«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1998, ТОМ 29, ВЫП. 3

УДК 530.145

КЭД-ПРОЦЕССЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ ААРОНОВА–БОМА

Ю.Аудреч

Факультет физики Университета Констанц, ФРГ

e-mail:Juergen.Audretsch@uni-konstanz.de

В.Д.Скаржинский

Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН, Москва

e-mail:vdskarzh@sgi.lpi.msk.su

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1998, ТОМ 29, ВЫП. 3

УДК 530.145

КЭД-ПРОЦЕССЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ ААРОНОВА–БОМА

Ю.Аудреч

Факультет физики Университета Констанц, ФРГ

e-mail:Juergen.Audretsch@uni-konstanz.de

В.Д.Скаржинский

Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН, Москва

e-mail:vdskarzh@sgi.lpi.msk.su

Представлен обзор наших недавних исследований КЭД-процессов в магнитном поле бесконечно тонкого и длинного соленоида (магнитной струны). Используются точные электронные и позитронные решения уравнения Дирака в потенциале Ааронова–Бома для вычисления матричных элементов и нахождения дифференциальных вероятностей процессов тормозного излучения электрона, пролетающего около магнитной струны, и рождения электронно-позитронной пары одиночным фотоном. Получена зависимость эффективных сечений процессов от энергий, углов вылета и поляризаций рожденных частиц для различных энергий падающей частицы.

We present here a review of our recent results obtained for QED processes in the presence of an infinitely thin and infinitely long straight magnetic flux tube (the magnetic string). Based on the exact electron and positron solutions to the Dirac equation in the external Aharonov–Bohm potential we evaluate matrix elements and differential probabilities of the bremsstrahlung from an electron passing by the magnetic string, and of the electron-positron pair production by a single photon. The dependence of the resulting cross sections on energies, directions and polarizations of involved particles is analysed at different energy regimes.

1. ВВЕДЕНИЕ

Влияние магнитного потока на заряженные частицы — эффект Ааронова–Бома (АБ) [1] (см. также [2, 3]) подробно исследован теоретически и убедительно подтвержден рядом интерференционных экспериментов (подробнее см. [4–6]).

Однако для детального исследования АБ-эффекта и его физических следствий важно рассмотреть не только рассеяние заряженных частиц, что было сделано ранее, но и другие родственные эффекты. Наиболее очевидным среди них является тормозное излучение, которое сопровождает рассеяние. Впервые оно обсуждалось для нерелятивистских частиц в дипольном приближении в [7], где были рассчитаны энергетические и угловые распределения. Поляризационные свойства для релятивистских скалярных частиц рассматривались в [8]. Тормозное излучение дираковских частиц подробно исследовано в недавней работе [9]. Процесс рождения электронно-позитронной пары одиночным фотоном в АБ-поле [10] представляется несколько более таинственным, так как только рожденные частицы, а не падающий фотон, взаимодействуют непосредственно с магнитным полем.

Эти квантовые процессы в отсутствие какого-либо внешнего поля безусловно запрещены законами сохранения энергии и импульса. Внешнее поле воспринимает избыток импульса, как это происходит в кулоновском поле [11] или в однородном магнитном поле [12–14], когда на заряженные частицы действует внешняя локальная сила. В АБ-поле процессы происходят скорее по топологическим причинам и в этом отношении напоминают квантовые процессы вблизи космических струн [15, 16].

Целью настоящего обзора является подробное обсуждение процессов тормозного излучения и рождения электронно-позитронной пары в АБ-потенциале. Возможно, они представляют некоторый интерес для экспериментального исследования в поляризованных электронных и фотонных пучках.

Для простоты мы рассматриваем идеализированную ситуацию с сингулярным магнитным полем в бесконечно длинном и тонком прямом соленоиде, расположенном вдоль оси z. За это приходится расплачиваться появлением некоторой проблемы, как корректно описать поведение волновых функций вблизи струны. Математически это следствие того факта, что оператор Дирака перестает быть самосопряженным при такой идеализации [17–20]. Мы лишь коснемся этой проблемы при обсуждении точных решений уравнения Дирака с АБ-потенциалом в разд. 2, следуя предписаниям работ [17, 18, 20]. Заметим, что взаимодействие магнитного момента частиц с магнитным полем струны приводит к волновым функциям, которые не исчезают на струне, лишая тем самым АБ-эффект его нелокальной чистоты. В разд. 3 вычисляются матричные элементы и эффективные сечения процессов тормозного излучения, испускаемого электроном, пролетающим около струны, и рождения электронно-позитронной пары одиночным фотоном. В разд. 4 и 5 исследуется поведение дифференциальных и полных эффективных сечений в различных энергетических режимах и обсуждаются особенности этих процессов для дираковских частиц. В заключении суммируются полученные результаты.

Мы используем единицы, в которых $\hbar = c = 1$, а заряд электрона отрицателен: $e < 0$.

2. ЭЛЕКТРОННЫЕ И ПОЗИТРОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПОТЕНЦИАЛЕ ААРОНОВА — БОМА

Уравнение Дирака во внешнем магнитном поле в цилиндрических координатах $(\rho,\ \varphi,\ z)$ имеет вид

$$i\partial_t \psi = H\psi, \quad H = \alpha_i(p_i - eA_i) + \beta M, \tag{1}$$

где кинетические импульсы равны

$$\pi_\rho = p_\rho = -i\partial_\rho, \quad \pi_\varphi = p_\varphi - eA_\varphi = -\frac{i}{\rho}\,\partial_\varphi - eA_\varphi, \quad p_3 = -i\partial_z,$$

а матрицы α и β определены как в [11] через цилиндрические матрицы Паули:

$$\sigma_\rho = \sigma_1 \cos\varphi + \sigma_2 \sin\varphi, \quad \sigma_\varphi = -\sigma_1 \sin\varphi + \sigma_2 \cos\varphi.$$

Вектор-потенциал для магнитной струны [1] имеет ненулевую угловую компоненту

$$eA_\varphi = \frac{e\Phi}{2\pi\rho} = -\frac{\Phi}{\Phi_0\rho} = \frac{\phi}{\rho}, \tag{2}$$

где Φ — магнитный поток в струне, а $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/|e|$ — квант магнитного потока. Потенциал (2) описывает магнитное поле, сосредоточенное на оси z:

$$B_z = \frac{\phi}{e\rho}\,\delta(\rho) \tag{3}$$

и направленное по (против) оси z для $\phi < 0$ ($\phi > 0$). Известно, что целое число N магнитных квантов не приводит к каким-либо физическим эффектам и появляется в решениях уравнения Дирака в виде фазового множителя $\exp(iN\varphi)$. Только дробная часть δ магнитного потока $\phi = N + \delta, 0 < \delta < 1$ влияет на поведение квантовых заряженных частиц.

Любое точное решение уравнения Дирака во внешнем АБ-поле можно представить в виде суперпозиции цилиндрических мод — собственных функций следующего полного набора коммутирующих операторов:

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi &= E\psi\,, \\
\hat{p_3}\psi &= p_3\psi\,, \\
\hat{J}_3\psi &= (L_3 + \frac{1}{2}\Sigma_3)\psi = (-i\partial_\varphi + \frac{1}{2}\Sigma_3)\psi = j_3\psi\,, \quad j_3 = l + N + \frac{1}{2}\,, \\
\hat{S}_3\psi &= s\psi\,, \quad \hat{S}_3 = \beta\Sigma_3 + \gamma\,\frac{p_3}{M}\,, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $E = \sqrt{p_\perp^2 + p_3^2 + M^2}$ — энергия частицы, p_3 и j_3 — z-компоненты линейного импульса и полного углового момента, $p_\perp$ — радиальный импульс. Вместо полуцелого квантового числа j_3 удобно использовать целое число l, добавляя к нему целое число магнитных квантов N. Квантовое число $s = s_3\sqrt{1 + p_3^2/M^2}$, $s_3 = \pm 1$, описывает поляризацию спина электрона в магнитном поле — в нерелятивистском пределе это z-компонента спина.

Решение этих уравнений приводит к радиальным функциям, содержащим линейные комбинации с произвольными коэффициентами функций Бесселя первого рода с положительными и отрицательными индексами. Условие нормировки для парциальных мод с квантовыми числами $j = (p_\perp, p_3, l, s)$

$$\int dx \psi^\dagger(j,x)\psi(j',x) = \delta_{j,j'} = \delta_{s,s'}\,\delta_{l,l'}\,\delta(p_3 - p_{3'})\,\frac{\delta(p_\perp - p'_\perp)}{\sqrt{p_\perp p'_\perp}}$$

позволяет фиксировать решения (электронные состояния с положительной энергией $E > 0$) для значений l вне интервала $-1 < l - \delta < 0$, так что нормированные решения с $l \neq 0$ содержат только регулярные функции Бесселя с положительными индексами. Полным решением для $l = 0$ является сумма регулярной функции Бесселя и сингулярной, но квадратично интегрируемой функции Бесселя с индексами $-\delta$ или $-1+\delta$. Невозможно устранить сингулярную компоненту при любом выборе коэффициентов. Ее появление связано с дополнительным притяжением, вызванным взаимодействием спина с магнитным полем, и является частью общей проблемы построения самосопряженного расширения оператора Дирака в присутствии сингулярного АБ-потенциала, которая подробно обсуждена в [20]. Корректный выбор моды с $l = 0$ можно сделать с помощью предельного перехода от более реалистической модели с регулярным потенциалом [9, 17, 18].

Учитывая ориентацию магнитного поля (3), мы получаем

$$\psi_e(j,x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\,\mathrm{e}^{-iE_p t + ip_3 z}\,\mathrm{e}^{iN\varphi}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}|l|}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$u = \frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{pmatrix} \sqrt{E_p + sM}\sqrt{s+1}\;J_{\nu_1}(p_\perp\rho)\,\mathrm{e}^{il\varphi} \\ i\epsilon_3\epsilon_l\sqrt{E_p - sM}\sqrt{s-1}\;J_{\nu_2}(p_\perp\rho)\,\mathrm{e}^{i(l+1)\varphi} \end{pmatrix},$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{pmatrix} \epsilon_3\sqrt{E_p + sM}\sqrt{s-1}\;J_{\nu_1}(p_\perp\rho)\,\mathrm{e}^{il\varphi} \\ i\epsilon_l\sqrt{E_p - sM}\sqrt{s+1}\;J_{\nu_2}(p_\perp\rho)\,\mathrm{e}^{i(l+1)\varphi} \end{pmatrix}$$

и

$$p_\perp = \sqrt{p^2 - p_3^2} = \sqrt{E_p^2 - M^2 - p_3^2}, \quad s = \pm\sqrt{1 + \frac{p_3^2}{M^2}}, \quad \epsilon_3 = \mathrm{sign}(sp_3),$$

$$\nu_1 = \left\{\begin{array}{c} l - \delta \\ -l + \delta \end{array}\right., \quad \nu_2 = \left\{\begin{array}{c} l + 1 - \delta \\ -l - 1 + \delta \end{array}\right., \quad \epsilon_l = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{при } l \geq 0 \\ -1 & \text{при } l < 0 \end{array}\right..$$

Полный набор решений уравнения Дирака включает электронные состояния с отрицательной энергией $E < 0$. Вместо них мы введем позитронные состояния с положительной энергией ψ_p, $E > 0$. Они получаются из электронных состояний с отрицательной энергией операцией зарядового сопряжения

$$\psi \to \psi_c = C\bar{\psi}_{\mathrm{transp}}, \quad C = \alpha_2.$$

ψ_c удовлетворяет такому же уравнению Дирака, что и ψ, но с противоположным знаком электрического заряда, является собственной функцией того же набора операторов и имеет квантовые числа $E, -p_3, -j_3, s$. Для того чтобы получить позитронное состояние с квантовыми числами E, p_3, j_3, s, нужно произвести замену $p_3 \to -p_3,\ j_3 \to -j_3$ в электронном состоянии с отрицательной энергией.

Тогда оператор электронно-позитронного поля можно записать в виде

$$\psi(x,t) = \int d\mu_j [\psi_e(j,x) a_j + \psi_p^c(j,x) b_j^\dagger],$$

где a_j и b_j — операторы уничтожения электрона и позитрона с данными квантовыми числами. Он содержит положительно-частотную функцию ψ_e (электронное состояние) и отрицательно-частотную функцию ψ_p^c (позитронное состояние):

$$\psi_p^c(j,x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\, \mathrm{e}^{iEt - ip_3 z}\, \mathrm{e}^{iN\varphi}\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}|l|} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$y = \frac{1}{\sqrt{2s}} \begin{pmatrix} i\epsilon_l \sqrt{E_p - sM}\sqrt{s+1}\, J_{\nu_2'}(p_\perp \rho)\, \mathrm{e}^{-i(l+1)\varphi} \\ \epsilon_3 \sqrt{E_p + sM}\sqrt{s-1}\, J_{\nu_1'}(p_\perp \rho)\, \mathrm{e}^{-il\varphi} \end{pmatrix},$$

$$w = -\frac{1}{\sqrt{2s}} \begin{pmatrix} i\epsilon_3\epsilon_l \sqrt{E_p - sM}\sqrt{s-1}\, J_{\nu_2'}(p_\perp \rho)\, \mathrm{e}^{-i(l+1)\varphi} \\ \sqrt{E_p + sM}\sqrt{s+1}\, J_{\nu_1'}(p_\perp \rho)\, \mathrm{e}^{-il\varphi} \end{pmatrix}$$

с

$$\nu_1' = \left\{ \begin{array}{c} l+\delta \\ -l-\delta \end{array} \right., \quad \nu_2' = \left\{ \begin{array}{ccc} l+1+\delta, & \text{при} & l \geq 0 \\ -l-1-\delta, & \text{при} & l < 0 \end{array} \right. .$$

Функции (5) и (6) представляют парциальные цилиндрические моды волновых функций электрона и позитрона. Эти состояния не описывают падающие и уходящие частицы с определенным импульсом на бесконечности. Для расчета дифференциальных поперечных сечений процессов нужно найти электронную и позитронную *функции рассеяния*. Имеются два независимых точных решения уравнения Дирака во внешнем поле $\Psi^{(\mp)}(J,x)$, которые асимптотически переходят в плоскую волну, распространяющуюся в направлении вектора $\vec{p}$ с $p_x = p_\perp \cos\varphi_p,\ p_y = p_\perp \sin\varphi_p,\ p_z = p_3$, и падающую или уходящую цилиндрические волны. Они могут быть получены суперпозицией цилиндрических мод. Для падающих частиц нужно взять функцию $\Psi^{(+)}(J,x)$, а для уходящих частиц $\Psi^{(-)}(J,x)$ [11]. Для рожденных электрона и позитрона мы имеем

$$\Psi_e^{(-)}(J,x) = \sum_l c_l^{(-\,e)}\ \psi_e(j_p, x) \tag{7}$$

и

$$\Psi_p^{(-)\,c}(J,x) = \sum_n c_n^{(-\,p)}\ \psi_p^c(j_q,x) \tag{8}$$

с коэффициентами

$$c_l^{(-\,e)} = \mathrm{e}^{-il\varphi_p}\ \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\epsilon_l\delta}\,, \quad c_n^{(-\,p)} = \mathrm{e}^{i(n+1)(\varphi_q+\pi)}\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}\epsilon_n\delta}. \tag{9}$$

Волновая функция рассеяния для падающего электрона

$$\Psi_e^{(+)}(J,x) = \sum_l c_l^{(+\,e)}\ \psi_e(j_p,x) \tag{10}$$

содержит коэффициент

$$c_l^{(+\,e)} = \mathrm{e}^{-il\varphi_p}\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}\epsilon_l\delta}\,. \tag{11}$$

J — коллективный индекс состояния с линейным импульсом на бесконечности и s.

Волновая функция фотона

$$A_\mu^\lambda(\vec{k},x) = \frac{e_\mu^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega_k}}\mathrm{e}^{-i\omega_k t+ik_3 z}\mathrm{e}^{ik_\perp\rho\cos(\varphi-\varphi_k)} \tag{12}$$

содержит поперечные векторы линейной поляризации

$$\vec{\mathrm{e}}^{(\sigma)} = (0,\ -\sin\varphi_k,\ \cos\varphi_k,\ 0)\,, \quad \vec{\mathrm{e}}^{(\pi)} = \frac{1}{\omega_k}(0,\ -k_3\cos\varphi_k,\ -k_3\sin\varphi_k,\ k_\perp)\,.$$

В системе координат с $k_3 = 0$ вектор поляризации $\vec{\mathrm{e}}^{(\pi)}$ направлен вдоль оси z, а $\vec{\mathrm{e}}^{(\sigma)}$ перпендикулярен магнитной струне.

3. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И РОЖДЕНИЯ ПАРЫ

Дифференциальные поперечные сечения определяются потоками частиц на бесконечности и поэтому связаны с состояниями рассеяния (7), (8) и (10). Цилиндрические моды имеют исчезающие радиальные потоки и не описывают падающие и уходящие частицы. Они, однако, очень удобны при расчете матричных элементов, и мы будем использовать их как исходную позицию при расчете дифференциальных поперечных сечений.

3.1. Матричные элементы для цилиндрических мод. Матричный элемент процесса тормозного излучения падающим электроном с квантовыми числами $j_p = (p_\perp, p_3, l, s)$, который переходит в уходящий электрон с квантовыми числами $j_q = (q_\perp, q_3, n, r)$, излучая фотон с квантовыми числами $(\vec{k},\ \lambda)$, имеет обычный вид

$$\widetilde{M}_\lambda(j_q, \vec{k}, \lambda; j_p) = -e \int d^4x \bar{\psi}_e(j_q, x)\ A^{*\lambda}_\mu(\vec{k}, x)\gamma_\mu\ \psi_e(j_p, x)\,, \qquad (13)$$

где матрицы γ_μ определены согласно [11].

Матричный элемент рождения электрона с квантовыми числами $j_p = (p_\perp, p_3, l, s)$ и позитрона с квантовыми числами $j_q = (q_\perp, q_3, n, r)$ одиночным фотоном с квантовыми числами $(\vec{k},\ \lambda)$ для физических состояний $\lambda = \sigma,\ \pi$, равен

$$\widetilde{M}_\lambda(j_p, j_q; \vec{k}, \lambda) = -e \int d^4x \bar{\psi}_e(j_p, x)\ A^{\lambda}_\mu(\vec{k}, x)\gamma_\mu\ \psi^c_p(j_q, x)\,. \qquad (14)$$

Эти матричные элементы были вычислены в [9] и [10]. Здесь мы хотим обратить внимание только на ряд специфических моментов этого расчета. Матричные элементы содержат две δ-функции, соответствующие законам сохранения энергии и z-компоненты импульса. J_3-компонента полного углового момента также сохраняется. Напротив, импульс в плоскости, перпендикулярной магнитной струне (радиальный импульс), не сохраняется. Более того, процессы происходят, когда радиальный импульс падающей частицы превышает сумму радиальных импульсов уходящих частиц, что следует из закона сохранения энергии. Избыток радиального импульса принимает струна.

В таком случае матричные элементы выражаются аналитически через табличные интегралы типа 6.578(3), 6.522(14) [21]:

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \rho d\rho J_\alpha(x\rho \sin A \cos B) J_\beta(x\rho \cos A \sin B) J_{\beta-\alpha}(x\rho) =$$

$$= \frac{2 \sin \pi\alpha}{\pi x^2 \cos(A+B)\cos(A-B)} \left(\frac{\sin A}{\cos B}\right)^\alpha \left(\frac{\sin B}{\cos A}\right)^\beta,$$

которые возникают после интегрирования по φ и ρ. (Здесь x обозначает импульс падающей частицы).

Парциальный анализ выявил довольно неожиданную особенность этих процессов: они оказываются запрещенными, если орбитальные квантовые числа l и n заряженных частиц имеют одинаковые знаки. Это, в свою очередь, предполагает, что ожидаемые значения проекций кинетических угловых моментов частиц, $< -i\partial_\varphi - \phi >$, имеют противоположные знаки для всех значений $l,\ n \neq 0$. В рамках квазиклассического описания это означает, что заряженные частицы должны обойти струну с противоположных сторон, охватывая магнитный поток. Только в этом случае АБ-эффект и родственные ему эффекты проявляют себя. Очевидно, это необходимо для того, чтобы падающая частица могла передать избыток своего радиального импульса струне и родить реальные уходящие частицы из вакуумных флуктуаций. Отметим также появление в матричных элементах характерного множителя $\sin\pi\delta$.

3.2. Матричные элементы для состояний рассеяния и дифференциальные поперечные сечения. Матричные элементы для состояний рассеяния (7), (8) и (10) нетрудно выразить через матричные элементы (13), (14) для цилиндрических мод и затем найти поперечные сечения процессов.

Для тормозного излучения электрона с импульсом $\vec{p}$ и спиновым числом s, который при рассеянии на струне испускает фотон с импульсом $\vec{k}$ и поляризацией λ, переходя в состояние с импульсом $\vec{q}$ и спиновым числом r, матричный элемент имеет вид

$$M_\lambda = -i\,\langle\vec{q},r;\vec{k},\lambda)|S^{(1)}|\vec{p},s\rangle = \sum_{l,n} c_l^{(+\,e)} c_n^{(-\,e)\,*}\widetilde{M}_\lambda(j_q,\vec{k},\lambda;j_p).$$

Вычисляя парциальный матричный элемент, мы получаем эффективное дифференциальное поперечное сечение на единицу длины струны:

$$\frac{d\sigma_\lambda}{d\omega_k d\Omega_k d\varphi_q} = \frac{e^2\,\sin^2\pi\delta}{64\pi^4\omega E_p^2}\times$$
$$\times\frac{P_\lambda^{(+)}\,a^{2\delta}+P_\lambda^{(-)}\,a^{-2\delta}+P_\lambda^{(0)}}{(1-v^2x^2)(1-vx\cos\varphi_{pk})\left(1-\omega v x^2-vx\sqrt{1-2\frac{\omega}{v}+\omega^2x^2}\cos\varphi_{qk}\right)}, \quad (15)$$

где $d\Omega_k = d\cos\vartheta_k d\varphi_k$, v — скорость падающего электрона, $P_\lambda^{(\pm,0)}$ — некоторые функции ω, x, s, r, причем $P_\lambda^{(\pm)}$ зависит также от углов φ, и введены обозначения

$$\omega = \frac{\omega_k}{p_\perp} = \frac{p_\perp^2-q_\perp^2+k_\perp^2}{2p_\perp\sqrt{p_\perp^2+M^2}}, \quad x=\sin\vartheta_k = \frac{2k_\perp\sqrt{p_\perp^2+M^2}}{p_\perp^2-q_\perp^2+k_\perp^2},$$
$$a = \frac{1-\frac{\omega}{v}-\frac{\omega}{v}\sqrt{1-v^2x^2}}{\sqrt{1-2\frac{\omega}{v}+\omega^2x^2}}.$$

Уравнение Дирака во внешнем АБ-поле (1) ковариантно при бусте вдоль струны. Поэтому достаточно рассмотреть случай нормального падения электрона на магнитную струну, $p_3=0$. При этом никакой информации не будет потеряно, а расчеты становятся намного проще. В этом случае ω равна безразмерной энергии фотона, а ϑ_k — углу между импульсом фотона и струной.

В реальных экспериментах наблюдают распределения рассеянного электрона и излученного фотона по энергии, импульсам и поляризациям. Эффективное дифференциальное сечение (15) содержит полную информацию об этих распределениях.

Для рождения электронно-позитронной пары с импульсами $\vec{p}$, $\vec{q}$ и спиновыми числами s, r, падающим фотоном с импульсом $\vec{k}$ и поляризацией λ мы находим

$$M_\lambda = -i \langle \vec{q}, r; \vec{p}, s) | S^{(1)} | \vec{k}, \lambda) \rangle = \sum_{l,n} c_l^{(-e)*} c_n^{(-p)} \widetilde{M}_\lambda (j_p, j_q; \vec{k}, \lambda).$$

Тогда эффективное дифференциальное сечение рождения пары записывается в системе координат $k_3 = 0$ (без потери информации) в виде

$$\frac{d\sigma_\lambda}{dE_q d\varphi_q d\varphi_p dq_3} = \frac{e^2 \sin^2 \pi\delta}{128\pi^4} \frac{c^\delta S_\lambda^{(+)} + c^{-\delta} S_\lambda^{(-)} + S_\lambda^{(0)}}{\omega_k^3 (q_3^2 + M^2)(E_p - p_\perp \cos\varphi_{pk})(E_q - q_\perp \cos\varphi_{qk})}, \tag{16}$$

где $S_\lambda^{(\pm,0)}$ — некоторые функции E_p, E_q, q^3, s, r, причем $S_\lambda^{(\pm)}$ зависит также от углов φ, и

$$c = \frac{(E_p - \sqrt{q_3^2 + M^2})(E_q - \sqrt{q_3^2 + M^2})}{(E_p + \sqrt{q_3^2 + M^2})(E_q + \sqrt{q_3^2 + M^2})},$$

Дифференциальное поперечное сечение (16) содержит полную информацию об энергетических, угловых и поляризационных распределениях рожденных электронов и позитронов, которые можно экспериментально наблюдать. Эти распределения, очевидно, связаны законами сохранения энергии, и компоненты импульса: $E_p + E_q = \omega_k$, $p_3 + q_3 = 0$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ И ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

В этом разделе мы рассмотрим угловые и поляризационные распределения уходящих частиц при различных энергиях падающей частицы.

4.1. Тормозное излучение. При малой энергии фотона $\omega \to 0$ в сечении процесса тормозного излучения имеется инфракрасная сингулярность. Причина ее появления общая для всех процессов рассеяния заряженных частиц – неприменимость теории возмущений для излучения мягких фотонов.

Для электрона малой энергии, $v \ll 1$, мы имеем $\omega \le \frac{v}{2}$, $a^2 \approx 1 - \omega_k/(E_p - M)$ и $s, r = \pm 1$. Тогда

$$P_\sigma^{(\pm)} = 2\Theta(sr)\left(1 - \frac{\omega}{v} \mp s\frac{\omega}{v}\right), \quad P_\pi^{(\pm)} = \cos^2\vartheta_k P_\sigma^{(\pm)},$$

$$P^{(0)}_\sigma = 2\Theta(sr) a \cos(\varphi_{pk} + \varphi_{qk})\,, \quad P^{(0)}_\pi = -\cos^2\vartheta_k P^{(0)}_\sigma\,,$$

и дифференциальное поперечное сечение принимает вид

$$\frac{d\sigma_\lambda}{d\omega_k d\Omega_k d\varphi_q} = \frac{e^2 \sin^2\pi\delta}{32\pi^4 M \omega_k} v\, \Theta(sr)\, S^{(s)} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^2\vartheta_k \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad \begin{cases} \lambda = \sigma \\ \lambda = \pi \end{cases}, \tag{17}$$

с

$$S^{(s)} = \left(1 - \frac{\omega_k}{E_p - M}\right)^{1+s\delta} + \left(1 - \frac{\omega_k}{E_p - M}\right)^{-s\delta} +$$
$$+ 2\epsilon_\lambda \left(1 - \frac{\omega_k}{E_p - M}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(\varphi_{pk} + \varphi_{qk})\,,$$

где $\epsilon_\lambda = 1$ для $\lambda = \sigma$ и $\epsilon_\lambda = -1$ для $\lambda = \pi$.

Сечение процесса тормозного излучения пропорционально классическому радиусу электрона $r_0 = e^2/4\pi M$ и скорости падающего электрона v.

Отметим особенности процесса тормозного излучения, характерные для дираковских частиц, которые можно увидеть из выражения (17).

— При малых энергиях электрона сохраняется проекция спина на направление струны; при излучении мягких фотонов она сохраняется при любых энергиях.

— Появление дополнительного множителя $\cos^2\vartheta_k$ для π–поляризованного фотона типично для излучения нерелятивистских частиц. Однако угловые распределения рассеянного электрона и излученного фотона зависят от азимутальных углов φ_q и φ_k в плоскости, перпендикулярной струне, в отличие от излучения скалярных частиц. Эта асимметрия возникает из-за взаимодействия магнитного момента электрона с магнитной струной.

— После интегрирования по углу φ_q уходящего электрона последний член в $S^{(s)}$ исчезает и мы получаем

$$S^{(s)} = 2\pi \left\{ \left(1 - \frac{\omega_k}{E_p - M}\right)^{1+s\delta} + \left(1 - \frac{\omega_k}{E_p - M}\right)^{-s\delta} \right\}.$$

Это сечение при $s = -1$ совпадает с сечением для нерелятивистских бесспиновых частиц [7]. В этом случае оно инвариантно при замене $\delta \to 1-\delta$ и при $\Phi \to -\Phi$. Однако для поляризации $s = 1$ притяжение за счет взаимодействия спина с магнитным полем приводит к усилению волновой функции вблизи струны и изменяет сечение.

— Излучение фотона с переворотом спина электрона происходит при более высоких энергиях. В результате рассеяния спин электрона ориентируется преимущественно против направления магнитного поля струны, что приводит к слабому эффекту самополяризации электронного пучка, хорошо известному в случае синхротронного излучения [22].

Рассмотрим угловое распределение для электрона высокой энергии, когда $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2} \gg 1$. Благодаря множителям

$$(1 - vx\cos\varphi_{pk}) \sim E_p\omega_k - \vec{p}\vec{k}$$

и

$$(1 - \omega v x^2 - vx\sqrt{1 - 2\frac{\omega}{v} + \omega^2 x^2}\cos\varphi_{qk}) \sim E_q\omega_k - \vec{q}\vec{k}$$

в знаменателе (15) сечение тормозного излучения имеет острый максимум в направлении вперед, и излучение происходит в узком конусе с апертурой порядка $\sim 1/\gamma$. В том же конусе распространяется рассеянный электрон. Вне конуса вероятность процесса быстро убывает.

4.2. Рождение пары. Угловые распределения рожденных электрона и позитрона имеют очень сложный вид. Они существенно упрощаются для малых и высоких энергий.

При небольшой энергии фотона, слегка превышающей порог рождения пары $\omega_k - 2M \ll M$, мы имеем

$$p_\perp \sim q_\perp \sim q_3 \ll M, \quad c \ll 1$$

и

$$S_\sigma^{(\mp,0)} \sim S_\pi^{(0)} \ll S_\pi^{(\mp)} \approx 4M^4(1 - s_3 r_3)(1 \pm s_3).$$

Отсюда видно, что пары малой энергии рождаются преимущественно от π-поляризованных фотонов, а дифференциальное поперечное сечение рождения пар над порогом равно

$$\frac{d\sigma_\pi}{dE_q d\varphi_q d\varphi_p dq_3} \approx \frac{e^2 \sin^2 \pi\delta}{256\pi^4}(1 - s_3 r_3)\frac{c^{-\delta}(1+s_3) + c^{\delta}(1-s_3)}{M^3}. \qquad (18)$$

Угловые распределения электронов и позитронов малой энергии однородны в плоскости, перпендикулярной магнитной струне, но их зависимость от полярного угла ϑ довольно сложная.

Поляризация электронов и позитронов сильно зависит от поляризации фотона. Рожденные частицы имеют проекции спинов противоположных знаков, и электроны с положительной проекцией (против поля) рождаются преимущественно π–поляризованными фотонами, так как $c \ll 1$. Их доля растет с увеличением параметра магнитного потока δ. В этом случае взаимодействие магнитных моментов с магнитным полем струны приводит к притяжению к струне как электрона, так и позитрона. Их волновые функции локализованы вблизи струны, что усиливает эффект. σ-поляризованные фотоны с векторами поляризации, перпендикулярными струне, рождают частицы с проекциями s_3 и r_3 одинаковых знаков, так что их магнитные моменты имеют противоположные направления. Поэтому взаимодействие со струной приводит к локализации вблизи струны только одной из волновых функций, так что волновые функции слабо перекрываются, и процесс рождения пары подавлен. С увеличением энергии фотона эта корреляция ослабляется, так как более высокие орбитальные моменты дают вклад в сечение.

При высоких энергиях фотона, $\omega_k \gg M$, угловые распределения становятся простыми — электрон и позитрон испускаются преимущественно вперед в направлении ($\varphi_{pk} \sim \varphi_{qk} \sim 0$, $\vartheta \sim \pi/2$) в узком конусе с апертурой порядка M/ω_k. Этот вывод следует из присутствия множителей $E_p - p_\perp \cos\varphi_{pk}$, $E_q - q_\perp \cos\varphi_{qk}$ и $q_3^2 + M^2 \sim E_q^2 \cos^2\vartheta$ в знаменателе выражения (16).

5. ПОЛНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ СЕЧЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЭНЕРГИЯХ

5.1. Тормозное излучение. Для того, чтобы найти полное поперечное сечение тормозного излучения, нужно проинтегрировать выражение (15) по конечным состояниям. При интегрировании по углу φ_q член с $P_\lambda^{(0)}$ исчезает, и, суммируя по поляризациям уходящего электрона (отмечено чертой), мы находим

$$\frac{\overline{d\sigma_\lambda}}{d\omega_k d\Omega_k} = \frac{e^2 \sin^2\pi\delta}{32\pi^3\,\omega_k}\frac{v}{E_p}\frac{\overline{P_\lambda^{(+)}}\,a^{2\delta} + \overline{P_\lambda^{(-)}}\,a^{-2\delta}}{(1-v^2x^2)^{\frac{3}{2}}(1-vx\cos\varphi_{pk})},$$

где $\overline{P_\lambda^{(\pm)}}$ — усредненные по поляризациям функции $P_\lambda^{(\pm)}$. Интегрирование по углу φ_k излученного фотона дает дополнительно множитель $2\pi(1-v^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$, и мы получаем

$$\frac{\overline{d\sigma_\lambda}}{d\omega_k d\cos\vartheta_k} = \frac{e^2 \sin^2\pi\delta}{16\pi^2\,\omega_k}\frac{v}{E_p}\frac{\overline{P_\lambda^{(+)}}\,a^{2\delta} + \overline{P_\lambda^{(-)}}\,a^{-2\delta}}{(1-v^2x^2)^2}.$$

Остающиеся интегралы по $d\omega_k$ и $d\vartheta_k$ нельзя найти в аналитическом виде при произвольной энергии электрона.

При малой энергии электрона мы имеем

$$\frac{\overline{d\sigma_\sigma}}{d\omega_k} = 3\frac{\overline{d\sigma_\pi}}{d\omega_k} = \frac{r_0\,\sin^2\pi\delta}{\pi}\frac{v}{\omega_k}\left[\left(1-\frac{\omega_k}{E_p-M}\right)^{1+s\delta} + \left(1-\frac{\omega_k}{E_p-M}\right)^{-s\delta}\right].$$

При высокой энергии, $\gamma = (1-v^2)^{-\frac{1}{2}} \gg 1$, основной вклад в поперечное сечение возникает от значений $\vartheta_k \sim \frac{\pi}{2}$, или $x \sim 1$. В этом случае $a \approx 1$, если тормозной фотон не слишком жесткий, $\omega < \omega_{\max}$, и мы получаем для поперечного сечения

$$\frac{\overline{d\sigma_\lambda}}{d\omega_k} \sim \frac{r_0 \sin^2 \pi\delta}{\omega_k} f_\lambda(\omega_k)\,,$$

где $f_\lambda(\omega_k)$ — некоторая функция энергии фотона. Это означает, что форма энергетического спектра тормозного излучения не зависит от энергии и поляризации падающего электрона. Для жестких фотонов, $\omega \sim \omega_{\max}$, параметр $a^2 \sim (\omega_{\max} - \omega)/2\sqrt{1 - v^2 x^2}$, и поперечное сечение равно асимптотически

$$\frac{\overline{d\sigma_\lambda}}{d\omega_k} \sim \frac{r_0 \sin^2 \pi\delta}{\omega_k} \gamma^\delta \left(1 - \frac{\omega_k}{E_p}\right)^\delta (a \mp bs)\,,$$

где a и b — некоторые коэффициенты, а знаки $\mp$ соответствуют поляризации $\lambda = \sigma$ и π соответственно. Это означает, что доля жестких фотонов в спектре растет с энергией падающего электрона, т.е. тормозной спектр становится более жестким. Отметим также наличие некоторой корреляции между спином электрона и поляризацией фотона.

5.2. Рождение пары. Проанализируем энергетическое поведение поперечного сечения рождения электронно-позитронной пары. Интегрирование дифференциального сечения (16) по азимутальным углам φ_p, φ_q дает дополнительный множитель $4\pi^2/(q_3^2 + M^2)$ и устраняет член с $S_\lambda^{(0)}$. Суммируя по поляризациям рожденных электрона и позитрона, мы получаем

$$\frac{\overline{d\sigma_\lambda}}{dE_q dq_3} = \frac{e^2 \sin^2 \pi\delta}{32\pi^2} \frac{c^\delta + c^{-\delta}}{\omega_k^3 (q_3^2 + M^2)^2}\, S_\lambda\,,$$

где $S_\lambda = \Sigma_{s,r} S_\lambda^\pm$. Так как переменные $p_\perp$ и $q_\perp$ обе положительны, переменная q_3 меняется в пределах от $-q_3^{\max}$ до $q_3^{\max}$, где $q_3^{\max} = \min\left(\sqrt{E_q^2 - M^2}, \sqrt{E_p^2 - M^2}\right)$. Вводя новые переменные $\varepsilon = |E_p - E_q|$ и $x = \sqrt{q_3^2 + M^2}$, мы получаем общее выражение для полного поперечного сечения рождения электронно-позитронной пары фотоном с энергией ω_k и поляризацией λ:

$$\sigma_\lambda = \frac{e^2 \sin^2 \pi\delta}{16\pi^2} \frac{1}{\omega_k^3} \int_M^{\frac{\omega_k}{2}} dx\, \frac{1}{x^3\sqrt{x^2 - M^2}} \int_0^{\omega_k - 2x} d\varepsilon\, (c^{-\delta} + c^\delta)\, S_\lambda(\varepsilon, x) \tag{19}$$

где

$$c = \frac{(\omega_k - 2x)^2 - \varepsilon^2}{(\omega_k + 2x)^2 - \varepsilon^2}.$$

Остающиеся интегралы по ε и x нельзя найти аналитически.

Это общее выражение для полного поперечного сечения существенно упрощается при надпороговой и высокой энергиях фотона.

При надпороговой энергии, $\omega_k - 2M \ll M$, величины $S_\sigma \ll S_\pi \approx 4M^2$ и $c \ll 1$. Опуская в (19) член $c^\delta \ll c^{-\delta}$ и вводя новые безразмерные переменные t и y:

$$\varepsilon = (\omega_k - 2x)t, \quad x = M + \frac{\omega_k - 2M}{2}y,$$

мы получаем

$$\sigma_\pi = \frac{r_0 \, \sin^2 \pi\delta}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\omega_k - 2M}{2M}\right)^{\frac{3}{2}-2\delta} B(\delta),$$

где $B(\delta)$ — некоторая постоянная ~ 1. Интегрируя по малому интервалу энергий Δ над порогом, $2M \geq \omega_k \leq 2M(1+\Delta)$, мы находим интегральное поперечное сечение

$$I = \int_{2M}^{2M(1+\Delta)} \sigma_\pi(\omega_k)\, d\omega_k \approx \frac{e^2 \, \sin^2 \pi\delta}{2\sqrt{2}\pi} \, \frac{\Delta^{\frac{5}{2}-2\delta}}{\frac{5}{2} - 2\delta} \, B(\delta).$$

Эта величина определяет выход электронно-позитронных пар, рожденных фотоном на единице длины струны в единицу времени в данном интервале энергий. При $\delta = \frac{1}{2}$ мы получаем

$$I = \frac{e^2\sqrt{2}}{3\pi} \, \Delta^{\frac{3}{2}}.$$

При высоких энергиях фотона, $\omega_k \gg M$, основной вклад в поперечное сечение возникает от значений $x \sim M$. В этом случае параметр $c \sim 1$. Интегрируя по ε и x, мы находим

$$\sigma_\lambda \sim \frac{e^2 \, \sin^2 \pi\delta}{4\pi M} \, a_\lambda = r_0 \, a_\lambda \, \sin^2 \pi\delta$$

с $a_\sigma = \frac{2}{3}$ и $a_\pi = 1$.

При высоких энергиях фотона полное поперечное сечение рождения пар стремится асимптотически к постоянным значениям при любой поляризации фотона. Эта энергетическая зависимость совместима с унитарностью (можно было ожидать, что сингулярный АБ-потенциал приведет к растущему сечению и нарушению теории возмущений при высоких энергиях, как это происходит в случае бесконечно тонкой космической струны [15]).

Однако мы не рассматриваем рождение пар при высокой энергии фотона как эффект, подходящий для экспериментального исследования. Для такого исследования потребовалось бы создать когерентный пучок фотонов высокой энергии.

Для этой цели более интересен случай надпорогового рождения пары. Известно [12], что процесс рождения электронно-позитронной пары в однородном магнитном поле B может происходить с заметной вероятностью только для ультрарелятивистских энергий или в интенсивных магнитных полях, когда характерный параметр [23, 24]:

$$\frac{B}{B_0}\frac{E}{Mc^2} \sim 1, \qquad B_0 = \frac{M^2c^3}{e\hbar}\,.$$

Таких ограничений нет для рождения пары в АБ-поле, напряженность которого формально бесконечна. Основной проблемой здесь является выяснение условий, при которых АБ-режим может быть реализован на практике. Для этого необходимо рассмотреть реалистическую модель магнитной струны в виде соленоида конечного радиуса. Тогда очевидно, что длина волны рожденных электрона и позитрона должна превышать радиус соленоида, чтобы реализовался АБ-режим. Энергия фотона при этом должна быть близка к пороговой энергии $2M$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проанализировали КЭД-процессы в присутствии магнитной струны, которые родственны АБ-эффекту и обсудили характерные особенности этих процессов для дираковских частиц. Тормозное излучение электрона на струне представляется совсем естественным, так как любое рассеяние электронов неизбежно сопровождается излучением фотонов. Рождение электронно-позитронной пары одиночным фотоном кажется довольно неожиданным, так как только рожденные заряженные частицы чувствуют внешнее магнитное поле. В любом случае эти процессы происходят из-за возбуждения вакуума магнитной струной. Они родственны АБ-эффекту в том отношении, что происходят только в случае, если волновые функции заряженных частиц охватывают магнитный поток.

Кроме обычного АБ-взаимодействия, которое испытывают все заряженные частицы из-за появления неинтегрируемого фазового множителя [25], дираковские частицы взаимодействуют с магнитной струной через свои магнитные моменты. Это взаимодействие влияет на поведение волновых функций вблизи струны и тем самым на поперечные сечения процессов. Кроме того, нелокальный характер АБ-эффекта слегка утрачивается, так как волновые функции не исчезают на струне.

Мы вычислили дифференциальные и полные поперечные сечения процессов, которые оказались неожиданно большими. По-видимому, это является следствием чрезмерной идеализации модели струны и требует дополнительного исследования, которое сейчас проводится. В этом отношении особенно интересен процесс надпорогового рождения электронно-позитронной пары фотоном, так как в однородном поле его сечение экстремально мало. Полученные результаты могут представлять определенный интерес для возможной экспериментальной проверки эффекта.

Мы посвящаем эту работу памяти Моисея Александровича Маркова, который в свое время интересовался проблемой монополя Дирака и связанным с ней АБ-эффектом. Именно он стимулировал наш интерес к этому эффекту.

Работа выполнена в рамках проекта (96-02-16053-а) Российского фонда фундаментальных исследований и при поддержке Немецкого научно-технического общества (Deutsche Forschungsgemeinschaft).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aharonov Y., Bohm D.** — Phys. Rev., 1959, v. 119, p.485.
2. **Franz W.** — Verh. Deutsch. Physik. Ges., 1939, v. 20, p.65.
3. **Ehrenberg W., Siday R.E.** — In: Proc. Phys. Soc. London B, 1949, v. 62, p. 8.
4. **Olariu S., Popescu I.I.** — Rev. Mod. Phys., 1985, v. 47, p.339.
5. **Скаржинский В.Д.** — Эффект Ааронова–Бома: Теоретические расчеты и интерпретация. – В кн.: Труды ФИАН СССР, М.: Наука, 1985, т.167, с.139.
6. **Peshkin M., Tonomura A.** — The Aharonov-Bohm effect, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
7. **Серебряный Е.М., Скаржинский В.Д.** — Краткие сообщения по физике ФИАН, 1988, т.6, с.45.; Тормозное излучение при рассеянии Ааронова–Бома. В кн.: Труды ФИАН СССР, М.: Наука, 1989, т.197, с.181.
8. **Гальцов Д.В., Воропаев С.А.** — Ядерная физика, 1990, т.51, с.1811.
9. **Audretsch J., Jasper U., Skarzhinsky V.D.** — Phys. Rev. D, 1996, v. 53, p. 2178.
10. **Skarzhinsky V.D., Audretsch J., Jasper U.** — Phys. Rev. D, 1996, v.53, p.2190.
11. **Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.** — Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
12. **Клепиков Н.П.** — ЖЭТФ, 1954, т. 26, с.19.
13. **Гинзбург В.Л., Жарков Г.Ф.** — ЖЭТФ, 1965, т. 20, с.1525.
14. **Жарков Г.Ф.** — Ядерная физика, 1965, т.1, с.173.
15. **Skarzhinsky V.D., Harari D., Jasper U.** — Phys.Rev. D, 1994, v. 49, p.755.
16. **Audretsch J., Jasper U., Skarzhinsky V.D.** — Phys.Rev. D, 1994, v. 49, p.6576.
17. **Hagen C.R.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.64, p.503.
18. **Hagen C.R.** — Int. J. Mod. Phys. A, 1991, v.6, p.3119.
19. **Gerbert Ph.S.** — Phys. Rev. D., 1989, v.40, p.1346.
20. **Audretsch J., Jasper U., Skarzhinsky V.D.** — J. Phys. A, 1995, v. 28, p.2359.
21. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** — Таблицы интегралов. М.: Физматгиз, 1963.
22. **Sokolov A.A., Ternov I.M.** — Synchrotron radiation. Akademie-Verlag, Berlin, 1968.
23. **Schwinger J.** — Phys.Rev., 1951, v.82, p.664.
24. **Ритус В.И.** — Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем. В кн.: Труды ФИАН СССР, 1963, т.111, с.5.
25. **Wu T.T., Yang C.N.** — Phys. Rev. D, 1975, v.12, p.3864.