теория групп и полей, М.: Наука, 1987).
49. **Bel'kov A.A., Ebert D., Lanyov A.V., Schaale A.** — *Int. J. Mod. Phys.*, 1993, v.C4, p.775.
50. **Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A.** — *Comp. Phys. Commun.*, 1996, v.95, p.123.
51. **Van de Ven A.E.M.** — *Nucl. Phys.*, 1985, v.B250, p.593.
52. **Аврамиди И.Г.** — ТМФ, 1989, т.79, с.219. **Avramidi I.G.** — *Nucl. Phys.*, 1991, v.B355, p.712.
53. **Ball R.D.** — *Phys. Rep.*, 1989, v.182, p.1.
54. **Euler E.** — *Ann. Phys. (Leipzig)*, 1936, v.26, p.398;
Euler E., Heisenberg W. — *Z. Phys.*, 1936, v.98, p.714.
55. **Schwinger J.** — *Particles, Sources and Fields*, v. II, London: Addison-Wesley, 1973 (Перевод: Швингер Ю. — Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1976, т.2).
56. **Carson L.** — *Phys. Rev.*, 1990, v.D42, p.2853.
57. **Fliegner D., Schmidt M.G., Schubert C.** — *Z. Phys.*, 1994, v.C64, p.111;
Fliegner D. et al. — Preprint DESY 94-221, HD-THEP-94-26, Heidelberg, 1994; hep-ph/9411177.
58. **Vilkovisky G.A.** — Preprint CERN-TH-6392-92, Geneva, February 1992;
Gusynin V.P., Korniyak V.V. — *J. Symb. Comp.*, 1994, v.17, p.283.
Schimring R. — In *Analysis, Geometry and Groups: A Riemann Legacy Volume*, ed. H.M.Srivastava, Th.M.Rassias, Hadronic Press, Palm Harbor, Florida, USA, 1993, p.627.
59. **Wess J., Zumino B.** — *Phys. Lett.*, 1971, v.37B, p.95.
60. **Witten E.** — *Nucl. Phys.*, 1983, v.B223, p.422, p.433.
61. **Petersen J.L.** — *Acta Phys. Pol.*, 1985, v.B16, p.271.
62. **Bijnens J., Bramon A., Cornet F.** — *Z. Phys.*, 1990, v.C46, p.599.
Bijnens J. — *Nucl. Phys.*, 1991, v.B367, p.709; *Int. J. Mod. Phys.* 1993, v.A8, p.3045.
63. **Scherer S., Fearing H.W.** — *Phys. Rev.*, 1995, v.D52, p.6445.
64. **Coleman S., Wess J., Zumino B.** — *Phys. Rev.*, 1969, v. 177, p.2239.
65. **Leutwyler H.** — In: *Recent Aspects of Quantum Fields*, ed. H.Mitter, M.Gausterer, *Lecture Notes in Physics* 396 (1991) 1, (Springer, Berlin); in: *Perspectives of the Standard Model*, ed. R.K.Ellis, C.T.Hill, J.D.Lykken, (Wold Scientific, Singapore, 1992).

66. Fearing H.W., Scherer S. — Phys. Rev., 1996, v.D53, 315.
67. Ecker G., Gasser J., Pich A., de Rafael E. — Nucl. Phys., 1989, v.B321, p.311.
68. Donoghue J.F., Ramirez C., Valencia G. — Phys. Rev., 1989, v.D39, p.1947.
69. Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A. — Acta Phys. Slovaca, 1995, v.45, p.135; hep-ph/9408368.
70. Reinhardt H., Dang B.V. — Nucl. Phys., 1989, v.A500, p.563.
71. Quigg C., Rosner J.L. — Phys. Rep., 1979, v.56, p.167.
72. Laermann E. et al. — Nucl. Phys. (Proc. Suppl.), 1991, v.B26, p.268.
73. Lucha W. et al. — Phys. Rep., 1991, v.200, p.127.
74. Di Giacomo A., Panagopoulos H. — Phys. Lett., 1992, v.B285, p.133.
75. Bellucci S., Gasser J., Sainio M.E. — Nucl. Phys., 1994, v.B423, p.80; *ibid*, 1994, v.B431, p.413 (Erratum).
76. Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Scherer S. — J. Phys., 1996, v.G22, p.1383.
77. Bellucci S., Bruno C. — Nucl. Phys., 1995, v.B452, p.626.
78. Crystal Ball Collaboration (Marsiske H. et al.) — Phys. Rev., 1990, v.D41, p.3324.
79. Bijns J., Fayyazuddin A., Prades J. — Preprint FTUV-95-70, hep-ph/9512374.
80. t'Hooft G. — Phys. Rev., 1976, v.D14, p.3432.
81. Reinhardt H., Alkofer R. — Phys. Lett., 1988, v.B207, p.482;
Takizawa M., Tsushima K., Kohyama Y., Kubudera K. — Prog. Theor. Phys., 1989, v.82, p.481; Nucl. Phys., 1990, v.A507, p.611.
82. Di Vecchia P., Veneziano G. — Nucl. Phys., 1980, v.B171, p.253;
Di Vecchia P., Nicodemi F., Pettorino R., Veneziano G. — Nucl. Phys., 1981, v.B181, p.318.
83. Rosenzweig C., Schechter J., Trakern C.G. — Phys. Rev., 1980, v.D21, p.3388.
84. Klimt S., Lutz M., Vogl U., Weise W. — Nucl. Phys., 1990, v.A516, p.429, p.469;
Jaminon M., Mendez-Galain R., Ripka G., Stassart P. — Nucl. Phys., 1992, v.A537, p.418;
Schüren C., Döring, Ruiz Arriola E., Goeke K. — Nucl. Phys., 1993, v.A565, p.687.
85. Takizawa M., Kubudera K., Myhrer F. — Phys. Lett., 1991, v.B261, p.221.
86. Гуламов Т.И., Титов А.И. — ЯФ, 1995, т.58, с.337.
87. Anikin I., Ivanov M., Kulimanova N., Lyubovitskii V. — Z. Phys., 1995, v.C65, p.681.
88. Бельков А.А., Бом Г., Ланев А.В., Шаале А. — ЭЧАЯ, 1995, т.26, с.562.
89. Rusakovich N.L. ("Hyperon" Collaboration) — In: Proc. of the 28th Int. Conf. on High Energy Phys., ed. Z.A.Ajduk and A.K.Wroblewski, World Scientific, 1997, p.1200;
Bel'kov A.A. et al. (Collaboration TNF) — Preprint PHE 90-07, Berlin, 1990; DESY Internal Report, Zeuthen, 1992;
Bohm G. (Collaboration TNF) — In: Proc. of the 28th Int. Conf. on High Energy Phys., ed. Z.Ajduk and A.K.Wroblewski, World Scientific, 1997, p.1204.